Х. Латипов, Ш. Тожиев, Р. Рустамов

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

Х. Р. ЛАТИПОВ, Ш. И. ТОЖИЕВ, Р. РУСТАМОВ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий техника ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1995

Тақризчилар: *А. Ҳамидов* — ТошДУ профессори, физика-математика фанлари доктори, *Н. Абдуллаев* — ТошДУ доценти, физика-математика фанлари номзоди, *Э. Солиев* — ТошДТУ доценти, физика-математика фанлари номзоди

Махсус муҳаррир — *У. Ф. Носиров*, ТошДТУ профессори, физика-математика фанлари доктори

Муҳаррир — *Х. Алимов*

ISBN 5-640-01785-6

$$\text{А}\ \frac{1602050000-118}{\text{М351 (04) 95}}\ 95$$

СЎЗ БОШИ

Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра курсидан ёзилган мазкур қўлланма олий техника ўқув юртларида кундузги, кечки ва сиртдан таълим олаётган биринчи босқич талабаларига мўжалланган. Қўлланма олий техника ўқув юртлари учун тасдиқланган «Олий математика» дастури асосида ёзилган.

Қўлланманинг асосий вазифаси аналитик геометрия ва чизиқли алгебра курсига доир назарий материални баён этиш, мавжуд темаларга доир мисол ва масалаларни ечиш усулларини кўрсатишдан иборат.

Математикани техника ихтисосликларига мослаб ўқитиш хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда аналитик геометрия ва чизиқли алгебра курсининг физика, механика, радиотехника, электротехника ва бошқа фанларга татбиқига алоҳида эътибор берилди ва уларга доир мисол ва масалаларни ечиш усуллари кўрсатилди.

Шунингдек, бу курсни яхши ўзлаштирган ва янада чуқурроқ ўзлаштириш истаги бўлган талабалар учун 9- бобда аналитик геометрия ва чизиқли алгебра курсига доир масалалар ечилишлари билан ҳамда мустақил ечиш учун мисол ва масалалар келтирилди.

Қўлланма 9 та боб ва юқори тартибли ажойиб эгри чизиқларга бағишланган иловадан иборат. Қўлланмага муаллифларнинг Абу Райҳон Беруний номли Тошкент Давлат техника университетида кўп йиллар давомида ўқиган маърузалари ва амалий машғулот материаллари асос қилиб олинди. Бундан ташқари, мавжуд ўзбек ва рус тилларидаги адабиётлардан ҳам кенг фойдаланилди.

Муаллифлар китоб қўлёзмасини диққат билан ўқиб чиқиб, бир қатор фойдали маслаҳатлар ва тузатишлар берганликлари учун ТошДУ профессори А. Ҳамидов, доцент Н. Абдуллаев, ТошДТУ доценти Э. Солиев, доцент С. Эргашевга, шунингдек 1- олий математика кафедраси ўқитувчиларига ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

Қўлланма ҳақида билдирилган фикр ва мулоҳазаларни миннатдорчилик билан қабул қиламиз.

Муаллифлар

I БОБ

ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

Бу бобда иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар назариясига оид асосий маълумотлар ва бу детерминантлар билан боглиқ икки ва уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаларини ечиш масалалари қисқача баён қилинади. n-тартибли детерминантларнинг умумий назарияси ва чизиқли тенгламалар системасини Крамер ва Гаусс усуллари билан ечиш кўрсатилади.

1-§. Иккинчи тартибли детерминантлар

Берилган тўртта сондан иборат қуйидаги

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

жадвал 2-тартибли квадрат **м а т р и ц а** деб аталади. Бундай матрица иккита сатр ва иккита устунга эга. Бу матрицани тузувчи сонлар иккита индексли, масалан $a_{ij}(i, j=1,2)$ харф билан белгиланади. Бу ерда i индекс мазкур сон турган матрицанинг сатр номерини кўрсатса, j индекс эса устун номерини билдиради. a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} сонлар матрицанинг элементлари деб аталади. (1.1) матрицага мос иккинчи тартибли **д е т е р м и н а н т** деб $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ сонга айтилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2}$$

ёки

$$\Delta = \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Бу детерминант иккита a_{11}, a_{12} ва a_{21}, a_{22} сатр элементлари ва иккита a_{11}, a_{21} ва a_{12}, a_{22} устун элементларидан иборат. a_{11}, a_{22} элементларга бош диагонал элементлари, a_{12}, a_{21} лар эса ёрдамчи диагонал элементлари дейилади.

Демак, иккинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш учун унинг бош диагонали элементлари кўпайтмасидан ёрдамчи диагонали элементлари кўпайтмасини айириш керак экан.

1-мисол. Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин:

$$1.\ \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},\quad 2.\ \begin{vmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix},\quad 3.\ \begin{vmatrix} \operatorname{tg} 3\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{ctg} 3\alpha \end{vmatrix}$$

Ечиш. (1.2) формулага кўра ҳисоблаймиз:

$$1.\ \Delta = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-5)\cdot(-1) - 2\cdot 3 = 5 - 6 = -1.$$

$$2.\ \Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = \cos 2x\cdot\cos 2x + \sin 2x\cdot\sin 2x = \\ = \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1.$$

$$3.\ \Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} 3\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{ctg} 3\alpha \end{vmatrix} = \operatorname{tg} 3\alpha\cdot\operatorname{ctg} 3\alpha - 1\cdot(-1) = \\ = 1 + 1 = 2.$$

Иккинчи тартибли детерминантни икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасининг умумий ечимини топиш натижасида келиб чиқишини кўрсатайлик. Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases} \tag{1.3}$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин. (1.3) системанинг тенгламаларидан биринчисининг ҳар иккала қисмини a_{22} га, иккинчисини эса a_{12} га кўпайтириб, ҳосил бўлган тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = c_1a_{22} - c_2a_{12}. \tag{1.4}$$

Шунга ўхшаш, биринчи тенгламани $-a_{21}$ га, иккинчи тенгламани эса a_{11} га кўпайтириб, уларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = c_2a_{11} - c_1a_{21} \tag{1.5}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. (1.4) ва (1.5) тенгликларга (1.2) ни татбиқ этамиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_x = c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_y = c_2a_{11} - c_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.$$

Δ_x, Δ_y — ёрдамчи детерминантлар дейилади.

Натижада (1.3) системага эквивалент бўлган ушбу содда чизиқли тенгламалар системасини олишимиз мумкин:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x, \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \tag{1.6}$$

(1.3) ёки (1.6) тенгламалар системаси учун қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин.

1. Агар $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ бўлса, у ҳолда (1.3) система ягона ечимга эга бўлиб, у қуйидагича топилади:

$$x = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad y = \frac{c_2a_{11} - c_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

ёки

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.7}$$

(1.7) формула Крамер формулалари дейилади. (Крамер Г. 31.07.1704—4.01.1752, швейцариялик математик.)

Геометрик нуқтаи назардан агар (1.3) система ягона (1.7) ечимга эга бўлса, у ҳолда (1.3) система тенгламалари текисликдаги иккита тўғри чизиқ тенгламалари бўлиб, улар $\left(x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ нуқтада ўзаро кесишишини билдиради.

2. Агар $\Delta=0$ бўлиб Δ_x ёки Δ_y ёрдамчи детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (1.3) система ечимга эга эмас ёки берилган система тенгламалари биргаликда эмас дейилади.

Буни қуйидагича кўрсатамиз. $\Delta=0$ дан $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ келиб чиқади. Бундан $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}=k$ десак (k — бирор ҳақиқий сон), ундан $a_{11}=ka_{12}$ ва $a_{21}=ka_{22}$ ларни ҳосил қиламиз. Агар уларни (1.3) системага қўйсак:

$$\begin{cases} k(a_{21}x+a_{22}y)=c_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=c_2 \end{cases}$$

ни ҳосил қиламиз. $k\neq 0$ деб охирги системани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} a_{21}x+a_{22}y=\frac{c_1}{k}, \\ a_{21}x+a_{22}y=c_2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Бундан $\frac{c_1}{k}=c_2$ ёки $\frac{c_1}{k}\neq c_2$ бўлиши мумкин. Агар $c_1\neq kc_2$ бўлса, $c_1\neq c_2\cdot\frac{a_{11}}{a_{12}}$, яъни $\Delta_y\neq 0$ ёки $c_1\neq c_2\times\frac{a_{21}}{a_{22}}$, яъни $\Delta_x\neq 0$ бўлади. Бундан эса (1.3) тенгламалар системаси ечимга эга эмаслиги келиб чиқади. (1.3) даги ҳар бир тенглама $\Delta=0$ бўлганда (1.8) тенгламалар системасига келади ва у параллел ($c_1\neq kc_2$) тўғри чизиқларни ифодалайди.

3. Агар $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ бўлса, (1.3) системадаги биринчи тенгламанинг коэффициентлари иккинчи тенгламанинг коэффициентларига пропорционал бўлади ва (1.3) система чексиз кўп ечимга эга бўлади. $\Delta_x=\Delta_y=0$ бўлса, $c_1=kc_2$ бўлиб (1.8) система

$$\begin{cases} a_{21}x+a_{22}y=c_2, \\ a_{21}x+a_{22}y=c_2 \end{cases}$$

кўринишга келади. Бу система устма-уст тушган икки тўғри чизиқни ифодалайди.

1- мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} 3x+2y=12, \\ x-2y=-4. \end{cases}$$

Ечиш. (1.7) формуладан фойдаланиб қуйидаги детерминантларни тузамиз ва уларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-6-2=-8,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=-24+8=-16,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-12-12=-24.$$

$\Delta=-8\neq0$ бўлгани учун система ягона ечимга эга. Крамер формуласига кўра:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-16}{-8}=2,$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-24}{-8}=3.$$

Демак, тўгри чизиқлар xOy текисликда (2;3) нуқтада ўзаро кесишар экан.

2 мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} 7x+\ \ 9y=17, \\ 14x+18y=13. \end{cases}$$

Ечиш. Қуйидаги детерминантларни тузамиз ва уларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 14 & 18 \end{vmatrix}=7\cdot18-9\cdot14=126-126=0;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ 13 & 18 \end{vmatrix}=189;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 14 & 13 \end{vmatrix}=-147;$$

$$\Delta=0;\ \Delta_x=189\neq0;\ \Delta_y=-147\neq0 \text{ ёки } \frac{7}{14}=\frac{9}{18}\neq\frac{17}{13}$$

бўлгани учун система ечимга эга эмас.

3- мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} 2x-\ \ 5y=3, \\ 8x-20y=12. \end{cases}$$

Ечиш. Бу система учун:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -20 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 12 & -20 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

ёки $\frac{2}{8} = \frac{-5}{-20} = \frac{3}{12}$ бўлгани учун система тенгламалари устма-уст тушувчи тўғри чизиқларни ифодалайди ва бундан система чексиз кўп ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

2-§. Учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари

Ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ ёки } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \qquad (1.9)$$

кўринишдаги сонли жадвалга учинчи тартибли квадрат матрица дейилади. (1.9) матрицанинг учинчи тартибли детерминанти деб,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

каби белгиланувчи ва сон қиймати иккинчи тартибли детерминант орқали қуйидаги:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - $$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.10)$$

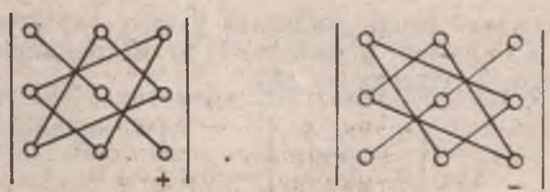
тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади. (1.10) формуладаги иккинчи тартибли детерминантлар ўрнига (1.2) формуладан фойдаланиб уларнинг қийматларини қўйсак, у ҳолда учинчи тартибли детерминант учун ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11}) \qquad (1.11)$$

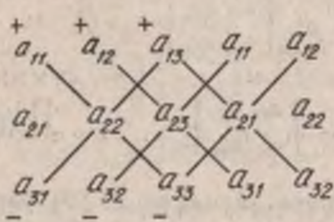
ҳисоблаш формуласини ҳосил қиламиз.

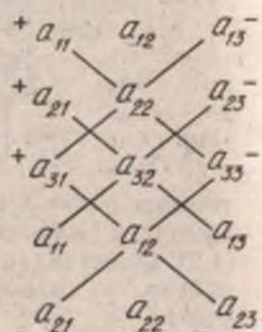
Қулайлик учун детерминантнинг элементларини иккита индексли битта a_{ij} (бунда i, j $=1,2,3$) ҳарф билан белгилаш қабул қилинган бўлиб, биринчи индекс ҳар доим элемент жойлашган сатр номерини, иккинчи индекс эса устун номерини кўрсатади. Масалан, a_{31} ёзув бу ҳад учинчи сатрнинг биринчи устуни элементи эканини билдиради. a_{11}, a_{22}, a_{33} элементлар бош диагонал элементлари, a_{13}, a_{22}, a_{31} элементлар эса ёрдамчи диагонал элементлари дейилади.

(1.11) ҳисоблаш формуласининг ўнг томонидаги қўшилувчиларнинг ишораларини ушбу схемадан фойдаланиб аниқлаш қулай (буни учбурчак усули ҳам дейилади):



Учинчи тартибли детерминантни Саррус қоидаси (элементларни кўчириш усули ҳам дейилади) деб аталувчи усул билан ҳам ҳисоблаш мумкин. Бу усулни схема кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин:





1-мисол. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{vmatrix} b & 1 & b \\ -1 & b & 1 \\ b & -1 & b \end{vmatrix}.$$

Ечиш. Берилган детерминантларни юқоридаги схема ва (1.11) формулага кўра ҳисоблаймиз.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} =(2\cdot 0\cdot 2+1\cdot(-1)\cdot 4+1\cdot 3\cdot 5)- \\ -(30\cdot 4+2\cdot 5-(-1)+1\cdot 1\cdot 2)= \\ =-4+15-(-10+2)=11+8=19. \end{matrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} b & 1 & b \\ -1 & b & 1 \\ b & -1 & b \end{vmatrix} \begin{matrix} =(b\cdot b\cdot b+b+b)- \\ (b\cdot b\cdot b-b-b)= \\ =b^3+b+b-b^3+b+b=4b. \end{matrix}$$

Учинчи тартибли детерминантни ҳисоблашнинг (1.11) формуласидаги алгебраик йиғиндиларнинг ҳар бир ҳади учта элемент кўпайтмасидан иборат бўлиб, бу кўпайтувчиларнинг ҳар бири детерминантнинг турли устуң ва турли сатридан олингандир. Масалан, $a_{12}a_{21}a_{33}$ кўпайтманинг биринчи коэффициенти a_{12} 1-устуннинг биринчи сатрига жойлашган сон бўлса, қолган икки коэффициент 2-устун ва 1-сатрдан бошқа ерда жойлашган сони (a_{21} 2-сатр, 1-устун; a_{33} 3-сатр, 3-устун) бўлади. Шундай қилиб, детерминантни ҳисоблаш учун берилган (1.11) формуладан унинг элементларидан бири (масалан, a_{11}) қатнашган кўпайтмалар йиғиндисини олсак, улар 2 та бўлиб, у $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$ кўринишда ёзилади. Ундан a_{11} ни қавсдан чиқариб ёзамиз: $a_{11}(a_{22}a_{33}- \quad a_{32}a_{23})$. Бу ерда қавс ичидаги айирма a_{11} элементнинг тўлдирувчи минори деб аталади ва

$$M_{11}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

кўринишда ёзилади. Детерминантнинг исталган элементларининг тўлдирувчи минорларини худди шундай ёзиш мумкин. Масалан, детерминантнинг a_{22} элементининг тўлдирувчи минори ушбу кўринишда ёзилади:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Демак, бирор элементнинг минори деб шу элемент турган сатр ва устунни ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантга айтилади.

Бирор элементнинг алгебраик тўлдирувчиси деб унинг мусбат ёки манфий ишора билан олинган тўлдирувчи минорига айтилади ва у A_{ij} орқали белгиланади:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.12)$$

Бу формуладаги M_{ij} минорни аниқлаш усулини келтирамиз. Бунинг учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантни ёзамиз. M_{ij} минорни аниқлаш учун детерминантнинг i- сатридаги ва j- устунидаги барча элементларни ўчиришдан қолган элементларини ёзсак, иккинчи тартибли детерминант ҳосил бўлади ва у биз излаётган M_{ij} минорни беради. Масалан, a_{12} элементнинг минорини топиш учун Δ детерминантнинг 1- сатридаги a_{11}, a_{12}, a_{13} элементлари ҳамда 2- устундаги a_{12}, a_{22}, a_{32} элементларини ўчирсак, ўчирилмай қолган элементлардан ташкил топган M_{12} минорни ҳосил қиламиз:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бошқа элемент минорлари ҳам шундай топилади. Масалан, M_{31} ни топайлик (Δ детерминантда 1- устун ва 3- сатрни ўчирамиз):

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

a_{13} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси (1.12) формулага кўра қуйидагича ҳисобланади:

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

a_{32} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси эса қуйидаги кўринишга эга:

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Бундан фойдаланиб ихтиёрий тартибли детерминантни унинг элементларини мос алгебраик тўлдирувчиларга кўпайтмаларининг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин.

Масалан, (1.10) детерминантнинг сатр элементлари учун

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3},$$

устун элементлари учун

$$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

тенгликларни ёзиш мумкин (бунда i, $j=1,2,3$).

Аммо, детерминантнинг бирор сатри (устуни) элементларини бошқа сатри (устуни) элементларининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.

Масалан, сатрлар учун: $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$, устунлар учун: $a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0$.

Булардан биринчисини текшириб кўрамиз:

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=-a_{11}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{12}(a_{11}a_{33}-$$
$$-a_{13}a_{31})-a_{13}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})=$$
$$=-a_{11}a_{12}a_{33}+a_{11}a_{13}a_{32}+a_{11}a_{12}a_{33}-$$
$$-a_{12}a_{13}a_{31}-a_{11}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{13}a_{31}=0.$$

2-мисол. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантни 1-устуни элементлари бўйича ёйиб ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ечиш.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$-2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-2+5)-2(4-5)+3(2-1)=3+2+3=8.$$

Энди детерминантларнинг асосий хоссаларини кўриб чиқамиз.

1-хосса. Агар детерминантнинг ҳамма устунларини унинг ҳамма сатрлар билан (ёки аксинча) ўринларини мос равишда алмаштирилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2-хосса. Агар детерминантнинг ихтиёрий иккита сатрининг (ёки иккита устуннинг) ўринлари алмаштирилса, детерминантнинг фақат ишораси ўзгаради:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3-хосса. Агар детерминантнинг иккита сатри (ёки иккита устуни) бир хил элементлардан иборат бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

4-хосса. Агар детерминантнинг бирор сатр (ёки устун) элементлари битта умумий кўпайтувчига эга бўлса, бу кўпайтувчини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5-хосса. Агар детерминантни бирор сатри (устуни) нинг ҳар бир элементи икки қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, берилган детерминантни икки детерминантнинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин. Бунда биринчи қўшилувчи детерминант элементлари берилган детерминант элементларидан иборат, иккинчи қўшилувчи детерминант элементлари эса фақат қўшилувчи сатр (устун) элементлари билан фарқ қилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+m_1a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+m_2a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+m_3a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & m_1a_{13} \\ a_{21} & m_2a_{23} \\ a_{31} & m_3a_{33} \end{vmatrix}.$$

6-хосса. Агар детерминантнинг бирор сатр (устунни) нинг барча элементлари нолга тенг бўлса, бундай детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

7-хосса. Агар детерминантнинг иккита сатри (ёки иккита устуни) нинг мос элементлари пропорционал бўлса, бу детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади. Масалан:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \\ 15 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \\ 5 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 3.0 = 0.$$

8-хосса. Детерминантнинг бирор сатр (устун) элементларига бошқа сатр (устун) нинг бир хил сонга кўпайтирилган мос элементларини қўшишдан ҳосил бўлган детерминантнинг қиймати дастлабки детерминант қийматига тенг бўлади. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

9-хосса. Детерминантнинг бирор сатри (устуни) элементларининг унинг бошқа сатри (устуни) элементлари алгебраик тўлдирувчилари билан кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг. Масалан:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0,$$
$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0.$$

Детерминантларнинг хоссаларини исботлашни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

3-§. Уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системалари

Уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3. \end{cases} \qquad (1.13)$$

Икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системасининг умумий ечимини топишда номаълумлар олдидаги коэффициентларни тенглаб биринчи тенгламадан иккинчисини айириш натижасида битта номаълумли тенглама ҳосил қилиниб ундан номаълумнинг қиймати топилган эди. Худди шу ишни (1.13) системага татбиқ этсак, натижада (1.13) системага эквивалент қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x_1} , \\ x_2 \cdot \Delta = \Delta_{x_2} ,; \\ x_3 \cdot \Delta = \Delta_{x_3} \end{cases} \qquad (A)$$

бунда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган учинчи тартибли Δ детерминант (1.13) системанинг детерминанти дейилади. $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ ва Δ_{x_3} детерминантлар ёрдамчи детерминантлар дейилади.

Агар (А) системада $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \qquad (1.14)$$

x_1, x_2, x_3 нинг (1.14) формулалар бўйича топилган қийматлари (1.13) системанинг ечимлари бўлишини бевосита текшириб кўриш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. (1.14) тенгликлар **Крамер формулалари** дейилади.

(1.14) формулаларда қуйидаги ҳоллар содир бўлиши мумкин.

1. $\Delta \neq 0$. Бу ҳолда (1.14) формулалардан система ягона ечимга эга экани келиб чиқади.

1- мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Ечиш. Бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8; \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -16; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24.$$

(1.14) формулалардан қуйидагиларни топамиз:

$$x_1=\frac{-8}{-8}=1;\ x_2=\frac{-16}{-8}=2;\ x_3=\frac{-24}{-8}=3.$$

Ж а в о б: (1;2;3)

2. $\Delta=0$ ва $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда (1.13) система ечимга эга эмас. Аниқлик учун $\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=0$ бўлиб, $\Delta_{x_3}\neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1.14) дан:

$$x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \Rightarrow \Delta\cdot x_3=\Delta_{x_3}.$$

Аммо, охирги тенгликнинг ўнг томони нолдан фарқли ($\Delta_{x_3}\neq 0$), чап томони эса нолга тенг, бунинг бўлиши мумкин эмас. Демак, ечимга эга эмас.

2- м и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+\ \ x_3=2, \\ \ \ x_1-5x_2+2x_3=3, \\ 4x_1+6x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ечимга эга эмас, чунки $\Delta=0$ (текшириб кўришни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз).

3. $\Delta=0$ ва $\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=\Delta_{x_3}=0$ бўлса, (1.3) система ёки ечимга эга эмас, ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

3- м и с о л. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \ \ x_1-\ \ x_2+2x_3=2, \\ 2x_1-2x_2+4x_3=4, \\ 3x_1-3x_2+6x_3=3. \end{cases}$$

Е ч и ш. Бу система учун

$$\Delta=0,\ \Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=\Delta_{x_3}=0.$$

Система ечимга эга эмас, чунки системадаги биринчи ва учинчи тенгламалар биргаликда бўла олмайдилар. Ҳақиқатан ҳам, биринчи тенгламани 3 га кўпайтириб, ундан учинчи тенгламани айирсак, мумкин бўлмаган 0=3 тенгликка эга бўламиз.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ x_3= \ \ 3, \\ 4x_1+6x_2-2x_3= \ \ 6, \\ 3x_1-\ x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

система учун $\Delta=\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}=\Delta_{x_3}=0$. Системадаги иккинчи тенглама биринчи тенгламани 2 га кўпайтиришдан ҳосил бўлгани учун берилган система ушбу

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ x_3= \ \ 3, \\ 3x_1-\ x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

системага тенг кучли ва чексиз кўп ечимлар тўпламига эга. x_3 га ихтиёрий қийматлар бериб x_1 ва x_2 нинг унга мос қийматларини топамиз. Масалан, $x_3=1$ да

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2= \ \ 4, \\ 3x_1-\ x_2=-3 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз, уни ечиб $x_1=-\frac{5}{11}$, $x_2=\frac{18}{11}$ ни топамиз. $x_1=0$ да $x_2=1$, $x_3=0$ га эга бўламиз.

4-§. n-тартибли детерминантлар ва уларни ҳисоблаш

Ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

n-тартибли квадрат матрица берилган бўлсин (унда сатр ва устунлар сони тенг бўлиб, уларнинг ҳар биридаги сонлар n та бўлсин). Юқорида киритилгани каби (иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар) бу ерда ҳам A матрицага мос келувчи n-тартибли детерминантни киритамиз:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.16)$$

Бу детерминантда $n=2$ ва $n=3$ бўлган ҳоллар 1—2- §§ ларда кўрилди. Уни ҳисоблаш, амалий татбиқига мисоллар келтирилди. $n=1$ бўлганда эса (1.16) детерминант фақат битта элементдан иборат бўлган детерминантдан иборат бўлади. Унинг қиймати шу детерминантнинг элементига тенг бўлади.

Агар a_{ij} (бунда $i, j=\overline{1,n}$) $\Delta=|A|$ детерминантнинг i- сатр ва j- устунида жойлашган элементи бўлса, M_{ij} билан бу элементнинг тўлдирувчи минорини, яъни (1.16) детерминантда i- сатр ва j- устунни ўчиришдан ҳосил бўлган $(n-1)$ тартибли детерминантни белгилаймиз:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,j-1} a_{1,j+1} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i-1,1} \dots a_{i-1,j-1} a_{i-1,j+1} \dots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} \dots a_{i+1,j-1} a_{i+1,j+1} \dots a_{i+1,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{n,j-1} a_{n,j+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси A_{ij} деб

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ифодани белгилаймиз.

n- тартибли детерминантларни ҳисоблаш формуласи йўқ. Аммо уни сатр (устун) элементлари бўйича ёйиб қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (1.17)$$

Шундай қилиб, n- тартибли детерминант унинг биринчи сатрининг барча элементларини уларнинг мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг. (1.17) ёйилмадаги алгебраик тўлдирувчиларни мусбат ёки манфий ишорали мос минорлар билан алмаштирилса, n- тартибли детерминантни ҳисоблаш

$(n-1)$- тартибли бир неча детерминантни ҳисоблашга келтирилади.

(1.17) даги ҳар бир $(n-1)$- тартибли детерминантларни ихтиёрий сатр ёки устун элементларининг уларнинг мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндиси кўринишида ёзамиз. Натижада $(n-1)$- тартибли детерминантни ҳисоблаш $(n-2)$- тартибли бир неча детерминантни ҳисоблашга келтирилади. Бу жараён учинчи ёки иккинчи тартибли детерминантлар ҳосил бўлгунча кетма-кет бажарилади.

Энди детерминантларни ҳисоблашни осонлаштирадиган бир нечта усулни кўрсатамиз. Энг содда ва кўп қўлланиладиган усуллардан бири детерминантларни берилган устуни ёки сатри элементлари бўйича бир марта ёки кўп марта ёйишдир. Бунда ноль элементи кўп бўлган сатр ёки устунни танлаш мақсадга мувофиқдир. Кўпинча, детерминантни бирор сатри (ёки устуни) элементлари бўйича ёйишдан олдин, шу сатр (устун) да кўпроқ ноллар ҳосил қилиш учун олдиндан бирор сатрга (ёки устунга) бошқа сатр (устунлар) нинг чизиқли комбинациялари қўшилади. Детерминантнинг хоссаларидан ҳам фойдаланилади. Буни мисолларда кўрсатамиз.

1- мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ечиш. Берилган детерминантнинг учинчи сатрини -1 га кўпайтирамиз ва уни биринчи сатрга қўшиб, натижани биринчи сатрга ёзамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни биринчи сатр элементлари бўйича ёямиз:

$$\Delta=-3\cdot\begin{vmatrix}3&0&6\\-2&1&4\\1&-2&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&0&6\\2&1&4\\3&-2&-1\end{vmatrix}+$$

$$+0.\begin{vmatrix}1&3&6\\2&-3&4\\3&1&-1\end{vmatrix}-$$

$$-0.\begin{vmatrix}1&3&0\\2&-2&1\\3&1&-2\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}3&0&6\\-2&1&4\\1&-2&-1\end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган учинчи тартибли детерминантнинг биринчи устунини -2 га кўпайтириб, учинчи устунга қўшамиз, сўнгра биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta=-3.\begin{vmatrix}3&0&0\\-2&1&8\\1&-2&-3\end{vmatrix}=$$

$$=-3.3\begin{vmatrix}1&8\\-2&-3\end{vmatrix}=-9(-3+16)=-117.$$

Қуйидаги мисол детерминантни иккита детерминантга ажратиб, сўнгра ҳисоблаш усулини намойиш этади.

2- мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&6\end{vmatrix}.$$

Ечиш. Берилган детерминантни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+2&1&1&1\\1+0&4&1&1\\1+0&1&5&1\\1+0&1&1&6\end{vmatrix}.$$

Детерминантларнинг 5-хоссаси ва Δ нинг биринчи устуни бўйича чизиқлилигидан фойдаланамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad (A)$$

Ҳосил бўлган (A) тенгликнинг ўнг қисмидаги детерминантларнинг биринчисининг бош диагонали остидаги элементлар бирга тенг, шунинг учун биринчи сатрни барча қолган сатрлардан айрилса, биринчи детерминант қуйидаги кўринишни олади:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Бизга маълумки, бундай детерминантнинг қиймати бош диагоналда турган элементлар кўпайтмасига тенг. Демак,

$$\Delta_1 = 1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot = 60.$$

(A) тенгликнинг ўнг қисмидаги иккинчи детерминантни биринчи устун бўйича ёямиз. Натижада, қуйидаги кўринишдаги учинчи тартибли детерминантга эга бўламиз:

$$\Delta_2 = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2.107 = 214.$$

Шундай қилиб, $\Delta = 60 + 214 = 274$.

3-мисол. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ечиш. Бу детерминантни унинг биринчи устун элементлари бўйича ёйиб ҳисоблаймиз:

$$\Delta=4\cdot\begin{vmatrix}0 & -2 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 4 & -3 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot\left\{0\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{vmatrix}\right\}-$$

$$-3\cdot\left\{2\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}1-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right\}-$$

$$-5\cdot\left\{2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -3 & 3\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=4\,[0\cdot(-3-0)-4\,(-2-0)+3\,(-6+6)]-3\,[(2-3)-$$
$$-4\cdot1+3\cdot3)]-3\,[2\,(-3)-(4-9)]-5\,[(2(-6+6)-$$
$$-0+4\cdot2]=32+3-40=35-40=-.5$$

Демак, $\Delta=-5$.

5-§. n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системалари

n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=c_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=c_n.\end{cases}\qquad(1.18)$$

Бу ерда a_{ik} сонларга системанинг коэффициентлари, c_i — озод ҳадлар, x_1, $x_2,\ldots,x_n$ — номаълумлар дейилади.

Таъриф. Агар (1.18) системанинг ҳар бир тенгламасидаги x_1, $x_2,\ldots x_n$ номаълумлар ўрнига мос равишда

$\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ қийматлар қўйилганда системанинг барча тенгламалари айниятга айланса, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сонлар (1.18) системанинг **ечими** дейилади.

Системанинг ечими мавжуд бўлиш-бўлмаслиги қуйидаги детерминантга боғлиқдир:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.19)$$

(1.19) детерминант (1.18) системанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган. Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, система ягона ечимга эга бўлади ва бу ечим

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \; (i = \overline{1, n})$$

формулалар ёрдамида топилади.

Бунда Δ_{x_1} детерминант Δ детерминантнинг биринчи устун элементларини (1.18) тенгламалар системасининг озод ҳадлари билан алмаштиришдан ҳосил қилинади; Δ_{x_2} эса Δ детерминантнинг иккинчи устун элементларини озод ҳадлар билин алмаштиришдан ҳосил бўлади; $\Delta_{x_3} ... \Delta_{x_n}$ лар ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилинади.

(1.18) тенгламалар системасини ечишнинг бундай усули Крамер усули дейилади. Демак, (1.18) системани ечиш учун $(n+1)$ та детерминант тузиш ва ҳисоблаш керак бўлади.

6-§. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш

Биз юқорида тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлган чизиқли тенгламалар системаси билан танишдик ва бундай системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, у ҳолда система ягона ечимга эга бўлишини кўрдик.

Энди ихтиёрий, яъни тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлмаган чизиқли тенгламалар системасини текширамиз. Бундай система учун ечим ягона бўлмаслиги ёки умуман ечим мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Агар чизиқли тенгламалар системаси бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса, система биргаликда бўлмаган система дейилади. Агар чизиқли тенгламалар системаси ечимга эга бўлса, бундай система биргаликда деб ҳисобланади.

Коэффициентлари сонлардан иборат бўлган тенгламалар системаси ечимларини топиш учун қулай бўлган номаълумларни кетма-кет йўқотиш (чиқариш) усулини, яъни Гаусс усулини кўрсатамиз.

Қуйидаги ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=c_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=c_m. \end{cases} \qquad (1.20)$$

(1.20) да $a_{11}\neq 0$ деб фараз қилайлик. Дастлаб биринчи тенгламадан ташқари барча тенгламалардан x_1 ни йўқотиб, (1.20) системани ўзгартирамиз. Бунинг учун биринчи тенгламанинг ҳар иккала томонини $a_{11}\neq 0$ га бўлиб чиқамиз. Натижада (1.20) системага эквивалент бўлган янги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=c_1/a_{11}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=c_m. \end{cases} \qquad (1.21)$$

Энди (1.21) системанинг биринчи тенгламасини a_{21} га кўпайтирамиз ва уни иккинчи тенгламадан айирамиз. Сўнгра биринчи тенгламани a_{31} га кўпайтирамиз ва учинчи тенгламадан айирамиз ва ҳоказо. Натижада қуйидаги, яна (1.20) системага тенг кучли ушбу янги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1+a'_{12}x_2+\ldots+a'_{1k}x_k+\ldots+a'_{1n}x_n=c'_1, \\ a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2k}x_k+\ldots+a'_{2n}x_n=c'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{i2}x_2+\ldots+a'_{ik}x_k+\ldots+a'_{in}x_n=c'_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2+\ldots+a'_{mk}x_k+\ldots+a'_{mn}x_n=c'_m, \end{cases} \qquad (1.22)$$

бунда

$$a'_{1k}=\frac{a_{1k}}{a_{11}};\ a'_{ik}=a_{ik}-\frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1}\left(\begin{array}{l} i=2,3,\ldots,m, \\ k=2,3,\ldots,n \end{array}\right);$$

$$c'_1=\frac{c_1}{a_{11}};\ c_i^1=c_i-\frac{c_1}{a_{11}}a_{i1}\ (i=2,3,\ldots,m).$$

Энди (1.22) системанинг иккинчи тенгламасини a'_{22} коэффициентга бўламиз ва ҳосил бўлган системанинг иккинчи тенгламасини кетма-кет $a'_{32},\ldots,a'_{m2}$ коэффициентларга кўпайтириб учинчи тенгламадан бошлаб навбати билан айирамиз. Натижада (1.22) га тенг кучли система ҳосил бўлади.

Агар бу жараённи давом эттира борсак системанинг чап томонидаги барча коэффициентлари нолга тенг, аммо озод ҳади эса нолдан фарқли тенгламани ўз ичига олувчи системага эга бўламиз. Бундай система биргаликда бўлмаган система бўлади.

Агар (1.20) система биргаликда бўлса, у ҳолда натижада қуйидаги

$$\begin{cases} x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n=B_1, \\ x_2+\ldots+b_{2k}x_k+\ldots+b_{2n}x_n=B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p+\ldots+b_{pn}x_n=B_p \end{cases} \tag{1.23}$$

системага (бунда $p<n$) ёки

$$\begin{cases} x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1k}x_k+\ldots+b_{1n}x_n=B_1, \\ x_2+\ldots+b_{2k}x_k+\ldots+b_{2n}x_n=B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k+\ldots+b_{kn}x_k=B_k, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n=B_n \end{cases} \tag{1.24}$$

системага эга бўламиз. (1.23) система погонали система, (1.24) система эса учбурчак система деб аталади.

(1.24) система учбурчак бўлган ҳолда сўнгги тенгламадан x_n ни топамиз, сўнгра x_n нинг қийматини олдинги тенгламага қўйиб x_{n-1} ни топамиз ва ҳоказо.

Демак, агар (1.20) тенгламалар системаси бир қатор элементар алмаштиришларни бажаргандан сўнг (1.24) учбурчак системага келтирилса, у ҳолда (1.20) системанинг биргаликда ва у ягона ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

Агар (1.20) система (1.23) поғонали системага келтирилса, у ҳолда (1.20) система ечимга эга бўлмайди ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади.

(1.23) тенгламалар системасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1p}x_p = B_1 - b_{1p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{1n}x_n, \\ \qquad x_2 + \ldots + b_{2p}x_p = B_2 - b_{2p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{2n}x_n, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_p = B_p - b_{p,p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{pn}x_n. \end{cases}$$

Бу системадаги $x_{p+1},\ldots, x_n$ номаълумларга ихтиёрий $\alpha_{p+1},\ldots, \alpha_n$ қийматлар бериб, учбурчак системани ҳосил қиламиз. Ундан эса қолган барча $x_p, x_{p-1},\ldots, x_1$ номаълумларни кетма-кет топамиз. $\alpha_{p+1},\ldots, \alpha_n$ сонлар турли қийматларни қабул қилишлигидан (1.20) система чексиз кўп ечимлар тўпламига эга эканлиги келиб чиқади.

1-мисол. Қуйидаги системани Гаусс усул билан ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламани кетма-кет 1,3,2 сонларга кўпайтириб, сўнгра иккинчи, учинчи ва тўртинчи тенгламалардан биринчи тенгламани айирсак,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2, \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2, \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2 \end{cases}$$

системага эга бўламиз.

Энди иккинчи тенгламани учинчи ва тўртинчи тенгламаларга қўшиб, натижада қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-\ \ 3x_3+\ \ 5x_4= & 1, \\ \qquad x_2-10x_3+17x_4= & -2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0= & 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0= & 0. \end{cases}$$

Охирги иккита тенглама

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=0$$

кўринишдаги тенглама бўлиб, у номаълумнинг ҳар қандай қийматида ҳам ўринли бўлгани учун уни ташлаб юборамиз.

Иккинчи тенгламани қаноатлантирадиган номаълумнинг қийматини топиш учун x_3 ва x_4 ларги ихтиёрий қийматларни берамиз. Масалан, $x_3=\alpha$, $x_4=\beta$ бўлсин, у ҳолда $x_2=10\alpha-17\beta-2$ бўлади. Бу x_2 x_3, x_4 ларнинг қийматларини биринчи тенгламага қўйиб $x_1=-17\alpha+29\beta+5$ ни топамиз. Системанинг ечими

$$x_1=-17\alpha+29\beta+5;$$
$$x_2=10\alpha-17\beta-2;\ x_3=\alpha;\ x_4=\beta$$

бўлиб α ва β нинг ихтиёрий қийматларида берилган системанинг ҳамма ечимларини беради.

2-мисол. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг:

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+\ \ x_3=1, \\ 2x_1-\ \ x_2+2x_3=6. \end{cases}$$

Ечиш. Биринчи тенгламанинг барча ҳадларини 2 га кўпайтириб, ундан иккинчи ва учинчи тенгламаларни айирамиз. Натижада қуйидаги кўринишдаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-3x_3=7, \\ \quad -x_2-7x_3=13, \\ 3x_2-8x_3=8. \end{cases}$$

Иккинчи ва учинчи тенгламалар фақат x_2 ва x_3 номаълумларга эга. Иккинчи тенгламанинг ҳадларини 3 га кўпайтириб, учинчи тенгламага қўшамиз. Натижада қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=7, \\ -x_2-7x_3=13, \\ \qquad -x_3=13. \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан: $x_3=-13$, буни иккинчи тенгламага қўйиб x_2 номаълумни топамиз:

$$-x_2-7\cdot(-13)=13,$$

$$x_2=78.$$

x_3 ва x_2 номаълумларнинг қийматларини биринчи тенгламага қўйиб x_1 номаълумни топамиз:

$$x_1+78-3\cdot(-13)=7,\ x_1=-110.$$

Жавоб: $(-110,\ 78,\ -13)$.

7-§. Уч номаълумли бир жинсли чизиқли учта тенглама системаси

Барча озод ҳадлари нолга тенг бўлган чизиқли тенгламалар системасига **бир жинсли** тенгламалар системаси дейилади ва у қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0. \end{cases} \tag{1.25}$$

(1.25) кўринишдаги ихтиёрий бир жинсли система $x_1=x_2=x_3=0$ тривиал ечимга, яъни нол ечимга эга бўлиши мумкин. Энди (1.25) система қандай шартлар бажарилганда нолга тенг бўлмаган ечимга эга бўлишини текширамиз.

1) агар $\Delta\neq0$ бўлса, (1.25) система фақат нол ёки тривиал ечимга, яъни $x_1=x_2=x_3=0$ ечимга эга бўлади;

2) агар $\Delta=0$ бўлса, (1.25) система нолдан фарқли чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Буни қуйидагича исбот қиламиз:

а) Δ детерминантнинг алгебраик тўлдирувчиларидан камида биттаси нолдан фарқли деб фараз қиламиз, масалан,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин. (1.25) системанинг дастлабки иккита тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3. \end{cases} \tag{1.26}$$

Бунда x_3 маълум сон деб x_1, x_2 ларни топамиз:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -a_{13}x_3 a_{12} \\ -a_{23}x_3 a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{13}x_3 \\ a_{21} - a_{23}x_3 \end{vmatrix}$$ ларни топамиз.

Булардан

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{A_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}x_3a_{12} \\ -a_{23}x_3a_{22} \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{31}}{A_{33}} x_3;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{A_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - a_{13}x_3 \\ a_{21} - a_{23}x_3 \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{32}}{A_{33}} x_3 \tag{1.27}$$

формулалар билан аниқланувчи ечимларга эга бўламиз. Агар $k = \frac{x_3}{A_{33}}$ белгилашни киритсак, (1.27) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$x_1 = kA_{31}, \ x_2 = kA_{32}, \ x_3 = kA_{33},$$

бунда k — ихтиёрий бутун сон. k исталган қийматларни қабул қилгани учун (1.26) система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

б) Δ детерминантнинг барча алгебраик тўлдирувчилари нолга тенг бўлса, (1.25) системанинг номаълумлав) $\begin{cases} 2x+\ y-\ z=0, \\ x+2y+\ z=0, \\ 2x-\ y+3z=0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-\ y-\ z=0, \\ x+4y+2z=0, \\ 3x+7y+3z=0. \end{cases}$

6. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усулидан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=7, \\ x_1-5x_2+\ x_3=13, \\ x_1+4x_2-3x_3=12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+9x_3=\ 28, \\ 7x_1+3x_2-6x_3=-1, \\ 7x_1+9x_2-9x_3=\ 5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x_1+\ 2x_2+3x_3=15, \\ 5x_1-\ 3x_2+2x_3=15, \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1+4x_2-2x_3=-6, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=\ 1, \\ x_1+2x_2-\ x_3=-3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=\ 5, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=-5, \\ 3x_1-2x_2+\ x_3=-6. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1-4x_2-\ x_3=-2, \\ -\ x_1+5x_2+\ x_3=\ 7, \\ 4x_1-3x_2-2x_3=\ 6. \end{cases}$

7. Детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -5 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a & b & b & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

II БОБ

МАТРИЦАЛАР АЛГЕБРАСИ

Бу бобда матрица ҳақида тушунча ва улар устидаги чизиқли амаллар, тескари матрицани топиш, чизиқли тенгламаларни матрицавий ёзуви ва уни ечиш усули, матрицанинг ранги ва матрицалар назариясининг татбиқига доир мисол ва масалалар кўрилади.

1-§. Матрица ҳақида тушунча

Детерминантлар ва чизиқли бир нечта номаълумли тенгламалар системаларини ўрганишда биз сонлардан тузилган қуйидаги жадвалларни қараган эдик:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Бу жадвалларга **м а т р и ц а** деб аталади. Матрицани ташкил этувчи a_{11}, a_{12},... сонлар матрицанинг элементлари дейилади.

Агар матрицанинг сатрлари сони устунлари сонига тенг бўлса, бундай матрица **к в а д р а т** матрица деб аталади. Сатрлари сони устунлари сонига тенг бўлмаган матрица **т ў г р и б у р ч а к л и** матрица деб аталади. Бундан ташқари матрица баъзан сонлар тўплами $(a_{11}a_{12}a_{13}a_{14})$ кўринишида ҳам берилиши мумкин. Бундай кўринишдаги матрица сатр-матрица, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ кўринишда бўлса, бундай матрица устун-матрица деб аталади.

Квадрат матрицанинг элементларидан тузилган детерминант бу матрицанинг детерминанти деб аталади.

Одатда матрицани A, B, C, ... ҳарфлар билан, унинг элементларини a_{11}, a_{12}, ... кичик ҳарфлар билан белгиланади. Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix},$$

$$E = (a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15}),$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

A ва B — квадрат матрица, C ва D — тўғри бурчакли матрица, P — устун-матрица, E — сатр-матрицалардир.

Бу матрицаларнинг ўлчами қуйидагича аниқланади: A 2×2 ўлчамли (икки сатрли ва икки устунли), B 3×3 ўлчамли квадрат матрицалар; C 3×4 ўлчамли (уч сатрли ва тўрт устунли) тўғри бурчакли, P 4×1 ўлчамли, E эса 1×5 ўлчамли матрицалардир.

Бу матрицаларнинг детерминанти эса қуйидагича ёзилади:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$|B| = \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Агар квадрат матрицанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, бундай матрица хосмас матрица деб аталади. Агар матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, бундай матрицага хос матрица деб аталади.

Масалан, $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ матрица хос матрицадир, чунки

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 2\cdot 9 = 18 - 18 = 0,$$

$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ матрица хосмас матрицадир, чунки

$|B| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7\cdot 5 - 4\cdot 3 = 35 - 12 = 23 \neq 0.$

Агар $m \times n$ ўлчамли A матрицанинг сатр ва устун элементларининг ўринларини алмаштирилса, ҳосил бўлган матрица A га нисбатан транспонирланган матрица дейилади ва A^T, A^* ёки A' билан белгиланади. Транспонирланган матрицанинг тартиби $n \times m$ ўлчамли бўлади.

A квадрат матрица бўлса, у ҳолда A ва A' матрицаларнинг тартиблари бир хил бўлади. Транспонирланган матрица учун қуйидаги хоссалар ўринли:

1. Икки марта транспонирланган матрица дастлабки матрицанинг ўзига тенг, яъни

$$A^{TT} = (A^T)^T = A.$$

2. Транспонирланган кўпайтма матрица учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$(AB)^T = A^T B^T.$$

Агар $A = A^T$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда A квадрат матрица симметрик матрица дейилади.

Масалан:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

симметрик матрица, чунки бош диагоналига нисбатан симметрик жойлашган элементлари жуфт-жуфти билан ўзаро тенг.

Агар квадрат матрицанинг ҳамма $i \neq j$ бўлган элементлари нолга тенг, $i = j$ элементлари эса нолдан фарқли бўлса, бундай матрица диагонал матрица дейилади. Масалан:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

матрица диагонал матрицадир.

Агар диагонал матрица A да $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}$ бўлса, A матрица скаляр матрица дейилади.

1. Матрицаларнинг тенглиги

Агар A ва B матрицаларнинг сатрлари ва устунлари сони бир хил ҳамда уларнинг мос элементлари тенг бўлса, бундай матрицалар тенг ($A=B$) матрицалар деб аталади. Масалан, агар

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ бўлиб, } a_{11}=b_{11},$$

$a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$ бўлса, у ҳолда $A=B$ дир.

2. Матрицаларни қўшиш.

Агар бир хил ўлчамли квадрат матрицалар

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

берилган бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси деб

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

матрицага айтилади. Тўғри бурчакли матрицаларнинг йиғиндиси ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

1-мисол.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & 1+5 \\ 0+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2-мисол.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-1 \\ 2+0 & 1+3 \\ -1+4 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Барча элементлари нолга тенг бўлган матрица нол матрица деб аталади ва (0) билан ёки 0 билан белгиланади.

3. Матрицани сонга кўпайтириш.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицанинг λ сонга кўпайтмаси деб

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

матрицага айтилади.

Учинчи тартибли квадрат матрицалар ва тўғри бурчакли матрицаларни ҳам сонга кўпайтириш худди шундай аниқланади.

Матрицани нолга кўпайтирилганда нол матрица ҳосил бўлади:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ O & O \end{pmatrix}.$$

4. Матрицаларни кўпайтириш

Ушбу матрицалар берилган бўлсин:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

A матрицанинг B матрицага кўпайтмаси деб элементлари қуйидагича тузилган $C = A \cdot B$ матрицага айтилади:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Агар учинчи тартибли

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган бўлса, у ҳолда $C=A\cdot B$ матрица қуйидагича тузилади:

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+ \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+ \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+ \end{pmatrix.}$$

$$\begin{matrix} +a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ +a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ +a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{matrix}\Bigg).$$

Демак, кўпайтма матрицанинг i-сатри, k-устуни кесишган жойда турадиган a_{ik} элементи биринчи A матрицанинг i-сатри ҳар бир мос элементлари жуфт кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг экан. Масалан, A матрица ва B матрицалар n-тартибли квадрат матрицалар бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бу матрицаларнинг кўпайтмаси C матрица ҳам n-тартибли квадрат матрица бўлади:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Кўпайтма C матрица $C=A\cdot B$ каби ёзилади ва унинг элементлари

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$$

формула билан ҳисобланади.

Тўғри бурчакли матрицалар учун кўпаювчи матрицанинг устунлари сони кўпайтувчи матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлган ҳолдагина кўпайтириш амалини бажариш мумкинлигини эслатиб ўтамиз.

Агар A матрица $(m\times n)$ ўлчамли, B матрица $(s\times l)$ ўлчамли бўлса, у ҳолда $C=AB(n\times s)$ ўлчамли матрица, $C'=B\cdot A$ эса $(l\times m)$ ўлчамли матрица бўлади.

$AB=BA$ тенглик ўринли бўлиши учун фақат $m=n$, яъни A ва B матрицалар квадрат матрица бўлиши керак.

Агар $AB=BA$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда A ва B матрицаларга ўрин алмашадиган (коммутатив) матрицалар дейилади.

3-мисол.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot1+1\cdot3+1\cdot2 & 2\cdot1+3\cdot3+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot1+2\cdot3+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

4-мисол

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot2+2\cdot1 \\ 3\cdot2+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Демак, иккита тўртбурчакли матрицани кўпайтириш натижасида кўпаювчи матрица нечта сатрга эга бўлса, шунча сатрга ва кўпайтувчи матрица нечта устунга эга бўлса, шунча устунга эга бўлган матрица ҳосил бўлади.

5-мисол.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган. $A\cdot B$ ва $B\cdot A$ матрицаларни топинг.

Ечиш.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot1+(-1)\cdot3 & 3\cdot1-1\cdot1 \\ -1\cdot1+2\cdot3 & -1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C' = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Бу мисолдан кўриниб турибдики, иккита матрицанинг кўпайтмаси ўрин алмаштириш қонунига бўйсунмайди, яъни

$$C \neq C', \; AB \neq BA.$$

Матрицаларни кўпайтириш ушбу

$$A(BC) = (AB)C$$

гуруҳлаш қонунига ва

$$(A + B) = AC + BC$$

тақсимот қонунига бўйсунишини текшириб кўриш мумкин. Буни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

Бош диагонал элементлари бирлардан ва қолган ҳамма элементлари ноллардан иборат:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишдаги n-тартибли квадрат матрица n-тартибли **бирлик матрица** дейилади. Бирлик матрицанинг детерминанти бирга тенг бўлади:

$$|E| = 1.$$

Бир хил тартибли A ва E квадрат матрицаларни ўзаро кўпайтирилганда яна A квадрат матрица ҳосил бўлади, яъни

$$AE = EA = A.$$

Агар A ва B бир хил тартибли квадрат матрицалар бўлиб, уларнинг детерминантлари $|A|$ ва $|B|$ бўлса,

$C=AB$ матрицанинг детерминанти кўпайтирилувчи матрицаларнинг детерминантлари кўпайтмасига тенглигини, яъни

$$|C|=|A|\cdot|B|$$

эканлигини кўрсатиш мумкин.

6- мисол. 5- мисолда

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ бўлса,}$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлиши кўрсатилган эди. Бу матрицаларнинг детерминантлари

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5, \quad |B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=-2, |C|=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-10.$$

Демак,

$$|A|\cdot|B|=|C|.$$

7- мисол. Агар

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

бўлса, у ҳолда

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2 & 1-1 \\ 2-2 & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлади.

Бу мисолдан кўриниб турибдики, иккита нолдан фарқли матрицанинг кўпайтмаси нол матрицага тенг бўлиб қолиши ҳам мумкин экан.

8- мисол. $f(x)=x^2-3x+5$ кўпҳад ва

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

квадрат матрица берилган. $f(A)$ матрицали кўпҳадни топинг.

Ечиш. Изланаётган $f(A)$ матрица қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$f(A)=A^2-3A+5=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2-§. Тескари матрица

1-таъриф. A матрица учун $A\cdot B=B\cdot A=E$ тенгликни қаноатлантирувчи B матрица A га тескари матрица дейилади ва $B=A^{-1}$ кўринишда белгиланади.

Теорема. A квадрат матрица тескари матрицага эга бўлиши учун A матрица хосмас матрица бўлиши, яъни унинг детерминанти нолдан фарқли бўлиши зарур ва кифоядир.

Исботи. Зарурийлиги. Фараз қилайлик, A матрица учун A^{-1} тескари матрица мавжуд бўлсин. A матрица хосмас матрица бўлишини, яъни $|A|\neq 0$ эканлигини кўрсатамиз. Агар $|A|=0$ бўлса, у ҳолда кўпайтманинг детерминанти учун:

$$|A\cdot A^{-1}|=|A|\cdot|A^{-1}|=0.$$

Аммо $A\cdot A^{-1}=E$ тенгликка асосан бунинг бўлиши мумкин эмас. Демак, $|A|\neq 0$.

Кифоялиги. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} \qquad (2.1.)$$

хосмас, яъни детерминанти нолдан фарқли бўлган ($|A| \neq 0$) матрица берилган бўлсин.

Бу ҳолда A^{-1} тескари матрица мавжудлигини кўрсатамиз. A^{-1} тескари матрица қуйидагича топилади:

1) A матрицадан унинг ҳар бир a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчисидан иборат матрицани $\frac{1}{|A|}$ га кўпайтириб, қуйидаги B матрицани тузамиз:

$$B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix};$$

2) B матрицанинг сатрлари ва устунларининг ўринларини алмаштириб, A^{-1} матрицани тузамиз:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

A^{-1} матрица A матрицага тескари матрица эканлигини кўрсатиш учун, уларни ўзаро кўпайтирамиз:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}.$$

Ҳосил бўлган (2.3) матрицанинг асосий диагоналида турган элементлари A матрицанинг $|A|$ детерминантидан иборат бўлиб, қолган элементлари эса нолга тенгдир.

Уни $\frac{1}{|A|}$ га кўпайтирилса, $A \cdot A^{-1}$ бирлик матрица эканлиги кўриниб турибди. Демак, (2.2) матрица (2.1) матрицага тескари матрица экан.

Тескари матрицани қуйидаги усул билан ҳам топиш мумкин. A матрицага тескари A^{-1} матрицани топиш учун, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (2.4)$$

(2.4) нинг чап томонида A матрица, ўнг томонида эса E бирлик матрица ёзилган. (2.4) даги матрицаларнинг иккаласига бир вақтда A матрицани бирлик E матрицага келтирадиган сатрлар бўйича элементар алмаштиришларни бажарамиз. (Бу элементар алмаштиришларни қуйида мисолда кўрсатамиз.) Натижада (2.4) матрица қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

(2.5) нинг ўнг томонидаги матрица A га тескари матрицани ифодалайди, яъни $A \cdot B = A \cdot A^{-1} = E$.

Мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани тузинг.

Ечиш. Бу матрицанинг детерминанти:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

$|A| \neq 0$ бўлгани учун A матрица хосмас матрицадир, шунинг учун унга тескари матрица мавжуддир.

Алгебраик тўлдирувчиларни ҳисоблаймиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-6,\ A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

B матрицани тузамиз:

$$B=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Бу матрицада сатрлар ва устунларнинг ўринларини алмаштириб, A матрицага тескари

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз.

Бу мисолни иккинчи усул билан ечиб кўрамиз, унинг учун қуйидаги матрицани тузамиз:

$$\left(\begin{matrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{matrix}\quad\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right).$$

A матрица ва E бирлик матрицанинг биринчи устунини -2 га кўпайтириб иккинчи устунга қўшсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Учинчи устунни — 3 га ва 4 га кўпайтириб, мос равишда биринчи ва иккинчи устунларга қўшамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 2 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Иккинчи устунни $\frac{2}{3}$ га ва $-\frac{2}{9}$ га кўпайтириб, мос равишда биринчи ва учинчи устунга қўшамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2 & 4/0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 & -2/9 \\ 0 & 9 & 0 & -1/3 & 4 & 1/9 \end{array}\right)$$

Иккинчи устунни 9 га бўлиб, иккинчи ва учинчи устунларни алмаштирамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/9 & 4/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 4/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

Натижада A га тескари

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & -2/9 & 4/9 \\ 2/3 & 1/9 & -2/9 \\ -1/3 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

матрицага эга бўламиз. Бир хил натижага эга бўлдик.

Тескари матрица қуйидаги хоссаларга эга.

1) Тескари матрицанинг детерминанти берилган матрица детерминантининг тескари қийматига тенг, яъни

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A};$$

2) A ва B квадрат матрицалар кўпайтмасининг тескари матрицаси учун

$$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

тенглик ўринли.

3) Транспонирланган тескари матрица берилган транспонирланган матрицанинг тескарисига тенг, яъни

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1};$$

4) Тескари матрицанинг тескариси берилган матрицанинг ўзига тенг, яъни

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

Буларнинг исботини ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

3-§. Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар кўринишида ифодалаш

Ушбу тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=c_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=c_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=c_3. \end{cases} \tag{2.6}$$

Бу системанинг номаълумлари олдидаги коэффициентлар, номаълумлар ва озод ҳадлардан тузилган қуйидаги матрицаларни қараймиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{pmatrix}, \; X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \end{pmatrix}, \; C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Равшанки,

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Берилган (2.6) системани матрицаларнинг тенглиги таърифидан фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

ёки, қисқача:

$$A \cdot X = C. \qquad (2.8)$$

(2.8) — чизиқли тенгламалар системасининг матрицали кўриниши дейилади.

(2.8) да X матрицани топиш учун унинг ҳар икки томонини чапдан A^{-1} матрицага кўпайтирамиз:

$$A^{-1}(A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = EX = X$$

бўлгани учун

$$X = A^{-1} \cdot C$$

ёки

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}c_1+a'_{12}c_2+a'_{13}c_3 \\ a'_{21}c_1+a'_{22}c_2+a'_{23}c_3 \\ a'_{31}c_1+a'_{32}c_2+a'_{33}c_3 \end{pmatrix}.$$

Бундан эса, икки матрицанинг тенглик шартига асосан,

$$\begin{aligned} x_1 &= a'_{11}c_1+a'_{12}c_2+a'_{13}c_3, \\ x_2 &= a'_{21}c_1+a'_{22}c_2+a'_{23}c_3, \\ x_3 &= a'_{31}c_1+a'_{32}c_2+a'_{33}c_3 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

(2.6) нинг ечимига эга бўламиз.

1-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ 5x_1+2x_2+4x_3=1, \\ 7x_1+3x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

тенгламалар системасини матрицавий кўринишда ёзинг ва унинг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг матрицаларини ёзамиз:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

У ҳолда системанинг матрицавий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A\cdot X=C,$$

A га тескари A^{-1} матрицани топамиз (A^{-1} ни топишни ўқувчига ҳавола қиламиз), у

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлгани сабабли $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot C$ ёки $X=A^{-1}\cdot C$ га эга бўламиз, бундан

$$X=A^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -8\cdot5+(-5)\cdot1+6\cdot4 \\ 18\cdot5+11\cdot1+(-13)\cdot4 \\ 5\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -21 \\ 49 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Демак, тенгламалар системасининг ечими:

$$x_1=-21,\ x_2=49,\ x_3=2.$$

4- §. Матрицанинг ранги

Ушбу $m\times n$ ўлчамли A матрица берилган бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

(2.10) матрицада ихтиёрий k та устун ва k та сатрни ажратамиз. Ажратилган сатрлар ва устунлар кесишган жойда турган элементлар k-тартибли квадрат матрица ҳосил қилади. Шу ҳосил қилинган k-тартибли квадрат матрицанинг детерминанти A матрицанинг k-тартибли минори деб аталади.

Масалан, учта сатр ва бешта устунга эга бўлган

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

матрица учун учинчи тартибли минорлардан бири

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

детерминант бўлиб, у матрицанинг биринчи, иккинчи, учинчи сатрларини ва биринчи, иккинчи, учинчи устунларини ажратишдан ҳосил бўлади. Иккинчи тартибли минорлардан бири, масалан, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ детерминант бўлади. Матрица элементларининг ўзларини биринчи тартибли минорлар деб қараш мумкин. Матрицанинг минорларидан баъзилари нолга тенг, баъзилари нолдан фарқли бўлиши мумкин.

Таъриф. Матрицанинг ранги деб унинг нолдан фарқли минорлари тартибларининг энг каттасига айтилади.

Агар матрицанинг ранги r га тенг бўлса, бунинг маъноси A матрицада ҳеч бўлмаганда битта нолдан фарқли r-тартибли минор борлигини, бироқ r дан катта тартибли ҳар қандай минор нолга тенглигини билдиради. A матрицанинг ранги $\operatorname{rang} A$ ёки $r(A)$ кўринишида белгиланади.

Ушбу матрицани қарайлик:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Унинг исталган тўртинчи тартибли минори нолга тенг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(битта сатрининг элементлари нолга тенг бўлган детерминант бўлгани учун). Учинчи тартибли минорларидан бири эса нолдан фарқли, масалан,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 40.$$

Демак, берилган матрицанинг ранги 3 га тенг, яъни $r(A)=3$. Матрицанинг рангини аниқлашда, одатда, кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Бу ишни осонлаштириш учун махсус усуллардан фойдаланилади. Бу усулларни баён қилишдан олдин матрицани элементар алмаштиришлар ҳақида тушунча киритамиз. Қуйидаги алмаштиришлар элементар алмаштиришлар ҳисобланади:

1) матрицани транспонирланганда унинг ранги ўзгармайди;

2) матрицада сатр (устун) ларнинг ўрнини алмаштириш унинг рангини ўзгартирмайди;

3) матрица сатри (устуни) нинг барча элементларини нолдан фарқли сонга кўпайтирилса, унинг ранги ўзгармайди;

4) матрицанинг бирор сатри (ёки устуни) ни ихтиёрий сонга кўпайтириб, унинг бошқа сатри (ёки устуни) га қўшилса, унинг ранги ўзгармайди;

5) матрицада нолли сатр (ёки устун)ни чиқариб ташланса, унинг ранги ўзгармайди;

6) матрицада бирор сатрлар (ёки устунлар) элементларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган сатр (ёки устун) ни чиқариб ташланса, матрицанинг ранги ўзгармайди.

Бир-биридан элементар алмаштиришлар натижасида ҳосил қилинган матрицалар **эквивалент** матрицалар деб аталади. Эквивалент матрицалар бир-бирига тенг эмас, аммо уларнинг ранглари тенг бўлишини исботлаш мумкин.

Юқорида келтирилганлардан матрицаларнинг рангини ҳисоблашда фойдаланилади.

Мисол. Матрицанинг рангини ҳисобланг:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. Берилган матрицанинг биринчи сатри элементларини 2 га бўлиб, ушбу эквивалент матрицани ҳосил қиламиз:

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицанинг биринчи сатрини 3 га ва 5 га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва учинчи сатрларидан айириб, ушбу матрицани ҳосил қиламиз:

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & -27/2 & 21/2 \end{pmatrix}.$$

A_2 матрицанинг учинчи сатрини — 3 га бўлиб, иккинчи сатрга қўшамиз:

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A_3 матрицада ноллардан иборат сатрни ташлаб,

$$A_4=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. A_4 матрицанинг ранги иккига тенглиги равшан. Демак, берилган матрицанинг ранги ҳам иккига тенг, яъни $r(A)=2$.

5-§. Детерминант ва матрицалар назариясининг татбиқлари

Детерминант ва матрицалар назарияси математика, физика, механика, электротехника, радиотехника, қурилишда, кундалик ҳаётимизда ва ҳ.к. ларда кенг қўлланилади. Бу ерда уларнинг татбиқига мисол ва масалалар келтирамиз.

1. Детерминантлар назариясининг аналитик геометрияга татбиқи.

1. Учлари $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ ва $C(x_3;y_3)$ нуқталарда бўлган учбурчакни юзи учинчи тартибли детерминант орқали қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,|D|.$$

2) $M_1(x_1;y_1)$ ва $M_2(x_2;y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

детерминант шаклида тузилади.

3) Учта тўғри чизиқ умумий тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} l_1&:A_1x+B_1y+C_1=0,\\ l_2&:A_2x+B_2y+C_2=0,\\ l_3&:A_3x+B_3y+C_3=0. \end{aligned}$$

Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси мавжуд бўлиши учун

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

шарт бажарилиши керак.

4) $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ ва $C(x_3; y_3)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётиши учун

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

5) Тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини

$$\begin{vmatrix} x & -\sin\alpha \\ y & \cos\alpha \end{vmatrix} = p$$

кўринишда ёзиш мумкин.

6) Учлари $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, ... $N(x_n; y_n)$ нуқталарда ётувчи кўпбурчакнинг юзи детерминантларнинг йиғиндиси шаклида қуйидагича аниқланади:

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{mod} \left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \ldots + \right.$$

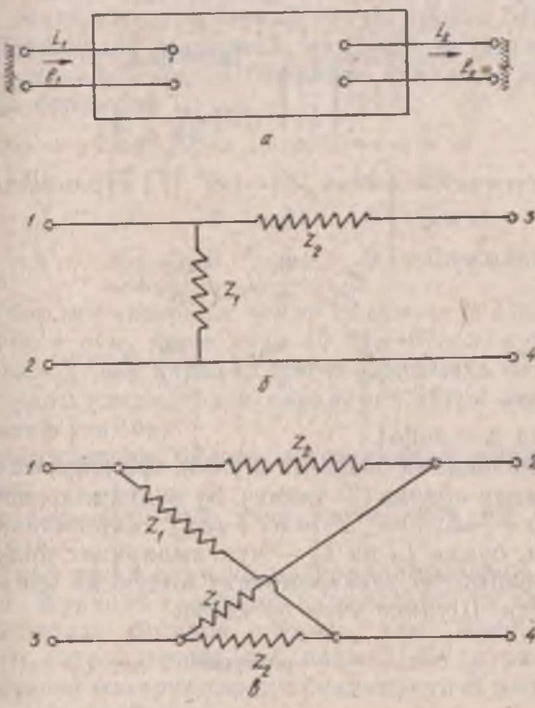
$$\left. + \ldots + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

7) $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ва $M_3(x_3; y_3; z_3)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси детерминант шаклида қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Электротехникада тўрт қутбли электр занжирлари мавжуд. Улар турли усулда уланган бўлиб, улардан энг соддаси битта ва бир нечта қаршиликлар кетма-кет, параллел Г, Т, П ва Х шаклларда уланган ҳолларидир.

Тўрт қутбли деганда одатда электр занжирининг иккита кириш ва иккита чиқиш қисмлари мавжуд бўлган тури тушунилади (1- а, б, в чизма). а) чизмадаги i_1, i_2, l_1, l_2 — кириш ва чиқишдаги кучланиш ва токнинг оний қийматлари бўлсин. Тўрт қутблиларнинг синусоидали ток ва кучланиш билан ишлаётгандаги ҳолатини кўриб чиқайлик.



1- чизма

Агар L_1, L_2, E_1, E_2 тўрт қутблиларнинг кириш ва чиқишдаги ток ва кучланиш амплитудаси бўлса, у ҳолда улар ўзаро қуйидагича чизиқли боғланишда бўлади:

$$\begin{cases} E_2=\alpha_{11}E_1+\alpha_{12}L_1 \\ L_2=\alpha_{21}E_1+\alpha_{22}L_1 \end{cases} \tag{2.11}$$

бунда α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22} параметрлар тўрт қутблиларнинг тўла ўтказувчанлиги бўлади ва у ўрганилаётган схемадаги ток билан кучланишларни боглайди.

(2.11) системани матрица кўринишида ҳам ёзиш мумкин:

$$[L]=[\alpha]\cdot[E].$$

Бунда:

$$[\alpha]=\{\alpha_{ij}\},$$

$$[L]=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, \quad [E]=\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}.$$

Бу системанинг ечими $[E]=[\alpha]^{-1}[L]$ кўринишда ёзилади, яъни

$$E_1=\frac{\alpha_{22}}{\Delta}L_1-\frac{\alpha_{12}}{\Delta}L_2,$$

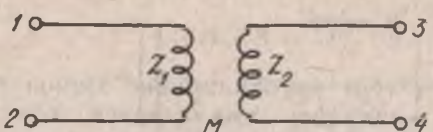
$$E_2=\frac{-\alpha_{21}}{\Delta}L_1+\frac{\alpha_{11}}{\Delta}L_2,$$

бу ерда $\Delta=\det[\alpha]$.

3. Физикадан бизга маълумки, трансформатор иккита чулгамдан иборат (2- чизма). Бу чулгамлар мос равишда $Z_1=R_1+j\omega L$, ва $Z_2=R_2+j\omega L_2$ қаршиликларга эга бўлсин, бунда L_1 ва L_2 — чулгамларнинг индуктивлиги. Трансформатор электромагнит индукция қонунига кўра ишлайди. Шунинг учун бу қонун

$$\mu=j\omega M$$

формула билан аниқланади. У ҳолда кириш ва чиқишдаги кучланишлар, токлар ва бошқа параметрлар орасида қуйидагича богланиш мавжуд:



2- чизма

$$\begin{cases} E_1=Z\ L_1-\mu L_2, \\ E_2=\mu Z_1-Z_2\ L_2. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Шундай қилиб, трансформатордаги токларни ҳисоблаш иккита икки номаълумли тенгламалар системасига келди. Уни детерминант ёки матрицадан фойдаланиб ечилади.

4. Матрицалар назариясидан қурилишга доир айрим масалаларни ечишда фойдаланишга мисол кўрамиз. Бирор қурувчи ташкилот 3 та уй, 5 та болалар боғчаси, 9 та дам олиш уйи қуриш учун мажбурият олган бўлсин. Қурилиш материаллари темир, ёғоч, ойна, бўёқдан иборат. Шунингдек материал миқдори ва ишчи кучи ҳар бир қурилишга бирор бирликда қуйидаги матрица кўринишда берилсин:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{Темир} & \text{Ёғоч} & \text{Ойна} & \text{Бўёқ} & \text{Ишчи кучи} \end{array} \\ A = & \left(\begin{array}{ccccc} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Уй} \\ \text{Боғча} \\ \text{Дам олиш уйи} \end{array} \end{array}$$

Агар бир бирлик материал: темир 12 сўм, ёғоч 7 сўм, ойна 5 сўм, бўёқ 4 сўм, ишчи кучи 10 сўм бўлса, қуйидагиларни аниқланг (бу нархлар шартли равишда олинганини ва бу улар ҳақиқатдаги нархларга тўғри келмаслигини эслатиб ўтамиз):

1) умумий керак бўлган материаллар миқдори ва ишчи кучи;

2) ҳар бир қурилиш учун ишчи кучи ва материаллар нархи;

3) умумий ишчи кучи ва материаллар нархи.

Ечиш. Қурувчи ташкилот қурадиган 3 та турар уй, 5 та болалар боғчаси, 9 та дам олиш уйини $B=(3\ 5\ 9)$ сатр-матрица деб оламиз. Бу қурилишлар учун кетадиган материалларни билиш учун B матрицани A матрицага кўпайтирамиз:

$$B\cdot A=(3\cdot 5\cdot 9)\cdot\begin{pmatrix} 10 & 17 & 8 & 5 & 11 \\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9 \end{pmatrix}=$$

$$=(3\cdot 10+5\cdot 7+9\cdot 5;\ 3\cdot 17+5\cdot 12 — 9\cdot 15;$$
$$3\cdot 8+5\cdot 4+9\cdot 10;\ 3\cdot 5+5\cdot 3+9\cdot 4;$$
$$3\cdot 11+5\cdot 8+9\cdot 9)=(110,\ 246,\ 134,\ 66,\ 154).$$

Демак, қурувчи ташкилот учун 110 бирлик темир, 246 бирлик ёғоч, 134 бирлик ойна, 66 бирлик бўёқ ва 154 бирлик ишчи кучи зарур экан.

Энди ҳар бир тур қурилиш учун материаллар ва ишчи кучи харажатини билиш учун уларнинг нархларидан тузилган

$$C=\begin{pmatrix}12\\7\\5\\4\\10\end{pmatrix}$$

устун-матрицани тузиб оламиз.

A матрицани C матрицага кўпайтирамиз:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}10 & 17 & 8 & 5 & 11\\ 7 & 12 & 4 & 3 & 8\\ 5 & 15 & 10 & 4 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\7\\5\\4\\10\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10\cdot12+17\cdot7+8\cdot5+5\cdot4+11\cdot10\\ 7\cdot12+12\cdot7+4\cdot5+3\cdot4+8\cdot10\\ 5\cdot12+15\cdot7+10\cdot5+4\cdot4+9\cdot10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}409\\280\\321\end{pmatrix}$$

(C ни A га кўпайтириш маънога эга эмас).

Демак, турар уй учун 409 сўм, болалар боғчаси учун 280 сўм, дам олиш уйи учун 321 сўм пул тўланар экан.

Учинчи саволга жавоб бериш учун қуйидаги матрицалар кўпайтмасини топамиз:

$$BAC=(110\ 246\ 134\ 66\ 154)\cdot\begin{pmatrix}12\\7\\5\\4\\10\end{pmatrix}=5516$$

ёки

$$BAC=(3\ 5\ 9)\cdot\begin{pmatrix}409\\280\\321\end{pmatrix}=5516.$$

Демак, ҳамма қурилиш 5516 сўмга тушар экан.

Сизга маълумки, уй ёки болалар боғчаси қуриш учун масала шартидаги материаллар етарли эмас. Агар улар учун кетадиган материалларнинг ҳаммаси олинса, у ҳолда масала шартига кўра тузиладиган матрицанинг тартиби катта бўлади. Шунинг учун биз айрим материаллар билан чекландик.

6. Энди кундалик ҳаётимизда учрайдиган қуйидаги иккита масалани кўрамиз.

1-масала. Тўртта харидор (уларни B, C, D, E харфлари билан белгилаймиз) A матрица устунида кўрсатилгандек миқдорда мевалар харид қилишган бўлсин:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} B & C & D & E \end{array} & \\ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{кг олма} \\ \text{кг нок} \\ \text{кг олхўри} \end{array} \end{array}$$

$t=(4\ \ 10\ \ 6)$ сатрлар бу меваларнинг нархи (шартли сўмларда), l — тўртта бирдан иборат устун-матрица бўлса, tA, Al, tAl матрицалар кўпайтмасини топинг ва унинг маъносини тушунтиринг.

Ечиш. t матрицани A га кўпайтирсак:

$$t\cdot A=(4\ 10\ 6)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=(4\cdot2+10\cdot1+6\cdot2;\ 4\cdot1+10\cdot0+6\cdot1;\ 4\cdot3+10\cdot2+6\cdot3;\ 4\cdot5+10\cdot3+6\cdot0)=(30;\ 10;\ 50;\ 50)$$

сатр-матрицага эга бўламиз, бунда $S_1=30$ B харидор сотиб олган меваси учун тўлаган пулни билдиради. $S_2=10$ эса C харидор, $S_3=50$ D харидор, $S_4=50$ E харидор тўлаган пулни билдиради. A ни l га кўпайтирамиз:

$$Al=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Натижа устун-матрицадан иборат бўлиб, унинг маъноси тўртта харидорнинг 11 кг олма, 6 кг нок, 6 кг олхўри харид қилганини билдиради.

$t\cdot A\cdot l$ кўпайтмани икки хил усул билан ҳисоблаш мумкин:

$$t\cdot A\cdot l=(4\ \ 10\ \ 6)\cdot\begin{pmatrix}11\\6\\6\end{pmatrix}=140;$$

$$t\cdot Al=(30\ 10\ 50\ 50)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=140.$$

Иккала ҳолда ҳам бир хил натижага эга бўлдик. Бу натижа тўрттала харидорнинг ҳамма мева учун тўланган пул миқдорини билдиради.

2-масала. Жамоа хўжалиги 5 тонна картошка, 6 тонна карам ва 10 тонна сабзи етиштиришни режалаштирган эди. Уни $A=(5\ 6\ 10)$ сатр-матрица кўринишда қисқача ёзиб олиш мумкин. Бу маҳсулотларнинг нархи (шартли минг сўм) $B=\begin{pmatrix}6\\3\\8\end{pmatrix}$ устун-матрицадан иборат бўлса, хўжалик даромадини ҳисобланг.

Ечиш. Жамоа хўжалиги даромадини ҳисоблаш учун A сатр-матрицани B устун-матрицага кўпайтирамиз:

$$A\cdot B=(5\ 6\ 10)\cdot\begin{pmatrix}6\\3\\8\end{pmatrix}=(5\cdot 6+6\cdot 3+10\cdot 8)=128.$$

Демак, даромад 128 минг шартли сўмни ташкил қилар экан.

МАШҚЛАР

1. Матрицаларнинг йиғиндисини топинг:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&4&5\\0&3&1\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&5&1\\4&3&2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Матрицаларнинг кўпайтмасини топинг:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 7\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 0\\ -6 & -3 & 1 & 4\\ 3 & 0 & 5 & 7\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

3. Агар $A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ бўлса, $C=2A+3B$ матрицани топинг.

4. Агар $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ бўлса, $C=A-5B$ матрицани топинг.

5. Агар

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ -2 & 2 & -1\\ -3 & 1 & -3\end{pmatrix}$ бўлса,

$C=2A-3B$ матрицани топинг.

6. Агар

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ бўлса,

$A+2C=3B$ шартдан C матрицани топинг.

7. Агар

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ бўлса,}$$

$2\ (A+B)\cdot(2B-A)$ ни ҳисобланг.

8. Агар

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ бўлса,}$$

$3A-(A+2B)\cdot B$ ни ҳисобланг.

9. Агар

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ бўлса,}$$

$C=AB-BA$ матрицани топинг.

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ матрица $f(x)=x^2-5x+3$ кўпхаднинг илдизи эканини кўрсатинг.

11. Агар $f(x)=x^2-3x+5$ ва

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ бўлса,}$$

$f(A)$ матрицани топинг.

12. Ушбу матрицаларга тескари матрицани топинг:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{г) } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. Қуйидаги тенгламалар системаларини матрицалардан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=14, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=9, \\ 3x_1+4x_2+x_3=16. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 2x_1+x_2-x_3=5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 4x_1-x_2+5x_3=3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x_1-7x_2+4x_3=5, \\ 3x_1-8x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+5x_2+5x_3=3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x+8y-z=-7, \\ x+2y+3z=1, \\ 2x-3y+2z=9. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-5x_4=4, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=2, \\ 8x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 4x_1-3x_2+3x_3+3x_4=2. \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3. \end{cases}$

14. Ушбу матрицаларнинг рангини икки хил усул билан (элементар алмаштиришлар ва минорлар орқали) топиб, натижа бир хил бўлишини кўрсатинг:

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

III БОБ

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- §. Вектор ҳақида тушунча

Физика, механика, техниканинг турли соҳаларида ўзларининг сон қийматлари билан тўлиқ аниқланадиган катталиклар учрайди. Бундай катталиклар **скаляр миқдорлар** деб аталади. Масалан, узунлик, юз, ҳажм, масса, жисмнинг температураси ва ҳоказолар скаляр миқдор ҳисобланади.

Амалий масалаларга математикани қўллашда, скаляр миқдорлардан ташқари фазодаги йўналиши ҳам аниқланишига тўғри келадиган миқдорлар учрайди. Йўналиши ва катталиги билан аниқланадиган миқдорлар **вектор миқдорлар** деб аталади. Жисмга таъсир этувчи куч, ҳаракатдаги жисмнинг тезлиги, тезланиши, ҳаракат миқдори, электр майдонининг кучланганлиги, магнит майдонининг кучланганлиги, оний айланиш бурчак тезлиги ва ҳоказолар вектор миқдорлар ҳисобланади.

Вектор миқдорлар векторлар ёрдамида тасвирланади. **Вектор** деб фазодаги тайин узунликка ва йўналишга эга бўлган кесмага айтилади.

Векторлар кўпинча унинг **боши** ва **охирини** билдирувчи иккита ҳарф ёрдамида (масалан $\overline{AB}, \overline{CD},...$) ёки биргина (масалан, $\vec{a}$, $\vec{b}$,...) ҳарф орқали белгиланади.

Векторнинг узунлигига унинг модули деб аталади ва $|\overline{AB}| = |\vec{a}|$ кўринишда белгиланади.

Модули бирга тенг, яъни $|\vec{a}| = 1$ бўлган вектор **бирлик** вектор, модули нолга тенг $|\vec{a}| = 0$ бўлган вектор **нол** вектор дейилади. Нол векторнинг йўналиши ҳақида сўз юритилмайди, чунки у аниқланмаган. Нолдан фарқли иккита вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, бундай векторлар **коллинеар** векторлар дейилади ва $\vec{a} \parallel \vec{b}$ кўринишда белгиланади. Битта текисликда ётувчи ёки шу текисликка параллел бўлган векторлар **компланар** векторлар дейилади.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун:

а) узунликлари тенг бўлса;

б) улар коллинеар бўлса;

в) йўналишлари бир хил бўлса, у ҳолда бу векторлар тенг деб олинади: $\vec{a}=\vec{b}$.

Бу таърифдан фойдаланиб, ихтиёрий векторни текисликнинг ёки фазонинг исталган нуқтасига кўчириш мумкин.

Нол вектордан фарқли ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун қарама-қарши вектор мавжуд бўлиб, у $(-\vec{a})$ билан белгиланади. $(-\vec{a})$ вектор $\vec{a}$ векторнинг модулига тенг модулга эга $|\vec{a}|=|-\vec{a}|$, улар коллинеар, аммо қарама-қарши томонга йўналган.

2- §. Векторлар устида амаллар

Векторларни қўшиш ва айириш ҳамда векторларни сонга кўпайтириш амалларини кўрамиз. Бу амаллар чизиқли амаллар деб аталади.

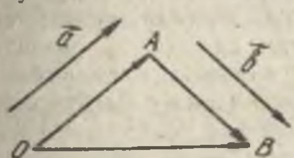
1. Векторларни қўшиш. Коллинеар бўлмаган икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси $\vec{c}$ векторни топишни кўрайлик. Бунинг учун $\vec{a}$ векторнинг бошини исталган O нуқтага қўйиб, унинг учини A нуқта деб, бу нуқтадан иккинчи $\vec{b}$ векторни келтириб қўйилса, бу векторнинг учи B нуқтага жойлашади. O ва B нуқталарни бирлаштирсак, боши O ва охири B бўлган $\overline{OB}$ векторни ҳосил қиламиз. Бу вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларининг изланган йиғиндиси $\vec{c}$ вектордан иборат бўлади (3- чизма).

Векторларни қўшиш қоидасидан исталган O, A ва B уч нуқта учун

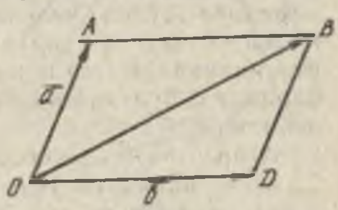
$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$$

тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади. Охирги тенглик векторларни қўшишнинг учбурчак қоидаси дейилади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг бош нуқталарини O нуқтага қўйиб $\vec{a}=\overline{OA}$ ва $\vec{b}=\overline{OD}$ векторларни чизамиз. Улар-



3- чизма



4- чизма.

нинг учлари A ва D нуқталардан $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларга мос равишда параллел AB ва BD тўғри чизиқлар чизсак, улар B нуқтада кесишади.

Боши O, охири B нуқта бўлган вектор қурсак, бу вектор изланаётган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндиси c вектор бўлади (4- чизма), яъни $\vec{a}$, $\vec{b}$ лардан қурилган параллелограмм диагонали бўлади. Векторлар йиғиндисини бундай геометрик ясашни одатда п а р а л л е л о г р а м м қ о и д а с и дейилади.

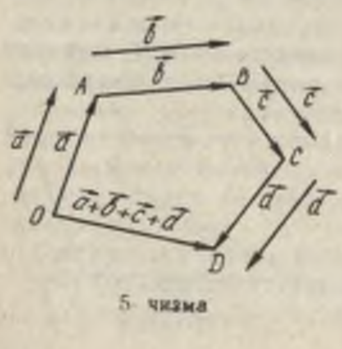
$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ векторнинг узунлиги (модули)

$$|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b})} \qquad (3.1)$$

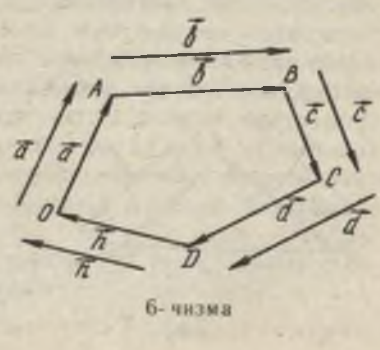
формула ёрдамида топилади.

Иккита вектор учун ҳосил қилинган векторларни қўшиш қоидасини исталган чекли сондаги қўшилувчи векторлар бўлган ҳол учун ҳам қўллаш мумкин. Бунда асосан векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасини кетма-кет қўллаш усулидан фойдаланилади. Ихтиёрий O нуқтага қўшилувчи векторларнинг биринчиси $\vec{a}$ векторнинг боши қўйилади. Бу векторнинг охирига (A нуқтага) иккинчи $\vec{b}$ векторнинг боши қўйилади. Энди b векторнинг охирига c векторнинг боши қўйилади. Бундай жараённи давом эттириб, йиғиндида қатнашувчи векторлардан сўнггисининг охирини бошлангич O нуқта билан бирлаштириб, O нуқтани вектор боши ҳисобланса, ҳосил бўлган $\overline{OD}$ вектор берилган векторларнинг йиғиндиси бўлади (5- чизма).

Агар бир нечта векторларни қўшишда сўнгги қўшилувчи векторнинг боши O нуқта билан (биринчи қўшилувчи векторнинг боши) устма-уст тушса, бу векторларнинг йиғиндиси нол векторга тенг бўлади (6- чизма).



5- чизма



6- чизма

Векторларни қўшиш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1) *Қўшишнинг группалаш (ассоциативлик) хоссаси.*

Исталган $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар учун

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

муносабат ўринли.

Исбот. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасидан (7- чизма):

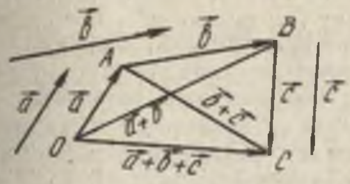
$$\vec{a}+\vec{b}=\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB},$$
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC},$$
$$\vec{b}+\vec{c}=\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC},$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC},$$

бундан $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ экани келиб чиқади.

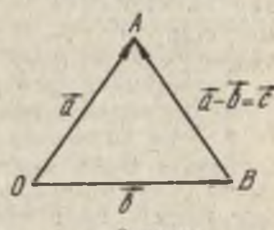
2) *Векторларни қўшишнинг ўрин алмаштириш (коммутативлик) хоссаси.* Исталган иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ тенглик ўринлидир.

3) Ҳар қандай $\vec{a}$ векторга нол вектор қўшилса $\vec{a}$ вектор ҳосил бўлади, яъни $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4) Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $\vec{a}'$ вектор мавжудки, унинг учун: $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$.



7- чизма



8- чизма

2. Векторларни айириш. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг айирмаси деб, шундай учинчи $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ векторга айтиладики, унинг айрилувчи $\vec{b}$ вектор билан йиғиндиси $\vec{a}$ векторни беради. Демак, таърифга кўра, агар $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ бўлса, у ҳолда $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Икки векторни қўшиш қоидасидан айирма векторни ясаш қоидаси келиб чиқади (8- чизма). Умумий О нуқтадан $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни қўямиз. Камаювчи $\vec{a}$ ва айирилувчи $\vec{b}$ векторларнинг охирларини туташтирувчи ва айрилувчи вектордан камаювчи векторга томон йўналган $\overline{BA}$ вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ айирма бўлади. Ҳақиқатан ҳам, векторларни қўшиш

қоидасига кўра: $\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}$ ёки $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$, яъни $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Агар умумий 0 нуқтадан қўйилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан $OABC$ параллелограмм ясалса, у ҳолда параллелограммнинг 0 учидан чиқувчи диагонали билан устма-уст тушадиган $\overline{OB}$ вектор $\vec{a}+\vec{b}$ йиғиндига тенг, иккинчи диагонал билан устма-уст тушадиган $\overline{CA}$ вектор эса $\vec{a}-\vec{b}$ айирмага тенг бўлади (9- чизма).

3. Векторни сонга кўпайтириш. $\vec{a}$ вектор ва скаляр $\lambda\neq 0$ сон берилган бўлсин. $\vec{a}$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\vec{b}$ векторга айтилади:

а) Агар $\lambda>0$ бўлса, $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ вектор билан бир хил йўналишда ($\vec{a}\neq 0$), акс ҳолда $\lambda<0$ бўлса, $\vec{b}$ ва $\vec{a}$ векторлар қарама-қарши йўналишда бўлади;

б) $\vec{b}$ векторнинг узунлиги (модули) $|\vec{b}|=|\lambda|\,|\vec{a}|$ формула билан ҳисобланади.

Масалан, $\frac{1}{2}\vec{a}$ вектор $\vec{a}$ вектор билан бир хил йўналган ва $\vec{a}$ векторнинг узунлигидан икки марта кичик узунликка эга бўлган вектордир.

Векторни сонга кўпайтириш қоидасидан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1. Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун: $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$;
2. Ихтиёрий $\lambda\in R$ сон учун: $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$;
3. Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.
4. $\vec{a}$ ва $\lambda\vec{a}$ векторлар коллинеар векторлар бўлади.

Бирор $\vec{a}\neq 0$ векторни ўзининг узунлигига тескари $\frac{1}{|\vec{a}|}$ сонга кўпайтирилса, шу вектор йўналишидаги бирлик вектор (орт) ҳосил бўлади, яъни

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\vec{a}_0\;(|\vec{a}_0|=1).$$

Теорема. Агар $\vec{a}\parallel\vec{b}(\vec{a}\neq 0)$ бўлса, у ҳолда шундай λ сон мавжудки,

$$\vec{b}=\lambda\vec{a} \qquad (3.2)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $\vec{a}\parallel\vec{b}$ бўлгани учун қуйидаги уч ҳолдан бири бўлиши мумкин:

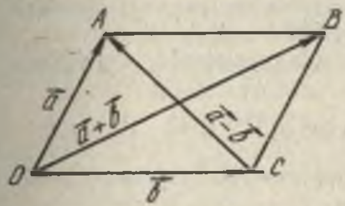
1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ бўлса, $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\frac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$ бўлиб, бундан

$\vec{b}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ ҳосил бўлади. Бу тенгликдан $\lambda=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ деб олсак, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ келиб чиқади;

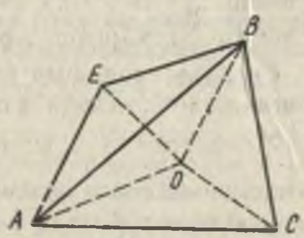
2) $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b}$ бўлса, $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=-\frac{1}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$ бўлиб, бундан $\vec{b}=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$ ҳосил бўлади. Бу тенгликдан $\lambda=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ деб олсак, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ келиб чиқади;

3) $\vec{b}=0$ бўлса, у ҳолда $\vec{b}=0\cdot\vec{a}$ бўлиб, бунда $\lambda=0$ бўлади.

Демак, векторни сонга кўпайтириш қоидасидан ва бу теоремадан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: $\vec{a}\parallel\vec{b}$ берилган бўлса, у ҳолда бу векторлар учун $\vec{b}=\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$ тенглик ўринли бўлади.



9- чизма



10- чизма

Шундай қилиб, (3.2) муносабат $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар коллинеарлигининг зарурий ва етарли шартидир.

Векторни сонга кўпайтириш қуйидаги хоссаларга эга:

а) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$;

б) $\lambda\cdot(\beta\cdot\vec{a})=(\lambda\cdot\beta)\cdot\vec{a}$ (группалаш қонуни);

в) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (векторларни қўшишга нисбатан тақсимот қонуни).

Бу хоссаларнинг исботини ўқувчининг ўзига қолдирамиз.

1-мисол. ABC учбурчак берилган бўлиб, унинг оғирлик маркази O нуқтада бўлса, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ эканини исбот қилинг (10- чизма).

Ечиш. Томонлари $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ бўлган векторлардан иборат $AOBE$ параллелограмм ясаймиз. Бу параллелограммдан:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}. \qquad (A)$$

O нуқта масала шартига кўра учбурчакнинг оғирлик маркази бўлгани учун, у медианалар кесишган нуқтадан иборат. Шунинг учун $\overline{OD}$ вектор $\overline{CD}$ векторнинг учдан

бирини ташкил қилади, яъни $\overline{OD}=\frac{1}{3}\overline{CD}$. (Б)

10- чизмадан $\overline{OC}=-2\overline{OD}, \overline{OD}=\overline{DE}, \overline{OC}=\overline{EO}$ (В)

(A), $(Б)$ ва (B) лардан:

$$(\overline{OC})=-(\overline{OA}+\overline{OB})\Rightarrow \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}.$$

2-мисол. Иккита (l ва T) тросга 15 кг юк осилган (11- чизма). Агар $\angle ACB=120°$ бўлса, тросларда ҳосил бўлувчи кучларни аниқланг.

Ечиш. Масала шартига кўра тросларга осилган 15 кг юк иккита, яъни $\overline{CD}$ ва $\overline{CF}$ кучнинг йиғиндисидан иборатдир. Шунинг учун юк йўналишини диагонал сифатида қараб параллелограмм томонларини топамиз.

Бунинг учун $ECDF$ параллелограммни ясаймиз, чизмадан:

$$\angle FCD=30°.$$

Параллелограмм томонлари $|\overline{CD}|$ ва $|\overline{CE}|$ ларни топамиз. Тўғри бурчакли ΔCFD дан:

$$|\overline{CF}|=|\overline{CD}|\cdot\cos 30°\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|\overline{CD}|=\frac{|\overline{CF}|}{\cos 30°}=\frac{2}{\sqrt{3}}|\overline{CF}|=\frac{15\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{3}=10\sqrt{3}.$$

Демак, $|\overline{CD}|=10\sqrt{3}$ кг.

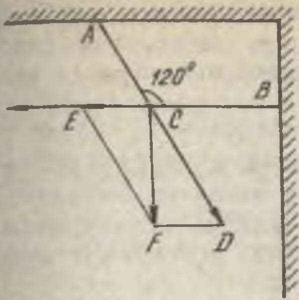
$|\overline{CE}|$ ни топамиз: $\overline{CD}=\overline{EF}$ бўлгани учун

$$|\overline{CE}|=\frac{|\overline{EF}|}{2}=\frac{|\overline{CD}|}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}.$$

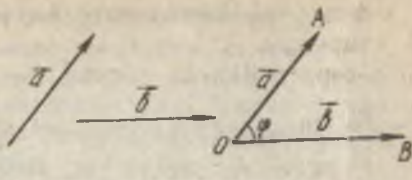
Демак, $|\overline{CE}|=5\sqrt{3}$ кг.

3- §. Икки вектор орасидаги бурчак

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг бошларини бирор умумий 0 нуқтага келтирамиз ёки $\overline{OA}=\vec{a}$ ва $\overline{OB}=\vec{b}$ векторларни ясаймиз (12- чизма). У ҳолда AOB бурчак ($\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ вектор билан устма-уст тушгунча айлантириш лозим бўлган иккита бурчак-



11- чизма



12- чизма

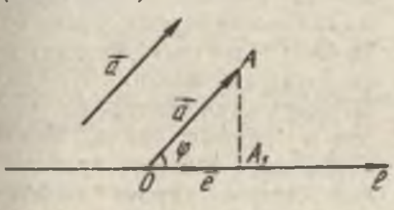
нинг кичиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак дейилади ва $(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b})$ кўринишда ёки α, φ, ψ,... ҳарфлардан бири орқали белгиланади. Демак, таърифга кўра икки вектор орасидаги бурчак 0° дан 180° гача оралиқда бўлади. Бундан кўринадики, бир хил йўналишдаги коллинеар векторлар орасидаги бурчак 0° га, қарама-қарши йўналишдаги векторлар орасидаги бурчак 180° га тенг бўлади. Агар векторлар орасидаги бурчак 90° га тенг бўлса, улар перпендикуляр ёки ортогонал векторлар дейилади ва бу $\vec{a} \perp \vec{b}$ каби белгиланади. l ўқ ва унинг бирлик вектори $\vec{e}$ берилган бўлсин. Ихтиёрий $a \neq 0$ векторнинг бирлик вектори a_0 қуйидагича аниқланади:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

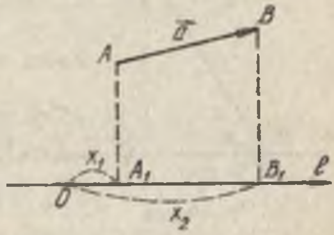
чунки.

$$|\vec{a}_0| = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}| = 1.$$

$\vec{a} \neq 0$ текисликдаги ихтиёрий вектор бўлсин. $\vec{a}$ вектор билан l ўқ орасидаги бурчак деганда l ўқнинг бирлик вектори $\vec{e}$ билан $\vec{a}$ вектор орасидаги бурчак тушунилади. $\vec{a}$ вектор l ўқ билан φ бурчак ташкил қилади (13- чизма).



13- чизма



14- чизма

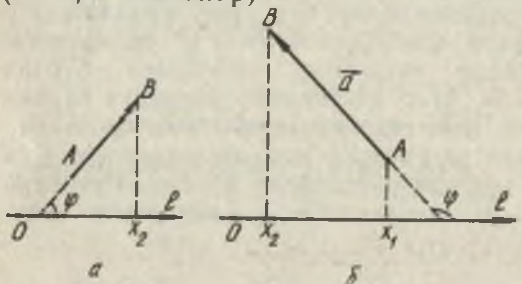
4- §. Векторнинг ўқдаги проекцияси

Текисликда ихтиёрий жойлашган бирор l ўқ ва $\vec{a}$ вектор берилган бўлсин. Бу $\vec{a}$ векторнинг боши A ва охири B нинг l ўққа проекциялари мос равишда A_1 ва B_1 нуқталар бўлади (14- чизма).

l ўқда A_1 нуқта x_1 координатага, B_1 нуқта x_2 координатага эга бўлсин. $\vec{a}$ вектор охири ва бошининг l ўқдаги проекциялари координаталарининг айирмаси x_2-x_1 га $\vec{a}$ векторнинг шу ўққа проекцияси деб аталади ва қуйидагича ёзилади:

$$\text{Пр}_l\vec{a}=x_2-x_1.$$

Агар $\vec{a}$ вектор l ўқ билан ўткир бурчак ташкил этса, у ҳолда $x_2>x_1$ бўлиб, x_2-x_1 проекция мусбат; агар $\vec{a}$ вектор ва l ўқ орасидаги бурчак ўтмас бўлса, у ҳолда $x_2<x_1$ бўлиб, x_2-x_1 проекция манфий бўлади (15- а, б чизмалар).

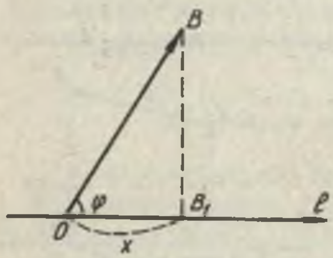


15- чизма

Агар $\vec{a}$ вектор l ўқ билан 90° ли бурчак ташкил этса, у ҳолда $x_2=x_1$ бўлиб x_2-x_1 проекция нолга тенг бўлади.

1 - т е о р е м а. $\vec{a}$ векторнинг l ўққа проекцияси $\vec{a}$ вектор модулининг шу вектор билан ўқ орасидаги φ бурчак косинусига кўпайтмасига тенг:

$$\text{Пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi. \qquad (3.3)$$



16- чизма

И с б о т. $\vec{a}$ векторнинг l ўқдаги проекцияси x_2-x_1 бўлсин. $\vec{a}$ векторни параллел кўчирсак, унинг бу ўқдаги (x_2-x_1) проекцияси ўзгармас миқдор бўлади. Шунинг учун векторнинг боши l ўқнинг саноқ боши O билан устма-уст тушадиган ҳолни қараш кифоядир (16- чизма).

Санок бошининг координатаси нолга тенг бўлгани учун

$$\text{Пр}_l\vec{a} = x - 0 = x,$$

бу ерда $x - \vec{a}$ вектор охири проекциясининг координатаси. Косинуснинг таърифига кўра:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|\vec{a}|} \Rightarrow x = |\vec{a}|\cos\varphi$$

ёки

$$\text{Пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

Теорема исбот бўлди.

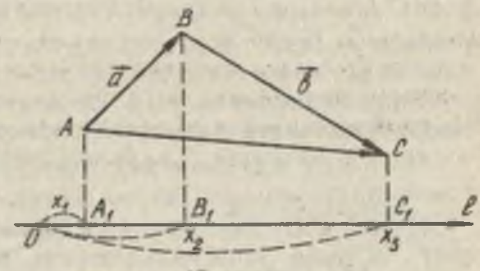
2-теорема. Икки вектор йиғиндисининг l ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўқдаги проекциялари йиғиндисига тенг.

Исбот. $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ бўлсин (17- чизма). A, B ва C нуқталарнинг l ўқдаги проекциялари A_1, B_1, ва C_1 нинг координаталарини x_1, x_2 ва x_3 билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\text{Пр}_l\vec{a} = x_2 - x_1; \ \text{Пр}_l\vec{b} = x_3 - x_2; \ \text{Пр}_l\overline{AC} = x_3 - x_1.$$

Бирок $x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)$ деб ёзиш мумкин бўлгани сабабли:

$$\text{Пр}_l\overline{AC} = \text{Пр}_l\overline{AB} + \text{Пр}_l\overline{BC}.$$



17- чизма

Бу теоремани n та векторлар йиғиндиси учун ҳам умумлаштириш мумкин, яъни бир нечта векторлар йиғиндисининг бирор l ўқдаги проекцияси векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг.

3-теорема. $\vec{a}$ векторни λ сонга кўпайтирилса, унинг l ўқдаги проекцияси ҳам шу λ сонга кўпаяди:

$$\text{Пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{Пр}_l\vec{a}.$$

Теорема исботини ўқувчиларга қолдирамиз.

Мисол. Узунлиги $|\vec{a}|=6$ га, l ўқ билан ҳосил қилган бурчаги $60°$ га тенг бўлган $\vec{a}$ векторнинг l ўқдаги проекциясини топинг.

Ечиш. (3.3.) формулага асосан:

$$\text{Пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=6\cos 60°=6\cdot\frac{1}{2}=3.$$

5-§. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги. Базис векторлар

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ векторлар ҳамда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Улардан ҳосил қилинган $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n$ ифода $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларнинг $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ коэффициентли чизиқли комбинацияси дейилади. Агар бирор $\vec{a}$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларнинг чизиқли комбинацияси шаклида ифодаланган бўлса, $\vec{a}$ вектор шу векторлар бўйича ёйилган дейилади, яъни қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n.$$

Агар камида биттаси нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ сонлар танлаб олинганда

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n=0 \qquad (3.4)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ векторлар чизиқли боғлиқ дейилади. Агар (3.4) муносабат фақат $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ бўлгандагина ўринли бўлса, у ҳолда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторлар чизиқли боғланмаган ёки чизиқли эркли деб аталади.

Энди текисликдаги ва фазодаги векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ҳақидаги теоремаларни қараймиз.

1-теорема. Текисликдаги ҳар қандай учта $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлади.

Исбот. Бу векторлардан бири қолган икки векторнинг чизиқли комбинациясидан иборатлигига ишонч ҳосил қилиш кифоя. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

1. Берилган векторлар орасида бир жуфти коллинеар бўлсин. У ҳолда $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ ёки $\vec{a}=\lambda\vec{b}+0\cdot\vec{c}$ (бунда λ — сон) тенгликни ёза оламиз, яъни $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлади.

2. Берилган векторлар орасида ҳеч бир жуфти коллинеар бўлмасин. У ҳолда учала векторни умумий нуқтага келтирамиз (18-чизма). $\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ ва

$\vec{c}$ векторларга коллинеар бўлган икки векторнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкинлигини кўрсатамиз. Диагонали $\vec{a}$ вектордан, томонлари эса $\overrightarrow{OC}$ ва $\overrightarrow{OB}$ векторлардан иборат бўлган параллелограмм тузамиз. Векторларни қўшиш қоидасига кўра:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (A)$$

$\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OC}$ векторлар мос равишда $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларга коллинеар бўлганлиги учун

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_1\vec{b} \text{ ва } \overrightarrow{OC} = \lambda_2\vec{c} \qquad (B)$$

тенгликни ёзиш мумкин. (В) ни (А) га қўйсак,

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}$$

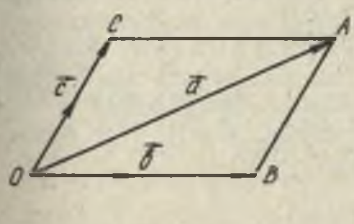
ҳосил бўлади.

Натижа. Агар текисликда векторлар сони учтадан ортиқ бўлса, улар ҳам чизиқли боғлиқдир, яъни бу векторлардан бирини қолганларининг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин.

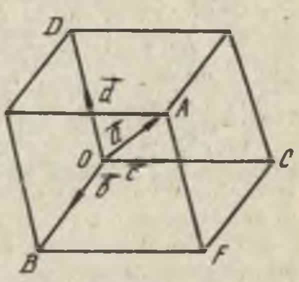
2-теорема. Фазодаги ҳар қандай тўртта $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторлар чизиқли боғлиқдир.

Исбот. Берилган векторлар умумий бошга эга деб фараз қиламиз. Уларнинг чизиқли боғлиқлигини кўрсатиш учун бу векторлардан бири қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат эканлигини кўрсатиш етарлидир. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин.

1. Берилган тўртта вектор орасида компланар векторлар учлиги мавжуд бўлган ҳолни кўрайлик. Аниқлик учун, масалан, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар учлиги компланар бўлсин. Бу векторлар бир текисликда ётганлиги учун улардан бирини, масалан, a векторни 1-теорема-



18-чизма



19-чизма

га кўра қолган векторларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин: $\vec{a}=\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}$. Тўрттала вектор учун $\vec{a}=\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}+0\cdot\vec{d}$ тенгликни ёзиш мумкин, бу эса $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси эканлигини билдиради.

2. Берилган векторлар орасида битта ҳам компланар векторлар учлиги йўқ бўлсин. Бу ҳолда $\vec{a}$ векторни мос равишда $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторларга коллинеар бўлган учта векторнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин. Диагонали $\vec{a}=\overline{OA}$ вектордан ва қирралари мос равишда $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторларга коллинеар бўлган векторлардан иборат параллелепипед ясаймиз (19- чизма). Векторларни қўшиш қоидасига кўра:

$$\vec{a}=\overline{OA}=\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}$$

Бироқ $\overline{OB}=\lambda_1\vec{b}$, $\overline{OC}=\lambda_2\vec{c}$ $\overline{AF}=\overline{OD}=\lambda_3\vec{d}$. Демак, $\vec{a}=\lambda_1\vec{b}+\lambda_2\vec{c}+\lambda_3\vec{d}$, бу тенглик эса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторларнинг чизиқли боғлиқ эканини билдиради. Бу теоремалардан иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор коллинеар бўлса, улар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлиши ва аксинча, иккита вектор чизиқли боғлиқ бўлса, уларнинг коллинеар бўлиши келиб чиқади. Фазода берилган учта вектор чизиқли боғлиқ бўлиши учун уларнинг компланар бўлиши зарур ва етарлидир.

Маълум тартибда олинган $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлиб, бошқа ҳар қандай вектор булар орқали чизиқли ифодаланса, $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ векторлар системаси базис векторлар дейилади ва

$$Б=\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n\}$$

кўринишда белгиланади.

Агар базиснинг ҳар бир вектори бирлик вектор бўлиб, улар жуфт-жуфти билан ўзаро перпендикуляр бўлса, бундай базис ортонормаланган базис векторлар дейилади. Базисни ташкил этувчи векторлар сони қаралаётган фазонинг ўлчовини билдиради.

Исталган $\vec{a}$ векторни берилган $Б=\{\vec{l}_1, \vec{l}_2\}$ базис векторлари бўйича ёйиш мумкин:

$$\vec{a}=a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2,$$

бу ёйилмадаги a_1, a_2 сонлар $\vec{a}$ векторнинг $Б=\{\vec{l}_1, \vec{l}_2\}$ базисга нисбатан аффин координаталари ёки базисдаги компонентлари дейилади. Худди шунга ўхшаш $Б=\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3\}$ базис берилган бўлса, ихтиёрий $\vec{a}$ векторни шу базис бўйича ёйиш мумкин:

$$\vec{a}=a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3, \tag{3.5}$$

бу ерда $\vec{a}$ векторнинг a_1, a_2, a_3 компонентлари қуйидаги геометрик маънога эга: O учдан чиқувчи ва қиррали a_1, l_1, $a_2\vec{l}_2$, $a_3\vec{l}_3$ векторлардан иборат параллелепипедни қараймиз. $\vec{a}$ вектор бу параллелепипеднинг O учидан чиқувчи диагонали бўлиши равшан. Бу ҳолда (3.5) формулани қуйидагича ҳам ёзилади:

$$\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}.$$

Агар векторларни бошқа векторларнинг чизиқли комбинацияси билан ифодалаш мумкин бўлса, берилган вектор шу векторлар бўйича ёйилган дейилади. Масалан, $\vec{a}=2\vec{a}_1+3\vec{a}_2-4\vec{a}_3+\frac{1}{2}\vec{a}_4$ вектор $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ векторларнинг чизиқли комбинациясини ифодалайди ва $\vec{a}$ вектор $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ векторлар бўйича ёйилган дейилади.

1-мисол. K ва L нуқталар $ABCD$ параллелограмм томонларининг ўрталари бўлсин (20-чизма). $\overrightarrow{BC}$ векторни $\vec{m}=\overrightarrow{AK}$ ва $\vec{n}=\overrightarrow{AL}$ векторлар бўйича ёйинг.

Ечиш: ΔABK дан $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{m}$ (A). $\triangle ALD$ дан: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}=\vec{n}$. Чизмадан $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ га эга бўламиз. У ҳолда

$$\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{n} \tag{B}$$

(A) дан:

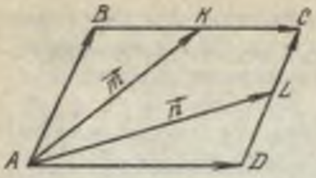
$$\overrightarrow{AB}=\vec{m}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \tag{C}$$

(C), (B) лардан:

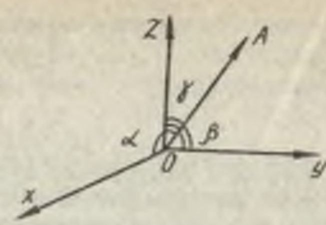
$$\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\vec{m}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\vec{n}$$

ёки

$$\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\vec{n}-\frac{2}{3}\vec{m}.$$



20- чизма



21- чизма

6- §. Векторнинг йўналтирувчи косинуслари

Фазода бирор вектор координата ўқлари билан мос равишда α, β, γ бурчаклар ташкил этган бўлсин (21- чизма). Бу бурчакларнинг $\cos\alpha$; $\cos\beta$, $\cos\gamma$ косинуслари $\vec{a}$ векторнинг **й ў н а л т и р у в ч и к о с и н у с л а р и** деб аталади.

$$\vec{a}=a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3 \qquad (3.6)$$

вектор берилган бўлсин, бунда $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ ортонормаланган бирлик векторлар a_1, a_2, a_3 сонлар мос равишда $\vec{a}$ векторнинг Ox, Oy ва Oz ўқлардаги проекцияси бўлиб (3.3) формулага асосан:

$$a_1=a_x=\text{Пр}_{Ox}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha,$$
$$a_2=a_y=\text{Пр}_{Oy}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\beta,$$
$$a_3=a_z=\text{Пр}_{Oz}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\gamma.$$

Бу ифодалардан фойдаланиб йўналтирувчи косинусларни топамиз:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ бўлгани учун:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}; \qquad (3.7)$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

(3.7) тенгликларнинг ҳар бирини квадратга кўтариб ва уларни қўшиб векторнинг йўналтирувчи косинуслари орасидаги ушбу боғланишга эга бўламиз:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

яъни исталган векторнинг йўналтирувчи косинуслари квадратларининг йиғиндиси бирга тенг.

Мисол. Агар $A(3;\ 2;\ 1)$ ва $B(5;\ 4;\ 2)$ бўлса, $\overline{AB}$ векторнинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчакларининг косинусларини топинг.

Ечиш: $\overline{AB}$ векторнинг Ox, Oy, Oz ўқлардаги проекцияларини топамиз:

$$\text{Пр}_{Ox}\overline{AB}=5-3=2;\ \text{Пр}_{Oy}\overline{AB}=4-2=2;$$

$$\text{Пр}_{Oz}=\overline{AB}=2-1=1.$$

$\overline{AB}$ векторнинг модулини топамиз:

$$|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+1}=\sqrt{9}=3.$$

(3.7) муносабатлардан векторнинг йўналтирувчи косинусларини топамиз: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

7- §. Икки векторнинг коллинеарлик шарти

Ўзаро коллинеар $\vec{a}=a_x\vec{l}_1+a_y\vec{l}_2+a_z\vec{l}_3$ ва $\vec{b}=b_x\vec{l}_1+$ $+b_y\vec{l}_2+b_z\vec{l}_3$ векторлар берилган бўлсин, демак, улар орасида $a=\lambda\vec{b}$ (бунда λ — бирор сон) муносабат ўринли бўлади. Векторни сонга кўпайтирилганда унинг ўқлардаги проекциялари ҳам мос равишда шу сонга кўпайтирилганлиги учун қуйидаги тенгликларни ёзамиз:

$$a_x=\lambda b_x;\ a_y=\lambda b_y;\ a_z=\lambda b_z. \tag{3.8}$$

(3.8) тенглик $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг коллинеарлик шартидир. (3.8) тенгликдан

$$\frac{a_x}{b_x}=\lambda;\ \frac{a_y}{b_y}=\lambda;\ \frac{a_z}{b_z}=\lambda$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{3.9}$$

(3.9) формула иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлиши учун уларнинг координата ўқлардаги проекциялари пропорционал бўлиши зарур ва етарли бўлишини билдиради.

6—632

Мисол. α ва β ларнинг қандай қийматларида $\vec{a}=2\vec{l}_1+\alpha\vec{l}_2+\vec{l}_3$ ва $\vec{b}=3\vec{l}_1-6\vec{l}_2+\beta\vec{l}_3$ векторлар коллинеар бўлади?

Ечиш. (3.9) формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{2}{3}=\frac{\alpha}{-6}=\frac{1}{\beta}.$$

Бундан:

$$\frac{2}{3}=\frac{\alpha}{-6}\Rightarrow\alpha=-4,$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{\beta}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}.$$

Жавоб: $\alpha=-4$; $\beta=\frac{3}{2}$.

8-§. Координаталари билан берилган векторлар устида амаллар

$\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар берилган $Б=\{\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3\}$ базис векторлари бўйича қуйидаги координаталарга эга бўлсин:

$$\vec{a}=\{a_1; a_2; a_3\}=a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3;$$
$$\vec{b}=\{b_1; b_2; b_3\}=b_1\vec{l}_1+b_2\vec{l}_2+b_3\vec{l}_3.$$

1. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни қўшишда уларнинг мос координаталари қўшилади. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{c}=\{c_1; c_2; c_3\}$.

$$\begin{aligned}\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3)+(b_1\vec{l}_1+b_2\vec{l}_2+b_3\vec{l}_3)=\\&=(a_1+b_1)\vec{l}_1+(a_2+b_2)\vec{l}_2+(a_3+b_3)\vec{l}_3=\\&=\{a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3\}.\end{aligned}$$

Демак, $c_1=a_1+b_1$; $c_2=a_2+b_2$; $c_3=a_3+b_3$.

2. $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторни айиришда ҳам векторларнинг мос координаталари айрилади, яъни

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}_2+a_3\vec{l}_3)-(b_1\vec{l}_1+b_2\vec{l}_2+b_3\vec{l}_3)=\\&=(a_1-b_1)\vec{l}_1+(a_2-b_2)\vec{l}_2+(a_3-b_3)\vec{l}_3=\\&=\{a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3\}.\end{aligned}$$

3. Векторни сонга кўпайтиришда унинг барча координаталари шу сонга кўпайтирилади, яъни

$$\begin{aligned}\lambda\vec{a}&=\lambda(a_1\vec{l}_1+a_2\vec{l}+a_3\vec{l}_3)=\\&=(\lambda a_1)\vec{l}_1+(\lambda a_2)\vec{l}_2+(\lambda a_3)\vec{l}_3=\\&=\{\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3\}.\end{aligned}$$

Юқорида айтилганлар ихтиёрий сондаги векторлар учун ҳам ўз кучини сақлайди.

М и с о л. $\vec{a}=\{2;\ -1;\ 3\};\ \vec{b}=\{2;\ -1;\ -3\}$ ва $\vec{c}=\{0;\ 2;\ 1;\}$ векторлар берилган. а) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; б) $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $5\vec{a}$ векторларнинг координаталарини аниқланг.

Е ч и ш. а) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\{2-2+0;\quad -1-(-1)+2;\ 3-(-3)+1\}=\{0;\ 2;\ 7\}$;

б) $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=$

$$=\left\{2+(-1)\cdot\frac{1}{2};\ -1+\frac{1}{2}(-1);\ 3+\frac{1}{2}\cdot(-3)\right\}=.$$

$$=\left\{\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right\}.$$

в) $5\vec{a}=\{2\cdot 5;\ 5.(-1);\ 3\cdot 5\}=\{10;\ -5;\ 15\}$.

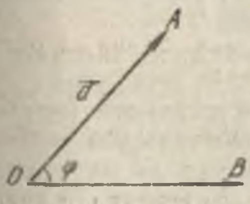
9- §. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва унинг хоссалари

Векторлар билан бажариладиган содда амалларни (қўшиш, айириш ва сонга кўпайтириш) ва бу амаллар натижасида яна векторлар келиб чиқишини кўрдик. Энди векторлар билан бажарилган амал натижасида скаляр (сон) ҳосил бўлишини кўриб чиқамиз.

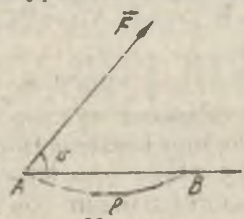
Т а ъ р и ф. Нолга тенг бўлмаган иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси деб кўпайтирилувчи векторлар модулларининг бу векторлар орасидаги φ бурчак косинусига кўпайтмасига тенг сонга айтилади (22- чизма). Скаляр кўпайтма $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ёки $(\vec{a}\vec{b})$ шаклда ёзилади. Демак, таърифга кўра:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}\,\vec{b})=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi. \tag{3.10}$$

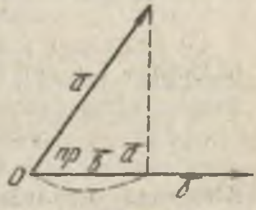
Векторлар скаляр кўпайтмасининг физик маъносини тушунтирамиз. M моддий нуқта A нуқтадан B нуқтага томон тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган ва l га тенг йўлни босиб ўтган бўлсин. Бунда M моддий нуқтага $\vec{F}$ куч таъсир этаётган бўлсин. Бу кучнинг катталиги ва йўналиши ўзгармас бўлиб, бу вектор нуқтанинг кўчиш йўналиши билан φ бурчак ташкил қилсин (23- чизма).



22- чизма



23- чизма



24- чизма

Физикадан маълумки, $\vec{F}$ куч таъсирида M моддий нуқта A нуқтадан B нуқтага кўчишида бажариладиган A иши $A = Fl\cos\varphi$ формула билан аниқланади. Агар кўчиш вектори $\overline{AB} = \vec{l}$ вектор бўлса, у ҳолда $\vec{F}$ ва $\vec{l}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси таърифга кўра:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{l} = Fl\cos\varphi$$

бўлади. Демак, моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракатидаги ўзгармас кучнинг бажарган иши куч векторининг кўчиш векторига скаляр кўпайтмасига тенг экан.

Скаляр кўпайтма таърифидаги (3.10) формула $|\vec{b}|\cos\varphi$ кўпайтма $\vec{b}$ векторнинг $\vec{a}$ вектор билан аниқланадиган ўқка проекцияси ($\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ билан белгиланади), $|\vec{a}|\cos\varphi$ эса $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ вектор ўқига проекцияси бўлгани учун (24- чизма):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

ёки

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} \qquad (3.11)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлардан бирининг модулини иккинчи векторнинг бу векторга проекциясига кўпайтмасига тенг экан.

(3.11) формуладан бир векторнинг иккинчи вектордаги проекциясини ҳисоблаш формуласига эга бўламиз:

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|};\quad \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}. \qquad (3.12)$$

Скаляр кўпайтманинг хоссаларини кўриб чиқамиз.

1. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси ўрин алмаштириш хоссасига эга:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2. Исталган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси скаляр кўпайтувчига нисбатан гуруҳлаш хоссасига эга:

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}).$$

3. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси тақсимот хоссасига эга: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$.

4. Агар икки векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, у ҳолда кўпайтирилувчи векторлардан бири нолга тенг бўлади ёки улар орасидаги бурчак косинуси нолга тенг бўлади (бу ҳолда бу векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади).

5. Векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмаси шу вектор узунлигининг квадратига тенг:

$$(\vec{a}\cdot\vec{a})=|\vec{a}|^2.$$

6. $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$ — Декарт координаталар системасининг координата ўқларидаги бирлик векторлари (ортлари) бўлсин. У ҳолда юқоридаги хоссалардан ушбу тенгликлар келиб чиқади: $(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_1)=|\vec{l}_1|^2=1$; $(\vec{l}_2\cdot\vec{l}_2)= \ =|\vec{l}_2|^2=1$; $(\vec{l}_3\cdot\vec{l}_3)=|\vec{l}_3|^2=1$; $(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2)=(\vec{l}_1\cdot\vec{l}_3)=(\vec{l}_2\cdot\vec{l}_3)=0$.

1-мисол. Агар $|\vec{a}|=\sqrt{2}$; $|\vec{b}|=3$; $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $\varphi=45°$ га тенг бўлса, $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ векторнинг узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. 5- хоссадан фойдаланамиз, яъни $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ векторнинг ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$|\vec{c}|^2=(2\vec{a}+3\vec{b})^2=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2.$$

Берилганларга кўра: $|\vec{a}|^2=2$; $|\vec{b}|^2=9$;

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi=\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3.$$

Демак, $|\vec{c}|^2=4\cdot2+12\cdot3+9\cdot9=125$ ёки

$$|\vec{c}|=\sqrt{125}=5\sqrt{5}.$$

Энди координаталари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмасини ҳисоблашни кўрамиз. Ортонормаланган $Б=\{\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ базисда $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ ва $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$ векторлар координаталари билан берилган бўлсин. У ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+\vec{b}_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

ёйилмаларга эга бўламиз. Скаляр кўпайтманинг хоссаларидан фойдаланиб $\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_{x}\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+$$
$$+a_xb_y\vec{i}\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+$$
$$+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\vec{k}.$$

6-хоссага кўра: $|\vec{i}|^2=1$; $|\vec{j}|^2=1$; $|\vec{k}|^2=1$; $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\vec{j}=0$. У ҳолда икки векторнинг скаляр кўпайтмаси учун

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (3.13)$$

формулага эга бўламиз.

Демак, координаталари билан берилган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

4-хоссада $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлиши учун $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ бўлиши кўрсатилган эди. У ҳолда (3.13) формулага асосан икки векторнинг перпендикулярлик шарти қуйидагича ёзилади:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{3.14}$$

Демак, икки вектор ўзаро перпендикуляр бўлиши учун уларнинг бир исмли проекцияларининг жуфт-жуфт кўпайтмалари йиғиндиси нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси формуласи

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \text{ дан}$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{3.15}$$

тенгликни топамиз. (3.15) формулани қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{3.16}$$

(3.15) ва (3.16) формулалар икки вектор орасидаги бурчак косинусини топиш формуласи дейилади.

2-мисол. Агар $|\vec{a}|=7\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$ ва $\varphi=45°$ бўлса, $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ ва $\vec{a}-2\vec{b}$ векторлар α нинг қандай қийматларида ўзаро перпендикуляр бўлади?

Ечиш. Берилган векторларнинг скаляр кўпайтмасини топамиз:

$$(3\vec{a}+\alpha\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=3\vec{a}\vec{a}-6\vec{a}\vec{b}+\alpha\vec{a}\vec{b}-2\alpha|\vec{b}|^2=$$
$$=3|\vec{a}|^2-6|\vec{a}||\vec{b}|\cos45°+\alpha|\vec{a}||\vec{b}|\cos45°-2\alpha|\vec{b}|^2=$$
$$=3\cdot49\cdot2-6\cdot7\sqrt{2}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\alpha\cdot7\cdot\sqrt{2}\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\alpha\cdot16=$$
$$=294-168+28\alpha-32\alpha=126-4\alpha.$$

Икки вектор перпендикуляр бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши шартидан топамиз:

$$126-4\alpha=0\Rightarrow\alpha=31{,}5.$$

3-мисол. $\vec{a}=\{0;\ 7;\ 1\}$ ва $\vec{b}=\{0;\ 3;\ 4\}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. (3.16) формулага асосан:

$$\cos\varphi=\frac{0\cdot0+7\cdot3+4\cdot1}{\sqrt{7^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{25}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}=45^\circ.$$

МАШҚЛАР

1. Қуйидаги векторларнинг модулини ҳисобланг:

а) $\vec{a}=\{-2;\ 3;\ 6\}$ б) $\vec{b}=\{4;\ 2;\ 1\}$;
в) $\vec{c}=\{5;\ 0;\ 7\}$ г) $\vec{d}=\{0;\ 6;\ 5\}$.

2. $A(3;\ 2;\ 1)$ ва $B(4;\ 3;\ 5)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ векторларнинг координаталарини топинг.

3. Охири $(1;\ -1;\ 2)$ нуқтада бўлган $\vec{a}=\{2;\ -3;\ -1\}$ вектор бошининг координаталарини аниқланг.

4. Моддий нуқтага иккита $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ куч таъсир қилади. Агар $|\vec{F}_1|=10H$, $|\vec{F}_2|=6H$ бўлиб, $\vec{F}_1$ на $\vec{F}_2$ векторлар орасидаги бурчак 90° бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчисини топинг.

5. $ABCD$ тетраэдр берилган: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;
б) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$
йиғиндиларни топинг.

6. ABC учбурчакда $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ва $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ медиана бўлса, $\vec{c}$ векторни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўйича, $\vec{b}$ векторни $\vec{a}$ ва $\vec{c}$ векторлар бўйича ёйинг.

7. Узунлиги $|\vec{a}|=\sqrt{5}$ бўлган $\vec{a}$ вектор l ўқ билан 45° ли бурчак ташкил этади. Бу векторнинг l ўқдаги проекциясини топинг.

8. $\vec{a}=\{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b}=\{-1;\ 1;\ -2\}$, $\vec{c}=\{2;\ 1;\ -3\}$ векторлар берилган. $\vec{d}=\{11;\ -6;\ 5\}$ векторнинг $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базислар бўйича ёйилмасини топинг.

9. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $\overrightarrow{DB}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ диагоналлар ўтказилган. $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ векторларни $\vec{a}$ ва b векторларнинг чизиқли комбинацияси кўринишда ифодаланг.

10. $\vec{a}$ векторнинг модули $|\vec{a}|=2$ ва координата ўқлари билан $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=120^\circ$ бурчак ташкил этиши маълум бўлса, $\vec{a}$ векторнинг бу ўқлардаги проекциясини топинг.

11. $\vec{a}=\{12;\ -15;\ -16\}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини ҳисобланг.

12. Вектор координата ўқлари билан қуйидагича бурчаклар ташкил этиши мумкинми:

1) $\alpha=60°$; $\beta=45°$; $\gamma=120°$,

2) $\alpha=45°$; $\beta=60°$; $\gamma=135°$,

3) $\alpha=90°$; $\beta=60°$; $\gamma=150°$?

13. Агар $|\vec{a}|=3$ ва $\alpha=60°$; $\beta=45°$ бўлса, $\vec{a}$ векторнинг координаталарини аниқланг.

14. Агар $\vec{a}=\{4;\ -7;\ 3\}$ ва $\vec{b}=\left\{-5; 9; \frac{1}{2}\right\}$ бўлса, $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ векторнинг координаталарини топинг.

15. Агар $|\vec{a}|=\sqrt{2}$; $|\vec{b}|=3$ ва $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=45°$ бўлса, $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ векторнинг модулини ҳисобланг.

16. Агар $|\vec{a}|=7\sqrt{2}$; $|\vec{b}|=4$ ва $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=60°$ бўлса, $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ ва $\vec{a}-2\vec{b}$ векторлар α нинг қандай қийматларида ўзаро перпендикуляр бўлади?

17. Қуйидаги векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг:

1) $\vec{a}=\{-2;\ 5\}$ ва $\vec{b}=\{3;\ -5\}$;

2) $A(-2;\ 3)$; $B(3;\ 5)$ ва $C(4;\ -2)$ бўлса, $(\overline{AB}\cdot\overline{BC})$

18. Агар $\vec{a}=\{-2;\ 3\}$; $\vec{b}=\{3;\ 5\}$; $\vec{c}=\{-2;\ 8\}$; $\vec{d}=\{3;\ 1\}$ бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\sqrt{\vec{b}^2}$; г) $(\vec{a}+\vec{c})^2$; д) $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$; е) $(2\vec{a}+3\vec{c})(\vec{b}-2\vec{c})$.

19. Учлари $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ -1;\ 7)$, $C(7;\ 4;\ -2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг ички бурчакларини топинг.

20. $\vec{x}$ вектор $\vec{a}=\{6;\ -8;\ -7{,}5\}$ векторга коллинеар ва Oz ўқи билан ўтмас бурчак ташкил этади. Агар $|\vec{x}|=50$ бўлса, $\vec{x}$ векторнинг координаталарини топинг.

IV БОБ

ТЕКИСЛИКДА ВА ФАЗОДА КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

1-§. Текисликда координаталар системаси

Текисликда бирор O нуқтада кесишувчи ўзаро перпендикуляр иккита ўқни оламиз. Бу ўқларнинг ҳар бирида O нуқтадан бошлаб бирлик векторларни ажратамиз (25-чизма). Мусбат йўналишлари мос равишда $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторлар билан аниқланувчи иккита ўқдан ташкил топган система текисликда **т ў г р и б у р ч а к л и к о о р д и н а т а л а р с и с т е м а с и** дейилади ва $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ кўринишда белгиланади. O нуқта координаталар боши, $\vec{i}$, $\vec{j}$ бирлик векторлар эса координата векторлари дейилади. $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторлар ортогонал ва бирлик векторлардир, яъни

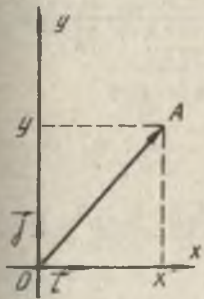
$$|\vec{i}|=|\vec{j}|=1;\ \vec{i}\perp\vec{j}.$$

Ox, Oy ўқлар мос равишда абсциссалар ва ординаталар ўқлари деб аталади.

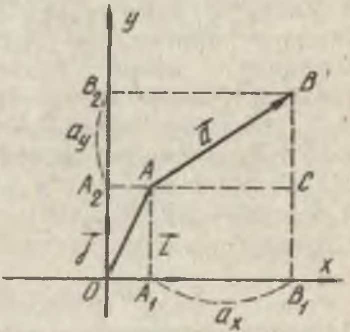
Текисликда $R=\{0;\ \vec{i},\ \vec{j}\}$ координаталар системаси берилган бўлсин. Шу текисликнинг A нуқтаси учун $\overline{OA}$ вектор A нуқтанинг радиус-вектори дейилади ва қуйидагича ёзилади (25- чизма):

$$\vec{r}=\overline{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}. \tag{4.1}$$

(4.1) даги x, y лар A нуқтанинг $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ системадаги координаталари дейилади ва бу $A(x;\ y)$ кўринишда белгиланади. Бу ерда x сон A нуқтанинг абсциссаси, y сон ординатаси дейилади. $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ координаталар системасида бирор $\vec{a}=\overline{AB}$ вектор берилган бўлса (26- чизма), унинг координата ўқларидаги проекциялари a_x ва a_y бу векторнинг координаталари дейилади.



25- чизма



26- чизма

Масалан, агар a векторнинг координаталарини a_x, a_y билан белгиласак, a_x $\vec{a}$ векторнинг Ox ўқига проекцияси бўлиб,

$$a_x=\text{Пр}_{Ox}\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{i})$$

формула бўйича, a_y эса $\vec{a}$ векторнинг Oy ўқидаги проекцияси бўлиб,

$$a_y=\text{Пр}_{Oy}\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{j})$$

формула бўйича аниқланади. $\vec{a}$ векторни Ox ва Oy ўқлари, яъни $\vec{i}$, $\vec{j}$ базис векторлар бўйича ёямиз. 26- чизмага асосан:

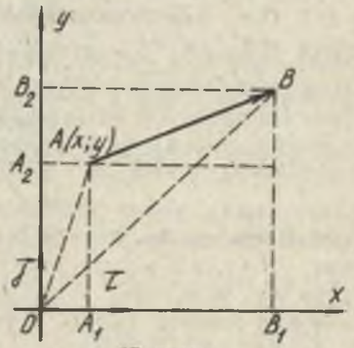
$$\overline{AC}=a_x\vec{i}; \quad \overline{CB}=a_y\vec{j}.$$

У ҳолда

$$\vec{a}=\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}=\{a_x;\ a_y\} \qquad (4.2)$$

$\{a_x;a_y\}$ миқдорлар жуфтлиги $\vec{a}$ векторнинг $\vec{i}$, $\vec{j}$ базислар бўйича ёйилмалари дейилади. (4.2) тенглик ёрдамида базис текисликдаги ҳар қандай векторни иккита ўзаро перпендикуляр векторларга ёйиш мумкин.

Энди $\vec{a}=\overline{AB}$ векторнинг бош ва охирги нуқталари (A ва B) нинг координаталари $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ координаталар системасида маълум бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ векторнинг координаталарини топиш мумкин. $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ нуқталар берилган бўлсин (27- чизма). У ҳолда $\vec{a}$ векторнинг Ox ўқидаги проекцияси A_1B_1 кесмадан иборат бўлиб, унинг узунлиги x_2-x_1 га, Oy ўқидаги проекцияси эса A_2B_2 кесмадан иборат бўлиб, унинг узунлиги y_2-y_1 га тенгдир.



27- чизма

$\overline{A_1B_1}=(x_2-x_1)\vec{i}$; $\overline{A_2B_2}=(y_2-y_1)\vec{j}$ ва $\vec{a}=\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}$ га тенг бўлгани учун

$$\vec{a}=\overline{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}. \qquad (4.3)$$

Демак, $\vec{a}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари мос равишда $\{(x_2-x_1);(y_2-y_1)\}$ бўлиб, унинг қийматлари шу вектор охири ва бошининг тегишли координаталар айирмасига тенг.

Агар $\vec{a}=\overline{AB}$ векторнинг A ва B нуқталари координаталари $A(x_1;\ y_1)$ ва $B(x_2;\ y_2)$ берилган бўлса, у ҳолда A ва B нуқталар орасидаги масофа ($\vec{a}$ векторнинг узунлиги, модули) ни ушбу формула бўйича топиш мумкин:

$$|\vec{a}|=\rho(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (4.4)$$

1-мисол. Агар $A(2;\ 3)$, $B(3;\ 2)$ бўлса, $\overline{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

Ечиш. Шартга кўра: $x_1=2$, $x_2=3$, $y_1=3$, $y_2=2$. $\overline{AB}$ векторнинг $\overline{i}$, $\overline{j}$ базис векторлар бўйича ёйилмаси (4.3) формула орқали топилади:

$$\overline{AB}=\{3-2;\ 2-3\}=\{1;\ -1\}=\overline{i}-\overline{j}$$

2-мисол. Берилган $A(4;3)$ нуқтадан 5 бирлик масофада Oy ўқида ётган $B(x;\ y)$ нуқтани топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра B нуқта Oy ўқида ётади. Oy ўқида ётган ҳар бир нуқтанинг абсциссаси нолга тенг бўлганлигидан B нуқта $(0;\ y)$ координаталарга эга бўлади. A ва B нуқталар орасидаги масофа 5 га тенг бўлгани учун (4.4) формулага асосан:

$$5=\sqrt{(0-4)^2+(y-3)^2}$$

тенгламани оламиз. Бу тенгламани

$$25=16+y^2-6y+9$$

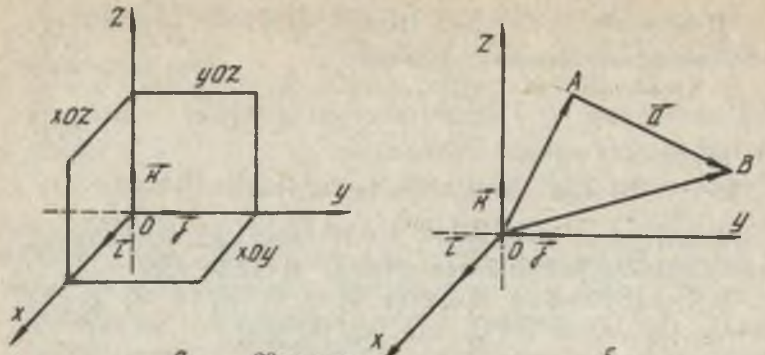
кўринишда ёзсак, $y^2-6y=0 \Rightarrow y(y-6)=0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $y_1=0$; $y_2=6$ топилади. Демак, A (4, 3) нуқтадан узоқлиги 5 га тенг бўлиб, Oy ўқида ётувчи нуқта иккита бўлиб, улар B_1 (0; 0) ва B_2 (0; 6).

2-§. Фазода координаталар системаси

Фазода O нуқта ва бу нуқтада кесишувчи ўзаро перпендикуляр учта Ox, Oy, Oz ўқларни оламиз. Бу ўқларнинг ҳар бир жуфти орқали текислик ўтказамиз. Уларни мос равишда xOy, xOz, yOz деб белгилаймиз (28-а чизма). Бу текисликлар координата текисликлари дейилади.

O нуқта ҳар қайси координата ўқини иккига ажратади. Улардан бирини мусбат, иккинчисини манфий деб оламиз. Бу усул билан ҳосил қилинган $Oxyz$ системага фазода тўғри бурчакли (декарт) координаталар системаси дейилади. Одатда Ox, Oy, Oz координата ўқларининг бирлик векторларини мос равишда $\overline{i}$, $\overline{j}$ ва $\overline{k}$ (ёки $\overline{l}_1$, $\overline{l}_2$, $\overline{l}_3$) лар орқали белгиланади. Фазода тўғри бурчакли координаталар системаси символик кўринишда $R=\{0,\ \overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\}$ ёки $R=\{0,\ \overline{l}_1,\ \overline{l}_2,\ \overline{l}_3\}$ каби белгиланади.

Фазодаги векторнинг координаталари деб унинг координата ўқларидаги проекцияларига айтилади. Масалан, бирор a вектор ўзининг a_x, a_y, a_z координаталари



а 28- чизма *б*

билан тўғри бурчакли координаталар системасида, яъни $Б=\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базис векторларда берилган бўлсин. У ҳолда $\vec{a}$ вектор қуйидагича ёзилади:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}. \tag{4.5}$$

(4.5) тенглик фазодаги ҳар қандай векторни ўзаро перпендикуляр учта векторга ёйиб ёзиш мумкинлигини билдиради. Умуман фазодаги ҳар қандай векторни учта ўзаро компланар бўлмаган (яъни бир текисликда ётмаган) векторларга ёйиш мумкин.

1- мисол. $\vec{a}=\{4;\ -6;\ 2\}$ вектор берилган. Унга коллинеар бўлган $\vec{b}=\{b_x,\ b_y;\ 4\}$ векторнинг номаълум координаталарини аниқланг.

Ечиш. Икки векторнинг коллинеарлик шартига асосан $\vec{b}=\lambda\vec{a}=\lambda(4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k})$ тенгликни ёзиб оламиз. Векторларнинг тенглигидан $2\lambda=4$ ни оламиз ва бундан $\lambda=2$. Бу қийматни ўрнига қўйсак: $\vec{b}=2(4\vec{i}-6\vec{j}+$ $+2\vec{k})=8\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}=\{8;\ -12;\ 4\}$ келиб чиқади.

Фазода A нуқтанинг координаталарини қараймиз. $Oxyz$ декарт координаталар системасида ихтиёрий нуқта учун $\overline{OA}$ векторнинг координаталарини шу A нуқтанинг координаталари деб қараш мумкин.

Одатда A нуқтанинг координаталари $A(x_A,\ y_A,\ z_A)$ кўринишда ёзилади.

A ва B нуқталарнинг координаталари маълум бўлганда $\overline{AB}$ векторнинг координаталари қуйидагича топилади (28- б чизма):

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}-x_A\vec{i}-y_A\vec{j}-z_A\vec{k}=$$

$$=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_b-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}.$$

Демак, $\overline{AB}$ векторнинг координаталари унинг охири ва бошини билдирувчи нуқталарнинг мос координаталари айирмасига тенг:

$$\overline{AB}=\{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\} \qquad (4.6)$$

A ва B нуқталар орасидаги масофа $\overline{AB}$ вектор узунлигига тенг ва у қуйидаги формула билан аниқланади:

$$d=\rho(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \qquad (4.7)$$

2-мисол. Агар A (1; 3; 4) ва B (3; 5; 7) бўлса, $\overline{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

Ечиш. $\overline{AB}=\{x_{AB}, y_{AB}, z_{AB}\}$ бўлсин. (4.6) формуладан фойдаланамиз:

$$x_{AB}=x_B-x_A=3-1=2,$$
$$y_{AB}=y_B-y_A=5-3=2,$$
$$z_{AB}=z_B-z_A=7-4=3.$$

Демак, $\overline{AB}=\{2; 2; 3\}$.

3-§. Қутб координаталар системаси. Нуқтанинг декарт ва қутб координаталари орасидаги боғланиш *

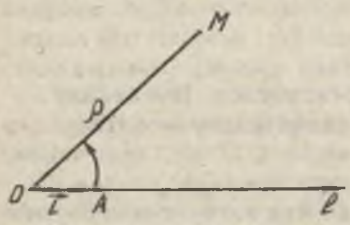
Текисликда бирор O нуқта Ol нур ва бу нурда ётувчи $\overline{OA}=\overline{i}$ бирлик векторни оламиз. Агар текисликда олинган Ol нурни Ox ўқ деб олинса ва $\overline{i}$ векторни O нуқта атрофида Oy ўқидаги $\overline{j}$ бирлик вектор устига тушириш учун қиска йўл бўйича буриш соат стрелкаси ҳаракатига тескари бўлса, у ҳолда координаталар системаси мусбат ориентацияли, текисликни эса ориентацияланган дейилади.

Ҳосил қилинган геометрик образ қутб координаталар системаси дейилади (29-чизма). У одатда $R=\{0; \overline{i}\}$ кўринишда белгиланади. O нуқта қутб боши, Ol нур қутб ўқи дейилади.

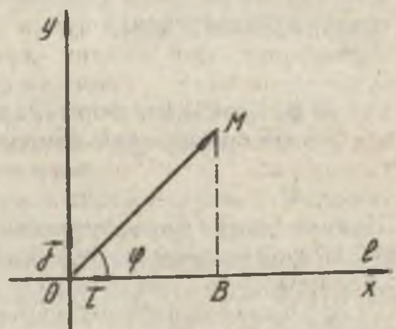
---

* Мазкур темани ёритишда «Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра» (*Ф. Ражабов, А. Нурметов*, «Ўқитувчи», 1990) китобидан фойдаланилди.

M нуқтанинг текисликдаги ҳолати иккита сон: бири $|\vec{i}|=1$ бирлик кесма ёрдамида ўлчанган $\rho=|\overline{OM}|$ масофа, иккинчиси Ol ва OM нурлар орасидаги $\varphi=(\vec{i}, \widehat{\ \overline{OM}})$ бурчак билан тўла аниқланади. Агар қутб ўқини $[OM)$ нур устига тушгунга қадар буриш соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда бажарилса, қутб бурчаги деб аталувчи φ бурчак мусбат деб, акс ҳолда, манфий деб ҳисобланади. ρ масофа M нуқтанинг **қутб радиуси** дейилади. Улар умумий ном билан M нуқтанинг қутб координаталари дейилади ва $M(\rho, \varphi)$ кўринишда белгиланади. Координаталар боши O нуқта учун $\rho=0$ бўлиб, аниқланмаган ҳисобланади. Агар ρ сон $0\leqslant\rho\leqslant\infty$ ва φ бурчак $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ оралиқларда ўзгарса, текисликнинг ҳар бир нуқтаси қутб координаталари билан мос келади. Қутб координаталар системасига мусбат йўналтирилган тўғри бурчакли координаталар системаси $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ ни мос қўйиш мумкин. Бунда O нуқта (қутб) координаталар боши



29- чизма



30- чизма

бўлиб хизмат қилади. ρ, φ лар M нуқтанинг қутб координаталари, x, y лар эса M нуқтанинг тўғри бурчакли координаталар системасидаги координаталари бўлсин (30- чизма). Чизмага кўра:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{4.8}$$

(4.8) формулалар ёрдамида M нуқтанинг қутб координаталари ρ ва φ маълум бўлса, x ва y ларнинг қийматини топиш мумкин.

Агар (4.8) формуладан x ва y нинг қийматлари маълум бўлса, у ҳолда ρ ва φ нинг қийматлари қуйидагича топилади:

$$\begin{cases} x^2=\rho^2\cos^2\varphi \\ y^2=\rho^2\sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=\rho^2 \Rightarrow \rho=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (4.9)$$

$\rho\neq 0$ деб фараз қилсак:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \sin\varphi=\frac{y}{\rho}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{ёки } \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}. \qquad (4.10)$$

Олинган (4.8), (4.9), (4.10) формулалар декарт ва қутб координаталар системаларини богловчи формулалардир.

Шуни эслатиб ўтамизки, M нуқтанинг декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтишда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$ формула қутб бурчагининг бош қийматини тўла аниқламайди, чунки φ мусбат ёки манфий эканлигини ҳам билиш керак. Бу эса M нуқтанинг қайси чоракда жойлашишига қараб аниқланади. Масалан (4.10) формулада $x=4$, $y=4$ бўлса, $\operatorname{tg}\varphi=1$ бўлиб, $\varphi=45°$. Лекин $x=-4$, $y=-4$ бўлганда ҳам $\operatorname{tg}\varphi=1$ бўлиб, аслида φ эса — 225° бўлиши керак, чунки M (—4; —4) нуқта учинчи чоракда жойлашган. Шунинг учун ҳам φ бурчакнинг қиймати ва ишорасини (4.10) формуладаги $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ га қараб аниқлаш қулайроқ.

Қутб координаталар системасида икки нуқта орасидаги масофа қуйидагича топилади. $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ ва $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ нуқталар берилган бўлсин. У ҳолда (4.8) формулага кўра:

$$\begin{cases} x_1=\rho_1\cos\varphi_1, \\ c_1=\rho_1\sin\varphi_1 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} x_2=\rho_2\cos\varphi_2, \\ y_2=\rho_2\sin\varphi_2 \end{cases}$$

У ҳолда

$$d(M_1, M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(\rho_2\cos\varphi_2-\rho_1\cos\varphi_1)^2+(\rho_2\sin\varphi_2-\rho_1\sin\varphi_1)^2}=$$

$$=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

Демак,

$$d(M_1, M_2)=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Текисликда кутб координаталар системаси берилган бўлсин. Бу системада ρ, φ ёки улардан бирортаси қатнашувчи $f(\rho, \varphi)$ функцияни олайлик. Бу функция текисликда бир қанча эгри чизиқларни ифодалашини кўрсатиш мумкин. Масалан, $f(\rho, \varphi)=\rho-6$ функция билан аниқланган бўлсин. У ҳолда

а) $F_1=\{M(\rho, \varphi)/_{\rho=6}\}$ — маркази O кутбда ва радиуси $\rho=6$ га тенг бўлган айлана;

б) $F_2=\{M(\rho, \varphi)/_{\rho-6>0}\}$ — маркази O кутбда ва радиуси $\rho=6$ га тенг бўлган доира ташқарисидаги нуқталар тўплами;

в) $F_3=\{M(\rho, \varphi)/_{\rho-6<0}\}$ — доира ичидаги нуқталар тўпламини билдиради ва ҳоказо. $f(\rho, \varphi)$ тенглама F_1 чизиқнинг берилган кутб координаталар системасидаги тенгламаси дейилади. Ушбу

$$\rho=a\ (a-\text{const}) \tag{4.11}$$

тенглама маркази кутбда, радиуси a га тенг бўлган айлананинг тенгламаси бўлади.

Энди кутб айланада ётган ҳолни кўрамиз. Бунда кутб ўқи эса айлана марказидан ўтсин деб фараз қиламиз (31- чизма). Чизмадан қуйидагига эга бўламиз:

$$\rho=2a\cos\varphi \tag{4.12}$$

(4.12) изланаётган айлана тенгламасидир. (4.11) ва (4.12) тенгламалар бир хил радиусли битта айланани ифодалайди, лекин тенгламалари ҳар хил. Биттаси ρ ни ўзида сақласа, иккинчиси эса ρ ва φ ни ҳам ўзида сақлайди.

Демак, айлана кутб координаталар системасига нисбатан жойлашувига кўра ҳар хил кўринишдаги тенгламаларга эга бўлар экан.

1- мисол. Кутб координаталар системасида берилган $A\left(4; \frac{\pi}{3}\right)$ ва $B\left(6; -\frac{\pi}{4}\right)$ нуқталарнинг декарт координаталар системасидаги координаталарини топинг.

Ечиш. а) A нуқта учун:

$$A\left(4; \frac{\pi}{3}\right);\ \rho=4;\ \varphi=\frac{\pi}{3}=60^\circ.$$

(4.8) формулаларга кўра кутб координаталари ёрдамида берилган нуқтанинг декарт координаталари ҳолатини аниқлаймиз:

$$x = 4\cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2;$$

$$y = 4 \cdot \sin 60° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Демак, декарт координаталар системасида: $A(2; 2\sqrt{3})$.

б) $B(6; -\frac{\pi}{4})$ бўлган ҳолда: $\rho = 6; \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45°$

. . (4.8) формулаларга кўра топамиз:

$$x = 6 \cdot \cos(-45°) = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$$

$$y = 6 \cdot \sin(-45°) = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}.$$

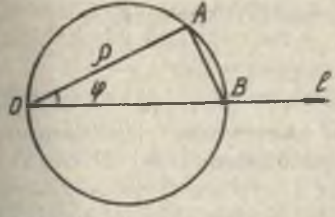
Демак, $B(3\sqrt{2};\ -3\sqrt{2})$.

2-мисол. Қутб координаталар системасида берилган $\rho^2 \sin 2\varphi = 2a^2$ чизиқ тенгламасини декарт координаталар системасида ифодаланг.

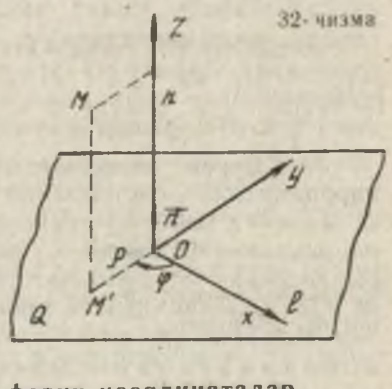
Ечиш. $\rho^2 \sin 2\varphi = 2a^2$;

$$2\rho \sin\varphi \cdot \rho \cos\varphi = 2a^2.$$

(4.8) формулага асосан: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$ бўлгани учун $2xy = 2a^2$ тенгликни оламиз. Бундан эса $xy = a^2$ келиб чиқади.



31-чизма



32-чизма

4-§. Цилиндрик ва сферик координаталар системаси

1. Цилиндрик координаталар системаси қуйидагича киритилади. Фазода бирор Q текислик ва унда бирор O нуқта оламиз. Шу O нуқтадан чиқувчи ва Q текисликда ётадиган l нур ўтказамиз ва бу нурда унинг йўналишини аниқловчи $\vec{i}$ бирлик вектор оламиз (яъни Q текисликда қутб координаталар системаси киритилади). Энди шу Q текисликка перпендикуляр ва унинг O нуқтасига қўйилган узунлиги бирга тенг $\vec{n}$ нормал векторни оламиз (32- чизма). Агар $\vec{n}$ векторнинг учидан қараганда Q текисликдаги шу вектор атрофида буришдаги ҳаракатнинг йўналиши соат стрелкаси ҳаракатига тескари бўлса, буриш бурчаги φ мусбат деб олинади ва натижада Q текисликдаги нуқталар ρ масофа ва φ бурчак билан аниқланади. Энди фазодаги ихтиёрий нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун текисликдаги бу нуқтанинг проекцияси ρ ва φ лар билан ҳамда бу нуқтадан текисликкача масофани билиш керак бўлади, яъни бу нуқтани учта сон билан тўлиқ аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, M нуқта фазонинг ихтиёрий нуқтаси, M^1 эса унинг Q текисликдаги проекцияси бўлсин. У ҳолда $\overline{MM^1}$ вектор $\vec{n}$ векторга коллинеар бўлади (32- чизма), яъни $\overline{MM^1}=h\vec{n}$.

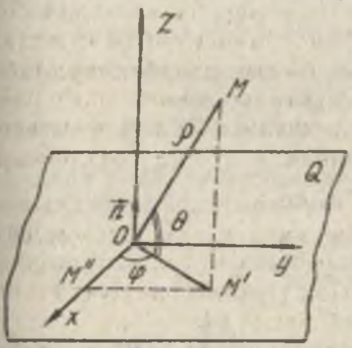
Агар M^1 нуқтанинг Q текисликдаги қутб системасига нисбатан координаталарини ρ, φ десак, у ҳолда сонларнинг тартибланган (ρ, φ, h) учлиги M нуқтанинг *цилиндрик координаталари* деб аталади.

Декарт координаталар системасини 32- чизмада кўрсатилгандек қилиб танлаб олинса, M нуқтанинг декарт координаталари x, y, z ларни шу нуқтанинг цилиндрик координаталари ρ, φ, h лар орқали ифодалаш мумкин:

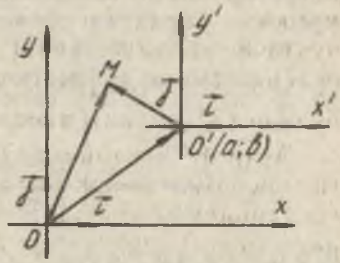
$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = h. \tag{4.13}$$

2. Сферик координаталар системаси. Цилиндрик координаталар системасини киритганимиздек, O нуқта, Q текислик олиб шу текисликда l нур ва Q текисликка перпендикуляр қилиб $\vec{n}$ бирлик вектор чизиб оламиз (33- чизма). M фазонинг ихтиёрий нуқтаси, M' эса M нинг Q текисликдаги проекцияси бўлсин. Сонларнинг тартибланган (ρ, φ, θ) учлиги M нуқтанинг с ф е р и к к о о р д и н а т а л а р и дейилади, бунда $\rho = |\overline{OM}|$, φ — $\overline{OM}$ векторнинг Q текисликдаги проекцияси билан Ox ўқ орасидаги бурчак, бу бурчак Ox ўқдан бошлаб соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда ҳисобланади. θ — $\overline{OM}$ вектор билан Q текислик орасидаги бурчак. Шунингдек, $\rho>0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ деб фараз қиламиз, бундан ташқари (xOy) координаталар текислигидан юқорида турган нуқталар учун $O \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ва қуйи ярим фазога тегишли нуқталар учун $-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant O$ бўлади. Сферик ва декарт координаталарини богловчи ушбу формулаларни келтириб чиқариш осон (32- чизма):

$$x = |OM'|\cos\varphi = \rho\cos\theta\cos\varphi,$$
$$y = |OM'|\sin\varphi = \rho\cos\theta\sin\varphi,$$
$$z = |MM'| = \rho\sin\theta. \qquad (4.14)$$



33- чизма



34- чизма

5- §. Декарт координаталарини алмаштириш

Бир қатор геометрик масалаларни ечишда декарт координаталарининг бир системасидан бошқасига ўтишга тўгри келади. Хусусан, битта нуқтанинг ҳар хил системалардаги координаталарини богловчи формулаларни топиш масаласига келамиз. Дастлаб иккита хусусий ҳолни қараймиз.

а) Декарт координаталар системасини параллел кўчириш. Бу ҳолда иккита R ва R' координаталар системалари бир хил координата векторларига ва ҳар хил координаталар бошига эга бўлади:

$$R = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}, \; R' = \{O'; \bar{i}, \bar{j}\}.$$

O' нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари (a; b) бўлсин (34- чизма). Ихтиёрий M нуқтанинг текисликда эски R координаталар системасига нисбатан координаталари (x ; y), шу нуқтанинг янги R' системага нисбатан координаталари (x'; y') бўлсин. У ҳолда векторларни қўшиш қоидасига кўра (34- чизма):

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \tag{4.15}$$

$$\overline{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j}, \tag{4.16}$$

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$\overline{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

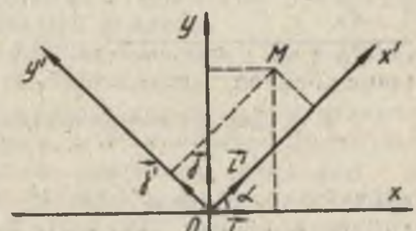
(4.16) ни (4.15) га қўйиб, икки векторнинг тенглик аломатига кўра топамиз:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b. \end{cases} \tag{4.17}$$

(4.17) изланаётган алмаштириш — координаталар системасини параллел кўчириш формуласидир.

Агар қаралаётган M нуқта фазода бўлса, у ҳолда (4.17) формула қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c \end{cases} \tag{4.18}$$



35- чизма

Координаталар бошини ўзгартирмасдан координата ўқларини α бурчакка буришда координаталарни алмаштириш. $R=\{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ ва $R'=\{0; \vec{i}', \vec{j}'\}$ координаталар системалари умумий бошга эга бўлади. $\vec{i}$, $\vec{j}$ лар x ва y ўқларининг ортлари, $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ эса x' ва y' ларнинг ортлари, α 0 дан 2π гача оралиқдаги бурчак бўлиб, у $\vec{i}$ вектор билан устма-уст тушгунча соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда шу бурчак қадар бурилади. Шунингдек, $\vec{j}$ вектор ҳам α бурчак қадар буриш натижасида $\vec{j}'$ вектор билан устма-уст тушади. Маълумки (35-чизма),

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$\overline{OM'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'. \tag{A}$$

Янги координата векторларини эски координата векторлари орқали ёзамиз:

$$\vec{i}' = a_x\vec{i} + a_y\vec{j},$$
$$\vec{j}' = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}. \qquad (4.19)$$

Агар R ва R' декарт координаталар системалари бир хил йўналган бўлса, у ҳолда

$$(\vec{i}, \hat{\ } \vec{j}') = 90° + \alpha; (\vec{i}', \hat{\ } \vec{j}) = 90° - \alpha; (\vec{j}, \hat{\ } \vec{j}') = \alpha, \qquad (4.20)$$

агар қарама-қарши йўналган бўлса, у ҳолда

$$(\vec{i}, \hat{\ } \vec{j}') = 270° + \alpha; (\vec{i}', \hat{\ } \vec{j}) =$$
$$= 90° - \alpha; (\vec{j}, \hat{\ } \vec{j}') = 180° + \alpha \qquad (4.21)$$

бўлади (4.19) тенгликларни навбат билан $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторларга скаляр кўпайтирамиз:

$$a_x = \vec{i}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{i}', \hat{\ } \vec{i}), \; a_y = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{i}', \hat{\ } \vec{j}),$$
$$b_x = \vec{j}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{j}', \hat{\ } \vec{i}), \; b_y = \vec{j}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{j}', \hat{\ } \vec{j}).$$

(4.20), (4.21) муносабатларни ҳисобга олсак, R ва R' координаталар системаси бир хил йўналган бўлса,

$$\vec{i}' = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}, \; \vec{j}' = \{-\sin\alpha; \cos\alpha\}$$

кўринишда, агар R ва R' координатлар системаси қарама-қарши йўналган бўлса,

$$\vec{i}' = \{\cos\alpha; -\sin\alpha\}, \; \vec{j}' = \{-\sin\alpha; \cos\alpha\}$$

кўринишда бўлади. У ҳолда (A) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (4.22)$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha. \end{cases} \qquad (4.23)$$

(4.22) ва (4.23) формулаларни бирлаштириб,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha \end{cases} \quad (4.24)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $\varepsilon = \pm 1$ бўлиб, R ва R' лар бир хил йўналган бўлса, $\varepsilon = +1$, қарама-қарши йўналган бўлса, $\varepsilon = -1$ бўлади.

Умумий ҳолда, координаталар бошлари ҳам, координата векторлари ҳам ҳар хил йўналишда жойлашган бўлса, ихтиёрий M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари $(x; y)$ бўлса, у ҳолда (4.17) ва (4.24) тенгламалардан қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + a, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + b. \end{cases} \quad (4.25)$$

1-мисол. Фазода $M(2; 3; 4)$ нуқта берилган. Агар ўқларни параллел кўчиришда янги координаталар боши эски системада $(-1; 1; 2)$ координаталарга эга бўлса, шу M нуқтанинг янги системадаги координаталарини топинг.

Ечиш. (4.18) формулаларга кўра:

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c \end{cases} \begin{cases} 2 = x' - 1, \\ 3 = y' + 1, \\ 4 = z' + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3, \\ y' = 2 \\ z' = 2 \end{cases}$$

га эга бўламиз. Демак, $M(x'; y'; z') = M(3; 2; 3)$.

2-мисол. Ўқларни $\varphi = \frac{\pi}{4}$ бурчакка бурганда $M(3; 4)$ нуқтанинг координаталарини янги x' ва y' координаталари орқали ифодаланг.

Ечиш.

$$\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\varphi = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

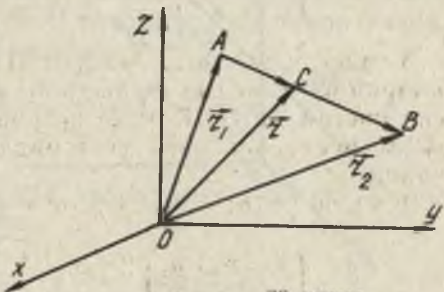
бўлгани учун (4.22) формулаларга кўра:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ёки
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$
ларни ҳосил қиламиз.

6- §. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

AB кесмани берилган $\lambda > 0$ нисбатда бўлиш деганда шу кесмада шундай $C(x; y; z)$ нуқта топиш тушуниладики ҳосил бўлган AC ва CB (36- чизма) кесмалар нисбати учун қуйидаги тенгликлар ўринли бўлсин:
$$\frac{AC}{CB} = \lambda \text{ ёки } AC = \lambda \cdot CB.$$



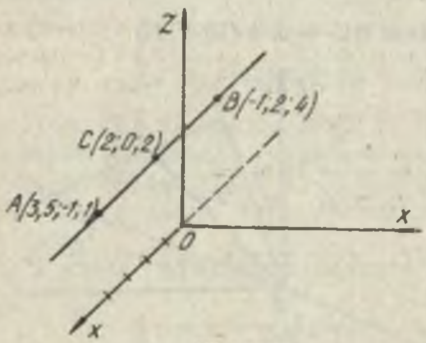
36- чизма

Берилган кесманинг учлари A ва B нуқталар мос равишда x_1, y_1, z_1 ва x_2, y_2, z_2 координаталарга эга бўлсин. Изланаётган C нуқтанинг x, y, z координаталарини топамиз (36- чизма). $C(x; y, z)$ нуқтанинг радиус-векторини $\vec{r}$, A ва B нуқталарнинг радиус-векторларини $\vec{r}_1$, ва $\vec{r}_2$ орқали ифодаласак, векторларни қўшиш қоидасига кўра:
$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{AC} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{r} - \vec{r}_1,$$
$$\vec{r} + \vec{BC} = \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}.$$
$\vec{AC}$ ва $\vec{CB}$ ўзаро чизиқли боғлиқ бўлгани учун:
$$\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$$
ёки
$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}).$$
Бундан $\vec{r}$ векторни топамиз:
$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda} \tag{4.26}$$
$\vec{r}$, $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ векторларни координаталарига нисбатан ёзамиз:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k},$$
$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},$$
$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Буларни (4.26) га қўямиз ва икки векторнинг тенглигидан фойдаланиб

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (4.27)$$



37- чизма

тенгликларни ёзамиз. (4.27) формула AB кесмани берилган нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топиш формуласидир. Агар C нуқта AB кесмани тенг иккига бўлса, $\lambda = 1$ бўлиб, (4.26) ва (4.27) формулалар мос равишда қуйидагича ёзилади:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2},$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

1- мисол. AB кесманинг охири $B\,(-1;\ 2;\ 4)$ ва уни $\lambda = \frac{1}{2}$ нисбатда бўлувчи $C\,(2;\ 0;\ 2)$ нуқта берилган. AB кесманинг A учи координаталарини топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра C нуқта AB кесмани $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$ нисбатда бўлади (37- чизма). (4.27) формуладан фойдаланамиз:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda};\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda};\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Бу формулаларга ва B ва C нуқталарнинг координаталарини қуйсак:

$$x_A = x_C(1+\lambda) - x_B\lambda = 3{,}5\,;$$
$$y_A = y_C(1+\lambda) - \lambda y_B = -1\,;$$
$$z_A = z_C(1+\lambda) - \lambda z_B = 1\,.$$

Жавоб: A (3,5; —1,1).

2-мисол. A (4; 4) нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланиб B (—1; 2) нуқтага келади. A ва B нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш. A ва B нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасини C (x; 0) деб белгилайлик. Бу ҳолда A, B ва C нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Масала шартига кўра:

$$x_1 = 4;\ x_2 = -1;\ x_C = x;$$
$$y_1 = 4;\ y_2 = 2;\quad y_C = 0.$$

Бу қийматларни (4.27) формулага қўйиб, λ нинг қийматини аниқлаймиз:

$$y_C = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \Rightarrow 0 = \frac{4+2\lambda}{1+\lambda} \Rightarrow \lambda = -2\,.$$

λ нинг бу қийматини (4.27) формуланинг биринчисига қўйсак:

$$x = \frac{4 + (-2)(-1)}{1+(-2)} = \frac{4+2}{-1} = -6\,.$$

Демак, A ва B нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ Ox ўқини C (—6; 0) нуқтада кесади.

3-мисол. Бир жинсли стерженнинг оғирлик маркази C (5; 1) нуқтада бўлиб, учларидан бири A (—1; —3) нуқтададир. Иккинчи учининг координаталарини топинг.

Ечиш. Агар стерженнинг иккинчи учи B (x; y) нуқтада десак, (4.27) формулага асосан:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}\,;\ y_C = \frac{y_A + y_B}{2}\,.$$

Бундан

$$x_B = 2x_C - x_A, y_B = 2y_C - y_A$$

ларни ҳосил қиламиз. Берилган нуқталарнинг координаталарини бу формулаларга қўйиб, стерженнинг иккинчи учининг координаталарини топамиз:

$$x_B = 11; y_B = 5.$$

C нуқтанинг радиус-вектори учун қуйидаги формуланинг тўғрилиги (4.26) дан келиб чиқади:

$$\vec{r} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{r}_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{r}_2$$

ёки

$$\vec{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{OB}.$$

Берилган кесмани берилган нисбатда бўлишини массалар системасининг оғирлик марказини топиш масаласига татбиқини кўриб чиқамиз.

Берилган $A(x_1; y_1; z_1)$ ва $B(x_2; y_2; z_2)$ нуқталарга мос равишда m_1 ва m_2 массалар қўйилган бўлсин. Бу массалар системасининг оғирлик маркази C нинг координаталарини топиш талаб қилинади. Физикадан маълумки, C нуқта AB кесма ичида ётади ва бу кесмани узунликлари кесма учларига жойлаштирилган массаларга тескари пропорционал қисмларга ажратади, яъни λ сон бу ҳолда мусбат бўлиб $\frac{m_2}{m_1}$ га тенг. Шунинг учун (4.27) дан A ва B нуқталарга жойлаштирилган m_1, m_2 массалар системаси оғирлик марказининг координаталари қуйидагича бўлади:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.28)$$

Шунинг учун

$$\overline{OC} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overline{OA} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overline{OB}.$$

Агар m_1 ва m_2 нол қийматларни бир вақтда қабул қилмайди деб фараз қилсак, яъни массалар системаси B нуқтага жойлаштирилган массага ($m_1=0$) ёки A нуқтага жойлаштирилган ($m_2=0$) битта массага келтирилса, C оғирлик маркази бу ҳолда ё B нуқта билан, ё A нуқта билан устма-уст тушади. Демак, массаларнинг $\frac{m_2}{m_1}$ нисбати нолдан ∞ гача бўлган қийматларни кетма-кет қабул қилса, C оғирлик маркази AB кесмада A нуқтадан бошлаб B нуқтагача бўлган барча қийматларни қабул қилади.

Энди $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $D(x_3;\ y_3;\ z_3)$ нуқталар берилган бўлиб, уларга m_1, m_2, m_3 массалар жойлаштирилган ва бунда $m_1+m_2+m_3>0$ бўлсин. Бу массалар системасининг оғирлик марказини топиш формуласини чиқарамиз. Аниқлик учун $m_1+m_2>0$ деб фараз қиламиз. Агар $m_3=0$ бўлса, масала A ва B нуқталарга жойлаштирилган массалар системасига келтирилади ва изланаётган оғирлик маркази (4.28) формула билан топилади. Бизни $m_3>0$ бўлган ҳол қизиқтиради. Бу масалани икки босқичда ҳал қилиш мумкин. Олдин A ва B нуқталарга жойлаштирилган m_1 ва m_2 массалар оғирлик маркази C_1 нинг координаталарини топамиз:

$$X_{C_1}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad Y_{C_1}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2},$$

$$Z_{C_1}=\frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}. \tag{4.29}$$

C ва D нуқталарга жойлаштирилган m_1+m_2 ва m_3 массалар системаси учун $\lambda=\frac{m_3}{m_1+m_2}$ га эга бўламиз. Шунинг учун (4.29) дан фойдаланиб, (4.27) дан топамиз:

$$X_C=\frac{x_{C_1}+\frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Шунга ўхшаш:

$$Y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, Z_C = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

$$\vec{OC} = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{OA} + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\vec{OB} +$$

$$+ \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\vec{OD} \qquad (4.30)$$

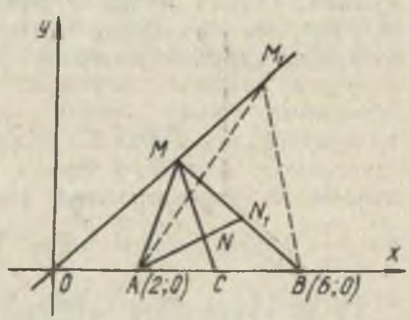
экани келиб чиқади.

(4.30) га кўра агар A, B, D нуқталарга $m_1 + m_2 + m_3 > 0$ шартда ҳар хил $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$, $m_3 \geqslant 0$ массалар жойлаштирилса, бу массалар системасининг оғирлик марказлари тўплами ABD учбурчакдан иборат бўлади.

Агар A, B, D нуқталар бир тўғри чизиқда, D нуқта AB кесма ичида ётса, у ҳолда қаралаётган оғирлик марказларининг тўплами AB кесмадан иборат бўлади.

4-мисол. Икки учи $A(2;0)$ ва B $(6;0)$ нуқталарда, учинчи учи биринчи чорак координата бурчагининг биссектрисасида ётган учбурчак оғирлик маркази геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Асоси AB кесмадан иборат бўлиб, бир учи биссектрисанинг ихтиёрий нуқтасида бўлган учбурчакларни чексиз кўп ясаш мумкин (38-чизма). Биссектрисада ётган ихтиёрий M $(x_1; y_1)$ нуқтани олсак, $\triangle$ ABM ни ҳосил қиламиз.



38-чизма

ABM нинг оғирлик маркази $N(x; y)$ нуқта бўлсин, M нуқта биссектрисада ётгани учун $x_1 = y_1$ бўлади. N нуқта учбурчакнинг оғирлик маркази бўлгани учун $CN:NM = 1:2$ муносабат ўринлидир. Бундан: C $(4; 0)$. Буларни эътиборга олсак,

$$x = \frac{4 + \frac{1}{2}x_1}{1 + \frac{1}{2}}, y = \frac{0 + \frac{1}{2}y_1}{1 + \frac{1}{2}}$$

ёки

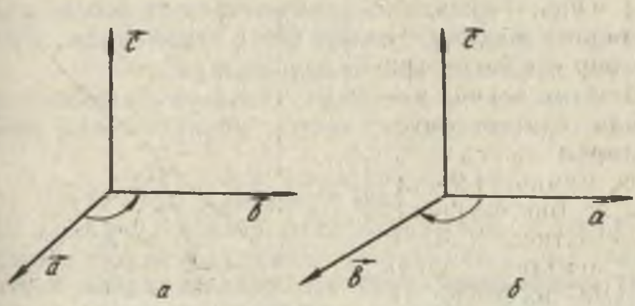
$$\begin{cases} 3x = x_1, \\ 3y = y_1. \end{cases} \quad x_1 = y_1 = 3y \text{ бўлгани учун}$$

$$3x = 8 + 3y \text{ ёки } 3x - 3y - 8 = 0.$$

Демак, изланаётган оғирлик марказининг геометрик ўрни тўгри чизиқдан иборат экан.

7- §. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси. Вектор кўпайтманинг хоссалари. Учбурчакнинг юзи

1- таъриф. Агар компланар бўлмаган учта $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларни умумий O нуқтага келтирилгандан сўнг бу векторлардан бирини иккинчиси билан устма-уст тушгунга қадар (улар орасидаги кичик бурчак бўйича) айлантириш учинчи векторнинг охиридан қаралганда соат стрелкасига қарши йўналишда кўринса, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учлиги *ўнг учлик* (39- а чизма), айлантириш соат стрелкаси йўналиши бўйича бўлса, *чап учлик* (39- б чизма) дейилади.



39- чизма

2- таъриф. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ векторга вектор кўпайтмаси деб шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, бу вектор қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

1) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$;

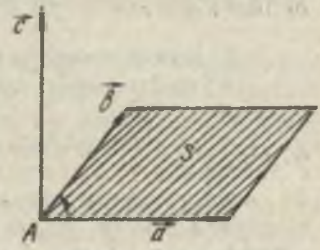
3) векторларнинг тартибланган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ учлиги ўнг учлик ташкил этади.

Вектор кўпайтма $[\vec{a}\ \vec{b}]$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ёки $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ каби белгиланади.

1-шарт вектор кўпайтма (яъни $\vec{c}$ вектор) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ётган текисликка перпендикуляр эканлигини билдиради.

2-шарт $\vec{c}$ векторнинг узунлиги томонлари $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан иборат параллелограммнинг юзига тенг эканлигини билдиради.

3-шарт $\vec{c}$ векторнинг йўналишини шундай олиш кераклигини билдирадики, $\vec{c}$ вектор учидан қараганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга қараб бурилиши соат стрелкасига қарши йўналишда бўлиши керак (40-чизма).



40-чизма

Вектор кўпайтманинг хоссаларини кўриб чиқамиз.

1. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар ёки улардан бири нол вектор бўлса, уларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлса, у ҳолда $[\vec{a}\vec{b}] = 0$. Агар улар параллел бўлса, улар орасидаги бурчак 0 ёки 180° бўлиб, $\sin(\vec{a} \hat{\ } \vec{b}) = 0$ бўлади ва иккинчи шартга асосан кисликка перпендикуляр, аммо $[\vec{a}\vec{b}]$ кўпайтмада $\vec{a}, \vec{b}$ ўнг c вектор кўпайтма нол вектор бўлади.

2. Агар вектор кўпайтма кўпайтувчиларининг ўринларини алмаштирилса, вектор кўпайтманинг ишораси ўзгаради:

$$[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}].$$

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, вектор кўпайтма таърифининг 1-ва 2-бандларига асосан $[\vec{a}\vec{b}]$ ва $[\vec{b}\vec{a}]$ векторларнинг узунликлари тенг ва иккаласи ҳам битта текисликка перпендикуляр, аммо $[\vec{a}\vec{b}]$ кўпайтмада $\vec{a}, \vec{b}$ ўнг учликни $[\vec{b}\vec{a}]$ да эса чап учликни ташкил этгани учун $[\vec{a}\vec{b}]$ вектор йўналишига қарама-қарши $[\vec{b}\vec{a}]$ вектор ҳосил қиламиз.

3. Исталган ҳақиқий сон λ учун ушбу муносабатлар ўринли:

$$\lambda[\vec{a}\vec{b}] = [\lambda\vec{a}\vec{b}] = [\vec{a}\lambda\vec{b}].$$

4. Вектор кўпайтма учун тақсимот қонуни ўринлидир:

$$[\vec{a}(\vec{b} + c)] = [\vec{a}\vec{b}] + [\vec{a}\vec{c}].$$

5. Бирлик векторларнинг вектор кўпайтмалари қуйидагича бўлади:

$$[\vec{i}\,\vec{j}] = -[\vec{j}\,\vec{i}] = \vec{k};\ [\vec{i}\,\vec{i}] = 0;$$
$$[\vec{k}\,\vec{i}] = -[\vec{i}\,\vec{k}] = \vec{j};\ [\vec{j}\,\vec{j}] = 0;$$
$$[\vec{j}\,\vec{k}] = -[\vec{k}\,\vec{j}] = \vec{i};\ [\vec{k}\,\vec{k}] = 0.$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар координаталари билан берилган, яъни

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

бўлса, у ҳолда

$$[\vec{a}\vec{b}] = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (4.31)$$

ёки

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}. \qquad (4.32)$$

Вектор кўпайтма ёрдамида учбурчакнинг юзини ҳисоблаш учун формула чиқариш мумкин. ABC учбурчак учларининг координаталари билан берилган бўлсин:

$$A(x_1;\ y_1;\ z_1);\ B(x_2;\ y_2;\ z_2);\ C(x_3;\ y_3;\ z_3).$$

Вектор кўпайтма таърифига кўра (2- шарт), ҳосил бўлган векторнинг модули параллелограммнинг юзига тенг. Унинг ярми эса учбурчакнинг юзини беради:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\vec{AB}\cdot\vec{AC}]|.$$

Энди вектор кўпайтманинг механикага татбиқи ва унга доир мисол кўрамиз.

а) Куч моменти. Бирор Q каттиқ жисм берилган бўлсин ва бу жисмнинг битта, масалан O нуқтаси қўзғолмас қилиб маҳкамланган бўлсин. Агар Q жисмнинг бошқа P нуқтасига $\vec{F}$ куч қўйилса, у ҳолда бу куч Q жисмни айлантиради. Натижада айлантирувчи момент ёки куч моменти ҳосил бўлади. Механикадан маълумки, куч моменти ($\vec{m}$ вектор) ушбу формула бўйича топилади:

$$\vec{m} = [\vec{r}\ \vec{F}], \tag{4.33}$$

бунда $\vec{r} = \overline{OP}$ P нуқтанинг радиус-вектори.

Энди P нуқтага иккита $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ куч қўйилган бўлсин ва бу кучларнинг йиғиндиси $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ бўлсин. Агар $\vec{m}$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ мос равишда $\vec{F}$, $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$ кучларнинг моментлари бўлса, у ҳолда

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$$

бўлади. (4.33) ва охирги формула вектор кўпайтманинг хоссасидан осонгина келиб чиқади:

$$\vec{m} = [\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}, (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)] =$$
$$= [\vec{r}, \vec{F}_1] + [\vec{r}, \vec{F}_2] = \vec{m}_1 + \vec{m}_2.$$

1-мисол. $\vec{F} = \{3; 2; -4\}$ куч A $(2; -1; 1)$ нуқтага қўйилган. Бу кучнинг координаталар бошига нисбатан моментини аниқланг.

Ечиш. Агар $\vec{F}$ вектор A нуқтага қўйилган бўлса, $\vec{a}$ вектор O нуқтадан A нуқтага йўналган, яъни $\vec{a} = \overline{OA}$ бўлади. $[\vec{a}, \vec{F}]$ вектор кўпайтма эса, $\vec{F}$ кучнинг O нуқтага нисбатан куч моментини ифодалайди. Демак, $\vec{a} = \overline{OA} = \{2; -1; 1\}$,

$$\overline{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}.$$

б) Тангенциал ва бурчак тезлик. Бирор P нуқта l тўғри чизиқ атрофида узунлик бўйича ўзгармас $\vec{v}(t)$ тангенциал тезлик билан айланма ҳаракат қилаётган бўлсин. Тангенциал тезлик $\vec{v}(t)$ вектордан иборат бўлиб, бу вектор ҳар бир вақт моментида P нуқта траекториясига уринма бўйлаб йўналган ва

$$|\vec{v}(t)| = v_0 = \text{const} > 0. \ r_0 = |\vec{r}(t)| \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{r}(t))$$

P нуқтадан l чизиққача бўлган масофа бўлгани учун r_0 миқдор t вақтга ва O нуқтанинг l тўғри чизиқдаги ҳолатига боғлиқ бўлмаган мусбат ўзгармасдир. Энди қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\vec{\omega}$ векторни қараймиз:

1) $$|\vec{\omega}| = \frac{v_0}{r_0};$$

2) вақтнинг ҳар қандай моментида $\vec{\omega}$, $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ векторлар ўнг учликни ташкил қилади;

3) ҳар қандай t да $\vec{v}(t)$ вектор $\vec{\omega}$, $\vec{r}(t)$ векторларга перпендикуляр ва

$$[\vec{\omega}, \vec{r}(t)] = |\vec{\omega}|\,|\vec{r}(t)|\sin(\vec{\omega}, \wedge\ \vec{r}(t)),$$
$$\vec{r}(t) = \frac{v_0}{r_0}\, r_0 = v_0 = |\vec{v}(t)|$$

бўлгани учун

$$\vec{v}(t) = [\vec{\omega}, \vec{r}(t)]. \tag{4,34}$$

Шундай қилиб, агар ҳаракатланаётган нуқтанинг тангенциал тезлиги узунлик бўйича ўзгармас бўлса, нуқтанинг l тўғри чизиқ атрофида айланма ҳаракати l да ётувчи бирор ўзгармас вектор билан тўла характерланади. ω вектор қаралаётган ҳаракатнинг бурчак тезлиги дейилади.

Агар l ўқ атрофида $\vec{\omega}_1, \ldots, \vec{\omega}_n$ бурчак тезликлар билан кетма-кет бир қанча айланма ҳаракатлар бажарилаётган бўлса, у ҳолда натижавий айланма ҳаракат ҳам l ўқ атрофида $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n$ бурчак тезликка эга бўлган айланма ҳаракат бўлади.

Бу (4.34) формуладан келиб чиқади:

$$\vec{v}(t) = [\vec{\omega}, \vec{r}(t)] = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i\right), \vec{r}(t)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [\vec{\omega}_i, \vec{r}(t)] = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(t).$$

2-мисол. Учлари $A(3;\ 0;\ 5)$, $B(3;\ -2;\ 2)$, $C(1;\ 2;\ 4)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

Ечиш. $\vec{AB}$ ва $\vec{AC}$ векторларнинг координаталарини аниқлаймиз:

$$\vec{AB} = \{3-3;\ -2-0;\ 2-5\} = \{0;\ -2;\ -3\},$$
$$\vec{AC} = \{1-3;\ 2-0;\ 4-5\} = \{-2;\ 2;\ -1\}.$$

$\vec{AB}$ векторни $\vec{AC}$ векторга вектор кўпайтирамиз, яъни

$$\vec{c} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= 8\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$\vec{c}$ нинг модулини топамиз:

$$|\vec{c}| = |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \sqrt{8^2+6^2+(-4)^2} = \sqrt{116}.$$

Демак,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{116} = \sqrt{\frac{116}{4}} = \sqrt{29}.$$

8-§. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси ва унинг хоссалари. Тэтраэдрнинг ҳажми*

Таъриф. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси деб (векторларнинг кўрсатилган тартибига кўра) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмасига тенг векторни $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтиришдан ҳосил бўлган сонга айтилади.

Аралаш кўпайтма $[\vec{a}, \vec{b}]\cdot\vec{c}$ ёки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ каби белгиланади. Аралаш кўпайтма қуйидаги геометрик маънога эга. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар бирор 0 нуқтага қўйилган ва компланар бўлмаган ўнг учликни ҳосил қилсин. Қирралари бу векторлардан иборат параллелепипедни ясаймиз. $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ миқдор шу параллелепипед асосининг

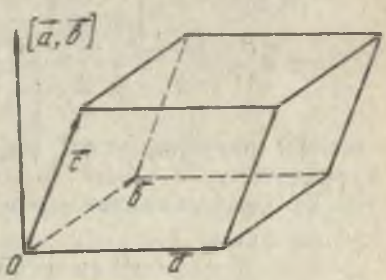
---

*«Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра» (*Ф. Ражабов, А. Нурметов.* «Ўқитувчи», 1990) китобидан фойдаланилди.

юзини билдиришини кўрамиз. Скаляр кўпайтманинг таърифига кўра:

$$[\vec a, \vec b]\cdot \vec c = |[\vec a, \vec b]|\cdot |\vec c|\cdot \cos\varphi,$$

бу ерда $\varphi = (\widehat{[\vec a, \vec k]), \vec c})$ бўлиб, $|\vec c|\cos\varphi$ миқдор $\vec c$ векторнинг $[\vec a, \vec b]$ вектор йўналиши бўйича тўғри чизиқдаги проекциясига тенг бўлиб, параллелепипеднинг баландлигидан иборатдир (41-чизма):

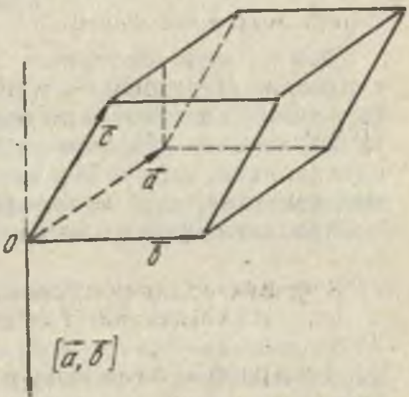


41-чизма

$|\vec c|\cos\varphi = h.$

Шундай қилиб, $[\vec a, \vec b]\cdot \vec c = S_{асос}\cdot h = V$, бу ерда V параллелепипеднинг ҳажми.

Демак, агар $\vec a, \vec b, \vec c$ векторлар ўнг учлик ҳосил қилса, бу векторларнинг аралаш кўпайтмаси бу векторларга ясалган параллелепипед ҳажмига тенг экан. Агар $\vec a, \vec b, \vec c$ лар чап учлик ташкил қилса, $[\vec a, \vec b]$ вектор билан $\vec c$ вектор орасидаги φ бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан катта бўлиб, $\cos\varphi \leqslant 0$ (42-чизма) бўлади. У ҳолда $[\vec a, \vec b]\cdot \vec c = (\vec a, \vec b, \vec c) = -V$.



42-чизма

Демак, параллелепипед ҳажми: $V = |[\vec a, \vec b]\cdot \vec c|$. $R = \{0; \vec i; \vec j; \vec k\}$ координаталар системасида $\vec a = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec b = \{b_x, b_y, b_z\}$ ва $\vec c = \{c_x, c_y, c_z\}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг аралаш кўпайтмасини ҳисоблаш масаласини қўямиз.

$\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг вектор кўпайтмаси қуйидагича бўлади:

$$[\vec a, \vec b] = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec k. \qquad (4.35)$$

$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$ кўпайтмани топамиз, яъни (4.35) векторни $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтирамиз:

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (4.36)$$

Демак, учта векторнинг аралаш кўпайтмаси учинчи тартибли детерминантга тенг бўлиб, бу детерминантнинг биринчи йўл элементлари биринчи вектор координаталаридан, иккинчи йўл элементлари иккинчи вектор координаталаридан, учинчи йўл элементлари эса учинчи вектор координаталаридан иборатдир.

Аралаш кўпайтма хоссаларини кўриб чиқамиз:

$$1.\ [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{b}, \vec{c}] \cdot \vec{a}.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу учта векторга қурилган параллелепипед ҳажмларининг абсолют қийматлари тенг.

2. Кўпайтувчиларнинг ўринларини алмаштирсак, аралаш кўпайтманинг ишораси ўзгаради:

а) $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{b}, \vec{a}] \cdot \vec{c}$;
б) $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{a}, \vec{c}] \cdot \vec{b}$;
в) $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{c}, \vec{b}] \cdot \vec{a}$.

Исботи. а) $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{b}, \vec{a}] \cdot \vec{c}$, чунки $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

Қолган тенгликлар ҳам шунга ўхшаш исботланади.

3. Ихтиёрий α скаляр сон ($\alpha \in R$) учун ушбу тенглик ўринлидир. $(\alpha \cdot \vec{a})[\vec{b}, \vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$

4. а) $(\vec{a}+\vec{d})[\vec{b},\vec{c}]=\vec{a}[\vec{b},\vec{c}]+\vec{d}[\vec{b},\vec{c}]$, б) $\vec{a}[\vec{b}+\vec{d},\vec{c}]=\vec{a}[\vec{b},\vec{c}]+\vec{a}[\vec{d},\vec{c}]$.

Исботи. Масалан, а) тенгликни кўрсатайлик:

$$(\vec{a}+\vec{d})[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a}+\vec{d},\vec{b}]\cdot\vec{c}=$$
$$=([\vec{a},\vec{b}]+[\vec{d},\vec{b}])\cdot\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}+[\vec{d},\vec{b}]\cdot\vec{c}=$$
$$=\vec{a}[\vec{b},\vec{c}]+\vec{d}[\vec{b},\vec{c}].$$

5. Компланар $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлади, чунки бу векторларга қурилган параллелепипед текисликда бўлиб, унинг баландлиги нолга тенг бўлади. Шундай қилиб $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}=0$ бўлса, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлади.

6. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардан ихтиёрий иккитаси коллинеар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлади (хусусий ҳолда:

$$[\vec{a},\vec{a}]\cdot\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{a}=[\vec{b},\vec{a}]\cdot\vec{a}=0).$$

6- хоссанинг маъноси шундан иборатки, (4.36) формуладаги учинчи тартибли детерминантнинг иккита сатри ўзаро пропорционал бўлиб қолади.

Аралаш кўпайтма ёрдамида учларининг координаталари билан берилган тетраэдрнинг ҳажмини ҳисоблаш мумкин.

$ABCD$ тетраэдр учларининг координаталари $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ бўлсин. Маълумки, тетраэдрнинг ҳажми унинг бир учидан чиқувчи қирраларидан (яъни AB, AC ва AD қирраларидан) ясалган параллелепипед ҳажмининг 1/6 қисмига тенг. Демак,

$$V=\frac{1}{6}|(\vec{AB}\,\vec{AC}\cdot\vec{AD})| \qquad (4.37)$$

Бу формулани нуқтанинг координаталари орқали ҳам ёзиш мумкин:

$$V_{\text{тэт}}=\frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

ёки

$$V_{\text{тэт}} = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1. \end{vmatrix} \qquad (4.38)$$

1- мисол. Ушбу A (5; 7; —2); B (3; 1; —1), C (9; 4; —4), D (1; 5; 0) нуқталар битта текисликда ётишини исбот қилинг.

Ечиш. $\bar{AB}$, $\bar{AC}$, $\bar{AD}$ векторларнинг координаталарини аниқлаймиз:

$$\overline{AB} = (-2;\ -6;\ 1),$$
$$\overline{AC} = (4;\ -3;\ -2),$$
$$\overline{AD} = (-4;\ -2;\ 2).$$

Бу векторларнинг аралаш кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$(\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Демак, $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ векторлар компланар, демак A, B, C ва D нуқталар битта текисликда ётади.

2-мисол. Учлари A (2; —3; 5), B (0; 2; —1); C (—2; —2; 3), D (3; 2; 4) нуқталарда ётувчи учбурчакли пирамида (тетраэдр)нинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ векторнинг координаталарини топамиз:

$$\overline{AB} = \{-2;\ 5;\ -4\},\ \overline{AC} = \{-4;\ 1;\ -2\},\ \overline{AD} = \{1;\ 5;\ -1\}.$$

(4.38) формулага кўра:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\,|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}| =$$
$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2, & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 6\text{куб. бирл.}$$

9- §. Қўш вектор кўпайтма

Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар берилган бўлсин. Булар учун $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ вектор *қўш вектор кўпайтма* деб аталади. Қўш вектор кўпайтмани топишнинг энг содда қоидасини қуйидаги теорема орқали кўрсатамиз.

1-теорема. Ихтиёрий учта $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор учун ушбу

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})\vec{b}-(\vec{a},\vec{b})\vec{c} \tag{4.39}$$

тенглик ўринлидир.

Исбот. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ихтиёрий векторлар, яъни

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$
$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k},$$
$$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$$

бўлсин. У ҳолда $\vec{b}$ нинг $\vec{c}$ га вектор кўпайтмаси

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

векторни беради. Энди $\vec{a}$ векторни $\vec{b}\times\vec{c}$ векторга вектор кўпайтирамиз:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\end{vmatrix}=$$

$$=[(a_2b_1c_2-a_2b_2c_1+a_3b_1c_3-a_3b_3c_1)\vec{i}+$$
$$+(a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+a_3b_2c_3-a_3b_3c_2)\vec{j}+$$
$$+(a_1b_3c_1-a_1b_1c_3+a_2b_3c_2-a_2b_2c_3)\vec{k}]=$$
$$=\{b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_1b_1+a_2b_2+$$
$$+a_3b_3)\}\vec{i}+\{b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_2(a_1b_1+$$
$$+a_2b_2+a_3b_3)\}\vec{j}+\{b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-$$
$$-c_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\}\vec{k}=(\vec{a},\vec{c})\vec{b}-(\vec{a},\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Шу билан теорема исботланди.

2-теорема. Ихтиёрий учта $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор учун ушбу тенглик ўринли:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0. \qquad (4.40)$$

Исбот. 1-теоремага кўра:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})\vec{b}-(\vec{a},\vec{b})\vec{c},\ \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{b},\vec{a})\vec{c}-(\vec{b},\vec{c})\vec{a},$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{c},\vec{b})\vec{a}-(\vec{c},\vec{a})\vec{b}.$$

Бу тенгликларни қўшиб ва скаляр кўпайтманинг симметриклигидан фойдалансак, (4.40) тенглик ҳосил бўлади.

Мисол. $\vec{a}=\{3;2;1\}$, $\vec{b}=\{-1,3;4\}$ ва $\vec{c}=\{4;5;0\}$ векторлар берилган бўлсин. Уларнинг қўш вектор кўпайтмасини топинг.

Ечиш. $\vec{b}$ нинг $\vec{c}$ га вектор кўпайтмасини топамиз:

$$\vec{d}=\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 4\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+$$
$$+\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\vec{k}=-20\vec{i}+16\vec{j}-17\vec{k}=\{-20;16;-17\}.$$

Энди $\vec{a}$ ни $\vec{d}$ га вектор кўпайтирамиз:

$$\vec{p}=\vec{a}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & 1\\ -20 & 16 & -17\end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 16 & -17\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & 1\\ -20 & -17\end{vmatrix}\vec{j}+$$
$$+\begin{vmatrix}3 & 2\\ -20 & 16\end{vmatrix}\vec{k}=-50\vec{i}+31\vec{j}+88\vec{k}.$$

Демак, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=-50\vec{i}+31\vec{j}+88\vec{k}=\{-50;31;88\}$.

10-§. Чизиқли операторларнинг хос векторлари ва хос қийматлари (сонлари)

Таъриф. Агар R^n фазодаги ҳар бир $\vec{x}$ векторга шу фазонинг аниқ $\vec{y} = f\vec{x}$ вектори мос қўйилган бўлса ва у қуйидаги иккита аксиомага бўйсунса, яъни

$$1)\ \forall \vec{x}_1,\ \vec{x}_2 \in R^n \Rightarrow f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f\vec{x}_1 + f\vec{x}_2;$$
$$2)\ \forall \lambda \in P,\ \forall \vec{x} \in R^n \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f x,$$

у ҳолда f *чизиқли оператор* дейилади.

Бунда $\vec{x}_1$ ва $\vec{x}_2$ векторлар R^n фазонинг ихтиёрий векторлари, λ ихтиёрий сон. $\vec{y}$ вектор $\vec{x}$ векторнинг *тасвири* (образи), $\vec{x}$ эса $\vec{y}$ нинг *прообрази* деб аталади.

0 билан белгиланувчи ва R^n фазонинг ҳамма элементларини шу R^n фазонинг ноль элементига акслантирувчи оператор қуйидагича ёзилади:

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Ҳар бир f оператор учун унга қарама-қарши бўлган оператор қуйидагича белгиланади:

$$-f = (-1)f.$$

Барча $f{:}R^n \Rightarrow R^n$ чизиқли операторлар (ўзини ўзига акслантириш) тўплами чизиқли фазони ташкил қилади.

$$A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \qquad (4.40)$$

муносабатни қаноатлантирувчи $\vec{x} \neq 0$ вектор f операторнинг *хос вектори* ва унга мос λ сон эса унинг *хос қиймати* (сони) ёки чизиқли операторнинг характеристик сони дейилади.

Бундан кўринадики, $\lambda\vec{x}$ векторлар, R^n фазонинг барча нолмас векторлари хос векторларидир.

$\vec{x}$ хос векторни ва λ хос қийматни (сонни) топиш учун зарур бўлган теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. f оператор R^n фазодаги чизиқли оператор, λ_0 — f операторнинг хос қиймати, $\vec{x}$ эса f нинг λ_0 сонга мос келадиган хос вектори, $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \ldots, \vec{l}_n$ лар R^n фазодаги ихтиёрий базис ва $A = [a_{ij}](i,j = \overline{1,n})$ матрица f операторнинг шу базисдаги матрицаси бўлса, у ҳолда λ_0 сон

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.41)$$

тенгламанинг илдизи,

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{l}_1 + \alpha_2 \vec{l}_2 + \dots + \alpha_n \vec{l}_n \qquad (4.42)$$

хос векторнинг компонентлари эса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_n$ базисда бир жинсли

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - x)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (4.43)$$

системанинг ечими бўлади. (4.41) берилган чизиқли оператор матрицасининг **характеристик тенгламаси** деб аталади. (4.41) характеристик тенгламадан λ хос қийматлар топилади, сўнгра ҳар бир хос қийматларга мос (4.43) системадан $\vec{x}$ хос векторнинг $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ координаталари топилади.

1-изоҳ. Агар $\vec{x}$ вектор берилган чизиқли операторнинг хос вектори бўлса, у ҳолда унга коллинеар бўлган ихтиёрий нолмас вектор ҳам берилган операторнинг λ хос қийматига хос вектори бўлади.

2-изоҳ. Агар барча λ хос қийматлар ҳақиқий сонлар бўлса, у ҳолда уларга мос хос векторлар доимо чизиқли эркли бўлади ва уларни янги базис сифатида олиш мумкин. Бу янги базисда A матрица қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$A' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}.$$

3-изоҳ. Агар A симметрик матрица бўлса, у ҳолда унинг барча хос қийматлари ҳақиқий сонлар бўлади ва хос векторлари эса ўзаро перпендикуляр бўлади.

Мисол. Бирор базисда ушбу

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

матрица билан берилган чизиқли операторнинг хос қийматларини ва хос векторларини топинг.

Ечиш. A матрица симметрик матрица бўлгани учун унинг барча хос қийматлари ҳақиқий сонлар бўлади. Уни топиш учун характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Бу детерминантни ҳисоблаш қоидасига кўра ҳисобласак, λ номаълумга нисбатан учинчи даражали қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0.$$

Бу тенгламани $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ ва $\lambda_3 = 5$ қийматлар қаноатлантиришини осонгина текшириш мумкин. Бу сонлар берилган чизиқли операторнинг хос қийматлари бўлади. Энди хос векторларни топамиз. Уларни топиш учун (4.43) тенгламалар системаси

$$\begin{cases} (3-\lambda)\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + (2-\lambda)\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_2 + (1-\lambda)\alpha_3 = 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

га $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ ва $\lambda = \lambda_3$ қийматларни қўйиб, уларга мос α_1, α_2 ва α_3 қийматларни топамиз.

1) $\lambda = \lambda_1 = 2$ учун (4.44) система ушбу кўринишни олади:

$$\begin{cases} (3-2)\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + (2-2)\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_2 + (1-2)\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Бунда α_1, α_2 ва α_3 ўзгарувчиларнинг биттасига ихтиёрий қиймат бериб, қолганларини топамиз. Масалан $\alpha_1 = 1$ бўлса, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_3 = -1$ бўлади. $\lambda_1 = 2$ хос қийматга мос хос вектор $\vec{x}'$ ушбу кўринишда бўлади:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ёки } \vec{x}' = \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k}.$$

2) $\lambda = \lambda_2 = -1$ хос қиймат учун ҳам юқоридагидек система тузамиз:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Агар $\alpha_1 = 1$ деб олсак, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 2$ бўлади ва унга хос вектор

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ёки } \vec{x}'' = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

кўринишда бўлади;

3) худди шунга ўхшаш $\lambda = \lambda_3 = 5$ учун

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

система ҳосил қиламиз ва бу системани $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ қийматлар қаноатлантиришини осонгина текшириш мумкин.

Демак, $\vec{x}''' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ёки $\vec{x}''' = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

A матрица симметрик бўлгани учун аниқланган учала хос вектор ўзаро перпендикуляр эканини текшириш мумкин, яъни $\vec{x}' \cdot \vec{x}'' = 0$, $\vec{x}' \cdot \vec{x}''' = 0$, $\vec{x}'' \cdot \vec{x}''' = 0$.

Бу хос векторларни янги базис сифатида олиш мумкин ва унда A матрица

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади.

МАШҚЛАР

1. Агар A (4; 3) ва B (1; 2) нуқталар берилган бўлса, $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ векторларнинг координаталарини топинг.

2. Агар $\vec{AB}=\{2; -1\}$ ва A (6; 7) бўлса, B нуқтанинг координаталарини топинг.

3. Берилган A (2; 4) нуқтадан 6 бирлик масофада Oy ўқида ётган B (x; y) нуқтани топинг.

4. Агар A (1; 2; 3) ва B (2; 1; 4) бўлса, $\vec{AB}$ ва $\vec{BA}$ векторларнинг координаталарини топинг.

5. Қутб координаталар системасида берилган. $A\left(6; \frac{\pi}{4}\right)$ ва $B\left(7; -\frac{\pi}{3}\right)$ нуқталарнинг декарт координаталар системасидаги координаталарини топинг.

6. Қутб координаталар системасида берилган $\rho = a\sin 2\varphi$ чизиқ тенгламасини декарт координаталар системасида ифодаланг.

7. Фазода M $(-2;\ 3;\ -4)$ нуқта берилган. Агар ўқларни параллел кўчиришда координаталар боши эски системада $(1;\ -1;\ -2)$ координаталарга эга бўлса, шу M нуқтанинг янги системадаги координаталарини топинг.

8. M_1 $(2;\ 4;\ -2)$ ва M_2 $(-2;\ 4;\ -2)$ нуқталар берилган. M_1M_2 кесмани $\lambda = 3$ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топинг.

9. Учлари A (1; 1; 1), B (5; 1; -2), C (7; 9; 1) дан иборат учбурчак берилган. A учидан ўтказилган биссектрисанинг CB томон билан кесишган D нуқтасининг координаталарини топинг.

10. Агар $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}\hat{,}\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ бўлса, томонлари $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ва $\vec{n} = \vec{a} + 4\vec{b}$ векторлардан иборат параллелограммнинг юзини ҳисобланг.

11. $\triangle ABC$нинг томонлари $\overline{AB} = \{-3;\ -2;\ 6\}$ ва $\vec{BC} = \{-2; 4; -4\}$ векторлардан иборат. AD баландлигининг узунлигини ҳисобланг.

12. $\vec{F} = \{3;\ 2;\ -4\}$ куч A $(2;\ -1;\ -1)$ нуқтага қўйилган. Бу кучнинг координаталар бошига нисбатан моментини аниқланг.

13. Агар $|\vec{p}| = 5$; $(\vec{p}\ \hat{}\ \vec{q}) = \pi/4$ бўлса, томонлари $\vec{p} - 2\vec{q}$ ва $3\vec{p} + 2\vec{q}$ векторлардан иборат учбурчакнинг юзини топинг.

14. Агар учбурчак учларининг координаталари A $(1;\ -2;\ 8)$; B $(0;\ 0;\ -4)$; C $(6;\ 2;\ 0)$ бўлса, $\triangle ABC$нинг юзини топинг.

15. $\vec{a} = 6\vec{i} + 2\vec{k}$ ва $\vec{b} = 1{,}5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ векторлардан ясалган параллелограмм диагоналларининг узунлигини ва юзини ҳисобланг.

16. A $(5;\ 7;\ -2)$, B $(3;\ 1;\ -1)$, C $(9;\ 4;\ -4)$, D $(1;\ 5;\ 0)$ нуқталарнинг битта текисликда ётишини исбот қилинг

17. $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ векторларнинг компланар эканлигини исбот қилинг.

18. Учлари A $(2;\ -3;\ 5)$, B $(0;\ 2;\ 1)$, C $(-2;\ -2;\ 3)$, D $(3;\ 2;\ 4)$ нуқталарда ётувчи учбурчакли пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

19. Учбурчакли пирамида учларининг радиус-векторлари берилган. Унинг ҳажмини ва ABC ёғига туширилган баландлигининг узунлигини аниқланг: $\vec{r}_S = \{3;\ 2;\ 4\}$, $\vec{r}_A = \{2;\ -3;\ 5\}$, $\vec{r}_B = \{0;\ 2;\ 1\}$, $\vec{r}_C = \{-2;\ -2;\ 3\}$.

20. Тетраэдрнинг ҳажми 5 га тенг. Унинг учта учи A $(2;\ 1;\ -1)$, B $(3;\ 0;\ 1)$, C $(2;\ -1;\ 3)$ нуқталарда ётади. Агар тўртинчи D учи Oy ўқида ётиши маълум бўлса, D нинг координаталарини топинг.

Қуйидаги матрицалар билан берилган чизиқли операторнинг хос қийматлари ва хос векторларини топинг.

21. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 22. $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

5-БОБ

ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1-§. Чизиқнинг текисликдаги тенгламаси

Текисликда чизиқ берилган бўлиши учун унинг нуқталари ҳолатини аниқлаб берувчи бирор қоида маълум бўлиши керак.

Масалан, марказ деб аталувчи нуқтадан баравар узоқликда ётган нуқталарнинг геометрик ўрни айлана дейилади; ёки бирор кесманинг учларидан баравар узоқликда ётувчи нуқталарнинг геометрик ўрни шу кесмага ўтказилган ўрта перпендикуляр бўлади ва ҳоказо.

Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси

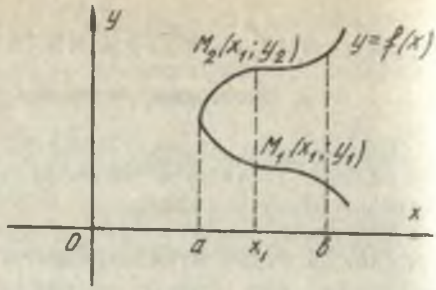
$$F(x; y) = 0 \qquad (5.1)$$

ёки

$$y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b \qquad (5.2)$$

кўринишда бўлади. (5.2) функция x аргумент $[a,b]$ кесмада ўзгарганда $f(x)$ функция узлуксиз ўзгаради деб фараз қиламиз. Кўпинча $f(x)$ функцияни бир қийматли функция деб, x ва y ларни эса декарт координаталар текислигидаги бирор M нуқтанинг координаталари деб фараз қилинади. У ҳолда x нинг ҳар бир қиймати учун (5.2) тенгламадан y нинг ягона қиймати аниқланади.

Демак, x нинг ҳар бир қийматига текисликнинг (координаталари x, $f(x)$ бўлган) биргина нуқтаси тўғри келади. Агар x узлуксиз ўзгариб турли қийматлар қабул қилса, у ҳолда M нуқта координаталар текислигида бирор нуқталар тўпламини тасвирлайди. Бу нуқталар тўплами эса текисликда бирор чизиқни ифодалайди. Агар $f(x)$ функция кўп қийматли бўлса, яъни x нинг ҳар бир қийматига y нинг бир неча y_1, y_2 ... y_s қийматлари мос келса, у ҳолда x нинг ҳар бир қийматига координаталар текислигида M_1, M_2, ... M_s нуқталар тўғри келади. Масалан $y = f(x)$ функция икки қийматли бўлсин. Бу ҳолда x нинг ҳар бир x_1 қийматига y нинг $y_1 = f(x_1)$ ва $y_2 = f(x_1)$ қийматлари мос келиб, координаталар текислигида иккита $M_1(x_1; y_1)$ ва M_2 $(x_1; y_2)$ нукталар аниқланади (43- чизма). x ўзгарувчи $[a, b]$ кесмада узлуксиз ўзгарганда M_1 ва M_2 нукталар ҳам ўринларини узлуксиз ўзгартиради ва бу нукталар чизиқни тасвирлайди.



43- чизма

Таъриф. Агар чизиқ ихтиёрий нуқтасининг x ва y координаталари (5.1) тенгламани қаноатлантирса ва аксинча, бу тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир жуфт $(x; y)$ қиймат чизиқ нуқтасини тасвирласа, (5.1) тенглама чизиқнинг ошкормас тенгламаси деб аталади.

Аналитик геометрияда асосан иккита масала билан шуғулланилади:

1) чизиқ нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида берилган бўлиб, унинг тенгламасини тузиш талаб қилинади;

2) тенглама берилган, унинг графигини ясаш талаб қилинади.

1- мисол. Берилган A $(-2; 4)$ ва B $(3; 6)$ нуқталардан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

Ечиш. C $(x; y)$ — A ва B нуқталардан баравар узоқликда жойлашган ихтиёрий нуқта бўлсин. Масала шартига кўра:

$$|AC| = |BC|. \tag{5.3}$$

Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдаланиб,

$$|AC| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2},$$
$$|BC| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}$$

ларни ҳосил қиламиз. Бу ифодаларни (5.3) га қўйиб масала шартини қаноатлантирадиган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-8y+16=x^2-6x+9+y^2-12y+$$
$$+36\Rightarrow 10x+4y-25=0. \qquad (5.4)$$

Шундай қилиб, A ва B нуқталардан баравар узоқликда жойлашган ихтиёрий нуқтанинг координаталари (5.4) тенгламани қаноатлантиради ва аксинча, координаталари (5.4) муносабатни қаноатлантирган ҳар қандай нуқта A ва B нуқталардан бир хил узоқликда ётади.

Энди чизиқни (5.1) тенгламасига кўра ясаш масаласини қараймиз. Текисликдаги нуқта ўзининг (x, y) координаталари билан аниқланади. Шунинг учун (5.1) тенгламаларда x га x_1, x_2, ... x_n қийматларни берсак,

$$F_1(x_1;\ y)=0,\ F_2(x_2;\ y)=0,\ \ldots,\ F_n(x_n;\ y)=0, \qquad (5.5)$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Бу тенгламалардан y нинг x_1, $x_2 \ldots x_n$ қийматларга мос бўлган y_1, y_2 ... y_n ... қийматларини топамиз, натижада координаталари (5.1) тенгламани қаноатлантирувчи

$$(x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (x_n;\ y_n)\ldots$$

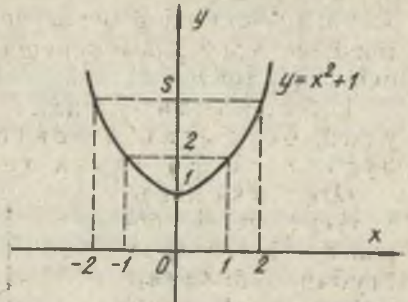
нуқталарга эга бўламиз. Бу нуқталарни координаталар системасида ясаб, уларни бирлаштирсак, (5.1) тенгламани тасвирловчи чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқ икки ўзгарувчили (5.1) тенгламанинг графиги дейилади.

2-мисол. $y=x^2+1$ тенглама тасвирлайдиган чизиқни ясанг.

Ясаш. x га ... -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ... қийматларни берамиз ва y нинг шунга мос қийматларини топамиз. Бу қийматлар учун қуйидаги жадвални тузамиз:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	10	5	2	1	2	5	10	...

Натижада ... $(-3;\ 10)$, $(-2;\ 5)$, $(-1;\ 2)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ 5)$, $(3;\ 10)$ ... нуқталар ҳосил бўлади. Бу нуқталарни координаталар системасида жойлаштириб, уларни силлиқ чизиқ билан туташтирсак, $y = x^2 + 1$ функциянинг графиги, яъни парабола ҳосил бўлади (44- чизма). Масалаларни ечишда чизиқнинг $F(x; y) = 0$ тенгламасидан ташқари унинг параметрик тенгламаларидан ҳам фойдаланилади.



44- чизма

Масалан, механика ва техникада моддий нуқта ҳаракат траекториясини текширишда t вақтга боғлиқ бўлган

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

тенгламалар қаралади. Бу тенгламалар моддий нуқтанинг ҳаракат траекториясини тасвирлайди. Бу кўринишдаги тенгламага чизиқнинг *параметрик тенгламаси* дейилади. Бу ерда t параметр бўлиб, у вақтни, бурчак, тезлик ва ҳоказо катталикларни ифодалаши мумкин.

3- мисол A $(x;\ y)$ нуқтанинг координаталари ҳаракат пайтида

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 1, \\ y = 5t^2 + 6 \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланади (t—вақт). A нуқта траекториясининг декарт координаталар системасидаги тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган тенгламалар системаси A $(x;\ y)$ нуқта ҳаракатининг параметрик тенгламасидир. Системадаги биринчи тенгламадан t^2 ни топамиз:

$$t^2 = \frac{x+1}{3}.$$

Буни системадаги иккинчи тенгламага қўйсак:

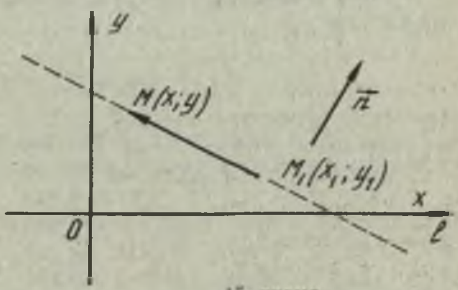
$$y = 5 \cdot \frac{x+1}{3} + 6 \text{ ёки } 5x - 3y + 23 = 0.$$

Демак, A $(x;\ y)$ нуқта траекторияси тўғри чизиқдан иборат.

2- §. Тўғри чизиқнинг текисликдаги тенгламалари

Декарт координаталар текислигида бирор l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Шунингдек, l тўғри чизиқда ётувчи $M_1(x_1;\ y_1)$ нуқта ва l тўғри чизиққа перпендикуляр $\vec{n}=\{A;\ B\}$ вектор ёки унга параллел $\vec{s}=\{m;\ n\}$ векторлар берилган бўлса, l тўғри чизиқнинг текисликдаги турли кўринишдаги тенгламаларини келтириб чиқарамиз.

1. Берилган $M_1(x_1;\ y_1)$ нуқта орқали ўтиб, берилган $\vec{n}$ векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси



45- чизма

Oxy текисликда l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Унда ётувчи $M_1(x_1;y_1)$ нуқта ва l тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган $\vec{n}$ $(l\perp \vec{n})$ вектор оламиз (45- чизма). $\vec{n}$ векторга l тўғри чизиқнинг *нормал вектори* дейилади.

$M_1(x_1;\ y_1)$ нуқта ва $\vec{n}$ нормал вектор l тўғри чизиқнинг Oxy текисликдаги ҳолатини тўла аниқлайди. $M(x;\ y)$ нуқта l тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, у ҳолда $\overline{M_1M}=\{(x-x_1);(y-y_1)\}$ вектор l тўғри чизиқ устида ётади ва $\overline{M_1M}\perp\vec{n}$ бўлади. Шунинг учун $\vec{n}$ ва $\overline{M_1M}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0$$

ёки

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \tag{5.6}$$

(5.6) тенглама M_1 нуқта орқали ўтиб, $\vec{n}$ векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини ифодалайди.

1- мисол. M_1 (4; —3) нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}=\{2;\ -5\}$ векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Мисол шартига кўра: $x_1 = 4$; $y_1 = -3$; $A = 2$; $B = -5$. Буларни (5.6) формулага қўйиб изланаётган тўгри чизиқ тенгламасини топамиз:

$$2(x - 4) + (-5)(y + 3) = 0.$$

Бундан

$$2x - 5y - 23 = 0.$$

2. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

x ва y координаталарга нисбатан исталган биринчи даражали

$$Ax + By + C = O \tag{5.7}$$

кўринишдаги тенглама Oxy текисликда ётувчи тўгри чизиқнинг умумий тенгламаси эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, (5.6) тенгламада A ёки B коэффициентларидан бири нолдан фарқли деб фараз қиламиз (акс ҳолда $A=0$; $B=0$ бўлиб, $C=0$ айниятга эга бўлардик). Масалан $B \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (5.7) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$A(x-0)+B(y+\frac{C}{B})=0.$$

(5.7) тенгламага тенг кучли бўлган тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама $M_1(0; -\frac{C}{B})$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{n}$ векторга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасидир.

Демак, (5.7) тенглама тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси экан.

Энди, умумий тенгламаси билан берилган тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан жойлашувини текширамиз:

а) Агар $C=0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ бўлса, тўгри чизиқ тенгламаси $Ax+By=0$ бўлиб, у координаталар бошидан ўтади.

б) Агар $A=0$, $C \neq 0$, $B \neq 0$ бўлса, тўгри чизиқ тенгламаси $By+C=0$ бўлиб, у Ox ўқига параллел бўлади.

в) Агар $B=0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ бўлса, тўғри чизиқ тенгламаси $Ax+C=0$ бўлиб, у Oy ўқига параллел бўлади.

г) Агар $C=0$, $B=0$, $A\neq 0$ бўлса, тўғри чизиқ тенгламаси $Ax=0$ бўлиб, у Oy ўқини ифодалайди.

д) Агар $C=0$, $A=0$, $B\neq 0$ бўлса, тўғри чизиқ тенгламаси $By=0$ бўлиб, у Ox ўқини ифодалайди.

2- мисол. $4x-7y+3=0$ тўғри чизиқнинг нормал векторини топинг.

Ечиш. Нормал вектор: $\vec{n}=\{A;\ B\}$. Берилган тўғри чизиқ тенгламасидан: $A=4$, $B=-7$. Шунинг учун $\vec{n}=\{4;\ -7\}$.

3- мисол. $3x+4y-18=0$ ва $2x-y-1=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтиб, $x+2y-6=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Дастлаб икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топамиз, бунинг учун кесишиш нуқтасининг координаталарини $M_1(x_1,\ y_1)$ деб оламиз. Ушбу

$$\begin{cases} 3x_1+4y_1-18=0, \\ 2x_1-y_1-1=0 \end{cases}$$

системадан $x_1=2$; $y_1=3$ ларни топамиз. Масала шартидан изланаётган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида $x+2y-6=0$ тўғри чизиқнинг нормал вектори $\vec{n}\{1;\ 2\}$ ни олиш мумкин. У ҳолда изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси (5.6) формулага кўра

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-3)=0 \text{ ёки}$$
$$x+2y-8=0$$

кўринишда бўлади.

Таъриф. Тўғри чизиққа параллел ёки шу тўғри чизиқда ётувчи ҳар қандай $\vec{S}=\{m;\ n\}$ вектор бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори дейилади.

3. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари **l тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиққа тегишли $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқта ва йўналтирувчи $\vec{S}=\{m;\ n\}$ вектор билан тўла аниқланади (46- чизма). Бу берилганларга кўра l тўғри чизиқ тенгламасини чиқарамиз. M_0 нуқтадан** бошқа l тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқта оламиз. У ҳолда $\overline{M_0M}$ вектор $\vec{S}$ вектор билан коллинеар бўлади. Демак, шундай t сон топиладики,

$$\overline{M_0M}=t\vec{S} \qquad (t\in R) \qquad (5.8)$$

бўлади. M, M_0 нуқталарнинг радиус-векторларини мос равишда $\vec{r}$, $\vec{r}_0$ орқали белгиласак:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM},\ \vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$$

бўлиб, M_0M вектор учун $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ га эга бўламиз. (5.8) тенгликдан:

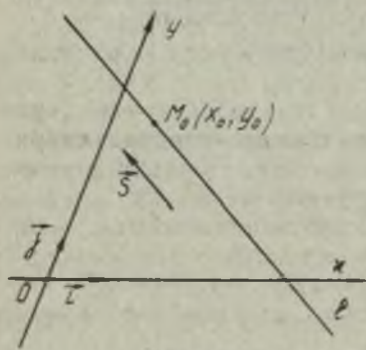
$$\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{S}\Rightarrow\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{S}. \qquad (5.9)$$

(5.9) тенглама l тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси дейилади. (5.9) тенгламадаги t га турли қийматлар бериб, l тўғри чизиққа тегишли нуқталарнинг радиус-векторларини топамиз. (5.9) тенгламадаги t ўзгарувчи **параметр** деб аталади.

Энди (5.9) ни координаталарда ёзамиз:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j},\ \vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j},$$

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{S}=t(m\vec{i}+n\vec{j})=tm\vec{i}+tn\vec{j}.$$



46- чизма

Буларни (5.9) га қўйиб, сўнгра икки векторнинг тенглигига кўра, ушбу тенгламаларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \qquad (5.10)$$

(5.10) формула l тўғри чизиқнинг **параметрик** тенгламаси дейилади. Агар l тўғри чизиқ координата ўқларидан бирортасига ҳам параллел бўлмаса (яъни m, $n\neq0$ шарт бажарилса), у ҳолда (5.10) дан ушбу

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t=\dfrac{x-x_0}{m} \\ t=\dfrac{y-y_0}{n} \end{cases}$$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (5.11)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

(5.11) формула тўғри чизиқнинг **каноник тенгламаси** дейилади. Бундан

$$nx - my + (-nx_0 + my_0) = 0 \qquad (5.12)$$

ни топамиз. Бу ерда шартга кўра m, n нинг камида биттаси нолдан фарқли, шу сабабли (5.12) биринчи даражали тенгламадир. Бундан эса ҳар қандай тўғри чизиқ биринчи даражали тенглама билан ифодаланади деган муҳим хулосага келамиз.

4-мисол. $M_0(3;\ 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва йўналтирувчи вектори $S = \{4;\ 3\}$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масала шартига кўра $x_0 = 3$; $y_0 = 1$; $m = 4$; $n = 3$. Бу қийматларни (5.10) формулага қўйсак,

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламалар биз излаган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларидир.

4. Икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

Бизга маълумки M_1 ва M_2 нуқталардан ягона тўғри чизиқ ўтади. M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталари маълум деб фараз қилиб, шу нуқталар орқали ўтувчи l тўғри чизиқ тенгламасини топамиз.

$M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқталар изланаётган l тўғри чизиққа тегишли бўлсин. Шунингдек бу тўғри чизиқда $M(x;\ y)$ ихтиёрий нуқтани оламиз. Натижада, бу нуқталар ёрдамида тўғри чизиқда ўзаро коллинеар бўлган

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\} \text{ ва } \overline{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1\}$$

векторларга эга бўламиз. Бу векторлар коллинеар бўлгани учун

$$\overline{M_1M} = t\overline{M_1M_2} \qquad (5.13)$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан, векторларнинг тенглигига асосан, $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ ва $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$ га эга бўламиз. Бундан

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (5.14)$$

(5.14) тенглама берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси дейилади. Бу тенглама

$x_2-x_1\neq 0$ ва $y_2-y_1\neq 0$ бўлганда ўринлидир. Агар $y_2-y_1=0$ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ Ox ўққа параллел бўлиб, $y-y_1=0$ ёки $y=y_1$ бўлади. Шунингдек, $x-x_1=0$ бўлганда $x=x_1$ бўлиб, бу чизиқ Oy ўқига параллел тўғри чизиқ бўлади.

Икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини учинчи тартибли детерминант ёрдамида ҳам ёзиш мумкин:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

5-мисол. $ABCD$ тўғри тўртбурчак учларининг координаталари берилган:

$$A(1;\ 3),\ B(5;\ 7),\ C(7;\ 5),\ D(3;\ 1)$$

AB, AD томонларини ва AC ҳамда DB диагоналларнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. а) AB томоннинг тенгламасини тузамиз. (5.14) формулага кўра:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1};\ \frac{x-1}{5-1}=\frac{y-3}{7-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{4}\Rightarrow x-1=y-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y+2=0.$$

б) AD томоннинг тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-3}{1-3}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}\Rightarrow x+y-4=0.$$

в) AC диагоналнинг тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x-1}{7-1}=\frac{y-3}{5-3}\Rightarrow\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1=3(y-3)\Rightarrow x-1=3y-9\Rightarrow x-3y+8=0.$$

г) DB диагоналнинг тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-1}{7-1}\Rightarrow\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{6}\Rightarrow$$

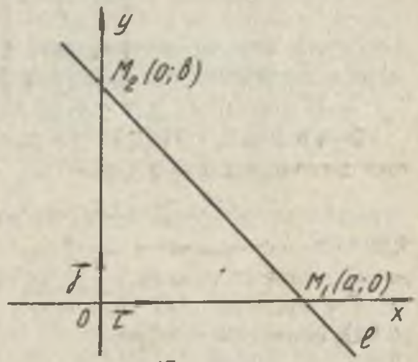
$$\Rightarrow 3(x-3)=y-1\Rightarrow 3x-9=y-1\Rightarrow 3x-y-8=0.$$

5. **Тўғри чизиқнинг координата ўқларида ажратган кесмалари бўйича тенгламаси;**

l тўғри чизиқни аниқловчи M_1 ва M_2 нуқталар координата ўқлари Ox ва Oy да ётсин. Аниқлик учун $M_1(a;\ 0)$ нуқта, Ox ўқда $M_2\ (0;\ b)$ нуқта эса Oy ўқда ётсин (47- чизма). Бу ҳолда (5.14) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y-0}{b}\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (5.15)$$

(5.15) тенглама тўғри чизиқнинг координата ўқларидан ажратган кесмалар бўйича тенгламаси дейилади. a ва b лар тўғри чизиқнинг мос равишда Ox ва Oy ўқларида ажратган кесмаларини билдиради.



47- чизма

6. **Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тегламаси.**

Таъриф. $\bar{S}$ вектор $\{\bar{i};\ \bar{j}\}$ базисда m, n координаталарга эга бўлиб, $m\neq 0$ бўлса, $\frac{n}{m}=k$ сон $\bar{S}$ векторнинг *бурчак коэффициенти* дейилади.

Агар $\bar{S}$ вектор бирор l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори ва k сон шу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти бўлса, шу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламасини келтириб чиқарамиз. l тўғри чизиқнинг битта нуқтаси ва бурчак коэффициенти текисликда унинг ҳолатини тўла аниқлайди.

Агар l тўғри чизиқ Oy ўқига параллел бўлса, у ҳолда бундай тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси мавжуд эмас. Шунинг учун Oy ўққа параллел бўлмаган l тўғри чизиқ $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтадан ўтсин ва k бурчак коэффициентига эга бўлсин деб фараз қиламиз. (5.11) дан $m\neq 0$ деб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\Rightarrow y-y_0=\frac{n}{m}(x-x_0)\Rightarrow$$

$$y-y_0=k(x-x_0)\ (\text{чунки}\ \frac{n}{m}=k)$$

$$\text{ёки}\ y=kx+b, \qquad (5.16)$$

бунда $b=y_0-kx_0$.

(5.16) тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади.

Агар l тўғри чизиқ иккита $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқталардан ўтган бўлса, у ҳолда унинг бурчак коэффициенти (5.14) формулага асосан

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{5.17}$$

формула билан аниқланади. (Бу тўғри чизиқ Oy ўқига параллел бўлмаган ҳол учун тўғри бўлади.)

7. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Агар икки тўғри чизиқ

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ ва } A_2x+B_2y+C_2=0$$

тенгламалари билан берилган бўлса, улар орасидаги бурчак

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

формула билан ҳисобланади. Бу ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

икки тўғри чизиқнинг параллеллик шартини,

$$A_1A_2+B_1B_2=0$$

эса икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартини ифодалайди.

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ ва } A_2x+B_2y+C_2=0$$

тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламалари:

$$\frac{A_1x+B_1y+C}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

8. Уч нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётиш шарти

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$$

тенглик билан ифодаланади ёки детерминант шаклида эса

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда ёзилади.

6-мисол. Тўғри чизиқ тенгламаси берилган: $(3+\alpha)x-(2\alpha-5)y+22=0$. α нинг қандай қийматида тўғри чизиқ Ox ўқи билан $45°$ ли бурчак ҳосил қилади? Шу тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$(3+\alpha)x-(2\alpha-5)y+22=0 \Rightarrow (2\alpha+5)y=(3+\alpha)x+22 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{3+\alpha}{2\alpha-5}x+\frac{22}{2\alpha-5}.$$

Бу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти

$$k=\frac{3+\alpha}{2\alpha-5}$$

га тенг. Маълумки, $\operatorname{tg}\varphi=k$. Масаланинг шартига кўра: $k=\operatorname{tg}45°=1$.

Бундан:

$$1=\frac{3+\alpha}{2\alpha-5} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-5=3+\alpha, \\ \alpha \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-\alpha=5+3, \\ \alpha \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=8, \\ \alpha \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha=8.$$

α нинг топилган қийматини ўрнига қўйиб Ox ўқи билан $45°$ ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини топамиз:

$$y=\frac{3+8}{2\cdot 8-5}x+\frac{22}{2\cdot 8-5} \Rightarrow y=\frac{11}{11}x+\frac{22}{11} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=x+2.$$

Демак, изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси $y=x+2$ бўлади.

7-мисол. $A(2;\ 5)$ ва $B\ (5;\ -1)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ҳамда шу тўғри чизиқда ординатаси 2 га тенг бўлган нуқтани топинг.

Ечиш. Икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ формуласидан фойдаланамиз:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$6x + 3y - 27 = 0.$$

Бу тўғри чизиқда ординатаси 2 га тенг бўлган нуқтанинг координатасини (абсциссасини) топиш учун уч нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётиш шартидан фойдаланамиз:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 5x + 10 + x - 4 - 25 = 0; \; x = 3{,}5.$$

Демак, $6x + 3y - 27 = 0$ тўғри чизиқда ординатаси 2 га тенг бўлган нуқта $C(3;5;2)$ дан иборат.

9. Координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини топиш учун тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини ёзиб оламиз:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0;$$

x ва y ларнинг ўрнига

$$x = \rho\cos\varphi, \; y = \rho\sin\varphi$$

қийматларни қўямиз:

$$\rho\cos\alpha\cos\varphi + \rho\sin\alpha\sin\varphi - p = 0$$

ёки

$$\rho\cos(\varphi - \alpha) = p.$$

Тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтмаганлиги сабабли p нолдан фарқли бўлади. Охирги тенгликдан φ нинг ҳар қандай қийматида $\cos(\varphi-\alpha) \neq 0$ бўлади. Охирги тенгликни $\cos(\varphi-\alpha)$ га бўлиб, тўғри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги

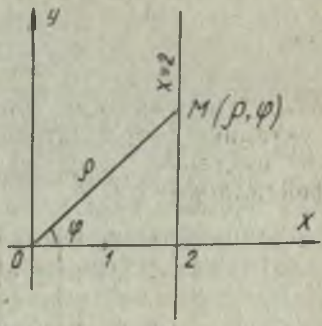
$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

тенгламасига эга бўламиз.

8-мисол. $x = 2$ тўғри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини топинг.

Е ч и ш. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ формуланинг биринчисидан фойдаланиб, берилган тўғри чизиқ тенгламасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\rho\cos\varphi=2 \text{ ёки } \rho=\frac{2}{\cos\varphi}.$$



48- чизма

Бу берилган тўғри чизиқ тенгламасидир (48-чизма). Бунда ρ мусбат миқдор бўлгани учун φ бурчак шундай ўзгариши керакки, $\cos\varphi$ мусбат бўлиши керак, яъни I ва IV чоракларда бўлиши керак.

9- м и с о л. $A(4;\ \frac{\pi}{2})$ ва $B(4;\ 0)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг қутб координаталар системасидаги тенгламасини тузинг.

Е ч и ш. Тўғри чизиқ A ва B нуқталардан ўтгани учун бу нуқталарнинг координаталари тўғри чизиқнинг $\rho\cos(\varphi-\alpha)=p$ тенгламасини қаноатлантириши керак, яъни

$$\begin{cases} p=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=4\sin\alpha, \\ p=4\cos(0-\alpha)=4\cos\alpha \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасидан p ва α ларни аниқлаймиз.

$$p=4\sin\alpha=4\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}.$$

$\alpha=\frac{\pi}{4}$ ни ўрнига қўйсак:

$$p=4\sin\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

Демак, изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\rho\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}.$$

3-§. Текисликда икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви

Текисликда икки l_1 ва l_2 тўгри чизиқ

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{5.18}$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{5.19}$$

тенгламалари билан берилган бўлсин.

Бу тўгри чизиқларнинг текисликда ўзаро жойлашувини текшириш учун (5.18) ва (5.19) тенгламаларни биргаликда система қилиб текшириш керак: шу системанинг ечимига кўра l_1 ва l_2 тўгри чизиқлар текисликда қандай жойлашишини айтиш мумкин:

а) l_1 ва l_2 тўгри чизиқлар кесишади. У ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ бўлиб,}$$

система ягона ечимга эга бўлади.

б) l_1 ва l_2 тўгри чизиқлар ўзаро параллел бўлса, у ҳолда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ тенглик ўринли бўлади.

в) l_1 ва l_2 тўгри чизиқлар устма-уст тушади. Бу ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

бўлади ёки иккала тенглама бир хил бўлади.

1-мисол. $2x-3y+4=0$ ва $3x+2y-7=0$ тўгри чизиқларнинг текисликда ўзаро жойлашишини аниқланг.

Ечиш. Берилган тўгри чизиқларнинг текисликда қандай жойлашишини аниқлаш учун, ушбу

$$\begin{cases} 2x-3y+4=0, \\ 3x+2y-7=0 \end{cases}$$

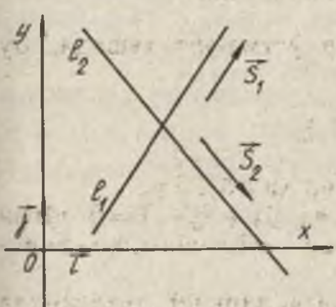
системани текширамиз. Бунда $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ нисбат бажарилгани учун тўгри чизиқлар кесишади ва бу кесишиш нуқтаси системанинг ечимидир. Системани ечиб, $x=1$, $y=2$ ларни топамиз. Бу топилган қийматлар $M(1;\ 2)$ кесишиш нуқтасининг координаталари бўлиб, бу нуқта бир вақтнинг ўзида берилган тўгри чизиқларнинг ҳар бирида ётади.

4- §. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

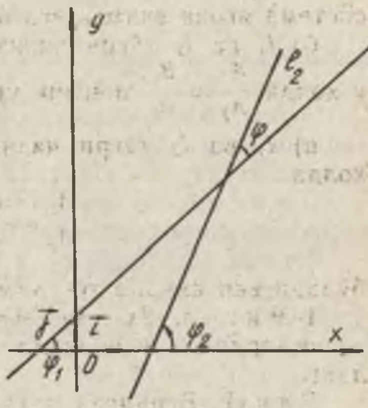
l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак деганда, бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчак тушунилади (бунда φ бурчак $0°$ дан $180°$ гача оралиқда ўзгаради). l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар қуйидаги умумий кўринишдаги тенгламалари билан берилган бўлсин (49- чизма).

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$
$$\bar{S}_1 = \{-B_1;\ A_1\} \text{ ва } \bar{S}_2 = \{-B_2;\ A_2\}$$

векторларни мос равишда l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари деб олишимиз мумкин. Чунки l_1 тўғри чизиқнинг $\bar{S}_1$ йўналтирувчи вектори унинг $\bar{n}$ нормал векторига перпендикуляр бўлгани учун $\bar{S}_1 \cdot \bar{n}$ скаляр кўпайтма нолга тенг бўлади. l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар



49- чизма



50- чизма

орасидаги бурчакни йўналтирувчи векторлар орасидаги бурчак деб қараганимиз учун $\bar{S}_1$ ва $\bar{S}_2$ векторлар орасидаги φ бурчакни векторларнинг скаляр кўпайтмаси қоидасидан аниқлаймиз:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1||\bar{S}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{5.20}$$

Энди l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар бурчак коэффициентли тенгламалари билан берилган ҳолни кўрамиз:

$$l_1 : y = k_1x + b_1;\ l_2 : y = k_2x + b_2.$$

Бунда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар Oy ўқига параллел эмас деб фараз қиламиз. φ_1 ва φ_2 бурчаклар мос равишда l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаклари бўлсин. 50- чизмадан: $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$.

Берилган тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2=\operatorname{tg}\varphi_2$ эканлиги бизга маълум. Тригонометриядаги маълум формулага кўра:

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}.$$

$\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$ ларнинг ўрнига k_1, k_2 ларни қўйиб,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}, \tag{5.21}$$

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1} \tag{5.22}$$

формулаларни ҳосил қиламиз. (5.21) формула тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлмаган ҳолда ишлатилади. (5.21) ва (5.22) формулалардан $k_1=k_2$ тўғри чизиқларнинг параллеллик, $k_1\cdot k_2=-1$ тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шартлари келиб чиқади.

1- мисол. $5x+y+4=0$ ва $3x-2y+2=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. (5.20) формула ёрдамида топамиз:

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot3+1\cdot(-2)}{\sqrt{5^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{15-2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45^\circ.$$

2- мисол. $2x-6y+5=0$ ва $2x+4y-7=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг.

Ечиш. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни φ деб белгилаймиз. Тўғри чизиқларнинг берилган тенгламаларини уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари орқали ифодалаб, ҳар бир тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини аниқлаймиз:

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{6};\ k_1=\frac{1}{3},$$

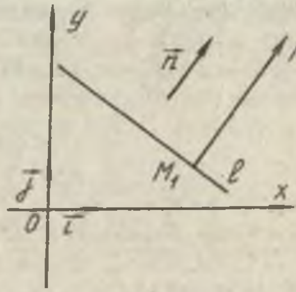
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4};\ k_2=-\frac{1}{2}.$$

(5.21) формула ёрдамида топамиз:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=-1.\quad \mathrm{tg}\varphi=-1\Rightarrow\varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

5- §. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

Декарт координаталар системасида l тўғри чизиқ $Ax+By+C=0$ тенгламаси билан ва бу чизиқда ётмаган $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқта берилган бўлсин. M_0 нуқтадан l_1 тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказамиз ва уларнинг кесишган нуқтасини $M_1(x_1;\ y_1)$ билан белгилаймиз (51- чизма). $\overline{M_1M_0}$ векторнинг узунлиги M_0 нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган масофа дейилади ва уни $d=\rho(M_0;\ l)$ кўринишда белгиланади. $\vec{n}=\{A;\ B\}$ вектор l тўғри чизиқнинг нормал вектори бўлсин. У ҳолда $\vec{n}$ ва $\overline{M_1M_0}$ векторлар коллинеар, чунки $\vec{n}$ вектор l тўғри чизиқнинг нормали. $\overline{M_1M_0}$ ва $\vec{n}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топамиз:



51- чизма

$$\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n}=|\overline{M_1M_0}|\cdot|\vec{n}|\cos\varphi=\pm\rho(M_0;\ l). \qquad (5.23)$$

Агар $\overline{M_1M_0}$ ва $\vec{n}$ векторлар бир хил йўналишда бўлса, $\varphi=0°$ бўлиб, $\cos\varphi=1$ бўлади, агар $\overline{M_1M_0}$ ва $\vec{n}$ векторлар қарама-қарши йўналишда бўлса, $\varphi=180°$ бўлиб, $\cos\varphi=-1$ бўлади. Буларни ҳисобга олсак, (5.23) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$d=\rho(M_0;\ l)=\frac{|\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}. \qquad (5.24)$$

$$\overline{M_1M_0}=\{x_0-x_1;\ y_0-y_1\}$$

ни эътиборга олсак:

$$\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=$$
$$=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1). \qquad (5.25)$$

$M_1(x_1; y_1)$ нуқта l тўғри чизиққа тегишли бўлгани учун $Ax_1+By_1+C=0$ бўлади. Бундан $Ax_1+By_1=-C$ ни топамиз ва (5.25) га қўйсак:

$$\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n}=Ax_0+By_0+C.$$

Агар $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$ эканини ҳисобга олсак, (5.24) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$d=\rho(m_0; l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (5.26)$$

(5.26) формула берилган M_0 нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган масофани ҳисоблаш формуласидир.

Мисол. M_0 (4; 7) нуқтадан $8x+6y-4=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Ечиш. (5.26) формулага кўра топамиз:

$$x_0=4,\ y_0=7,\ A=8,\ B=6,\ C=-4,$$

$$d=\rho(M_0; l)=\frac{|8\cdot4+7\cdot6-4|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{70}{10}=7.$$

6- §. Тўғри чизиқлар дастаси

Тўғри чизиқлар дастаси икки хил бўлади: кесишувчи тўғри чизиқлар дастаси ва параллел тўғри чизиқлар дастаси. Агар

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (5.27)$$

$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \qquad (5.28)$$

тенгламалар билан ифодаланувчи тўғри чизиқлар бирор нуқтада кесишса, у ҳолда бу кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқлар кесишувчи тўғри чизиқлар дастасини ташкил қилади. Кесишиш нуқтаси даста маркази дейилади. Кесишувчи тўғри чизиқлар дастасининг маркази орқали ўтувчи тўғри чизик қуйидаги тенглама билан аниқланади:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (5.29)$$

бу ерда α ва β лар бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар хил қийматларни қабул қилади. Агар $\alpha\neq0$ бўлса, (5.29) ни қуйидаги кўринишда ҳам ёзилади:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Агар кесишувчи тўғри чизиқлар дастаси марказининг координаталари (x_1; y_1) берилган бўлса, у ҳолда даста тенгламаси

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1+\lambda(A_2x_1+B_2y_1+C_2)=0$$

кўринишда ёзилади.

Агар (5.27) ва (5.28) тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари параллел ёки устма-уст тушса, у ҳолда шу йўналишдаги тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар дастасини ифодалайди.

Мисол. $x+y-2=0$ ва $3x-2y-5=0$ тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Шу тўғри чизиқлар дастасига тегишли ва M (2; 1) нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган тўғри чизиқлардан ўтувчи тўғри чизиқлар дастаси тенгламасини тузамиз:

$$x+y-2+\lambda(3x-2y-5)=0. \tag{A}$$

Бу тенгламага M нуқта координаталарини қўямиз:

$$2+1-2+\lambda(3.2-2.1-5)=0,$$
$$1-\lambda=0\Rightarrow\lambda=1.$$

Бу қийматни (A) тенгламага қўйиб, изланаётган тўғри чизиқ тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x+y-2+3x-2y-5=0\Rightarrow 4x-y-7=0.$$

7-§. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

Декарт координаталар системасида тўғри чизиқ $Ax+By+C=0$ тенглама билан берилган бўлсин. Агар бу тўғри чизиқнинг нормал вектори $\vec{n}=\{A;\ B\}$ бирлик вектор бўлса, яъни $A^2+B^2=1$ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ тенгламаси нормаланган тенглама дейилади.

$Ax+By+C=0$ тўғри чизиқ тенгламаси нормалланган бўлмаса, у ҳолда унинг чап қисмини N сонига кўпайтириш керак:

$$AN+BN+CN=0,$$

бунда N ни шундай танлаб олиш керакки, натижада $\{AN,\ BN\}$ вектор бирлик вектор бўлсин:

$$(AN)^2+(BN)^2=1\Rightarrow N=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Шундай қилиб, ҳар бир тўғри чизиқ учун иккита нормаланган тенгламага эга бўламиз:

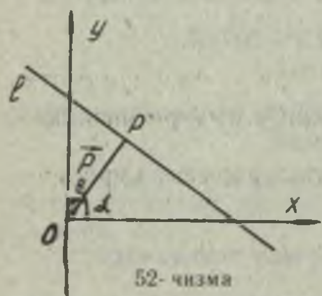
$$\pm\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

N сони нормалловчи кўпайтувчи дейилади, унинг ишораси тенгламадаги озод ҳад C нинг ишорасига тескари бўлади. $\sqrt{A^2+B^2}$ илдиз $\vec{n}$ нормал векторнинг модули бўлгани учун:

$$N=\pm\frac{1}{|\vec{n}|}.$$

Тўғри чизиқнинг нормалланган тенгламаси $Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2=1)$ содда геометрик маънога эга, яъни

$$A=\vec{n}\cdot\vec{i}=\cos\alpha,\ B=\vec{n}\vec{j}=\cos\beta,\ |c|=p$$



52- чизма

эканлиги 52- чизмадан кўриниб турибди, бунда α ва β бурчаклар $\vec{i}$ ва $\vec{j}$ бирлик векторлар билан $\vec{n}$ нормал вектор орасидаги бурчак косинусларидир. p — координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр (нормал) узунлиги. Агар декарт координаталар системасига нисбатан тўғри чизиқ $Ax+By+C=0$ нормалланган тенглама билан берилган ва $C<0$ бўлса, у ҳолда A ва B лар Ox ўқининг мусбат йўналишида $\vec{Op}$ вектори томон α бурчакнинг косинус ва синусларидан иборат бўлади:

$$\vec{n}=\{A;\ B\}=\{\cos\alpha;\ \sin\alpha\}.$$

Шундай қилиб, координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтадан нормалланган тўғри чизиққача бўлган d масофа қуйидагича аниқланади:

$$d=|Ax_0+By_0+C|,\ (A^2+B^2=1)$$

ёки

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|.$$

1-мисол. $4x-3y-10=0$ тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормалланган тенглама кўринишга келтиринг.

Ечиш. $A=4$, $B=-3$, $C=-10$ бўлгани учун, N нормалловчи кўпайтувчи

$$N=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{1}{5}$$

га тенг бўлади. Берилган тенгламанинг ҳамма ҳадларини $\frac{1}{5}$ га кўпайтирсак, берилган тўғри чизиқ тенгламаси ушбу

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$$

нормал кўринишга келади.

2-мисол. $x\sqrt{3}+y-6=0$ тўғри чизиқ учун α оғиш бурчагини координаталар бошидан шу тўғри чизиққача бўлган p кесмани аниқланг.

Ечиш. Берилган тенгламани нормал кўринишга келтирамиз:

$$A=\sqrt{3},\ B=1,\ C=-6<0,$$

$$N=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$$

Берилган тенгламанинг ҳамма ҳадларини $N=\frac{1}{2}$ га кўпайтирамиз:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-3=0.$$

Бундан $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $p=-3$ ёки $\alpha=30°$ га эга бўламиз.

МАШҚЛАР

1. $A_1(3;\ -2)$, $A_2(5;\ 6)$, $A_3(-3;\ 4)$, $A_4(2;\ -2)$, $A_5(2;\ -1)$, $A_6(4;\ 3)$ нуқталар берилган. Бу нуқталардан қайси

бири $x+y=1$ тенглама билан аниқланган чизиқда ётишини ва қайси бири ётмаслигини аниқланг.

2. Қуйидаги чизиқларнинг чизмасини ясанг:

1) $x-y=0$;
2) $x+y=0$;
3) $x+2=0$;
4) $x-3=0$;
5) $y+5=0$;
6) $y-3=0$;
7) $x=0$;
8) $y=0$;
9) $y^2-xy=0$;
10) $y^2+xy=0$;
11) $x^2-y^2=0$;
12) $xy=0$;
13) $y^2-16=0$;
14) $x^2-x-12=0$;
15) $y^2-3y+2=0$;
16) $y^2x-7xy+10x=0$;
17) $y=|x|$;
18) $x=|y|$;
19) $y+|x|=0$;
20) $x+|y|=0$;
21) $x^2+y^2=25$;
22) $2x^2+3y^2+5=0$;
23) $2x^2+y^2+1=0$;
24) $(x-3)^2+(y+1)^2=9$.

3. Қуйидаги иккита чизиқнинг кесишиш нуқтасини топинг:

1) $x^2+y^2=16$ ва $x-y=0$;
2) $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ ва $x+y=0$;
3) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ ва $x^2+y^2=25$;
4) $x^2+y^2-8x+10y+40=0$ ва $x^2+y^2=4$.

4. Ox ўқидан b масофада ётувчи нуқталарнинг геометрик ўрнини тенгламасини чиқаринг.

5. A (3; 6) нуқтадан Ox ўқи билан кесишувчи мумкин бўлган нурлар ўтказилган. Уларнинг ўрталарининг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

6. $3x-2y-12=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқтасини аниқланг.

7. ABC учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Учбурчак учларининг координаталарини аниқланг.

8. Параллелограммнинг иккита томонининг тенгламаси $8x+3y+1=0, 2x+y-1=0$ ва диагоналларидан бирининг тенгламаси $3x+2y+3=0$ берилган. Шу параллелограмм учларининг координаталарини аниқланг.

9. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициенти k ни ва Oy ўқини кесувчи b кесмасини аниқланг:

1) $5x-y+3=0$;
2) $2x+3y-6=0$;

3) $5x+3y+2=0$;

4) $3x+2y=0$;

5) $y-3=0$.

10. $2x+3y+4=0$ тўғри чизиқ берилган. M_0 (2; 1) нуқтадан ўтувчи ва 1) берилган тўғри чизиққа параллел; 2) берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси тузинг.

11. $6x-2y+5=0$ ва $4x+2y-7=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг.

12. $5x-2y-11=0$, $x+2y+5=0$ ва $x-2y+1=0$ лар учбурчак томонларининг тенгламалари бўлса, шу учбурчак бурчакларини ва юзини топинг.

13. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг:

а) $6x-3y+5=0$ ва $2x-6y-3=0$;

б) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$ ва $\frac{x}{2}+\frac{y}{18}=1$;

в) $\frac{x}{3}-\frac{y}{7}=1$ ва $\frac{x}{7}+\frac{y}{3}=1$.

14. Oy ўқдан 2 бирлик кесма ажратувчи ва $x-2y+3=0$ тўғри чизиқ билан 45° ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

15. $A(2; 3)$ ва $B(5; 4)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва бу тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқланг.

16. α ва β ларнинг қандай қийматида $(\alpha-3\beta-2)x+(2\alpha+4\beta-1)y-3\alpha+\beta-2=0$ тўғри чизиқ Ox ўқини 3, Oy ўқини 2 масштаб бирлигида кесиб ўтади.

17. Учбурчак учларининг координаталари берилган:

$$A(-4;\ 0);\ B(4;\ 6) \text{ ва } C(-1;\ -4);$$

а) унинг учала томонининг;

б) C учидан ўтказилган медианасининг;

в) B бурчаги биссектрисасининг;

г) A учидан BC томонига туширилган баландлигининг тенгламасини тузинг.

18. Координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги $p=4$. Бу перпендикуляр Ox ўқининг мусбат йўналиши билан $\alpha=30°$ ли бурчак ҳосил қилади. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини тузинг.

19. A (3; -4) нуқта координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асоси. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини тузинг.

20. $A(3;\ 5)$ нуқтадан $3x+4y-3=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

21. $5x-12y-12=0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб, ундан 4 масштаб бирлик узоқликда ётувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

22. $A(5;\ -1)$ нуқтадан ҳамда $2x-3y+2=0$ ва $y-4=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

23. $4x-2y+5=0$ ва $3x+4y+1=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи ҳамда $7x-3y+5=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

24. $3x-y=0$ ва $x+4y-2=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтиб, $2x+7y=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

25. $2x+3y-12=0$ ва $3x+2y-12=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар биссектрисаларининг тенгламаларини тузинг.

26. Квадратнинг битта учи $A(-1;\ 1)$ нуқтада ётади. Унинг диагоналларидан бири $x+7y-31=0$ тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. Квадратнинг томонларини ва иккинчи диагонали тенгламасини тузинг.

27. Квадратнинг икки қарама-қарши учлари $A(1;\ 4)$ ва $C(5;\ 2)$ нуқталарда ётади. Қолган иккита учининг координаталарини топинг.

28. Параллелограммнинг икки қўшни томонларининг тенгламалари $x-2y=0$; $x-y-1=0$ ва диагоналларининг кесишиш нуқтаси $(3;\ -1)$ бўлса, унинг қолган томонларининг тенгламасини тузинг.

29. $2x-y-2=0$ ва $x+2y-11=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ҳамда координаталар бошидан 5 бирлик узоқликдан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

30. $x-3y=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган ҳамда $3x-2y-1=0$ ва $4x-5y+1=0$ тўғри чизиқлар кесишиб, юзи $\frac{7}{2}$ кв. бирликка тенг бўлган учбурчак ҳосил қиладиган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

6-БОБ

ФАЗОДА ТЕКИСЛИКЛАР ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

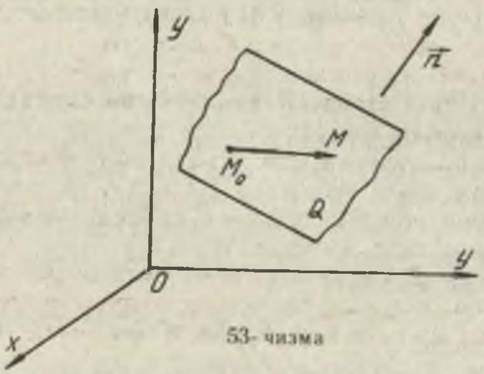
1-§. Текисликнинг турли тенгламалари

1. **Текисликнинг нормал вектори. Берилган нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси**

Фазода Q текислик ва унга перпендикуляр бўлган $\vec{n}=\{A;\ B;\ C\}$ вектор берилган бўлсин, $\vec{n}\neq 0$ вектор Q текисликнинг **нормали** дейилади.

Ҳар қандай текислик фазода ўзининг бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтаси ва $\vec{n}$ нормалининг берилиши билан тўла аниқланади.

Берилган нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}$ нормал векторга эга бўлган Q текислик тенгламасини келтириб чиқарамиз. Q текислигида ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқта олиб, уни M_0 билан бирлаштириб, $\overline{M_0M}$ векторни ҳосил қиламиз (53-чизма). $Q\perp\vec{n}$ бўлгани учун $\overline{M_0M}\perp\vec{n}$ бўлади.



53-чизма

Уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади: $\overline{M_0M}\cdot\vec{n}=0$.

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$$

бўлгани учун $\vec{M_0M}\cdot\vec{n}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$ бўлади. Демак, Q текислик ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтасининг координаталари

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{6.1}$$

тенгламани қаноатлантиради.

1- мисол. M_0 (1; -2; 3) нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}=\{2; 1; 4\}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масала шартидан: $x_0=1$; $y_0=-2$; $z_0=3$ ва $A=2$, $B=1$, $C=4$. Бу қийматларни (6.1) га қўямиз.

$$2(x-1)+1(y+2)+4(z-3)=0.$$

Изланаётган текислик тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$2x+y+4z-12=0.$$

2. Текисликнинг умумий тенгламаси x, y, ва z ўзгарувчили биринчи даражали

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{6.2}$$

тенглама берилган бўлсин, бунда A, B, C коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли деб фараз қиламиз. Аниқлик учун $A\neq0$ деб, (6.2) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)+B(y-0)+C(z-0)=0. \tag{6.3}$$

(6.3) тенглама $M_0\left(-\frac{D}{A};0;0\right)$ орқали ўтувчи ва $\vec{n}=\{A; B; C\}$ нормал вектори бўлган текислик тенгламаси бўлгани учун (6.2) ҳам текислик тенгламаси бўлиб, унга текисликнинг умумий тенгламаси дейилади.

(6.2) текисликнинг умумий тенгламасига кўра унинг координата ўқларига нисбатан жойлашуви тўғрисида фикр юритиш мумкин:

а) агар $D=0$ бўлса, (6.2) Q текислик координаталар бошидан ўтади;

б) агар $A=0$ бўлса, (6.2) текислик Ox ўқига параллел, $B=0$ бўлса, Q текислик Oy ўқига параллел, $C=0$ бўлса, Q текислик Oz ўқига параллел бўлади.

Худди шунингдек, қуйидаги ҳоллар ҳам бўлиши мумкин:

$$A=0 \Leftrightarrow Q\parallel(Ox),\ A=D=0 \Leftrightarrow Q\supset(Ox);$$
$$B=0 \Leftrightarrow Q\parallel(Oy),\ B=D=0 \Leftrightarrow Q\supset(Oy);$$
$$C=0 \Leftrightarrow Q\parallel(Oz),\ C=D=0 \Leftrightarrow Q\supset(Oz);$$

в) агар $A=B=0$, $C\neq0$ бўлса, Q текислик Oxy текисликка параллел бўлади. Хусусий ҳолда

$D=0$ бўлса, (6.2) тенглама $z=0$ дан иборат бўлиб, бу xOy текислик тенгламасидир. Шунга ўхшаш, $x=\frac{D}{A}$ тенглама Oyz текисликка параллел бўлган Q текисликнинг тенгламасини беради, $x=0$ тенглама эса Oyz текисликни ифодалайди. $y=b$ эса $Q\|(Oxz)$ текисликни, $y=0$ эса Oxz текисликни ифодалайди.

3. Текислик ўзининг $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтаси ва шу текисликка параллел бўлган иккита ноколлинеар $\vec{p}=\{\alpha_1;\ \beta_1;\ \gamma_1\}$, $\vec{q}=\{\alpha_2;\ \beta_2;\ \gamma_2\}$ векторларнинг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

Текисликда ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқта олиб $\overline{M_0M}$ векторни ҳосил қиламиз. $\overline{M_0M}$ вектор $\vec{p}$, $\vec{q}$ векторлар билан компланар бўлади. Векторлар компланар бўлса, у ҳолда уларнинг координаталаридан тузилган учинчи тартибли детерминант нолга тенг бўлади:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (6.4)$$

(6.4) тенглама берилган нуқтадан ўтиб, берилган ноколлинеар икки векторга параллел бўлган текислик тенгламаси деб аталади.

2-мисол. M_0 (3; 2; 2) нуқтадан ўтиб, $\vec{p}=\{2;\ 4;\ 3\}$; $\vec{q}=\{1;\ 1;\ 2\}$ векторларга параллел бўлган текисликнинг умумий тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масала шартига кўра (нуқта координаталари):

$$x_0=3;\ z_0=2;\ z_0=2,$$
$$\alpha_1=2;\ \beta_1=4;\ \gamma_1=3$$
$$\alpha_2=1;\ \beta_2=1;\ \gamma_2=2.$$

Бу қийматларни (6.4) формулага қўйиб, қуйидаги учинчи тартибли детерминантга эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Детерминантни ҳисобласак, текисликнинг изланган умумий тенгламасига эга бўламиз:

$$5x-y-2z-9=0.$$

4. Текисликнинг параметрик тенгламаси. Берилган $\overline{M_0M}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ векторлар бир текисликда ётган бўлсин, у ҳолда улар ўзаро чизиқли боғлиқли бўлади, яъни

$$\overline{M_0M}=t\vec{p}+n\vec{q},(t,n\in R), \tag{6.5}$$

бу ерда t, n сонлар параметрлардир.

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0\},$$

$$\vec{p}t=t\{\alpha_1;\ \beta_1;\ \gamma_1\}=\{t\alpha_1;\ t\beta_1;\ t\gamma_1\},$$

$$n\vec{q}=n\{\alpha_2;\ \beta_2;\ \gamma_2\}=\{n\alpha_2;\ n\beta_2;\ n\gamma_2\}$$

бўлгани учун

$$(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}=(t\alpha_1+n\alpha_2)\vec{i}+$$
$$+(t\beta_1+n\beta_2)\vec{j}+(t\gamma_1+n\gamma_2)\vec{k},$$

бундан

$$\begin{aligned} x&=x_0+\alpha_1 t+\alpha_2 n,\\ y&=y_0+\beta_1 t+\beta_2 n,\\ z&=z_0+\gamma_1 t+\gamma_2 n. \end{aligned} \tag{6.6}$$

(6.6) — *текисликнинг параметрик тенгламаси* деб аталади.

5. Уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси. Бир текисликда ётган учта нуқта текисликнинг вазиятини тўла аниқлайди.

$$M_1(x_1;y_1;z_1),\ M_2(x_2;y_2;z_2),\ M_3(x_3;y_3;z_3)$$

нуқталар берилган бўлсин. Агар $M_0=M_1$, $\vec{p}=\overline{M_1M_2}$, $\vec{q}=\overline{M_1M_4}$ деб олсак,

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\},$$

$$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\}$$

бўлиб, M_0 нуқтадан ўтувчи $\vec{p}$, $\vec{q}$ векторларга параллел бўлган текисликнинг (6.4) тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{6.7}$$

Бу уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасидан иборатдир.

3-мисол. $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(-1;\ 3;\ 4)$, $M_3\ (2;\ 0;\ 1)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

Ечиш. (6.7) формулага кўра:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 3-2 & 4-3 \\ 2-1 & 0-2 & 1-3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Бундан изланаётган текислик тенгламасига эга бўламиз:

$$y-z+1=0.$$

6. Текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалари бўйича тенгламаси.

Q текислик координаталар бошидан ўтмасин ва Ox, Oy, Oz ўқларни мос равишда $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$ нуқталарда кесган бўлсин. Бу ҳолда (6.7) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0.$$

Бу детерминантни ҳисоблаймиз:

$$bcx+acy+abz=abc.$$

Тенгликнинг барча ҳадларини abc га бўламиз:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (6.8)$$

(6.8) — текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалари бўйича тенгламаси дейилади.

4-мисол. $3x+2y-5z-30=0$ текисликнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

Ечиш. Берилган текислик тенгламасини (6.8) кўринишга келтирамиз, бунинг учун унинг ҳадларини 30 га бўламиз:

$$\frac{3x}{30}+\frac{2y}{30}-\frac{5z}{30}-1=0$$

ёки

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{15}-\frac{z}{6}=1.$$

Демак, текислик Ox ўқини (10; 0; 0), Oy ўқини (0; 15; 0), Oz ўқини (0; 0; —6) нуқталарда кесади.

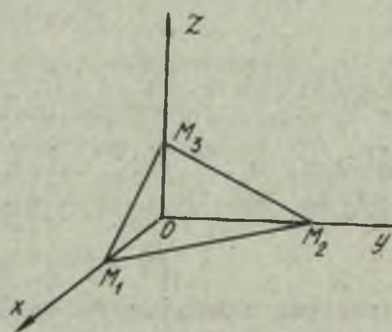
5-мисол. Тенгламаси $6x+2y-3z-6=0$ бўлган текисликни ясанг.

Ечиш. Бунинг учун аввало текисликнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топамиз. Агар текислик тенгламасига $y=0$ ва $z=0$ қийматларни қўйсак, унинг Ox ўқ билан кесишган нуқтаси топилади, яъни

$$6x+2\cdot 0+3{,}0-6=0\Rightarrow x=1.$$

Шунга ўхшаш, $x=0$, $y=0$ деб $z=2$, $x=0$, $z=0$ деб $y=3$ ни топамиз. Шундай қилиб берилган текислик $M_1(1;\ 0;\ 0)$, $M_2(0;\ 3;\ 0)$, $M_3(0;\ 0;\ 2)$ нуқталар орқали ўтар экан.

Шу нуқталарни координата ўқларидан топиб, бу нуқталардан ўтадиган текисликни ясаймиз (54- чизма).



54- чизма

Энди текисликнинг масалалар ечишда зарур бўладиган айрим тенгламаларини келтириб ўтамиз.

1. $\vec{r}\cdot\vec{n}+D=0$ кўринишдаги тенглама текисликнинг вектор шаклдаги тенгламаси дейилади. Бунда $\vec{r}$ вектор текисликдаги ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтанинг радиус-вектори, $\vec{n}=\{A;\ B;\ C\}$ берилган $Ax+By+Cz+D=0$ текисликка перпендикуляр бўлган вектор.

2. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ кўринишдаги тенглама текисликнинг нормал тенгламаси деб аталади. Бунда p — координаталар бошидан текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлиги, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ бу перпендикулярнинг Ox, Oy, Oz координата ўқлари билан ҳосил қилган бурчакларининг косинуслари.

3. $\vec{n}^0\cdot\vec{r}-p=0$ кўринишдаги тенглама текисликнинг вектор шаклдаги нормал тенгламаси дейилади. Бунда

$\vec{n}_0=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ берилган текисликка перпендикуляр бирлик вектор.

4. (6.2) умумий тенгламани нормал шаклга келтириш учун унинг ҳамма ҳадларини нормалловчи кўпайтувчи

$$N=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

га кўпайтириш керак. Бу ҳолда

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ p=\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

бўлади. Агар $D<0$ бўлса, ўнг томонда мусбат, $D>0$ бўлса, манфий ишора олинади.

5. $\vec{n}(\vec{r}-\vec{r}_1)=0$ кўринишдаги тенглама берилган $M_1(x_1;y_1;z_1)$ нуқта орқали ўтувчи текисликнинг вектор шаклдаги тенгламаси. Бунда $\vec{r}$ текисликнинг $M(x;y;z)$ нуқтасининг радиус-вектори, $\vec{r}_1$ берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтасиниг радиус-вектори.

6. $[(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}_2-\vec{r}_1)]\cdot(\vec{r}_3-\vec{r}_1)=0$ кўринишдаги тенглама берилган M_1, M_2, M_3 нуқталардан ўтувчи текисликнинг вектор кўринишдаги тенгламаси. Бунда $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ векторлар мос равишда M_1, M_2, M_3 нуқталарнинг радиус-векторлари.

7. Берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта орқали ўтиб, берилган $Ax+By+Cz+D=0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламаси:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

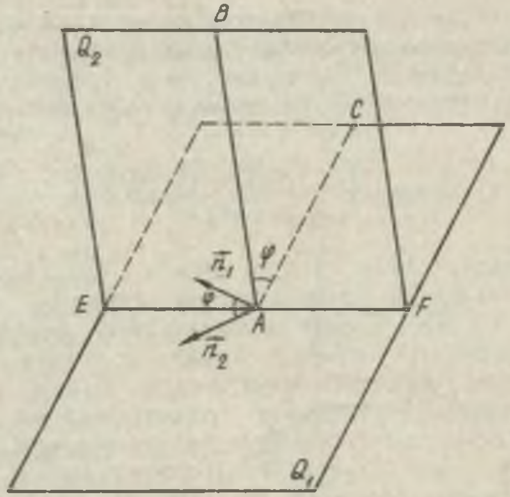
2- §. Икки текислик орасидаги бурчак. Икки текисликнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

Фазода декарт координаталар системасида ўзаро кесишувчи Q_1 ва Q_2 текисликлар қуйидаги тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$Q_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (6.9)$$

$$Q_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (6.10)$$

Икки текислик орасидаги бурчак деганда бу текисликлар ташкил қилган қўшни икки ёқли бурчаклардан бирини тушунамиз (55-чизма). Q_1 ва Q_2 текисликлар EF чизиқ бўйича кесишади. EF устида ихтиёрий A нуқтани олиб, ундан ўтувчи ва Q_2



55-чизма

текисликда ётувчи $AB\perp EF$, Q_1 текисликда ётувчи $AC\perp EF$ чизиқларни ўтказамиз. Шу AB ва AC чизиқлар орасидаги бурчак Q_1 ва Q_2 текисликлар орасидаги текис бурчак φ бўлади. Агар $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ векторлар мос равишда Q_1, Q_2 текисликларнинг нормал векторлари бўлса, у ҳолда бу икки текислик орасидаги бурчак $\vec{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ ва $\vec{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ нормал векторлар орасидаги бурчакка тенг бўлади.

Бизга маълумки, икки вектор орасидаги бурчак қуйидаги формула бўйича топилади:

$$\cos\varphi=\cos(\vec{n}_1,\hat{\vec{n}}_2)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

ёки

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (6.11)$$

(6.11) формулада $\cos\varphi=0$ бўлса, у ҳолда иккита текислик ўзаро перпендикуляр бўлади ва бундан

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{6.12}$$

га эга бўламиз. (6.12) формула иккита текисликнинг перпендикулярлик шарти бўлади.

Энди Q_1 ва Q_2 текисликлар параллел бўлсин, у ҳолда уларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлари ҳам параллел бўлади.

Бизга маълумки, параллел векторлар учун $\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2$ муносабат ўринлидир. Бундан

$$A_1=\lambda A_2,\ B_1=\lambda B_2,\ C_1=\lambda C_2,$$

булардан

$$\lambda=\frac{A_1}{A_2};\ \lambda=\frac{B_1}{B_2};\ \lambda=\frac{C_1}{C_2}$$

ёки

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{6.13}$$

тенгликларга эга бўламиз. (6.13) — икки текисликнинг параллелик шартидир.

Мисол. $3x-5y+6z-9=0$ ва $5x+6y+3z+10=0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Биринчи текислик тенгламасидан

$$A_1=3;\ B_1=-5;\ C_1=6,$$

иккинчи текислик тенгламасидан

$$A_2=5,\ B_2=6;\ C_2=3$$

ларни аниқлаб, бу қийматларни (6.11) формулага қўямиз:

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot5-6\cdot(-5)+6\cdot3}{\sqrt{3^2+5^2+6^2}\cdot\sqrt{5^2+6^2+3^2}}=\frac{3}{70}.$$

Бундан $\cos\varphi=\frac{3}{70}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{3}{70}$. Демак, икки текислик орасидаги бурчак $\varphi=\arccos\frac{3}{70}$ га тенг.

3- §. Учта текисликнинг кесишиш нуқтаси. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

Учта Q_1, Q_2, Q_3 текислик тенгламалари билан берилган бўлсин. Бу текисликларнинг кесишиш нуқтасини топиш учун уларнинг тенгламаларидан тузилган қуйидаги уч номаълумли учта чизиқли тенглама системасини ечиш керак:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{cases} \tag{6.14}$$

Агар (6.14) системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлса, у ҳолда система ягона ечимга эга, яъни учта текислик битта нуқтада кесишади.

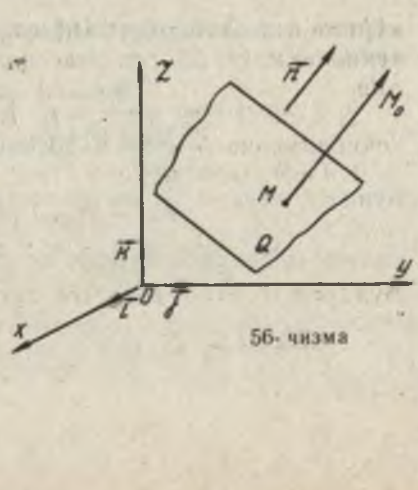
1- мисол. Қуйидаги текисликларнинг кесишиш нуқтасини топинг:

$$2x-3y+z+2=0,\ 3x+4y+2z-5=0,\ x+y+3z+1=0.$$

Ечиш. Бу тенгламалардан қуйидаги системани тузиб, уни ечамиз:

$$\begin{cases} 2x-3y+\ z+2=0, \\ 3x+4y+2z-5=0, \\ \ x+\ y+3z+1=0. \end{cases}$$

Система ечими $x=1$, $y=1$, $z=-1$. Демак, текисликлар $M(1;\ 1;\ -1)$ нуқтада кесишар экан.



56- чизма

Энди фазода декарт координаталар системасида берилган $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқта билан Q: $Ax+By+Cz+D=0$ текислик орасидаги масофани топиш формуласини чиқарамиз. Бунинг учун M_0 нуқтадан текисликка туширилган перпендикулярнинг асосини $M(x_1;y_1;z_1)$ билан белгилаймиз (56- чизма).

$$d=\rho(M, M_0)=\rho(M_0, Q)$$

биз излаётган масофа бўлади. Текислик тенгламасидан бизга маълумки, унинг нормал вектори $\vec{n}=\{A; B; C\}$ га тенг. $\vec{n}$ ва $\overrightarrow{MM_0}$ векторлар ўзаро коллинеар векторлардир. Бу векторларнинг скаляр кўпайтмасини топамиз:

$$\overrightarrow{M M_0}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{M M_0}|\ |\vec{n}|\cos(\overrightarrow{M M_0},\vec{n})=\rho(M_0, Q)\cdot|\vec{n}|,$$

$$d=\rho(M_0, Q)=\frac{|\overrightarrow{M_0 M}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}. \qquad (6.15)$$

(6.15) формулани координаталарда ифодалаймиз:

$$\overrightarrow{M M_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=$$
$$Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1).$$

M нуқта берилган текисликда ётгани учун $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ бўлади ва бундан $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$. У ҳолда, скаляр кўпайтманинг қиймати

$$\overrightarrow{M M_0}\cdot\vec{n}=Ax_0+By_0+Cz_0+D$$

ва

$$|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

эканини эътиборга олсак, (6.15) формула

$$d=\rho(M_0, Q)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (6.16)$$

кўринишга келади. (6.16) формула берилган нуқтадан текисликкача бўлган масофани ҳисоблаш формуласидир.

2- мисол. M_0 (2; 1; 0) нуқтадан $2x-y+2z+3=0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

Ечиш. Берилишига кўра:

$$x_0=2;\ y_0=1;\ z_0=0;$$
$$A=2;\ B=-1;\ C=2;\ D=3.$$

Буларни (6.16) формулага қўямиз, у ҳолда

$$d=\rho(M_0, Q)=\frac{|2\cdot2-1\cdot1+2\cdot0+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

Демак, M_0 нуктадан Q текисликкача бўлган масофа $d=2$ бирликка тенг экан.

4- §. Фазода тўғри чизиқ тенгламасининг берилиш усуллари

1. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

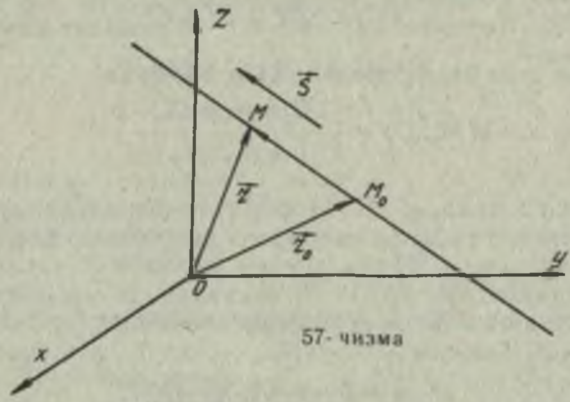
Тўгри чизиқ иккита Q_1 ва Q_2 текисликларнинг кесишиш чизиғи сифатида берилиши мумкин. Бу текисликларнинг тенгламалари берилган бўлсин:

$$\begin{matrix} Q_1: \\ Q_2: \end{matrix}\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (6.17)$$

Агар бу текисликлар параллел бўлмаса (яъни уларнинг нормал векторлари коллинеар бўлмаса), у ҳолда (6.17) система тўгри чизиқни (иккита текисликнинг кесишиш чизиғи) аниқлайди. (6.17) тенглама тўгри чизиқнинг умумий тенгламаси дейилади.

2. Тўгри чизиқнинг вектор ва параметрик тенгламалари

Тўгри чизиқ ўзининг $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуктаси (тўгри чизиқда ётувчи), йўналтирувчи $\vec{s}=\{m;\ n;\ p\}$ векторининг берилиши билан аниқланади (57- чизма). l тўгри



57- чизма

чизиқнинг ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтасини олиб, $\overline{M_0M}$ векторни ҳосил қиламиз. Бу $\overline{M_0M}$ ва $\vec{s}$ векторлар коллинеар бўлгани учун:

$$\overline{M_0M}=t\vec{S}\ (t\in R). \qquad (6.18)$$

Агар $\overline{OM_0}=\vec{r}_0$, $\overline{OM}=\vec{r}$ деб олсак ва чизмадан $\overline{M_0M}=\overline{OM}-\overline{OM_0}$ эканлигини ҳисобга олсак, (6.18) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}. \tag{6.19}$$

(6.19) тенглама тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси дейилади. M ва M_0 нуқталар радиус-векторларининг

$$\overline{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

$$\overline{OM_0}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k},$$

$$t\vec{s}=tm\vec{i}+tn\vec{j}+tp\vec{k}$$

қийматларини (6.19) формулага қўямиз ва икки векторнинг тенглик хоссасига кўра

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{6.20}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. (6.20) кўринишдаги тенгламалар системасига тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади, t ўзгарувчи параметр дейилади.

3. Тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси

(6.20) тенгламалар системасидан t параметрни топамиз:

$$t=\frac{x-x_0}{m},\ t=\frac{y-y_0}{n},\ t=\frac{z-z_0}{p}.$$

Бундан

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{6.21}$$

(6.21) тенглама тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси дейилади.

Хусусий ҳолда, $\vec{s}$ йўналтирувчи вектор бирлик вектор бўлганда, яъни

$$\vec{s}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$$

бўлса. У ҳолда (6.21) тенглама

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}$$

кўринишга эга бўлади.

Тўғри чизиқ координаталар ўқидан бирига, масалан, Ox ўққа перпендикуляр бўлсин. У ҳолда $m=0$ бўлиб, (6.20) параметрик тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$x=x_0,$$
$$y=y_0+nt,$$
$$z=z_0+pt.$$

Бундан t параметрни йўқотиб, тўғри чизиқнинг қуйидаги кўринишдаги тенгламасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}. \end{cases}$$

Бу ҳолда тўғри чизиқ тенгламасини формал равишда қуйидагича каноник кўринишда ёзишга келишиб оламиз:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Шунга ўхшаш, тўғри чизиқнинг

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}$$

каноник тенгламасига $x=x_0$, $y=y_0$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқ мос келади. Бу тўғри чизиқ Oz ўққа параллел, хусусан, $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ тенглама Oz ўқнинг каноник тенгламасидир.

4. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

Декарт координаталар системасида $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ва $M_1(x_1;y_1;z_1)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топиш учун $\overline{M_0M_1}$ векторини чизиб оламиз. Бу вектор $\overline{M_0M_1}=\{x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0\}$ га тенгдир. Агар тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторини $\vec{s}=\overline{M_0M}$ деб олсак, у ҳолда (6.21) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{6.22}$$

(6.22) формула M_0 ва M_1 нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси дейилади. Бу формулани

$$\begin{cases} x=x_0+(x_1-x_0)t, \\ y=y_0+(y_1-y_0)t, \\ z=z_0+(z_1-z_0)t \end{cases} \qquad (6.23)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. (6.23) — икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг параметрик кўринишдаги тенгламасидир.

1-мисол. M_0 (3; 4; 1) нуқтадан ўтган ва йўналтирувчи вектори $\vec{s}=\{1;\ 2;\ 3\}$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Мисол шартига кўра:

$$x_0=3,\ y_0=4,\ z_0=1,\ m=1,\ n=2,\ p=3.$$

Бу қийматларни (6.21) формулага қўйсак, изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

2-мисол. $M_1(-3;\ 1;\ 2)$ ва $M_2(8;\ -2;\ 5)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (6.20) га M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталарини қўйсак,

$$\frac{x+3}{8+3}=\frac{y-1}{-2-1}=\frac{z-2}{5-2}$$

ёки

$$\frac{x+3}{11}=\frac{z-1}{-3}=\frac{z-2}{3}$$

тўғри чизиқ тенгламасига эга бўламиз.

3-мисол. $$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+\ z+3=0 \end{cases}$$

система билан берилган тўғри чизиқ тенгламасини каноник шаклга келтиринг.

Ечиш. Берилган кўринишдаги тўғри чизиқ тенгламасини каноник кўринишга келтириш учун бу тўғри чизиққа тегишли бирор нуқтани ва $\vec{S}$ йўналтирувчи векторни аниқлаш керак. Берилган тўғри чизиққа тегишли M_0 нуқтанинг координаталарини топиш учун координаталаридан ихтиёрий бирини нолга тенглаймиз.

Масалан, $z=0$ бўлсин. У ҳолда берилган тенглама

$$\begin{cases} 2x-3y=\ \ 9, \\ x-2y=-3 \end{cases}$$

кўринишда бўлади. Бундан $x=27$ ва $y=15$ ларни топамиз. Демак, тўғри чизиқнинг нуқталаридан бири M_0 (27; 15; 0) экан. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи $\vec{s}$ векторини

$$\vec{n}_1=\{2;\ -3;\ -3\} \text{ ва } \vec{n}_2=\{1;\ -2;\ 1\}$$

нормал векторларнинг вектор кўпайтмасидан

$$\vec{s}=[\vec{n}_1,\ \vec{n}_2]$$

ёки

$$m:n:p=\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

пропорциядан аниқлаш мумкин.

Бундан

$$m:n:p=\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}:$$

$$:\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=(-9):(-5):(-1).$$

Демак, тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s}=\{9;\ 5;\ 1\}$ ва (6.21) формулага кўра унинг тенгламаси

$$\frac{x-27}{9}=\frac{y-15}{5}=\frac{z}{1}$$

кўринишда бўлади.

4- мисол. Координата ўқлари билан $\alpha=60°$; $\beta=45°$; $\gamma=120°$ бурчаклар ташкил этувчи ва M_0 $(-1;\ 0;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Изланаётган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s}$ ни бирлик вектор деб олиш мумкин. Унинг координаталари йўналтирувчи косинуслардан иборат бўлади, яъни

$$\vec{s}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma=\vec{i}\cos 60°+\vec{j}\cos 45°+$$
$$+\vec{k}\cos 120°=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}-\frac{1}{2}\vec{k}.$$

(6.21) формуладан фойдаланиб тӯгри чизиқнинг каноник тенгламасини топамиз:

$$\frac{x+1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-0}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-5}{-\frac{1}{2}}$$

ёки ҳамма махражини 2 га кўпайтирсак,

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{-1};$$

топилган нисбатларнинг ҳар бирини t га тенглаб:

$$t=\frac{x+1}{1},\ t=\frac{y}{\sqrt{2}},\ t=\frac{z-5}{-1}$$

тӯгри чизиқнинг қуйидаги параметрик тенгламасига эга бўламиз:

$$x=-1+t;\ y=\sqrt{2}\,t;\ z=5-t.$$

5- §. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

Фазода иккита

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

ва $\qquad\qquad$ (6.24)

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

тӯгри чизиқ берилган бўлсин. Икки тӯгри чизиқ орасидаги бурчак деб бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтилади.

Биринчи тӯгри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s}_1=\{m_1;\ n_1;\ p_1\}$, иккинчи тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s}_2=\{m_2\ n_2;\ p_2\}$ бўлсин. У ҳолда икки тӯгри чизиқ орасидаги бурчак икки вектор орасидаги бурчак каби

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (6.25)$$

формула ёрдамида аниқланади. (6.25) формуладан эса қуйидаги келиб чиқади:

$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ бўлса $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ бўлиб, тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлади. $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$ бўлса, $\frac{m_1}{m_2}=$ $=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ бўлиб, тўғри чизиқлар параллел бўлади.

1-мисол. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+5}{3}$ ва $\frac{x+2}{2}=$ $\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{1}$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Берилган тўғри чизиқларнинг мос йўналтирувчи векторлари

$$\vec{s}_1=\{-1;\ 2;\ 3\} \text{ ва } \vec{s}_2=\{2;\ 3;\ 1\}$$

бўлгани учун (6.25) формулага кўра

$$\cos\varphi=\frac{-1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+2^2}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^\circ.$$

2-мисол. M_1 (4; 1; 2) нуқта орқали ўтувчи

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4} \text{ ва } \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$$

тўғри чизиқларга перпендикуляр тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган M_1 нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{x-4}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-2}{p}.$$

Бу тўғри чизиқнинг $\vec{s}=\{m;\ n;\ p\}$ йўналтирувчи вектори сифатида берилган тўғри чизиқларнинг

$$\vec{s}_1=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k} \text{ ва } \vec{s}_2=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

йўналтирувчи векторларига перпендикуляр бўлган векторни олиш мумкин. Шунинг учун $\vec{s}$ векторни $\vec{s}_1$ ва $\vec{s}_2$ векторларнинг вектор кўпайтмаси деб оламиз:

$$\vec{S}=[\vec{S}_1,\vec{S}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+8\vec{j}-5\vec{k}.$$

Бундан: $m=-2$, $n=8$, $p=-5$. Бу қийматларни ўрнига қўйиб изланаётган тўғри чизиқ тенгламасига эга бўламиз:

$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-2}{-5}.$$

6-§. Фазода тўғри чизиқ ва текислик

Фазода

$$l:\ \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

тўғри чизиқ ва

$$Q:\ Ax+By+Cz+D=0 \tag{6.26}$$

текислик берилган бўлсин. l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s}=\{m;\ n;\ p\}$, Q текисликни нормал вектори эса $\vec{n}=\{A;\ B;\ C\}$ бўлади.

Қандай шарт бажарилганда l тўғри чизиқ билан Q текислик ўзаро параллел ва перпендикуляр бўлишини кўрсатамиз.

а) Агар l тўғри чизиқнинг $\vec{s}$ йўналтирувчи вектори ва Q текисликнинг $\vec{n}$ нормал вектори коллинеар бўлса, у ҳолда $l\perp Q$ бўлади, яъни $\vec{n}=t\vec{s}$ бўлиб, бундан

$$A=mt,\ B=nt,\ C=pt$$

ёки

$$\frac{A}{m}=t,\ \frac{B}{n}=t,\ \frac{C}{p}=t,$$

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

келиб чиқади.

б) Агар $\vec{s}$ ва $\vec{n}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, у ҳолда $l\parallel Q$ бўлади ва $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$ (скаляр кўпайтма) бўлиб, бундан

$$Am+Bn+pC=0$$

га эга бўламиз.

Энди l тўғри чизиқ билан Q текисликнинг кесишиш нуқтаси координаталарини топишни кўрайлик. l тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt. \end{cases} \qquad (6.27)$$

t параметрнинг ҳар бир қийматига тўғри чизиқнинг битта нуқтаси мос келади.

(6.27) даги x, y, z ларнинг қийматларини (6.26) га қўйсак, t параметрнинг қийматини топиш мумкин бўлган тенглама ҳосил бўлади:

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = 0. \qquad (6.28)$$

Бу тенгламани текширамиз. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) l тўғри чизиқ ва Q текислик параллел бўлмасин. У ҳолда текисликнинг нормали $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ ва тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s} = \{m;\ n;\ p\}$ ўзаро перпендикуляр бўлмайди ва уларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0$ ёки $Am + Bn + Cp \neq 0$ бўлади. Бу ҳолда l тўғри чизиқ Q текислик билан кесишади ва (6.28) дан t ни топиш мумкин:

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp}. \qquad (6.29)$$

Топилган t ни (6.26) га қўйиб, кесишиш нуқтасининг координаталари топилади.

2) Агар

$$Am + Bn + Cp = 0,$$
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$$

бўлса, $l \cap Q = \varnothing$ бўлади.

3) Агар

$$Am + Bn + Cp = 0$$
$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

бўлса, $l \subset Q$ бўлади, бу ҳолда тўғри чизиқ Q текисликда ётади.

Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб тўғри чизиқ билан унинг шу текисликдаги ортогонал проекцияси орасидаги бурчакка айтилади. Тўғри чизиқ билан Q текислик орасидаги бурчак

$$\sin\alpha = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (6.30)$$

формула ёрдамида топилади.

Энди текислик ва тўгри чизиққа доир машқлар бажаришда зарур бўладиган тенгламаларни келтириб ўтамиз.

1. Берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта орқали ўтиб, берилган

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}. \qquad (6.31)$$

2. Берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта орқали ўтиб, берилган $Ax+By+Cz+D=0$ текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}. \qquad (6.32)$$

3. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизиқ билан $Ax+By+Cz+D=0$ текислик орасидаги бурчак:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ \sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (6.33)$$

4. Берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ва берилган

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

тўғри чизиқдан ўтган текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0.$$

5. $\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1}$ ва $\frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2}$

тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётиш шарти:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

6. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизиқнинг $Ax+By+Cz+D=0$ текисликда ётиш шарти:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0=0. \end{cases}$$

7. Берилган $M_1(x_1;y_1;z_1)$ нуктадан ўтиб,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси:

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_0)=0. \tag{6.34}$$

1-мисол. M_0 (2; —3; 4) нуқта орқали ўтиб

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{4} \text{ ва } \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{3}$$

тўғри чизиқларга параллел текислик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган M_0 нуқта орқали ўтувчи текисликлар тенгламасини ёзиб оламиз:

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0.$$

Изланаётган текислик шартга кўра берилган икки тўғри чизиққа параллел бўлгани учун унинг $\vec{n}=\{A;\ B;\ C\}$ нормал вектори берилган тўғри чизиқларнинг $\vec{s}_1=\{2;\ 3;\ 4\}$ ва $\vec{s}_2=\{2;\ 1;\ 3\}$ йўналтирувчи векторларига перпендикуляр бўлиши керак. Шунинг учун

$$\vec{n}=[\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=5\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}.$$

Бундан $A=5$; $B=2$; $C=-4$. Топилган қийматларни юқоридаги тенгламага қўйиб, изланаётган

$5(x-2)+2(y+3)-4(z-4)=0$ ёки

$5x-2y-4z+12=0$ тенгламани ҳосил қиламиз.

2-мисол.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$$

тўгри чизиқ ва $2x+3y+2z+2=0$ текислик орасидаги бурчакни ва уларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

Ечиш. Тўгри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

формула ёрдамида аниқланади. Бу формулага $A=2$, $B=3$, $C=2$, $m=2$, $n=3$, $p=2$ ларни қўйиб топамиз:

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot2+3\cdot3+2\cdot2}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}\,\sqrt{2^2+3^2+2^2}} = \frac{17}{17} = 1.$$

Демак,

$$\sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Энди тўгри чизиқ ва текисликнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топамиз, бунинг учун тўгри чизиқ тенгламасини параметрик кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2} = t,$$

$$\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -1+3t, \\ z = 5+2t. \end{cases}$$

Буни текислик тенгламасига қўйиб, t ни топамиз:

$$2(1+2t)+3(-1+3t)+2(5+2t)+2=0 \Rightarrow t=-\frac{11}{17}.$$

t нинг бу қийматини тўгри чизиқнинг параметрик тенгламаларига қўйсак:

$$x=1+2\cdot\left(-\frac{11}{17}\right)=-\frac{5}{17},$$

$$y=-1+3\cdot\left(-\frac{11}{17}\right)=-\frac{50}{17},$$

$$z=5+2\cdot\left(-\frac{11}{17}\right)=\frac{63}{17}.$$

Демак, тўғри чизиқ ва текислик $M\left(-\frac{5}{17};\ \frac{50}{17};\ \frac{63}{17}\right)$ нуқтада кесишар экан.

7- §. Текисликлар боғлами (дастаси)

Берилган l тўғри чизиқ орқали ўтувчи текисликлар тўпламига текисликлар боғлами (дастаси), l тўғри чизиққа эса боғлам ўқи дейилади.

Боғлам ўқи l қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{6.35}$$

(6.35) тенгламалар системасининг иккинчи тенгламасини ўзгармас λ сонга ($\lambda\in R$) кўпайтирамиз ва биринчи тенгламага қўшамиз:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+ \\ +\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{6.36}$$

(6.36) тенглама x, y, z ларга нисбатан биринчи тартибли, демак λ нинг ихтиёрий сонли қийматида бирор текисликни аниқлайди. (6.36) тенглама (6.35) тенгламанинг натижаси бўлгани учун, (6.35) тенгламани қаноатлантирадиган нуқтанинг координаталари (6.36) тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Демак, λ нинг ихтиёрий сонли қийматида (6.36) тенглама (6.35) тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик тенгламасини беради. (6.35) тенглама билан берилган l ўқли текисликлар боғламининг

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

текисликдан ташқари ҳар қандай текисликларини (6.36) кўринишда ифодалаш мумкин, акс ҳолда λ нинг қийматини топиш мумкин бўлмай қолади.

(6.36) тенглама текисликлар боғламининг тенгламаси дейилади.

Мисол.

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{5}$$

тўғри чизиқ орқали ўтувчи ва $3x+3y-z+1=0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини топинг.

Е ч и ш. Берилган тўғри чизиқнинг Oxy ва Oyz текисликдаги проекциялардан иборат тўғри чизиқ тенгламаларини ёзиб оламиз:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2};\quad \frac{y+1}{-2}=\frac{z}{5}$$

ёки

$$2x+3y+7=0 \text{ ва } 5y-2z+5=0$$

текисликларнинг кесишмаси деб оламиз. Булардан фойдаланиб текисликлар боғламининг тенгламасини тузамиз:

$$2x+3y+7+\lambda(5y-2z+5)=0$$

ёки

$$2x-(3+5\lambda)y-2\lambda z+(7+5\lambda)=0. \qquad \text{(A)}$$

Бу текислик масала шартига кўра берилган текисликка перпендикуляр бўлиш шартидан фойдаланамиз.

(A) текислик берилган текисликка перпендикуляр бўлгани учун уларнинг нормал векторлари

$$\vec{n}_1=2\vec{i}+(3+5\lambda)\vec{j}-2\lambda\vec{k} \text{ ва } \vec{n}_2=3\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

нинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши керак:

$$3\cdot 2+3(3+5\lambda)+2\lambda=0.$$

Бу тенгламани ечиб $\lambda=-\frac{15}{17}$ ни топамиз. λ нинг қийматини боғлам тенгламасига қўйиб, масала шартини қаноатлантирувчи қуйидаги текислик тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$2x+3y+7-\frac{15}{17}(5y-2z+5)=0$$

ёки

$$17x-12y+15z+22=0$$

МАШҚЛАР

1. $2x+5y+3z-15=0$ текисликни ясанг.
2. $M_1(2;\ 1;\ -1)$ нуқтадан ўтувчи ва нормали $\vec{n}=\{3;\ -2;\ 1\}$ бўлган текислик тенгламасини тузинг.
3. Координаталар бошидан ўтувчи ва нормали $\vec{n}=\{4;\ 5;\ -3\}$ бўлган текислик тенгламасини тузинг.

4. $M_1(4;\ 3;\ 2)$ ва $M_2(3;\ 6;\ 8)$ нуқталар берилган. M_1 нуқтадан ўтиб $\overline{M_1M_2}$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

5. $M(4;\ 3;\ 5)$ нуқта координаталар бошидан текисликка туширилган перпендикулярнинг асоси. Шу текислик тенгламасини тузинг.

6. $M_1(3;\ 4;\ -5)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда $\vec{r}_1=\{1;\ -2;\ 1\}$ ва $\vec{r}_2=\{3;\ 1;\ -1\}$ векторларга параллел бўлган текислик тенгламасини тузинг.

7. $M_1(2;\ 0;\ 2)$, $M_2(4;\ -1;\ -1)$ ва $M_3(3;\ -1;\ 2)$ нуқталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

8. Қуйидаги жуфт текисликларнинг ўзаро параллел эканлигини аниқланг:

1) $2x-3y+5z+3=0$ ва $2x-3y+5z-7=0$;
2) $2x+y+2z-1=0$ ва $4x+2y-4z+5=0$;
3) $2x-6z-7=0$ ва $x-3z+2=0$.

9. Қуйидаги жуфт текисликларнинг ўзаро перпендикуляр эканлигини аниқланг:

1) $x+9y-3z+2=0$ ва $3x-y-2z-5=0$;
2) $x-y-z+5=0$ ва $2x+3y-z-3=0$;
3) $x+2z-3=0$ ва $2x-5y+z=0$.

10. a ва b нинг қандай қийматларида қуйидаги жуфт текисликлар ўзаро параллел ва перпендикуляр бўлишини аниқланг:

1) $2x+ay+3z-5=0$ ва $bx-6y-6z+2=0$;
2) $3x-y+az-9=0$ ва $2x+by+2z-3=0$;
3) $3x-5y+az-3=0$ ва $x+3y-2z+5=0$;
4) $5x+y-3z-3=0$ ва $2x+ay-3z+1=0$.

11. Қуйидаги жуфт текисликлар орасидаги бурчакни топинг:

1) $x+y-1=0$ ва $2x-y+\sqrt{3}z+1=0$;
2) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$ ва $x+y\sqrt{2}-z+3=0$;
3) $x+2y+2z-3=0$ ва $16x+12y-15z-1=0$;
4) $6x+3y-2z=0$ ва $3x+2y+6z-12=0$.

12. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи текисликлар тенгламасини тузинг:

1) $M_1(3;\ -3;\ 2)$ нуқтадан ўтиб Oxy текисликка параллел;
2) $M_2(4;\ -2;\ 1)$ нуқтадан ўтиб Oxz текисликка параллел;
3) $M_3(-1;\ 2;\ -5)$ нуқтадан ўтиб Oyz текисликка параллел бўлган.

13. Қуйидаги текисликларнинг тенгламаларини нормал кўринишга келтиринг:

1) $3x-6y+2z+14=0$; 2) $2x-2y+z-18=0$;
3) $3x-6y+2z+21=0$; 4) $4x-6y-12z-11=0$;
5) $6x-3y+2z+35=0$; 6) $3x-4z-15=0$;
7) $5y-12z+26=0$; 8) $3x-4y-1=0$.

14. Қуйидаги жуфт параллел текисликлар орасидаги масофани ҳисобланг:

1) $6x-18y-9z-28=0$; $4x-12y-6z-7=0$;
2) $30x-32y+24z-75=0$; $15x-16y+12z-25=0$;
3) $x-2y-2z-6=0$; $x-2y-2z-12=0$;
4) $4x-6y+12z+21=0$; $2x-3y+6z-14=0$;
5) $4x-2y+4z-21=0$; $2x-y+2z+9=0$;
6) $16x+12y-15z+50=0$; $16x+12y-15z+25=0$.

15. $M_1(1;\ 5;\ 3)$ ва $M_2(2;\ 3;\ -1)$ нуқталардан ўтиб $3x-y+3z+15=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

16. $M_1(3;\ 2;\ 1)$ нуқтадан ўтиб, $x-y+z-7=0$ ва $3x+2y-12z+5=0$ текисликларга перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

17. $\vec{n}=\{4;\ 3;\ 12\}$ векторга перпендикуляр бўлиб, координаталар бошидан $p=3$ бирлик масофада ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

18. Ўзаро параллел $2x+3y-4z-3=0$ ва $4x+6y-8z-1=0$ текисликлар берилган. Бу текисликларга параллел бўлиб уларнинг ўртасида ётувчи текислик тенгламасини тузинг.

19. Параллелепипед учта ёғининг тенгламалари берилган:

$$x-3y+4z-12=0;$$
$$y+2z-5=0 \text{ ва } x+4=0.$$

Учларидан биттаси $A(4;\ -3;\ 2)$ нуқтада ётса, у ҳолда қолган учта ёғининг тенгламаларини тузинг.

20. $\begin{cases} x+3y+3z-6=0, \\ 3x+3y+4z-10=0 \end{cases}$ тўғри чизиқни ясанг.

21. $\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$

тўғри чизиқнинг координата текисликлари билан кесишиш нуқтасини топинг.

22. $\begin{cases} 5x-y-2z-3=0, \\ 3x-2y-5z+2=0 \end{cases}$

тўғри чизиқдан ўтувчи ва $x+19y-7z-11=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

23. $\begin{cases} 2x-3y-z-9=0, \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

тўғри чизиқ тенгламасини каноник шаклга келтиринг.

24. $M_1(-3;\ 0;\ 2)$ нуқтадан ўтиб:

1) $\bar{a}=\{2;\ -3;\ 5\}$ векторга;

2) $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$ тўғри чизиққа;

3) Ox ўққа; 4) Oy ўққа; 5) Oz ўққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг каноник тенгламасини тузинг.

25. $M_1(1;\ -1;\ -3)$ нуқтадан ўтиб:

1) $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}+4\bar{k}$ векторга;

2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$ тўғри чизиққа;

3) $x=3t-1,\ y=-2t+3,\ z=5t+2$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини тузинг.

26. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини тузинг:

1) (3; -1; 2) ва (2; 1; 1);

2) (1; 1; -2) ва (3; -1; 0)

3) (0; 1; -2) ва (0; 0; 1);

4) (4; 3; 2) ва (1; -2; 5).

27. Қуйидаги тўғри чизиқлар билан текисликларнинг кесишиш нуқтасини топинг:

1) $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{5}$, $3x+2y+z-1=0$;

2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{6}$, $2x-y+z-13=0$;

3) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-2}$, $2x+y-2z+5=0$;

4) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

28. $M_0(2;\ -2;\ -2)$ нуқтадан ўтиб,

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

29. B ва D нинг қандай қийматларида $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$ тўғри чизиқ $2x+By-4z+D=0$ текисликда ётади?

30. m ва C нинг қандай қийматларида

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$$

тўғри чизиқ $3x-2y+Cz+1=0$ текисликка перпендикуляр бўлади?

7-БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

Текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида ҳар қандай биринчи тартибли икки ўзгарувчили тенглама, яъни $Ax+By+C=0$ тенглама тўғри чизиқ тенгламаси эканлигини кўрган эдик.

Энди тенгламалар иккинчи тартибли икки ўзгарувчили бўлган ҳолни ўрганамиз. Бундай тенгламалар билан ифодаланувчи $M(x;\ y)$ нуқталар тўплами иккинчи тартибли чизиқлар дейилади.

Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{7.1}$$

бу ерда A, B, C, D, E, F коэффициентлар ҳақиқий сонлардир, бундан ташқари A, B, C лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлиши керак.

1-§. Айлана

Декарт координаталар системасида маркази $O_1\ (a;\ b)$ нуқтада ётувчи ва R радиусли айлана берилган бўлсин. Бу айлана тенгламасини келтириб чиқарамиз. Айлана текисликдаги берилган $O_1(a;\ b)$ нуқтадан R узоқликда ётган $M(x;\ y)$ нуқталар тўплами бўлишидан фойдаланамиз (58-чизма). $M(x;\ y)$ — айлананинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, у ҳолда O_1M кесманинг узунлиги $O_1M=R$ га тенг бўлади. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра:

$$O_1M=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$\text{ёки } (x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{7.2}$$

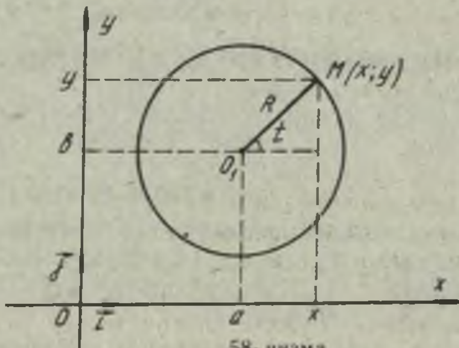
(7.2) тенглама маркази $O_1(a;\ b)$ нуқтада ва радиуси R га тенг айлананинг каноник тенгламаси дейилади. Хусусий ҳолда $O_1(0;\ 0)$ бўлса, айлана тенгламаси

$$x^2+y^2=R^2 \tag{7.3}$$

кўринишни олади. Ушбу

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0;\ 2\pi] \qquad (7.4)$$

тенгламалар системаси айлананинг параметрик тенгламаси дейилади.



58- чизма

Энди (7.1) куринишдаги тенглама айлана тенгламасидан иборат бўлиши учун коэффициентлар қандай шартларга бўйсуниши кераклигини кўрсатамиз.

1) (7.1) тенгламадаги x; y координаталар кўпайтмаси xy ли ҳад олдидаги коэффициент $B=0$ бўлиши керак;

2) x^2 ва y^2 лар олдидаги коэффициентлар ўзаро тенг, яъни $A=C$ (хусусий ҳолда $A=C=1$) бўлиши керак. У ҳолда (7.1) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$x^2+2Dx+D^2+y^2+2Ey+E^2+F-D^2-E^2=0$$
$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F. \qquad (7.5)$$

(7.5) тенглама маркази $O_1(-D;\ -E)$ нуқтада, радиуси $R=\sqrt{D^2+E^2-F}$ га тенг айланани аниқлайди. Бу ерда $D^2+E^2-F>0$ шарт бажарилиши керак. Агар $D^2+E^2-F=0$ бўлса, у ҳолда (7.5) тенглама $(x+D)^2+(y+E)^2=0$ кўринишни олади ва бу тенгламани ягона $O_1(-D;\ -E)$ нуқтанинг координаталари қаноатлантиради; $D^2+E^2-F<0$ бўлса, бу ҳолда (7.5) тенглама бирор чизиқни аниқламайди, чунки бу тенгламанинг ўнг томони манфий, чап томони эса барча $(x;\ y)$ лар учун мусбат миқдор бўлади.

Координаталар текислигида иккита айлананинг ўзаро жойлашишини текширамиз. Айланаларнинг радиуслари R_1 ва R_2, уларнинг марказлари орасидаги масофа

k бўлсин. Агар айланалар марказларини $O(0;\ 0)$ ва $O_1\ (k;\ 0)$ нуқтада деб ҳисобласак, айланалар қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади:

$$x^2+y^2=R_1^2$$
$$(x-k)^2+y^2=R_2^2. \qquad (7.6)$$

Бу айланаларнинг кесишишини аниқлаш учун (7.6) тенгламаларни система қилиб ечамиз. Биринчи тенгламадан $x=\pm\sqrt{R_1^2-y^2}$ ни топиб уни иккинчи тенгламага қўйиб, ундан

$$y=\pm\frac{1}{2k}\times$$
$$\times\sqrt{(R_1+R_2+k)(R_1-R_2+k)(R_1+R_2-k)(R_2-R_1+k)} \quad (7.7)$$

ни топамиз. (7.7) формуладан кўринадики, агар $R_1+k>R_2$, $R_1+R_2>k$ ва $P_2+k>R_1$ бўлса, у ҳолда илдиз остидаги ифода мусбат бўлиб, (7.7) система иккита ечимга эга бўлади ва айланалар иккита нуқтада кесишади. Агар илдиз остидаги кўпайтувчилардан бирортаси нолга тенг бўлса, у ҳолда (7.6) система битта ечимга эга бўлиб, айланалар ўзаро уринадилар. Агар илдиз остидаги кўпайтувчилардан биттаси манфий бўлиб қолганлари мусбат бўлса, у ҳолда (7.6) система ечимга эга бўлмайди, яъни айланалар кесишмайди.

Демак, агар R_1, R_2, k сонлардан бири қолган иккитасининг йиғиндисидан кичик бўлса, айланалар иккита нуқтада кесишади; агар улардан бири қолган иккитасининг йиғиндисига тенг бўлса, айланалар уринади; агар сонлардан бири қолган иккитасининг йиғиндисидан катта бўлса, айланалар кесишмайди.

1-мисол. $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ айлана берилган. Айлана марказининг координаталарини ва радиусини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

кўринишга келтирамиз. Бунинг учун уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4-20-1-4=0\Rightarrow$$
$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)-25=0\Rightarrow$$
$$(x+1)^2+(y-2)^2=25$$

ёки

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2.$$

Бундан $a=-1$, $b=2$, $0_1(-1;\ 2)$ ва $R=5$ эканлиги келиб чиқади.

2- мисол. $x^2+y^2=3$ ва $x^2+y^2-6x+4=0$ айланаларнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш. Иккинчи айлана тенгламасини каноник кўринишга келтирамиз:

$$x^2-6x+y^2+4=0,$$
$$x^2-6x+9+y^2-9+4=0,$$
$$(x-3)^2+y^2=5.$$
$$x^2+y^2=3 \text{ ва } (x-3)^2+y^2=5$$

тенгламалардан $R_1=\sqrt{3}$, $R_2=\sqrt{5}$, $k=3$ бўлгани учун, бу қийматларни (7.7) формулага қўямиз ва ҳисоблаймиз:

$$y=\pm\frac{1}{6}\times$$
$$\times\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+3)(\sqrt{3}+\sqrt{5}-3)(\sqrt{3}+3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+3-\sqrt{3})}=$$
$$=\pm\frac{\sqrt{59}}{6}.$$

Бу натижани қуйидагича ҳам топиш мумкин: Биринчи тенгламадан y^2 ни топиб, иккинчи тенгламага қўямиз:

$$y^2=3-x^2,\ (x-3)^2+3-x^2=5\Rightarrow$$
$$x^2-6x+9+3-x^2=5\Rightarrow-6x=-7\Rightarrow x=\frac{7}{6}.$$
$$y^2=3-x^2=3-\left(\frac{7}{6}\right)^2=3-\frac{49}{36}=\frac{108-49}{36}=\frac{59}{36}.$$
$$y=\pm\frac{\sqrt{59}}{6}.$$

Демак, айланалар $M_1\left(\frac{7}{6};\ \frac{\sqrt{59}}{6}\right)$ ва $M_2\left(\frac{7}{6};\ -\frac{\sqrt{59}}{6}\right)$ нуқталарда кесишади.

3- мисол. Кривошип-шатунли механизмнинг шатун қисмидаги D нуқтанинг траекторияси тенгламасини тузинг (59- чизма).

Ечиш. D нуқтанинг шатунга нисбатан координаталарини $[a(AF),\ b(FD)]$ танлаб олинган координаталар системасига нисбатан $(x;\ y)$ деб олайлик. Ҳаракат давомида ўзгармайдиган A ва D нуқталар орасидаги масофани d билан белгилаймиз. $OAFD$ синиқ чизиқнинг координата ўқлардаги проекциялари

$$x = ON = r\cos\varphi + a\cos\varphi + b\sin\varphi,$$
$$y = ND = r\sin\varphi - a\sin\psi + b\cos\psi$$

га тенглиги шаклдан кўриниб турибди.

Бунда φ ва ψ ўзгарувчи параметрлардир. Бу тенгламалардан параметрларни чиқариш учун уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x - r\cos\varphi = a\cos\psi + b\sin\psi, \\ y - r\sin\varphi = b\cos\psi - a\sin\psi. \end{cases}$$

Бу системанинг ҳар бир тенгламасининг ҳар икки томонини квадратга кўтариб, сўнгра қўшиб, ўхшаш ҳадларини ихчамласак,

$$x^2 + y^2 + r^2 - 2rx\cos\varphi - 2ry\sin\varphi = a^2 + b^2$$

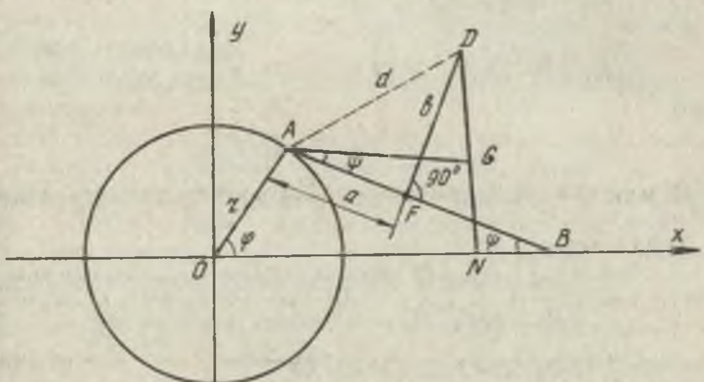
га эга бўламиз. $\triangle ACD$ дан $d^2 = a^2 + b^2$ ва $|\sin\varphi| \leqslant 1$; $|\cos\varphi| \leqslant 1$ тенгсизликлардан (тенглик бажарилган деб) охирги тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$x^2 + y^2 + r^2 - 2rx - 2ry = d^2$$

ёки

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = d^2 + r^2.$$

Бу эса маркази $(r;\ r)$ нуқтада, радиуси $R = \sqrt{d^2 + r^2}$ бўлган айланадан иборатдир.

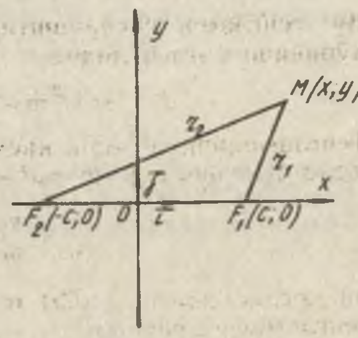


59- чизма

2- §. Эллипс

1- т а ъ р и ф. Текисликнинг ихтиёрий нуқтасидан фокуслар деб аталувчи берилган иккита F_1 ва F_2 нуқтасигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас миқдор $(2a)$ га тенг бўлган барча нуқталарнинг геометрик ўрни *эллипс* деб аталади.

Эллипс тенгламасини келтириб чиқариш учун координаталар системасини қуйидагича оламиз. Берилган F_1 ва F_2 нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқни абсциссалар ўқи деб қабул қиламиз, координаталар бошини эса берилган нуқталарнинг ўртасида оламиз. F_1, F_2 фокуслар орасидаги масофани $2c$ билан белгилаймиз. У ҳолда F_1, F_2 нуқталарнинг координаталари $F_1(c;\ 0)$ ва $F_2(-c;\ 0)$ бўлади (60- чизма). Таърифга кўра $2a > 2c$ ёки $a > c$. Эллипснинг ихтиёрий нуқтасини $M(x;\ y)$ билан белгилаймиз ва M нуқтани F_1 ва F_2 фокуслар билан бирлаштирамиз. F_1M ва F_2M кесмаларга эллипснинг *фокал радиуслари* дейилади ва мос равишда r_1, r_2 билан белгиланади, яъни $r_1 = \rho(F_1,\ M)$ ва $r_2 = \rho(F_2,\ M)$. Шундай қилиб, эллипснинг таърифига кўра:



60- чизма

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (7.8)$$

ёки

$$\rho(F_1,\ M) + \rho(F_2,\ M) = 2a.$$

Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра:

$$\rho(F_1,\ M) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\rho(F_2,\ M) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Буларни (7.8) тенгликка қўйсак,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг биринчи ҳадини ўнг томонга ўтказиб ҳосил бўлган тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+$$
$$+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

бундан

$$2cx=4a^2-2cx-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ёки

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Кейинги тенгламанинг ҳар иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

Бу тенглама соддалаштирилгандан кейин қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Тенгламанинг иккала қисмини $a^2(a^2-c^2)$ га бўламиз. $a>c$ бўлгани учун $b^2=a^2-c^2$ деб белгилаш киритсак,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7.9}$$

ни ҳосил қиламиз. (7.9) тенглама эллипснинг каноник тенгламаси дейилади.

Эллипснинг каноник тенгламасига кўра унинг шаклини текширамиз.

(7.9) тенглама билан аниқланган эллипс координата ўқларига нисбатан симметрикдир. Агар $(x;\ y)$ эллипснинг бирор нуқтаси бўлса, яъни x, y сонлар (7.9) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда (7.9) тенгламада x, y ўзгарувчиларнинг фақат квадратлари қатнашгани учун бу тенгламани

$$(x;\ y),\ (-x;\ y),\ (x;\ -y),\ (-x;\ -y)$$

нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради (61-чизма). Шунинг учун координата ўқлари эллипснинг симметрия ўқларидир. Симметрия ўқларининг кесишган нуқтаси $O(0;\ 0)$ эллипснинг *маркази* дейилади, фокуслар ётган Ox ўқ унинг *фокал ўқи* дейилади.

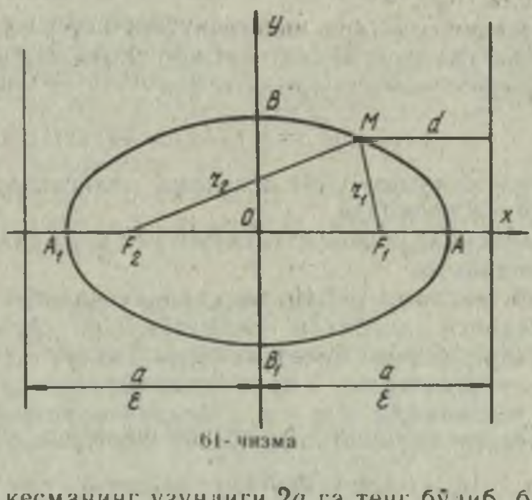
Эллипснинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топамиз. Эллипснинг Ox ўқи билан кесишган нуқталарини топиш учун ушбу тенгламалар системасини ечамиз.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=\pm a.$$

Демак, эллипс Ox ўқини $A_1(a;\ 0)$ ва $A_2(-a;\ 0)$ нуқталарда кесади. Худди шунингдек:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=\pm b.$$

Бу эса эллипс Oy ўқи билан $B\ (0;\ b)$ $B_1(0,\ -b)$ нуқталарда кесишишини билдиради. Эллипснинг координата ўқлари билан кесишган A_1, A_2, B_1, B_2 нуқталарига унинг *учлари* дейилади (61- чизма).



61- чизма

$[AA_1]$ кесманинг узунлиги $2a$ га тенг бўлиб, бу кесма эллипснинг катта ўқи, $[OA]$ (узунлиги a бўлган) кесма эса катта ярим ўқи дейилади.

$[BB_1]$ кесманинг узунлиги $2b$ га тенг бўлиб, бу кесма эллипснинг кичик ўқи, $[OB]$ (узунлиги b бўлган) кесма кичик ярим ўқи дейилади.

Эллипснинг ўқлари координата ўқларига параллел бўлиб, симметрия маркази бирор $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада бўлса, у ҳолда унинг тенгламаси

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

кўринишда бўлади.

(7.1) тенгламада

$$B=0,\ D=0,\ E=0,\ F=-1$$

бўлса, бу тенглама

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

кўринишни олиб, эллипс тенгламасига айланади. Агар эллипснинг $M_1(x_1;\ y_1)$ нуқтасига уринма ўтказилса, уринма тенгламаси

$$\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}=1$$

кўринишда бўлади.

2- т а ъ р и ф. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофанинг катта ўқининг узунлигига нисбати эллипснинг *эксцентриситети* дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}<1, \tag{7.10}$$

бунда $c<a$, $0<\varepsilon<1$. Эллипснинг шаклини унинг эксцентриситети ёрдамида текшириш қулай.

$$b^2=a^2-c^2\Rightarrow c^2=a^2-b^2$$

ни эътиборга олсак, (7.10) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\Rightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

$\varepsilon\Rightarrow1$ да $\frac{b}{a}\Rightarrow0$ бўлиб, b кичиклашади ва эллипс Ox ўққа томон сиқилиб боради, аксинча $\varepsilon\Rightarrow0$ бўлса, $\frac{b}{a}\Rightarrow1\Rightarrow b=a$ бўлиб, эллипс айланага яқинлаша боради. Хусусий ҳолда $a=b$ бўлса, у айланадан иборат бўлади.

3- т а ъ р и ф. Эллипснинг катта ўқига перпендикуляр ва марказидан $\frac{a}{\varepsilon}$ масофада унга симметрик ўтган иккита тўгри чизиқ эллипснинг *директрисалари* дейилади. Таърифига кўра директрисалар $d_1: x-\frac{a}{\varepsilon}=0$; $d_2: x+\frac{a}{\varepsilon}=0$ тенгламаларга эга бўлади. Баъзан буларни мос равишда чап ва ўнг директрисалар деб ҳам аталади. $\varepsilon<1$ бўлгани учун $\frac{a}{\varepsilon}>a$ бўлади.

Эллипснинг ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтасидан фокусгача бўлган (r_1 ёки r_2) масофанинг шу $M(x;\ y)$ нуқтадан директрисагача (d_1 ёки d_2) бўлган масофага нисбати эллипснинг эксцентриситетига тенг, яъни

$$\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon \text{ ёки } \frac{r_2}{d_2}=\varepsilon.$$

Эллипснинг фокал радиуслари. Эллипснинг каноник тенгламасини топиш жараёнида $r_1=\rho(F_1;\ M)$ ва $r_2=\rho(F_2;\ M)$ ларга фокал радиуслар дейилган эди ва улар мос равишда

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \text{ ва } r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (7.11)$$

га тенг эди. Агар

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\ c^2=a^2-b^2$$

ва $a^2=b^2+c^2$ тенгликларни эътиборга олсак, (7.11) тенгликларни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$r_1=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2}=\left|\frac{c}{a}x-a\right|=\left|a-\frac{c}{a}x\right|,$$

$$r_2=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=\left|\frac{c}{a}x+a\right|=\left|a+\frac{c}{a}x\right|. \qquad (7.12)$$

Бизга маълумки, $0<\frac{c}{a}<1$ бўлгани учун $a-\frac{c}{a}x>0$ ва $a+\frac{c}{a}x>0$. Буларни эътиборга олсак, (7.12) тенгликлар ушбу кўринишни олади:

$$r_1=a-\frac{c}{a}x;\ r_2=a+\frac{c}{a}x.$$

$\frac{c}{a}=\varepsilon$ эканини ҳисобга олсак, бу формула қуйидаги кўринишни олади:

$$r_1 = a - \varepsilon x; \ r_2 = a + \varepsilon x. \qquad (7.13)$$

Булар эллипснинг фокал радиусларидир.

Эллипснинг параметрик тенгламаси. $M(x;\ y)$ эллипснинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқтанинг координаталари

$$x = a\cos\varphi, \ y = b\sin\varphi$$

га тенг бўлишини кўрсатамиз. Унинг учун бу тенгликлардан

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \ \frac{y}{b} = \sin\varphi$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Буларнинг ҳар иккала томонини квадратга кўтарамиз ва ҳадлаб қўшамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Бу эса эллипснинг каноник тенгламаси бўлгани учун

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳам эллипснинг тенгламаси бўлиб, унга эллипснинг параметрик тенгламаси дейилади.

1-мисол. $M(0;\ 4)$ нуқта орқали ўтувчи фокуслари орасидаги масофа 6 га тенг бўлган эллипснинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечиш. Шартга кўра $M(0;\ 4)$ нуқта эллипсга тегишлидир, шунинг учун (7.9) формуладан

$$\frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 16$$

ни топамиз.

a^2 параметрни топиш учун, мисол шартидаги $2c = 6$ дан $c = 3$ ва $b^2 = a^2 - c^2$ муносабатдан фойдалана оламиз, яъни

$$16 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 25.$$

Демак,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

2- м и с о л. Агар $x=\pm 8$ тўғри чизиқлар катта ўқи 12 га тенг бўлган эллипснинг директрисалари бўлса, шу эллипснинг тенгламасини тузинг.

Е ч и ш. Шартга кўра $2a=12 \Rightarrow a=6$, яъни $\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm 8$, бундан $\frac{a}{\varepsilon}=8$, аммо $\varepsilon=\frac{c}{a}$, у ҳолда

$$\frac{a^2}{c}=8 \Rightarrow c=\frac{a^2}{8}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}.$$

Эллипс учун:

$$b^2=a^2-c^2=36-\frac{81}{4}=\frac{63}{4}.$$

Демак, эллипснинг изланаётган тенгламаси:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{4y^2}{63}=1$$

кўринишда бўлади.

3- м и с о л. Нуқта бир вақтда иккита ўзаро перпендикуляр

$$\begin{cases} x=9\sin\omega t, \\ y=4\cos\omega t \end{cases}$$

тебранишларда қатнашади. Шу нуқтанинг траекториясини топинг.

Е ч и ш. Берилган тенгламалар системаси ҳаракат қилаётган нуқтанинг параметрик тенгламасидир. Бу системадан t параметрни чиқарамиз. Унинг учун системани қуйидаги кўринишда ёзиб, сўнгра ҳар икки томонини квадратга кўтариб қўшамиз, натижада

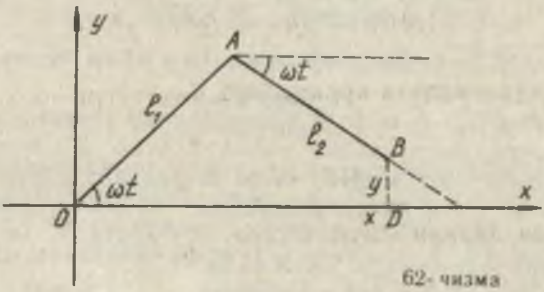
$$\begin{cases} \frac{x}{9}=\sin\omega t, \\ \frac{y}{3}=\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{81}=\sin^2\omega t, \\ \frac{y^2}{16}=\cos^2\omega t \end{cases}$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама маркази координаталар бошида, катта ярим ўқи 9, кичик ярим ўқи 4 бўлган эллипсдир. Демак, ҳаракатдаги нуқтанинг траекторияси эллипсдан иборат экан.

4- м и с о л. Координаталар боши атрофида узунлиги $OA=l_1$ стержень ω бурчак тезлиги билан айланади. A нуқта атрофида эса узунлиги $AB=l_2$ бўлган иккинчи стержень ω бурчак тезлик билан айланади.

Иккала стержень бошлангич моментда Ox ўқ билан устма-уст тушганлигини ҳамда A нуқта O ва B нуқталар орасида ётишини билган ҳолда B нуқта траекториясининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Ҳаракат бошлангандан кейин бирор t вақтда l_1 стержень абсциссалар ўқига ωt бурчак остида, l_2 стержень ҳам ωt бурчак остида огишган бўлади. Натижада 62- чизмада $OABD$ синиқ чизиққа эга бўламиз. Бу синиқ чизиқнинг координата ўқлари-



62- чизма

даги проекциясини аниқлаймиз. Проекциялар назариясидан бизга маълумки,

$$\text{пр}_{ox}(OABD) = \text{пр}_{ox}OA + \text{пр}_{ox}AB + \text{пр}_{ox}BD = \text{пр}_{ox}OD$$

га тенг. Чизмадан $\text{пр}_{ox}OA = l_1\cos\omega t$;

$$\text{пр}_{ox}AB = l_2\cos(-\omega t) = l_2\cos\omega t;$$

$$\text{пр}_{ox}BD = y\cos 90° = 0; \ \text{пр}_{ox}OD = x\cos 0° = x.$$

Буларни ўрнига қўйсак:

$$l_1\cos\omega t + l_2\cos\omega t = x$$

ёки

$$\frac{x}{l_1 + l_2} = \cos\omega t.$$

Худди юқоридагидек синиқ чизиқнинг Oy ўқидаги проекциясини топамиз:

$$\frac{y}{l_1 - l_2} = \sin\omega t.$$

Демак,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{l_1+l_2}=\cos\omega t, \\ \dfrac{y}{l_1-l_2}=\sin\omega t \end{cases}$$

Бу тенгламалар системаси B нуқта траекториясининг тенгламасидир (бунда t параметр). Ундан t параметрни чиқарамиз:

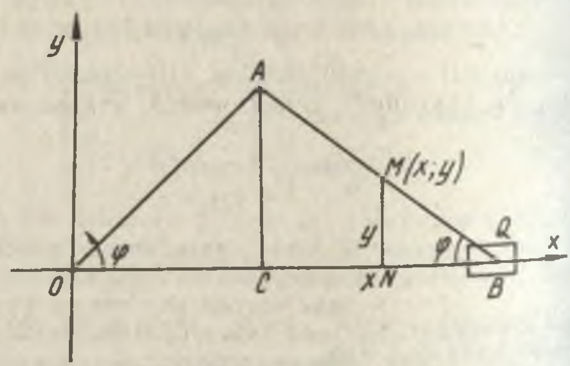
$$\frac{x^2}{(l_1+l_2)^2}+\frac{y^2}{(l_1-l_2)^2}=1.$$

Демак, B нуқтанинг траекторияси ярим ўқлари l_1+l_2 ва l_1-l_2 дан иборат эллипсдир.

Агар $l_1>l_2$ бўлса, B нуқта соат стрелкасига қарши ҳаракатланиб, эллипс чизади. Агар $l_1=l_2$ бўлса, OA стержень бир марта тўла айланганда нуқта Ox ўқ бўйлаб $2(l_1+l_2)$ узунликдаги кесмани икки марта чизади. Агар $l_1<l_2$ бўлса, B нуқта эллипс бўйлаб тескари йўналишда силжийди.

5-мисол. OA кривошип O нуқта атрофида ўзгармас тезлик билан айланади. OA кривошип билан AB шатуннинг узунликлари ўзаро тенг, яъни $OA=AB=60$ см. Шатуннинг ўртасида ётувчи $M(x;\ y)$ нуқта траекториясининг тенгламасини тузинг (63-чизма).

Ечиш. Координаталар системасини 63-чизмада кўрсатилгандек оламиз. AB шатун Ox ўққа Q жисм



63-чизма

ёрдамида шундай маҳкамланганки у OA кривошип O нуқта атрофида айланганда Q жисм Ox ўқи бўйича сирпаниб ҳаракат қилади. OA кривошипнинг Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагини φ деймиз.

$\triangle OAC$ дан:

$$OC = OA\cos\varphi.$$

$$\triangle NMB \text{ дан: } y = BM\sin\varphi,\ BN = BM\cos\varphi.$$

$$\triangle ACB \text{ дан: } BC = AB\cos\varphi.$$

$$CN = AB\cos\varphi - NB = AB\cos\varphi - BM\cos\varphi;$$

$$OC + CN = x = AB\cos\varphi - BM\cos\varphi + OA\cos\varphi.$$

Буларга $OA = AB = 60$ см қийматларни қўйсак:

$$x = 90\cos\varphi$$

$$y = 30\sin\varphi$$

Бу система ҳаракатдаги $M(x;\ y)$ нуқта траекториясининг параметрик тенгламасидир (бунда φ параметр). Нуқтанинг траекторияси қандай чизиқдан иборат эканлигини аниқлаш учун системадан φ параметрни чиқарамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{90} = \cos\varphi, \\ \dfrac{y}{30} = \sin\varphi. \end{cases}$$

Бунинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб қўшамиз:

$$\frac{x^2}{90^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1.$$

Демак, M нуқтанинг траекторияси эллипсдан иборат экан.

3- §. Гипербола

Таъриф. Текисликнинг ихтиёрий нуқтасидан фокуслар деб аталувчи берилган икки F_1 ва F_2 нуқтагача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас миқдор ($2a$ га тенг) бўлган $M(x;\ y)$ нуқталарнинг геометрик ўрни *гипербола* дейилади.

Гипербола таърифидаги берилган ўзгармас кесма узунлигини $2a(a > 0)$ билан, фокуслар орасидаги масофани $2c(c > 0)$ билан белгилаймиз. Бунда $2a < 2c \Rightarrow a < c$.

Гиперболадаги M нуқтанинг F_1, F_2 ларгача масофалари унинг *фокал радиуслари* дейилади ва r_1, r_2 билан белгиланади. Гиперболанинг таърифига биноан:

$$|r_1 - r_2| = 2a \tag{7.15}$$

ёки

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a.$$

Илдизлардан қутулгандан кейин қуйидаги тенгламага эга бўламиз (илдизларни йўқотиш, ихчамлаш, соддалаштириш ҳам эллипс ҳолидагидек бажарилади):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1. \tag{7.16}$$

$c^2 - a^2$ миқдор ҳар доим мусбат бўлгани учун уни b^2 билан белгилаймиз: $b^2 = c^2 - a^2$, у ҳолда (7.16) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.17}$$

кўринишни олади. (7.17) тенглама гиперболанинг каноник тенгламаси дейилади.

Агар фокуслари ординаталар ўқида ётса, у ҳолда гиперболанинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

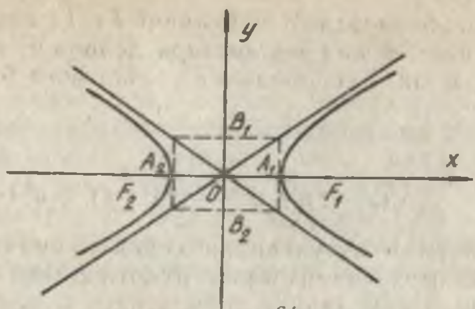
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{7.18}$$

Гипербола шакли. Гиперболанинг (7.17) тенгламасига асосланиб унинг шаклини аниқлаймиз. Эллипс тенгламаси устида олиб борилган муҳокамаларни такрорлаб, гиперболанинг координаталар боши, координата ўқларига нисбатан симметриклигини аниқлаймиз.

Гипербола Ox ўқини $A_1(a;\ 0)$ ва $A_2(-a;\ 0)$ нуқталарда кесиб ўтади (64- чизма). Гипербола Oy ўқи билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам, (7.17) тенгламага $x=0$ ни қўйсак, $y^2 = -b^2$ бўлиб, бу ифода ҳақиқий сонлар соҳасида ўринли бўлмайди. A_1, A_2 нуқталар гиперболанинг *учлари*, улар орасидаги $2a$ узунликка тенг кесма эса унинг *ҳақиқий ўқи* дейилади.

Oy ўқидаги B_1 дан B_2 гача бўлган $2b$ узунликдаги кесма гиперболанинг *мавҳум ўқи* дейилади.

Агар $M(x;\ y)$ нуқта гиперболада ётса, унинг



64- чизма

тенгламасидан $|x| \geqslant a$ эканини кўрамиз. Бундан $|x| = \pm a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган $-a < x < a$ соҳада гиперболанинг нуқталари мавжуд эмаслиги келиб чиқади. (7.17) тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{7.19}$$

(7.19) тенгламадаги x ўзгарувчи a дан $+\infty$ гача ортганда ва $-a$ дан $-\infty$ гача камайганда, y ординаталар ўқи бўйлаб 0 дан $+\infty$ гача ўсиши кўриниб турибди (64- чизма). Демак, гипербола икки қисмдан иборат бўлиб, улар гиперболанинг *тармоқлари* дейилади.

Гиперболанинг бир (ўнг) тармоғи $x \geqslant a$ ярим-текисликда, иккинчи (чап) тармоғи $x \leqslant -a$ ярим-текисликда жойлашган.

Агар гиперболанинг ўқлари координата ўқларига параллел бўлиб, маркази бирор $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтада бўлса, унинг тенгламаси

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

кўринишда бўлади.

Агар (7.1) тенгламада $A = \frac{1}{a^2}$, $B = 0$, $c = -\frac{1}{b^2}$,

$$D = 0,\ E = 0,\ F = -1$$

бўлса, у тенглама $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишни олиб, гипербола тенгламасига айланади.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ва } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

гиперболалар *қўшма гиперболалар* дейилади.

Гипербола асимптоталари. Гиперболанинг шаклини яна ҳам аниқроқ тасаввур қилишда асимптота чизиғи катта аҳамиятга эга.

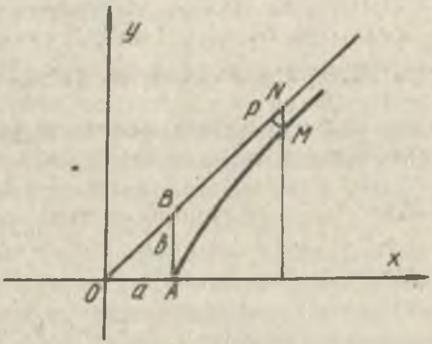
Таъриф. Агар $M(x;\ y)$ нуқта Γ эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланиб борганда бу нуқтадан l тўғри чизиққача масофа нолга яқинлашса, l тўғри чизиқ Γ чизиқнинг *асимптотаси* дейилади. $y=\frac{b}{a}x$ ва $y=-\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқлар (7.17) гиперболанинг асимптоталари эканини кўрсатамиз. $x\geqslant a$ да гиперболанинг биринчи чоракдаги қисмини аниқлайдиган

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{7.20}$$

тенглама билан

$$Y=\frac{b}{a}x \tag{7.21}$$

тенгламани солиштирамиз. (7.21) тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади ва унинг бурчак коэффициенти $k=\frac{b}{a}$ га тенг. 65- чизмада бу тўғри чизиқнинг биринчи чоракдаги қисми тасвирланган бўлиб, унда $|OA|=a$, $|AB|=b$. Гипербола ва (7.21) тўғри чизиқда бир хил абсциссали $M(x;\ y)$, $N(x;\ Y)$ нуқталарни қараймиз. Бу икки нуқтанинг мос ординаталари:



65- чизма

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\quad Y=\frac{b}{a}x$$

бўлади.

MN кесманинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$MN=Y-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-y^2})=$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-y^2})(x+\sqrt{x^2-y^2})}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Демак,

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-y^2}}. \qquad (7.22)$$

(7.22) ифоданинг $x\to+\infty$ га интилгандаги лимитини текширамиз:

$$\lim_{x\to+\infty}(Y-y)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Бу ифоданинг махражи чексиз ортиб борувчи икки мусбат қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлиб, сурати эса ўзгармас $a\cdot b$ миқдордир, шунинг учун

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0.$$

Демак, гиперболадаги M нуқта гипербола бўйича ҳаракатланиб, унинг учидан етарлича узоқлашса, M нуқтадан (7.21) тўғри чизиққача бўлган масофа нолга интилади.

Шундай қилиб, гипербола учун (7.21) тўғри чизиқ асимптота бўлади. Гиперболанинг тенгламаси координата ўқларига симметрик бўлишидан $y=-\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ ҳам гиперболанинг асимптотаси бўлиши келиб чиқади.

Тенг томонли гипербола. Ярим ўқлари тенг $(a=b)$ бўлган гипербола *тенг томонли* деб аталади. Агар $a=b$ бўлса, (7.17) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ ёки } x^2-y^2=a^2 \qquad (7.23)$$

Тенг томонли гипербола асимптоталарининг тенгламалари $y=\pm x$ бўлиб, улар орасидаги бурчак 90° га тенг бўлади. Уларнинг бири Ox ўқи билан 45° ли, иккинчиси 135° ли бурчак ташкил қилади.

Энди тенг томонли гипербола (7.23) тенгламасини координата ўқларини буриш ёрдамида ихчам $xy=a$ кўринишга келтиришни кўрсатамиз. Унинг учун координата ўқларини $-45°$ га бурсак, Ox ўқ $y=-x$ асимптота билан, Oy ўқ эса $y=x$ асимптота билан устма-уст тушиб, асимптоталар янги координата ўқлари бўлиб қолади. (7.23) тенгламага

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

алмаштириш формулаларини татбиқ этамиз, бунда $\alpha=-45°$

$$(x'\cos45°+y'\sin45°)^2-(x'\sin45°+y'\cos45°)^2=a^2,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y'-\frac{\sqrt{2}}{2}x'\right)^2=a^2,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2)-(y'^2-2x'y'+y'^2)=a^2,$$

$$2x'y'=a^2\Rightarrow x'y'=\frac{a^2}{2}.$$

Энди x' ва y' ларни x, y лар орқали, $\frac{a^2}{2}$ ни эса бирор c орқали белгиласак, ўрта мактаб курсида ўрганилган $x\cdot y=c$ гиперболанинг тенгламаси ҳосил бўлади.

Гипербола эксцентриситети. Гиперболанинг фокуслари орасидаги масофанинг ҳақиқий ўқининг узунлигига нисбати гиперболанинг эксцентриситети дейилади ва уни ε ҳарфи билан белгиланади:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Гиперболада $c>a$ бўлгани учун $\varepsilon>1$ бўлади.

Эксцентриситет гипербола шаклини аниқлашда муҳим роль ўйнайди. $\varepsilon=\frac{c}{a}\Rightarrow c=a\cdot\varepsilon$, буни $b^2=c^2-a^2$ га қўйсак, $b^2=a^2(\varepsilon^2-1)$ ёки $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ бўлиб, ε эксцентриситет қанчалик кичик, яъни $\varepsilon\to1$ бўлса, $\frac{b}{a}$ шунчалик кичик, яъни $\frac{b}{a}\to0$ бўлиши кўринади (бунда $a=\text{const}$ деб қаралади) ва гипербола ўзининг ҳақиқий ўқига сиқилган бўлади, аксинча ε катталашиб борса, $\frac{b}{a}$ ҳам катталашиб, гипербола тармоқлари кенгайиб боради.

Гиперболанинг фокал радиуслари. (7.17) гиперболанинг ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтасининг фокал радиуслари $x>0$ бўлганда

$$r_1=\frac{c}{a}x-a \text{ ва } r_2=\frac{c}{a}x+a$$

формулалар билан ва $x<0$ бўлганда эса

$$r_1=a-\frac{c}{a}x \text{ ва } r_2=-a-\frac{c}{a}x$$

формулалар билан аниқланади. Агар $\frac{c}{a}=\varepsilon$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$x>0 \text{ бўлганда, } r_1=\varepsilon x-a, \; r_2=\varepsilon x+a \quad (7.24)$$

$$x<0 \text{ бўлганда, } r_1=a-\varepsilon x, \; r_2=-a-\varepsilon x \quad (7.25)$$

формулаларга эга бўламиз.

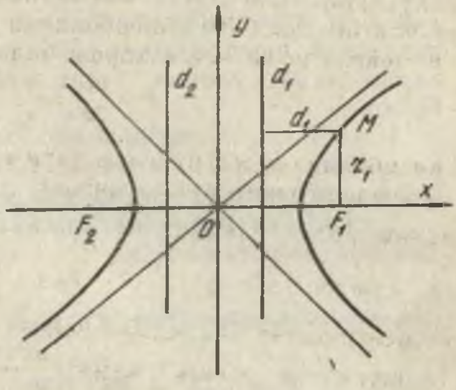
Гиперболанинг директрисалари. Гиперболанинг берилган F фокусига мос директрисаси деб унинг фокал ўқига перпендикуляр ва марказидан F фокуси ётган томонда $\frac{a}{\varepsilon}$ масофада турувчи тўғри чизиққа айтилади. Бу тўғри чизиқлар Oy ўқига параллел ва ундан $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ масофада ётади.

Директрисаларни d_1, d_2 билан белгилаймиз ҳамда уларни F_1, F_2 фокусларга мос директрисалар деб атаймиз (66- чизма). $F_1(c;\ 0)$, $F_2(-c;\ 0)$ фокусларга мос директрисаларнинг тенгламалари

$$d_1: x-\frac{a}{\varepsilon}=0, \quad (7.26)$$

$$d_2: x+\frac{a}{\varepsilon}=0$$

бўлади.



66- чизма

Гипербола эксцентриситети $\varepsilon>1$ бўлгани учун $\frac{a}{\varepsilon}<a$ бўлади. Демак, директриса гиперболани кесмас экан.

Гипербола текисликдаги шундай нуқталар тўпламики, бу нуқталарнинг ҳар биридан фокусгача бўлган масофаларнинг ўша нуқтадан шу фокусга мос директрисагача бўлган масофага нисбати ўзгармас миқдор бўлиб, у унинг эксцентриситети ε га тенг, яъни (66- чизма):

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon, \ \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \qquad (7.27)$$

Гиперболани ясаш. (7.17) тенглама билан берилган гиперболани ясашни қарайлик. Тенгламадан фойдаланиб $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$ учларини ва $b^2 = c^2 - a^2$ муносабатдан фойдаланиб $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ фокусларни топамиз. F_1 фокусни марказ қилиб ихтиёрий r_1 радиусли $S(F_1; r_1)$ айлана, F_2 фокусни марказ қилиб $r_2 = r_1 + 2a$ радиусли $S(F_2; r_2)$ айлана чизамиз. Бу икки айлананинг кесишган нуқталари гиперболада ётади, чунки бу нуқталар учун

$$|r_2 - r_1| = |r_1 + 2a - r_1| = 2a.$$

Марказларнинг ўринлари алмаштирилса, гиперболанинг яна икки нуқтаси ҳосил бўлади. Демак, r_1 нинг ҳар бир янги қиймати бўйича гиперболанинг тўртта нуқтасини ясаш мумкин. Шу усулда етарлича нуқталарни ясаб, уларни туташтирсак, гипербола ҳосил бўлади.

1-мисол. Гиперболанинг $F_1(20; 0)$ $F_2(-20; 0)$ фокусларини ва унга тегишли $A(24; 6\sqrt{5})$ нуқтасини билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Гиперболанинг фокал радиуслари формуласидан фойдаланамиз, яъни

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \ r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_1 = \sqrt{4^2 + 36 \cdot 5} = \sqrt{196} = 14,$$

$$r_2 = \sqrt{44^2 + 36 \cdot 5} = \sqrt{2116} = 46.$$

Гиперболани таърифига кўра:

$$|r_1 - r_2| = 2a \text{ ёки } |46 - 14| = 2a,$$

$$2a = 32 \Rightarrow a = 16.$$

Гипербола учун:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 20^2 - 16^2 = 144.$$

Демак,

$$\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{144} = 1$$

гипербола тенгламасига эга бўламиз.

2- мисол. $xy = 4$ гипербола тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Координаталар бошини қўзғатмаган ҳолда координата ўқларини $\alpha = +45°$ бурчакка бурамиз, яъни ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} x = x'\cos 45° - y'\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = x'\sin 45° + y'\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

x, y нинг бу қийматларини берилган тенгламага қўямиз:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 4 .$$

Бу тенгламани соддалаштирсак,

$$x'^2 - y'^2 = 8$$

кўринишдаги тенг томонли гиперболанинг каноник тенгламасига эга бўламиз.

3- мисол. Директрисалари $x = \pm 4\sqrt{2}$ тенгламалар билан берилган ва асимптоталари орасидаги бурчак 90° бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масала шартидан, яъни асимптоталарнинг ўзаро перпендикулярлигидан гипербола тенг томонли эканлиги келиб чиқади, у $x^2 - y^2 = a^2$ тенглама билан ифодаланади. Бундан $a = b$. Гиперболанинг директрисалари $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ тенгламалар билан ифодаланади. Масала шартига кўра $\frac{a}{\varepsilon} = 4\sqrt{2}$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ни ҳисобга олсак, $\frac{a^2}{c^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 4\sqrt{2}\,c$, $b^2 = c^2 - a^2$ тенгликдан

$a^2=c^2-a^2 \Rightarrow 2a^2=c^2 \Rightarrow a^2=\frac{1}{2}c^2$ бўлгани учун $a^2=$ $=4\sqrt{2}\,c \Rightarrow \frac{1}{2}c^2=4\sqrt{2}\,c \Rightarrow c=8\sqrt{2}$ га эга бўламиз. У ҳолда $a^2=4\sqrt{2}\,c=4\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}=64$. Демак, гиперболанинг тенгламаси:

$$x^2-y^2=64$$

4- §. Парабола

Таъриф. *Парабола* деб текисликнинг фокус деб аталувчи берилган F нуқтасидан ва директриса деб аталувчи берилган тўғри чизиқдан баравар узоқлашган барча нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади (фокус директрисада ётмайди деб фараз қилинади).

Фокусдан директрисагача бўлган масофани p орқали белгилаймиз. p катталик параболанинг параметри дейилади. Парабола тенгламасини унинг таърифидан фойдаланиб келтириб чиқарамиз. Бунинг учун абсциссалар ўқини шундай жойлаштирамизки, у директрисага перпендикуляр бўлиб, фокус орқали ўтсин ва директрисадан фокусга қараб мусбат йўналишга эга бўлсин (67- чизма). Абсциссалар ўқининг d тўғри чизиқ билан кесишган нуқтаси A бўлсин. Ординаталар ўқини $[AF]$ кесманинг ўртасидан ўтказамиз. Бу ҳолда директриса $x=-\frac{p}{2}$ тенгламага, F фокус эса $\left(\frac{p}{2};0\right)$ координаталарга эга бўлади. Параболанинг $M(x;y)$ нуқтасини оламиз. M нуқта парабола чизиғида ётиши учун (парабола таърифига кўра) ушбу тенглик ўринли бўлиши керак:

$$\rho(K,M)=\rho(M,F). \qquad (7.28)$$

(7.28) тенгликни координаталарда ифодалаймиз. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра:

$$\rho(K,M)=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

$$\rho(M,F)=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Буларни (7.28) га қўямиз:

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини квадратга кўтарсак,

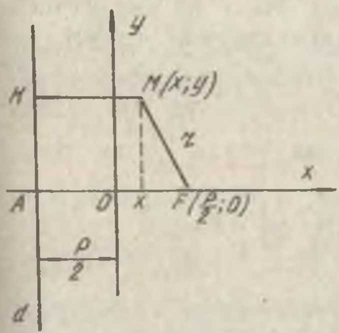
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$$

ни ҳосил қиламиз. Қавсларни очиб соддалаштирсак, натижада

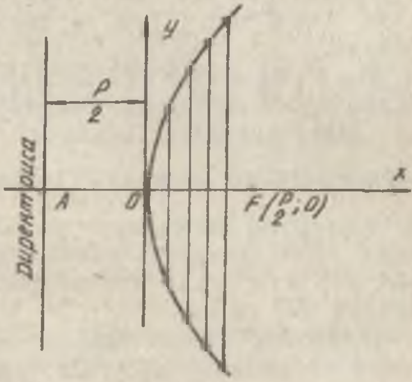
$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4},$$

$$y^2=2px \qquad (7.29)$$

тенглама ҳосил бўлади. (7.29) тенгламага параболанинг каноник тенгламаси дейилади.



67- чизма



68- чизма

$M(x;\ y)$ нуқтанинг фокал радиуси $r=x+\frac{p}{2}$, параболанинг эксцентриситети: $d=r,\ \varepsilon=\frac{r}{d}=1$ бўлгани учун, $\varepsilon=1$ бўлади.

Параболанинг учи $A(x_0;\ y_0)$ нуқтада бўлиб, унинг симметрия ўқи координата ўқларидан бирига параллел бўлса, унинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0) \text{ ёки } (x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Парабола шакли. (7.29) тенгламаси бўйича параболанинг шаклини текширамиз. $y^2 \geqslant 0$ ва $p>0$ бўлгани учун (7.29) тенгламада $x \geqslant 0$ бўлиши керак. Бу эса $p>0$ бўлганда парабола ординаталар ўқидан ўнг томонда жойлашганини билдиради. Тенгламада y фақат жуфт даражада қатнашгани учун абсциссалар ўқи парабола учун симметрия ўқи бўлади.

Агар $x=0$ бўлса, $y=0$ бўлиб, парабола координаталар бошидан ўтади. Координаталар боши эса параболанинг учи дейилади. (7.29) тенгламадан кўринадики, x ортиб бориши билан y ҳам ортиб боради. Демак, юқоридаги хоссаларга кўра параболанинг шаклини 68- чизмадагидек тасаввур қилиш мумкин.

Парабола координаталар системасида қандай жойлашишига кўра унинг тенгламаси мос равишда

$$y^2=2px, \; y^2=-2px, \; x^2=2py, \; x^2=-2py$$

кўринишларда берилади. Охирги икки ҳолда параболанинг симметрия ўқи ординаталар ўқидан иборат бўлади.

Параболани ясаш. Парабола $y^2=2px$ тенглама билан берилган бўлсин. Дастлаб параболанинг фокусини ва директрисасини ясаймиз. Бунинг учун Ox ўқда координаталар бошидан ўнгда ва чапда $\frac{p}{2}$ га тенг $[OF]$ ва $[OA]$ кесмаларни оламиз. A нуқта орқали Ox ўққа перпендикуляр қилиб d тўғри чизиқни ўтказамиз. F нуқта параболанинг фокуси, d эса директрисаси бўлади (68- чизма).

Парабола учидан бошлаб параболанинг симметрия ўқига перпендикуляр ва ҳар бири олдингисидан $\frac{p}{2}$ масофада турувчи тўғри чизиқларни ўтказамиз. Ўтказилган тўғри чизиқларнинг ҳар биридан директрисагача бўлган масофани радиус қилиб F марказли айлана чизамиз. Бу айлана тегишли тўғри чизиқни икки нуқтада кесади. Бу нуқталар изланаётган парабола чизиғининг нуқталари бўлади. Кейинги директрисага параллел чизиқдан директрисагача масофани радиус қилиб олиб, F фокусни эса марказ қилиб яна айлана ёйини чизсак, у олинган чизиқни икки нуқтада кесади, бундай парабола нуқталарини қуриш жараёнини узлуксиз кўп маротаба бажарсак, параболанинг нуқталар тўпламига эга бўламиз. Директрисага параллел чизиқлар сони қанча кўп бўлса, топилган парабола нуқталари шунча ўзаро яқин бўлиб, параболани чизиш аниқ ва осон бўлади.

$y = ax^2 + bx + c$ тенглама билан берилган парабола. $y = ax^2 + bx + c$ тенглама парабола эканини кўрсатамиз. Унинг учун тенгламанинг ўнг томонидан тўла квадрат ажратамиз:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Бундан

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \qquad (7.30)$$

Декарт координаталар бошини $O'\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ нуқтага

$$\begin{cases} x = x' - \dfrac{b}{2a}, \\ y = y' + \dfrac{4ac - b^2}{4a} \end{cases}$$

формула бўйича координата ўқларини параллел кўчирамиз. Янги координаталар системасида (7.30) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y' = ax'^2 \text{ ёки } x'^2 = \frac{1}{a}y'.$$

Агар $p = \frac{1}{2|a|}$ деб белгилаш киритсак,

$$x'^2 = 2py' \qquad (7.31)$$

тенгламага эга бўламиз. (7.31) тенглама симметрия ўқи $(O'y')$ ўқ ва учи $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ нуқтада бўлган параболадан иборатдир.

1- мисол. $x-2=0$ тўғри чизиқ ва F (6; 0) нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. $M(x; y)$ — биз излаётган геометрик ўриннинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра:

$$|MF| = \sqrt{(x-6)^2+y^2}\,.$$

Масала шартига кўра: $x-2=0$ тўғри чизиқ $M\ (x;y)$ нуқтадан

$$|MF| = |x-2|$$

масофада бўлади. Шунга кўра

$$\sqrt{(x-6)^2+y^2} = |x-2|$$

ёки

$$(x-6)^2+y^2 = x^2-4x+4 \Rightarrow y^2 = 8x+32.$$

Бу эса Ox ўқига нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламасидир.

2- мисол. $y^2=4x$ параболада фокал радиусининг узунлиги 20 бўлган нуқтани топинг.

Ечиш. Изланаётган $M\ (x; y)$ нуқта учун $\rho(F, M) = 20$,

$$y^2 = 4x \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow p = 2,$$

у ҳолда

$$F(1; 0), 20 = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+4x}$$

ёки

$$400 = x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+2x-399 = 0,$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+399} = -1 \pm 20;\ x_1 = 19,\ x_2 = -21\,.$$

$x_2 = -21$ илдиз масала шартини қаноатлантирмайди. $x_1 = 19$ ни $y^2 = 4x$ га қўйиб y ни топамиз:

$$y^2 = 4 \cdot 19 \Rightarrow y_1 = +2\sqrt{19},\ y_2 = -2\sqrt{19}.$$

Демак, изланаётган нуқта:

$$M_1(19; 2\sqrt{19}) \text{ ва } M_2(19; -2\sqrt{19}).$$

3-мисол. Автомобиль фонарининг кесими парабола шаклида бўлиб, унинг диаметри 20 см, чуқурлиги 10 см. Парабола фокусининг координаталарини топинг.

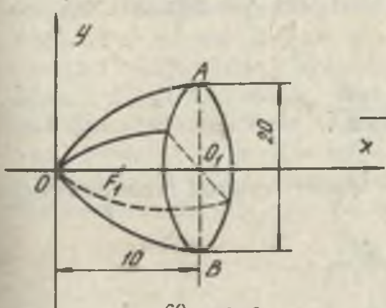
Ечиш. F фокусдан параболанинг учигача бўлган масофани топиш учун парабола тенгламасини тузамиз. Координаталар системасини шундай танлаб оламизки, фонарнинг симметрия ўқи Ox ўқ билан, учи эса координаталар боши билан устма-уст тушсин (69-чизма).

Бу ҳолда парабола тенгламаси $y^2 = 2px$ кўринишда бўлишини биламиз. A ва B нуқталар параболага тегишли бўлгани учун ва масала шартига кўра нуқталарнинг координаталари мос равишда $A(10;\ 10)$ ва $B(10;\ -10)$ га тенг.

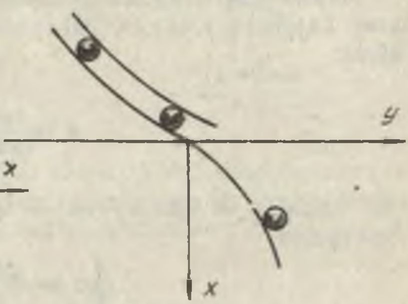
Бу нуқталарнинг координаталарини $y^2 = 2px$ тенгламага қўйсак:

$$10^2 = 2p \cdot 10$$

бўлиб, бундан $p = 5$ га эга бўламиз. Демак, параболанинг фокуси $F\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ нуқтада бўлади.



69-чизма



70-чизма

4-мисол, Oy ўқдан ва F (3; 0) нуқтадан баравар узоқликда ётувчи нуқталар геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. M (x; y) нуқта масала шартини қаноатлантирсин. N нуқта Oy ўқда ётсин, у ҳолда масала шартига кўра:

$$MF = MN.$$

Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига асосан:

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$
$$MN = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2} = x.$$

Буларни ўрнига қўйсак,

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = x \text{ ёки } y^2 = 6x - 9.$$

Демак, изланаётган геометрик ўрин фокуси F (3; 0) нуқтада бўлган ҳамда Ox ўққа нисбатан симметрик бўлган параболадир.

5-мисол. Шар тарнов бўйлаб ҳаракатланади ва v тезликка эришиб тарновнинг уринмаси горизонтал йўналишга эга бўлган нуқтада ундан чиқиб кетади. Шарнинг бундан кейинги ҳаракат траекториясини аниқланг (70- чизма).

Ечиш. Шар Oy ўқ бўйлаб ҳаракат қилганда унинг t соатда босган йўли $y = vt$ бўлади.

Лекин шар оғирлик кучининг таъсирида Ox ўқ бўйлаб ҳам ҳаракат қилади. Шарнинг Ox ўқ бўйлаб босган йўли:

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

(бу ерда $g = 9{,}8$ м/сек^2 — эркин тушиш тезланиши). Булардан

$$\begin{cases} x = \dfrac{gt^2}{2}, \\ y = v \cdot t. \end{cases}$$

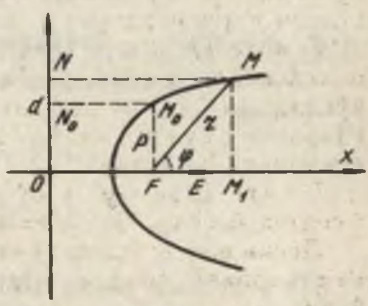
Бу тенгламалар системаси шар ҳаракатининг параметрик тенгламасидир. Иккинчи тенгламадан t ни топиб биринчи тенгламага қўйсак:

$$t = \frac{y}{v};\ y^2 = \frac{2v^2}{g}x.$$

Бу эса парабола тенгламасидир.

5- §. Иккинчи тартибли чизиқларнинг қутб координаталардаги тенгламалари

Иккинчи тартибли чизиқлардан эллипс, гипербола ва параболаларнинг олдинги параграфда баён этилган хоссаларидан фойдаланиб, уларнинг қутб координаталардаги тенгламасини келтириб чиқарамиз. Юқоридаги чизиқлардан бирортаси берилган бўлса, унинг ўнг тармогини қараймиз, чунки келтириб чиқариладиган қутб тенглама чизиқнинг фақат битта тармогини аниқлайди. Аниқлик учун гиперболанинг ўнг тармоғи берилган бўлсин. F унинг фокуси, d чизиқ эса шу фокусга мос директрисаси бўлсин (71- чизма). Қутб координаталар системасини қуйидагича киритамиз. $FL \perp d$ тўғри чизиқни ўтказамиз, $\overline{FE} = \bar{i}$, $L = (FL) \cap d$ бўлсин, бунда L нуқта (FL) тўғри чизиқда ётади ва F нуқтадан L нуқта ётмаган томонда ётади. F нуқтани қутб; (FE) нурни эса қутб ўқи деб оламиз. M_0 нуқта F нуқтадан қутб ўқига ўтказилган перпендикулярнинг берилган чизиқ билан кесишган нуқтаси бўлсин. $\rho(M_0, F) = p$ билан белгилаймиз ва уни эгри чизиқнинг фокал параметри деб атаймиз. Қутб координаталар системасида эгри чизиқнинг ихтиёрий M нуқтасининг координаталарини r, φ билан белгилаймиз:



71- чизма

$$r = \rho(F, M).$$

Эгри чизиқнинг 3- § даги асосий хоссаси (7.27) га кўра:

$$\frac{r}{d} = \frac{\rho(F, M)}{\rho(d, M)} = \varepsilon,$$

$$\frac{\rho(F, M_0)}{\rho(d, M_0)} = \varepsilon \Rightarrow \rho(d, M_0) = \frac{\rho(F, M_0)}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}. \qquad (7.32)$$

Агар $\varphi > \frac{\pi}{2}$ бўлса:

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) - r\cos(180° - \varphi) = \frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi.$$

Агар $\varphi < \frac{\pi}{2}$ бўлса:

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) + \rho(F, M) = \frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi$$

Демак, иккала ҳолда ҳам

$$\rho(d, M) = \frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi.$$

$\rho(d, M)$ нинг қийматини (7.32) га қўйсак, $\frac{r}{\frac{p}{\varepsilon} + r\cos\varphi} = \varepsilon$ тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (7.33)$$

(7.33) тенглама берилган чизиқнинг қутб координаталаридаги тенгламаси дейилади. Бу (7.33) тенгламада:

а) $\varepsilon < 1$ бўлса, у эллипсни аниқлайди ва φ бу ҳолда $0 \leqslant \varphi < \pi$ оралиқдаги барча қийматларни қабул қилади;

б) $\varepsilon = 1$ бўлса, у параболани аниқлайди ва φ бу ҳолда $0 < \varphi < \pi$ оралиқдаги барча қийматларни қабул қилади;

в) $\varepsilon > 1$ бўлса, у гиперболани аниқлайди. Бу ҳолда φ қайси оралиқда ўзгариши қуйидагича аниқланади. $2\varphi_0$ — асимптоталар орасидаги тармоқ жойлашган бурчак бўлсин, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{\varepsilon^2-1} \text{ ёки } \frac{\sin^2\varphi_0}{\cos^2\varphi_0}=\varepsilon^2-1 \Rightarrow$$

$$\varepsilon^2\cos^2\varphi = 1 \text{ ёки } \cos^2\varphi_0=\frac{1}{\varepsilon^2}, \ \varphi_0<\frac{\pi}{2} \text{ бўлганидан}$$

$$\cos\varphi_0=\frac{1}{\varepsilon}.$$

(7.33) тенгламада $r>0$ учун $1-\varepsilon\cos\varphi>0$ ёки $\cos\varphi<\frac{1}{\varepsilon}=\cos\varphi_0$ бўлиши керак. Бундан гиперболанинг қаралаётган тармогидаги нуқталар учун $\varphi_0<\varphi<2\pi-\varphi_0$ тенгсизликлар бажарилади. (7.33) тенгламадаги p сон фокал параметр дейилади. Парабола учун бу фокал параметр унинг каноник тенгламасидаги p дан иборат. Эллипс ва гипербола учун p нинг маъноси, уларнинг мос равишда ярим ўқлари орқали қуйидагича ифодаланади. (F M_0) тўгри чизиқ эллипс (гипербола) нинг фокал ўқига перпендикуляр бўлгани учун M_0, F нуқталар бир хил абсцнссага эга. $M_0(x_0;\ y_0)$ бўлса, $x_0=-c$ (гиперболада $x_0=+c$) $\cdot$ M_0 нуқта эллипс (гипербола)га тегишли бўлгани учун

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1\right) \text{ ва } p=\rho(M_0,F)=|y_0|$$

ни ҳисобга олсак, $\frac{c^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}=1\Rightarrow$

$$p^2=b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=b^2\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^2}\Rightarrow$$

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

Демак, эллипс ва гиперболада фокал параметр $p=\frac{b^2}{a}$ га тенг.

1-мисол. $r=\frac{15}{12-13\cos\varphi}$ чизиқнинг декарт координаталар системасидаги каноник тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Берилган тенгламани (7.33) $\left(r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\right)$

кўринишга келтирамиз. Унинг учун ўнг томоннинг сурат ва махражини 12 га бўламиз:

$$r = \frac{15}{12 - 13\cos\varphi} = \frac{\frac{15}{12}}{1 - \frac{13}{12}\cos\varphi} = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{13}{12}\cos\varphi}.$$

Буни (7.33) билан таққослаб, $\varepsilon = \frac{13}{12} > 1$ бўлгани учун эгри чизиқ гипербола деган хулосага келамиз.

Унинг каноник тенгламасини ёзамиз. Тенгламадан $p = \frac{5}{4}$, лекин $p = \frac{b^2}{a}$ эди, бундан

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{5}{4} a \cdot \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12} \Rightarrow c = \frac{13}{12} a.$$

b, c нинг бу қийматларини $b^2 = c^2 - a^2$ тенгликка қўйиб a ни топамиз:

$$\frac{5}{4} a = \frac{169}{144} a^2 - a^2 \Rightarrow a = \frac{36}{5},$$

$$b^2 = \frac{5}{4} a = \frac{5}{4} \cdot \frac{36}{5} = 9.$$

Демак, берилган гиперболанинг каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{36}{5}\right)^2} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

6- §. Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш

Бирор тўғри бурчакли декарт координаталар системасида координаталари

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \quad (7.34)$$

тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами иккинчи тартибли чизиқ деб аталиши бизга маълум. Бунда

a_{ij} коэффициентлар ҳақиқий сонлардан иборат бўлиб, a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлади.

Иккинчи тартибли чизиқлар назариясининг асосий масалаларидан бири унинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтиришдир. Иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини соддалаштиришни қуйидагича бажарамиз.

Агар иккинчи тартибли чизиқ бирор R тўғри бурчакли координаталар системасида (7.34) тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда бу координаталар системасини буриш ёрдамида R' тўғри бурчакли координаталар системасига ўтиш мумкин. Бу системада (7.34) чизиқ тенгламасидаги ўзгарувчилар кўпайтмаси, яъни xy ни сақланмайди (бу босқич $a_{22} \neq 0$ бўлган ҳолда ҳам қўлланилади). Бунинг учун

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (7.35)$$

ўтиш формуласидан фойдаланамиз. (7.35) ни (7.34) га қўйсак ва ўхшаш ҳадларини ихчамласак, (7.34) тенглама R' координаталар системасида қуйидаги кўринишни олади:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \quad (2.36)$$

бу ерда

$$\begin{gathered} a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{10} = a_{11}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha, \qquad (7.37) \\ a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha, \\ a'_{00} = a_{00} \end{gathered}$$

(7.37) белгилашлардан кўринадики, (7.36) тенгламадаги $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}$ коэффициентлар (7.34) тенгламадаги a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларга ва α бурчакка боғлиқ, шунинг билан бирга $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}$ ларнинг камида бири нолдан фарқли бўлиши керак.

α бурчакнинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уни шундай танлаб оламизки, натижада (7.36) тенгламадаги a'_{12} коэффициент нолга тенг бўлсин:

$$a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= -(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha + (a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

ёки

$$\frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha} \tag{7.38}$$

Бу нисбатни бирор λ га тенглаб, уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0 \\ a_{12}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha = 0\,. \end{cases} \tag{7.39}$$

(7.39) система бир жинсли бўлгани учун, унинг детерминанти нолга тенг, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Бундан

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{12} - a_{12}^2) = 0\,. \tag{7.40}$$

Бизга маълумки, (7.40) бажарилгандагина система нолдан фарқли ечимга эга бўлади. (7.40) тенглама (7.34) чизиқнинг характеристик тенгламаси дейилади. (7.40) тенгламанинг дискриминанти:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} \cdot a_{12} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$$

бўлгани учун (7.40) тенгламанинг иккита λ_1 ва λ_2 илдизлари турли ва ҳақиқийдир.

(7.38) тенгликдан:

$$a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = -\lambda\cos\alpha\,, \tag{7.41}$$

$$a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha\,.$$

Буларнинг ҳар бирини $\cos\alpha \neq 0$ га бўлиб (агар $\cos\alpha = 0$ бўлса, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлиб, $a_{12} = 0$ бўлади),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{11}}{\lambda - a_{22}} \tag{7.42}$$

ни ҳосил қиламиз. (7.42) муносабатга навбат билан λ_1 ва λ_2 илдизларни қўямиз.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}; \ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{22}}. \tag{7.43}$$

(7.43) формуладан фойдаланиб $\alpha = \alpha_1$ бурчакни аниқлаб, R координаталар системасини шу α_1 бурчакка буриш билан янги R' координаталар системасига ўтиш мумкинки, бу системада (7.34) тенглама соддалашиб, қуйидаги кўринишни олади:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0. \tag{7.44}$$

Агар (7.34) тенгламада $a_{10} = a_{20} = 0$ бўлса, у ҳолда $a'_{10} = a'_{20} = 0$ бўлиб, (7.44) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a_{00} = 0. \tag{7.45}$$

Шундай қилиб, координаталар системасини буриш ёрдамида (7.34) тенгламани (7.44) кўринишдаги тенгламага келтирдик. Энди (7.44) кўринишдаги тенгламани янада соддалаштириш учун, координаталар бошини кўчириш формуласидан фойдаланамиз.

Иккинчи тартибли чизиқнинг тенгламаси (7.44) кўринишда бўлсин ва (7.40) характеристик тенгламанинг илдизлари λ_1 ва λ_2 эса бир вақтда нолга тенг бўлмасин. Қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

а) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$.

Бу ҳолда (7.45) тенгламада қуйидагича шакл алмаштириш бажарамиз:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a''_{00} = 0,$$

бу ерда

$$a''_{00} = a'_{00} - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}$$

деб белгилаймиз. Энди

$$\begin{cases} x' = X + \left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right) \\ y' = Y + \left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right) \end{cases}$$

алмаштиришни бажарамиз; у ҳолда янги координаталар системаси, яъни R'' да эгри чизиқ қуйидаги тенгламага эга бўлади:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0\,, \tag{7.46}$$

бу ерда $O'\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}; -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$. Агар $a''_{00} \neq 0$ бўлса, (7.46) ни каноник кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x^2}{-a''_{00}/\lambda_1} + \frac{y^2}{-a''_{00}/\lambda_2} = 1\,. \tag{A}$$

Агар $a'_{00} = 0$ бўлса, (7.46) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0. \tag{B}$$

Шундай қилиб, R координаталар системасида (7.34) тенглама билан берилган иккинчи тартибли чизиқнинг характеристик тенгламаси илдизлари λ_1 ва λ_2 нолга тенг бўлмаса, $y(A)$ ва (7.46) формулаларга кўра 219-бетдаги жадвалда ифодаланган чизиқлардан бирортасини ифодалайди.

б) $\lambda_1 = 0$, $(\lambda_2 \neq 0)$, $a'_{10} \neq 0$.

Бу ҳолда (7.44) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_{10}\left(x' - \frac{a'^2_{20}\cdot\frac{1}{\lambda_2} - a'_{00}}{2a'_{10}}\right) = 0\,.$$

№	λ_1	λ_2	a''_{10}	Каноник тенгламаси	Чизиқнинг номи
1	+	+	−	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Эллипс
	−	−	+		
2	+	+	+	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Мавҳум эллипс
	−	−	−		
3	+	+	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Нуқта (кесишувчи мавҳум тўгри чизиқлар жуфти)
	−	−	0		
4	+	−	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$	Гипербола
	−	+	$\neq 0$		
5	+	−	0	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Кесишувчи тўгри чизиқлар жуфти
	−	+	0		

Бу тенгламага қуйидаги координата алмаштириш формуласи

$$x' = X + \frac{a_{20}'^2 \cdot \frac{1}{\lambda_2} - a_{00}'}{2a_{10}'}; \quad y' = Y + \left(-\frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)$$

ни қўлласак,

$$\lambda_2 Y^2 + 2a_{10}'X = 0 \Rightarrow Y^2 = -2 \cdot \frac{a_{10}'}{\lambda_2} X \qquad (7.47)$$

кўринишдаги парабола тенгламасига эга бўламиз. Агар

$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a'_{20} \neq 0$ бўлса, у ҳолда

(7.44) тенгламанинг кўриниши

$$X^2 = -2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_1} Y$$

бўлиб, бу ҳам парабола тенгламасидир.

Демак, $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq0$, $a'_{10}\neq0$ бўлса (ёки $\lambda_1\neq0$, $\lambda_2=0$, $a'_{20}\neq0$ бўлса), у ҳолда (7.44) тенглама параболани ифодалар экан.

в) $\lambda_1=0$, $a'_{10}=0$ ёки $\lambda_2=0$, $a'_{20}=0$ бўлсин.

Бу ҳолда (7.44) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a'_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} = 0.$$

Агар $a'_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} = a''_{00}$ деб белгилаб

$$x' = X,\ y' = Y + \left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$$

координаталарни алмаштириш формуласини татбиқ этсак, (7.44) тенглама R'' координаталар системасида

$$Y^2 + \frac{a''_{00}}{\lambda_2} = 0 \tag{7.48}$$

кўринишга эга бўлади. (7.48) формулада қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин. Агар $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$ бўлса, $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -a^2$ деб белгилаб, (7.48) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Y^2 - a^2 = 0 \Rightarrow Y - a = 0;\ Y + a = 0. \tag{7.49}$$

Агар $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$, яъни $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = a^2$ бўлса, у ҳолда

$$Y^2 + a^2 = 0 \Rightarrow Y + ai = 0;\ Y - ai = 0$$

бўлади. Бу ҳолда чизиқ мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтини ифодалайди.

Агар $a''_{00} = 0$ бўлса, $Y^2 = 0 \Rightarrow Y = 0$ бўлади ва бу ҳолда тенглама устма-уст тушган тўғри чизиқлар жуфтини ифодалайди.

Шундай қилиб (7.34) тенглама қуйидаги 9 та чизиқдан биттасини ифодалайди: 1) Эллипс; 2) Гипербола; 3) Парабола; 4) Кесишувчи тўғри чизиқлар жуфти; 5) Ҳар хил параллел тўғри чизиқлар жуфти; 6) Устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфти; 7) Мавҳум эллипс; 8) Мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфти; 9) Мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфти.

1-мисол. Ушбу иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтиринг:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

Ечиш. 1) характеристик тенгламани тузиб, унинг илдизларини аниқлаймиз:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0;\ \lambda_1 = 9;\ \lambda_2 = 1;$$

2) координаталар системасини буриш керак бўлган бурчакни топамиз:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

3) a'_{10} ва a'_{20} коэффициентларни аниқлаймиз:

$$a'_{10} = a_{10}\cos\alpha_1 + a_{20}\sin\alpha_1 =$$

$$= -9\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-9)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{18}{\sqrt{2}} = -9\sqrt{2}.$$

$$a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha_1 + a_{20}\cos\alpha_1 =$$

$$= -(-9)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-9)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{9}{\sqrt{2}} = 0.$$

4) топилганлардан фойдаланиб, янги координаталар системасига нисбатан қуйидаги чизиқ тенгламасини тузамиз:

$$9x'^2 + y'^2 - 18\sqrt{2}\,x' + 9 = 0$$

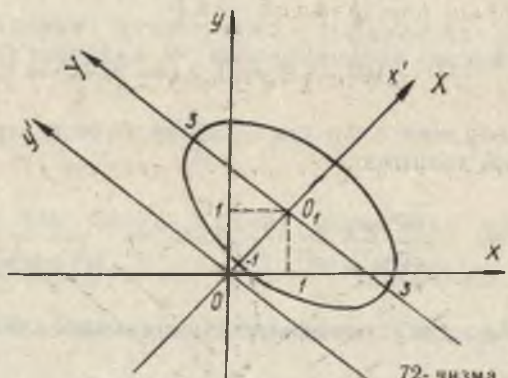
ёки

$$x'^2 + \frac{y'^2}{9} - 2\sqrt{2}\,x' + 1 = 0\,.$$

x' қатнашган ҳадлардан тўлиқ квадрат ажратиб, уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{(x' - \sqrt{2}\,)^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1 \text{ ёки } \frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{9} = 1\,.$$

Бу тенглама маркази $O_1(\sqrt{2};\ 0)$ нуқтага жойлашган ва ярим ўқлари $a = 1$, $b = 3$ дан иборат эллипс тенгламасидир (72- чизма).



72- чизма

2- мисол. Ушбу $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ чизиқ тенгламасини каноник кўринишга келтиринг, чизмасини ясанг.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = 4$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = -1$, $a_{20} = -7$, $a_{00} = 7$.

1) характеристик тенгламани тузиб, унинг илдизларини аниқлаймиз:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0;\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$$

ва олдинги мисолдагига ўхшаш давом эттирамиз:

$$2)\ \mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-4}{-2} = 2,$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$3)\ a'_{10} = a_{10}\cos\alpha_1 + a_{20}\sin\alpha_1 = -3\sqrt{5},$$

$$a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha_1 + a_{20}\cos\alpha_1 = -\sqrt{5};$$

$$4)\ 5y'^2 - 6\sqrt{5}\,x' - 2\sqrt{5}\,y' + 7 = 0;$$

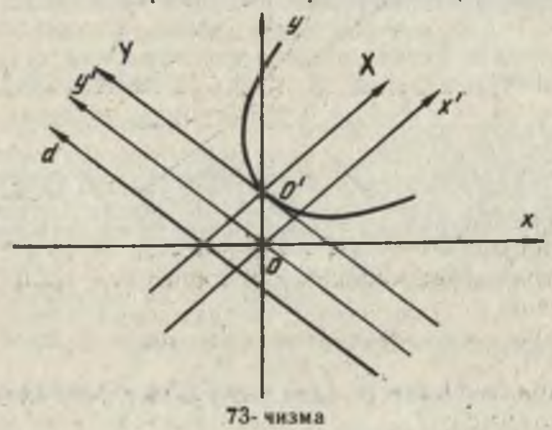
$$5)\ 5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 6\sqrt{5}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0;$$

$$6)\ x' = X + \frac{\sqrt{5}}{5};\ y' = Y + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

алмаштириш бажарамиз:

$$5Y^2 - 6\sqrt{5}\,X = 0 \Rightarrow Y^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}X.$$

Бу тенглама параболани ифодалайди (73- чизма).



73- чизма

МАШҚЛАР

1. Қуйидаги айланаларнинг маркази координаталарини ва радиусини аниқланг:

$$а)\ 2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 2 = 0;$$
$$б)\ x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0;$$
$$в)\ x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0;$$
$$г)\ x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0;$$
$$д)\ x^2 + y^2 + 3x - 7y - \frac{3}{2} = 0;$$
$$е)\ x^2 + y^2 + 3x - y = 0.$$

2. $A(6; -4)$ нуқта берилган. Диаметри OA кесмадан иборат айлана тенгламасини тузинг.

3. Қуйидаги айланаларни ясанг:

$$а)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 21 = 0;$$
$$б)\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0;$$
$$в)\ x^2 + y^2 - 8x = 0;$$
$$г)\ x^2 + y^2 + 4y = 0.$$

4. Берилган $A\ (-4;\ 0)$; $B\ (1;\ 5)$ ва $C\ (4;\ -4)$ нуқталардан ўтувчи айлана марказининг координаталари ҳамда радиусини топинг.

5. Айлана диаметрининг учлари $A\ (-3;\ 2)$ ва $B\ (1;\ 4)$ бўлса, шу айлана тенгламасини тузинг.

6. $A\ (4;\ 4)$ нуқтадан ва $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ айлана билан $y = -x$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтувчи айлана тенгламасини топинг.

7. Радиуси $R = 1$ бўлган айлана $A\ (2;\ 1)$ нуқта орқали ўтади ва $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$ айланага уринади. Айлана тенгламасини тузинг.

8. Координаталар бошидан ва $x^2 + y^2 = a^2$ айлананинг $x + y + a = 0$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталаридан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

9. $A\ (1;\ -3)$ ва $B\ (-1;\ 1)$ нуқталардан ўтиб, маркази $2x - y + 1 = 0$ тўғри чизиқда ётган айлана тенгламасини тузинг.

10. Учбурчак томонларининг тенгламалари $9x - 2y - 41 = 0$, $7x + 4y + 7 = 0$, $x - 3y + 1 = 0$ бўлса, шу учбурчакка ташқи чизилган айлана тенгламасини тузинг.

11. Эллипснинг кичик ярим ўқи $b = 12$, эксцентриситети $\varepsilon = 0{,}5$. Эллипснинг тенгламасини тузинг ҳамда фокуслари орасидаги масофани топинг.

12. $A\ (4;\ 1)$ ва $B\ \left(\frac{5\sqrt{5}}{3};\ -2\right)$ нуқталардан ўтувчи эллипс тенгламасини тузинг.

13. Қуйидагиларни билган ҳолда эллипс тенгламасини тузинг:

а) ярим ўқлари мос равишда 4 ва 2 га тенг;

б) фокуслари орасидаги масофа 6 га, катта ярим ўқи 5 га тенг;

в) кичик ярим ўқи 3 га, эксцентриситети $\frac{\sqrt{2}}{2}$ га тенг;

г) ярим ўқларининг йиғиндиси 8 га ва фокуслар орасидаги масофа 8 га тенг;

д) директрисаси $x = \pm 12$ тенглама билан аниқланган ва эксцентриситети $\frac{1}{3}$ га тенг.

14. Агар эллипснинг директрисалари орасидаги масофа фокуслари орасидаги масофадан тўрт марта катта бўлса, унинг эксцентриситетини топинг.

15. Директрисалари $x = \pm 8$ ва кичик ўқи 8 га тенг бўлган эллипснинг тенгламасини тузинг ва эксцентриситетини топинг.

16. $x^2 + y^2 = 4$ айланадаги ҳар бир нуқтанинг абсциссаси икки баробар орттирилган. Ҳосил бўлган эгри чизиқни аниқланг.

17. Эллипс абсциссалар ўқига A (7; 0) нуқтада ва ординаталар ўқига B (0; 4) нуқтада уринади. Агар эллипснинг ўқлари координата ўқларига параллел бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

18. Эллипс Ox ўқини A (3; 0) ва B (7; 0) нуқталарда кесади ва Oy ўққа C (0; 3) нуқтада уринади. Агар эллипснинг ўқлари координата ўқларига параллел бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

19. Гиперболанинг $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ тенгламаси берилган. Гиперболанинг эксцентриситетини, фокуслари ва учларининг координаталарини, асимптоталирининг тенгламаларини, ихтиёрий нуқтасининг фокал радиусларини ва директрисаларининг тенгламаларини аниқланг.

20. $2x^2 - 4y^2 = 18$ гипербола тенгламаси берилган. Гиперболанинг фокуслари, асимптоталари, эксцентриситетини аниқланг ва уни ясанг.

21. Учлари $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипснинг фокусларида, фокуслари эса унинг учларида бўлган гиперболанинг каноник тенгламасини ёзинг.

22. Фокуслари тенг томонли $x^2 - y^2 = 8$ гиперболанинг фокуслари билан устма-уст тушган ҳамда A (4; 6) нуқтадан ўтган эллипс тенгламасини тузинг.

23. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлиб, A $(6;\ -2\sqrt{2})$ нуқтадан ўтади, мавҳум ярим ўқи $b = 2$ га тенг. Унинг каноник тенгламасини тузинг ва B $(6;\ -2\sqrt{2})$ нуқтадан фокусларигача бўлган масофаларни топинг.

24. Гипербола асимптоталарининг тенгламалари $4y - 3x = 0$ ва $3x - 4y = 0$ бўлиб, фокуслари орасидаги масофа 10 га тенг. Унинг каноник тенгламасини тузинг.

25. $x^2 + y^2 + 6x = 0$ айлана ва $x - y = 0$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтиб, Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган парабола ва унинг директрисаси тенгламаларини тузинг. Айлана, тўғри чизиқ ва параболани ясанг.

26. Горизонтга нисбатан ўткир бурчак остида отилган тош парабола ёйини чизиб, бошлангич жойидан 32 метр узоққа тушади. Тошнинг 24 метр баландликка кўтарилганлигини билган ҳолда унинг траекторияси тенгламасини тузинг.

27. Фаввoрадан отилиб чиқаётган сув оқими параметри $p = 0{,}1$ бўлган парабола шаклини олади. Сувнинг отилиб чиқаётган жойдан 2 м узоқликка тушаётганлиги маълум бўлса, отилиб чиқаётган сувнинг баландлигини топинг.

28. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг қутб тенгламалари берилган:

$$а)\ r = \frac{1}{2 - 2\cos\varphi};\quad б)\ r = \frac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi};$$

$$в)\ r = \frac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}.$$

Уларнинг декарт координаталари системасидаги тенгламаларини тузинг.

29. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ эллипснинг қутб координатасидаги тенгламасини тузинг.

30. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}$ эллипснинг ярим ўқларининг узунлигини ва фокуслари орасидаги масофани, эксцентриситети ва директрисаларининг тенгламасини топинг.

31. Координата ўқларини параллел кўчирганда A (4; 1) нуқта янги A (3; —1) координаталарга эга бўлади. Эски ва янги координаталар системаларини ҳамда A нуқтани ясанг.

32. Координата ўқларининг йўналишини маълум бир ўткир бурчакка бурганда A (1; 4) нуқтанинг янги системадаги абсциссаси 4 га тенг. Ўша буриш бурчагини топинг, янги ва эски системани ҳамда A нуқтани ясанг.

33. Қуйидаги иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг тенгламаларини энг содда (каноник) кўринишга келтиринг ва бу эгри чизиқларни ясанг:

а) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$;
б) $32x^2 + 52\,xy - 7y^2 + 180 = 0$;
в) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
г) $3x^2 - 4xy - 2x + 4y^2 - 5 = 0$;
д) $16x^2 - 2xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0$.
е) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 50x - 100y + 25 = 0$.

8-БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

1-§. Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси

Бизга маълумки, $F(x;y)=0$ тенглама текисликда бирор тўғри чизиқни аниқлайди, яъни Oxy текисликдаги координаталари x ва y бўлган барча нуқталар тўплами бу тенгламани қаноатлантиради. Шунингдек, фазода ҳам

$$F(x,\ y,\ z)=0 \tag{8.1}$$

тенглама $Oxyz$ да бирор сиртни, яъни координаталари x, y ва z бўлган ва (8.1) тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини аниқлайди. (8.1) тенглама сиртнинг тенгламаси, x, y, z лар эса унинг ўзгарувчи координаталари дейилади.

Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned}&a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+\\&+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,\end{aligned} \tag{8.2}$$

бу тенгламадаги a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиши керак. Айрим ҳолларда сирт тенгламаси билан эмас, балки у ёки бу хоссага эга бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни билан берилиши мумкин. Бу ҳолда сиртнинг геометрик хоссаларидан фойдаланиб унинг тенгламаси тузилади.

Масалан, берилган $O_1(a;\ b;\ c)$ нуқтадан R масофада ётувчи барча нуқталарнинг геометрик ўрни шар сирти (сфера) бўлади. Бу бобда оддий кўринишдаги тенгламалари иккинчи даражали икки ўзгарувчили бўлган сиртларнинг баъзилари билан танишамиз.

2- §. Сферик сирт

Сферанинг $Oxyz$ тўғри бурчакли декарт координаталар системасидаги тенгламасини тузамиз.

Маркази $O'(a;\ b;\ c)$ нуқтада ва радиуси R бўлган сфера берилган бўлсин. Агар $M(x;\ y;\ z)$ нукта сферанинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда $O'(a;\ b;\ c)$ ва $M(x;\ y;\ z)$ нуқталар орасидаги масофани топиш формуласидан фойдалансак, сфера тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{8.3}$$

(8.3) — маркази $O'(a;\ b;\ c)$ нуқтада ётувчи ва радиуси R га тенг бўлган сфера тенгламаси дейилади. Агар (8.3) да $a=b=c=0$ бўлса, маркази координаталар бошида ётувчи ва радиуси R га тенг бўлган сфера тенгламасига эга бўламиз:

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{8.4}$$

(8.3) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\begin{gathered}x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+\\+a^2+b^2+c^2-R^2=0.\end{gathered} \tag{8.5}$$

Сфера тенгламаси иккинчи тартибли сирт эканини кўрсатамиз. Унинг учун сиртнинг (8.2) тенгламасида

$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=0 \text{ ва } a_{11}=a_{22}=a_{33}$$

деб олинса, (8.2) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{gathered}a_{11}x^2+a_{11}y^2+a_{11}z^2+\\+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.\end{gathered} \tag{8.6}$$

Ҳосил бўлган (8.6) тенглама сферанинг тенгламаси эканини текширамиз. Бунинг учун $a_{11}\neq 0$ деб (8.6) нинг ҳамма ҳадларини a_{11} га бўламиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A=\frac{2a_{14}}{a_{11}},\ B=\frac{2a_{24}}{a_{11}},\ C=\frac{2a_{34}}{a_{11}},\ D=\frac{a_{44}}{a_{11}}.$$

Натижада

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Охирги тенгламани ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2-4D)$$

ёки

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2. \quad (8.7)$$

(8.7) тенгламадан кўринадики, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ бўлганда (8.6) тенглама маънога эга бўлади. Демак,

$$A^2+B^2+C^2-4D>0$$

бўлса, (8.7) тенглама маркази $\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2};-\frac{C}{2}\right)$ нуқтада ва радиуси $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ бўлган сферани ифодалайди. Агар $A^2+B^2+C^2-4D=0$ бўлса, (8.7) тенглама

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

кўринишда бўлиб, у фақат битта $\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2};-\frac{C}{2}\right)$ нуқтани ифодалайди.

Мисол. $x^2+y^2+z^2-4x+2y+8z+4=0$ сферанинг маркази ва радиусини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани (8.3) кўринишга келтирамиз. Бунинг учун тенгламадаги x, y, z лар қатнашган ҳадларни олиб, уларни тўла квадратга келтирамиз:

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y+8z+4=0,$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+4)^2-4+4-1-16=0\Rightarrow$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=17$$

ёки

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=(\sqrt{17})^2.$$

Демак, сферанинг маркази (2; —1; —4) нуқтада бўлиб, радиуси $R=\sqrt{17}$ га тенг экан.

3-§. Цилиндрик сирт

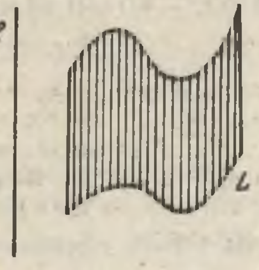
Бирор Π текисликда ётувчи L чизиқнинг хар бир нуқтасидан ўтувчи ва берилган l тўғри чизиққа параллел бўлган барча тўғри чизиқлардан ташкил топган сирт *цилиндрик сирт* дейилади. Бунда L чизиқ цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси, l тўғри чизиққа параллел ва L чизиқни кесувчи чизиқлар унинг ясовчиси дейилади (74- чизма).

Йўналтирувчилари координата текисликларидан бирида ётувчи ясовчилари эса шу текисликка перпендикуляр бўлиб координаталар ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртларни кўрамиз.

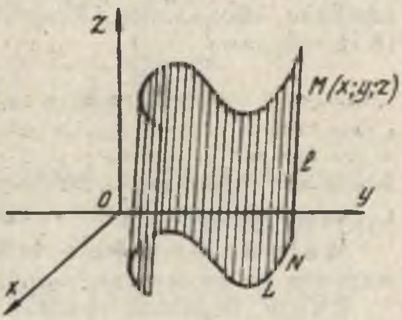
Oxy текисликда тенгламаси

$$F(x;\ y)=0 \tag{8.8}$$

бўлган L чизиқ ва ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сирт ясаймиз (75- чизма).



74- чизма



75- чизма

(8.8) тенглама $Oxyz$ координаталар системасида цилиндрик сирт тенгламаси эканини кўрсатамиз.

$M(x;\ y;\ z)$ — цилиндрик сиртнинг ихтиёрий тайинланган нуқтаси бўлсин. M нуқта орқали ўтувчи ясовчининг L йўналтирувчиси билан кесишган нуқтасини N деб белгилаймиз.

N нуқта M нуқтанинг Oxy текислигидаги проекциясидир. Шунинг учун M ва N нуқталар битта x абсцисса ва битта y ординатага эга. N нуқта L чизиқда ётгани учун, у эгри чизиқнинг (8.8) тенгламасини қаноатлантиради.

Демак, бу тенгламани $M(x;\ y;\ z)$ нуқтанинг координаталари ҳам қаноатлантиради. $Oxyz$ фазода L йўналтирувчи қуйидаги иккита тенглама системаси билан аниқланади:

$$\begin{cases} F(x;y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\begin{cases} F(x;z)=0, \\ y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(y;z)=0, \\ x=0 \end{cases}$$

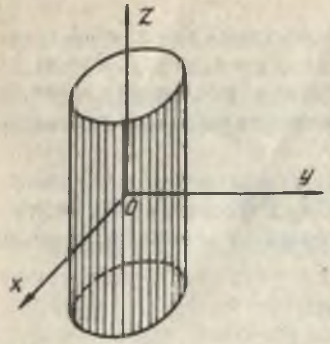
тенгламалар цилиндрик сиртларнинг L йўналтирувчи чизиқларини мос равишда Oxz ва Oyz текисликдаги ҳолатини аниқлашини кўрсатиш мумкин.

Цилиндрик сиртларга мисоллар кўрамиз.

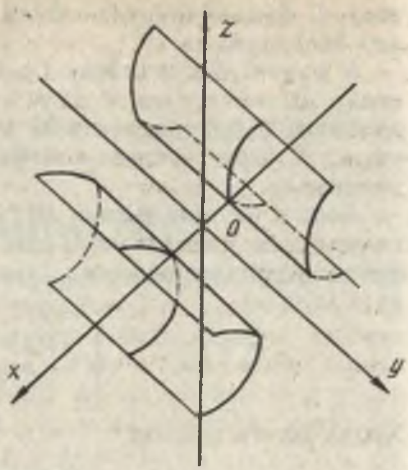
1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ тенглама билан аниқланадаган цилиндрик сирт **эллиптик цилиндр** дейилади (76- чизма). Унинг ясовчилари Oz ўққа параллел, ярим ўқлари a ва b бўлган Oxy текисликда ётган эллипс эса унинг йўналтирувчисидир. Агар $a=b$ бўлса, унинг йўналтирувчиси айлана бўлади, сирт эса **тўғри доиравий цилиндр** бўлади. Унинг тенгламаси:

$$x^2+y^2=a^2.$$

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ тенглама билан аниқланадиган цилиндрик сирт **гиперболик цилиндр** дейилади (77- чизма). Бу сиртнинг ясовчилари Oy ўққа параллел, йўналтирувчиси эса Oxz текисликда жойлашган гиперболадан иборатдир.



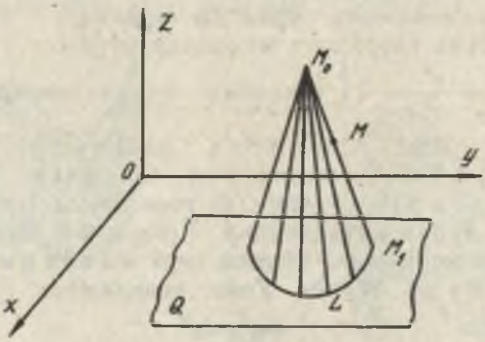
76- чизма



77- чизма

4- §. Конус сирт

Бирор Q текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ва бу текисликка тегишли бўлмаган M_0 нуқта берилган бўлсин (78- чизма).



78- чизма

Таъриф. Фазодаги M_0 нуқтадан ўтиб, L ни кесиб ўтувчи барча тўгри чизиқлар тўплами иккинчи тартибли конус сирт (ёки конус) деб аталади. M_0 нуқта конус учи, L чизиқ конус йўналтирувчиси, конусни ҳосил қилувчи тўгри чизиқлар эса унинг ясовчилари деб аталади.

Конус ясовчилари бўлган тўғри чизиқлар маркази конус учида бўлган тўғри чизиқлар боғламига тегишли бўлади. Энди конус тенгламасини келтириб чиқарайлик. Q текислик ва ундаги L чизиқ Oxy текисликда ётган бўлсин. $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ эса Oxy текислигида ётмаган ихтиёрий нуқта бўлсин. Конуснинг ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтасини олайлик, у ҳолда M_0M тўғри чизиқ конуснинг ясовчиси бўлиб, L чизиқ билан $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтада кесишади. M_0, M_1 ва M нуқталар бир тўғри чизиқда ётгани учун

$$\overline{M_0M_1}=\lambda\overline{M_0M}$$

тенглик ўринли. Бу тенгликдан:

$$\begin{aligned} x_1-x_0&=\lambda(x-x_0), & & x_1=x_0+\lambda(x-x_0),\\ y_1-y_0&=\lambda(y-y_0), & \text{ёки } & y_1=y_0+\lambda(y-y_0),\\ z_0-z&=\lambda(z-z_0) & & z_0+\lambda(z-z_0)=0. \end{aligned}$$

Сўнгги тенгликдан λ ни топиб, олдинги икки тенгликка қўямиз:

$$x_1=x_0+\frac{x-x_0}{z_0-z}\cdot z_0\,;\ y_1=y_0+\frac{y-y_0}{z_0-z}\cdot z_0. \tag{8.9}$$

$$M_1\in L\ \Rightarrow\ F(x_1;\ y_1)=0$$

ёки

$$F\left(x_0+\frac{x-x_0}{z-z_0}\cdot z_0\,;\ y_0+\frac{y-y_0}{z_0-z}\cdot z_0\right)=0. \tag{8.10}$$

(8.10) ифода конус тенгламаси дейилади. Иккинчи тартибли конуснинг декарт координаталар системасидаги энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0; \tag{8.11}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

кўринишларда бўлади.

Тенгламаси (8.11) кўринишда бўлган конусни текисликлар билан кесилса, кесимда қандай иккинчи тартибли чизиқлар ҳосил бўлишини аниқлаймиз.

1. Конусни $z=h(h>0)$ текислик билан кессак, кесимда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \text{ ёки } \frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади.

2. Конусни $y=h(h>0)$ текислик билан кессак, кесимда

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{b}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{ch}{b}\right)^2}=1$$

гипербола ҳосил бўлади.

3. Конусни $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=h(h>0)$ текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=h \end{cases}$$

системанинг ечими бўлган $y^2=-b^2h\left(2\cdot\frac{x}{a}-h\right)$ парабола ҳосил бўлади.

4. Конусни $y=0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ тенглама билан аниқланувчи кесишувчи иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Шунингдек, $x=0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ тенглама билан аниқланувчи кесишувчи иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

5. Конусни $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$ текислик билан кессак, кесимда устма-уст тушган иккита $\frac{y^2}{b^2}=0$ ёки $y^2=0$ тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

Мисол. Йўналтирувчиси Oxy текисликдаги $x^2-4y^2=1$ гиперболадан иборат, учи $(1; -2; 1)$ нуқтада бўлган конус тенгламасини тузинг.

Е ч и ш. Масала шартига кўра

$$L: F(x;y)=x^2-4y^2-1=0;\ x_0=1;\ y_0=-2,\ z_0=1.$$

(8.9) формулага асосан x ни

$\frac{x-1}{1-z}+1=\frac{x-z}{1-z}$ билан, y ни $\frac{y+2}{1-z}-2=\frac{y+2z}{1-z}$

билан алмаштирсак, (8.10) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\left(\frac{x-z}{1-z}\right)^2-4\left(\frac{y+2z}{1-z}\right)^2-1=0.$$

Бу тенгламани соддалаштирсак, изланаётган конус тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x^2-4y^2-16z^2-2xz-16yz+2z-1=0.$$

5- §. Айланма сиртлар

Q текисликда бирор L чизиқ ва l тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Т а ъ р и ф. L чизиқнинг l тўғри чизиқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган Φ фигура **а й л а н м а с и р т** деб аталади. Бунда L айланма сиртнинг меридиани, l айланиш ўқи деб аталади.

Равшанки, L чизиқнинг ҳар бир нуқтаси l атрофида айланишида бирор айланани ҳосил қилиб, бу айлананинг маркази тўғри чизиқда бўлади. Айланма сиртнинг тенгламасини келтириб чиқарамиз.

Декарт координаталар системасини шундай танлаб оламизки, бунда $Q-(Oyz)$ текислик, $l-(Oz)$ ўқ ҳамда

$$L: F(x;\ z)=0$$

бўлсин.

L чизиқнинг (Oz) ўқ атрофида айланишдан 79- чизмадагидек Φ сирт ҳосил бўлган бўлсин. $M(x;\ y;\ z)$ шу сиртга тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин. M нуқтадан Oz ўққа перпендикуляр ўтказсак, кесимда маркази $O_1\in(Oz)$ нуқтада бўлган бирор айлана ҳосил қилинадики, у айлана L чизиқ билан $M_1(O;\ y_1;\ z_1)$ нуқтада кесишсин. У ҳолда O_1 нинг координаталари $(0;\ 0;\ z)$ бўлади. Кесим айланадан иборат бўлгани учун:

$$\rho(O,\ M)=\rho(O_1,\ M_1). \qquad (8.12)$$

Бу масофалар икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра қуйидагича бўлади:

$$\rho(O, M) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

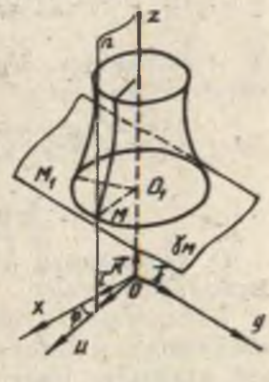
$$\rho(O_1, M) = \sqrt{(0-0)^2+(y_1-0)^2+(z-z)^2} = \sqrt{y_1^2} = |y_1|.$$

Бу қийматларни (8.12) тенгликка қўямиз:

$$|y_1| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

$M_1 \in L$ бўлгани учун:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,;z\right)=0. \quad (8.13)$$



79 чизма

(8.13) тенглама L чизиқни Oz ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасидир.

Агар L чизиқни мос равишда Ox ва Oy ўқлар атрофида айлантирсак, ҳосил бўлган сиртларнинг тенгламалари мос равишда

$$F\left(x;\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \text{ ва}$$

$$F\left(y;\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0 \quad (8.14)$$

бўлади.

1-мисол. Oyz текисликда жойлашган

а) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипс; б) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ гипербола; в) $y^2=2pz$ параболаларнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўладиган айланма сиртларнинг тенгламаларини тузинг.

Ечиш. (8.13) формулага асосан:

а) эллипсни Oz ўқ атрофида айлантсирак,

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

сирт ҳосил бўлиб, *айланма эллипсоид* деб аталади.

б) гиперболани Oz ўқ атрофида айлантирсак,

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ёки } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

сирт ҳосил бўлиб, у *айланма гиперболоид* деб аталади;
в) параболани Oz ўқ атрофида айлантирсак,

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=2pz \text{ ёки } x^2+y^2=2pz$$

сирт ҳосил бўлиб, у *айланма параболоид* деб аталади.

2- мисол. $y=x$ тўғри чизиқнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини тузинг.

Ечиш. $y=x$ тўғри чизиқ тенгламасида y ни $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ билан алмаштирамиз:

$$x=\pm\sqrt{y^2+z^2} \text{ ёки } x^2-y^2-z^2=0,$$

бу — изланаётган айланма сирт тенгламаси бўлиб, у *доиравий конус* сиртдан иборатдир.

6- §. Эллипсоид

Таъриф. Фазодаги декарт координаталар системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.15)$$

тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўпламидан ҳосил бўлган сирт *эллипсоид* деб аталади, бунда a, b, c сонлар унинг ярим ўқлари дейилади.

(8.15) тенглама билан берилган эллипсоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

1. (8.15) тенглама иккинчи тартибли алгебраик тенглама бўлгани учун эллипсоид иккинчи тартибли сиртдир.

2. (8.15) тенгламага эътибор берсак, учта мусбат соннинг йиғиндиси бирга тенгдир, бундан

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1;\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1;\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

ёки

$$x^2\leqslant a^2,\ y^2\leqslant b^2;\ z^2\leqslant c^2,$$

булардан:

$$-a\leqslant x\leqslant a;\ -b\leqslant y\leqslant b;\ -c\leqslant z\leqslant c. \qquad (8.16)$$

Эллипсоид чегараланган сирт бўлиб, қирралари $2a$, $2c$, $2b$ тўғри бурчакли параллелепипед ичига жойлашган фигурадан иборатдир.

3. (8.15) ва (8.16) формулалардан кўриниб турибдики, агар қўшилувчилардан бирортаси бирга тенг бўлса, қолган иккитаси ноль бўлиши керак. Масалан, $x^2=a^2$ бўлганда $y^2=0$, $z^2=0$ бўлиб, $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$ ва эллипсоид (Ox) ўқини $A_1(a;\ 0;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0;\ 0)$ нуқталарда кесиб ўтади.

Худди шунга ўхшаш, бу эллипсоид Oy ўқини $B_1(0;\ b;\ 0)$, $B_2(0;\ -b;\ 0)$ нуқталарда Oz ўқини $C_1(0;\ 0;\ c)$, $C_2(0;\ 0;\ -c)$ нуқталарда кесиб ўтади.
Бу нуқталарга эллипсоиднинг учлари деб аталади.

4. Эллипсоидни координата текисликлари билан кесилганда кесимда ҳосил бўладиган чизиқларни аниқлаймиз:

а) эллипсоидни Oxy текислик билан кесайлик. Бу ҳолда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

яъни Oxy текислидаги эллипс ҳосил бўлади;

б) Oxz $(y=0)$ текислик билан кессак:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади;

в) Oyz $(x=0)$ текислик билан кессак:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади.

5. Эллипсоидни координата текисликларига параллел текисликлар билан кесилганда кесимда ҳосил бўладиган чизиқларни аниқлаймиз.

Эллипсоидни Oxy текисликка параллел бўлган $z=h$ текислик билан кессак, тенгламаси

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

бўлган эгри чизиқ ҳосил бўлади. Бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин:

а) $-c<h<c$ бўлса, $1-\frac{h^2}{c^2}>0$ бўлиб,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

тенгламага эга бўламиз, бу эса маркази $(0;\ 0;\ h)$ нуқтада ва $z=h$ текисликда ётувчи эллипсдан иборатдир;

б) $h=c$ ёки $h=-c$ бўлса, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ бўлиб, бу шарт фақатгина $x=0$, $y=0$ бўлгандагина бажарилади, демак, $z=c$ текислик бу ҳолда эллипсоид билан $(0;\ 0;\ c)$ нуқтада, $z=-c$ текислик эса $(0;\ 0;\ -c)$ нуқтада кесишади. Бу текисликлар эллипсоидга шу нуқталарда мос равишда уринма текислик бўладилар;

в) $h>c$ ёки $h<-c$ бўлса, у ҳолда $1-\frac{h^2}{c^2}<0$ бўлиб, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$ нинг ўнг томонида манфий сон ҳосил бўлади, чап томони эса доимо мусбат, демак $z>c$ ёки $z<-c$ текисликлар эллипсоид билан кесишмайди.

Эллипсоидни бошқа координата текисликларига параллел $x=h$, $y=h$ текисликлар билан кесилса, ҳосил бўлган кесимларни юқоридаги каби аниқлаш мумкин, биз уни ўқувчига ҳавола қиламиз.

6. Агар $M_1(x;\ y;\ z)$ нуқта эллипсоидга тегишли бўлса, $M_2(-x;\ -y;\ -z)$ нуқта ҳам унга тегишли бўлади, бундан кўринадики, эллипсоид координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган. Бу маълумотлар эллипсоиднинг кўринишини 80-чизмадагидек чизишга ёрдам беради. Хусусий ҳолда $a=b\neq c$ бўлса, $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ айланма эллипсоид ҳосил бўлади.

Агар $a=b=c$ бўлса, $x^2+y^2+z^2=a^2$ бўлиб, маркази координаталар бошида ва радиуси a га тенг сфера ҳосил бўлади, $a \neq b \neq c$ шартда эллипсоид **уч ўқли** дейилади.

Мисол. Ўқлари декарт координата ўқларида жойлашган ва M (1; 0; 3) нуқтадан ўтиб, Oxy текислик билан $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипс бўйича кесишувчи эллипсоид тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланаётган тенглама

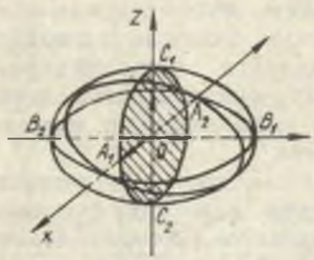
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

кўринишда бўлиб, a, b, c ларни топиш кифоя. Масала шартига кўра $z = 0$ да $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ҳосил бўлади, уни берилган $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипс билан солиштириб, $a^2 = 19$, $b^2 = 4$ ларни топамиз.

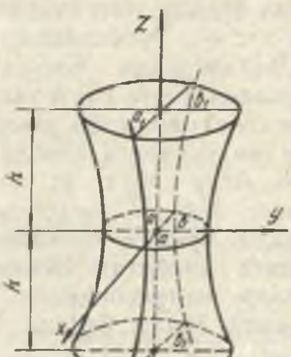
$M(1;\ 0;\ 3)$ нуқта изланаётган текисликка тегишли бўлгани учун

$$\frac{1}{19} + \frac{0}{4} + \frac{9}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{19}{2}.$$

Демак, изланаётган тенглама қуйидагича бўлади: $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{4} + \frac{2z^2}{19} = 1.$



80- чизма



81- чизма

7- §. Гиперболоидлар

Гиперболоидлар икки хил бўлади. Агар гиперболани мавҳум ўқи атрофида айлантирсак, ҳосил бўлган сирт *бир паллали* айланма гиперболоид деб аталади ва бу сиртнинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.17)$$

кўринишда ёзилади. Агар гиперболани ҳақиқий ўқ атрофида айлантирсак, ҳосил бўлган сирт *икки паллали* айланма гиперболоид деб аталади ва бу сиртнинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8.18)$$

кўринишда ёзилади.

Бир паллали гиперболоид. (8.17) тенглама билан берилган бир паллали гиперболоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик (81- чизма).

1. (8.17) тенгламадан бир паллали гиперболоиднинг иккинчи тартибли сирт эканлигини кўрамиз.

2. Бир паллали гиперболоиднинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқлаймиз:

а) (Ox) ўқ $(y=0,\ z=0)$ билан кесишиш нуқтаси:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a.$$

Демак, бир паллали гиперболоид Ox ўқини $A_1\ (a;\ 0;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0;\ 0)$ нуқталарда кесади.

б) (Oy) ўқ $(x=0;\ z=0)$ билан кесишиш нуқтаси:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\\ z=0.\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b.$$

Демак, бир паллали гиперболоид Oy ўқини $B_1\ (0;\ b;\ 0)$, $B_2\ (0;\ -b;\ 0)$ нуқталарда кесади.

в) (Oz) ўқ $(x=0;\ y=0)$ билан кесишиш нуқтаси:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow z^2=-c^2.$$

Бу тенглик ҳақиқий сонлар соҳасида ўринли эмас. Шунинг учун бир паллали гиперболоид Oz ўқи билан кесишмайди ва Oz ўқ гиперболоиднинг *мавҳум ўқи* деб аталади. A_1, A_2, B_1, B_2 нуқталар бир паллали гиперболоиднинг *учлари* дейилади.

3. Бир паллали гиперболоидни координата текисликлари билан кесилганда ҳосил бўладиган кесимни аниқлайлик.

а) бир паллали гиперболоидни Oxy текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипс ҳосил бўлади;

б) Oxz текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

гипербола ҳосил бўлади;

в) Oyz текислик билан кессак:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

яъни кесим гипербола бўлади.

4. Бир паллали гиперболоидни координата текисликларига параллел текисликлар билан кессак, ҳосил бўлган кесимлар ё гипербола, ёки эллипс бўлади.

а) Oxy текисликка параллел $z=h$ текислик билан кессак:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \text{ яъни}$$

кесим — эллипс. Бунда $|h|$ сон катталашган сари эллипснинг ярим ўқлари катталашиб, фақат $h=0$ бўлганда эллипс энг кичик ярим ўқли бўлади;

б) Oyz текисликка параллел $x=h$ текислик билан кессак:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}. \qquad (A)$$

h нинг қийматларига кўра (А) тенгламада қуйидаги ҳоллар юз бериши мумкин:

1) агар $h=a$ бўлса, (А) тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

яъни кесим (0; 0) нуқтада кесишуви иккита тўғри чизиқдан иборат бўлади;

2) агар $-a<h<a$ бўлса, $1 - \dfrac{h^2}{a^2} > 0$ бўлиб, (А) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)} = 1,$$

яъни кесим — мавҳум ўқи Oz га параллел бўлган гиперболадан иборат;

3) агар $|h|>a$ бўлса, $1 - \dfrac{h^2}{a^2} < 0$ бўлиб, (А) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$-\frac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{a^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\dfrac{h^2}{a^2} - 1\right)} = 1,$$

яъни кесим — мавҳум ўқи Ox ўққа параллел бўлган гиперболадан иборат. Худди шу ҳоллар гиперболоидни $y=h$ текислик билан кесганда ҳам содир бўлади.

5. Агар $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта гиперболоидга тегишли бўлса, $M_2(-x_1;\ -y_1;\ -z_2)$ ҳам гиперболоидга тегишли бўлади. Бундан бир паллали гиперболоид нуқталари координаталар бошига ва координата текисликларига нисбатан симметрик эканлиги келиб чиқади.

Шу маълумотларга асосан бир паллали гиперболоидни чизиш мумкин (81- чизма).

Хусусий ҳолда, $a=b$ бўлса, (8.17) тенглама $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ га келтирилади, бу эса бир паллали айланма гиперболоидни аниқлайди.

Қуйидаги

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.19}$$

ёки

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.20}$$

тенгламалар ҳам бир паллали гиперболоид бўлиб, улар мавҳум ўқлари билангина фарқ қилади. (8.19) да Oy мавҳум ўқ, (8.20) да Ox мавҳум ўқдир.

Икки паллали гиперболоид. (8.18) тенглама бўйича бу сиртнинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

1. Икки паллали гиперболоид иккинчи тартибли сиртдир.

2. Икки паллали гиперболоид координаталар бошига ва координата текисликларига нисбатан симметрик жойлашган.

3. Икки паллали гиперболоид фақатгина Ox ўқ билан $A_1(a;\ 0;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0;\ 0)$ нуқталарда кесишиб, бошқа координата ўқлари билан кесишмайди, демак, Oy, Oz мавҳум ўқлардир. Бундан эса, икки паллали гиперболоид икки қисмдан иборат бўлиб, улар Oyz текисликка нисбатан симметрик жойлашганлиги келиб чиқади (82- чизма).

4. (8.18) тенгламани Oyz текисликка параллел $x=h$ текислик билан кессак,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h \end{cases} \Rightarrow - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1 \qquad (A)$$

бўлиб, бунда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $|h| > 0 \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} - 1 > 0$ бўлиб, (A) тенглама

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1$$

кўринишни олиб, кесим эллипсни аниқлайди;

б) $h = a$ да кесим фақат битта A_1 $(a;\ 0;\ 0)$ ёки $A_2(-a;\ 0;\ 0)$ нуқтадан иборат бўлади.

Икки паллали гиперболоиднинг бошқа координата текисликлари ва бу текисликларга параллел текисликлар билан кесимлари ҳам гиперболадан иборат. Умуман, юқоридаги бир паллали гиперболоид тенгламасини текширишдаги барча мулоҳазалар икки паллали гиперболоидга ҳам тегишлидир.

Хусусий ҳолда, $b = c$ бўлса, (8.18) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

кўринишини олади ва у

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

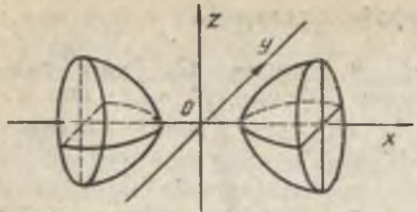
гиперболанинг ($y = 0$ текисликда) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлади. Агар (8.18) тенглама

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (8.21)$$

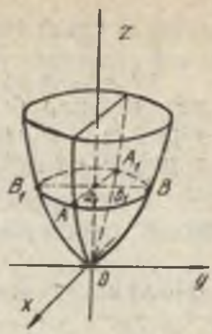
ёки

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (8.22)$$

кўринишда бўлса, у ҳолда булар ҳам икки паллали гиперболоид бўлиб, (8.21) тенглама учун Ox, Oy ўқлар; (8.22) тенглама учун Ox, Oz ўқлар мавҳум ўқлар бўлади.



82- чизма



83- чизма

Мисол. Декарт координаталар системасида M_1 (0; 0; 4) ва M_2 (0; 0; —4) нуқталар берилган. Фазода шундай нуқталар тўплами топилсинки, уларнинг ҳар биридан M_1, M_2 нуқталаргача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати 6 га тенг бўлсин.

Ечиш. Фараз қилайлик, $M(x; y; z)$ масала шартини қаноатлантирадиган нуқта бўлсин, яъни

$$|\rho(M_1, M)-\rho(M_2, M)|=6.$$

Бу тенгликни координаталарда ёзамиз:

$$\left|\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}-\sqrt{x^2+y^2+(z+4)^2}\right|=6$$

ёки

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}=\pm 6+\sqrt{x^2+y^2+(z+4)^2}.$$

Кейинги тенгликнинг ҳар иккала қисмини квадратга кўтарамиз:

$$x^2+y^2+z^2-8z+16=$$

$$=36+x^2+y^2+z^2+8z+16\pm 12\sqrt{x^2+y^2+(z+4)^2}$$

ёки

$$\pm 3\sqrt{x^2+y^2+(z+4)^2}=4z+9.$$

Яна бир марта квадратга кўтариб соддалаштирамиз:

$$-\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{7}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Ҳосил бўлган тенглама икки паллали гиперболоидни аниқлайди.

8- §. Параболоидлар

Декарт координаталар системасида Oz ўқига симметрик парабола берилган бўлсин. Унинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт *эллиптик параболоид* деб аталади ва у

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, (p>0, q>0) \tag{8.23}$$

тенглама билан ифодаланади. Параболанинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт *гиперболик параболоид* деб аталади ва у

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, (p>0, q>0) \tag{8.24}$$

тенглама билан ифодаланади. Бу сиртларни ўрганамиз.

I. **Эллиптик параболоид.** Эллиптик параболоиднинг шаклини ва унинг баъзи геометрик хоссаларини (8.23) тенгламани текшириш орқали аниқлаймиз (83- чизма).

1. Эллиптик параболоид иккинчи тартибли сирт бўлиб, бу сирт координаталар бошидан ўтади.

2. Эллиптик параболоиднинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқлаймиз.

а) Ox ўқ ($y=0$, $z=0$) билан кесишиш нуқтаси:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \\ y=0, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{p}=0 \Rightarrow x=0.$$

Демак, изланаётган нуқта: O (0; 0; 0);

б) Oy ўқ ($x=0$, $z=0$) билан кесишиш нуқтаси:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \\ x=0, \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{q}=0 \Rightarrow y=0.$$

Демак, изланаётган нуқта: O(0; 0; 0);

в) Oz ўқ ($x=0$, $y=0$) билан кесишиш нуқтаси:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \\ x=0, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 2z=0 \Rightarrow z=0.$$

Изланаётган нукта: $O(0;\ 0;\ 0)$. Демак, эллиптик параболоид координата ўқлари билан фақат координаталар бошидагина кесишади.

3. Эллиптик сиртни координата текисликлари ва уларга параллел текисликлар билан кесилганда ҳосил бўладиган кесимни аниқлаймиз.

а) Oxy текислик билан кесишиш чизиғи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \\ z=0, \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0,$$

яъни (0; 0) нуқта бўлади;

б) Oxz текислик билан кесишиш чизиғи

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{p}=2z \Rightarrow x^2=2pz, \text{ яъни}$$

симметрия ўқи Oz бўлган параболадан иборат;

в) Oyz текислик билан кесишиш чизиғи ҳам параболадан ($y^2=2qz$) иборат;

г) $z=h$ текислик билан кесишиш чизиғини аниқлаймиз:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z, \\ z=h \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h. \qquad (A)$$

(А) тенглама учун қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $h=0$ бўлса, $z=0$ бўлиб, юқоридаги а) ҳол такрорланади;

2) $h<0$ бўлса, $p>0$, $q>0$ бўлиб, (A) тенглама ўринли бўлмайди (мавҳум чизиққа эга бўламиз);

3) $h>0$ бўлса, (А) тенглама

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1$$

кўринишни олади ва бу тенглама $z=h$ текисликдаги эллипсни беради.

Бундан ташқари $x=h$ ва $y=h$ текисликлар билан кесишиш чизиғи параболадан иборат бўлади.

4. x, y ўзгарувчилар (8.23) тенгламада жуфт даражада қатнашганлиги учун эллиптик параболоид Oxz, Oyz текисликларга нисбатан симметрик жойлашади. Бу текисликларнинг кесишишидан ҳосил бўлган Oz тўғри чизиқ эллиптик параболоиднинг ўқи деб аталади. Эллиптик параболоид 83- чизмада тасвирланган. Хусусий ҳолда $p=q$ бўлса, (8.23) тенглама $x^2+y^2=2pz$ кўринишда бўлиб, у айланма параболоиддан иборат бўлади.

Ўқлари Ox ёки Oy дан иборат эллиптик параболоидлар мос равишда

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{p}=2y$$

тенгламалар билан ифодаланади.

II. **Гиперболик параболоид.** (8.24) тенгламаси бўйича гиперболик параболоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

1. Гиперболик параболоид иккинчи тартибли сирт бўлиб координаталар бошидан ўтади.

2. Координата ўқлари билан фақат координаталар бошида кесишади.

3. а) Бу сирт Oxy текислик билан кесилганда кесимда иккита кесишувчи тўғри чизиқ ҳосил бўлади;

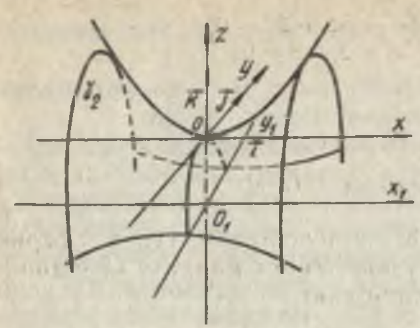
б) Oxz текислик билан кесилганда эса кесимда симметрия ўқи Oz бўлган $x^2=2pz$ парабола ҳосил бўлади;

в) Oyz текислик билан кесилганда кесимда симметрия ўқи Oz дан иборат $y^2=2qz$ парабола ҳосил бўлади.

4. $z=h$ текислик билан кесилганда кесимда:

а) $h>0$ шартда $\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1$ гипербола;

б) $h<0$ шартда $-\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1$ гипербола ҳосил бўлади. $x=h$, $y=h$ текисликлар билан кесилганда кесимда ҳар доим парабола ҳосил бўлади. Шу маълумотларга асосланиб гиперболик параболоидни 84- чизмадагидек сирт кўринишда тасаввур қилиш



84- чизма

мумкин, баъзан бу сиртни *«эгарсимон»* сирт деб ҳам юритилади.

Мисол. $x^2 - y^2 = 12z$ тенглама билан берилган сиртнинг шаклини аниқланг.

Ечиш. Берилган сирт тенгламасини

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 2z$$

кўринишда ёзиб оламиз. Демак, берилган тенглама айланма гиперболик параболоидни тасвирлайди.

МАШҚЛАР

1. Қуйидаги сфераларнинг маркази ва радиусини аниқланг:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 2z - 18 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 6z = 0$;
д) $x^2 + y^2 + z^2 + 20z = 0$;
е) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z = 0$.

2. Қуйидаги тенгламалар қандай сиртларни тасвирлайди:

а) $25x^2 + 3y^2 - 15z^2 - 75 = 0$;
б) $4x^2 + 25y^2 + 10z^2 - 100 = 0$;
в) $4x^2 + y^2 - 8z = 0$;
г) $4x^2 + 6z^2 - 24 = 0$;
д) $z^2 + 2z - 4x + 1 = 0$;
е) $9y^2 - 16z^2 + 64z - 18y - 199 = 0$;
ж) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$;
з) $3x^2 + 4y^2 - 12z^2 = 0$.

3. A (3; -1; 2) нуқта қуйидаги тенгламаси билан берилган сфераларнинг сиртида, ичида ёки ташқарисида ётишини аниқланг:

а) $(x+4)^2 + (y-11)^2 + (z+12)^2 = 625$;
б) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$;
в) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 25$;

г) $x^2+y^2+z^2-8x+6y-4z+22=0$;
д) $x^2+y^2+z^2-2x+3y-z-3=0$.

4. Қуйидаги

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2+z^2=28, \\ 4x+y-z-9=0 \end{cases}$$

айланадан ва A (7; —3; 1) нуқтадан ўтувчи сферик сиртнинг тенгламасини тузинг. Унинг маркази координаталарини ва радиусини аниқланг.

5. Ушбу

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y+11}{5}=\frac{z-9}{-4}$$

тўғри чизиқ билан $x^2+y^2+z^2+4x-2y+10z-19=0$ сферанинг кесишиш нуқтасини топинг.

6. Oxz текисликдан 3 бирлик узоқликда ва A (1; 3; —2) нуқтадан 4 бирлик узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

7. $x=z$ тўғри чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини тузинг.

8. Қуйидаги тенглама қандай сиртни тасвирлайди:

$$3x^2+3y^2+81z^2-324=0?$$

9. Ушбу $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{25}=1$ эллипсоиднинг

$$z=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ x=0,\ y=0$$

текисликлар билан кесишишидан ҳосил бўлган кесимларни топинг.

10. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}=1$ эллипсоиднинг A (2; 3; 5) нуқтасига ўтказилган уринма текислик тенгламасини тузинг.

11. $x^2+2y^2+20y-z^2+34=0$ тенглама билан берилган сиртнинг шаклини аниқланг.

12. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ бир паллали гиперболоидга A (—3; 2; 4) нуқтада уринувчи текислик тенгламасини тузинг.

13. Ушбу

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

айланадан ва $A(a;a;a)$ нуқтадан ўтувчи сферик сиртнинг тенгламасини ёзинг.

14. $4x-3y+7z-20=0$ ва $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлардан ҳосил бўлган тетраэдрнинг ичига чизилган сферик сиртнинг тенгламасини ёзинг.

15. Ушбу $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{15}-\frac{z^2}{20}=1$ тенглама қандай сиртни аниқлайди? Унинг $z=2$ текислик билан кесишишидан қандай чизиқ ҳосил бўлади?

16. Қуйидаги сиртлар билан тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топинг:

а) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ ва $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ ва $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{4}$;

в) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=z$ ва $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{2}$;

г) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=z$ ва $\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$.

17. Ушбу $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-1$ икки паллали гиперболоидни координата текисликларига параллел текисликлар билан кесилганда ҳосил бўладиган кесимларни текширинг.

18. $x^2-y^2=12z$ тенглама билан берилган сиртнинг шаклини ва бу сиртни координата текисликлари билан кесилганда ҳосил бўладиган кесимларни аниқланг.

19. m нинг қандай қийматида $x+mz-1=0$ текислик $x^2+y^2-z^2=-1$ икки паллали гиперболоидни кесганда кесимда: а) эллипс; б) гипербола ҳосил бўлишини аниқланг.

20. m нинг қандай қийматида $x+my-2=0$ текислик $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$ эллиптик параболоидни кесганда кесимда: а) эллипс; б) парабола ҳосил бўлишини аниқланг.

9-БОБ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРАГА ДОИР МАСАЛАЛАР ЕЧИШ

Мазкур бобда юқорида баён қилинган дастур материалини мустаҳкамлаш учун ечишга доир мисол ва масалалар келтирилган. Кўп масалалар ечилишлари билан берилган. Масалаларнинг кўпчилиги бир неча йил давомида Тошкент Давлат олий техника дорилфунунида ва бошқа техника институтларида олий математикадаи ўтказиб келинаётган олимпиада вариантларидаги масала ва мисоллардан бўлиб, талабадан чуқур билим ва маълум тайёргарлик талаб этади.

1. Қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & n+2 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 2n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

бунда n — жуфт сон.

Ечиш. Агар $k=1,2,\dots,\frac{n}{2}$ қийматлари учун дастлаб k ва $(n-k)$ сатрларнинг, сўнгра k ва $(n-k)$ устунларнинг ўринларини мос равишда алмаштирсак, бизга маълумки, бундай алмаштиришдан детерминант қиймати ўзгармайди. Аммо диагоналида квадрат матрицалардан иборат блок-диагоналли кўринишдаги матрицага айланади. Бундай матрица детерминанти иккинчи тартибли матрицаларнинг детерминантлари кўпайтмасига тенг ва у

$$\begin{pmatrix} k & n+k \\ 2n-k+1 & n-k+1 \end{pmatrix}$$

кўринишдаги матрицадан иборат. Бундай кўринишдаги ҳар қандай матрица k га боғлиқ бўлмайди ва у $-n(2n+1)$ га тенг. Демак, берилган детерминант

$$[-n(2n+1)]^{\frac{n}{2}}$$

га тенг.

2. Нолга тенг бўлмаган n- тартибли A детерминантнинг элементлари ± 1 сонлардан иборат бўлса, $n \geqslant 3$ учун

$$|A| \leqslant (n-1) \cdot (n-1)!$$

тенгсизлик ўринли эканини исбот қилинг.

Исбот. Масала шартига кўра $|A| \neq 0$ бўлгани учун, $n=3$ бўлганда ихтиёрий детерминантни унинг элементларининг абсолют қийматини ўзгартирмаган ҳолда сатр ва устунларининг ўринларини алмаштириб, сўнгра сатрларини -1 га кўпайтириб,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \text{ ёки } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

кўринишлардан бирига келтириш мумкин.

Демак, $n=3$ учун $|A| \leqslant 4 = (3-1)(3-1)!$ тенгсизлик ўринли. Фараз қилайлик, $(n-1)$-тартибли ҳамма детерминантлар учун юқоридаги тенгсизлик ўринли бўлсин. Энди n-тартибли детерминант учун ҳам тенгсизлик тўғрилигини кўрсатамиз. Унинг учун, элементлари ± 1 бўлган A детерминантни ихтиёрий сатри бўйича ёямиз:

$$|A| = |\pm M_{i1} \pm M_{i2} \pm \ldots \pm M_{in}| \leqslant |M_{i1}| +$$

$$+ |M_{i2}| + \ldots + |M_{in}| \leqslant n(n-2)(n-2)!$$

$$n(n-2) < (n-1)^2$$

ни эътиборга олсак,

$$|A| \leqslant (n-1)(n-1)^2$$

келиб чиқади. Тенгсизлик исбот бўлди.

3. $n \geqslant 3$ ва $c_{11} \neq 0$ бўлса,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{n}^{n-2}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{21} & c_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{2n} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{n1} & c_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{n1} & c_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{n1} & c_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

тенглик ўринли эканини исбот қилинг.

Исбот. Детерминантнинг i-сатрини $\frac{c_{i1}}{c_{11}}$ га кўпайтириб, ундан биринчи сатрини айирсак, натижада қуйидаги детерминантга эга бўламиз, яъни

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} - c_{12}\cdot\frac{c_{21}}{c_{11}} & \cdots & c_{2n} - c_{1n}\cdot\frac{c_{21}}{c_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{n2} - c_{12}\cdot\frac{c_{n1}}{c_{11}} & \cdots & c_{nn} - c_{1n}\cdot\frac{c_{n1}}{c_{11}} \end{vmatrix}$$

Бу детерминантнинг биринчи устун элементлари бўйича ёйилмасини ёзамиз:

$$c_{11}\cdot \begin{vmatrix} c_{22} - c_{12}\cdot\frac{c_{21}}{c_{11}} & \cdots & c_{2n} - c_{1n}\cdot\frac{c_{21}}{c_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n2} - c_{12}\cdot\frac{c_{n1}}{c_{11}} & \cdots & c_{nn} - c_{1n}\cdot\frac{c_{n1}}{c_{11}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{c_{11}}{c_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21} & \cdots & c_{2n}c_{11} - c_{1n}c_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n2}c_{11} - c_{12}c_{n1} & \cdots & c_{nn}c_{11} - c_{1n}c_{n1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{c_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{2n} \end{vmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{n1} & c_{n2} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{1n} \\ c_{n1} & c_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Демак, тенглик ўринли экан.

4. Ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \leqslant \sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2} \times$$

$$\times \sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2} \cdot \sqrt{a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2}$$

тенгсизлик ўринли эканини исбот қилинг.

Исбот. $\vec{a}_k=\{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}\}$ (бунда $k=\overline{1,3}$) векторларни қараймиз. Бу векторлар учун қуйидаги тенгсизликни ёзиш мумкин:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \leqslant |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot |\vec{a}_3|.$$

Тенгсизликнинг чап томони $\vec{a}_k$ векторларнинг аралаш кўпайтмасидан, ўнг томони эса уларнинг узунликлари кўпайтмасидан иборат. Бизга маълумки, параллелепипеднинг ҳажми унинг қирраларининг кўпайтмасидан (аралаш кўпайтмадан) катта эмас. Шунинг учун юқоридаги тенгсизлик ўринлидир.

5. Учинчи тартибли A квадрат матрицанинг детерминанти 16 га, ҳар бир устундаги элементлар йиғиндиси 4 га, бош диагоналдаги элементлар йиғиндиси 8 га тенг. A матрицанинг барча хос сонларини топинг.

Ечиш. Масала шартидан $A - 4E$ (бунда E — учинчи тартибли бирлик квадрат матрица) матрицанинг ҳар бир устуни элементлари йиғиндиси нолга тенглиги келиб чиқади.

Демак, $A \times 4E$ матрицанинг сатрлари орасида чизиқли боғланиш мавжуд, шунинг учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\det(A-4E)=0.$$

Бундан, 4 сони A матрицанинг хос сони эканлиги келиб чиқади. Қолган икки хос сонни λ_1 ва λ_2 деб белгисак, у ҳолда масала шартига кўра қуйидаги тенгликларни ёзиш мумкин:

$$\lambda_1+\lambda_2+4=8 \text{ ва } 4\lambda_1 \cdot \lambda_2=16.$$

Булардан $\lambda_1=\lambda_2=2$ экани келиб чиқади.

6. A ва B лар n-тартибли ҳақиқий элементли квадрат матрицалар бўлсин. Агар A ва B матрицалар коммутатив (яъни $AB=BA$) бўлса,

$$\det(A^2+B^2)\geqslant 0$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилинг. Коммутатив хоссага эга бўлмаган матрицалар учун $\det(A^2+B^2)<0$ бўлишига мисол келтиринг.

Ечиш. Агар $AB=BA$ бўлса, A^2+B^2 йиғиндини $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$ кўринишда ёзиш мумкин (бунда $i^2=-1$). $z=\det(A+iB)$ бўлсин, у ҳолда детерминантни ҳисоблаш қоидасига кўра: $\det(A-iB)=\bar{z}$. Демак,

$$\det(A^2+B^2)=\det(A+iB)\cdot\det(A-iB)=$$
$$=z\cdot\bar{z}=|z|^2\geqslant 0.$$

Энди $AB\neq BA$ бўлганда $\det(A^2+B^2)<0$ бўлишини қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

Мисол.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

бўлсин, у ҳолда

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix};\ BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

бўлади.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix};\ B^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

бўлиб,

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}=4-16=-12<0.$$

7. J_n — ҳамма элементлари бирга тенг бўлган n-тартибли квадрат матрица. Агар E n-тартибли бирлик квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$(E-J_n)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}J_n$$

тенглик ўринли эканлигини исбот қилинг (бу ерда $(E-J_n)^{-1}$ матрица $(E-J_n)$ матрицага тескари матрица).

Исбот. Берилган тенглик тўгри деб, унинг иккала қисмини $(E-J_n)$ га кўпайтирамиз. Тескари матрицанинг таърифига кўра

$$\left(E-\frac{1}{n-1}J_n\right)(E-J_n)=E$$

бўлади ва қавсларни очиб чиқсак,

$$E-J_n-\frac{1}{n-1}J_n+\frac{1}{n-1}J_n^2=E \text{ ёки } J_n^2=nJ_n$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликнинг ўринли эканини кўрсатамиз:

$$J_n^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}=nJ_n.$$

Демак, $J_n^2=nJ_n$ ўринли бўлгани учун берилган тенглик ҳам ўринли бўлади.

8. A ва B — иккинчи тартибли квадрат матрицалар бўлсин. A матрицанинг хос сонлари 1 ва 3, B матрицанинг хос сонлари эса 2 ва 4 га тенглиги маълум. $A+B$ матрицанинг хос сонлари 5 ва 6 дан иборат бўлиши мумкинми? 1 ва 9 дан-чи? Мисол келтиринг ёки мумкин эмаслигини исбот қилинг.

Ечиш. $A+B$ матрицанинг хос сонлари A ва B матрицаларнинг хос сонлари йиғиндисига тенг бўлгани учун $A+B$ нинг хос сонлари $1+3+2+4=10$. Энди $5+6\neq 10$ бўлгани учун 5 ва 6 сонлари $A+B$ нинг хос сонлари бўлмайди.

1 ва 9 сонлари $A+B$ нинг хос сонлари бўлишини кўрсатамиз:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 4 \end{pmatrix}$$

бўлсин. У ҳолда a ва b сонларни шундай танлаш керакки,

$$\det(A+B)=1\cdot 9=9$$

бўлсин (бу ҳолда детерминантнинг қиймати матрицанинг хос сонлари кўпайтмасига тенг). Масалан, $a=3$, $b=4$ қийматларни олсак,

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=21-12=9$$

бўлади. Демак, 1 ва 9 сонлари $A+B$ нинг хос сонлари бўлади.

9. A ва B матрицалар

$$A^2=A,\ B^2=B \text{ ва } AB=BA$$

шартларни қаноатлантиради.

$\det(A-B)$ фақат учта -1, 0, 1 қийматлардан бирини қабул қилишини исбот қилинг.

Ечиш. $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2=A-2AB+B$. $(A-B)^3=(A-B)(A-2AB+B)=A^2-2A^2B+AB-$ $-Ba+2BAB-B^2=A-2AB+AB-AB+2AB-B=A$ $-B$, яъни $(A-B)^3=A-B$, шунинг учун $\det(A-B)^3=[\det(A-B)]^3=\det(A-B)$.

$x^3=x$ тенглама -1, 0, 1 ечимларга эга бўлгани учун $\det(A-B)$ ҳам фақат -1, 0, 1 қийматларни қабул қилади.

10. A — элементлари комплекс сонлардан иборат n-тартибли квадрат матрица, яъни $A=B+iC$ бўлсин, бу ерда B ва C — элементлари ҳақиқий сонлардан иборат матрицалар.

Элементлари B ва C матрицалардан тузилган $2n$-тартибли A матрица тузамиз:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

$\det\tilde{A}=|\det A|^2$ эканлигини исботланг.

Исбот. $\tilde{A}$ матрицанинг k-устунини i га кўпайтириб, $(n+k)$ устунга қўшамиз (бунда $k=1, 2, ..., n$). У ҳолда қуйидаги матрицага эга бўламиз:

$$\begin{pmatrix} B & iB-C \\ C & B+iC \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & iA \\ C & A \end{pmatrix}.$$

Бу ҳосил бўлган матрицанинг $(n+k)$ сатрини i га кўпайтирамиз ва уни k-сатрдан айирамиз. Натижада

$$\begin{pmatrix} B-iC & O \\ C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & O \\ C & A \end{pmatrix}$$

матрицага эга бўламиз. Бунда $\bar{A}$ — элементлари A матрицанинг мос элементларига қўшма комплекс сон бўлган матрицалардир. Демак,

$$\det\bar{A} = \det\bar{A}\cdot\det A = \det A\cdot\det A = |\det A|^2.$$

11. Квадрат матрицанинг элементлари ўзгарувчи z нинг комплекс сонли кўпҳадларидан иборат. Ихтиёрий комплекс сон учун $A(z)$ матрица $A^{-1}(z)$ тескари матрицага эга. $A^{-1}(z)$ матрицанинг элементлари ҳам ўзгарувчи z комплекс сонли кўпҳадлардан иборат бўлишини исбот қилинг.

Исбот. $\det A(z)$ ўзгарувчи z га нисбатан кўпҳад бўлиб, у ҳеч вақт нолга тенг бўлмайди. Алгебранинг асосий теоремасига кўра, ҳар қандай n-даражали кўпҳад n та илдизга эга бўлади. Демак,

$$\det A(z) = \text{const}.$$

$A(z)$ матрицанинг барча алгебраик тўлдирувчилари ҳам z га боғлиқ кўпҳадлардан иборат бўлгани учун $A^{-1}(z)$ матрицанинг элементлари z га боғлиқ кўпҳадлардан иборат бўлади.

12. Қандай матрицалар учун AB ва BA кўпайтма маънога эга ва қачон $AB = BA$ тенглик ўринли бўлади?

Ечиш. A матрица $(m\times n)$ ўлчамли, B матрица $(s\times t)$ ўлчамли бўлсин. Агар $n = s$ бўлса, AB кўпайтма; $t = m$ бўлганда BA кўпайтма маънога эга бўлади, яъни иккита матрицани ўзаро кўпайтириш мумкин.

Агар A ва B матрицалар бир хил ўлчамли квадрат матрицалар бўлсагина, $AB = BA$ тенглик ўринли бўлади.

13. Агар X учинчи тартибли квадрат матрица бўлса,

$$X^2 + 4X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицали тенглама ечимга эга бўладими?

Ечиш. Матрицали тенгламанинг иккала қисмига $4E$ ни қўшамиз. Натижада

$$(X+2E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

кўринишдаги матрицали тенгламага эга бўламиз. Бу матрицали тенглама чап қисмининг детерминанти

$$\det(X+2E)^2=[\det(X+2E)]^2\geqslant 0$$

бўлиб, ўнг қисмининг детерминанти эса — 40 га тенг бўлгани учун берилган матрицали тенглама ечимга эга эмас.

14. Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\frac{1}{2}x_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=\frac{1}{2}x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=\frac{1}{2}x_n \end{cases}$$

система берилган бўлсин. Агар ҳамма i, j лар учун a_{ij} — бутун сонлар бўлса, у ҳолда система ягона $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ ечимга эга бўлишини исбот қилинг.

Исбот. Системанинг детерминанти:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{2} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{2} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\frac{1}{2} \end{vmatrix}=P\left(\frac{1}{2}\right),$$

бунда

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_n,$$

бу ерда b_i — бутун сон. Агар $P(\frac{1}{2})$ нолга тенг бўлса, у ҳолда

$$(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}+b_1\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+b_n=0.$$

Тенгликнинг ҳамма ҳадларини 2^n га кўпайтирамиз:

$$(-1)^n+2b_1+\ldots+2^nb_n=(-1)^n+2N=0,$$

бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки N бутун сон. Шунинг учун $D\neq 0$ бўлиб, система $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ ягона ечимга эга бўлади.

15. Ушбу
$$\begin{cases} x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1, \\ -x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1, \\ -x_1-x_2+x_4+\ldots+x_{n-1}+x_n=1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1-x_2-x_3-\ldots-x_{n-1}=1 \end{cases}$$
система n қандай натурал сон бўлганда ечимга эга бўлади.

Ечиш. Биринчи тенгламадан иккинчисини, иккинчисидан учинчисини ва ҳоказо айирсак,

$$x_1+x_2=0;\ x_2+x_3=0,\ \ldots,\ x_{n-1}+x_n=0$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бундан

$$x_1=-x_2=x_3=\ldots=(-1)^{n-1}-x_n.$$

У ҳолда биринчи тенгламадан n жуфт бўлганда $x_n=1$, n тоқ бўлганда, $0=1$ ларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, n жуфт бўлганда система $x_k=(-1)^k$ ечимга эга бўлади, n тоқ бўлганда ечимга эга бўлмайди.

16. Агар $P_k(x)=a_{k_1}+a_{k_2}x+a_{k_3}x^2+\ldots+a_{k_n}x^{n-1}$ (бунда $k=1, 2, 3, \ldots, n$) кўпҳадлар умумий илдизга эга бўлса, $A=(a_{ij})_{ij-1}^n$ матрицанинг детерминанти нолга тенглигини исбот қилинг.

Исбот. Фараз қилайлик, $\det A\neq 0$ бўлсин, у ҳолда умумий илдиз $x_0\neq 0$ бўлади, акс ҳолда $a_{k_1}=0$ бўлиб, A матрицанинг биринчи устуни фақат ноллардан иборат бўлади ва, демак, $\det A=0$. Шунинг учун $\det A$ ни $1\cdot x_0\cdot x_0^2\ldots x_0^{n-1}$ га кўпайтириш ёки бўлиш мумкин:

$$\det A=\frac{1}{1\cdot x_0\cdot x_0^2\ldots x_0^{n-1}}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}x_0\ a_{13}\ x_0^2\ldots a_{1n}\ x_0^{n-1} \\ a_{21}\ a_{22}\ x_0a_{23}\ x_0^2\ldots a_{2n}\ x_0^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ x_0\ a_{n3}\ x_0^2\ldots a_{nn}x_0^{n-1} \end{vmatrix}$$

Детерминантнинг хоссасига кўра ихтиёрий устунни қолган барча устунлар йиғиндиси билан алмаштирганда детерминантнинг қиймати ўзгармайди. x_0 — умумий илдиз бўлгани учун устунлар йиғиндисидан иборат устун ноллардан иборат бўлади. Бу эса $\det A \neq 0$ деган фараздан келиб чиқди. Демак, $\det A = 0$.

17. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ — квадрат матрица бўлсин, бунда a, b, c — ҳақиқий сонлар. Бу сонларни шундай танланганки, A ни n-даражага (n — натурал сон) кўтарилганда у $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ кўринишга келсин.

Ечиш. A квадрат матрицани n-даражага кўтарсак, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & * \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ ни ҳосил қиламиз. Агар * нинг ўрнида 0 бўлса, у ҳолда $a = \pm 1$ ва $c = \pm 1$ ни олиш мумкин.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлса, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ва бундан $b = 0$ келиб чиқади.

б) $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлса,

$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ва бундан $b = 0$ келиб чиқади.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ёки $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлса,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлади. Демак,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишлардан бири бўлади.

18. $\vec{x}\times(\vec{a}\times\vec{x})+\vec{b}\times\vec{x}=0$ вектор тенглама берилган бўлсин. Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун вектор тенглама нолдан фарқли ечимга эга бўлишини исбот қилинг.

Исбот. Агар $\vec{a}=\vec{b}=0$ бўлса, у ҳолда булар берилган вектор тенгламани қаноатлантиради. Агар $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}\neq 0$ бўлса, $\vec{x}=\vec{b}$; $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}=0$ бўлса, $\vec{x}=\vec{a}$ деб олиш мумкин. Агар $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$ бўлса, у ҳолда берилган тенгламага тенг кучли қуйидаги тенгламани ёзамиз:

$$\vec{x}\times(\vec{a}\times\vec{x}-\vec{b})=0.$$

Бу тенглик эса ўз навбатида $\vec{x}$ ва $(\vec{a}\times\vec{x}-\vec{b})$ векторларнинг коллинеарлигини билдиради. Уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lambda\vec{x}=\vec{a}\times\vec{x}-\vec{b}.$$

Агар бу тенглама нолдан фарқли ечимга эга бўлса, берилган тенглама ҳам нолдан фарқли ечимга эга бўлади.

$\lambda\vec{x}-\vec{a}\times\vec{x}=-\vec{b}$ вектор тенглама учта уч номаълумли биринчи даражала тенгламалар системасига тенг кучли. Бу системанинг детерминанти λ га нисбатан учинчи даражали кўпҳад бўлиб, у λ нинг бирор қийматида нолдан фарқли ягона ечимга эга бўлади.

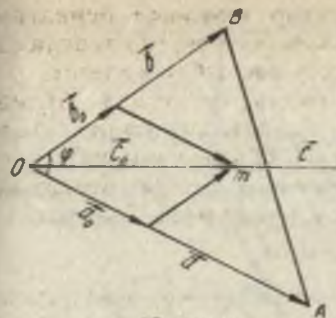
19. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган. $|\vec{x}|=p$ бўлган ва $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг бурчак биссектрисаси бўйича йўналган $\vec{x}$ векторни тузинг.

Ечиш. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга мос равишда коллинеар бўлган $\vec{a}_0$ ва $\vec{b}_0$ бирлик векторларни оламиз. Бизга маълумки,

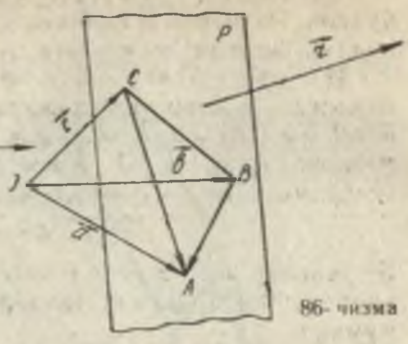
$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\quad \vec{b}_0=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

$\vec{c}_0=\vec{a}_0+\vec{b}_0$ вектор томонлари $\vec{a}_0$ ва $\vec{b}_0$ векторлардан иборат ромбнинг диагонали бўлгани учун у φ бурчакнинг биссектрисаси бўйича йўналгандир (85- чизма). Демак, $\vec{x}=\lambda\vec{c}_0$ ва $|\vec{x}|=p$ ни эътиборга олиб, $|\lambda|=\frac{p}{|\vec{c}_0|}$ ни ҳосил қиламиз. $\lambda=\frac{p}{|\vec{c}_0|}$ деб, $\vec{x}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ташкил этган ички бурчак биссектрисаси бўйича йўналгани учун:

$$\vec{x}=\frac{p}{|\vec{a}_0+\vec{b}_0|}(\vec{a}_0+\vec{b}_0)=\frac{p}{\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right).$$



85- чизма



86- чизма

20. Битта текисликда ётмаган учта $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор бирор нуктадан ўтказилган. Бу векторларнинг учидан ўтказилган текисликка $\vec{r}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ вектор перпендикуляр эканлигини исбот қилинг.

Исбот. $\vec{r}$ векторни $\vec{a}-\vec{b}$ ва $\vec{a}-\vec{c}$ векторларга перпендикуляр эканлигини исботлаш етарлидир, яъни (86- чизма): $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{r}=\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}(\vec{c}\times\vec{a})-$ $-\vec{b}(\vec{a}\times\vec{b})-\vec{b}(\vec{b}\times\vec{c})-\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})-\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})$, бундан $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b})=0$; $\vec{a}(\vec{c}\times\vec{a})=0$; $\vec{b}(\vec{a}\times\vec{b})=0$; $\vec{b}(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

Аммо

$$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})-\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})-(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}=0.$$

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{r}=0$ эканлиги ҳам худди шундай исбот қилинади.

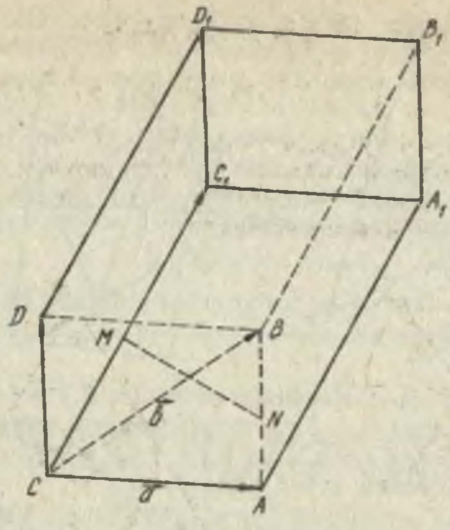
21. $OABC$ тетраэдр $\overline{OA}=\vec{a}, \overline{OB}=\vec{b}, \overline{OC}=\vec{c}$ векторлардан тузилган. OC ва AB қирралари орасидаги энг қисқа масофа бўлган кесманинг узунлигини аниқланг.

Ечиш. 87- чизмада кўрсатилганидек, тетраэдрни параллелепипед билан тўлдирамиз. У ҳолда OC ва AB қирралари орасидаги энг қисқа масофа $|MN|$ кесма бўлиб, у асоси ODD_1C бўлган параллелепипеднинг баландлигидан иборат. Демак,

$$V_{\text{пар}}=|MN|\cdot S_{ODD_1C}\Rightarrow|MN|=\frac{V_{\text{пар}}}{S_{ODD_1C}}.$$

Аммо

$$V_{\text{пар}}=|\overline{OA}\ \overline{OD}\ \overline{OC}\,|=|\overline{OA}\times(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}|=$$
$$=|(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{a})\vec{c}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|.$$
$$S_{ODD_1C}=|\overline{OC}\times\overline{OD}|=|\vec{c}\times(\vec{b}-\vec{a})|=|(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c}|.$$



87- чизма

Шундай қилиб, энг қисқа масофа:

$$|MN| = \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c}|}.$$

Худди шунингдек, BC ва OA, AC ва OB орасидаги масофалар мос равишда

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|}{|(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}|} \text{ ва } \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|}{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|} \text{ каби}$$

бўлади.

22. Айланада бешта нуқта берилган. Учта нуқтанинг массалари марказидан қолган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиққа перпендикуляр туширилган. Шундай усул билан ўтказилган 10 та перпендикуляр чизиқлар битта нуқтада кесишишини исбот қилинг.

Исбот. Аниқлик учун иккита M_1 ва M_2 нуқтани танлаб оламиз (88- чизма). У ҳолда перпендикуляр тўғри чизиқ $\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)$ вектордан иборат бўлиб,

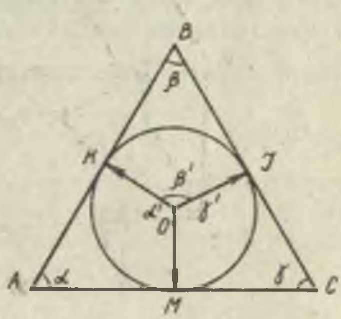
$$\frac{1}{3}(\vec{r}_3+\vec{r}_4+\vec{r}_5)$$

вектор ўтган O нуқтадан ўтади. Шунинг учун

$\frac{1}{2}(\vec{p}_1+\vec{r}_2)$ вектордан иборат тўғри чизиқ

$\frac{1}{3}(\vec{r}_3+\vec{r}_4+\vec{r}_5)+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ (\vec{r}_1+\vec{r}_2)=\frac{1}{3}(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3+\vec{r}_4+\vec{r}_5)$ радиус-вектор ўтган нуқтадан ҳам ўтади. Охирги ифодада барча векторлар тенг имкониятли бўлгани учун, ихтиёрий икки нуқта танлаб олинганда ҳам перпендикуляр чизиқ битта O нуқтада кесишади.

88- чизма



89- чизма

23. Ихтиёрий учбурчакнинг α, β, γ бурчаклари учун $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$ тенгсизлик ўринли эканлигини исбот қилинг.

Исбот. Учбурчакка r радиусли ички айлана чизамиз ва айлананинг маркази билан унинг уриниш нуқталарини бирлаштирувчи векторлар ўтказамиз (89- чизма). У ҳолда

$$\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma+\gamma'=\pi.$$

Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси таърифига кўра:

$$(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OM})(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OM})=$$
$$=|\overrightarrow{OK}|^2+|\overrightarrow{OI}|^2+|OM|^2+2(\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OI})+2(\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OM})+$$
$$+2(\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{OM})=3r^2+2r^2(\cos\alpha'+\cos\beta'+\cos\gamma')\geqslant 0.$$
$$\cos\alpha'+\cos\beta'+\cos\gamma'\geqslant-\frac{3}{2}.$$

Аммо $\alpha'=\pi-\alpha$; $\beta'=\pi-\beta$, $\gamma'=\pi-\gamma$. Ўрнига қўйсак, талаб қилинаётган тенгсизлик келиб чиқади:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}.$$

24. $A(2;\ 0;\ 1)$ нуқта ва $x=t-1,\ y=3t+4,\ z=-4t$ тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

Е ч и ш. Берилган тўғри чизиқ устида t параметрнинг иккита, масалан $t=0$ ва $t=1$ қийматларига мос келувчи иккита B ва C нуқталар оламиз:

$$B(-1;\ 4;\ 0);\ C(0;\ 7;\ -4).$$

Энди $A(2;\ 0;\ 1)$; $B(-1;\ 4;\ 0)$; $C(0;\ 7;\ -4)$ нуқталар орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузамиз.

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -2 & 7 & -5 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}(x-2)-\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}(z-1)=0.$$

$$-13(x-2)-13y-13(z-1)=0.$$
$$x+y+z-3=0.$$

25. Дала ўрмон билан тўғри чизиқ бўйлаб чегарадош. Ўрмондан $2a$ масофада далада қуён турибди. Қуён билан ўрмон ўртасида (a масофада) эса бўри турибди. Агар қуён бўридан қочиб ўрмонга тўғри чизиқ бўйлаб югурса ва унинг тезлиги бўриникидан икки марта катта бўлса, қуённинг хавфсизлик маршрути катталиги қайси миқдордан кичик бўла олмаслигини топинг.

Е ч и ш. Далада ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқта танлаб оламиз (90- чизма). Бу нуқта қуйидаги хоссага эга бўлиши керак. M дан бўрининг дастлабки ҳолатигача бўлган масофа M дан қуённинг дастлабки ҳолатигача бўлган масофанинг ярмидан катта бўлмаган нуқталар тўпламй бўлиши керак. Агар координаталар системасини 90- чизмада кўрсатилгандек қилиб танлаб олинса, у ҳолда M нуқтанинг координаталарини

$$\sqrt{x^2+(y-a)^2}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+(y-2a)^2}$$

тенгсизлик ёрдамида ифодалаш мумкин ёки

$$x^2+y^2-2ay+a^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Буни соддалаштирсак,

$$3x^2+3y^2-4ay \leqslant 0$$

ни ҳосил қиламиз. Тўла квадрат ажратамиз ва 3 га бўламиз, у ҳолда

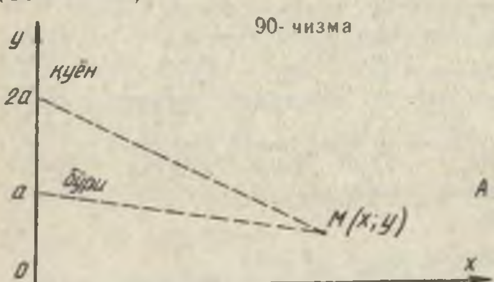
$$x^2+\left(y-\frac{2}{3}a\right)^2 \leqslant \frac{4}{9}a^2$$

га эга бўламиз. Бу тенгсизлик маркази $(0; \frac{2}{3}a)$ нуктада, радиуси $\frac{2}{3}a$ га тенг доирадан иборатдир. Хавфсизлик чизиги юқорида келтириб чиқарилган доирага уриниш чизигининг узунлигига тенг. Доира марказидан уриниш нуқтасига радиус ўтказамиз. Натижада тўгри бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Унинг гипотенузаси

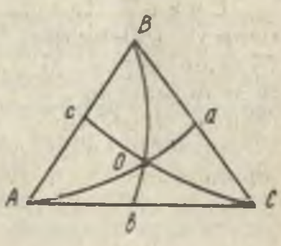
$$2a-\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}a$$

га, катети (радиус) $\frac{2}{3}a$ га тенг. Бу эса учбурчакнинг юқоридаги бурчаги 30° га тенглигини билдиради. Бундан куённинг хавфсизлик маршрути $\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ миқдордан кичик бўлмаслиги келиб чиқади.

26. Турли томонли учбурчакнинг ҳар бир учидан фокуслари қолган икки учида жойлашган гиперболалар тармоқлари ўтказилган. Бу гиперболалар учбурчак ичида умумий нуқтага эга бўлишини исбот қилинг (91- чизма).



90- чизма



91- чизма

Исбот. Учбурчакнинг бирор учидан ўтказилган гипербола тармоғининг бир қисм ёйи шу учбурчак ичида ётишини исбот қиламиз. Гиперболанинг тармоғи қавариқ эгри чизиқ бўлгани учун, бу ёй унинг ватари ва гиперболага учбурчак учидан ўтказилган уринма ҳосил қилган бурчак ичида ётади. Гиперболанинг оптик хоссасига кўра (бир фокусдан тарқалаётган ёруғлик нурлари гиперболадан кўзгули акслангандан кейин, бошқа фокусдан тарқалаётгандек кўринади) гипербола учбурчакнинг бурчак биссектрисаси бўлади. Қарама-қарши томон симметрия ўқи бўлгани учун, танланган гипербола тармоғи уни фақат битта нуқтада кесиб ўтади. Бу нуқта фокуслар орасида ётади. Демак, ёй биссектриса, ватар ва томон ҳосил қилган учбурчак ичида ётади. Бундан эса ихтиёрий икки гипербола учбурчак ичида умумий O нуқтага эгалиги келиб чиқади. Энди учинчи гипербола ҳам шу O нуқтадан ўтишини исбот қиламиз.

S_A, S_B, S_C — O нуқтадан мос учларгача бўлган масофалар; a, b, c мос учларининг қаршисида ётган томонларнинг узунликлари бўлсин. У ҳолда

$$S_A-S_C=c-a;\ S_B-S_C=c-b,$$

$$S_A-S_B=(S_A-S_C)-(S_B-S_C)=$$

$$=(c-b)-(c-b)=b-a.$$

Бу эса учинчи гипербола ҳам O нуқта орқали ўтишини билдиради. Тасдиқ исбот бўлди.

27. $y^2=-4ax$ парабола учларидан бу параболага ўтказилган уринмаларга туширилган перпендикулярлар асосларининг геометрик ўрни тенгламасини топинг.

Ечиш. Параболанинг $(x_0;\ y_0)$ нуқтасига ўтказилган уринма l_1 нинг тенгламаси $4ax+2yy_0-y_0^2=0$ кўринишда бўлади. l_1 уринмага (0; 0) нуқтадан туширилган l_2 перпендикулярнинг тенгламаси эса $y_0x-2ay=0$ кўринишда бўлади. l_1 ва l_2 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси $(x;\ y)$ нинг координаталарини қуйидаги системадан топамиз:

$$\begin{cases} 4ax+2yy_0-y_0^2=0, \\ y_0x-2ay=0 \end{cases}$$

ёки

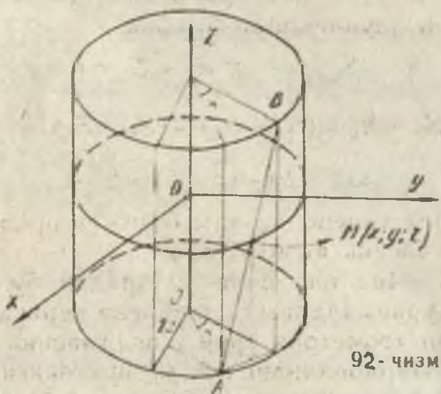
$$\left\{\begin{array}{l} y=\dfrac{y_0^3}{2(y_0^2+4a^2)}, \\ x=\dfrac{ay_0^2}{y_0^2+4a^2}. \end{array}\right.$$

Бундан y_0 параметрни йўқотиб, изланаётган нукталарнинг геометрик ўрни тенгламасига эга бўламиз, яъни $xy^2+x^3-ay^2=0$.

28. Асоси $z=\pm c$ текислигида, маркази Oz ўқида ётувчи ва радиуси $2a$ га тенг бўлган доиравий цилиндрнинг устки асосини α бурчакка буришдан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. AB — берилган сиртнинг устидаги чизик бўлсин. Бу сиртда ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нукта оламиз (92- чизма). AB нинг тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}. \qquad (A)$$



92- чизма

92- чизмадан:

$$\left\{\begin{array}{l} x_A=2a\cos t,\ y_A=2a\sin t,\ z_A=-c \\ x_B=2a\cos(t+\alpha);\ y_B=2a\sin(t+\alpha),\ z_B=c. \end{array}\right. \qquad (B)$$

(B) ни (A) га қўямиз:

$$\frac{x-2a\cos t}{2a\cos(t+\alpha)-2\cos t}=\frac{y-2a\sin t}{2a\sin(t+\alpha)-2a\sin t}=\frac{z+c}{2c}.$$

Биринчи касрни иккинчи каср билан, сўнгра учинчи каср билан тенглаб, $\cos t$ ва $\sin t$ қатнашган ҳадларни гуруҳлаб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} [2ac + a(z+c)(\cos\alpha - 1)]\cos t - (z+c)a\sin\alpha\sin t = xc, \\ a(z+c)\sin\alpha\cos t + [2ac + a(z+c)(\cos\alpha - 1)]\sin t = yc. \end{cases}$$

Ҳосил бўлган системанинг икки томонини квадратга кўтариб, тенгламаларни қўшамиз:

$$a^2[2c + (z+c)(\cos\alpha - 1)]^2 + a^2(z+c)^2\sin^2\alpha = (x^2+y^2)c^2.$$

ёки

$$4c^2 + 4c(z+c)(\cos\alpha - 1) + (z+c)^2\cos^2\alpha - 2(z+c)^2\cos\alpha +$$

$$+ (z+c)^2 + (z+c)^2\sin^2\alpha = \frac{x^2+y^2}{a^2}\cdot c^2,$$

$$4c^2 + 4c\,(z+c)\,(\cos\alpha - 1) + 2\,(z+c)^2\,(1-\cos\alpha) = \frac{x^2+y^2}{a^2}\cdot c^2.$$

Қавсларни очиб соддалаштирамиз:

$$2c^2\cos\alpha + 2c^2 + 2z^2 + 2z^2\cos\alpha = \frac{x^2+y^2}{a^2}\cdot c^2$$

$$4c^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 4z^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{x^2+y^2}{a^2}\cdot c^2$$

$$\frac{x^2+y^2}{4a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{z^2}{c^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} = 1.$$

Бу — бир паллали гиперболоиднинг тенгламасидир.

Хусусий ҳолда $\alpha = 90°$ бўлса,

$$\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

29. $x=1$ да энг катта қиймати 6 га, $x=3$ да энг кичик қиймати 2 га тенг бўлган ва даражаси энг кичик бўлган $f(x)$ кўпҳадни топинг.

Е ч и ш. $f'(1)=f'(3)=0$ бўлгани учун $f'(x)$ кўпҳаднинг даражаси $n \geqslant 2$ бўлади. У ҳолда $f(x)$ нинг даражаси 3 дан кичик бўлмайди. $f'(x)=A(x-1)(x-3)=$ $=A(x^2-4x+3)$ ва масала шартига кўра:

$$f''(x)_{x=1}<0 \text{ ва } f''(x)_{x=3}>0 \text{ да } A>0.$$

$$f(x)=A(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x)+B,$$

бундан

$$f(1)=\frac{4}{3}A+B=6 \text{ ва } f(3)=B=2.$$

Демак, $B=2$, $A=3$. Натижада изланаётган

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$$

кўпҳадга эга бўламиз.

30. Ҳар қандай нолга тенг бўлмаган мусбат коэффициентли кўпҳад жуфт функция бўлса, у ҳолда унинг графиги $]-\infty; +\infty[$ да қаварик ва фақат битта экстремум нуқтасига эга бўлишини исбот қилинг.

Исбот. $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$,

$$a_i>0 \text{ ва } P(x)=P(-x)$$

бўлсин, у ҳолда

$$g(x)=P(x)-P(-x)\equiv 0,$$

яъни $a_{2i+1}=0$ ва $P(x)$ да x нинг фақат жуфт $n=2m$ даражалари бўлади. У ҳолда

$$P'(x)=2ma_{2m}x^{2m-1}+...+2a_2x=0,$$

$$x=0 \text{ да}$$

$$P''(x)=2m(2m-1)a_{2m}x^{2m-2}+...+2a_2>0,$$

бундан $P(x)$ нинг графиги қаварик эканлиги ва $x=0$ нуқтада ягона экстремумга эга эканлиги келиб чиқади.

31. Бирорта ҳам бутун коэффициентли $P(x)$ кўпҳадлар учун $P(7)=5$; $P(15)=9$ тенгликлар бажарилмаслигини исбот қилинг.

Исбот. Тескарисини фараз қиламиз, яъни бутун коэффициентли $P(x)$ кўпҳад мавжуд ва

$$P(7)=a_07^n+a_17^{n-1}+...+a_n=5,$$

$$P(15)=a_015^n+a_1\,15^{n-1}+...+a_n=9$$

бўлсин. Иккинчи тенгликдан биринчисини айирамиз:

$$a_0(15^n-7^n)+a_1(15^{n-1}-7^{n-1})+...+a_{n-1}(15-7)=4.$$

Бу тенгликнинг чап қисмидаги ҳамма қўшилувчилардаги қавслар 15—7=8 га бўлинади, аммо ўнг томондаги сон эса 8 га бўлинмайди. Бу эса фаразимизни нотўғри эканлигини билдиради.

32. Бешта бутун қийматлар олувчи нуқталарда 5 га тенг қийматни қабул қилувчи $P(x)$ — бутун сонли кўпҳад берилган бўлсин. У ҳолда $P(\bar{x})$ кўпҳад бутун илдизга эга бўлмаслигини исбот қилинг.

Исбот. $P(x)=5+(x-x_1)+...+(x-x_5)g(x)$ бўлсин, бунда x_1, x_2, ..., x_5 бутун қийматли нуқта. Тескарисини фараз қилайлик, яъни бутун сон учун $P(x_0)=0$ бўлсин, у ҳолда

$$(x_0-x_1)...(x_0-x_5)g(x_0)=-5$$

бўлиб, (x_0-x_1), ..., (x_0-x_5) сонлар ҳар хил ҳақиқий сонлар ва улар (-5) га бўлинади. Иккинчи томондан эса -5 сони 4 та ҳар хил бутун $1; -1; 5$ ва -5 бўлувчиларга эга. Бу эса қарама-қаршиликка олиб келди. Демак, $P(x)$ кўпҳад бутун илдизга эга эмас.

33. $P(x)$ кўпҳаднинг даражаси n бўлиб, $P(a)\geqslant 0$;

$$P'(a)\geqslant 0,\ ...,\ P^{(n-1)}(a)\geqslant 0,\ P^{(n)}(a)\geqslant 0$$

бўлса, $P(x)=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизи a дан катта бўла олмаслигини исбот қилинг.

Исбот. $x=a$ учун Тейлор формуласидан фойдаланиб, $P(x)$ кўпҳадни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$P(x)=P(a)+P'(a)(x-a)+...+\frac{P^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}+...$$

$x>a$ бўлганда масала шартига асосан $P^{(i)}(a)$ мусбатлигига кўра $P(x)>0$ тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса $P(x)=0$ нинг a дан катта илдизи йўқлигини билдиради.

34. Агар ҳақиқий коэффициентли

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$$

кўпҳаднинг ҳамма илдизлари ҳақиқий бўлса, у ҳолда унинг кетма-кет ҳосилалари

$$P'(x),\ P''(x),\ P'''(x),\ ...,\ P^{(n-1)}(x)$$

ҳам $(a_0\neq 0)$ ҳақиқий илдизларга эга бўлишини исбот қилинг.

Исбот. $P'(x)$ кўпҳаднинг илдизлари ҳақиқий эканлигини исбот қилиш етарлидир.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_s$$

лар $P(x)$ нинг илдизлари, $k_1, k_2, \ldots, k_s$ лар эса уларнинг карралари $(k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n)$ бўлсин. Агар $k_i > 1$ бўлса, у ҳолда α_i илдиз k_{i-1} каррали $P'(x)$ нинг илдизи бўлади. Бундай илдизлар, яъни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ сонлар $(k_1 - 1) + \ldots + (k_s - 1) = n - s$ га тенгдир. Шунингдек $P'(x)$ кўпҳад β_i ҳақиқий илдизга эга бўлади, бунда

$$\alpha_i < \beta_i < \alpha_{i+1} (i = 1, 2, \ldots, (s-1)).$$

β_i илдизлар сони $s-1$ дан кам бўлмаслиги керак, чунки

$$(n-s) + (s-1) = n-1$$

бўлиб, $P'(x)$ бошқа илдизга эга бўлмайди ва улар ҳақиқий бўлади.

Мустақил ечиш учун масалалар

1. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \ldots & C_n^k \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \ldots & C_{n+1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n+k}^0 & C_{n+k}^1 & \ldots & C_{n+k}^k \end{vmatrix},$$

бунда $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \in N$, $k \in N$, $k \leqslant n$.

2. Учинчи тартибли детерминантнинг элементлари қандай бўлишидан қатъи назар унинг ёйилмасидаги ҳамма ҳадлари мусбат бўлмаслигини исбот қилинг.

3. Агар α, β, γ лар $x^3 + px + q = 0$ тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда қуйидаги детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

4. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}$ бўлса, A^{100} ни топинг.

5. $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^{200}$ матрицани ҳисобланг.

6. $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{100}$ матрицани ҳисобланг.

7. A $m\times n$ ўлчовли квадрат матрица бўлиб, унинг кўриниши қуйидагича:

$$\begin{pmatrix}a&1&0&0\ldots0&0\\0&a&1&0\ldots0&0\\0&0&a&1\ldots0&0\\\vdots&\ldots&&&&\\0&0&0&0\ldots0&a\end{pmatrix}.$$

$m<n$ бўлганда A матрицанинг биринчи сатр элементлари йиғиндисини топинг.

8. Ушбу

$$\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

9. A 2×2 ўлчовли квадрат матрица бўлиб, унинг хос сонлари

$$|\lambda_1|<1,\ |\lambda_2|<1$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\ldots+A^4$$

тенглик ўринли эканини исбот қилинг.

10. A ва B $n\times n$ ўлчовли квадрат матрицалар, E эса бирлик матрица бўлсин. Агар $E-AB$ матрица тескари

матрицага эга бўлса, у ҳолда $E-BA$ матрица ҳам тескари матрицага эга бўлишини исбот қилинг.

11. $n\times n$ ўлчовли A квадрат матрица қуйидагича берилган:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1\cdot x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ x_3x_1 & x_3x_2 & \dots & x_3x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

$(A+E)$ матрица учун тескари матрица мавжудлигини исбот қилинг, (E — бирлик матрица) $(A+E)^{-1}$ матрицани ҳисобланг.

12. Шундай иккинчи тартибли квадрат матрицаларни топингки, уларнинг квадратлари ноль-матрицага тенг бўлсин.

13. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. $B^2=A$ тенгликни қаноатлантирувчи учинчи тартибли B квадрат матрица мавжуд эмаслигини исбот қилинг.

14. A квадрат матрица учун

$$l^A=E+A+\frac{A^2}{2!}+\dots+\frac{A^n}{n!}+\dots$$

ёйилма ўринли бўлса, у ҳолда l^{tB} ни топинг. Бу ерда

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad t\in\,]-\infty;\ +\infty[.$$

15. $n\times n$ ўлчовли A квадрат матрица берилган бўлсин. Шундай $n\times n$ ўлчовли B матрица мавжудки, унинг учун $ABA=A$ тенглик ўринли эканлигини исбот қилинг.

16. Агар

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } Y(0)=B$$

бўлса, у ҳолда

$$Y(t)=AY(t)-Y(t)A$$

тенгламадан $Y(t)$ матрицани топинг.

17. A n-тартибли квадрат матрица бўлиб, λ сон A матрицанинг хос сонлари айирмаси кўринишида ифодаланиши мумкин бўлсин.

$$Ax-xA=\lambda x$$

тенглама нолдан фарқли (умумий ҳолда комплекс) ечимга эга эканлигини исбот қилинг.

18. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ матрица}$$

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)E=0$$

тенгламани қаноатлантиришини исбот қилинг. Бунда $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $A=(a_{ij})$ матрица $(n-1)\times n$ ўлчамли. $a_i(i=1,2\ldots(n-1))$ орқали A матрицанинг i вектор сатрини, $D_j(j=1,2,\ldots,(n-1))$ орқали A матрицанинг ij-устунини ўчиришдан ҳосил бўлган матрицанинг детерминантини, D орқали $D=(D_1, -D_2, \ldots, (-1)^{n-1}D_n)$ вектор-сатрни белгилаймиз. Барча $i=1,2,\ldots,n$ лар учун (D, a_i) скаляр кўпайтма нолга тенг бўлишини исбот қилинг.

20. Иккита $((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b})\times\vec{b}$ ва $\vec{a}\times\vec{b}$ векторлар коллинеар эканлигини исбот қилинг.

21. ABC учбурчакда $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Шу учбурчакнинг BC томонига туширилган баландлик векторни топинг.

22. A, B, C, D нуқталар фазода ёки текисликда қандай жойлашишларидан қатъи назар,

$$\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$$

тенглик ўринли эканлигини исбот қилинг.

23. Уч ўлчовли фазода ҳамма $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ жуфт векторларни кўрсатингки, улар учун

$$\begin{cases} (\vec{a}\vec{x}) = |\vec{b}|, \\ [\vec{a}\vec{x}] = \vec{b} \end{cases}$$

система ечимга эга бўлсин ва бу ечимни топинг (бунда $(\vec{a}\vec{x})$ — скаляр кўпайтма, $[\vec{a}\vec{x}]$ — вектор кўпайтма).

24. α нинг қандай қийматларида $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ ва $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ векторлар коллинеар бўлади.

25. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ уч ўлчовли фазода берилган векторлар бўлса, улар учун

$$\begin{vmatrix} (\vec{a}\vec{c}) & (\vec{a}\vec{d}) \\ (\vec{b}\vec{c} & (\vec{b}\vec{a}) \end{vmatrix} = ([\vec{a}\vec{b}][\vec{c}\vec{d}])$$

тенглик ўринли эканини исбот қилинг (бунда $(\vec{a}\vec{c})$ — скаляр кўпайтма, $[\vec{a}\vec{b}]$ — вектор кўпайтма).

26. Агар $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ лар ABC учбурчакнинг биссектрисалари бўлиб, улар учун

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = 0$$

бўлса, бу учбурчак мунтазам учбурчак бўлишини исбот қилинг.

27. Ушбу $\begin{cases} \vec{a}\times x + \vec{b}\times y = \vec{c}, \\ \vec{b}\times x - \vec{a}\times y = \vec{d} \end{cases}$ система учун қандай зарурий ва етарли шартлар бажарилганда, у ечимга эга бўлади? Бу системанинг ҳамма ечимларини топинг. Бунда x, y — номаълумлар, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — берилган векторлар ва $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 \neq 0$.

28. $SABC$ тетраэдрнинг ҳар бир қиррасидан ва унга қарама-қарши қиррасининг ўртасидан текисликлар ўтказилган. Бу текисликлар умумий нуқтага эга бўлишини исбот қилинг. Бу умумий нуқтани K билан белгилаб $\vec{SK}$ векторни

$$\vec{SA} = \vec{a},\ \vec{SB} = \vec{b},\ \vec{SC} = \vec{c}$$

векторлар орқали ифодаланг.

29. $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ва $\vec{OC}$ векторлар қуйидаги тенгликни қаноатлантиради:

$$\overline{OA}\times\overline{OB}+\overline{OB}\times\overline{OC}+\overline{OC}\times\overline{OA}=0;$$

а) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ва $\overline{OC}$ векторлар компланар эканлигини;

б) A, B, C нуқталар битта тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг.

30. Учбурчакнинг томонлари қуйидаги

$$a_ix+b_iy+c_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

тенглама билан берилган тўғри чизиқлар устида ётади. Агар S учбурчакнинг юзи, R учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси ва

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

бўлса, $S=|\Delta|\cdot R$ тенглик ўринли эканлигини исбот қилинг.

31. Учбурчакнинг томонлари қуйидаги

$$a_ix+b_iy+c_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

тенглама билан берилган тўғри чизиқлар устида ётади. Агар

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ва $\Delta_i - c_i$ элементнинг алгебраик тўлдирувчиси бўлса, ушбу

$$S=\frac{\Delta^2}{2|\Delta_1\Delta_2\Delta_3|}$$

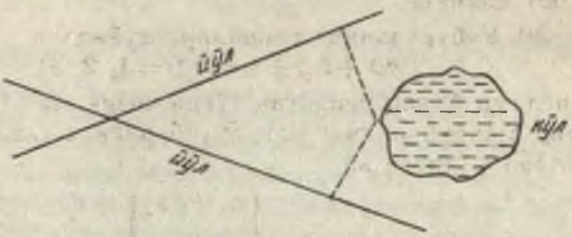
ифода учбурчак юзи эканлигини исбот қилинг.

32. 93- чизмада икки тўғри чизиқли йўл ва доирасимон кўл тасвирланган. Кўл бўйига йўлларга иложи борича яқин жойга дам олиш уйи қуриш керак. Дам олиш уйидан йўлларгача бўлган масофалар йиғиндиси энг кичик бўлиши учун уни кўлнинг қайси ёнига қуриш керак.

33. Ҳар қандай силлиқ ёпиқ қавариқ K эгри чизиқда A ва B нуқталарни шундай танлаб олиш мумкинки, улар K ни тенг узунликда иккита ёйга бўлади.

AB ватар K эгри чизиқ билан чегараланган юзни тенг иккига бўлишини исбот қилинг.

34. Узлуксиз ёпиқ қавариқ эгри чизиқ ичидаги нуқтадан ватарлар ўтказилган. Агар ватар энг кичик



93- чизма

юзли сегмент кесса, берилган нуқта ватарнинг ўртасида жойлашганлигини исбот қилинг.

35. Агар r ва R бирор учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари, d айланалар марказлари орасидаги масофа бўлса,

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

тенглик тўғри эканлигини исбот қилинг.

36. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталар бирлик айлана ичига чизилган n бурчакли мунтазам кўпбурчакнинг учлари бўлса, қуйидаги йиғиндини топинг:

$$|\overline{A_1A_2}|^2 + |\overline{A_1A_3}|^2 + \ldots + |\overline{A_1A_n}|^2.$$

37. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ эллипсга $(4;\ -1)$ нуқтадан ўтказилган уринма тенгламасини тузинг.

38. Ҳаракатсиз эллипс устида унга тенг эллипс сирпанмасдан шундай силжиб бормоқдаки, уларнинг ихтиёрий ҳолатида ҳам эллипслар умумий уринмага нисбатан симметрик бўлса, эллипснинг фокус нуқталари қандай эгри чизиқлар чизади?

39. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсда шундай $(x_0;\ y_0)$ нуқта топингки, шу нуқтадан ўтказилган уринма ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг юзи энг кичик бўлсин.

40. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипс билан $2x+y=5$ тўғри чизиқ орасидаги энг қисқа масофани топинг.

41. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ эллипснинг $y=\frac{9}{32}x^2$ парабола билан чегараланган пастки қисмининг юзини топинг.

42. A нукта $xy=4$ гиперболада, B нуқта эса $x^2+4y^2=4$ эллипсда ётади. A ва B нуқталар орасидаги масофа бирдан кичик бўлмаслигини исбот қилинг.

43. $4x^2+y^2=5$ эллипс берилган. Шу эллипсга $x=1$, $y=-1$ ва $x=y=-1$ нуқталарда уринувчи парабола тенгламасини тузинг.

44. $(4;\ 0)$ нуқтадан $y^2-2x=0$ эгри чизиққача бўлган масофани топинг.

45 $y=x^2$ парабола билан $x-y-2=0$ тўғри чизиқ орасидаги энг қисқа масофани топинг.

46. $y=\frac{1}{10}x^2$ парабола билан $(0;\ 4)$ ва $(0;\ 6)$ нуқталар орасидаги энг қисқа масофани топинг.

47. $y=\frac{1}{x}$ гиперболанинг биринчи чоракдаги тармоғи устида радиуси $R=1$ тенг бўлган айланани юмалатамиз. Бу айлана маркази чизган чизиқ қандайдир гиперболанинг тармоғи бўладими?

48. AB кесмада $2n$ та нуқта кесма ўртасига нисбатан симметрик жойлаштирилган. Улар ичидан n та нуқта ихтиёрий усулда танлаб олиниб қизил рангга, қолган нуқталар эса кўк рангга бўялган. Қизил нуқталардан A нуқтагача бўлган масофалар йиғиндиси кўк нуқталардан B нуқтагача бўлган масофалар йиғиндисига тенглигини исбот қилинг.

49. R радиусли шар берилган. Шу шар ичига ҳажми энг катта бўлган тўғри доиравий цилиндр қандай чизилади?

50. Ярим шарнинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

51. Ихтиёрий $n\geqslant 3$ тоқ даражали кўпҳад ҳеч бўлмаганда битта бурилиш нуқтасига эга бўлишини исбот қилинг.

52. Ушбу

$$P(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

кўпҳад каррали илдизга эга бўлмаслигини исбот қилинг.

53. Агар $P(x)$ мусбат коэффициентли $(n-1)$- даражали кўпҳад бўлса, у ҳолда $x^n=P(x)$ тенглама фақат битта мусбат илдизга эга бўлишини исбот қилинг.

54. Агар $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_r(x)$ мос равишда n_1, n_2, ..., n_r даражали кўпҳадлар бўлиб

$$n_1+n_2+\ldots+n_r<\frac{r(r-1)}{2}$$

бўлса, бу кўпҳадлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлишини исбот қилинг.

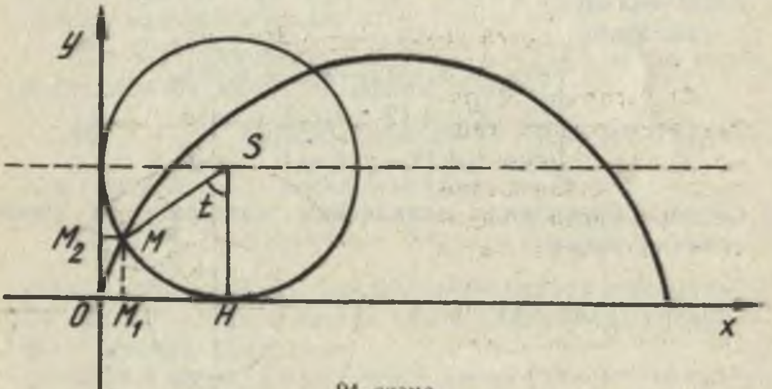
55. Ушбу

$$\begin{cases}(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda,\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1,\\x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\end{cases}$$

система биргаликда эканлигини текширинг ва унинг ечимини топинг.

АЖОЙИБ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

1. Циклоидали эгри чизиқлар. а) Ox ўқи бўйлаб сирпанмай ғилдираб борувчи r радиусли айлананинг ихтиёрий M нуқтаси чизган эгри чизиқ *циклоида* дейилади. Циклоида тенгламасини келтириб чиқарамиз (94- чизма).



94- чизма

$M(x;\ y)$ нуқта циклоиданинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. S айлана маркази бўлсин. SM ва SH радиуслар орасидаги бурчакни t параметр деб оламиз.

Чизмадан:

$$x = OM_1 = OH - M_1H = rt - r\sin t = r(t - \sin t),$$
$$y = OM_2 = r - r\cos t = r(1 - \cos t).$$

Демак,

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t), \\ y = r(1 - \cos t). \end{cases} \qquad (1)$$

(1) — циклоиданинг *параметрик* тенгламаси дейилади. Бундан фойдаланиб циклоиданинг тўғри бурчакли декарт координаталар системасидаги тенгламасини чиқариш мумкин. Бунинг учун (1) системадаги иккинчи тенгламадан

$$r\cos t = r - y \Rightarrow \cos t = \frac{r-y}{r},$$

$$t = \arccos\frac{r-y}{r},$$

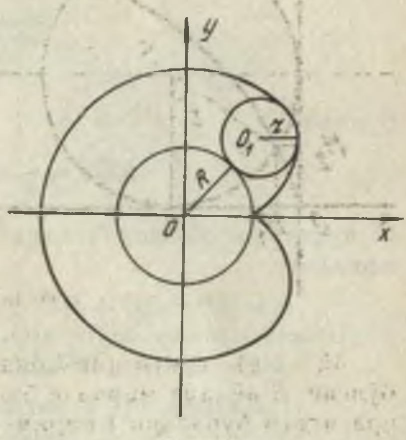
$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{r-y}{r}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{r^2-2ry+y^2}{r^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{2ry-y^2}$$

ларни топиб, биринчи тенгламага қўйиш кифоя:

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2};$$

б) ўзгармас R радиусли айланага ташқи уриниб, унинг устида сирпанмасдан гилдирайдиган r радиусли айлананинг ихтиёрий M нуқтаси чизадиган текис эгри чизиқ *эпициклоида* дейилади (95- чизма).



95- чизма

Эпициклоида тенгламасини келтириб чиқарамиз. Унинг учун R радиусли айлананинг маркази O ни координаталар боши қилиб, у орқали ўтувчи ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқларни координата ўқлари қилиб оламиз (96- чизма).

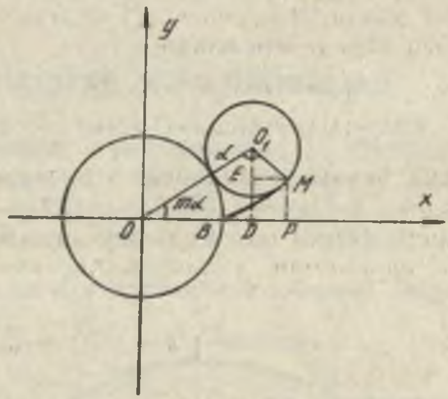
Бу ҳолатда M нуқтанинг чизган чизиги B нуқтасидан бошланган бўлсин. MO_1K бурчакни α деб ва айлана радиуслари нисбатини

$$m=\frac{r}{R}\Rightarrow r=mR$$

деб белгилаймиз.

M нуқта чизган эгри чизиқнинг узунлиги:

$$\overset{\smile}{KM}=\overset{\smile}{BM} \text{ ёки } R\cdot \overset{\smile}{KOB}=r\alpha .$$



96- чизма

Бундан

$$K\breve{O}B=\frac{r}{R}\cdot\alpha=m\alpha.$$

M нуқтанинг координаталари x ва y бўлсин. У ҳолда шаклдан:

$$x=OP=OD+ME;\ y=MP=O_1D-O_1E$$

$$OD=OO_1\cos m\alpha=(OK+O_1K)\cos m\alpha=(R+r)\cos m\alpha;$$

$$ME=O_1M\sin(M\widehat{O_1}E)=r\sin(\alpha-O\widehat{O_1}D)=$$

$$=r\sin(\alpha-(\frac{\pi}{2}-m\alpha))=-r\cos(\alpha+m\alpha);$$

$$O_1D=OO_1\sin m\alpha=(R+r)\sin m\alpha;$$

$$O_1E=O_1M\cos(M\widehat{O_1}E)=r\cos(\alpha-O\widehat{O_1}D)=$$

$$=r\cos(\alpha-(\frac{\pi}{2}-m\alpha))=r\cos((\alpha+m\alpha)-\frac{\pi}{2})=$$

$$=r\sin(\alpha+m\alpha);\ r=mR.$$

Бу қийматларни ўрнига қўйсак, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x=(R+mR)\cos m\alpha - mR\cos(\alpha+m\alpha); \\ y=(R+mR)\sin m\alpha - mR\sin(\alpha+m\alpha). \end{cases} \qquad (2)$$

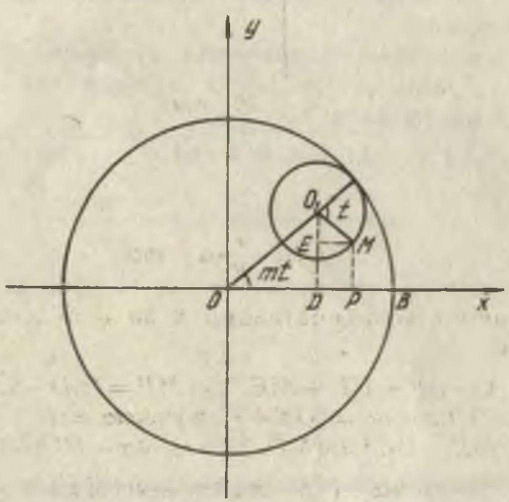
(2) тенглама эпициклоиданинг параметрик тенгламаси дейилади. Эпициклоида гилдирайдиган айлана радиуси (r) кўзгалмас айлана радиусидан (R) неча марта катта бўлишига қараб (2) тенглама турли хилда бўлади.

Хусусий ҳолда, $R=r$ ва $m=1$ бўлганда, (2) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} x=2r\cos\alpha - r\cos 2\alpha, \\ y=2r\sin\alpha - r\sin 2\alpha. \end{cases} \qquad (3)$$

(3) тенглама билан ифодаланган эгри чизиқ *кардиоида* деб аталади,

в) бирор кўзгалмас R радиусли айлана бўйлаб ичкаридан сирпанмай, ғилдираб борувчи r радиусли



97- чизма

айланадаги ихтиёрий M нуқта чизган эгри чизиқ *гипоциклоида* дейилади (97- чизма). Унинг тенгламасини қуйидагича чиқарамиз. Унинг учун M нуқтанинг x, y координаталарини топамиз:

$$x = OP = OD + DP = (R - r)\cos mt + r\sin(MO_1 \hat{\ } E);$$
$$y = PM = O_1D - O_1E = (R - r)\sin mt - r\cos(MO_1 \hat{\ } E).$$

$$\sin(M\widehat{O_1}E) = \sin\left(\pi - t - \left(\frac{\pi}{2} - mt\right)\right) = \cos(t - mt).$$

$\cos(M\widehat{O_1}E) = \sin(t - mt)$ бўлгани учун:

$$\begin{cases} x = (R - mR)\cos mt + mR\cos(t - mt), \\ y = (R - mR)\sin mt - mR\sin(t - mt). \end{cases} \qquad (4)$$

(4) система гипоциклоиданинг параметрик тенгламаси дейилади.

2. Декарт япроғи. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad (5)$$

учинчи даражали алгебраик тенглама билан аниқланадиган эгри чизиқ *Декарт япроғи* дейилади, бунда $a \neq 0$ ўзгармас.

(5) тенгламани параметрик кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бунинг учун $y = tx$ алмаштириш бажариб, (5) дан x ни топамиз:

$$x^3 + t^3x^3 - 3axtx = 0 \Rightarrow x^3(1 + t^3) - 3atx^2 = 0$$

$$x(1 + t^3) = 3at \Rightarrow x = \frac{3at}{1 + t^3}.$$

x нинг топилган қийматини $y = tx$ га қўямиз:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}. \end{cases} \qquad (6)$$

(6) система декарт япрогининг параметрик тенгламаси дейилади. Қутб координаталар системасида декарт япрогининг тенгламасини ҳосил қилиш учун:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

алмаштириш бажарамиз:

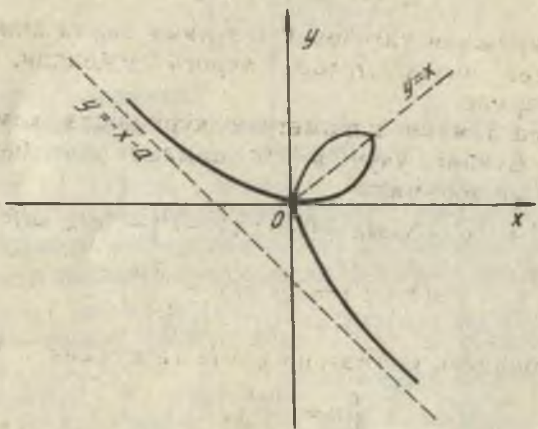
$$\rho^3\cos^3\varphi + \rho^3\sin^3\varphi - 3a\rho^2\cos\varphi\sin\varphi = 0 \Rightarrow$$
$$\rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) - 3a\rho^2\cos\varphi\sin\varphi = 0.$$

Демак,

$$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

(5) тенгламани $x=0$, $y=0$ координаталар қаноатлантиради. Бу декарт япроғи координаталар бошидан ўтишини билдиради. Декарт япроғи $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир. Ҳақиқатан, (5) тенгламада x ва y ўзгарувчиларнинг ўрнини алмаштирсак, дастлабки тенглама ҳосил бўлади. $y=-x-a$ чизиқ декарт япроғининг асимптотасидир.

Чизиқ биринчи чоракда илмоқ ҳосил қилиб, сўнгра унинг тармоқлари асимптотага чексизликда яқинлашади (бунда координаталар боши тугун нуқта бўлади (98- чизма).

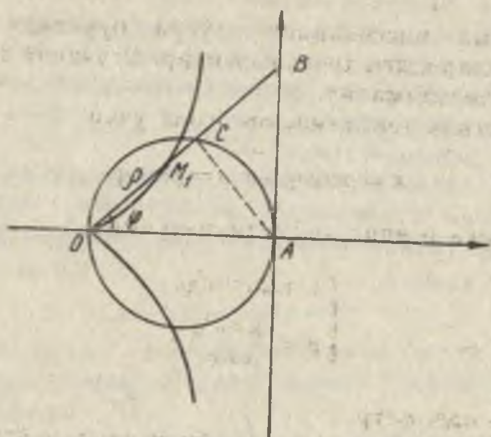


98- чизма

3. Циссоида. Диаметри $OA=2a$ бўлган айлана берилган ва унинг A нуқтасига уринма ўтказилган бўлсин (99- чизма). Айлананинг O нуқтасидан OB нурни ўтказамиз ва унинг айлана билан кесишган нуқтасини C билан белгилаймиз. Шу нурга $|OM_1|=|BC|$ кесмани қўямиз. O нуқтадан иккинчи нурни ўтказамиз ва юқоридаги каби M_2 нуқтани ҳосил қиламиз. Шундай усул билан исталганча M_1, M_2

нуқталарни ясаш мумкин. Бу нуқталарни бирлаштиришдан ҳосил бўлган эгри чизиқ *циссоида* дейилади.

Циссоида тенгламасини қутб координаталарида келтириб чиқарамиз. Унинг учун O нуқтани қутб боши,



99- чизма

OA нурни қутб ўқи деб оламиз. 99- чизмадан $|OM|=\rho$, $\angle AOM=\varphi$, у ҳолда M нуқтанинг қутб координаталари ρ, φ лардан иборат бўлади. Уларни топамиз:

$$\rho=|OM_1|=|OB|-|OC|,\ |OB|=\frac{2a}{\cos\varphi};$$

$|OC|=2a\cos\varphi$ га тенглигидан:

$$\rho=\frac{2a}{\cos\varphi}-2a\cos\varphi=2a\cdot\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi}$$

ёки

$$\rho=\frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \qquad (7)$$

(7) тенглама циссоиданинг қутб координаталаридаги тенгламаси дейилади.

Энди циссоиданинг декарт координаталар системасидаги тенгламасини чиқарамиз. Бизга маълумки:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2};\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Бу қийматларни (7) га қўйиб соддалаштирсак, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}. \qquad (8)$$

(8) тенглама циссоиданинг тўгри бурчакли декарт координаталаридаги тенгламасидир. У учинчи тартибли алгебраик тенгламадир.

Параметрик тенгламасини ёзиш учун

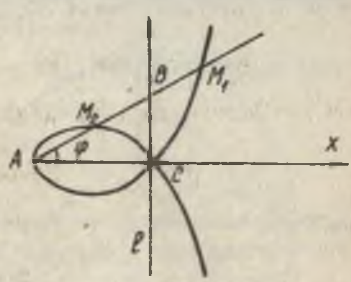
$$x=\rho\cos\varphi \text{ ва } y=\rho\sin\varphi$$

формулаларга ρ нинг қийматини қўямиз:

$$\begin{cases} x=2a\sin^2\varphi, \\ y=\dfrac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi}, \end{cases}$$

бунда φ — параметр.

4. Строфоида. A нуқта ва бу нуқтадан ўтмайдиган l тўгри чизиқ берилган бўлсин (100- чизма). Ax тўгри чизиқни l тўгри чизиққа перпендикуляр қилиб ўтказамиз ва уларнинг кесишиш нуқтасини C билан белгилаймиз. AC кесмани a деб оламиз. A нуқта атрофида айланувчи нурни оламиз ва унинг берилган l тўгри чизиқ билан кесишиш нуқтасини B деб белгилаймиз. B нуқтадан $|BC|=|BM_1|=|BM_2|$ кесмаларни қўямиз.



100- чизма

Демак, A нуқтадан ўтказилган битта нурга чизмада кўрсатилгандек мос равишда M_1, M_2 жуфт нуқталар тўгри келади. Бундай M_1, M_2 нуқталар тўплами *строфоида* деб аталади. Бунда M_1, M_2 нуқталар қовушма нуқталар дейилади. Етарлича шундай нуқталарни ясаб, уларни бирлаштирсак строфоидани ҳосил қиламиз.

Строфоида тенгламасини чиқарамиз. A нуқтани қутб боши, AC нурни қутб ўқи деб оламиз. Нурнинг кутб ўқи билан ташкил этган бурчагини φ деб белгилаймиз. У ҳолда M_1 нуқта (ρ_1, φ) кутб координаталарга эга бўлади, бунда $\rho_1 = |AM_1|$, M_2 нуқта эса (ρ_2, φ) координаталарга эга, бунда $\rho_2 = |AM_2|$. Чизмадан кўриниб турибдики:

$$\rho_1 = |AB| + |BM_1|;\ \rho_2 = |AB| - |BM_2|,\ |BM_1| = |BC|$$

бўлгани учун

$$\rho_1 = |AB| + |BC|;\ \rho_2 = |AB| - |BC|$$

ёки

$$\rho = AB \pm BC. \tag{9}$$

$$|AB| = \frac{a}{\cos\varphi},\ |BC| = a\operatorname{tg}\varphi.$$

Бу қийматларни (9) га қўйсак:

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm a\operatorname{tg}\varphi = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} \pm \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right), \tag{10}$$

$$\rho = \frac{a(1 \pm \sin\varphi)}{\cos\varphi}$$

(10) тенглама строфоиданинг кутб координаталардаги тенгламасидир.

Энди строфоиданинг параметрик тенгламасини чиқариш учун

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$$

тенгламаларга (10) дан ρ ни қийматини қўямиз:

$$\begin{cases} x = 1 \pm \sin\varphi, \\ y = \dfrac{(1 \pm \sin\varphi)\sin\varphi}{\cos\varphi}. \end{cases} \tag{11}$$

Строфоиданинг тўғри бурчакли декарт координаталардаги тенгламасини ёзамиз. Унинг учун

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};\quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

тенгликларни (10) га қўямиз:

$$y^2 = \frac{(x-a)^2 x}{2a - x}. \tag{12}$$

(12) тенглама декарт координаталарига нисбатан учинчи даражали тенглама — шунинг учун строфоида учинчи тартибли чизиқдир.

(12) ни y га нисбатан ечсак:

$$y = \pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}. \qquad (13)$$

(13) тенглама $x \geqslant 0$, $x < 2a$ бўлганда маънога эга бўлади. Бундан кўринадики, строфоида иккита тармоққа эгадир (ҳар бири плюс ёки минус ишоралари билан аниқланади).

Агар $x \to 2a$ га интилса, у ҳолда y нинг қиймати чексиз ортади, яъни $x = 2a$ тўғри чизиққа яқинлашади. Шунинг учун $x = 2a$ тўғри чизиқ строфоиданинг асимптотаси бўлади. $C(a;\ 0)$ нуқтада строфоида тармоқлари кесишади ва бу нуқта *тугунли нуқта* деб аталади.

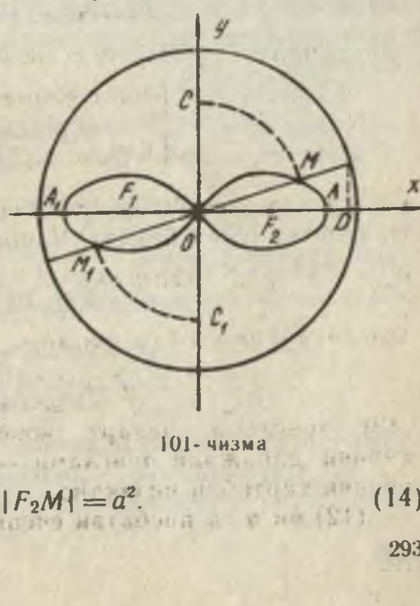
5. Бернулли лемнискатаси. Ҳар бир нуқтасидан берилган икки $F_1(-a;\ 0)$ ва $F_2(a;\ 0)$ фокуслар деб аталувчи нуқталаргача бўлган масофалар кўпайтмаси ўзгармас a^2 сонига тенг бўлган текис эгри чизиқ *Бернулли лемнискатаси* дейилади (101- чизма).

Лемниската таърифига кўра, F_1 ва F_2 нуқталар берилган. У ҳолда уларнинг орасидаги масофа

$|F_1F_2| = 2a$ ёки $a = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ бўлади.

Бернулли лемнискатаси тенгламасини тўғри бурчакли декарт координаталарда келтириб чиқарамиз. Координаталар бошини F_1F_2 кесманинг ўртасида қилиб F_1F_2 нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқни абсциссалар ўқи деб, унга перпендикуляр бўлган ва O нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни ординаталар ўқи деб оламиз.

$M(x;\ y)$ нуқта изланаётган чизиқ устидаги ихтиёрий нуқта бўлсин. У ҳолда, таърифга кўра:



101- чизма

$$|F_1M| \cdot |F_2M| = a^2. \qquad (14)$$

Текисликдаги икки нукта орасидаги масофани топиш формуласига кўра:

$$|F_1M| = \sqrt{(x+a)^2+y^2},$$
$$|F_2M| = \sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Бу ифодаларни (14) га қўйиб, сўнгра соддалаштирсак,

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \qquad (15)$$

Бернулли лемнискатаси тенгламасига эга бўламиз. (15) тенгламадан Бернулли лемнискатаси тўртинчи тартибли алгебраик тенгламадан иборат эканлиги келиб чиқади.

Лемниската тенгламасини қутб координаталарида ифодалаш учун $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ ифодаларни (15) га қўйиб соддалаштирсак,

$$\rho^2 = 2a^2(2\cos^2\varphi - 1)$$

ёки $b=a\sqrt{2}$ белгилаш киритсак,

$$\rho^2 = b^2(2\cos^2\varphi - 1) \qquad (16)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (16) тенглама ёрдамида Бернулли лемнискатаси нукталарини ясаш мумкин.

(16) тенгламани гипотенузаси $b\sqrt{2}\cos\varphi$ ва бирор катети b га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакларнинг иккинчи катети узунлиги қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, агар тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари x, y, гипотенузаси z бўлса, у ҳолда $x^2+y^2=z^2$ тенглик ўринли. Бу ҳолда

$$x=\rho,\ y=b,\ z=b\sqrt{2}\cos\varphi$$

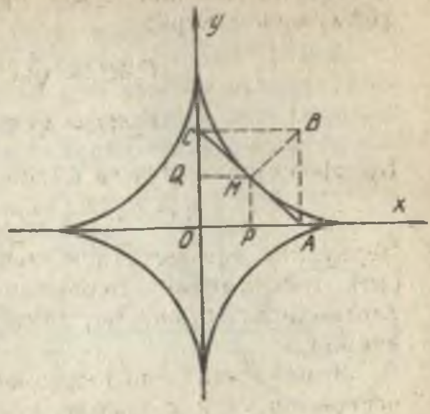
деб, ўрнига қўйсак,

$$\rho^2+b^2 = 2b^2\cos^2\varphi \Rightarrow$$
$$\rho^2 = 2b^2\cos^2\varphi - b^2 \Rightarrow$$
$$\rho^2 = b^2(2\cos^2\varphi - 1)$$

(16) тенгламага эга бўламиз.

6. Астроида. *AC* — диагонали ўзгармас ва иккита томони ўзаро перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ устида ётувчи тўғри тўртбурчак берилган бўлсин (102- чизма).

Бундай тўғри тўртбурчакларнинг B учидан AC диагоналига туширилган перпендикулярларнинг асосларидаги нуқталарни бирлаштиришдан ҳосил бўлган эгри чизиқ *астроида* дейилади.



102- чизма

Декарт координаталар системасида астроиданинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Координата ўқлари деб бу иккита перпендикуляр бўлган томонларни оламиз (102-чизма). $|AC|=a$ бўлсин. У ҳолда $|OA|^2+|OC|^2=a^2$. B учидан AC диогоналига перпендикуляр туширамиз ва унинг асосини $M(x;\ y)$ деймиз. $\angle BCA=t$, $\angle MBA=t$ га тенг. M нуқтанинг координаталари x, y ни t бурчак орқали ифодалаймиз:

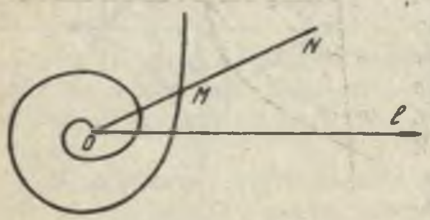
$$x=OP=|CM|\cos t=(|CB|\cos t)\cos t=|CB|\cos^2 t=$$
$$=(|CA|\cos t)\cos^2 t=|CA|\cos^3 t=a\cos^3 t;$$
$$y=OQ=PM=|MA|\sin t=(|AB|\sin t)\sin t=$$
$$=|AB|\sin^2 t=(|AC|\sin t)\sin^2 t=$$
$$=|AC|\sin^3 t=a\sin^3 t.$$

Шундай қилиб, $\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ астроиданинг параметрик тенгламаси бўлиб, ундан t параметрни йуқотсак, унинг тўғри бурчакли декарт координаталаридаги тенгламасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cos t, \\ y^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t \\ y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

7. Архимед спирали. Тўғри чизиқ бўйича текис ҳаракатланувчи ва бир вақтнинг ўзида тайин нуқта атрофида текис айланувчи бирор M нуқтанинг траекторияси *Архимед спирали* дейилади.

Демак, Архимед спиралининг таърифига кўра нуқтанинг траекториясида бир вақтда иккита текис ҳаракат иштирок этиб, ундан бири тўғри чизиқ бўйлаб, иккинчиси эса айлана бўйлаб ҳаракатдан иборат экан.



103- чизма

M нуқта ON тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилади, O нуқта атрофида эса текис айланма ҳаракат қилади.

O нуқтани қутб боши, Ol ни қутб ўқи деб оламиз (103- чизма). M нуқтанинг дастлабки координаталарини ρ, φ деб белгилаймиз, бунда $\rho = |OM|$, φ — OM қутб-радиусининг қутб ўқи Ol билан ташкил этган бурчаги. M нуқтанинг ON тўғри чизиқ бўйича босиб ўтган йўли a қутб бурчаги φ нинг ўсишига тўғри пропорционалдир. Шунинг учун

$$\rho = a\varphi, \tag{17}$$

бунда a — пропорционаллик коэффициенти. (17) тенглама Архимед спиралининг қутб координаталаридаги тенгламаси дейилади. Унинг декарт координаталар системасидаги тенгламаси эса қуйидагича:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

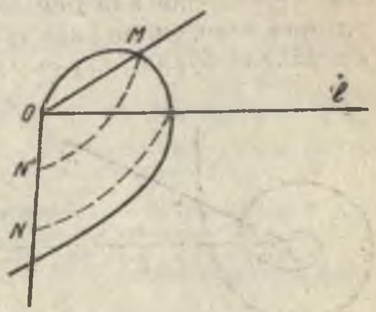
Агар ҳар бир ўрам орасидаги масофани d деб белгиласак, у ҳолда

$$d = a(\varphi + 2\pi) - a\varphi = 2a\pi.$$

Бундан кўриниб турибдики, ўрамлар орасидаги масофа ўзгармасдир.

8. Логарифмик спираль. Тенгламаси қутб координаталар системасида $\rho = \alpha e^{k\varphi}$ (бунда α ихтиёрий сон, пропорционаллик коэффициенти) кўринишда бўладиган эгри чизиқ *логарифмик спираль* дейилади.

Логарифмик спираль формуласини қуйидагича чиқарамиз. Архимед спиралида нур устида ҳаракатланаётган M нуқтанинг қутб бошидан узоқлиги нурнинг бурилиш бурчаги φ га тўғри пропорционал деб олинган эди. Энди M нуқтанинг қутб бошидан узоқлигининг логарифмини нурнинг бурилиш бурчагига тўғри пропорционал деб оламиз,



104- чизма

яъни $\ln\rho = a\varphi$. Бундан $\rho = e^{a\varphi}$ келиб чиқади. Бу эса (18) формуланинг хусусий ҳоли, яъни $\alpha = 1$ ва $k = a$. Логарифмик спиралнинг асосий хоссаларидан бири: спиралнинг бошидан чиққан ҳар қандай радиус-векторлар спирални айни бир α бурчак остида кесиб ўтади (104- чизма). Баъзи чиганоқларнинг шакли логарифмик спиралга ўхшайди.

АДАБИЁТ

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., «Наука», 1968.

2. Атанасян Л. С. Геометрия I к. М., «Просвещение», 1973.

3. Атанасян Л. С. Сборник задач по аналитической геометрии М., «Просвещение», 1968.

4. Бакельман И. Я. Аналитик геометрия ва чизикли алгебра. Тошкент, «Ўқитувчи», 1978.

5. Болгов В. А., Демидович Б. П. ва бошқ. Линейная алгебра и основы математического анализа. М., «Наука» 1981.

6. Боревич З. И. Определители и матрицы. М., «Наука», 1988.

7. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., «Наука, 1980.

8. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. М. Прямые и кривые. М., «Наука», 1978.

9. Гусак А. А., Гусак Г. И. Линии и поверхности. Минск, «Высшая школа», 1985.

10. Данко П. Е. ва бошқ. Высшая математика в упражнениях и задачах. М., I қ. «Высшая школа», 1986 г.

11. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., «Наука», 1975.

12. Зайцев И. А. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1991.

13. Зельдович Я. Б., Яглом И. М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. М., «Наука», 1982.

14. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М., «Наука», 1981 г.

15. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., «Наука», 1982.

16. Кручкович Г. И. ва бошқ. Сборник задач по курсу высшей математики. М., «Высшая школа», 1980.

17. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., «Наука», 1979.

18. Ражабов Ф., Нурметов А. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент, «Ўқитувчи», 1990.

19. Рахимов А. Умумий электротехника. Тошкент, «Ўқитувчи», 1981.

20. Савелов А. А. Плоские кривые. М., «Физматгиз», 1960.

21. Садовничный В. А., Подколзин А. С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М., «Наука», 1978.

22. Пышкевич Р. И., Феденко А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск, «Высшая школа», 1976.

23. Шнейдер В. Е. ва бошқ. Олий математика қисқа курси. Тошкент, «Ўқитувчи», 1985.

24. Шодиев Т. Аналитик геометриядан қўлланма. Тошкент, «Ўқитувчи», 1973.

МУНДАРИЖА

Латипов Х. Р., Тожиев Ш. И., Рустамов Р.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» — 1995.

Кичик муҳаррир *Ш. Соибназарова*
Бадиий муҳаррир *Ж. Гурова*
Техник муҳаррир *А. Горшкова*
Мусаҳҳиҳ *Ў. Абдуқодирова*

Теришга берилди 07.02.95. Босишга рухсат этилди 24.08.95. Бичими $84 \times 108^1/_{32}$ «Таймс» гарнитурада офсет босма усулида босилди. Шартли бос. т. 15,96. Нашр бос. т. 13,85. Тиражи 4000. Буюртма № 632. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр № 194—94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Латипов Х. Р. ва бошқ.
Л 24 Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра: Олий ўқув юртлари учун дарслик/Х. Р. Латипов, Ш. И. Тожиев, Р. Рустамов.— Т.: Ўзбекистон, 1995.— 304 б.
I.1,2 Автордош.

ISBN 5-640-01785-6

Қўлланма олий техника ўқув юртлари учун тасдиқланган «Олий математика» дастури асосида ёзилган. Унда «Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра» курси материали техника ихтисосликларига мослаб баён қилинган. Математиканинг физика, механика, радиотехника, электротехникага татбиқларига алоҳида эътибор берилган.

Олий техника ўқув юртларининг кундузги, кечки ҳамда сиртқи бўлимларида таълим олаётган биринчи босқич талабаларига мўлжалланган.

22.151.5я73+22.143я73

$$\text{А}\ \frac{1602050000 - 118}{\text{М351 (04) 95}}\ 95$$