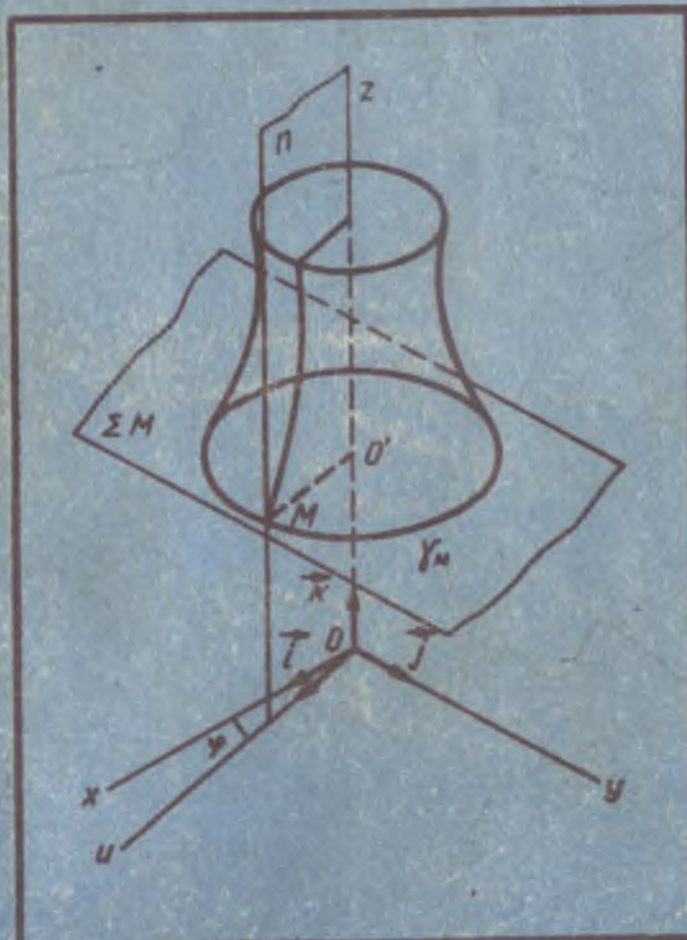
Ф. РАЖАБОВ   А. НУРМЕТОВ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА



Ф. Р. РАЖАБОВ, А. Н. НУРМЕТОВ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

Педагогика институтларининг „Умумтехник таълим ва меҳнат“ мутахассислиги студентлари учун ўқув қўлланма

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ“ 1990

Махсус муҳаррир—физика-математика фанлари номзоди, доцент *Н. Дадажонов.*

Қулланма педагогика институтларининг „Умумтехник таълим ва меҳнат“ мутахассислиги учун „Олий математика“ программаси асосида ёзилган. Унда олий математика курсининг векторлар алгебраси элементлари, аналитик геометрия элементлари ва чизиқли тенгламалар системасини ечиш бўлимлари материали қисқача баён этилган. Назарий материални ўзлаштиришга ёрдам берадиган етарлича мисоллар берилган.

Китоб педагогика институтлари талабаларига мўлжалланган.

Р $\frac{1602050000-244}{353(04)-90}$ 170—90

ISBN—5-645—00802—2

СЎЗ БОШИ

Мазкур қўлланма педагогика институтларининг „Умумтехник таълим ва меҳнат“ мутахассислиги бўйича таълим олаётган талабаларга мўлжалланган бўлиб, шу мутахассислик учун тасдиқланган „Олий математика“ программасининг I курс материалини ўз ичига олади. Қўлланманинг асосий вазифаси аналитик геометрия ва чизиқли алгебра курсига доир назарий материални қисқача баён этиш, темаларга доир мисол ва масалаларни ечиш усулларини кўрсатишдан иборат. Қўлланма 9 та боб ва баъзи ажойиб эгри чизиқларга бағишланган иловадан иборат. Муаллифлар программа материалини иложи борича қисқа, зарур жойларда мисоллар ечиш орқали тушунтириш билан баён этишга ҳаракат қилдилар. Ҳар қайси боб сўнгида талабаларнинг мустақил ечишлари учун машқлар келтирилган.

Қўлланмага муаллифларнинг В. И. Ленин номидаги Хоразм Давлат педагогика институтининг физика-математика ва ОТД факультетларида кўп йиллар давомида ўқиган лекция ва амалий машғулот материаллари асос қилиб олинди. Бундан ташқари шу соҳага тегишли мавжуд ўзбек ва рус тилидаги адабиётлардан ҳам кенг фойдаланилди. Фойдаланилган адабиёт рўйхати китоб охирида келтирилган.

Китоб қўлёзмасини ўқиб чиқиб ўзларининг фикр-мулоҳазаларини билдирган Хоразм Давлат педагогика институти алгебра ва математика ўқитиш методикаси кафедрасининг мудири, физика-математика фанлари номзоди, доцент И. А. Абдуллаев, катта ўқитувчи С. М. Машарипова, Тошкент Давлат педагогика институти геометрия кафедрасининг мудири, физика-математика фанлари номзоди, доцент И. Р. Юнусметов, Фарғона Давлат педагогика институти геометрия ва математика ўқитиш методикаси кафедрасининг мудири, педагогика фанлари номзоди, доцент Н. С. Сотволдиев, шу кафедра доценти, физика-математика фанлари номзоди Т. Абдурахмоновларга ва қўлланманинг мах-

сус муҳаррирлик вазифасини ўз зиммасига олиб, ундаги камчиликларни тузатишга ёрдам берган Тошкент Давлат педагогика институтининг доценти, физика-математика фанлари номзоди Н. Дадажоновга муаллифлар ўзларининг чуқур миннатдорчилигини билдирадилар.

Муаллифлар қўлланма ҳақида билдирилган фикр ва мулоҳазаларни миннатдорчилик билан қабул қиладилар.

Муаллифлар

I БОБ

ДЕТЕРМИНАНТЛАР ВА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

Бу бобда иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар назариясига доир маълумотлар ҳамда детерминантлардан фойдаланиб икки ва уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаларини ечишни ўрганамиз.

1-§. Иккинчи тартибли детерминантлар

Иккинчи тартибли детерминант тушунчасига икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системасини ечиш орқали келамиз.

Айтайлик, ушбу

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1}$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин, бунда номаълумлар олдидаги коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли. (1) системанинг тенгламаларидан биринчисининг ҳар иккала қисмини b_2 га, иккинчисини эса $-b_1$ га кўпайтириб, уларни ҳадма-ҳад қўшиб қуйидагини топамиз:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Шундан кейин биринчи тенгламанинг ҳар иккала қисмини $-a_2$ га, иккинчи тенгламанинг ҳар иккала қисмини эса a_1 га кўпайтириб ва ҳадма-ҳад қўшиб,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

ни топамиз.

Агар $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлса, (1) системанинг ечимлари мавжуд бўлиб, бу ечим қуйидагича топилади:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{2}$$

$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ бўлган ҳол кейинроқ алоҳида қаралади.

(1) системанинг x ва y ўзгарувчилари олдидаги коэффициентларидан ушбу

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

жадвални тузамиз. Одатда бундай жадвал *матрица* деб аталади. Бундай кўринишдаги ифодалар математиканинг турли соҳаларида кўп учраб туради. Шунинг учун улар учун махсус белгилаш ва номлар киритиш мақсадга мувофиқдир.

$\Delta = a_1b_2 - b_1a_2$ ифода (сон) (3) матрицанинг *детерминанти* дейилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ёки } \Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

a_1, b_1, a_2, b_2 сонлар (4) детерминантнинг *элементлари* дейилади. Бу детерминантнинг иккита сатри ва иккита устуни бор: a_1, a_2 сонлар биринчи устунни, b_1, b_2 сонлар иккинчи устунни ташкил қилади. Худди шундай, биринчи сатр элементлари: a_1, b_1, иккинчи сатр элементлари a_2, b_2 дан иборатдир.

a_1 ва b_2 элементлар *бош диагональ* элементлари, a_2 ва b_1 элементлар *ёрдамчи диагональ* элементлари дейилади. Шундай қилиб, иккинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш учун бош диагоналда турган элементлар кўпайтмасидан ёрдамчи диагоналда турган элементлар кўпайтмасини айириш керак, яъни

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Мисол. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг.

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

Ечиш. Иккинчи тартибли детерминантни ҳисоблашнинг юқоридаги қоидасига кўра топамиз:

$$1)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot(-5) = -6 + 5 = -1;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot(-\sin\alpha) =$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

2-§. Икки номаълумли иккита тенглама системасини текшириш

(1) тенгламалар системасини аналитик усулда текширишга ўтамиз. (1) система ечимга эга деб фараз қиламиз. Олдинги параграфда топилганлардан фойдаланиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad c_1b_2 - c_2b_1 =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

белгилашларни киритамиз, натижада (2) муносабатлар ушбу кўринишни олади:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \tag{5}$$

бу ерда Δ (1) системанинг детерминанти дейилади. Δ_x детерминант эса Δ нинг биринчи устун элементларини озод ҳадлар устуни билан алмаштириш орқали, Δ_y эса Δ нинг иккинчи устун элементларини озод ҳадлар устуни билан алмаштириш орқали ҳосил қилинган.

1. Аввал $\Delta \neq 0$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (1) система ҳар доим ечимга эга ва бу ечим ягона бўлиб, у (2) формулалар билан берилади.

2. $\Delta = 0$ бўлсин, у ҳолда ёрдамчи детерминантлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, (1) система битта ҳам ечимга эга эмас. Бунда (5) нинг тенгламаларидан камида бири ўринли бўлмайди. Шундай қилиб, $\Delta = 0$ бўлганда ва Δ_x ёки Δ_y ёрдамчи детерминантлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (1) система ечимга эга эмас. Одатда бундай ҳолда берилган системанинг тенгламалари биргаликда эмас дейилади.

3. Ниҳоят, $\Delta = 0$ ва $\Delta_x = \Delta_y = 0$ бўлсин. Бу ҳолда биринчи тенгламанинг коэффициентлари иккинчи тенгламанинг коэффициентларига пропорционал бўлади ва (1) система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Юқорида айтилганларни якунлаб қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: (1) система ечимга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолдан фарқли бўлиши зарур: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. $\Delta \neq 0$ бўлганда (1) нинг ягона ечими қуйидагича топилади:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Бу формулалар *Крамер формулалари* дейилади.

Мисол. Ушбу тенгламалар системасининг барча ечимларини топинг:

$$\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Ечиш. Системанинг детерминантларини тузамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7.$$

$\Delta \neq 0$ бўлгани учун, система ягона ечимга эга. Крамер формулаларига кўра:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1,$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

3- §. Учинчи тартибли детерминантлар

Ушбу

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин. Худди иккита чизиқли тенгламалар системасидагига ўхшаш, бу ерда ҳам учинчи тартибли детерминант тушунчасини киритамиз. Бу система коэффициентларидан тузилган учинчи тартибли квадрат матрица берилган бўлсин:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

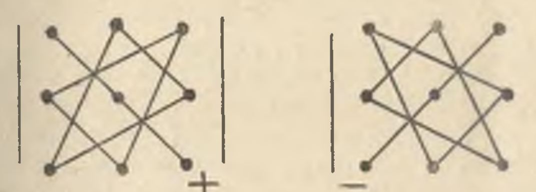
(6) матрицанинг учинчи тартибли детерминанти деб

$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \qquad (7)$$

сонга айтилади. Иккинчи тартибли детерминант бўлган ҳолдаги символикадан фойдаланиб, бу детерминант бундай белгиланади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

(7) даги ҳар қайси кўпайтма детерминантнинг ҳадлари дейилади. Ҳадлар олдидаги ишораларни эсда сақлаш қийин эмас. Қуйидаги схемалар бўйича (7) га кирувчи мусбат ва манфий ҳадларни аниқлаш осон:



Қулайлик учун детерминантнинг элементларини иккита индексли битта ҳарф билан белгилаш қабул қилинган бўлиб, бу индекслар, элемент турган сатр ва устунларнинг номерларини: биринчи индекс ҳар доим сатр номерини, иккинчи индекс эса устун номерини кўрсатади. Масалан, a_{32} ҳаднинг индекси учинчи сатрнинг иккинчи устуни элементи эканини билдиради. Бу белгилашлардан фойдаланиб, учинчи тартибли детерминантни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Мисол. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Юқоридаги схема ва (7) формулага кўра топамиз:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 5 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 4 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot(-1)\cdot 4 = -1;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = a\cdot a\cdot a + 1\cdot 1\cdot a + a\cdot(-1)\cdot(-1) - a\cdot a\cdot a - a\cdot 1\cdot(-1) - a\cdot 1\cdot(-1) = 4a.$$

4-§. Детерминантни берилган устуни ёки сатри элементлари бўйича ёйиш

n та сатр ва n та устундан иборат ушбу квадрат жадвал берилган бўлсин:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Бу жадвалга n-тартибли квадрат матрица дейилади. i-сатр ва j-устун кесишган жойда турган элементни a_{ij} билан белгилаймиз. Биз детерминантни берилган устуни ёки сатри элементлари бўйича ёйишда соддалик учун i, $j=1, 2, 3$ қийматлар билан чегараланамиз. Бошқача қилиб айтганда, учинчи тартибли квадрат матрица билан шуғулланамиз.

Детерминант элементининг алгебраик тўлдирувчиси тушунчасини киритамиз. Ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{10}$$

детерминантнинг a_{ik} элементини олайлик. Ушбу

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{11}$$

сон a_{ik} элсментнинг *алгебраик тўлдирувчиси* дейилади. Бу ерда Δ_{ik}—иккинчи тартибли детерминант. У берилган детерминантдан i-сатр ва k-устунни ўчириш орқали (ўчирилмай қолган элементлардан) ҳосил бўлади. Δ_{ik} детерминант a_{ik} элементнинг минори дейилали. Айтилганга кўра a_{22} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси қуйидагидан иборат бўлади:

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

минори:

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Худди шундай a_{21} нинг алгебраик тўлдирувчиси

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

дан иборат.

Детерминантни берилган сатри ёки устуни элементлари бўйича ёйишдан фойдаланиб, детерминантларни ҳисоблаш ишини осонлаштириш мумкин. Қуйидаги тасдиқни исботсиз келтирамиз:

Теорема. *Детерминант исталган сатри ёки устуни элементлари билан шу элементлар алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг:*

$$\Delta = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33}.$$

(Теорема исботи А. Г. Курошнинг „Олий алгебра курси“ китобида келтирилган.) Теорема юқори тартибли детерминантлар учун ҳам ўринли эканини қайд қилиб ўтамиз.

Мисол. Қуйидаги 3-тартибли детерминантни 1-сатри элементлари бўйича ёйиб ҳисобланг.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ечиш.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\3&-5&2\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&1\\-5&2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&-1\\3&-5\end{vmatrix}=(-2+5)-2\cdot(4-3)+(-10+3)=$$

$$=3-2-7=-6.$$

5-§. Детерминантнинг хоссалари

1. Детерминантнинг ҳамма устунларини унинг мос сатрлари билан (ёки аксинча) ўрнини алмаштиришдан детерминант ўзгармайди, яъни

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

Исбот. Δ — берилган детерминант, Δ^* эса Δ дан унинг сатрларини мос устунлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминант бўлсин. Δ ни биринчи сатр элементлари бўйича ёямиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

Энди Δ^* ни биринчи устун элементлари бўйича ёйиб чиқамиз:

$$\Delta^*=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{32}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}-$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{31}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{31}\\a_{22}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

Демак, $\Delta=\Delta^*$.

2. Детерминантнинг исталган иккита сатрининг (ёки икки устунининг) ўринлари алмаштирилса, детерминантнинг фақат ишораси ўзгаради. Масалан, агар биринчи ва учинчи сатрларнинг ўринларини алмаштирсак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

3. Иккита сатри ёки иккита устуни бир хил бўлган детерминантнинг қиймати нолга тенг.

4. Бирор сатр (ёки устун) элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин.

Исбот. Айтайлик, детерминантнинг иккинчи сатр элементлари умумий кўпайтувчига эга бўлсин:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни иккинчи сатр элементлари бўйича ёямиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{21}A_{21} + ka_{22}A_{22} +$$

$$+ ka_{23}A_{23} = k(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) = k\Delta.$$

5. Агар детерминант бирор i-сатри (устуни) нинг ҳар бир элементи иккита қўшилувчининг йиғиндисидан иборат, яъни $a_{ik} = b_k + c_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ бўлса, у ҳолда берилган детерминант шундай иккита детерминантнинг йиғиндисига тенг бўладики, бу детерминантларнинг i-сатридан бошқа сатрлари дастлабки детерминантникидай бўлади, уларнинг бирилаги i-сатр b_k элементлардан, иккинчиси эса c_k элементлардан иборат бўлади. Масалан,

$$\begin{vmatrix} a_1 + m_1 & a_2 + m_2 & a_3 + m_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

6. Детерминантнинг бирор устун (сатр) элементларига бошқа устуннинг (сатрнинг) бир хил сонга кўпайтирилган мос элементларини қўшишдан детерминантнинг қиймати ўзгармайди:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Детерминантнинг бирор устуни (сатри) элементларининг бошқа устуни (сатри) элементлари алгебраик тўлдирувчилари билан кўпайтмасининг йиғиндиси нолга тенг.

Баён қилинган хоссалар юқори тартибли детерминантлар учун ҳам тўғри.

6-§. n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси

Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{12}$$

кўринишдаги система n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системасини ифодалайди.

Бу системанинг ҳар бир тенгламасидаги $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумлар ўрнига мос равишда $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ сонларни қўйилганда (12) даги барча тенгламалар айниятга айланса, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ сонлар (12) системанинг ечими дейилади. 2-§ дагига ўхшаш, (12) системанинг ечими асосан қуйидаги детерминантга боғлиқдир:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

(13) детерминант (12) тенгламалар системасидаги номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган, у (12) системанинг детерминанти дейилади.

Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, система ягона ечимга эга бўлади ва бу ечим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \ldots\ ;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

формулалар ёрдамида топилади.

Бу ерда Δ_1 детерминант Δ детерминантдан биринчи устун элементларини озод ҳадлар билан алмаштиришдан (яъни (12) системадаги номаълумлар олдидаги коэффициентларни озод ҳадлар билан алмаштиришдан) ҳосил бўлади; Δ_2 эса Δ детерминантдан иккинчи устун элементларини озод ҳадлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлади, $\Delta_3, \ldots, \Delta_n$ лар ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилинади.

n та чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг бундай усули Крамер қоидаси дейилади. Демак, n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системасини ечиш учун $n+1$ та детерминант тузиш керак. Бу эса ҳисоблаш ишини кўпайтиради, шунинг учун ҳам амалий ишларда бошқа методлардан фойдаланилади.

7-§. Уч номаълумли учта чизиқли тенглама системаси

Уч номаълумли учта чизиқли тенглама системасини текшириш билан шуғулланамиз. Чизиқли тенгламаларнинг ушбу

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= d_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= d_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= d_3 \end{aligned} \tag{14}$$

системаси берилган бўлсин. Номаълумлар олдидаги коэффициентлардан тузилган детерминантни Δ билан белгилаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Ёрдамчи детерминантларни тузамиз:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}.$$

Берилган система x, y, z ечимга эга бўлса, бу ечимни топиш учун қуйидаги формулаларга эга буламиз

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (16)$$

Қуйидаги ҳоллар содир бўлиши мумкин.

1. $\Delta \neq 0$. Бу ҳолда (16) формулалардан (14) система битта ечимга эга экани келиб чиқади.

2. $\Delta = 0$ ва Δ_x, Δ_y, Δ_z детерминантлардан ақалли биттаси нолдан фарқли. Бу ҳолда (14) система ечимга эга бўлмайди.

3. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Бу ҳолда (14) система ё чексиз кўп ечимга эга бўлади, ёки умуман ечимга эга бўлмайди.

1-мисол. Ушбу уч номаълумли учта чизиқли тенглама системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=2, \\ 3x-y+2z=-3, \\ x+y-3z=4. \end{cases}$$

Ечиш. Берилган системанинг асосий детерминанти ва ёрдамчи детерминантларини тузамиз.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=6+3+6+1-4+27=39\neq 0;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=6-3+24+4-4-27=34-34=0;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=18+12+4+3-16+18=39;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-8+6-9+2+6-36=-39;$$

Демак, $\Delta \neq 0$ бўлгани учун система ягона ечимга эга. Бу ечим қуйидагидир:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{0}{39}=0.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-39}{39} = -1.$$

Жавоб. (0; 1; — 1).

2-мисол. Ушбу системани ечайлик:

$$\begin{cases} x - 5y + 2z = 1, \\ 3x - 25y + 6z = 7, \\ 9x - 45y + 18z = -3. \end{cases}$$

Ечиш. Бевосита ҳисоблаш орқали $\Delta = \Delta_y = 0$, $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_z \neq 0$ эканига ишонч ҳосил қилиш осон. Бундан кўринадики система ечимга эга эмас.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ x - 4y - z = -4 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Бевосита ҳисобласак, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ га эгамиз. Кўриниб турибдики, системанинг учинчи тенгламаси иккинчи ва биринчи тенгламаларнинг айирмасидан иборат. Шундай қилиб, берилган системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} x + 5y = z + 5, \\ 2x + y = 2z + 1. \end{cases}$$

Бу системанинг детерминанти:

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9 \neq 0,$$

шунинг учун қуйидагига эгамиз:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z+5 & 5 \\ 2z+1 & 1 \end{vmatrix}}{\sigma} = \frac{z + 5 - 10z - 5}{-9} = \frac{-9z}{-9} = z,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z+5 \\ 2 & 2z+1 \end{vmatrix}}{\sigma} = \frac{2z + 1 - 2z - 10}{-9} = \frac{-9}{-9} = 1.$$

Бундан, дастлабки система чексиз кўп ечимга эга эканини келиб чиқади, чунки z ни ихтиёрий олиб, z бўйича

x ва y нинг қийматларини топамиз. Масалан, $z = -2$; деб олиб, $x = -2$; $y = 1$ ни, $z = 3$ деб олиб, $x = 3$ $y = 1$ ни топамиз ва ҳоказо.

8-§. Уч номаълумли учта тенгламанинг бир жинсли системаси

Барча озод ҳадлари нолга тенг бўлган чизиқли тенгламалар системаси бир жинсли система дейилади. У қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \tag{17}$$

(17) кўринишдаги исталган бир жинсли система ҳеч бўлмаганда битта ечимга эга, чунончи $x = y = z = 0$ ечимга, яъни ноль ечимга эга. Бу система қачон нолга тенг бўлмаган ечимга эга бўлишини аниқлаш учун иккита ҳолни қараб чиқамиз.

1) Система детерминанти нолдан фарқли, яъни $\Delta \neq 0$. Бу ҳолда (17) система фақат ноль ечимга эга бўлади:

$$x = y = z = 0.$$

2. $\Delta = 0$. Бу —(17) системанинг нолга тенг бўлмаган ечими мавжуд бўлиши учун зарурий шарт ҳисобланади. Бу ҳолда система чексиз кўп ноль бўлмаган ечимларга эга булади.

1) Буни исбот қилиш учун дастлаб Δ детерминантнинг алгебраик тўлдирувчиларидан камида биттаси нолдан фарқли деб фараз қиламиз, масалан

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин. (17) системанинг дастлабки иккита тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases} \tag{18}$$

Энди

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

бўлгани учун исталган z да (17) система ушбу

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{31}}{A_{33}} z;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{32}}{A_{33}} \cdot z$$

формулалар билан аниқланувчи ечимларга эга бўлади. Агар $k = \frac{z}{A_{33}}$ деб олсак, (18) нинг ечимини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = kA_{31};\ y = kA_{32};\ z = kA_{33}.$$

k сон исталган қийматларни қабул қилиши мумкин.

Биз берилган (17) системанинг дастлабки икки тенгламаси ечимини топдик. Бу ечимлар k нинг ҳар қандай қийматида (17) системанинг учинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиришини кўрсатиш мумкин. Юқорида айтганимиздек, k исталган қийматларни қабул қилгани учун (17) система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

б) Энди Δ детерминантнинг барча алгебраик тўлдирувчилари нолга тенг деб фараз қиламиз. У ҳолда (17) системанинг ҳар қандай иккита тенгламаси пропорционал коэффициентларга эга бўлади ва демак, системанинг ҳар қандай иккита тенгламасини улардан бирининг ҳамма ҳадларини бирор кўпайтувчига кўпайтириш орқали иккинчисига келтириш мумкин, бинобарин система битта тенгламага келтирилади—қолган иккита тенглама бу тенгламанинг натижаси булади.

Равшанки, бундай система чексиз кўп ноль бўлмаган ечимга эга (чунки иккита номаълумга ихтиёрий сонли қийматлар бериб, учинчи ечимни эса системанинг бирдан-бир эркли тенгламасидан топиш мумкин).

Мисол. Ушбу тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Ечиш. Системада $\Delta = 0$ эканини кўриш мумкин. Системанинг дастлабки иккита тенгламасини

$$\begin{cases} x + 2y = -3z, \\ 2x + y = z \end{cases}$$

кўринишда ёзамиз. Бу системани Крамер қоидаси бўйича ечамиз.

$$\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3.$$

Энди

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ z & 1 \end{vmatrix}}{\sigma} = \frac{-3z-2z}{-3} = \frac{-5z}{-3} = \frac{5}{3}z;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 2 & z \end{vmatrix}}{\sigma} = \frac{z+6z}{-3} = \frac{7z}{-3} = \frac{7}{-3}\cdot z.$$

Демак, берилган система чексиз кўп ечимга эга экан, чунки z ни ихтиёрий олиб, x ва y ларнинг мос қийматларини топамиз. Масалан, $z=-3$ деб олиб, $x=-5$; $y=7$ ни, $z=6$ деб олиб, $x=10$, $y=-14$ ларни топамиз ва ҳоказо.

9. §. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс методи билан ечиш

Биз шу пайтгача тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлган чизиқли тенгламалар системасини қарадик. Агар бундай системанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса, у ҳолда система ягона ечимга эга бўлиши маълум.

Энди ихтиёрий, яъни тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлмаган чизиқли тенгламалар системасини текширамиз. Бундай система учун ечим ягона бўлмаслиги ёки умуман ечим мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин. Чизиқли тенгламалар системаси бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса, система биргаликда бўлмаган система дейилади. Агар чизиқли тенгламалар системаси ечимга эга бўлса, бундай система биргаликда дейилади. (Агар биргаликда бўлган система ягона ечимга эга бўлса, система аниқ система деб, агар ечим биттадан кўп бўлса, аниқмас система деб аталади.)

Энди коэффициентлари соңлардан иборат бўлган система ечимларини топиш учун қулай бўлган номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулини, яъни Гаусс методини баён қилишга ўтамиз. Қуйидаги ихтиёрий чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = c_s. \end{cases} \tag{19}$$

(19) да $a_{11} \neq 0$ бўлсин деб фараз қилайлик. a_{11} нолга тенг бўлиши ҳам мумкин. Бундай ҳолда ишни системанинг биринчи тенгламасидаги бирорта нолдан фарқли коэффициентдан бошлаш керак. Дастлаб биринчи тенгламадан ташқари барча тенгламаларда x_1 ни йўқотиб, (19) системани ўзгартирамиз. Бунинг учун биринчи тенгламанинг ҳар иккала томонини $a_{11} \neq 0$ га бўлиб чиқамиз. Натижада берилган системага эквивалент ушбу янги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{c_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{lk}x_k + \ldots + a_{ln}x_n = c_l, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk} + \ldots + a_{mn}x_n = c_m. \end{array}\right| \tag{20}$$

Энди бу системанинг биринчи тенгламасини a_{21} га кўпайтирамиз ва иккинчи тенгламадан айирамиз. Бу ишни давом эттириб, биринчи тенгламани энди a_{31} га кўпайтириб, учинчи тенгламадан айирамиз ва ҳ. к. Бу жараённи шундай давом эттириб, маълум қадамдан кейин берилган системага тенг кучли бўлган қуйидаги янги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + a'_{1}x_2 + \ldots + a'_{1k}x_k + \ldots + a'_{1n}x_n = c'_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = c'_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad a'_{l2}x_2 + \ldots + a'_{lk}x_k + \ldots + a'_{ln}x_n = c'_l, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mk}x_k + \ldots + a'_{mn}x_n = c'_m. \end{array}\right\} \tag{21}$$

Бу ерда қуйидагича белгилашлардан фойдаланилган:

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}},\ a'_{lk} = a_{lk} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{21};\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{2,n},$$

$$c'_1 = \frac{c_1}{a_{11}},\ c'_l = c_l - \frac{c_1}{a_{11}}a_{21};\ i = \overline{2,m}.$$

a'_{22} коэффициентни ноллан фарқли деб фараз қилиб, (21) системанинг иккинчи тенгламасини a'_{22} га бўламиз ва ҳосил бўлган системанинг иккинчи тенгламасини кетма-кет $a'_{32}, \ldots, a'_{i2}, \ldots, a'_{m2}$ га кўпайтирамиз ҳамда навбатма-навбат системанинг тегишли (биринчи ва иккинчи тенгламаларидан ташқари) тенгламаларидан айирамиз.

Бу жараённи давом эттириб, чап томонидаги барча коэффициентлари ноль бўлган, озод ҳади эса нолдан фарқли тенгламага эга бўлган системага келсак, бу система юқорида кўрсатилганидек, биргаликда бўлмайди. Агар система биргаликда бўлса, қуйидаги системалардан бирини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1k}x_k + \ldots + b_{1n}x_n &= B_1, \\ x_2 + \ldots + b_{2k}x_k + \ldots + b_{2n}x_n &= B_2. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p + \ldots + b_{pn}x_n &= B_p \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

ёки (бунда $p<n$)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1k}x_k + \ldots + b_{1n}x_n &= B_1. \\ x_2 + \ldots + b_{2k}x_k + \ldots + b_{2n}x_n &= B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + \ldots + b_{kn}x_n &= B_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= B_n. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

(22)—поғонасимон (трапеция), (23) эса учбурчак кўринишдаги система дейилади. (23) бўлган ҳолда охирги тенгламадан $x_n = B_n$ га эгамиз. x_n нинг қийматини олдинги тенгламага қўйиб, x_{n-1} ни топамиз, уни ўз навбатида олдинги тенгламага қўйиб, x_{n-2} ни топамиз ва ҳ. к.

Юқорида айтилганларни якунлаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз. Гаусс методини чизиқли тенгламаларнинг ҳар қандай системаси учун татбиқ этиш мумкин. Бунда, агар алмаштиришлар жараёнида барча номаълумларнинг олдидаги коэффициентлари нолга тенг, озод ҳади эса нолдан фарқли бўлган тенглама ҳосил қилсак система биргаликда бўлмайди; агар бундай тенгламага эга бўлмасак, система биргаликда бўлади. Агар биргаликдаги система (23) учбурчак кўринишига келса, у аниқ бўлади, (22) кўринишига келса, аниқмас бўлади.

Айтилганларни чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси бўлган ҳолга, яъни озод ҳадлар нолга тенг бўлган тенгламаларга ҳам қўллаш мумкин. Бундай система ҳар доим биргаликда бўлади, чунки у (0; 0; ..., 0) ноль ечимга эга. Қаралаётган системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан кичик бўлсин. У ҳолда, системамиз учбурчак шаклига келтирилиши мумкин эмас, чунки Гаусс методи бўйича ўзгартириш жараёнида тенгламалар сони камайиши мумкин, лекин ортиши мумкин эмас; бинобарин у (22) кўринишга келтирилади, яъни аниқмасдир.

1-мисол. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини Гаусс методи билан ечинг:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Ечиш. Биринчи тенгламадаги x_1 олдида турган коэффициент (агар $\neq 0$) ёрдамида қолган тенгламалардаги x_1 номаълумдан қутуламиз. Бунинг учун, биринчи тенгламанинг барча ҳадларини 2 га кўпайтириб, иккинчи тенгламадан айирамиз. Биринчи тенгламанинг ўзини учинчи тенгламадан айирамиз. Натижада қуйидаги кўринишдаги системага эга бўламиз:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -5x_2 - 4x_3 &= 4, \\ -x_2 - 6x_3 &= 6. \end{aligned}\right.$$

Иккинчи ва учинчи тенгламалар фақат x_2 ва x_3 номаълумларга эга. Учинчи тенгламанинг ҳадларини 5 га кўпайтириб, 2-тенгламадан айирамиз. Натижада тубандаги система ҳосил бўлади:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -5x_2 - 4x_3 &= 4, \\ -26x_3 &= 26. \end{aligned}\right.$$

Учинчи тенгламадан: $x_3 = -1$, буни иккинчи тенгламага қўйиб, x_2 номаълумни топамиз:

$$-5x_2 - 4\cdot(-1) = 4,$$
$$x_2 = 0.$$

x_3 ва x_2 номаълумларнинг қийматларини биринчи тенгламага қўйиб, x_1 номаълумни топамиз:

$$x_1 + 0 - 3 = 1;\ x_1 = 4.$$

Жавоб: (4; 0; — 1).

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш. Биринчи тенгламадаги x_2 олдида турган коэффициент ёрдамида қолган тенгламалардаги x_2 номаълумдан қутуламиз. Бунинг учун биринчи тенглама ҳадларини учга, иккинчи тенглама ҳадларини 2 га кўпайтириб, биринчи тенгламани иккинчи тенгламадан айирамиз. Биринчи тенглама ҳадларини 2 га кўпайтириб, учинчи тенгламадан айирамиз. Натижада қуйидаги кўринишдаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 0 - 2x_3 = -11, \\ 0 + 0 + 0 = 0. \end{cases}$$

Учинчи тенглама ҳадлари ва озод ҳади ноллардан иборат бўлгани учун, бу тенгламани ташлаб юборсак, тубандаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 \qquad\quad -7x_3 = -11. \end{cases}$$

Биринчи тенгламадаги x_1 номаълумдан қутулиш учун биринчи тенгламани иккинчи тенгламадан айирсак, x_1 ва x_2 номаълумларга нисбатан ечиладиган ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} -2x_2 - 10x_3 = -18, \\ \qquad x_1 - 7x_3 = -11. \end{cases}$$

Иккинчи тенгламадан x_1 ни, биринчи тенгламадан x_2 ни топамиз:

$$x_1 = 7x_3 - 11,$$
$$x_2 = -5x_3 + 9.$$

Бу ерда x_3 ихтиёрий сон.

Машқлар

1. Иккинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Учинчи тартибли детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Тенгламалар ва тенгсизликларни ечинг:

а) $\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x+24 & 5x \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} 2x-5 & 1 \\ 4x & 1 \end{vmatrix} > 0$; г) $\begin{vmatrix} 1 & x+3 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0$.

4. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x+2y=5, \\ -3x+y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ x+y=3. \end{cases}$

5. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантни биринчи устун элементлари бўйича ёйиб ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

6. Қуйидаги учинчи тартибли детерминантни иккинчи сатр элементлари бўйича ёйиб ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=3; \\ 2x+y-z=1; \\ 3x+3y+z=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y-z=4, \\ 2x-y+3z=11, \\ x+y-2z=-1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y+z=5, \\ 2x+3y-z=1, \\ 4x-y+z=3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x-3y+4z=5, \\ -x+2y\mp z=1. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ 2x+3y-5z=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-y+3z=0, \\ x+2y-5z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

8. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс методидан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=5, \\ 2x_1+x_2+3x_3=-5, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-2, \\ x_1+2x_2+x_3=7, \\ -3x_1+x_2-2x_3=-1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3=6, \\ -x_1+5x_2+x_3=7, \\ 2x_1-4x_2-x_3=-2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=-6, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=-5, \\ x_1+3x_2+2x_3=5. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=1, \\ 2x_1+4x_2-2x_3=-6. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=7, \\ -x_1-5x_2+x_3=13, \\ x_1+4x_2-3x_3=-12. \end{cases}$

II БОБ

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ УМУМИЙ НАЗАРИЯСИ

1-§. Матрицанинг ранги

Бизга m та сатр ва n та устундан иборат $m\times n$ ўлчамли қуйидаги матрица берилган бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бу матрицанинг ҳар бир устунини m ўлчовли вектор сифатида қараш мумкин. Бу векторлар сифатида қаралаётган устунлар чизиқли боғлиқ бўлиши ҳам мумкин. Матрицанинг ранги таърифини беришдан олдин чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли векторлар системасига таърифь берамиз. Айтайлик, бизга ихтиёрий $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси ва $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин.

1-таъриф. Ушбу $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторларнинг *чизиқли комбинацияси*, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ лар эса комбинациянинг *коэффициентлари* дейилади.

2-таъриф. Агар $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлиб $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар чизиқли *боғлиқ* дейилади.

3-таъриф. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ тенглик $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сонларнинг барчаси нолга тенг бўлганда бажарилса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар чизиқли *эркли* деб аталади

Энди матрица рангига таъриф берамиз.

4-таъриф. Матрицанинг *ранги* деб унинг чизиқли эркли устунларининг (сатрларининг) максимал сонига айтилади ва у rang $A = r$ кўринишда белгиланади (бунда r — матрицанинг ранги).

Матрицанинг сатрлар системаси ранги устунлар системаси рангига тенг. A матрицада ихтиёрий k та сатр ва k та устунни оламиз.

Бу сатр ва устунларнинг кесишишидан ҳосил бўлган матрица k-тартибли квадрат матрицани ташкил этади, бу матрицанинг детерминанти A матрицанинг k-тартибли *минори* дейилади. A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби k га тенг бўлсин. У тубандаги схемада тўртбурчак ичида кўрсатилган:

$$A = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & D & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & \ldots & a_{kk} & a_{kk+1} & \ldots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mk} & a_{mk+1} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right|$$

A матрица минорларининг орасидаги катта тартиблисини билиш қизиқарли ва зарурдир. Агар A матрицанинг k-тартибли барча минорлари нолга тенг бўлса, у ҳолда унинг k дан юқори тартибли барча минорлари ҳам нолга тенг бўлади. Матрица ранги ҳақидаги қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема. *Матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби бу матрицанинг рангига тенг* (теорема исботи А. Г. Курошнинг „Олий алгебра курси“ китобида келтирилган). Матрицанинг рангини бу теоремадан фойдаланиб топишда бу матрицанинг жуда кўп минорларини ҳисоблаш зарур бўлади. Шунинг учун матрица рангини ҳисоблашнинг қуйидаги осон қоидасини келтирамиз:

Берилган матрица рангини ҳисоблаш учун қуйи тартибли минорлардан юқори тартибли минорларга ўтиш керак. Агар нолга тенг бўлмаган (k-тартибли) минорни топган бўлсак, у ҳолда бу минорни ўраб турувчи (ҳошияловчи) $(k+1)$-тартибли минорларнинг ўзигина ҳисобланади. Бунда, агар бу минорларнинг барчаси нолга тенг бўлса, берилган матрицанинг ранги k га тенг бўлади деб хулоса чиқарамиз. Юқорида кўриб ўтилган таърифлардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

1-натижа. Ҳар қандай матрицанинг чизиқли эркли сатрларининг максимал сони унинг чизиқли эркли устунларининг максимал сонига, яъни бу матрица рангига тенг.

2-натижа. n-тартибли детерминантнинг сатрлари орасида чизиқли боғланиш мавжуд бўлган ҳолдагина ва фақат шу ҳолдагина у нолга тенг бўлади.

Матрица рангини ҳисоблаш ҳақидаги теорема ва натижалардан фойдаланмасдан ҳам матрица рангини ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда қайси устунлар (ёки сатрлар) максимал чизиқли эркли система ташкил этишини топмасдан тўғридан-тўғри матрица ранги ҳисобланади, шу сабабли фақат рангнинг ўзинигина билиш керак бўлган ҳолдагина бу методдан фойдаланиш мумкин. Бу метод элементар алмаштиришлар деб аталади. Булар:

а) иккита сатрнинг ёки устуннинг ўрнини алмаштириш (транспозиция);

б) сатр (ёки устун) ни нолдан фарқли ихтиёрий сонга кўпайтириш;

в) бир сатрга ёки устунга бирор сонга кўпайтирилган бошқа сатр (устунни) қўшиш.

Элементар алмаштиришлар матрицанинг рангини ўзгартирмайди.

1-мисол. Қуйидаги матрица рангини матрица минорларини ҳошиялаш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. Ишни 1-тартибли минорлардан бошлаймиз, бунинг учун биринчи устун ва қаторнинг кесишган жойида биринчи қатор ва иккинчи устунни „ҳошияласак“,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

минорга эга бўламиз.

Иккинчи қатор ва учинчи устунни „ҳошияласак“;

$$M_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

Энди, учинчи тартибли минорларга ўтсак, M_2 минорни ҳошияловчи минорлар фақат иккита бўлиб, улар нолга тенг:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

Демак, матрицанинг рангини ҳисоблаш қоидасига кўра $\operatorname{rang}(A)=2$.

2-мисол. Берилган

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 & -19 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Ечиш. Матрица рангини элементар алмаштиришлардан фойдаланиб топамиз:

$$A\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 9 & -19 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 15 & -29 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Бундан $\operatorname{rang}(A)=3$.

2-§. Чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш шарти

Бизга n номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Агар чизиқли тенгламалар системаси ечимларга эга бўлса, система биргаликда дейилади.

(1) системанинг биргаликда бўлиш-бўлмаслик шартини аниқлаймиз. Агар биргаликда бўлган система битта ечимга эга бўлса, у аниқ система, биттадан кўп ечимга эга бўлса, аниқмас система деб аталади. (1) система коэффициентларидан ушбу A матрицани:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ва бу матрицага озод ҳадни қўшиб кенгайтирилган B матрицани тўзамиз:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Берилган (1) чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш шартини қуйидаги Кронекер — Капелли теоремаси ифодалайди:

Теорема *Чизиқли тенгламалар системаси ечимга эга бўлиши учун A матрицанинг ранги кенгай-*

тирилган B матрицанинг рангига тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Теореманинг олдин зарурийлик шартини, кейин эса етарлилик шартини исбот қиламиз.

а) (1) система биргаликда бўлсин ва $c_1, c_2, \ldots, c_n$ унинг ечимларидан бири бўлсин. Бу ечимлар системани m та айниятга айлантиради:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \ (1 \leqslant i \leqslant m). \quad (2)$$

Кўриниб турибдики, B матрицанинг охирги устунидан бошқа барча устунлари A матрицага киради, ва аксинча, A матрица B матрицанинг бир қисми ҳисобланади, яъни A матрицанинг ҳар қайси устуни B нинг ҳам устуни бўлади, демак, бу матрицанинг устунлари орқали чизиқли ифодаланади. Бундан A ва B матрицаларнинг устунлари системаси ўзаро эквивалент эканлиги келиб чиқади, шунинг учун бу иккала ўлчовли векторлар системаси бир хил рангга эга, яъни A ва B матрицаларнинг ранглари бир-бирига тенг:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

б) Теореманинг иккинчи қисмини исбот қилайлик. A ва B матрицалар бир хил рангга эга бўлсин. Бу — A матрица устунларининг исталган максимал чизиқли эркли системаси B матрицада ҳам шундай чизиқли эркли система бўлади деган сўз. Демак B матрицанинг охирги устуни A матрица устунлари орқали чизиқли ифодаланади, яъни (2) муносабат кўринишида бўлади. Шундай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сонлар мавжудки, буларни коэффициентлар сифатида олиб уларни A матрица устунларига мос равишда кўпайтириб, бу кўпайтмаларни қўшиб чиқсак, B матрицадаги озод ҳадлар устунига тенг бўлади. Шунинг учун, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сонлар (1) системанинг ечими бўлади. Демак, A ва B матрица рангларининг тенглигидан (1) системанинг биргаликда бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Қуйидаги системанинг биргаликда бўлиш-бўлмаслигини текширинг:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Системанинг асосий (A) ва кенгайтирилган (B) матрицаларини тузиб, уларнинг рангларини топамиз:

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\1&3&-1&2\\1&-5&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&-4&3&-1\\0&4&-3&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&-4&3&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rang}(B)=3.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&3&-1\\1&-5&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-4&3\\0&4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-4&3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rang}(A)=2.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{rang}(A)\neq\operatorname{rang}(B)$. Демак, система биргаликда эмас.

Машқлар

1. Минорни ҳошиялаш усули билан матрицаларнинг рангини топинг:

а) $\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\3&-1&3&-3\\3&5&-13&11\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}2&3&3\\1&5&2\\4&1&1\end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix}2&3&4&1\\1&3&5&6\\2&4&3&2\end{pmatrix}$.

2. Қуйидаги матрицаларнинг рангини элементар алмаштиришлар ёрдамида топинг:

а) $\begin{pmatrix}2&1&-3\\3&1&-5\\4&2&-1\\1&0&-7\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}1&1&3&2\\2&0&1&3\\3&0&1&2\\3&4&1&0\end{pmatrix}$.

3. A матрицанинг рангини икки усул билан (элементар алмаштиришлар ва минорлар орқали) топиб, натижа бир хил бўлишини кўрсатинг:

$$A=\begin{pmatrix}5&0&4&3\\3&2&4&1\\7&3&2&4\\1&2&1&7\end{pmatrix}.$$

4. Тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш-бўлмаслигини текширинг:

а) $\begin{cases}x-2y+3z=6,\\2x+3y-4z=20,\\3x-2y-5z=6.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-2y-z=2,\\3x-6y-3z=6,\\5x-10y-5z=10.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+2y+z=8,\\3x+2y+z=10,\\4x+3y-2z=4.\end{cases}$

III БОБ

МАТРИЦАЛАР АЛГЕБРАСИ

1-§. Матрицаларни кўпайтириш

Матрицаларнинг кўпайтмаси ҳақида биринчи кўпайтувчининг сатрлари сони иккинчи кўпайтувчининг устунлари сонига тенг бўлган ҳолдагина сўз юритиш мумкин, яъни фақат $(m\times n)$ ўлчамли матрицани $(n\times k)$ ўлчамли матрицага кўпайтириш мумкин. Кўпайтмада $(m\times k)$ ўлчамли матрица ҳосил бўлади. Буни қуйидаги схема билан ифодалаш мумкин:

$$(m\times n)(n\times k)=(m\times k).$$

Хусусий ҳолда, квадрат матрицаларни кўпайтириш учун уларнинг тартиблари бир хил бўлиши талаб қилинади. Кўпайтма ҳам худди шу тартибдаги квадрат матрицани ифодалайди.

Айтайлик, бизга A ва B матрицалар берилган бўлсин. A ва B матрицаларни кўпайтириш қоидаси қуйидагича: $A\cdot B=C$ кўпайтманинг ҳар бир c_{ij} элементини ҳосил қилиш учун A матрицанинг i-сатридаги элементларини B нинг j-устунидаги мос элементларига кўпайтириб, натижалар қўшилади. Масалан, $(m\times n)$ ўлчамли ($m\times n$-матрица)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1l}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2l}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{i1}&a_{i2}&\dots&a_{il}&\dots&a_{in}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{ml}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

ва $(n \times k)$ ўлчамли

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sj} & \dots & b_{sk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

матрицаларни кўпайтириш натижасида $(m \times k)$ ўлчамли

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{bmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади, бунда

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{il}b_{sj}+\dots+a_{in}b_{nj}=$$
$$=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj};\ \begin{pmatrix} i=\overline{1,\ m} \\ j=\overline{1,\ k}\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Матрицаларни кўпайтириш коммутативлик хоссасига эга эмас, яъни $A \cdot B \neq B \cdot A$. Учта матрицани купайтириш $[(m \times n)(n \times k)](k \times p)=(m \times k)(k \times p)=(m \times p)$ схема бўйича амалга оширилади. Матрицаларни кўпайтириш ассоциативлик хоссасига эга, яъни

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

тенглик ўринлидир.

Мисол.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг кўпайтмасини топинг.

Ечиш. (*) формулага кўра:

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot2+3\cdot1+(-1)\cdot3 & 2\cdot1+3\cdot3+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot5+3\cdot(-2)+(-1)\cdot3 \\ 1\cdot2+(-2)\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+(-2)\cdot3+3\cdot(-1) & 1\cdot5+(-2)\cdot(-2)+3\cdot3 \\ 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot3 & 3\cdot1+1\cdot3+1\cdot(-1) & 3\cdot5+1\cdot(-2)+1\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 9 & -8 & 18 \\ 10 & 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

2-§. Тескари матрица

Бош диагонал элементлари бирлардан ва қолган ҳамма элементлари ноллардан иборат

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишдаги n-тартибли квадрат матрица бирлик матрица дейилади. Олдинги темага асосан, E матрица n-тартибли исталган A матрица учун

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

шартни қаноатлантирувчи ягона матрица экани келиб чиқади.

1-таъриф A матрица учун $A \cdot B = E$ тенгликни қаноатлантирувчи B матрица A га *тескари* матрица дейилади ва у $B = A^{-1}$ кўринишида белгиланади.

2-таъриф. Сатрлари чизиқли эркли матрица *хосмас* деб ва сатрлари чизиқли боғланган матрица *хос* матрица деб аталади

Хосмас матрицаларга доир қуйидаги иккита теоремани исботсиз келтирамиз.

1-теорема. Хосмас матрицани элементар алмаштиришлар ёрдамида бирлик матрицага келтириш мумкин.

2-теорема. Хосмас матрицага тескари матрица мавжуд ва ягонадир. (Теоремаларнинг исботлари А. Г. Курошнинг „Олий алгебра курси“ китобида келтирилган.)

Тескари матрицани топиш

Айтайлик, n-тартибли квадрат, хосмас A матриц[а] берилган бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A матрицага тескари B матрицани топиш учун, ун[и] қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right). \qquad (1)$$

Чап томонда берилган A матрица, ўнг томонда E бир[ли]лик матрица ёзилган. Бу матрицаларнинг иккаласи[га] бир вақтда A матрицани бирлик E матрицага келтира[ди]диган сатрлар бўйича элементар алмаштиришлар қўл[лай]лаймиз. Натижада (1) матрица қуйидаги кўринишга ке[ла]лади:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right). \qquad (2)$$

(2) нинг ўнг томонидаги матрица худди A га тескар[и] B матрицани ифодалайди, яъни

$$A\cdot B=E$$

бўлади. A матрица ўз навбатида B га тескари бўлга[н]лиги сабабли $B\cdot A=E$ ҳам бажарилади.

Мисол. Берилган

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари бўлган A^{-1} матрицани топинг.

Ечиш. Бунинг учун қуйидаги матрицани тузамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Биринчи устунни 1 га, сўнгра—2 га кўпайтириб, мос равишда иккинчи ва учинчи устунга қўшамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

Иккинчи устунни 2 га ва 1 га кўпайтириб, мос равишда биринчи ва учинчи устунга қўшамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Учинчи устунни -3 га кўпайтириб, биринчи устунга қўшамиз ва иккинчи устунни -1 га кўпайтирамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Иккинчи ва учинчи устунларни алмаштирамиз:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Натижада A га тескари A^{-1} матрицага эга бўламиз:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3-§. Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар кўринишида ифодалаш

Бизга n номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (3)$$

Бу система коэффициентларидан тузилган матрица қуйидагича бўлади:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Биз фақат A хосмас матрица бўлган ҳолнигина қараймиз. (3) системанинг чап томонида A матрицани

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

матрицага кўпайтиришдан келиб чиқадиган n сатрли ва бир устунли матрицанинг элементлари, системанинг ўнг томонида эса

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

матрицанинг элементлари турибди. Шу сабабли икки матрицанинг тенглик таърифига асосан, (3) ни тубандагича

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

ёки, қисқача

$$A\cdot X=B \tag{4}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама матрицавий тенглама (чизиқли тенгламалар системасини матрицали кў-

риниши) дейилади. A хосмас матрица бўлгани сабабли, унга тескари бўлган A^{-1} матрица мавжуд, шу сабабли (4) ни чап томондан A^{-1} га кўпайтирамиз: $A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot X$, лекин $A^{-1}(A\cdot X)=(A^{-1}\cdot A)\times X=EX=X$, демак,

$$X=A^{-1}\cdot B$$

ёки

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a'_{11}b_1+a'_{12}b_2+\ldots+a'_{1n}b_n \\ a'_{21}b_1+a'_{22}b_2+\ldots+a'_{2n}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{n1}b_1+a'_{n2}b_2+\ldots+a'_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Бундан эса, икки матрицанинг тенглик шартига асосан (4) ёки (3) нинг ечимига эга бўламиз:

$$x_i=a'_{i1}b_1+a'_{i2}b_2+\ldots+a'_{in}b_n,\quad (i=\overline{1,\ n}). \tag{5}$$

Мисол.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ 5x_1+2x_2+4x_3=1, \\ 7x_1+3x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

тенгламалар системасини матрицавий кўринишда ёзинг ва унинг ечимини топинг.

Ечиш. Берилган системанинг матрицасини ёзамиз:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ва

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

деб белгиласак, у ҳолда системанинг „матрицавий“ кўриниши

$$A \cdot X = B \quad (*)$$

кўринишда бўлади. A га тескари A^{-1} матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

бўлгани сабабли (*) ни чап томондан A^{-1} га кўпайтирамиз: у вақтда

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B$$

ёки

$X = A^{-1} \cdot B$ га эгамиз, бундан $A^{-1} \cdot B$ ни топамиз:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-8) \cdot 5 + (-5) \cdot 1 + 6 \cdot 4 \\ 18 \cdot 5 + 11 \cdot 1 + (-13) \cdot 4 \\ 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 49 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Демак, тенгламалар системасининг ечими:

$$x_1 = -21; \; x_2 = 49; \; x_3 = 2.$$

Машқлар

1. Ушбу матрицаларнинг кўпайтмасини топинг:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

4.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -8 \\ 9 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Берилган
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
матрицага тескари A^{-1} матрицани топинг.

6. Берилган матрицага тескари A^{-1} матрицани топинг:
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Қуйидаги тенгламалар системаларини матрицалардан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=9, \\ x_1+2x_2-3x_3=14, \\ 3x_1+4x_2+x_3=16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+x_2-x_3=10. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5; \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1-x_2+5x_3=3; \end{cases}$

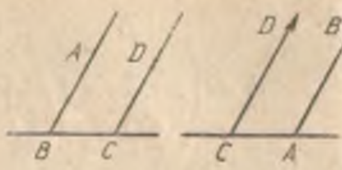
IV БОБ

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Вектор тушунчаси. Векторнинг абсолют қиймати ва йўналиши

Агар $[AB]$ кесма охирларининг тартиби эътиборга олинса, у йўналган ҳисобланади. Агар олдин A нуқта, кейин B нуқта берилган бўлса, у ҳолда A нуқта $\overline{AB}$

1-чизма.



2 чизма.

йўналган кесманинг боши, B нуқта эса охири дейилади ($\overline{AB}$ йўналган кесма устига чизиқ қўйиш билан белгиланади). Оддий кесманинг учлари тенг ҳуқуқли бўлиб, уларнинг тартибини аҳамияти йўқ. Йўналган кесмада эса боши ва охирининг ўринлари алмаштирилиши билан уларнинг йўналиши ўзгаради. Йўналган $\overline{AB}$ кесманинг узунлиги деб, $[AB]$ кесманинг узунлигини айтилади ва у $|AB|$ билан белгиланади. Йўналтирилган кесма *вектор* дейилади. Векторларни белгилашда биз устига стрелка қўйилган кичик лотин ҳарфларидан фойдаланамиз: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... Баъзан векторларни кесма охирларини кўрсатувчи ўша ҳарфлар билан ҳам белгиланади. Масалан, векторни 1-чизмада кўрсатилганидек, $\overrightarrow{AB}$ кўринишда белгилаш мумкин. A нуқта векторнинг *боши*, B нуқта векторнинг *охири* дейилади. Агар $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ йўналган кесмалар бир хил (қарама-қарши) йўналишли бўлса, $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар бир хил (қарама-қарши) йўналишли векторлар дейилади (2- чизма).

Векторнинг абсолют қиймати ёки (узунлиги) *модули* деб шу векторни тасвирловчи кесма узунлигига айтилади. $\vec{a}$ векторнинг абсолют қиймати $|\vec{a}|$ билан, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг абсолют қиймати эса $|\overrightarrow{AB}|$ билан белгиланади.

Модули бирга тенг бўлган вектор *бирлик* вектор дейилади. Векторнинг боши унинг охири билан устма-уст тушиши мумкин. Бундай вектор ноль вектор деб аталади. Ноль вектор устига стрелка қўйилган ноль ($\vec{0}$) билан белгиланади. Ноль векторнинг йўналиши ҳақида сўз юритилмайди — у аниқланмаган. Ноль векторнинг модули нолга тенг деб ҳисобланади. Нолдан фарқли иккита вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, бундай векторлар *коллинеар* векторлар дейилади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг коллинеарлиги $\vec{a} \parallel \vec{b}$ кўринишида белгиланади. Узунликлари тенг, коллинеар ва бир хил йўналишли иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар *тенг* векторлар дейилади ва $\vec{a} = \vec{b}$ кўринишида белгиланади. Бир текисликка параллел бўлган ёки шу текисликда ётувчи векторлар *компланар* векторлар дейилади.

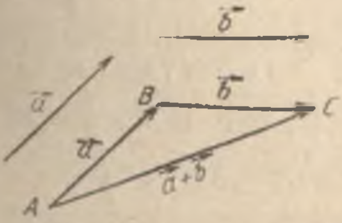
2-§. Векторлар устида амаллар

1. Векторларни қўшиш. Таъриф. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг йиғиндиси деб исталган A нуқтадан $\vec{a}$ векторни қўйиб, унинг охири B га $\vec{b}$ векторни қўйганда боши $\vec{a}$ векторнинг боши A да, охири $\vec{b}$ векторнинг охири C да бўлган $\overrightarrow{AC}$ векторга айтилади (3-чизма). $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси $\vec{a} + \vec{b}$ билан белгиланади.

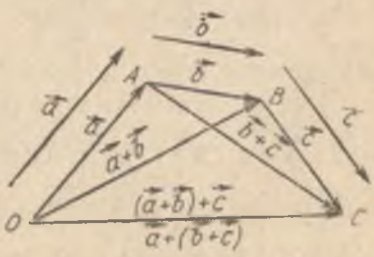
Векторларни қўшиш таърифидан исталган A, B ва C уч нуқта учун

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \tag{1}$$

тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади. (1) тенглик векторларни қўшишнинг *учбурчак қоидаси* дейилади. Икки коллинеар векторни қўшиш ҳам шу қоида бўйича бажарилади.



3-чизма.



4-чизма.

Векторларни қўшиш амали қуйидаги хоссаларга эга:
1) Қўшишнинг группалаш (ассоциативлик) хоссаси. Ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

муносабат ўринли.

Исбот. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасидан (4- чизма):

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC};$$

$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

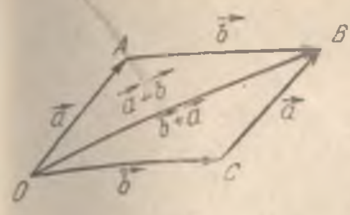
бундан $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ экани келиб чиқади.

Қўшилувчи векторларнинг сони иккитадан ортиқ бўлганда уларни қўшиш қуйидагича бажарилади: берилган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, . . . , $\vec{l}$ векторларнинг йиғиндисини ҳосил қилиш учун $\vec{a}$ векторнинг охирига $\vec{b}$ векторнинг бошини қўйиш (яъни $\vec{a}$ векторнинг учидан бошлаб $\vec{b}$ векторга тенг вектор ясаш), кейин $\vec{b}$ векторнинг охирига $\vec{c}$ векторнинг бошини қўйиш ва ҳ. к., бу ишни $\vec{l}$ вектор устида бажарилгунча давом эттириш керак. У вақтда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\ldots+\vec{l}$ йиғинди вектор боши $\vec{a}$ векторнинг бошидан, охири эса $\vec{l}$ векторнинг охиридан иборат вектор бўлади.

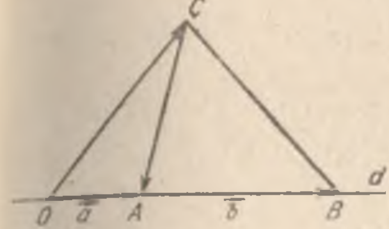
Масалан, 6- чизмадаги $\overrightarrow{AF}$ вектор берилган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ векторларни қўшишдан ҳосил бўлган вектордир.

2) Қўшишнинг ўрин алмаштириш (коммутативлик) хоссаси. Ҳар қандай иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ тенглик ўринлидир.

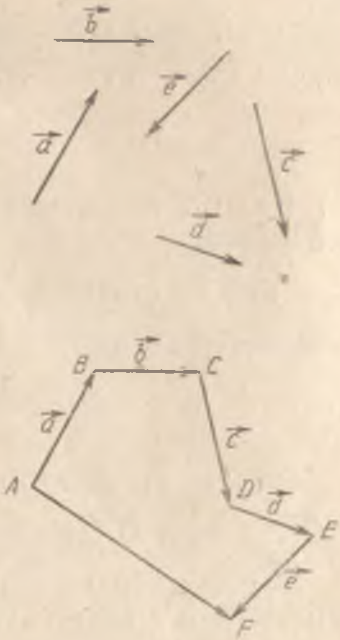
Исбот. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ бўлсин. Икки ҳол бўлиши мумкин:



5-чизма.



7-чизма.



6-чизма.

1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар коллинеар эмас. Бу ҳолда O, A, B нуқталар битта тўғри чизиқда ётмайди (5- чизма). OAB учбурчакни $OABC$ параллелограммга тўлдирсак, векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасига кўра: $\vec{a}+\vec{b}=$ $=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}$; бу икки тенгликдан эса $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлсин. Бу ҳолда O, A, B нуқталар битта d тўғри чизиқда ётади. (7- чизма).

d тўғри чизиқда ётмайдиган C нуқтани олайлик, у ҳолда

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}. \qquad (1)$$

(1) ҳолга кўра $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}$. Лекин $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+$ $+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ бўлгани учун:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}. \qquad (2)$$

(Қарама-қарши векторлар йиғиндиси $\vec{0}$ га тенг бўлгани учун $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$). Иккинчи томондан,

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}. \qquad (3)$$

(2) ва (3) тенгликлардан $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ тенгликка эга бўламиз.

3) Ҳар қандай $\vec{a}$ векторга ноль векторни қўшилса, $\vec{a}$ вектор ҳосил бўлади, яъни

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

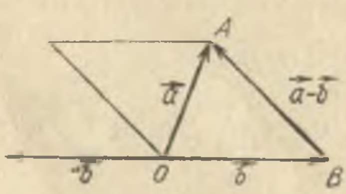
Учбурчак қоидасига кўра исталган $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ вектор учун $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}$ тенглик ёки $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ тенглик ўринли.

4) Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $\vec{a}'$ вектор мавжудки, унинг учун:

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}. \qquad (4)$$

Исбот. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ бўлсин. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасига кўра $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OO}=\vec{O}$, бундан $\overrightarrow{AO}=\vec{a}'$. (4) тенгликни қаноатлантирувчи $\vec{a}'$ вектор $\vec{a}$ векторга *қарама-қарши* вектор дейилади ва $-\vec{a}$ билан белгиланади.

2. Векторларни айириш. Таъриф. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб, $\vec{a}$ вектор билан $\vec{b}$ векторга қарама-қарши $-\vec{b}$ векторнинг йиғиндисига айтилади. Бу таърифдан кўринадики, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ айирма векторни ясаш учун $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ векторни ясаш керак экан. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар битта O нуқтага қўйилган (8-чизма) ҳам-



8-чизма.

да $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ва $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ деб белгиланган бўлса, у ҳолда $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$. Бу ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмасини топиш учун боши B нуқтада, охири A нуқтада бўлган $\overrightarrow{BA}$ векторни ясаш етарли бўлади.

3. Векторни сонга кўпайтириш. $\vec{a} \neq 0$ вектор ва α сон берилган бўлсин, бу ерда $\alpha \in R$. Таъриф. $\vec{a}$ векторнинг α сонга кўпайтмаси деб шундай $\vec{b}$ векторга айтиладики, $\alpha > 0$ бўлганда $\vec{b}$ нинг йўналиши $\vec{a}$ нинг йўналиши билан бир хил, $\alpha < 0$ да $\vec{b}$ нинг йўналиши $\vec{a}$ нинг йўналишига тескари бўлиб, $\vec{b}$ векторнинг узунлиги эса $\vec{a}$ векторнинг узунлиги билан α сон модулининг кўпайтмасига тенг. $\vec{a}$ нинг α сонга кўпайтмаси $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ шаклида белгиланади. Бу таърифдан бевосита қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

а) ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;

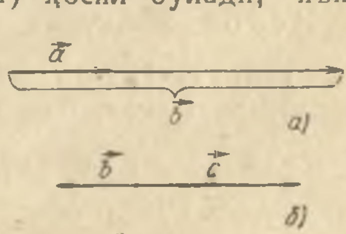
б) ихтиёрий $\alpha \in R$ сон учун: $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

в) ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

г) $\vec{a}$ ва $\alpha\vec{a}$ векторлар ўзаро коллинеардир;

9-*а* чизмада $\vec{a}$ вектор 3 сонига кўпайтирилган: $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}$; 9-*б* чизмада $\vec{c}$ вектор $-\frac{1}{2}$ сонига кўпайтирилган: $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$. Бирор $\vec{a} \neq \vec{0}$ векторни ўзининг узунлигига тескари $\frac{1}{|\vec{a}|}$ сонга кўпайтирилса, шу вектор йўналишидаги бирлик вектор (орт) ҳосил бўлади, яъни

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{a}_0 \quad (|\vec{a}_0| = 1).$$



9-чизма.

Теорема. Агар $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ бўлса, у ҳолда шундай α сон мавжудки,

$$\vec{b} = \alpha\vec{a} \quad (5)$$

бўлади.

Исбот. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлгани учун қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ бўлса, $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ бўлиб, бундан $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, бу ҳолда $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ бўлади;

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ бўлса, $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ бўлиб, бундан $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, бу ҳолда $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ бўлади;

3) $\vec{b} = \vec{0}$ бўлганда $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$; бундан $\alpha = 0$. Демак, векторни сонга кўпайтириш таърифидан ва бу теоремадан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b} = \alpha\vec{a}$ $(\alpha \in R)$. Шундай қилиб, (5) муносабат $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар коллинеарлигининг зарурий ва етарли шартидир.

Векторни сонга кўпайтириш қуйидаги хоссаларга эга:

а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

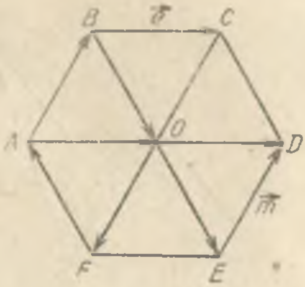
б) $\alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ (группалаш қонуни);

в) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha\vec{b}$ (векторларни қўшишга нисбатан тақсимот қонуни);

г) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ (скалярни қўшишга нисбатан тақсимот қонуни).

Иккинчи хоссани, яъни $\alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатиш билан чекланамиз.

Исбот. Маълумки, $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ ва $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ векторлар бир хил: $|\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|$ узунликка эга. Векторни сонга кўпайтириш амалининг таърифига кўра, агар $\alpha \cdot \beta > 0$ бўлса, $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$ ва $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ векторлар бир хил йўналган, агар $\alpha \cdot \beta < 0$ бўлса, бу векторлар $\vec{a}$ га қарама-қарши йўналган бўлади. Шундай қилиб, агар $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ бўлса, $\alpha(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$ га эга бўламиз. Агар $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ёки $\vec{a} = \vec{0}$ бўлса, у ҳолда $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a}) = 0$ ва $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a} = 0$ бўлади. (Қолган хоссаларнинг исботини [8] дан кўриш мумкин.)



10-чизма.

1-мисол. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак берилган. $\vec{BC} = \vec{e}$; $\vec{ED} = \vec{m}$ эканлигини ҳисобга олиб, $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{CF}$ ларни $\vec{e}$ ва $\vec{m}$ векторлар орқали ифодаланг (10-чизма).

Ечиш. Берилганга кўра $\vec{BC} = \vec{e}$, $\vec{ED} = \vec{m}$. Шунингдек, изланган векторларни ҳам чизмада белгилаб қўямиз, $ABCDEF$ мунтазам олтибурчак бўлгани учун $\vec{AB} = \vec{ED} = \vec{m}$; $\vec{BO} = \vec{CD}$; $\vec{BC} = \vec{OA}$; $\vec{OF} = -\vec{ED} = -\vec{m}$. Чизмадаги $\triangle AOB$ дан: $\vec{BO} = \vec{AO} - \vec{AB} = \vec{BC} - \vec{ED} = \vec{e} - \vec{m} = \vec{CD}$.

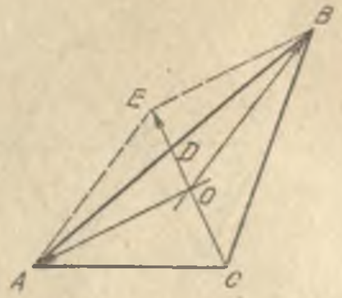
$\vec{EF}$ вектор $\vec{BC}$ векторга қарама-қарши бўлгани учун: $\vec{FF} = -\vec{BC} = -\vec{e}$. Демак,

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{m} + \vec{e} + \vec{e} - \vec{m} = 2\vec{e}.$$

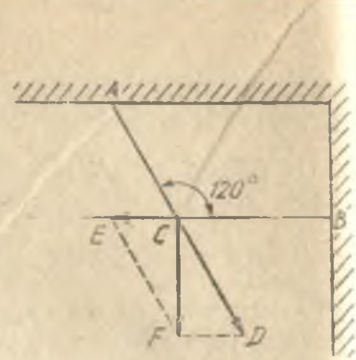
Худди шунга ўхшаш, топамиз:

$$\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{BC} + \vec{CD} + (-\vec{ED}) =$$
$$= \vec{e} + \vec{e} - \vec{m} - \vec{m} = 2\vec{e} - 2\vec{m} = 2(\vec{e} - \vec{m});$$
$$\vec{CF} = \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} = \vec{CD} + (-\vec{ED}) + (-\vec{BC}) =$$
$$= \vec{e} - \vec{m} - \vec{m} - \vec{e} = -2\vec{m}.$$

2-мисол. ABC учбурчак берилган. O нуқта учбурчакнинг оғирлик маркази (яъни учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси) бўлса, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ эканини исботланг (11-чизма).



11-чизма.



12-чизма.

Ечиш. Томонлари $\overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{OB}$ векторлардан иборат $AOBE$ параллелограмм ясаймиз. Бу параллелограммдан:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}. \qquad (\alpha)$$

O нуқта учбурчакнинг оғирлик маркази бўлгани учун $\overrightarrow{OD}$ вектор $\overrightarrow{CD}$ нинг учдан бирини ташкил қилади, яъни

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}. \qquad (\beta)$$

Чизмадан:

$$(\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DE}) \to \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}. \qquad (\gamma)$$

$$(\alpha),\ (\beta),\ (\gamma) \Longrightarrow (\overrightarrow{OC}) = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

3-мисол. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ тенглик ўринли бўлса, томонлари $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан иборат бўлган параллелограмм тўғри тўртбурчак эканлигини исботланг.

Ечиш. Маълумки, томонлари $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан иборат параллелограммнинг диагоналлари $\vec{a} + \vec{b}$ ва $\vec{a} - \vec{b}$ векторларни ифодалайди. Шунинг учун $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлмаса, шартга асосан, бу векторлар асосида тузилган параллелограмм тенг диагоналларга эга бўлади. Бу хоссага эга бўлган параллелограмм эса тўғри тўртбурчакдир.

4-мисол. Иккита (l ва m) тросга 45 кг юк осилган (12-чизма). Агар $\angle ACB = 120°$ бўлса, тросларда ҳосил бўлувчи кучларни аниқланг.

Ечиш. Чизмадан кўринишича, тросларга осилган 45 кг юк иккита кучнинг йиғиндисидан иборатдир. Шунинг учун юк йўналишини диагонал сифатида қараб, параллелограмм томонларини топамиз. Бунинг учун $ECDF$ параллелограммни ясаймиз, чизмадан: $\angle FCD = 30°$. Параллелограмм томонлари $\overrightarrow{CD}$ ва $\overrightarrow{CE}$ ларни топамиз:

Тўғри бурчакли $\triangle CFD$ дан: $CF = CD \cdot \cos 30°$,

$$CD = \frac{CF}{\cos 30°} = CF \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{45 \cdot 2\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3}.$$

Демак, $\overrightarrow{CD} = 30\sqrt{3}$ кг.

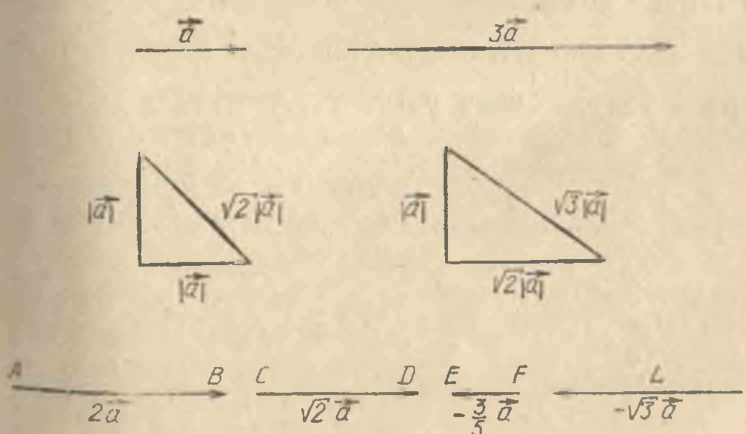
$\overrightarrow{CE}$ ни топамиз. $CD = EF$ бўлгани учун:

$$CE = \frac{EF}{2} = \frac{CA}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

Демак, $\overrightarrow{CE} = 15\sqrt{3}$ кг.

5-мисол. Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор берилган. $2\vec{a}$; $\sqrt{2}\vec{a}$; $-\frac{3}{5}\vec{a}$; $-\sqrt{3}\vec{a}$ векторларни ясанг.

Ечиш. Бу векторларни ясаш учун берилган $\vec{a}$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ оламиз. Бу тўғри чизиқда $2\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$, $-\frac{3}{5}\vec{a}$, $-\sqrt{3}\vec{a}$ векторларни ясаш қийин эмас. $\sqrt{2}\vec{a}$ векторни ясаш учун, катети $\vec{a}$ вектор модулига тенг бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак ясаймиз. Пифагор теоремасига асосан бу уч-



13-чизма.

бурчакнинг гипотенузаси $\sqrt{2}\vec{a}$ векторнинг модулига тенг бўлади (13-чизма). $-\sqrt{3}\vec{a}$ векторни ясаш учун, дастлаб $\sqrt{3}\vec{a}$ векторни ясаймиз. Бунинг учун бир катети $\sqrt{2}\vec{a}$ вектор модулига, иккинчи катети $\vec{a}$ вектор модулига тенг тўғри бурчакли учбурчак ясаймиз. Пифагор теоремасига асосан бу учбурчакнинг гипотенузаси $\sqrt{3}\vec{a}$ векторнинг модулига тенг бўлади (13-чизма).

6-мисол. $2\vec{AB}+\vec{CB}+3\vec{BA}$ ва $4\vec{AC}$ векторларнинг коллинеар эканини кўрсатинг.

Ечиш. Векторлар устида бажариладиган амалларга кўра қуйидагига эга бўламиз:

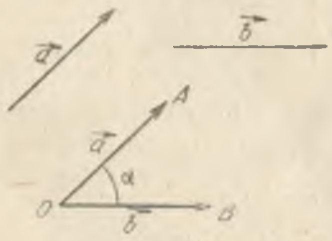
$$2\vec{AB}+\vec{CB}+3\vec{BA}=(2\vec{AB}+2\vec{BA})+(\vec{CB}+\vec{BA})=$$

$$=\vec{0}+\vec{CA}=\vec{CA}.$$

Равшанки, $4\vec{AC}$ ва $\vec{CA}$ векторлар коллинеар.

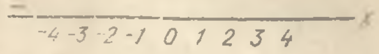
3-§ Векторлар орасидаги бурчак. Векторларнинг ўқдаги проекцияси

Икки вектор ҳамда вектор ва ўқ орасидаги бурчак тушунчаларини киритамиз. Бизга $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг бошларини бирор умумий O нуқтага жойлаштирамиз, бошқача айтганда $\vec{OA}=\vec{a}$ ва $\vec{OB}=\vec{b}$ векторларни ясаймиз (14-чизма). У ҳолда AOB учбурчакнинг ички AOB бурчаги ($\vec{a}$ векторни $\vec{b}$ вектор билан устма-уст тушгунча айлантириш лозим бўлган икки бурчакнинг кичиги) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак дейилади ҳамда $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ кўринишида ёки α, φ, ψ, ... ҳарфлардан бири орқали белгиланади. Таърифга кўра векторлар орасидаги бурчак 0° дан 180° гача (мос равишда 0 дан π гача) оралиқда бўлади. Бундан кўринади-



14-чизма.

ки бир хил йўналишдаги коллинеар векторлар орасидаги бурчак 0° га, қарама-қарши йўналишдаги векторлар орасидаги бурчак 180° га тенг бўлар экан.



15-чизма.

Агар векторлар орасидаги бурчак 90° га тенг бўлса, улар перпендикуляр ёки ортогонал векторлар дейилади ва $\vec{a}\perp\vec{b}$ каби белгиланади.

Агар тўғри чизиқда саноқ боши ҳисобланган 0 нуқта, масштаб бирлиги ва йўналиш олинган бўлса, бу тўғри чизиқ ўқ деб аталади. Одатда ўнг томонга йўналиш мусбат, чап томонга йўналиш эса манфий деб олинади (15-чизма).

Айтайлик, l ўқ ва унинг бирлик вектори $\vec{e}$ берилган бўлсин. Ихтиёрий $\vec{a}\neq\vec{0}$ векторнинг бирлик вектори $\vec{a}_0$ тубандагича аниқланади:

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},\ \text{чунки}$$

$$|\vec{a}_0|=\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|=\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}\right|=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=1.$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ текисликдаги ихтиёрий вектор бўлсин. $\vec{a}$ вектор билан l ўқ орасидаги бурчак деганда l ўқнинг бирлик вектори $\vec{e}$ билан $\vec{a}$ вектор орасидаги бурчак тушунилади. $\vec{a}$ вектор l ўқ билан φ бурчак ташкил қилсин (16-а чизма).

Таъриф. Векторнинг ўқдаги ортогонал проекцияси деб вектор узунлигини шу вектор билан ўқ орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига тенг бўлган сонга айтилади. $\vec{a}$ векторнинг l ўқдаги проекцияси $\text{пр}_l\vec{a}$ кўринишда белгиланади. Таърифга кўра:

$$\text{пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi. \qquad (6)$$

$\vec{a}$ векторнинг бу ўқдаги ортогонал проекцияси қуйидагича аниқланади:

$$OA_1=\text{пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=OA_1.$$

Бу ерда $\varphi = (\widehat{\vec{e}, \vec{a}})$, A_1 нуқта A нуқтанинг l тўғри чи-зиқдаги проекцияси.

Биз $\vec{a}$ ва $\vec{e}$ векторлар орасидаги бурчак ўткир бўл-ган ҳолни кўрдик. φ бурчак ўтмас бўлган ҳолда ҳам $\vec{a}$ векторнинг l ўқдаги проекцияси OA_1 кесманинг узун-лигига тенг бўлади (16-*б* чизма), аммо ишора минус билан олинади. Ҳақиқатан ҳам,

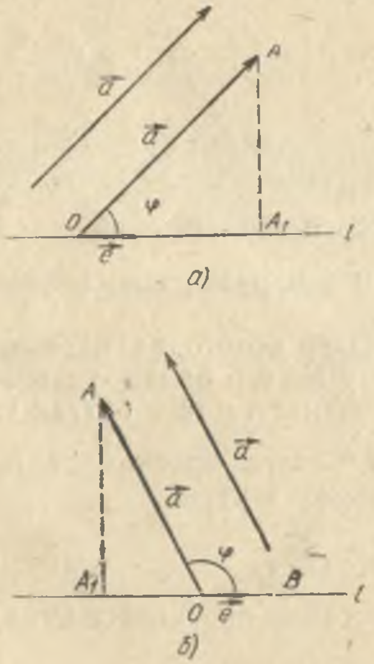
$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = |\vec{a}| \cos \angle BOA =$$
$$= -|\vec{a}| \cos \angle A_1OA = -OA_1.$$

Агар $\vec{a}$ вектор l ўққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\varphi = 90°$ бўлиб, $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos 90° = 0$ бўлади.

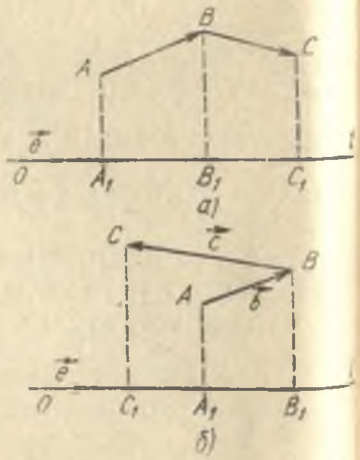
Ихтиёрий $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар учун

$$\text{пр}_l (\vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l \vec{b} + \text{пр}_l \vec{c} \qquad (*)$$

тенглик ўринли эканлигини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқа-



16-чизма.



17-чизма.

тан ҳам, агар $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг l ўқдаги проек-циялари бир хил ишорали бўлса (17-*а* чизма), қуйида-ги муносабат ўринли бўлади:

$$\text{пр}_l (\vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l \overrightarrow{AC} = -A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1 =$$
$$= \text{пр}_l \vec{b} + \text{пр}_l \vec{c}.$$

Агар проекцияларнинг ишоралари ҳар хил бўлса (17-*б* чизма), қуйидагига эга бўламиз:

$$\text{пр}_l (\vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l \overrightarrow{AC} = -A_1C_1 = A_1B_1 - B_1C_1 =$$
$$= \text{пр}_l \vec{b} + \text{пр}_l \vec{c}.$$

Иккала ҳолда ҳам (*) тенглик ўринли.

Бу хоссани n та векторлар йиғиндисининг проекцияси учун ҳам умумлаштириш мумкин, яъни бир нечта век-торлар йиғиндисининг бирор l ўқдаги проекцияси, шу векторларнинг l ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг.

Мисол. Узунлиги $|\vec{a}| = 5$ га, l ўқ билан ҳосил қилган бурчаги 60° га тенг бўлган $\vec{a}$ векторнинг l ўқ-даги проекциясини ҳисобланг.

Ечиш. (6) формулага асосан:

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = 5 \cdot \cos 60° = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5.$$

4-§. Чизиқли комбинация. Базис

Бизга $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторлар ҳамда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — ҳақиқий сонлар берилган бўлсин.

Таъриф. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k$ ифода $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторларнинг $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ коэффициентли *чизиқли комбинацияси* дейилади. Агар $\vec{a}$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторларнинг чизиқли комбинацияси шаклида ифода-ланган бўлса, $\vec{a}$ вектор шу векторлар бўйича ёйилган дейилади, яъни қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k.$$

Агар камида биттаси нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ сонлар маълум тартибда танлаб олинганда

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (7)$$

тенглик бажарилса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторлар *чизиқли боғлиқ* дейилади. Агар (7) муносабат фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ да ўринли бўлса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторлар чизиқли боғланмаган ёки *чизиқли эркли* дейилади. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, чизиқли боғлиқ бўлади ва аксинча. Шунингдек, учта вектор чизиқли боғлиқ бўлиши учун уларнинг компланар бўлиши зарур ва етарли (юқоридаги икки фикрнинг тўғрилигини мустақил исботлашни ўқувчиларга топширамиз).

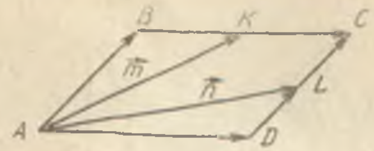
Маълум тартибда олинган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлиб, бошқа ҳар қандай векторни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лар орқали чизиқли ифодаланса, бу векторлар системаси *базис* дейилади ва у $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ кўринишда белгиланади. Агар базиснинг ҳар бир вектори бирлик вектор бўлиб, уларнинг ихтиёрий ҳар иккитаси ўзаро перпендикуляр бўлса, бундай базис ортонормаланган базис дейилади. Базисни ташкил этувчи векторлар сони қаралаётган фазонинг *ўлчови* дейилади.

Исталган $\vec{a}$ векторни берилган $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ базис векторлари бўйича ёйиш мумкин:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2. \qquad (8)$$

(8) ёйилмадаги a_1, a_2 сонлар $\vec{a}$ векторнинг $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ базисга нисбатан координаталари дейилади. Бу қисқача $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$ кўринишда белгиланади. Худди шунга ўхшаш, $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базис берилган бўлса, ихтиёрий $\vec{a}$ векторни шу базиснинг векторлари бўйича ёйиш мумкин:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \qquad (9)$$



18-чизма.

бу ерда a_1, a_2, a_3 сонлар $\vec{a}$ векторнинг $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базисга нисбатан координаталари дейилади ва $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ кўринишда ёзилади. Масалан, $\vec{a} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 4\vec{a}_3 + \frac{1}{5}a_4 - a_5$ вектор a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 векторларнинг чизиқли комбинациясини ифодалайди. Агар векторларни бошқа векторларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаш мумкин бўлса, берилган вектор шу векторлар бўйича ёйилган дейилади.

1-мисол. K ва L нуқталар $ABCD$ параллелограмм томонларининг ўрталари бўлсин (18-чизма). $\vec{BC}$ векторни $\vec{m} = \vec{AK}, \vec{n} = \vec{AL}$ векторлар бўйича ёйинг.

Ечиш. $\triangle ABK$ дан

$$\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{m}. \qquad (10)$$

$\triangle ALD$ дан $\vec{AD} + \vec{DL} = \vec{n}$. Чизмадан тубандагиларга эга бўламиз:

$$\vec{AD} = \vec{BC}; \ \vec{DL} = \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB}.$$

У ҳолда

$$\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{n}. \qquad (11)$$

(10) дан:

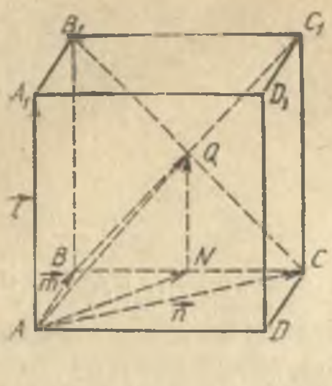
$$\vec{AB} = \vec{m} - \frac{1}{2}\vec{BC}. \qquad (12)$$

(12), (11) лардан:

$$\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{m} - \frac{1}{4}\vec{BC} = \vec{n}$$

ёки

$$\vec{BC} = \frac{4}{3}\vec{n} - \frac{2}{3}\vec{m}.$$



19-чизма.

2-мисол. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган (19-чизма). $\vec{AQ}$ векторни $\vec{m}=\vec{AB}$; $\vec{n}=\vec{AC}$ ва $\vec{l}=\vec{AA_1}$ векторлар бўйича ёйинг, бунда Q нуқта BB_1C_1C ёқнинг маркази.

Ечиш. BC қирранинг ўртаси N нуқта бўлсин. У ҳолда

$$\vec{AN}=\vec{AB}+\vec{BN}=\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{BC}. \quad (13)$$

$\triangle AQN$ дан:

$$\vec{AQ}=\vec{AN}+\vec{NQ}. \quad (14)$$

Чизмадан:

$$\vec{BC}=\vec{n}-\vec{m};\ \vec{NQ}=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}\vec{l}. \quad (15)$$

У ҳолда (13), (14), (15) лардан қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{AQ}=\vec{m}+\frac{1}{2}(\vec{n}-\vec{m})+\frac{1}{2}\vec{l}=\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{l}.$$

5-§. Координаталари билан берилган векторлар устида амаллар

Координата формада ёзилган векторлар устида баъзи амалларни бажаришни кўрайлик.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар $Б=\{\vec{e_1};\ \vec{e_2};\ \vec{e_3}\}$ базисга нисбатан қуйидаги координаталарга эга бўлсин:

$$\vec{a}=\{a_1;\ a_2;\ a_3\}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3};$$
$$\vec{b}=\{b_1;\ b_2;\ b_3\}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3}.$$

1. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни қўшишда уларнинг мос координаталари қўшилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$(\vec{a}+\vec{b})=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3})=$$
$$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}+(a_3+b_3)\vec{e_3}=$$
$$=\{a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3\}.$$

2. $\vec{a}-\vec{b}$ айирмани топишда векторларнинг мос координаталари айрилади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+b_3\vec{e_3})=$$
$$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}+(a_3-b_3)\vec{e_3}=$$
$$=\{a_1-b_1;\ a_2-b_2;\ a_3-b_3\}.$$

3. Векторни сонга кўпайтиришда унинг барча координаталари шу сонга кўпайтирилади. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$ бўлсин. У ҳолда $\lambda\vec{a}=\lambda(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3})=(\lambda a_1)\vec{e_1}+(\lambda a_2)\vec{e_2}+(\lambda a_3)\vec{e_3}$ га эга бўламиз. Юқоридаги қоидалар координаталари билан берилган бир нечта векторлар устида амаллар бажаришда ҳам ўз кучини сақлайди.

Мисол. $\vec{a}=\left\{2;\ -1;\ \frac{1}{3}\right\}$; $\vec{b}=\left\{4;\ \frac{1}{2};\ -3\right\}$ ва $\vec{c}=\{2;\ 1;\ 0\}$ векторлар берилган.

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$, $5\vec{a}$ векторларнинг координаталарини аниқланг.

Ечиш. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left\{2+4+2;\ -1+\frac{1}{2}+1;\ \frac{1}{3}-3+0\right\}=\left\{8;\ \frac{1}{2};\ -2\frac{2}{3}\right\}.$

$$5\vec{a}=\left\{5\cdot 2;\ 5\cdot(-1);\ 5\cdot\frac{1}{3}\right\}=\left\{10;\ -5;\ 1\frac{2}{3}\right\}.$$

$$\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}=\left\{2\cdot\frac{1}{2}+4;\ \frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-3\right\}=$$
$$=\left\{5;\ 0;\ -2\frac{5}{6}\right\}.$$

6-§. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси

Векторлар устида ҳозиргача бажарилган амаллар (қўшиш, айириш, сонга кўпайтириш) чизиқли амаллар бўлиб, натижада яна векторлар келиб чиқади. Энди векторлар устида натижада скаляр (сон) ҳосил бўладиган амални кўриб чиқамиз.

Таъриф. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасидан ҳосил бўлган сон бу векторларнинг *скаляр кў*пайтмаси дейилади. Агар иккита вектордан бирортаси ноль вектор булса, скаляр кўпайтма нолга тенг бўлади.

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a}\cdot\vec{b}$ кўринишида белгиланади, демак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi. \qquad (16)$$

Бу ерда φ берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак. (16) формула физикада ўзгармас $\vec{F}$ кучнинг бошланғич B нуқтадан C нуқтагача тўғри чизиқли ҳаракати давомида бажарган иши

$$A=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\varphi$$

ни ифодалайди. У скаляр катталик бўлиб, $\vec{F}$ ва $\overrightarrow{BC}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасидан иборатдир, бу ерда φ $\vec{F}$ куч вектори ва $\overrightarrow{BC}$ вектор орасидаги бурчак.

Мисол. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ ҳамда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $135°$ га тенг булса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Ечиш. (16) формулага асосан топамиз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot\cos135°=2\cdot3\cdot\cos(90°+45°)=$$
$$=-6\cdot\sin45°=-6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}.$$

Скаляр кўпайтманинг хоссаларини кўрайлик.

1. Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}. \qquad (17)$$

Бу хосса скаляр кўпайтманинг коммутативлик хоссаси дейилади.

Исбот. Бу хосса скаляр кўпайтманинг таърифидан бевосита келиб чиқади, яъни

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi\\ \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2. Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ва ихтиёрий k сон учун қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}). \tag{18}$$

Бу хоссадан векторларни скаляр кўпайтиришда сонли кўпайтувчини скаляр кўпайтма белгиси ташқарисига чиқариш мумкин деган хулоса келиб чиқади.

Исбот. Бу хоссани исбот қилиш учун икки вектор орасидаги бурчак тушунчасидан фойдаланамиз. Маълумки, агар $k > 0$ бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $k\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчакка тенг бўлади. Қуйидагига эгамиз:

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = |k||\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = k|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi =$$

$$= k(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Агар $k < 0$ бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $\alpha = 180° - \varphi$ га тенг:

$$(k\vec{a})\vec{b} = |k\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos(180° - \varphi) =$$

$$= k|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = k|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = k(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар учун қуйидаги тенглик ўринлидир:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \tag{19}$$

Бу хосса скаляр кўпайтманинг дистрибутивлик хоссаси дейилади.

Исбот. Агар $\vec{a} = \vec{0}$ бўлса, $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ тенгликнинг ўринлилиги ўз-ўзидан равшан. Агар $\vec{a} \neq \vec{0}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|\,\text{пр}_l(\vec{b} + \vec{c})$. Бу ерда l ўқи $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}$ бирлик вектори билан аниқланган.

Ҳар қандай $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар учун (3- § га қаранг)

$$\text{пр}_l(\vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l\vec{b} + \text{пр}_l\vec{c}$$

муносабат ўринлидир. Демак,

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\text{пр}_l \vec{b} + \text{пр}_l \vec{c}) =$$
$$= |\vec{a}| \text{пр}_l \vec{b} + |\vec{a}| \text{пр}_l \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

бундан эса $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ тенгликнинг ўринли экани кўринади.

4. Ҳар қандай векторнинг уз-ўзига скаляр кўпайтмаси бу вектор узунлигининг квадратига тенг:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2. \tag{20}$$

Исбот. Скаляр кўпайтма таърифидан:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = |\vec{a}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ ифода $\vec{a}^2$ билан белгиланади ва $\vec{a}$ векторнинг скаляр квадрати деб аталади. Бунга кўра (20) тенгликдан $\vec{a}$ векторнинг узунлиги учун қуйидагига эга бўламиз:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \tag{21}$$

5. Ортонормалланган $Б = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базис учун:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ да}, \\ 1, & i = j \text{ да} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Исбот. Скаляр кўпайтма таърифидан:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = |\vec{e}_i||\vec{e}_j| \cos(\widehat{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}) =$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (i \neq j).$$

Хусусий холда

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = |\vec{e}_i|^2 = 1.$$

Скаляр кўпайтма ёрдамида бизга таниш баъзи айниятларни исботлаш мумкин.

Масалан, $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$ айниятни исбот қилайлик, бунинг учун айниятнинг чап томонидан унинг ўнг томонини келтириб чиқарамиз:

$$(\vec{a} \pm \vec{b})(\vec{a} \pm \vec{b}) = \vec{a}(\vec{a} \pm \vec{b}) \pm \vec{b}(\vec{a} \pm \vec{b}) =$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} \pm \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Теорема. Ноль бўлмаган иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, бу векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади ва аксинча.

Исбот. Фараз қилайлик, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлсин, у ҳолда улар орасидаги бурчак 90° га тенг, демак,

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0.$$

У ҳолда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0; \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Демак, $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, у векторлар перпендикулярдирлар. Ноль бўлмаган иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши учун $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ бўлиши керак, бу эса $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ бурчак 90° қийматни қабул қилганда ўринлидир. Демак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Энди координаталари билан берилган векторларнинг скаляр кўпайтмасини қараймиз. Ортонормалланган $Б = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ базисда $\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ ва $\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$ векторлар координаталари билан берилган бўлсин.

У ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k},$$

$$\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$$

ёйилмаларга эга бўлади. Скаляр кўпайтманинг хоссаларидан фойдаланиб $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни скаляр кўпайтирамиз:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$

$$= x_a x_b \vec{i}\cdot\vec{i} + x_a y_b \vec{i}\cdot\vec{j} + x_a z_b \vec{i}\cdot\vec{k} + y_a x_b \vec{j}\cdot\vec{i} +$$

$$+ y_a y_b \vec{j}\cdot\vec{j} + y_a z_b \vec{j}\cdot\vec{k} + z_a x_b \vec{k}\cdot\vec{i} + z_a y_b \vec{k}\cdot\vec{j} + z_a z_b \vec{k}\cdot\vec{k};$$

(5) хоссага кўра:

$$\vec{i}^2 = 1;\ \vec{j}^2 = 1;\ \vec{k}^2 = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = 0.$$

У ҳолда

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \qquad (22)$$

Демак, координаталари билан берилган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

Координаталари билан берилган $\vec{a} = \{x_a;\ y_a;\ z_a\}$ вектор учун $\vec{a}\cdot\vec{a}$ скаляр кўпайтмани топайлик. $\vec{a}$ ни $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$ кўринишда ёзиб оламиз.

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})\cdot(x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})$$

тенгликка асосан

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = x_a x_a + y_a y_a + z_a z_a,$$

$$\vec{a}^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2.$$

Маълумки,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}. \qquad (23)$$

Бу эса координаталари билан берилган $\vec{a}$ векторнинг узунлиги унинг координаталари квадратларининг йиғиндисидан олинган арифметик квадрат илдизга тенг эканлигини кўрсатади.

1-мисол. Берилган $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ва $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ векторларнинг $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скаляр кўпайтмасини ҳисобланг.

Ечиш. Скаляр кўпайтма хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{i} - 3\vec{j})(-\vec{i} + 2\vec{j}) =$$

$$= -2\vec{i}\cdot\vec{i} + 4\vec{i}\cdot\vec{j} + 3\vec{j}\cdot\vec{i} - 6\vec{j}\cdot\vec{j} =$$

$$= -2\vec{i}^2 - 6\vec{j}^2 = -2 - 6 = -8.$$

2-мисол. Координаталари билан берилган $\vec{a} = \{-1;\ 3;\ 2\}$ ва $\vec{b} = \{2;\ -1;\ -3\}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини ҳисобланг.

Ечиш. (22) формулага асосан:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = -11.$$

3-мисол. Координаталари билан берилган $\vec{a} = \{-2;\ 5;\ 7\}$ ва $\vec{b} = \{1;\ -4;\ -6\}$ векторлар йиғиндиси ва айирмасининг узунлигини топинг.

Ечиш. Маълумки, икки вектор йиғиндисининг (айирмасининг) координаталари қўшилувчи (камаювчи ва айрилувчи) векторлар мос координаталарининг йиғиндисидан (айирмасидан) иборатдир:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{-2+1;\ 5-4;\ 7-6\} = \{-1;\ 1;\ 1\};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{-2-1;\ 5+4;\ 7+6\} + \{-3;\ 9;\ 13\}.$$

Энди йиғинди ва айирма векторлар узунлигини топамиз. (23) муносабатга асосан:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3};\ |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3},$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 13^2} = \sqrt{258};\ |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{258}.$$

Скаляр кўпайтмадан фойдаланиб икки вектор орасидаги бурчакни, векторларнинг ўқдаги проекцияларини ҳисоблаш мумкин. Икки вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ орасидаги бурчак $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|a||b|}$ формула бўйича ҳисобланади. Агар векторлар координаталари билан берилган бўлса, улар орасидаги бурчак

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

формула бўйича ҳисобланади.

Мисол. Берилган $\vec{a} = \{2;\ 3\}$ ва $\vec{b} = \{1;\ 2\}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Координаталари билан берилган векторлар кўпайтириш қоидасига асосан:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+3\cdot2,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=8,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}.$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}.$$

$$\cos(\vec{a};\widehat{\ }\vec{b})=\frac{8}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}$$

$$\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{65}};\ \varphi=\arccos\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right).$$

Машқлар

1. $\vec{\alpha}$ ва $\vec{\beta}$ векторлар берилган. Қуйидаги векторларни ясанг:

1) $\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$; 2) $\frac{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{2}$; 3) $\vec{\alpha}+\frac{\vec{\beta}}{2}$; 4) $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

2. O нуқта $ABCD$ параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси. $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ ва $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$ бўлса, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO}$ векторларни $\vec{p}$ ва $\vec{q}$ лар орқали ифодаланг.

3. Моддий нуқтага иккита $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ куч таъсир қилади. Агар $|\vec{F}_1|=10$ Н, $|\vec{F}_2|=6$ Н бўлиб, $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ векторлар орасидаги бурчак $90°$ бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчисини топинг.

4. $ABCD$ тетраэдр берилган. а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$ йиғиндиларни топинг.

5. ABC учбурчакда $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ва медиана $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ бўлсин. $\vec{c}$ векторни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали, $\vec{b}$ векторни $\vec{c}$ ва $\vec{a}$ векторлар бўйича ёйинг.

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берилган. $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1D_1}$ векторларни $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$ векторлар бўйича ёйинг.

7. Узунлиги $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ бўлган $\vec{a} = \vec{AB}$ вектор абсциссалар ўқи ($\vec{e}$ бирлик вектори) билан 45° ли бурчак ташкил этади. Бу векторнинг Ox ўқдаги проекциясини топинг.

8. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда $\vec{DB} = \vec{a}$ ва $\vec{AC} = \vec{b}$ диагоналлар ўтказилган. $\vec{BD}$, $\vec{BC}$, $\vec{CB}$ векторларни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодаланг.

9. $\vec{a} = \{3; 2\}$; $\vec{b} = \{-1; 0\}$ векторларнинг йиғиндисини топинг.

10. Агар $\vec{p} = \{4; -7; 3\}$ ва $\vec{q} = \left\{-5; 9; \frac{1}{2}\right\}$ бўлса, $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ векторнинг координаталарини топинг.

11. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$, уларнинг узунликлари эса $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$ бўлса, бу векторларнинг скаляр квадратларини ва уларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

12. Векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг:

1) $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ ва $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ нинг;

2) $A(-2; 3)$; $B(3; 5)$ ва $C(4; -2)$ бўлса, $\vec{AB}$ ва $\vec{BC}$ нинг.

13. Агар $\vec{a} = \{-2; 3\}$; $\vec{b} = \{3; 5\}$; $\vec{c} = \{-2; 8\}$ ва $\vec{d} = \{3; 1\}$ бўлса, бу векторлар учун

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{b}^2$; в) $\sqrt{\vec{a}^2}$; г) $(\vec{a} + \vec{c})^2$; д) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times \times (\vec{a} + 2\vec{b})$ ларни ҳисобланг.

14. $\vec{a} = \{-2; 3\}$ векторга перпендикуляр бўлган бирлик векторнинг координаталарини топинг.

15. $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ ва $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

16. $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ ва $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

V БОБ

ТЕКИСЛИКДА ВА ФАЗОДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИ

1-§. Текисликда координаталар системасини киритиш

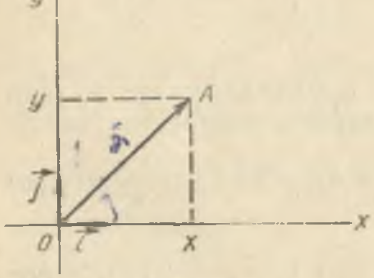
Текисликда бирор 0 нуқтада кесишувчи ўзаро перпендикуляр иккита ўқни оламиз. Бу ўқларнинг ҳар бирида 0 нуқтадан бошлаб коллинеар бўлмаган $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторларни ажратамиз (20- чизма). Бу векторлар системаси $Б = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ базисни аниқлайди.

1-таъриф. Мусбат йўналишлари мос равишда $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторлар билан аниқланувчи иккита ўқдан ташкил топган система текисликда тўғри бурчакли координаталар системаси дейилади ва $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ кўринишда белгиланади. 0 нуқта координаталар боши, $\vec{i}$, $\vec{j}$ бирлик векторлар эса координата векторлари дейилади. Таърифга асосан $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторлар ортогонал ва бирлик векторлардир:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1; \ \vec{i} \perp \vec{j}.$$

Мусбат йўналишлари $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторлар билан аниқланган Ox, Oy ўқлар мос равишда абсциссалар ва ординаталар ўқлари деб аталади.

Текисликда $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ координата системаси берилган бўлсин. Шу текисликнинг A нуқтаси учун $\vec{AO}$ вектор A нуқтанинг радиус-вектори дейилади.



20-чизма.

$\vec{OA}$ вектор учун қуйидаги муносабатни ёзиш мумкин:

$$\vec{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}.$$

2-таъриф. $\overrightarrow{OA}$ радиус-векторнинг x, y координаталари A нуқтанинг $R=\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ координаталар системасида координаталари дейилади ва у $A(x;\ y)$ кўринишда белгиланади. Бунда x сон A нуқтанинг абсциссаси, y сон эса A нуқтанинг ординатаси дейилади.

Векторнинг координаталарини қуйидагича таърифлаймиз.

3-таъриф. Векторнинг координата ўқларидаги проекциялари векторнинг координаталари дейилади.

Векторнинг Ox ўқидаги проекцияси унинг биринчи координатаси ёки x координатаси, Oy ўқидаги проекцияси унинг иккинчи координатаси ёки y координатаси дейилади.

Масалан, агар a векторнинг координаталарини x_a, y_a билан белгиласак, у ҳолда таърифга асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$x_a = \text{пр}_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}),$$

$$y_a = \text{пр}_{Oy}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}).$$

Координаталар текислигида $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ вектор берилган бўлсин. A нуқтадан Ox ўқига параллел, B нуқтадан Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз (21-чизма). Уларнинг кесишиш нуқтаси C бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{AC} = x_a \cdot \vec{i},\ \overrightarrow{CB} = y_a \cdot \vec{j}$$

ва

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}$$

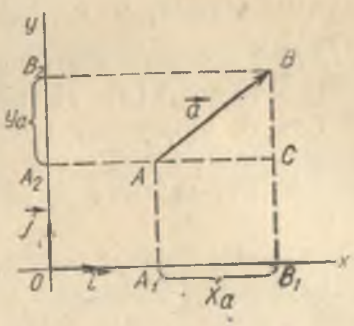
деб ёза оламиз. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: агар x_a, y_a лар $\vec{a}$ векторнинг координаталари бўлса, унда $\vec{a}$ векторни унинг координаталари орқали ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}. \tag{1}$$

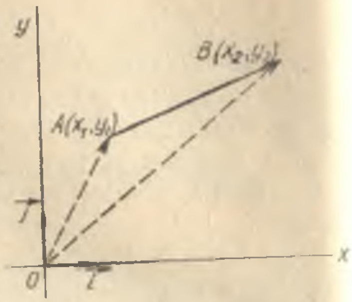
(1) вектор тенгликни кўп ҳолларда ушбу

$$\vec{a} = \{x_a;\ y_a\}$$

символик кўринишда ёзилади. (1) тенглик текисликда-



21-чизма.



22-чизма.

ги ҳар қандай векторни иккита ўзаро перпендикуляр векторларга ёйиб ёзиш мумкинлигини кўрсатади. Умуман, текисликдаги ҳар қандай векторни коллинеар бўлмаган иккита векторга ёйиб ёзиш мумкин (бу факт қийшиқ бурчакли декарт координаталари системасини тузиш учун асос бўлади).

$\vec{a}$ векторнинг боши ва охири координаталари $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ координаталар системасида маълум бўлса, бу векторнинг координаталарини топиш масаласини қарайлик. Айтайлик, $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ га нисбатан $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ бўлсин (22-чизма). У ҳолда

$$\vec{OA} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j};\ \vec{OB} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ ва } \vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

Бундан

$$\vec{AB} = \vec{a} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}, \qquad (2)$$

яъни векторнинг координаталари шу вектор охири ва бошининг тегишли координаталари айирмасига тенг.

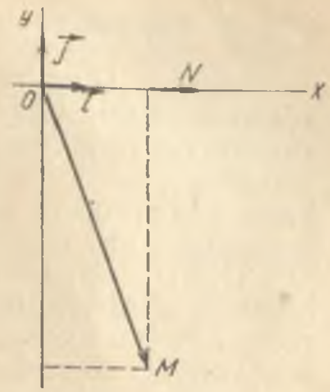
Агар $\vec{a} = \vec{AB}$ вектор боши ва охирининг координаталари $A(x_A; y_A)$ ва $B(x_B; y_B)$ бўлса, у ҳолда икки нуқта орасидаги масофа

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad (*)$$

формула билан топилади.

1-мисол. $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ да $M(2; -5)$, $N(3; 0)$ нуқталарни ясанг.

Ечиш. $M(2; 5)$ нуқтани ясаш учун $\vec{OM} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ векторни ясаймиз. Бунинг учун 0 нуқтадан бошлаб $\vec{i}$ га коллинеар $2\vec{i}$ векторни, $\vec{j}$ га коллинеар $-5\vec{j}$ векторни ясаймиз Сўнгра бу векторларнинг йиғиндисини топсак, $\vec{OM}$ вектор ҳосил бўлади ва ундан изланаётган M нуқтани топамиз. Худди шундай $N(3; 0)$ нуқтани ясаш учун $\vec{ON} = 3\vec{i}$ векторни ясаймиз (23-чизма).



23-чизма.

2-мисол. Агар $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ бўлса, $\vec{AB}$ векторнинг координаталарини топинг.

Ечиш. Бу ерда $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. (2) формулага кўра: $AB = \{-2 - 1;\ 3 - 2\} = \{-3;\ 1\}$.

3-мисол. $A(1, -2)$ ва $B(4, -3)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. Изланаётган масофани (*) формулага асосан топамиз:

$$\rho(A;\ B) = \sqrt{(4-1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{9+1},$$
$$\rho(A;\ B) = \sqrt{10}.$$

4-мисол. Берилган $A(4, 3)$ нуқтадан 5 бирлик масофада Oy ўқида ётган $B(x, y)$ нуқтани топинг.

Ечиш. Шартга кўра B нуқта Oy ўқида ётади. Oy ўқида ётган ҳар бир нуқтанинг абсциссаси нолга тенг бўлганлигидан B нуқта $B(0, y)$ координаталарга эга. (*) формулага асосан:

$$5 = \sqrt{(0-4)^2 + (y-3)^2}$$
$$25 = 16 + y^2 - 6y + 9$$
$$y^2 - 6y = 0;\ y(y-6) = 0$$
$$y = 0;\ y = 6.$$

Демак, $A(4,3)$ нуқтадан узоқлиги 5 га тенг бўлиб, Oy ўқида ётувчи иккита нуқта мавжуд экан:

$$B_1(0;\ 0) \text{ ва } B_2(0;\ 6).$$

2-§. Фазода координаталар системасини киритиш

Фазонинг O нуқтаси, кесишувчи ўзаро перпендикуляр учта Ox, Oy, Oz тўғри чизиқларни оламиз (24-чизма). Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бир жуфти орқали текислик ўтказамиз. Ox ва Oy тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликни xOy текислик деб, қолган иккита текисликни мос равишда xOz ва yOz деб белгилаймиз. Ox, Oy, Oz тўғри чизиқлар *координата ўқлари* (мос равишда абсцисса, ордината, аппликата), уларнинг кесишиш нуқтаси координаталар боши, xOy, yOz ва xOz текисликлар *координата текисликлари* дейилади.

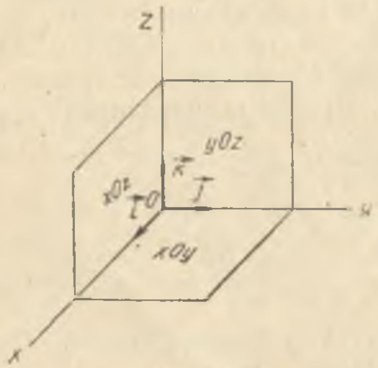
O нуқта ҳар қайси координата ўқини иккита ярим тўғри чизиққа ажратади. Улардан бирини мусбат, бошқасини манфий деб келишиб оламиз. Бу усул билан ҳосил қилинган $Oxyz$ системага фазода тўғри бурчакли (декарт) координаталар системаси дейилади. Одатда Ox, Oy, Oz координата ўқларининг бирлик векторлари мос равишда $\vec{i}$, $\vec{j}$ ва $\vec{k}$ лар орқали белгиланади. Фазода тўғри бурчакли координаталар системаси символик $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ кўринишда ҳам белгиланади.

Фазодаги векторнинг координаталари деб унинг координата ўқларидаги проекцияларига айтилади. Векторнинг Ox ўқдаги проекцияси унинг биринчи ёки x координатаси, Oy ўқдаги проекцияси иккинчи ёки y координатаси, Oz ўқдаги проекцияси учинчи ёки z координатаси дейилади.

Тўғри бурчакли координаталар системасида ўзининг x_a, y_a, z_a координаталари билан бирор $\vec{a}$ вектор берилган бўлсин. 1-§ га ўхшаш бу ерда ҳам

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} \quad (3)$$

тенгликнинг бажарилишини исботлаш мумкин. (3) тенгликни кўпчилик ҳолларда $\vec{a}\{x_a; y_a; z_a\}$ символик кўринишда ёзилади. Бу тенглик фазодаги ҳар қандай векторни ўзаро перпендикуляр учта векторга ёйиб ёзиш мумкинлигини



21-чизма.

билдиради. Умуман олганда фазодаги ҳар қандай векторни учта ўзаро компланар бўлмаган векторларга ёйиш мумкин.

Векторлар координаталари билан берилганда улар устида қўшиш, айириш ва векторни сонга кўпайтириш амалларини кўрайлик.

Векторларни қўшиш (айириш) ва векторни сонга кўпайтириш хоссасидан: агар $\vec{a}$ векторнинг координаталари x_a; y_a; z_a дан иборат, $\vec{b}$ векторнинг координаталари эса x_b; y_b; z_b бўлса, у ҳолда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} \pm x_b\vec{i} \pm y_b\vec{j} \pm z_b\vec{k} = (x_a \pm x_b)\vec{i} + (y_a \pm y_b)\vec{j} + (z_a \pm z_b)\vec{k}$$

ва

$$\lambda\vec{a} = \lambda(x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) = \lambda x_a\vec{i} + \lambda y_a\vec{j} + \lambda z_a\vec{k}$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, $\vec{a} \pm \vec{b}$ вектор $x_a \pm x_b$; $y_a \pm y_b$; $z_a \pm z_b$ координаталарга эга бўлади, яъни

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_a \pm x_b;\ y_a \pm y_b;\ z_a \pm z_b\}. \quad (4)$$

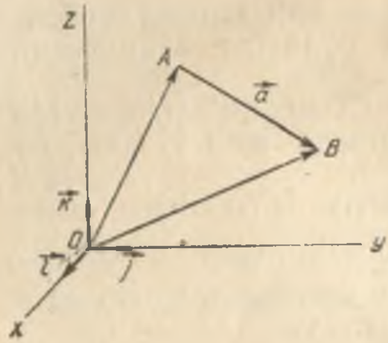
$\lambda\vec{a}$ векторнинг координаталари эса λx_a; λy_a; λz_a бўлади, яъни

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a\}. \quad (5)$$

Демак, икки векторни қўшганда (айирганда) уларнинг мос координаталари қўшилади (айрилади). Векторни сонга кўпайтирганда, унинг ҳар бир координатаси шу сонга кўпайтирилади.

Мисол. $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$ вектор берилган. Унга коллинеар бўлган $\vec{b} = \{x; y; 4\}$ векторнинг номаълум координаталарини аниқланг.

Ечиш. Икки векторнинг коллинеарлик таърифига асосан (IV боб, 2-§, 3-пункт) $\vec{b} = k\vec{a} = k(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$ деб ёзамиз. У ҳолда (2) формулага асосан: $\vec{b} = \{2k; -3k; k\}$. Иккинчи томондан, $k = 4$. Демак, $\vec{b} = \{8; -12; 4\}$ бўлади.



25-чизма.

Энди A нуқтанинг координаталарини кўриб ўтамиз. Айтайлик, фазода $Oxyz$ декарт координаталар системаси берилган бўлсин (25-чизма). Бу системада исталган A нуқта учун $\overrightarrow{OA}$ векторнинг координаталари шу A нуқтанинг координаталари дейилади. Демак, нуқтанинг координаталари—унинг радиус-векторининг координаталаридир. Одатда A нуқтанинг координаталари шу ҳарфнинг ёнида кичик қавс ичида ёзилади: $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$.

A ва B нуқталарнинг координаталари маълум бўлганда $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталарини топишни кўрайлик. Айтайлик, A нуқтанинг координаталари $(x_A;\ y_A;\ z_A)$, B нуқтанинг координаталари $(x_B;\ y_B;\ z_B)$ бўлсин. У ҳолда (25-чизма):

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}-x_A\vec{i}-y_A\vec{j}-z_A\vec{k}=$$
$$=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}.$$

Бу ердан $\overrightarrow{AB}$ вектор $x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A$ координаталарга эга бўлишини кўрамиз. Демак, векторнинг координаталари унинг охири ва бошини билдирувчи нуқталарнинг мос координаталари айирмасига тенг:

$$\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\}. \tag{6}$$

A ва B нуқталар орасидаги масофа эса $\overrightarrow{AB}$ вектор узунлигига тенг. Демак, координаталари билан берилган икки нуқта орасидаги $d=|\overrightarrow{AB}|$ масофа қуйидаги формула билан топилади:

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \tag{**}$$

Мисол. Агар $A(3;\ 4;\ 1)$ ва $B(5;\ 4;\ 1)$ бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторининг координаталарини топинг.

Ечиш. Айтайлик, $\overrightarrow{AB}=\{x_{AB};\ y_{AB};\ z_{AB}\}$ бўлсин. У ҳолда (6) формулага асосан:

$$x_{AB}=x_B-x_A=5-3=2,$$
$$y_{AB}=y_B-y_A=4-4=0.$$
$$z_{AB}=z_B-z_A=11-1=10.$$

Демак,

$$\overrightarrow{AB}=\{2;\ 0;\ 10\}\ \text{бўлади.}$$

3-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

MN кесмани берилган $\lambda_1:\lambda_2$ нисбатда бўлиш талаб қилинсин. Агар MN кесмада ML масофа абсолют қийматининг LN масофа абсолют қийматига нисбати $\lambda_1:\lambda_2$ га тенг бўлса, L нуқта MN кесмани $\lambda_1:\lambda_2$ нисбатда бўлади дейилади. Берилган масалани ҳал қилиш учун MN кесманинг $\dfrac{|\overrightarrow{ML}|}{|\overrightarrow{LN}|}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$ тенгликни қаноатлантирувчи $L(x_L;\ y_L;\ z_L)$ нуқтасининг координаталарини топиш керак (26-чизма). Таърифланишига кўра L нуқта MN кесмани $\lambda_1:\lambda_2$ нисбатда бўлиши учун

$$\overrightarrow{ML}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\overrightarrow{LN} \tag{7}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур.

$\overrightarrow{ML}$ ва $\overrightarrow{LN}$ векторларни $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OL}$ ва $\overrightarrow{ON}$ радиус-векторлар орқали ифодалайлик. У ҳолда (7) тенглама

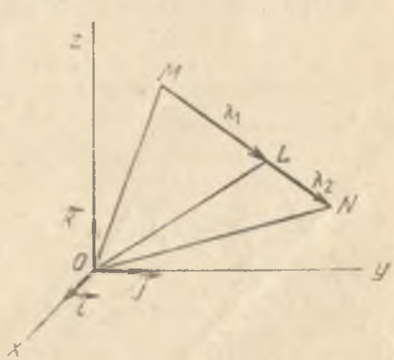
$$\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OM}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ (\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OL})$$

кўринишни олади. Бундан эса

$$\overrightarrow{OL}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\times$$
$$\times\overrightarrow{OM}+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\ \overrightarrow{ON} \tag{8}$$

келиб чиқади.

(8) формула қўйилган масаланинг ечимини беради,



26-чизма.

чунки у MN кесмани берилган $\lambda_1 : \lambda_2$ нисбатда бўлувчи L нуқтанинг радиус-векторини $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ ва $N(x_N;\ y_N;\ z_N)$ нуқталарнинг радиус-векторлари орқали ифодалайди.

(8) вектор тенгликка асосан қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_L &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\, x_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\, x_N; \\ y_L &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\, y_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\, y_N; \\ z_L &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\, z_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\, z_N. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

(9) формула берилган кесмани $\lambda_1 : \lambda_2$ нисбатда бўлувчи L нуқтанинг координаталарини топиш формулаларидир.

L нуқта MN кесманинг ўртаси бўлган хусусий ҳолда (9) формула

$$x_L = \frac{x_M + x_N}{2};\ y_L = \frac{y_M + y_N}{2};\ z_L = \frac{z_M + z_N}{2} \tag{10}$$

кўринишга келади.

(10) формула кесмани тенг иккига бўлувчи нуқтанинг координаталарини ҳисоблаш формулаларидир. (9) ва (10) формулалардан хусусий ҳолда—кесма текисликда берилганда кесмани берилган нисбатда бўлиш формулаларига эга бўламиз.

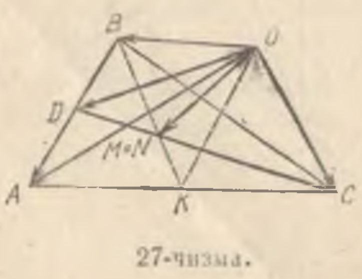
Мисол. ABC учбурчакнинг медианалари бирор M нуқтада кесишади, бунда:

а) M нуқта ҳар бир медианани учбурчак учидан ҳисоблаганда $2:1$ нисбатда бўлишини;

б) текисликнинг ҳар қандай 0 нуқтаси учун

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

бўлишини исботланг.



27-чизма.

Ечиш. CD медиана устида учбурчакни учидан ҳисоблаганда $2:1$ нисбатда бўлувчи M нуқтани қарайлик (27-чизма). (8) формулага асосан

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OD}$$

тенгликка эга бўламиз. Бунда O—текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, D нуқта AB томоннинг ўртаси, шу сабабли (8) формулага асосан ($\lambda_1 = \lambda_2$):

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

Демак,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Энди шу M нуқта барча медианаларни учбурчак учидан ҳисоблаганда $2:1$ нисбатда бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун BK медианада N нуқтани оламиз ва N нуқта BK медианани учбурчак учидан ҳисоблаганда $2:1$ нисбатда бўлсин. У ҳолда (8) формулага асосан $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$ тенгликка эга бўламиз. N нуқта AC томоннинг ўртаси, шунга кўра ($\lambda_1 = \lambda_2$);

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

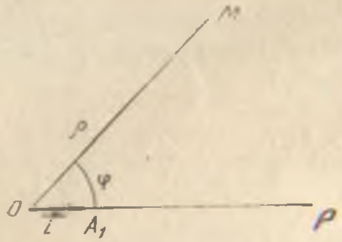
Демак,

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

$\overrightarrow{OM}$ ва $\overrightarrow{ON}$ векторлар тенг экан. Бу эса M нуқта учбурчакнинг барча медианалари учун умумий эканлигини билдиради. Шу билан юқоридаги иккита шарт ҳам исбот қилинди.

4-§. Қутб координаталар системаси. Нуқтанинг декарт ва қутб координаталари орасидаги боғланиш

Математикада декарт координаталари системасидан ташқари бошқа координаталар системаларидан ҳам фойдаланилади. Шундай системалардан бири қутб координаталари системасидир. Ориентацияли текисликда бирор O нуқта, $[OP)$ нур ва бу нурда ётувчи $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ бирлик векторни оламиз (текисликда олинган $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ координаталар системаси $\vec{i}$ векторни O нуқта атрофида $\vec{j}$ вектор устига тушириш учун қисқа йўл бўйича буриш соат стрелкаси ҳаракатига тескари бўлса,



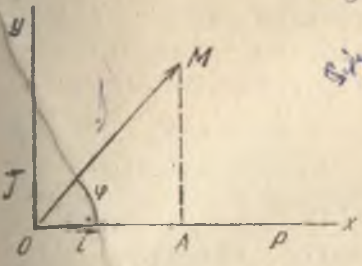
28-чизма.

координаталар системаси мусбат ориентацияли, текисликни эса ориентацияланган дейилади). Ҳосил қилинган геометрик образ қутб координаталар системаси дейилади (28-чизма). Уни $R = \{0; \vec{i}\}$ кўринишда белгилаймиз. 0 нуқта *қутб боши*, $[OP)$ нур эса *қутб ўқи* дейилади. M нуқтанинг текисликдаги ҳолати икки сон: бири $[OA)$ бирлик кесма ёрдамида ўлчанган $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ масофа, иккинчиси $[OP)$ нур $[OM)$ нурнинг устига тушиши учун буриш керак бўлган $\varphi = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ бурчак билан тўла аниқланади. Қутб ўқини $[OM)$ нур устига тушгунга қадар буриш соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда бажарилса, φ бурчак мусбат деб, акс ҳолда, манфий деб ҳисобланади. ρ ни M нуқтанинг *қутб радиуси*, φ ни M нуқтанинг *қутб бурчаги* дейилиб, улар умумий ном билан M нуқтанинг қутб координаталари дейилади ва $M(\rho, \varphi)$ кўринишда белгиланади. 0 нуқта учун $\rho=0$ бўлиб, φ аниқланмаган ҳисобланади. Агар ρ сон ва φ бурчак $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ оралиқда ўзгарса, текисликнинг ҳар бир нуқтаси қутб координаталари билан мос келади. Ҳар бир қутб координаталар системасига мусбат ориентирланган тўғри бурчакли координаталар системаси $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ ни мос қўйиш мумкин. Бунда 0 нуқта (қутб) координаталар боши бўлиб хизмат қилади. Фараз қилайлик, ρ, φ лар M нуқтанинг қутб координаталари, x, y эса M нуқтанинг тўғри бурчакли координаталар системасидаги координаталари бўлсин (29-чизма). У ҳолда чизмадан:

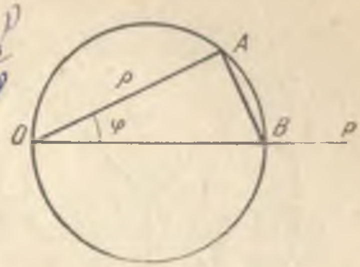
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{11}$$

Бу формулалар ёрдамида M нуқтанинг қутб координаталари ρ ва φ маълум бўлса, x, y ни топиш мумкин: $(11) \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2}$ (12). Агар $\rho \neq 0$ бўлса,

$$(11),\ (12) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{13}$$



29-чизма.



30-чизма.

Аксинча, $M \neq 0$ нуқтанинг тўғри бурчакли декарт координаталари x, y маълум бўлса, (12), (13) дан унинг қутб координаталари ρ ва φ ларни топиш мумкин. Демак, (11), (13) формулалар декарт ва қутб координаталари системасини боғловчи формулалардир.

Текисликда қутб координагалар системаси берилган бўлсин. Бу системада ρ ёки φ лардан бирини ўзида сақловчи $f(\rho; \varphi)$ ифодани олайлик. Бу ифода текисликда бир қанча фигурани ифодалаши мумкин. Масалан, фигура $f(\rho; \varphi) = \rho - 6$ муносабат билан аниқланган бўлсин. У ҳолда:

а) $F_1 = \{M(\rho, \varphi) \mid \rho = 6\}$ — (Маркази 0 қутбда ва радиуси $\rho = 6$ га тенг бўлган айлана).

б) $F_2 = \{M(\rho, \varphi) \mid \rho - 6 > 0\}$ (F_1 айланадан ташқаридаги нуқталар тўплами).

в) $F_3\{M = (\rho, \varphi) \mid \rho - 6 < 0\}$ (0 марказли, $\rho = 6$ радиусли очиқ доира).

г) $F_4 = \{M(\rho, \varphi) \mid \rho - 6 \geqslant 0\} = F_1 \cup F_2$;

д) $F_5 = \{M(\rho, \varphi) \mid \rho - 6 \leqslant 0\}$ ($\rho = 6$ радиусли доира);

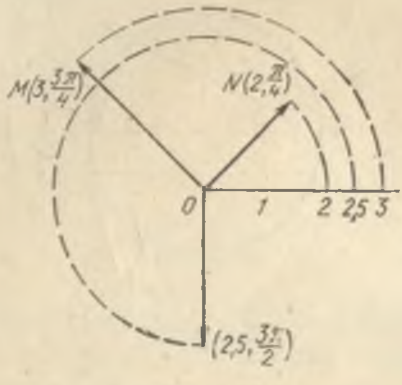
е) $F_6 = \{M(\rho, \varphi) \mid \rho - 6 \neq 0\} = F_2 \cup F_3$.

$f(\rho, \varphi)$ тенглама F_1 фигуранинг берилган қутб координаталар системасидаги тенгламаси дейилади. Ушбу

$$\rho = a; \ (a - \text{const}) \qquad (14)$$

тенглама маркази қутбда, радиуси a га тенг бўлган айлананинг тенгламаси бўлади. Шу айлана тенгламасини бошқа қутб координагалар системасида топайлик. Бунда қутб айланада ётсин, қутб ўқи эса айлана марказидан ўтсин деб фараз қилайлик (30-чизма). Қуйидагига эгамиз:

$$\rho = 2a \cos\varphi. \qquad (15)$$



31-чизма.

Бу изланган айлана тенгламасидир. (14) ва (15) ни қуйидагича ўзгартириб ёзамиз:

$$\rho - a = 0. \qquad (16)$$

$$\rho - 2a\cos\varphi = 0. \qquad (17)$$

(14) ва (15) тенгламалар битта айланани ифодалайди, лекин тенгламалар ҳар хил. Биттаси ρ ни ўзида сақласа, иккинчиси ρ ва φ ни ҳам ўзида сақлайди (чунки координаталар системаси ҳар хил). Демак, айлана қутб координата системасига нисбатан жойлашувига кўра ҳар хил кўринишдаги тенгламаларга эга бўлар экан.

1-мисол. Қуйидаги нуқталарни қутб координаталар системасида ясанг:

$$M\left(3;\ \frac{3\pi}{4}\right);\ N\left(2;\ \frac{\pi}{4}\right);\ P\left(2{,}5;\ \frac{3\pi}{2}\right).$$

Ечиш. M нуқтани ясаш учун қутб ўқини $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ ёки $\varphi = 135°$ бурчакка бурамиз, йўналиш мусбат. Радиусда 3 бирлик кесма оламиз, шу кесма охири биз излаган нуқта бўлади. N ва P нуқталар ҳам худди шундай топилади (31-чизма).

2-мисол. Қутб координаталар системасида берилган $A\left(\frac{\pi}{3};\ 3\right)$ ва $B\left(-\frac{\pi}{4};\ 4\right)$ нуқталарнинг декарт координаталар системасидаги координаталарини топинг.

Ечиш. а) Берилган: $A\left(\frac{\pi}{2};\ 3\right)$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\rho = 3$.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{формулаларга кўра:}$$

$x = 3\cos\frac{\pi}{2} = 3\cdot 0 = 0$; $y = 3\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 3\cdot 1 = 3$ ларни топамиз.

Демак, декарт координаталар системасида: $A(0;\ 3)$.

б) Худди юқоридагига ўхшаш топамиз: $B\left(-\frac{\pi}{4};\ 4\right)$; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; $\rho = 4$.

$$x = 4 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2};$$

$$y = 4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

Демак, $B(2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$.

3-мисол. Қутб координаталар системасида берилган $\rho^2\sin 2\varphi = 2a^2$ чизиқ тенгламасини декарт координаталар системасида ифодаланг.

Ечиш.

$$\rho^2\sin 2\varphi = 2a^2$$

$$\rho^2 \cdot 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi = 2a^2$$

$$2\rho\sin\varphi \cdot \rho\cos\varphi = 2a^2$$

$$2\rho\sin\varphi \cdot \rho\cos\varphi = 2a^2 \qquad (*)$$

$x = \rho\cos\varphi$ ва $y = \rho\sin\varphi$ ларни (*) га қўйсак, $2xy = 2a^2$ ёки $xy = a^2$ келиб чиқади.

5-§. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси ва унинг хоссалари. Учбурчакнинг юзи

Вектор кўпайтмага таъриф беришдан олдин учта нокомпланар вектор учлигининг фазода жойлашишига алоқадор бўлган қуйидаги тушунчани киритамиз.

1-таъриф. Агар учта нокомпланар $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторни умумий бошланғич нуқтага келтирилгандан сўнг векторлардан бирини иккинчиси билан устма-уст тушгунга қадар улар орасидаги кичик бурчак бўйича айлантириш учинчи векторнинг охиридан қаралганда соат стрелкасига қарши йўналишда кўринса, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар учлиги ўнг учлик (агар айлантириш соат стрелкаси йўналиши бўйича олинса, чап учлик) дейилади.

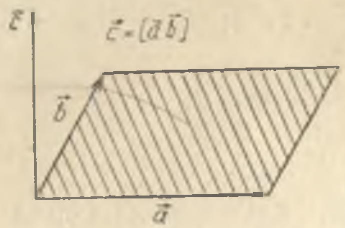
2-таъриф. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси деб қуйидаги учта шартни қаноатлантирадиган $\vec{c}$ векторга айтилади ва у $[\vec{a}, \vec{b}]$ ёки $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ кўринишда белгиланади:

1) $|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, $(0 < (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) < \pi)$;

2) $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$ ($\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ортогонал);

6—10

3) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ва $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ векторлар учлиги ўнг учликни ҳосил қилсин (32-чизма). Бу таърифда келтирилган учта шартнинг ҳар бирининг геометрик маъносини аниқлайлик.



32-чизма.

1-шарт $\vec{c}$ векторнинг узунлиги ($|\vec{c}|$ сон) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограмм юзини ифодаловчи сонга тенг эканини билдиради (32-чизма) (чунки $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$ ифода томонлари $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан иборат параллелограмм юзини ифодалайди).

2-шарт вектор кўпайтма (яъни $\vec{c}$ вектор) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан аниқланадиган текисликка перпендикуляр эканини билдиради.

3-шарт вектор кўпайтманинг йўналишини аниқлайди.

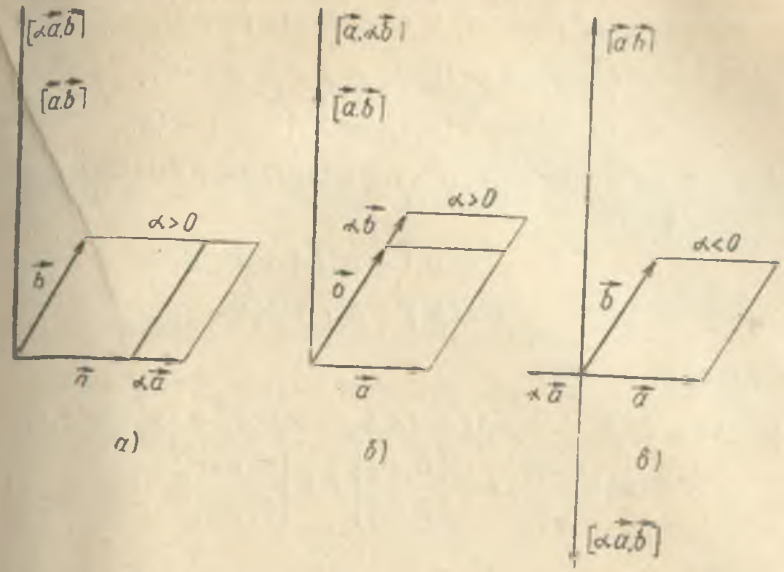
Вектор кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

1. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса ёки улардан камида бири ноль вектор бўлса, уларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}\|\vec{b}$ бўлса, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=0$ ёки 180° бўлиб, биринчи шартга асосан $|\vec{c}|=0$ бўлади. Модули нолга тенг вектор эса албатта ноль вектордир.

2. $[\vec{a}, \vec{b}]=-[\vec{b}, \vec{a}]$, яъни кўпайтувчиларнинг ўринларини алмаштиришда вектор кўпайтманинг ишораси ўзгаради.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, вектор кўпайтма таърифининг 1 ва 2-шартларига асосан $[\vec{a}, \vec{b}]$ ва $[\vec{b}, \vec{a}]$ векторларнинг узунликлари тенг ва иккаласи ҳам битта текисликка перпендикуляр, йўналишлари эса учинчи шартга асосан $\vec{c}$ вектор томонга қараб энг қисқа йўл билан бурилиш соат стрелкаси ҳаракатига тескари бўлса, $\vec{b}$ дан $\vec{a}$ вектор томонга қараб қисқа йўл билан бурилиш эса соат стрелкаси ҳаракати бўйича бўлиб қолади. Демак йўналиш аввалгига ўхшаш бўлиши учун $[\vec{b}, \vec{a}]$



33-*а*, *б*, *в*, чизма.

вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторга нисбатан қарама-қарши йўналган бўлиши керак.

3. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}]=[\vec{a}, \alpha\vec{b}]=\alpha[\vec{a}, \vec{b}]$, бу ерда α — исталган ҳақиқий сон (скаляр кўпайтувчига нисбатан ассоциативлик қонуни).

Исбот. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}]$ ва $\alpha[\vec{a}, \vec{b}]$ векторларнинг модуллари тенг, йўналишлари эса $\alpha>0$ бўлганда $[\vec{a}, \vec{b}]$ вектор билан бир хил, $\alpha<0$ да эса $[\vec{a}, \vec{b}]$ нинг йўналишига қарама-қарши. (33-*а*, *б*, *в* чизма.)

4. $[\vec{a}+\vec{a}', \vec{b}]=[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{a}', \vec{b}]$

$[\vec{a}, \vec{b}+\vec{b}']=[\vec{a}, \vec{b}]+[\vec{a}, \vec{b}']$.

(Бу хосса исботи [8] да келтирилган.)

Бу хоссалардан қуйидагига эга бўламиз:

$$[\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}, \gamma\vec{c}+\delta\vec{d}]=\alpha\gamma[\vec{a}, \vec{c}]+\beta\gamma[\vec{b}, \vec{c}]+$$
$$+\alpha\delta[\vec{a}, \vec{d}]+\beta\delta[\vec{b}, \vec{d}].$$

Бирлик векторларнинг вектор кўпайтмалари қуйидагича бўлади:

$$[\vec{i}, \vec{j}] = -[\vec{j}, \vec{i}] = \vec{k}, \ [\vec{i}, \vec{i}] = 0,$$
$$[\vec{k}, \vec{i}] = -[\vec{i}, \vec{k}] = \vec{j}, \ [\vec{j}, \vec{j}] = 0,$$
$$[\vec{j}, \vec{k}] = -[\vec{k}, \vec{j}] = \vec{i}, \ [\vec{k}, \vec{k}] = 0.$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар координаталари билан берилган бўлса, яъни

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

бўлса, у ҳолда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_3 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (18)$$

Демак,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Вектор кўпайтмадан фойдаланиб учбурчакнинг юзини ҳисоблаш учун формула чиқарамиз. Айтайлик, ABC учбурчак фазодаги $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ тўғри бурчакли координаталар системасига нисбатан учларининг координаталари билан берилган бўлсин:

$$A(x_1; y_1; z_1); \quad B(x_2; y_2; z_2); \quad C(x_3; y_3; z_3).$$

Вектор кўпайтма таърифидаги 1-шартга кўра унинг модули параллелограммнинг юзини беради. Унинг ярми эса учбурчакнинг юзини беради. Шунинг учун

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| \qquad (19)$$

га эга бўламиз.

1-мисол. $\vec{i}$, $\vec{j}$ бирлик векторлар бўлиб, улар орасидаги бурчак 45° га тенг. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. $[\vec{a}, \vec{b}] = [3\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{i} + 3\vec{j}] = [3\vec{i}, 2\vec{i}] + [3\vec{i}, 3\vec{j}] + [-\vec{j}, 2\vec{i}] + [-\vec{j}, 3\vec{j}] = 9[\vec{i}, \vec{j}] - 2[\vec{j}, \vec{i}] = 11[\vec{i}, \vec{j}]$.

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |11[\vec{i}, \vec{j}]| = 11|\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin 45^\circ =$$
$$= 11 \cdot 1 \cdot 1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}5\sqrt{2};$$
$$S = 5{,}5\sqrt{2} \text{ кв. бирлик.}$$

2-мисол. Учларнинг координаталари $A(5; 4; 3)$, $B(2; -1; 0)$, $C(-3; 2; 1)$ бўлган ABC учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. AB ва AC векторларнинг координаталарини ҳисоблайлик. (6) формулага асосан:

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - 5; \ -1 - 4; \ 0 - 3\} = \{-3; \ -5; \ -3\}.$$
$$\overrightarrow{AC} = \{-3 - 5; \ 2 - 4; \ 1 - 3\} = \{-8; \ -2; \ -2\}.$$
$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left\{ \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} \right\} =$$
$$= \{4; \ 18; \ -34\}.$$
$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{4^2 + 18^2 + (-34)^2} = \sqrt{1496} = 2\sqrt{374}.$$

(19) формулага кўра:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{374}, \quad S_{\Delta ABC} = \sqrt{374} \text{ кв. бирлик.}$$

3-мисол. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ва $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ векторлар орасидаги бурчакни аниқланг.

Ечиш. Икки вектор орасидаги бурчак формуласига кўра:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{4+9+36}} = \frac{8}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \frac{8}{21},$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{8}{21}\right).$$

4-мисол. Учлари $A(7; 3; 4)$, $B(4; 1; -2)$, $C(7; 5; 4)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Учбурчакнинг A учидан туширилган биссектрисанинг CB томон билан кесишган D нуқтанинг координаталарини топинг ва учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Учбурчакнинг A учини ҳосил қилувчи томонларининг узунликларини топамиз:

$$\rho(A, C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(7 - 7)^2 + (5 - 3)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{0 + 4 + 0} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\rho(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(4-7)^2+(1-3)^2+(-2-4)^2}=$$
$$=\sqrt{9+4+36}=\sqrt{49}=7.$$

Бурчакнинг биссектрисаси ўзи туширилган томонни ён томонлар билан пропорционал бўлакларга бўлиш хоссасидан фойдаланиб, $|CD|:|DB|=7:2=\frac{7}{2}=3{,}5$ эканини аниқлаймиз.

Демак, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{7}{2}$ га тенг. Агар $\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ деб белгилаб олсак, (9) формула берилган масала учун қуйидаги кўринишни олади:

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda};\quad z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Бу формула бўйича D нуқтанинг координаталарини қуйидагича топамиз:

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{7}{2}\cdot 4}{1+\frac{7}{2}}=\frac{7+14}{\frac{9}{2}}=\frac{21}{\frac{9}{2}}=\frac{42}{9};$$

$$y_D=\frac{y_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{5+\frac{7}{2}\cdot 1}{1+\frac{7}{2}}=\frac{\frac{17}{2}}{\frac{9}{2}}=\frac{17}{9};$$

$$z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}\frac{4+\frac{7}{2}\cdot(-2)}{1+\frac{7}{2}}=\frac{4-7}{\frac{9}{2}}=-\frac{3}{\frac{9}{2}}=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}.$$

Демак, изланаётган нуқта:

$$D\left(\frac{42}{9};\ \frac{17}{9};\ -\frac{2}{3}\right).$$

Энди учбурчакнинг юзини ҳисоблаймиз. Бунинг учун $\vec{AB}$ ва $\vec{AC}$ векторларнинг координаталарини (6) формулага кўра ҳисоблаймиз:

$$\vec{AB}=\{0;\ 2;\ 0\},\quad \vec{AC}=\{-3;\ -2;\ -6\}.$$

Буларнинг вектор кўпайтмасини топамиз:

$$[\vec{AB}; \vec{AC}] = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{-12; 0; 6\}$$

$$|[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \sqrt{(-12)^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \text{ кв. бирлик.}$$

6-§. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси ва унинг хоссалари. Тетраэдрнинг ҳажми

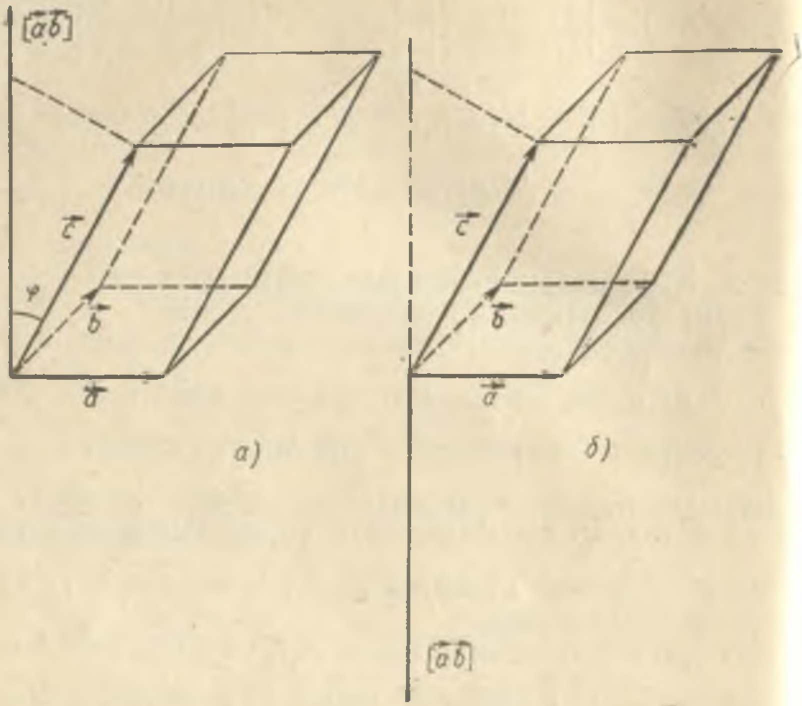
$\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси деб (векторларнинг кўрсатилган тартибига кўра) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг вектор кўпайтмасидан иборат векторни $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтиришдан ҳосил қилинган сонга айтилади. Аралаш кўпайтма $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$ ёки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ кўринишда белгиланади.

Аралаш кўпайтманинг геометрик маъноси билан танишайлик. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар бирор O нуқтага қўйилган бўлиб, компланар бўлмасин ҳамда ўнг учликни ҳосил қилсин. Қирралари шу берилган векторлардан иборат параллелепипедни ясасак, $|[\vec{a}, \vec{b}]|$ миқдор шу параллелепипед асосининг юзини билдиради. Аралаш кўпайтма таърифига асосан $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = |[\vec{a}, \vec{b}]||\vec{c}|\cos\varphi$, бу ерда $\varphi = ([\vec{a}, \vec{b}], \hat{\ } \vec{c})$ бўлиб, $|\vec{c}|\cos\varphi$ миқдор $\vec{c}$ векторнинг $[\vec{a}, \vec{b}]$ вектор йўналишидаги тўғри чизиқдаги проекциясига тенг бўлиб, параллелепипеднинг баландлигидир. (34-*а*, *б* чизма):

$$|\vec{c}|\cos\varphi = h.$$

Демак, $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = S_{\text{асос}} \cdot h = V$. Бу сон эса параллелепипеднинг ҳажмини аниқлайди.

Демак, агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар ўнг учлик ҳосил қилса, бу векторларнинг аралаш кўпайтмаси бу векторларга ясалган параллелепипед ҳажмига тенг бўлади. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лар чап учлик ташкил қилса, $[\vec{a}, \vec{b}]$



34-*а*, *б* чизма.

вектор билан $\vec{c}$ вектор орасидаги бурчак $\varphi \geqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi \leqslant$ $\leqslant 0$ (34-*б* чизма) бўлади. У ҳолда

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -V.$$

Демак,

$$|[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}| = V. \tag{20}$$

$R = \{0; i; j; k\}$ координаталар системасига нисбатан $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар қуйидаги координаталарга эга бўлсин:

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}; \quad \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}; \quad \vec{c} = \{c_1; c_2; c_3\}.$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмасини ҳисоблаймиз. Дастлаб, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини топамиз:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \qquad (21)$$

Энди $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторни $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ векторга скаляр кўпайтирамиз. У ҳолда

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган бу учинчи тартибли детерминантда йўлларни икки марта алмаштирамиз:

$$[\vec{a}\vec{b}]\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (22)$$

(22) формуладан кўринадики, учта векторнинг аралаш кўпайтмаси учинчи тартибли детерминантга тенг бўлиб, бу детерминантнинг биринчи йўл элементлари биринчи вектор координаталаридан, иккинчи йўл элементлари иккинчи вектор координаталаридан, учинчи йўл элементлари эса учинчи вектор координаталаридан тузилади.

Векторларнинг аралаш кўпайтмаси қуйидаги хоссаларга эга:

$$1. \quad [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = [\vec{b}, \vec{c}]\vec{a}.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу учта векторга қурилган параллелепипед ҳажмларининг абсолют қийматлари тенг, ундан ташқари $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ва $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ учликларнинг ориентациялари бир хил.

2. Кўпайтувчиларнинг ўринлари алмашинишидан аралаш кўпайтманинг ишораси ўзгаради:

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -[\vec{b}, \vec{a}]\vec{c};$$

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -[\vec{a}, \vec{c}]\vec{b};$$

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -[\vec{c}, \vec{b}]\vec{a}.$$

Биринчи тенгликнинг ўринлилигини кўрсатамиз.

$$[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = -[\vec{b}, \vec{a}]\vec{c}, \text{ чунки } [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}].$$

Қолган тенгликлар ўринлилиги ҳам шунга ўхшаш кўрсатилади.

3. $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = \alpha \cdot [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$. Ихтиёрий $\alpha \in R$ учун $(\alpha \cdot \vec{a})[\vec{b}, \vec{c}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$, чунки 1- хоссага кўра $(\alpha\vec{a})[\vec{b}, \vec{c}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$. Бундан эса $[\alpha\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$.

$$4.\ (\vec{a} + \vec{a}')[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] + \vec{a}'[\vec{b}, \vec{c}],$$

$$\vec{a}[\vec{b} + \vec{b}', \vec{c}] = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}', \vec{c}],$$

$$(\vec{a} + \vec{a}')[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a} + \vec{a}', \vec{b}]\vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}', \vec{b}])\vec{c} =$$

$$= [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} + [\vec{a}', \vec{b}]\vec{c} = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] + \vec{a}'[\vec{b}, \vec{c}].$$

Иккинчи тенглик ҳам шунга ўхшаш кўрсатилади.

5. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар компланар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлади, чунки уларга қурилган параллелепипед текисликда жойлашиб қолади, бундай параллелепипеднинг баландлиги нолга тенглигидан ҳам ҳажми нолга тенг, аксинча $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = 0$ бўлса, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = 0$ бўлса, $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{c}$. Лекин вектор кўпайтманинг таърифига асосан $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$, бундан эса $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторнинг $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг ҳар бирига перпендикулярлиги келиб чиқади, демак, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар.

6. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардан исталган иккитаси коллинеар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, хусусий ҳолда

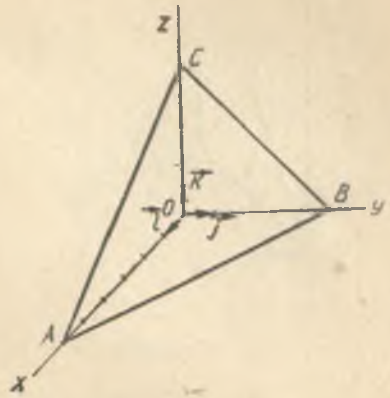
$$[\vec{a}, \vec{a}]\vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{a} = [\vec{b}, \vec{a}]\vec{a} = 0.$$

Аралаш кўпайтмадан фойдаланиб, учларининг координаталари билан берилган тетраэдрнинг ҳажмини ҳисоблаш мумкин. Айтайлик, $ABCD$ тетраэдр учларининг координаталари

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$
$B(x_2;\ y_2;\ z_2)$
$C(x_3;\ y_3;\ z_3)$
$D(x_4;\ y_4;\ z_4)$

бўлсин.

Маълумки, тетраэдрнинг ҳажми унинг бир учидан чиқувчи қирраларидан ясалган параллелепипед ҳажмининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг (яъни AB, AC ва AD қирраларидан ясалган). Шунинг учун:



35-чизма.

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})\right|. \qquad (23)$$

Агар (23) формулани нуқтанинг координаталари орқали ифодаласак,

$$V_{\text{тет.}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} \qquad (24)$$

ёки (24) формулани янада ихчамроқ формада ёзсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$V_{\text{тет.}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (25)$$

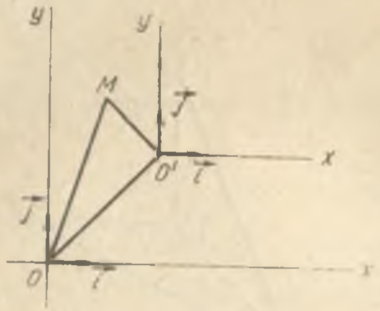
Мисол. Учлари $A(6;\ 0;\ 0)$; $B(0;\ 5;\ 0)$; $C(0;\ 0;\ 5)$ ва $O(0;\ 0;\ 0)$ нуқталарда бўлган пирамида ясанг ҳамда унинг ҳажмини топинг (35-чизма).

Ечиш. (24) формулага асосан топамиз:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 150 = 25 \text{ куб бирлик.}$$

7-§. Декарт координаталарини алмаштириш

Кўпгина амалий ва назарий масалаларни ечишда декарт координаталарининг бир системасидан бошқа сис-



36-чизма.

темасига ўтишга тўғри келади. Координаталарни алмаштиришнинг умумий моҳияти тубандагича: Ихтиёрий M нуқтанинг эски системага нисбатан x, y координаталарини унинг янги системага нисбатан x', y' координаталари орқали ифодалаш талаб қилинади. Дастлаб иккита хусусий ҳолни қараймиз.

а) Декарт координаталар системасини (координата ўқларини) параллел кўчириш билан боғлиқ алмаштириш формулаларини келтириб чиқарамиз. Бу ҳолда R ва R' координата системалари бир хил координата векторларига ва ҳар хил координата бошига эга бўлади:

$$R=\{O;\ \vec{i};\ \vec{j}\};\quad R'=\{O';\ \vec{i};\ \vec{j}\}.$$

O' нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари x_0; y_0 бўлсин (36-чизма). Ихтиёрий M нуқтанинг текисликда эски координаталар системасига нисбатан координаталари $(x;\ y)$, шу нуқтанинг янги системага нисбатан координаталари X, Y бўлсин. У ҳолда векторлар координаталарига асосан ёзамиз:

$$\overrightarrow{OO'}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}, \tag{а}$$

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}, \tag{б}$$

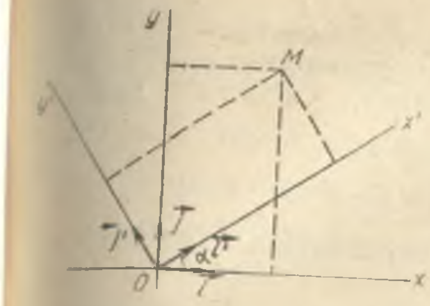
$$\overrightarrow{O'M}=X\vec{i}+Y\vec{j}. \tag{в}$$

Векторларни қўшиш қоидасига кўра:

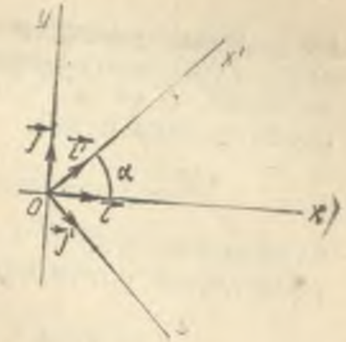
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}. \tag{г}$$

$$(а),\ (б),\ (в),\ (г)\Rightarrow\begin{cases}x=X+x_0,\\ y=Y+y_0.\end{cases} \tag{26}$$

(26) изланган алмаштириш формулаларидир. У бир-биридан параллел кўчириш орқали ҳосил бўлган координаталар системаларидаги координаталарни ўзаро боғлайди.



37-чизма.



38-чизма.

б) Координаталар бошини ўзгартирмай координата ўқларини α бурчакка бурганда координаталарни алмаштириш. Бу ҳолда $R=\{O;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ ва $R'=\{O;\ \vec{i'};\ \vec{j'}\}$. Демак, $(\widehat{\vec{i},\ \vec{i'}})=\alpha$. Ихтиёрий M нуқтанинг эски координаталари $(x;\ y)$, шу нуқтанинг янги координаталари $(x',\ y')$ бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j},\ OM=x'\vec{i'}+y'\vec{j'}. \tag{27}$$

Янги координата векторларини эски координата векторлари орқали ёзамиз:

$$\begin{aligned}\vec{i'}&=a_1\vec{i}+a_2\vec{j},\\ \vec{j'}&=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}.\end{aligned} \tag{28}$$

Агар R ва R' декарт координаталар системалари бир хил ориентацияли бўлса (37-чизма), у ҳолда

$$(\widehat{\vec{i},\ \vec{j'}})=90^\circ+\alpha,\ (\widehat{\vec{i'},\ \vec{j}})=90^\circ-\alpha,\ (\widehat{\vec{j},\ \vec{j'}})=\alpha; \tag{29}$$

агар қарама-қарши ориентацияли бўлса (38-чизма), у ҳолда

$$(\widehat{\vec{i},\ \vec{j'}})=270^\circ+\alpha;\ (\widehat{\vec{i'},\ \vec{j}})=90^\circ-\alpha;\ (\widehat{\vec{j};\ \vec{j'}})=180^\circ+\alpha \tag{30}$$

бўлади. (28) тенгликларни навбат билан $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторларга скаляр кўпайтирамиз:

$$a_1=\vec{i'}\cdot\vec{i}=\cos(\widehat{\vec{i'},\ \vec{i}}),\quad a_2=\vec{i'}\cdot\vec{j}=\cos(\widehat{\vec{i'},\ \vec{j}}),$$

$$b_1=\vec{j'}\cdot\vec{i}=\cos(\widehat{\vec{j'},\ \vec{i}}),\quad b_2=\vec{j'}\cdot\vec{j}=\cos(\widehat{\vec{j'},\ \vec{j}}).$$

(29), (30) муносабатларни ҳисобга олсак, $\vec{i'}$ $\vec{j'}$ векторнинг координаталари R координаталар системасига нисбатан R ва R' координаталар системаси бир хил ориентацияли бўлса,

$$\vec{i'} = \{\cos\alpha, \ \sin\alpha\}, \ \vec{j'} = \{-\sin\alpha, \ \cos\alpha\}$$

кўринишда, агар R ва R' координаталар системаси қарама-қарши ориентацияли бўлса,

$$\vec{i'} = \{\cos\alpha, -\sin\alpha\}; \ \vec{j'} = \{\sin\alpha; \ -\cos\alpha\}$$

кўринишда бўлади. У ҳолда (27) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha - y'\cos\alpha \end{aligned}\right\}. \qquad (32)$$

(31) ва (32) формулаларни бирлаштириб, қуйидаги

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (33)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\varepsilon = \pm 1$ бўлиб, R ва R' реперлар бир хил ориентирилган бўлса, $\varepsilon = +1$, қарама-қарши ориентирланган бўлса, $\varepsilon = -1$ бўлади.

Энди умумий ҳолни қараймиз. Бунда **координаталар бошлари ҳам, координата векторлари ҳам** ҳар хил йўналишда жойлашган, яъни $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ ва $R' = \{0'; \vec{i'}; \vec{j'}\}$ бўлсин. Агар ихтиёрий M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари (x, y) бўлса, координаталарни алмаштириш формулаларини бу ҳолда ёзиш учун (26) ва (33) тенгламалардан қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \qquad (34)$$

Бу формулалар ёрдамида x', y' ларни x ва y лар орқали ҳам ифодалаш мумкин.

Мисол. Иккита тўғри бурчакли декарт координаталар системаси $R = \{0; \vec{i}, \vec{j}\}$ ва $R' = \{0'; \vec{i'}; \vec{j'}\}$ берилган

бўлиб, $O'(2; 3)$, $\vec{i'} = \{-2; 1\}$; $\vec{j'} = \{1; -1\}$ бўлсин. M нуқтанинг R координаталар системасига нисбатан координаталари $x = -2$; $y = 3$ бўлса, бу нуқтанинг R' координаталари системасига нисбатан координаталарини топинг.

Ечиш. Қуйидагиларга эгамиз:

$$a_1 = \cos\alpha = 2; \qquad a_2 = \sin\alpha = 1;$$
$$b_1 = -\sin\alpha = 1; \qquad b_2 = \cos\alpha = -1;$$
$$x_0 = 2; \qquad y_0 = 3.$$

Бу қийматларни (34) формулаларга қўямиз:

$$x = 2x' - y' + 2,$$
$$y = -x' - y' + 3$$

$x = -2$; $y = 3$ эканини эътиборга олиб,

$$\begin{cases} -2 = 2x' - y' + 2 \\ 3 = -x' - y' + 3 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системани ечамиз:

$$\begin{cases} 2x' - y' = -4 \\ x' + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{aligned} x' &= -\frac{4}{3} \\ y' &= \frac{4}{3}. \end{aligned} \right.$$

Демак, M нуқтанинг R' координаталар системасига нисбатан координаталари $x' = -\frac{4}{3}$; $y' = \frac{4}{3}$ дан иборат экан.

Машқлар

1. Тўғри бурчакли координаталар системасида қуйидаги нуқталар берилган:
а) $A(-1; 4; 3)$ ва $B(3; 1; -2)$;
б) $C(-5; 2; -1)$ ва $D(4; -3; 5)$.
$\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{CD}$, $\vec{DC}$ векторларнинг координаталарини топинг.

2. $\vec{a} = \{-2; 3; \beta\}$ ва $\vec{b} = \{\alpha; -6; 2\}$ векторлар α ва β ларнинг қандай қийматларида коллинеар бўлади?

3. $[AB]$ кесма бешта нуқта билан олтита тенг бўлакка бўлинган. $A(-3; -4)$ ва $B(9; -8)$ экани маълум бўлса, бўлиш нуқталарининг координаталарини топинг.

4. Учлари $A(-1; 4)$ ва $B(3; 8)$ нуқталарда бўлган кесма берилган. A нуқтага нисбатан B нуқтага уч марта яқин жойлашган С нуқтанинг координаталарини топинг.

5. C нуқта учлари $A(5; 5)$ ва $B(-2; -6)$ бўлган кесмани $1:3$ нисбатда бўлади (B дан A га қараб). C нуқтанинг координаталарини топинг.

6. Учлари $A(-5; 8)$ ва $B(10; 2)$ нуқталарда бўлган AB кесмани C ва D нуқталар тенг учга бўлади. C ва D нуқталарнинг координаталарини топинг.

7. $A(2; 1; -1)$ ва $B(0; -2; 3)$ нуқталар берилган, $\vec{AB}$ векторни ясанг ҳамда унинг узунлигини топинг.

8. Қуйидаги нуқталарни қутб координаталар системасида ясанг:

$$A\left(4;\ \frac{7\pi}{4}\right);\ B\left(-2;\ \frac{5\pi}{6}\right);\ C\left(-3;\ \frac{\pi}{6}\right);\ D(-5;\ 0).$$

9. Қутб бошига нисбатан $M\left(4;\ \frac{\pi}{6}\right)$; $N\left(3;\ \frac{7\pi}{6}\right)$; $P\left(4;\ -\frac{3\pi}{2}\right)$ нуқталарга симметрик бўлган нуқталарни топинг.

10. Тўғри чизиқнинг қутб ўқи билан ҳосил қилган бурчаги $\frac{2\pi}{3}$ га, қутб бошидан шу тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр узунлиги эса 4 га тенг. Шу тўғри чизиқ тенгламасини тузинг ва уни чизинг.

11. Ушбу $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ ва $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини топинг.

12. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ва $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ векторлар берилган. $\vec{c} = [\vec{a}\,\vec{b}]$ векторни аниқланг ва ясанг ҳамда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ясалган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

13. Учбурчакнинг юзи $S = 3$ кв. бирликка тенг. Унинг икки учи $A(3; 1)$ ва $B(1; -3)$ нуқталарда бўлса, унинг x ўқда ётувчи C учининг координаталарини топинг.

14. Тўғри тўртбурчакнинг иккита қарама-қарши учларининг координаталари $A(2; 5)$ ва $C(-2; -5)$. Унинг юзини ҳисобланг.

15. $A(1; 5)$; $B(4; 11)$ ва $C(2; 7)$ нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини кўрсатинг.

16. ABC учбурчакнинг учлари $A(1; 2)$; $B(5; 0)$ ва $C(4; 3)$ лар берилган. Шу учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

17. $A(2; 2; 2)$, $B(3; 1; -2)$; $C(4; 3; 1)$; $D(1; 0; -1)$ нуқталарнинг бир текисликда ётишини кўрсатинг.

18. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ ва $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ векторларнинг ўзаро компланар эканини кўрсатинг.

19. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ векторлардан параллелепипед ясанг ва унинг ҳажмини ҳисобланг.

20. Учлари $A(4; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(4; 5; 7)$ нуқталарда бўлган пирамида ясанг ҳамда унинг ҳажмини ва ABC ёғига туширилган баландлигини ҳисобланг.

VI боб. ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

1-§. Икки ўзгарувчили тенглама ва унинг графиги

Айтайлик,

$$F(x;\ y) = 0 \tag{1}$$

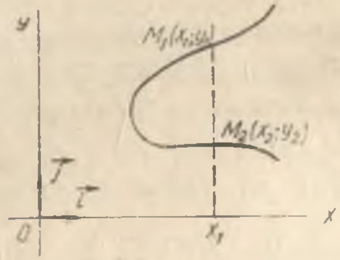
тенглама x, y ўзгарувчилардан камида биттаси иштирок этган тенглама бўлсин. Бу тенглама ўзгарувчилардан бирини, масалан, y ни иккинчисининг (x нинг) функцияси каби аниқласин. У ҳолда (1) ни y га нисбатан ечсак,

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{2}$$

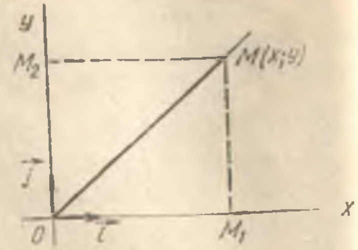
тенглама ҳосил бўлади. (2) да x $[a, b]$ кесмада ўзгарганда $f(x)$ функция узлуксиз ўзгаради деб фараз қиламиз.

Дастлаб $f(x)$ ни бир қийматли функция деб қараб, x ва y ларни $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ координаталар текислигидаги бирор M нуқтанинг координаталари деб фараз қиламиз. У вақтда x нинг ҳар бир қиймати учун (2) тенглама y нинг ягона қийматини аниқлайди. Демак, x нинг ҳар бир қийматига текисликнинг координаталари $(x;\ f(x))$ бўлган биргина нуқтаси тўғри келади. Агар x узлуксиз ўзгариб турли қийматлар қабул қилса, M нуқта $\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ координаталар текислигида x ва y нинг қийматларига қараб ўрнини ўзгартира боради ва бирор нуқталар тўпламини тасвирлайди. Бу нуқталар тўплами чизиқ деб аталади. Агар $f(x)$ функция кўп

7—10



39-чизма.



40 чизма.

қийматли бўлса, яъни x нинг ҳар бир қийматига y нинг бир неча $y_1, y_2, \ldots, y_n$ қийматлари мос келса, у ҳолда x нинг ҳар бир қийматига $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ текисликда $M_1, M_2, \ldots, M_n$ нуқталар тўғри келади. Масалан, $y=f(x)$ функция икки қийматли бўлсин. Бу ҳолда x нинг ҳар бир x_1 қийматига y нинг $y_1=f(x_1)$ ва $y_2=f(x_1)$ қийматлари мос келиб, $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ координаталар текислигида x нинг x_1 қиймати билан иккита $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2(x_1; y_2)$ нуқта аниқланади (39-чизма). $[a, b]$ кесмада x узлуксиз ўзгарганда M_1 ва M_2 нуқталар ҳам ўринларини узлуксиз ўзгартиради ва чизиқни тасвирлайди.

Таъриф. Агар чизиқ ихтиёрий нуқтасининг x ва y координаталари (1) тенгламани қаноатлантирса ва аксинча бу тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир жуфт $(x; y)$ қиймат чизиқ нуқтасини тасвирласа, у ҳолда (1) тенглама чизиқнинг ошкормас тенгламаси деб аталади.

Аналитик геометрияда икки хил масала қаралади: 1) берилган геометрик хоссаларига кўра чизиқ тенгламасини тузиш; 2) тенгламасига кўра чизиқнинг геометрик хоссаларини аниқлаш.

1-мисол. Координата бурчаклари биссектрисаларининг тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Дастлаб биссектриса учун хос геометрик хоссани ифодалаймиз. Бурчак биссектрисаси бу бурчак ичида ётувчи ва унинг томонларидан баравар узоқликдаги нуқталарнинг геометрик ўрнини ифодалайди. Бу хоссага асосланиб I ва III координата бурчакларининг биссектрисаси тенгламасини тузамиз (40-чизма). Агар OM биринчи координата бурчагининг биссектрисаси бўлиб, $M(x; y)$ унинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, хоссага кўра шаклдан:

$$\rho(M_1; M) = \rho(M_2; M)$$

ёки

$$y = x. \qquad (3)$$

Агар $M(x; y)$ учинчи координата бурчагининг биссектрисасидаги ихтиёрий нуқта бўлса ҳам x, ҳам y манфий сон бўлиб, уларнинг абсолют қийматлари бир-бирига тенг бўлади ва биз яна (3) тенгламага келамиз. Шунга ўхшаш II ва IV координата бурчакларининг биссектрисаси тенгламаси $y = -x$ (4) эканини кўриш мумкин.

2-мисол. $y=x$ тенглама билан ифодаланган чизиқнинг геометрик хоссаларини аниқланг.

Ечиш. $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ координата текислигида $y=x$ тенглама ҳар бир нуқтасининг абсциссаси унинг ординатасига тенг бўлган нуқталар тўпламини аниқлайди. Бундай хоссага эга бўлган нуқталарнинг тўплами I ва III координата бурчакларининг биссектрисаларини ифодалайди.

Энди чизиқнинг унинг (1) тенгламасига кўра ясаш масаласини қараймиз. x, y координаталарни боғловчи бирор тенгламанинг текисликда қандай чизиқни тасвир этишини билиш учун чизиқни шу тенгламага асосланиб ясаш керак. Текисликдаги нуқта эса ўзининг (x, y) координаталари билан аниқланади. Шунинг учун (1) тенгламадаги x га $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ қийматларни берсак,

$$F_1(x_1; y) = 0; \quad F_2(x_2; y) = 0; \quad F_n(x_n; y) = 0; \ldots \qquad (4)$$

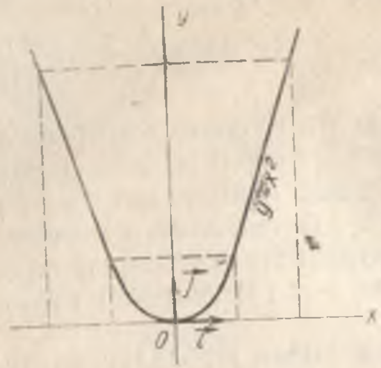
тенгламалар ҳосил бўлади. Бу тенгламалардан y нинг x нинг $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ қийматларига мос бўлган $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ қийматларини топамиз, натижада координаталари (1) тенгламани қаноатлантирувчи

$$(x_1; y_1), \quad (x_2; y_2), \ldots, (x_n; y_n), \ldots \qquad (5)$$

нуқталарга эга бўламиз. Бу нуқталарни координаталар системасида ясаб, уларни туташ чизиқ билан бирлаштирсак, (1) тенгламани тасвирловчи чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқ икки ўзгарувчили (1) тенгламанинг графиги дейилади.

Мисол. $y = x^2$ тенглама тасвирлайдиган чизиқни ясанг.

Ясаш. Берилган тенгламада x га $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ қийматларни берамиз ва y нинг шунга мос қийматларини топамиз. Бу қийматларни жадвал шаклида ёзамиз:



41-чизма.

x	...	−3	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Натижада ... $(-3;\ 9)$, $(-2;\ 4)$, $(-1;\ 1)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$, $(2;\ 4)$, $(3;\ 9)$ ... нуқталар ҳосил бўлади. Бу нуқталарни $\{O;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ системада жойлаштириб, уларни силлиқ чизиқ билан бирлаштирсак, $y = x^2$ функциянинг графиги, яъни парабола ҳосил бўлади (41-чизма).

2-§. Тўғри чизиқнинг турли тенгламалари

Дастлаб тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори тушунчасига таъриф берамиз.

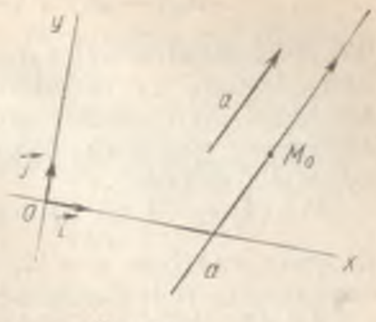
Таъриф. Тўғри чизиққа параллел ёки шу тўғри чизиқда ётувчи ҳар қандай вектор бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори дейилади.

Тўғри чизиқ турли усуллар билан берилиши мумкин. Ҳар бир ҳол учун тўғри чизиқ маълум тенгламага эга бўлади. Шу тенгламаларни келтириб чиқарамиз.

1. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари. a тўғри чизиқ бирор $\{O;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ реперга нисбатан ўзининг бирор $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтасининг ва йўналтирувчи $\vec{a} = \{a_1;\ a_2\}$ векторнинг берилиши билан аниқла-

нади (42-чизма). Тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқта оламиз. У ҳолда $\overrightarrow{M_0M}$ вектор $\vec{a}$ вектор билан коллинеар бўлади. Демак, шундай сон t топиш мумкинки,

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}; \quad t \in R \qquad (6)$$



42-чизма.

деб ёзиш мумкин. Бунинг аксича, агар бирор M нуқта учун (6) муносабат бажарилса, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ бўлади. Демак, (6) муносабат фақат a тўғри чизиққа тегишли M нуқталар учунгина бажарилади. M, M_0 нуқталарнинг радиус-векторларини мос равишда $\vec{r}$; $\vec{r}_0$ орқали белгиласак: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ бўлиб, $\overrightarrow{M_0M}$ вектор учун $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ га эга бўламиз. (6) тенгликдан:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}. \qquad (7)$$

Бу тенглама a тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси дейилади. Бу тенгламадан t нинг турли қийматларида a тўғри чизиқдаги нуқталарнинг радиус-векторларини ҳосил қиламиз; (7) тенгламада қатнашаётган t ўзгарувчи параметр дейилади.

M ва M_0 нуқталарнинг координаталари x, y ва x_0, y_0 бўлса, (7) ни координаталарда ёзиш мумкин, натижада қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t. \qquad (8)$$

(8) тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади.

Агар a тўғри чизиқ координата ўқларидан бирортасига ҳам параллел бўлмаса (яъни $a_1 a_2 \neq 0$ шарт бажарилса), (8) дан

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \qquad (9)$$

тенгламага эга бўламиз. Бундан

$$a_2x - a_1y + (-a_2x_0 + a_1y_0) = 0. \qquad (10)$$

Бу ерда шартга кўра a_1, a_2 нинг камида биттаси нолдан фарқли, шу сабабли (10) биринчи даражали тенгламадир. Бундан эса ҳар қандай тўғри чизиқ биринчи даражали тенглама билан ифодаланади деган муҳим хулосага келамиз.

Мисол. $M_0(5; 2)$ нуқта орқали ўтувчи ва йўналтирувчи вектори $\vec{a} = \{2; -1\}$ бўлган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масала шартига кўра: $x_0 = 5$; $y_0 = 2$; $a_1 = 2$; $a_2 = -1$. (8) формулага асосан

$$x = 5 + 2t,$$
$$y = 2 - t$$

тенгламаларга эга бўламиз. Бу тенгламалар биз излаган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларидир.

2. Икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Бизга маълумки, икки нуқта орқали ягона тўғри чизиқ ўтади. M_1 ва M_2 нуқталарнинг $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ системага нисбатан координаталари маълум деб фараз қилиб, шу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топайлик.

Айтайлик, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ бўлсин, бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқни a деб белгилайлик. a тўғри чизиқда ихтиёрий $M(x; y)$ нуқта оламиз. У ҳолда $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ векторга коллинеар бўлса, равшанки, M нуқта фақат a тўғри чизиқда ётганда қуйидаги муносабат ўринли бўлади (IV боб, 2-§, 3-пункт):

$$\overrightarrow{M_1M} = t \cdot \overrightarrow{M_1M_2}. \qquad (11)$$

Бу ердан, векторларнинг тенглигига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) \text{ ва } y - y_1 = t(y_2 - y_1). \qquad (12)$$

Бундан эса

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (13)$$

(13) тенглама берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси дейилади. Бу тенглама $x_2 - x_1 \neq 0$ ва $y_2 - y_1 \neq 0$ бўлганда ўринлидир. Агар $x_2 - x_1 = 0$

бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ Oy ўққа параллел бўлиб, тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$x - x_1 = 0 \text{ ёки } x = x_1.$$

Мисол. ABC учбурчак учларининг координаталари берилган:

$$A(-1; 4), \quad B(11; -5). \quad C(15; 17).$$

AB ва BC томонларнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. а) AB томоннинг тенгламасини тузамиз. (13) формулага кўра топамиз:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad \frac{x + 1}{11 + 1} = \frac{y - 4}{-5 - 4}; \quad \frac{x + 1}{12} = \frac{y - 4}{-9};$$
$$-3(x + 1) = 4(y - 4); \quad -3x - 3 = 4y - 16,$$
$$4y + 3x - 13 = 0. \qquad (AB)$$

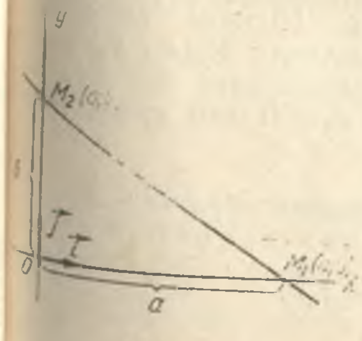
б) BC томоннинг тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x - 11}{15 - 11} = \frac{y + 5}{17 + 5}; \quad \frac{x - 11}{4} = \frac{y + 5}{22};$$
$$11x - 121 = 2y + 10; \quad 2y - 11x + 131 = 0. \qquad (BC)$$

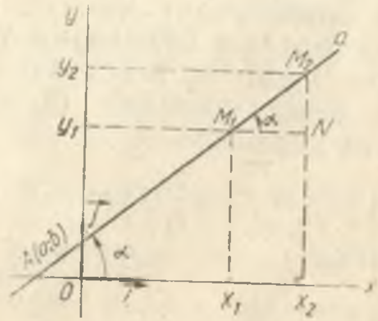
3. Тўғри чизиқнинг координата ўқларидан кесган (ажратган) кесмалари бўйича тенгламаси. a тўғри чизиқни аниқловчи M_1 ва M_2 нуқталар координата ўқлари Ox за Oy да ётсин. Аниқлик учун $M_1(a; 0)$ нуқта Ox ўқда, $M_2(0; b)$ нуқта эса Oy ўқда ётсин (43-чизма). Бу ҳолда (13) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$$

ёки



43-чизма.



44-чизма.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (14)$$

(14) тенглама тўғри чизиқнинг координата ўқларидан кесган кесмалар бўйича тенгламаси дейилади, бу ерда a ва b лар тўғри чизиқнинг мос равишда Ox ва Oy ўқларидан кесган кесмаларидир.

Мисол. Тўғри чизиқ $4x-3y-12=0$ тенглама билан берилган. Унинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топинг.

Ечиш. Кесишиш нуқталарининг координаталарини топиш учун берилган тўғри чизиқ тенгламасини тўғри чизиқнинг координаталар ўқларидан ажратган кесмаларга нисбатан тенгламаси (яъни (14)) кўринишига келтирамиз:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1.$$

Демак, берилган тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари $A(3;\ 0)$ ва $B(0;\ -4)$ экан.

4. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.

Таъриф. $\vec{a}$ вектор $\{\vec{i};\ \vec{j}\}$ базисда a_1, a_2 координаталарга эга бўлиб $a_1\neq 0$ бўлса, $\frac{a_2}{a_1}=k$ сон $\vec{a}$ векторнинг *бурчак коэффициенти* дейилади.

Агар $\vec{a}$ вектор тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори k сон шу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти бўлса, шу тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламасини келтириб чиқарамиз. Изланаётган тўғри чизиқнинг битта нуқтаси ва бурчак коэффициенти текисликда шу тўғри чизиқнинг ҳолатини тўла аниқлайди. Oy ўққа параллел тўғри чизиқлар учун бурчак коэффициент мавжуд эмас. Шунинг учун Oy ўққа параллел бўлмаган a тўғри чизиқ $M_0(x_0;\ y_0)$ нуқтадан ўтсин ва k бурчак коэффициентга эга бўлсин деб фараз қилайлик. (9) дан $a_1\neq 0$ деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y-y_0=\frac{a_2}{a_1}(x-x_0).\ \text{Таърифга кўра:}\ \frac{a_2}{a_1}=k,$$

демак,

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (15)$$

ёки

$$y=kx+b, \qquad (16)$$

бу ерда

$$b = y_0 - kx_0.$$

(16) тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади.

У ҳолда (13) га асосан $M_1(x_1;\ y_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2)$ нуқталар орқали ўтган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{17}$$

формула билан аниқланади. Бу тўғри чизиқ y ўқига параллел бўлмаган ҳолга тўғри келади.

Бурчак коэффициентининг геометрик маъносини аниқлайлик (44-чизма). M_1M_2N учбурчакдан $k = \operatorname{tg}\alpha$ эканлиги кўринади, бу ерда α бурчак Ox ўқини соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда буриб a тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунга қадар буриш бурчаги, шунинг учун ҳам k бурчак коэффициенти дейилади.

1-мисол. $M_1(3;\ 2)$ ва $M_2(4;\ 3)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг Ox ўқи билан ҳосил қилган бурчагини топинг.

Ечиш. (17) формулага кўра: $k = \frac{3-2}{4-3} = 1$, бундан $k = \operatorname{tg}\alpha = 1$. Демак, $\alpha = 45^\circ$.

2-мисол. Ox ўқи билан 30° ли бурчак ташкил этиб, $M_1(2;\ -3)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланаётган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ га тенг. (15) тенгламага $x_0 = 2;\ y_0 = -3$ қийматларни қўйиб, қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$y + 3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$$

ёки

$$x - \sqrt{3}y - (2 + 3\sqrt{3}) = 0.$$

5. Берилган нуқта орқали ўтиб берилган векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси. Текисликда $M_1(x_1;\ y_1)$ нуқта ва $\vec{n} = \{A;\ B\}$ вектор берилган бўлсин. M нуқта орқали ўтиб $\vec{n}$ векторга перпендикуляр бўлган a тўғри

чизиқ тенгламасини тузиш талаб қилинсин. Изланаётган a тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқтани олайлик. M нуқта қуйидаги шарт бажарилгандагина a гўғри чизиқда ётади:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M}=0, \tag{18}$$

бу ерда $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1\}$.
Икки векторнинг скаляр кўпайтмасига асосан

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \tag{19}$$

га эга бўламиз. (19)—берилган нуқта орқали ўтиб, берилган векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини ифодалайди. $\vec{n}$ вектор тўғри чизиқнинг нормал вектори дейилади.

Мисол. $M_1(3;\ 1)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}=\{-1;\ 1\}$ векторга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бу ерда $x_1=3$, $y_1=1$, $A=-1$, $B=1$. Буларни (19) формулага қўйиб, изланган тўғри чизиқ тенгламасини топамиз:

$$-1(x-3)+1\cdot(y-1)=0$$

ёки

$$x-y-2=0.$$

6. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Юқоридаги тўғри чизиқ тенгламаларининг барчаси учун характерли бўлган нарса, бу тенгламанинг биринчи даражали бўлишлигидир. Энди тескари масалани кўрайлик. Ҳар қандай биринчи даражали

$$Ax+By+C=0 \tag{20}$$

тенглама тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини ифодалайди. Бу ерда A, B, C — ўзгармас коэффициентлар бўлиб, A ёки B дан ақалли бири нолдан фарқли деб фараз қилинади. Умумий тенгламаси билан берилган тўғри чизиқнинт координата ўқларига нисбатан жойлашувида тубандаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) агар $C=0$, $A\neq0$, $B\neq0$ бўлса, яъни тўғри чизиқ тенгламасида озод ҳад бўлмаса, тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади.

б) Агар $A=0$, $C\neq0$, $B\neq0$ бўлса, (20) тўғри чизиқ Ox ўқига, агар $B=0$; $A\neq0$, $C\neq0$ бўлса, (20) тўғри чизиқ Oy ўқига параллел бўлади.

Тўғри чизиқ умумий тенгламасидан бурчак коэффициенти k ни топайлик: $k = \frac{A}{-B} = \frac{a_2}{a_1}$, демак, тўғри чизиқ йўналтирувчи вектори $\vec{a}$ нинг координаталари сифатида $-B$, A сонларни қабул қилиш мумкин, яъни умумий тенгламаси билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида

$$\vec{a} = \{-B;\ A\} \tag{21}$$

векторни олиш мумкин.

1-мисол. $2x - 3y + 7 = 0$ тўғри чизиқнинг нормал векторини кўрсатинг.

Ечиш. Нормал векторини $\vec{n} = \{A;\ B\}$ кўринишда излаймиз. Берилган тўғри чизиқ тенгламасидан: $A = 2$; $B = -3$. Шунинг учун $\vec{n} = \{2;\ -3\}$.

2-мисол. $2x + y - 4 = 0$ ва $x - y + 1 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси орқали ўтиб, $x + y - 5 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Дастлаб икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топамиз, бунинг учун кесишиш нуқтасининг координаталарини x_1; y_1 деб оламиз. У ҳолда

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 4 = 0, \\ x_1 - y_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

системадан $x_1 = 1$; $y_1 = 2$ ларни топамиз. Изланаётган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{a}$ сифатида $x + y - 5 = 0$ тўғри чизиқнинг нормал вектори $\vec{a} = \{1;\ 1\}$ ни олиш мумкин. У ҳолда изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси

$$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2) = 0 \text{ ёки } x + y - 3 = 0$$

кўринишда бўлади.

3-§. Текисликда икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви

Текисликда d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар ушбу тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0; \tag{22}$$
$$d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{23}$$

Бу тўғри чизиқларнинг текисликда ўзаро жойлашувини текшириш учун (22) ва (23) тенгламаларни биргаликда система қилиб текшириш керак (1 боб, 2-§). Шунга мувофиқ d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар текисликда ўзаро қуйидагича жойлашиши мумкин:

а) d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар кесишади. У ҳолда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ (система ягона ечимга эга);

б) d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар параллел. Бу ҳолда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ бўлади.

в) d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушади, бу ҳолда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Мисол. $x - 4y + 3 = 0$ ва $2x - y + 5 = 0$ тўғри чизиқларнинг текисликда ўзаро қандай жойлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган тўғри чизиқларнинг текисликда жойлашишини аниқлаш учун ушбу

$$\begin{cases} x - 4y + 3 = 0, \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

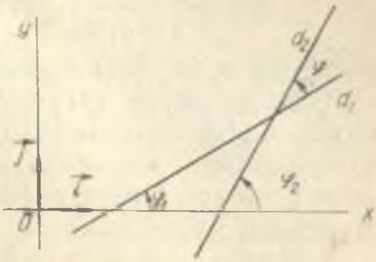
системани текширамиз. Энди бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топиш учун бу системани ечамиз, чунки изланган нуқта бир вақтнинг ўзида берилган тўғри чизиқларнинг ҳар бирида ётади. Юқорида аниқлаганимиздек, $\frac{1}{2} \neq \frac{-4}{-1}$ бўлгани учун бу тўғри чизиқлар кесишади. Системани ечиб $\left(-\frac{17}{7}; \frac{1}{7}\right)$ ни топамиз.

4-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчакни бу тўғри чизиқларнинг берилган тенгламасига кўра аниқлаш масаласини кўрамиз.

d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак деганда, бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакни тушунамиз (φ бурчак $0°$ дан $180°$ гача оралиқда ўзгаради). d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар қуйидаги умумий кўринишдаги тенгламалари билан берилган бўлсин (45-*a* чизма):

$$d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$



45- *а*, *б* чизма

$\vec{d_1} = \{-B_1;\ A_1\}$ вектор d_1 тўғри чизиқнинг, $\vec{d_2} = \{-B_2;\ A_2\}$ вектор d_2 тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторидир (VI боб, 2-§, 6-пунктга қаранг). У ҳолда $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ векторлар орасидаги φ бурчак таърифига кўра (d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак) қуйидаги формуладан аниқланади:

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{d_1}\,\vec{d_2}}) = \frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}|\cdot|\vec{d_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (24)$$

Энди $\{0;\ \vec{i}, \vec{j}\}$ системада ўзларининг

$$d_1: y = k_1x + b_1,$$
$$d_2: y = k_2x + b_2$$

бурчак коэффициентли тенгламалари билан берилган ва Oy ўққа параллел бўлмаган d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак формуласини аниқлаймиз. φ_1 ва φ_2 лар шу тўғри чизиқларнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаклари бўлсин. Чизмадан $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (45-*б* чизма). Берилган тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$; $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ бўлади. Қуйидагига эгамиз:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}.$$

$\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$ лар ўрнига k_1, k_2 ларни қўйиб,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (26), \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} \quad (27)$$

формулаларни ҳосил қиламиз.

(26) формула тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлмаған ҳолда ишлатилади. (26) ва (27) формулалардан $k_2 = k_1$ тўғри чизиқларнинг параллеллик, $k_1 \cdot k_2 = -1$ тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шартлари келиб чиқади.

1-мисол. $x + 5y + 9 = 0$ ва $2x - 3y + 1 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. (24) формулага кўра топамиз:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{2 - 15}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} =$$

$$= -\frac{13}{\sqrt{2} \cdot 13} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Демак, $\varphi = 135°$.

2-мисол. $2x - 3y - 7 = 0$ ва $4x - 6y + 5 = 0$ тўғри чизиқларнинг ўзаро параллеллиги ёки перпендикулярлигини аниқланг.

Ечиш. Бу ерда $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $B_1 = -3$, $B_2 = -6$. $\frac{A_1}{A_2}$ ва $\frac{B_1}{B_2}$ нисбатларни солиштирамиз: $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Демак, берилган тўғри чизиқлар ўзаро параллел.

3-мисол. $6x - 2y + 5 = 0$ ва $4x + 2y - 7 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг.

Ечиш. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни φ деб белгилаймиз. Тўғри чизиқларнинг берилган тенгламаларини уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари орқали ифодалаб, ҳар бир тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини аниқлаймиз:

$$y = -2x + \frac{7}{2}; \qquad k_1 = -2.$$

$$y = 3x + \frac{5}{2}; \qquad k_2 = 3.$$

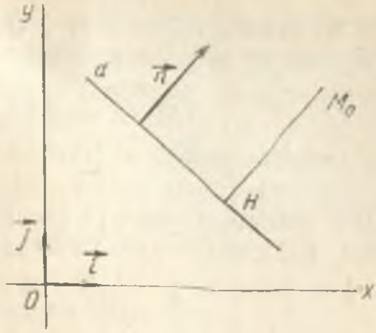
Тўғри чизиқлар орасидаги бурчак формуласи

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

га кўра топамиз.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3 + 2}{1 - 2 \cdot 3} = -1; \qquad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

5- §. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа



46-чизма.

$\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ координата системасида d тўғри чизиқ $Ax+By+C=0$ тенгламаси билан ва $M_0(x_0; y_0)$ нуқта берилган бўлсин. M_0 нуқтадан d тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказамиз ва уларнинг кесишган нуқтасини H билан белгилаймиз (46-чизма). $\overrightarrow{HM_0}$ векторнинг узунлиги M_0 нуқтадан d тўғри чизиққача бўлган масофа дейилади ва $\rho(M_0; d)$ кўринишда белгиланади. $\vec{n}=\{A, B\}$ вектор берилган тўғри чизиқнинг нормал вектори бўлсин. Агар M нуқта d тўғри чизиқда ётса, $\rho(M_0, d)=0$ бўлади. Агар M нуқта d тўғри чизиққа тегишли бўлмаса, у ҳолда $\rho(M_0, d)=|\overrightarrow{HM_0}|$. $\overrightarrow{HM_0}$ ва $\vec{n}$ векторлар коллинеар, чунки $\vec{n}$ вектор d тўғри чизиқнинг нормали. Векторларнинг скаляр кўпайтмасини топайлик:

$$\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{HM_0}|\cdot|\vec{n}|\cos(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}})=\pm\rho(M_0, d)\cdot|\vec{n}|. \quad (*)$$

Агар $\overrightarrow{HM_0}$ ва $\vec{n}$ лар бир хил йўналишда бўлса, $(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}})=0$ бўлиб, $\cos(\overrightarrow{HM_0}, \vec{n})=1$ бўлади, агар $\overrightarrow{HM_0}$ ва $\vec{n}$ қарама-қарши йўналишда бўлса, $(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}})=180^\circ$ бўлиб, $\cos(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}})=-1$ бўлади. Буларни ҳисобга олсак (*) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\rho(M_0, d)=\frac{|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}. \quad (31)$$

H нуқтанинг координаталари x_1, y_1 бўлса, $\overrightarrow{HM_0}=\{x_0-x_1; y_0-y_1\}$ бўлади. H нуқта d тўғри чизиққа тегишли бўлгани учун $Ax_1 + By_1 + C = 0$ бўлади. Бу вақтда скаляр кўпайтма қуйидаги кўринишни олади:

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) =$$
$$= Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C. \qquad (32)$$

Шу билан бирга $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ эканини назарда тутсак, (31) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (33)$$

(33) берилган M_0 нуқтадан берилган d тўғри чизиққача бўлган масофани ҳисоблаш формуласидир.

Мисол. $A(2; 5)$ нуқтадан $6x + 8y - 5 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Ечиш. (33) формулага кўра топамиз:

$$x_0 = 2;\ y_0 = 5;\ A = 6;\ \ B = 8;\ C = -5;$$
$$\rho(A, d) = \frac{|6 \cdot 2 + 8 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{47}{10} = 4{,}7 \text{ бирлик.}$$

6-§. Тўғри чизиқлар дастаси

Тўғри чизиқлар дастаси икки хил бўлади: кесишувчи тўғри чизиқлар дастаси ва параллел тўғри чизиқлар дастаси. Агар (22) ва (23) тенгламалар билан ифодаланувчи тўғри чизиқлар бирор нуқтада кесишса, у нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқлар кесишувчи тўғри чизиқлар дастасини ташкил қилади. Улар кесишган нуқта даста маркази дейилади.

Агар (22) ва (23) тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари параллел ёки устма-уст тушса, у ҳолда шу йўналишдаги тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар дастасини ифодалайди. Кесишувчи тўғри чизиқлар дастасининг маркази орқали ўтувчи тўғри чизиғи қуйидаги тенглама билан аниқланади:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (34)$$

бу ерда α ва β лар бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар хил қийматларни қабул қилади. Агар кесишувчи тўғри чизиқлар дастаси марказининг координаталари $(x_0; y_0)$ берилган бўлса, у ҳолда даста тенгламаси тубандаги кўринишга эга булади:

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0. \qquad (35)$$

Мисол. Тўғри чизиқлар $x+y+10=0$ ва $2x-3y-5=0$ тенгламалар билан берилган. Шу тўғри чизиқлар дастасига тегишли ва $M(1; 2)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Дастлаб берилган тўғри чизиқлардан ўтувчи тўғри чизиқлар дастаси тенгламасини тузамиз:

$$x+y+10+\lambda(2x-3y-5)=0. \qquad (*)$$

Бу тўғри чизиқлар дастасидан $M(1; 2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни ажратиб олишимиз керак. Биз излаётган тўғри чизиқ тенгламасини M нуқта координаталари қаноатлантириши керак. Шунинг учун M нуқта координаталарини (*) тенгламага қўямиз:

$$1+2+10+\lambda(2\cdot1-3\cdot2-5)=0,$$

$$13+\lambda(-9)=0; \qquad \lambda=\frac{13}{9}.$$

Бу қийматни (*) тенгламага қўйиб изланаётган тўғри чизиқ тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x+y+10+\frac{13}{9}(2x-3y-5)=0,$$

$$9x+9y+90+26x-39y-65=0,$$

$$7x-6y+5=0.$$

Машқлар

1. $M(1; 4)$ ва $N(3; -2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топинг ва тенгламасини тузинг.

2. Бурчак коэффициенти $k=-3$ бўлган ва $(-1; 4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

3. Қуйидаги нуқталар жуфтидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг:

а) $(-2; 2)$ ва $(3; 4)$;
б) $(1; 3)$ ва $(0; 5)$:
в) $(1; -7)$ ва $(3; -3)$;
г) $(0; 2)$ ва $(4; 0)$.

4. Координата ўқларидан $a=3$; $b=2$ кесмалар ажратувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

5. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг:

1) $y=-7x$ ва $y=3x+11$;
2) $3x+4y-3=0$ ва $4x+3y+5=0$;

3) $2x+2y+1=0$ ва $y=2x+3$;

4) $\frac{x+5}{24}=\frac{y-4}{7}$ ва $\frac{x-2}{-15}=\frac{y+\frac{7}{8}}{8}$.

6. Ушбу тўғри чизиқларнинг параллел эканлигини кўрсатинг.

а) $2x-6y+5=0$ ва $10x-30y-17=0$;

б) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{5}$ ва $\frac{x-9}{4}=\frac{y+3}{10}$.

7. $M(3;\ 2)$ нуқтадан $3x+4y+4=0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

8. $5x+3y-3=0$ ва $3x+2y+5=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасига тегишли бўлган $7x-3y+2=0$ тўғри чизиққа параллел ва перпендикуляр тўғри чизиқларнинг тенгламаларини тузинг.

9. $A(3;\ -1)$ нуқтадан ҳамда $x+4y-5=0$ ва $2x-5y-1=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

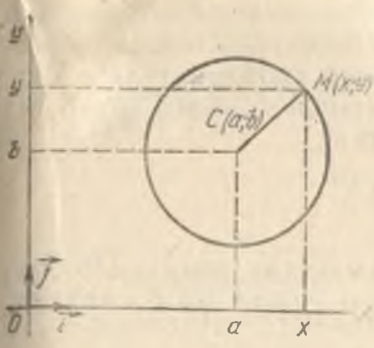
VII боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

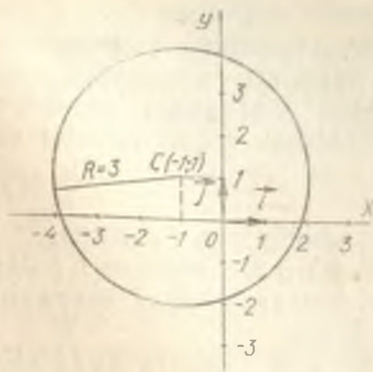
Бизга олдинги бобдан маълумки, текисликда тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида ҳар қандай биринчи тартибли икки ўзгарувчили тенглама, яъни $Ax+By+C=0$ кўринишдаги тенглама (A ва B коэффициентлар бир вақтда нолга тенг эмас) тўғри чизиқ тенгламасини ифодалайди. Энди иккинчи тартибли икки ўзгарувчили тенгламаларни текширамиз. Бундай тенгламалар билан ифодаланувчи нуқталар тўплами иккинчи тартибли чизиқлар дейилади. Иккинчи тартибли чизиқларнинг турлари билан танишамиз.

1-§. Айлана

$R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ координаталар системаси берилган бўлсин. Бу системага нисбатан $C(a;\ b)$ марказли ва R радиусли айлана тенгламасини тузамиз. Айлана—берилган $C(a;\ b)$ нуқтадан R узоқликда ётган текислик нуқталарининг тўплами бўлиши таърифидан фойдаланамиз



47-чизма.



48-чизма.

(47-чизма), $M(x;\ y)$ — айлананинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, бу нуқта айланада ётади деган шарт $MC = R$ тенглик билан ифодаланади. MC ни координата шаклида ёзамиз:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$$

ёки

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

(1) тенглама маркази $C(a;\ b)$ нуқтада ва радиуси R га тенг айлананинг каноник тенгламасидир. Агар айлана маркази координаталар боши билан устма-уст тушса, тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$x^2+y^2 = R^2. \qquad (2)$$

Эгри чизиқ параметрик тенгламалар орқали ҳам берилиши мумкин. Айтайлик, M нуқта эгри чизиқ буйлаб ҳаракатлансин ва бирор t вақтда $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ координаталарга эга бўлсин. У ҳолда

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (3)$$

тенгламалар системаси эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари, t эса параметр дейилади. Масалан,

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos t \\ y = R \cdot \sin t \end{cases} \qquad (4)$$

тенгламалар айлананинг параметрик тенгламаларидир.

Агар чизиқнинг параметрик тенгламалари маълум бўлса, ундан фойдаланиб, чизиқнинг ошкормас кўринишдаги тенгламасини келтириб чиқариш мумкин (ошкормас тенглама баъзи ҳолларда чизиқ тенгламасини ифодаламаслиги ҳам мумкин, бошқача айтганда чизиққа тегишли бўлмаган нуқтанинг координаталари ошкормас тенгламани қаноатлантириши мумкин). Агар (4) системадан t параметрни чиқарсак,

$$x^2 + y^2 = R^2$$

тенгламага эга бўламиз.

Мисол. Маркази $C(-1;\ 1)$ нуқтада, радиуси 3 бирлик бўлган айлана тенгламасини тузинг ва бу айланани ясанг.

Ечиш. Шартга кўра айлана марказининг координаталари $a = -1$; $b = 1$ ва $R = 3$. Берилганларни (1) формулага қўйиб, айлана тенгламасини тузамиз: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$. Изланган айлана 48-чизмада тасвирланган.

2-§. Чизиқларнинг кесишиш нуқталари. Икки айлананинг ўзаро жойлашуви

Айтайлик, иккита чизиқ декарт координаталар системасида ўзининг қуйидаги тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\gamma_1 : \varphi_1(x,\ y) = 0,$$
$$\gamma_2 : \varphi_2(x,\ y) = 0.$$

Бу чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топиш учун қуйидаги система ечимга эга бўлишини текширамиз:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\ y) = 0, \\ \varphi_2(x,\ y) = 0. \end{cases}$$

Бу системанинг ечими чизиқлар кесишиш нуқталарининг координаталарини ифодалайди.

Координаталар текислигида иккита айлананинг ўзаро жойлашувини текширайлик. Айланаларнинг радиуслари R_1 ва R_2 уларнинг марказлари орасидаги масофа k бўлсин дейлик. Агар айланалар марказлари O ва O_1 нуқтада (O нуқтани координаталар боши ва OO_1 нурни ўқнинг мусбат йўналиши деб қабул қиламиз) деб ҳисобласак, айланалар қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади:

$$x^2 + y^2 = R_1^2,$$
$$(x-k)^2 + y^2 = R_2^2. \qquad (5)$$

Бу айланаларнинг кесишишини аниқлаш учун (5) тенгламаларни система қилиб ечамиз. У ҳолда x, y лар учун қуйидаги ифодага эга бўламиз: $x = \pm\sqrt{R_1^2 - y^2}$, бу ерда

$$y = \pm\frac{1}{2k}\times$$

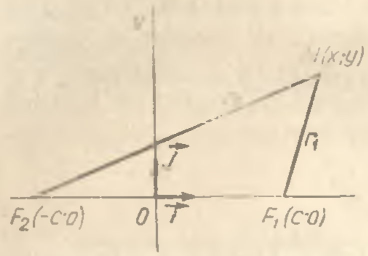
$$\times\sqrt{(R_1+R_2+k)(R_1+k-R_2)(R_1+R_2-k)(R_2+k-R_1)}. \quad (6)$$

Бу формуладан кўринадики, агар $R_1+k>R_2$, $R_1+R_2>$ $>k$ ва $R_2+k>R_1$ бўлса, у ҳолда илдиз остидаги ифода мусбат бўлиб, (5) система иккита ечимга эга бўлади. Демак, айланалар иккита нуқтада кесишади. Агар R_1+k-R_2; R_1+R_2-k; R_2+k-R_1 кўпайтувчилардан биттаси нолга тенг бўлса, (5) система битта ечимга эга бўлиб, айланалар ўзаро уринади. Агар илдиз остидаги бирор кўпайтувчи манфий бўлса, (5) система ечимга эга бўлмайди, яъни айланалар кесишмайди. Айтилганлардан қуйидаги хулоса келиб чиқади: Агар R_1, R_2, k сонлардан бири қолган иккитасининг йиғиндисидан катта бўлса, айланалар кесишмайди; агар улардан бири қолган иккитасининг йиғиндисига тенг бўлса, айланалар уринади; агар сонлардан бири қолган иккитасининг йиғиндисидан кичик булса, айланалар иккита нуқтада кесишади.

3- § Эллипс

1-таъриф. Текисликда ихтиёрий нуқтасидан фокуслар деб аталувчи берилган иккита F_1 ва F_2 нуқтасигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас миқдорга ($2a$ га) тенг бўлган барча нуқталар тўплами эллипс деб аталади (ўзгармас миқдор $2a$ фокуслар орасидаги масофадан катта деб олинади).

Эллипс тенгламасини тузиш учун координаталар системасини тубандагича киритамиз. Берилган икки нуқтани туташтирувчи тўғри чизиқни абсциссалар ўқи деб қабул қиламиз, координаталар бошини эса берилган нуқталар ўртасида оламиз. Берилган F_1, F_2 фокуслар орасидаги масофани $2c$ билан белгилайлик. У ҳолда F_1, F_2 нуқталарнинг координаталари мос равишда $(c;\ 0)$ ва $(-c;\ 0)$ га тенг бўлади. Таърифга кўра $2a>$ $>2c$ ёки $a>c$. Эллипснинг ихтиёрий нуқтасини $M(x;y)$



49-чизма.

билан белгилайлик (49-чизма). M нуқтанинг F_1 ва F_2 фокуслардан масофаларини унинг *фокал радиуслари* дейилади ва мос равишда r_1, r_2 билан белгиланади, яъни $r_1 = \rho(F_1, M)$ ва $r_2 = \rho(F_2, M)$. Эллипснинг таърифига кўра $\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a$ ёки

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Демак,

$$\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a. \qquad (*)$$

Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра:

$$\begin{cases} \rho(F_1, M) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \rho(F_2, M) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{cases} \qquad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Бу тенгламанинг биринчи ҳадини ўнг томонга ўтказиб, ҳосил бўлган тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

бундан

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ёки

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Ҳосил қилинган тенгламанинг ҳар иккала томонини яна квадратга кўтарамиз:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Бу ифодани ихчамлаштиришдан кейин қуйидаги тенгламага эга бўламиз:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Тенгламанинг иккала қисмини $a^2(a^2-c^2)$ га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

$a>c$ бўлгани учун. a^2-c^2 мусбат миқдордир, уни b^2 билан белгиласак:

$$b^2=a^2-c^2, \qquad (6^a)$$

юқоридаги тенглама

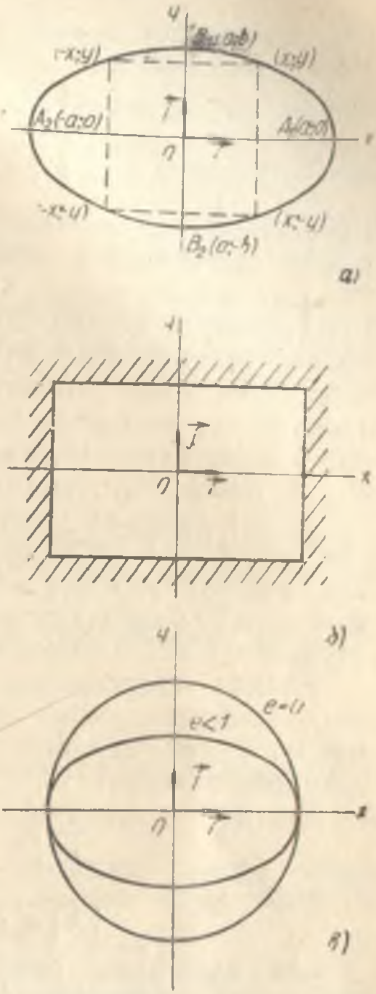
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$

кўринишни олади.

(7) тенглама эллипснинг каноник тенгламаси дейилади.

Эллипснинг каноник тенгламасига кўра шаклини текширамиз.

1. (7) тенглама билан аниқланган эллипс координата ўқларига нисбатан симметрикдир. Ҳақиқатан ҳам, (x, y) шу эллипснинг бирор нуқтаси бўлса, яъни x, y сонлар (7) тенгламани қаноатлантирса, у вақтда (7) тенгламада x, y ўзгарувчиларнинг фақат квадратлари қатнашгани учун бу тенгламани



50-чизма.

$$(-x;\ y);\ (x;\ -y)\ \text{ва}\ (-x;\ -y)$$

нуқталарнинг координаталари ҳам қаноатлантиради (50-*а* чизма). Шунинг учун координата ўқлари эллипснинг симметрия ўқларидир. Симметрия ўқларининг кесишган нуқтаси $O(0;\ 0)$ эллипснинг *маркази* дейилади, фокуслар ётган ўқ унинг *фокал ўқи* дейилади.

2. Эллипснинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топамиз. Эллипснинг Ox ўқ билан кесиш-

ган нуқталарини топиш учун ушбу тенгламаларни система қилиб ечамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases} \tag{8}$$

(8) системанинг иккинчи тенгламасидан $y = 0$ ни биринчи тенгламасига қўйсак, $x = \pm a$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, эллипс Ox ўқини $A_1(a;\ 0)$ ва $A_2(-a;\ 0)$ нуқталарда кесади. Шу сингари эллипснинг Oy ўқ билан кесишган $B_1(0;\ b)$ ва $B_2(0;\ -b)$ нуқталари топилади. Эллипснинг координата ўқлари (симметрия ўқлари) билан кесишган нуқталари унинг *учлари* дейилади. Эллипснинг тўртта учи бор. (Чизмада улар A_1, A_2, B_1, B_2 билан белгиланган.)

$[A_1A_2]$ кесма ва унинг узунлиги $2a$ эллипснинг *катта ўқи*, $[OA_1]$ кесма ва унинг узунлиги эса эллипснинг *катта ярим ўқи* дейилади. $[B_1, B_2]$ кесма ва унинг узунлиги $2b$ эллипснинг *кичик ўқи*, $[OB_1]$ кесма ва унинг узунлиги b эса эллипснинг *кичик ярим ўқи* дейилади.

Эллипс чегараланган чизиқ. (7) тенгламадан кўриниб турибдики, унинг чап томонидаги ифода доимо мусбат бўлиб, ҳар бир ҳад қуйидаги шартни қаноатлантириши керак:

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1; \qquad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1.$$

Бундан

$$|x| \leqslant a; \qquad |y| \leqslant b.$$

Демак, эллипснинг барча нуқталари томонлари $2a$, $2b$ бўлган тўғри тўртбурчак ичига жойлашган (50-*б* чизма).

2-таъриф. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофанинг катта ўқининг узунлигига нисбати эллипснинг *эксцентриситети* дейилади ва у e ҳарфи орқали белгиланади:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, \tag{9}$$

бу ерда $c < a \Rightarrow 0 < e < 1$. Эллипснинг шаклини унинг эксцентриситети ёрдамида текшириш қулай. (6^a) дан: $c^2 = a^2 - b^2$, у ҳолда

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

бундан

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}.$$

$e \Rightarrow 1$ да $\frac{b}{a} \Rightarrow 0$ бўлиб, b кичиклашади ва эллипс (Ox) ўққа қисила боради, аксинча $e \Rightarrow 0$ бўлса, $\frac{b}{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 \Rightarrow b=a$ бўлиб, эллипс айланага яқинлаша боради. Хусусий ҳолда $a=b$ бўлса, у айланадан иборат бўлади (50-*в* чизма).

1-мисол. Катта ярим ўқи 5 га, кичик ярим ўқи 3 га тенг бўлган эллипснинг каноник тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Шартга кўра $a=5$, $b=3$. (7) формулага асосан:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

2-мисол. $M(0;\ 3)$ нуқта орқали ўтувчи, фокуслари орасидаги масофа 4 га тенг бўлган эллипснинг каноник тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Эллипснинг каноник тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Шартга кўра $M(0;\ 3)$ нуқта эллипсга тегишлидир, шунинг учун $\frac{9}{b^2}=1$, бундан $b^2=9$. Энди a^2 параметрни топиш қолди: $a^2=b^2+c^2$. c — фокуслар орасидаги масофанинг ярми бўлгани учун, шартга кўра $c=2$. У ҳолда $a^2=9+4=13$. Демак, $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$.

3-мисол. $9x^2+16y^2=144$ эллипснинг эксцентриситетини топинг.

Ечиш. Берилган эллипс тенгламасини каноник кўринишга келтирамиз:

$$9x^2+16y^2=144 \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1,$$

бу ерда $a=4$, $b=3$, булардан фойдаланиб c ни топамиз:

$$c^2=a^2-b^2=16-9=7 \Rightarrow c=\sqrt{7}.$$

Демак.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

4-§ Гипербола

Таъриф. Ихтиёрий нуқтасидан фокуслар деб аталувчи берилган икки F_1 ва F_2 нуқтагача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас миқдор $2a$ га тенг бўлган текисликдаги барча нуқталар тўплами *гипербола* дейилади. (Ўзгармас миқдор $2a$ фокуслар орасидаги масофадан ($2c$ дан) кичик деб олинади.)

Гипербола тенгламасини келтириб чиқариш учун белгилашларни, чизмани эллипс бўлган холдагидек қилиб оламиз (49-чизма). Гипербола таърифига кўра $|\rho|F_1, M| - \rho|F_2, M|| = 2a$ ёки

$$\left|\sqrt{(x+c^2)+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

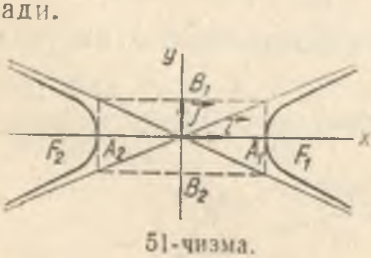
Илдизлардан қутулгандан кейин қуйидаги тенгламага эга буламиз (илдизларни йуқотиш, ихчамлаш, соддалаштириш ҳам олдинги темадагидек бажарилади):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1. \qquad (*)$$

Таърифга кўра $2a < 2c$, яъни $c > a$, шунинг учун $c^2 - a^2$ миқдор мусбат бўлади, $c^2 - a^2$ ифодани b^2 билан белгилаймиз: $c^2 - a^2 = b^2$. У ҳолда (*) тенглама

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (10)$$

кўринишни олади. (10) тенглама гиперболанинг каноник тенгламаси дейилади. (Фокуслари ординаталар ўқида ётган гипербола тенгламаси $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ каби бўлади.) Гиперболанинг (10) тенгламасига кўра шаклини аниқлаймиз. Бунинг учун гипербола тенгламасида ҳам эллипс тенгламаси устида олиб борилган муҳокамаларни такрорлаб гиперболанинг координаталар боши, координата ўқларига нисбатан симметриклиги аниқланади.



51-чизма.

Гипербола Ox ўқни $A_1(a; 0)$ ва $A_2(-a; 0)$ нуқталарда кесиб ўтади (51-чизма). Гипербола Oy ўқ билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам, (10) тенгламага $x=0$ ни қўйсак,

$y^2 = -b^2$ бўлиб, бу ифода ҳақиқий сонлар соҳасида ўринли бўлмайди.

A_1, A_2 нуқталар гиперболанинг *учлари*, улар орасидаги $2a$ узунликка тенг кесма эса унинг *ҳақиқий ўқи* дейилади.

Oy ўқда $B(0; -b)$ ва $B(0; b)$ нуқталарни белгиласак, B_1 дан B_2 гача бўлган $2b$ узунликдаги кесма гиперболанинг *мавҳум ўқи* дейилади.

Агар $M(x; y)$ нуқта гиперболада ётса, унинг тенгламасидан $|x| \geqslant a$ эканини кўрамиз. Бундан $|x| = \pm a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган $-a < x < a$ соҳада гиперболанинг нуқталари мавжуд эмаслиги келиб чиқади. (10) тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (11)$$

Бу ердан x ўзгарувчи a дан $+\infty$ гача ортганда ҳамда $-a$ дан $-\infty$ гача камайганда y ордината 0 дан $+\infty$ гача ўсиши кўринади. Демак, гипербола икки қисмдан иборат бўлиб, улар гиперболанинг *тармоқлари* дейилади.

Гиперболанинг бир (ўнг) тармоғи $x \geqslant a$ ярим текисликда, иккинчи (чап) тармоғи $x \leqslant -a$ ярим текисликда жойлашган.

Гипербола $y = \pm \frac{b}{a}x$ тенгламалар билан аниқланувчи иккита асимптотага эга (51-чизма).

(Агар чексиз тармоққа эга бўлган эгри чизиқнинг нуқтаси шу чизиқ бўйлаб ҳаракатланиб борганида унинг d тўғри чизиққача бўлган масофаси нолга интилса, d тўғри чизиқ текис чизиқнинг *асимптотаси* дейилади.)

Агар $a = b$ (ярим ўқлари тенг) бўлса, гипербола *тенг томонли* дейилади.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламада $a = b$ бўлганда:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ёки} \quad x^2 - y^2 = a^2. \qquad (12)$$

Тенг томонли гипербола асимптоталарининг тенгламалари $y = x$, $y = -x$ бўлиб, улар орасидаги бурчак $90°$ га тенг бўлади. (Уларнинг бири Ox ўқ билан $45°$ ли, иккинчиси $135°$ ли бурчак ташкил қилади.)

Координата ўқларини $-45°$ га бурсак, Oy ўқ $y = x$ асимптота билан, Ox ўқ эса $y = -x$ асимптота билан устма-уст тушиб, асимптоталар янги координата ўқлари бўлиб қолади. Бу янги ўқларда $x^2 - y^2 = a^2$ тенг томонли гипербола анча содда: $xy = a$ кўринишда ифодаланади.

Ҳақиқатан ҳам, (12) тенгламага

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

алмаштириш формулаларини татбиқ этамиз. Бу ерда $\alpha = -45°$. У ҳолда

$$(x' \cos 45° + y' \sin 45°)^2 - (-x' \sin 45° + y' \cos 45°) = a^2,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y' - \frac{\sqrt{2}}{2} x'\right)^2 = a^2,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - \frac{1}{2}(y'^2 - 2x'y' + x'^2) = a^2,$$

$$2x'y' = a^2,$$

$$x'y' = \frac{a^2}{2}$$

ёки x' ва y' ларни x, y лар орқали, $\frac{a^2}{2}$ ни эса бирор c орқали белгиласак, $xy = c$ кўринишдаги тенгламага эга бўламиз.

Гипербола фокуслари орасидаги масофанинг ҳақиқий ўқининг узунлигига нисбати гиперболанинг *эксцентриситети* дейилади. Одатда эксцентриситет e ҳарфи билан белгиланади:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Таърифдан, гипербола эксцентриситети 1 дан катта экани келиб чиқади.

Эксцентриситет гипербола шаклини аниқлашда муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, $e = \frac{c}{a}$ дан $c = ea$, буни $b^2 = c^2 - a^2$ га қўйсак, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ ёки $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ бўлиб, бундан кўринадики, эксцентриситет e қанчалик кичик, яъни $e \to 1$ бўлса, $\frac{b}{a}$ шунчалик кичик, яъни $\frac{b}{a} \to 0$ бўлади (бу ерда a ўзгармайди деб фараз қилинади) ва гипербола ўзининг ҳақиқий ўқига сиқилган бўлади, аксинча e катталашиб борса, $\frac{b}{a}$ ҳам қатталашиб, гипербола тармоқлари кенгайиб боради ([8]).

1-мисол. Гиперболанинг ҳақиқий ўқи 18 га, фокуслари орасидаги масофа 24 га тенг бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечиш. Шартга кўра $2a = 18 \Rightarrow a = 9$ ва $2c = 24 \Rightarrow$ $\Rightarrow c = 12$. Энди b^2 ни топамиз:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 144 - 81 = 63.$$

Демак,

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{63} = 1.$$

2-мисол. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ гипербола тенгламяси берилган. Гиперболанинг ҳақиқий ва мавҳум ярим ўқларини, фокусларини эксцентриситетини аниқланг.

Ечиш. Берилган тенгламада $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, демак $a = 5$; $b = 4$; $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41$, бундан

$$c = \pm \sqrt{41};\ F_1(\sqrt{41};\ 0);\ F_2(-\sqrt{41};\ 0).$$

Энди e ни аниқлаймиз:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}.$$

3-мисол. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ гипербола асимптоталарининг тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Берилган тенгламада $a^2 = 5$, $b^2 = 20$, бундан

$$a = \sqrt{5};\quad b = 2\sqrt{5}.$$

Асимптота тенгламалари $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$ ларга топилганларни қўямиз. Демак, $y = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x$ ёки $y = 2x$. $y = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}x$ ёки $y = -2x$.

4-мисол. Гиперболанинг каноник тенгламаси берилган:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

Бу гиперболанинг ҳақиқий ва мавҳум ярим ўқларини, эксцентриситетини, фокусларини, учларини топинг, асимптоталари тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Берилишига кўра: $a=3$; $b=\sqrt{7}$. Демак,

$$c^2=a^2+b^2; \quad c=\pm\sqrt{9+7}=\pm 4,$$

эксцентриситет:

$$e=\frac{c}{a}; \quad c=\frac{4}{3}.$$

Гипербола фокуслари:

$$F_1(4;\ 0); \quad F_2(-4;\ 0).$$

Гипербола учлари:

$$A(3;\ 0) \qquad A'(-3;\ 0);$$
$$B(0;\ \sqrt{7}); \qquad B'(0;\ -\sqrt{7}).$$

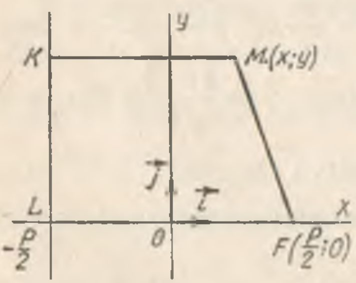
Асимптоталари тенгламалари:

$$y=\frac{\sqrt{7}}{3}x; \quad y=-\frac{\sqrt{7}}{3}x.$$

5-§. Парабола

Таъриф. Парабола деб шундай нуқталарнинг тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биридан фокус деб аталувчи берилган нуқтагача бўлган масофа директриса деб аталувчи берилган тўғри чизиққача бўлган масофага тенгдир.

Берилган нуқта параболанинг фокуси, берилган тўғри чизиқ эса параболанинг директрисаси дейилади. Берилган нуқта берилган тўғри чизиқда ётмайди деб олинади.



52-чизма

Параболанинг фокусини F, директрисасини d билан, фокусдан директрисагача масофани p билан белгилаймиз. Парабола тенгламасини таърифидан фойдаланиб келтириб чиқарамиз. Бунинг учун координаталар системасини тубандагича киритамиз. F нуқтадан ўтувчи ва d тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқни абсциссалар ўқи деб қабул қиламиз. Абсциссалар ўқининг d тўғри чизиқ билан кесишган нуқтаси L бўлсин. Ординаталар ўқини $[FL]$ кесманинг ўртасидан ўтказамиз (52- чизма).

Бу ҳолда директриса $x = -\frac{p}{2}$ тенгламага, F фокус эса $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ координаталарга эга бўлади. $M(x;\ y)$ — параболанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. M нуқта параболада ётади деган шарт (парабола таърифига кўра) қуйидаги тенглик орқали ифодаланади:

$$\rho(K,\ M) = \rho(M,\ F). \qquad (*)$$

Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидан фойдалансак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} \rho(K,\ M) &= \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}, \\ \rho(M,\ F) &= \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

$$(*);\ (**) \Rightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2;$$

қавсларни очиб ихчамлаймиз, натижада

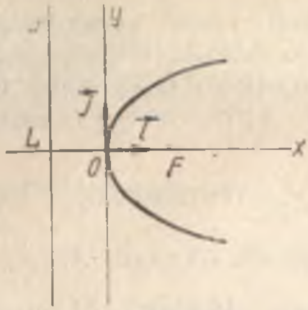
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

ёки

$$y^2 = 2px. \qquad (13)$$

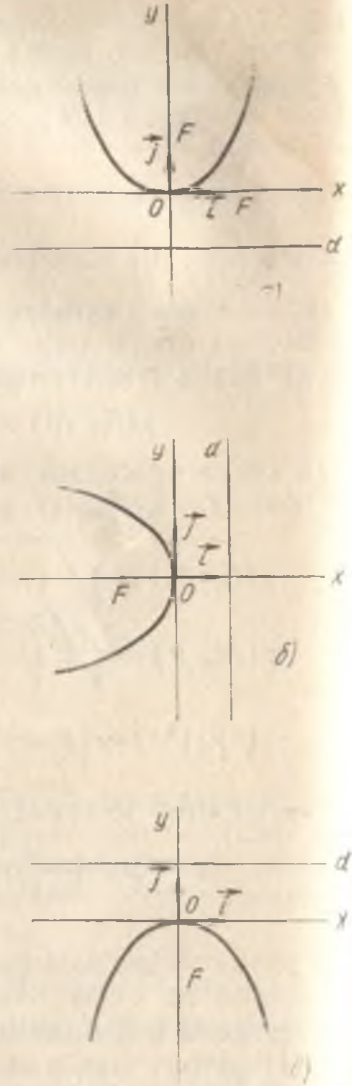
(13) тенглама параболанинг *каноник* тенгламаси дейилади. Парабола шаклини унинг (13) тенгламасига кўра текширамиз. $y^2 \geqslant 0$ ва $p > 0$ бўлгани учун (13) тенгламада $x \geqslant 0$ бўлиши керак. Бундан эса (13) тенглама билан ифодаланувчи параболанинг барча нуқталари ўнг ярим текисликда жойлашганлиги келиб чиқади.

$x = 0$ да $(13) \Rightarrow y = 0$ бўлиб, парабола координаталар бошидан ўтади. Координаталар боши параболанинг учи дейилади. x нинг ҳар бир $x > 0$ қийматига y нинг ишоралари қарама-қарши, аммо абсолют миқдорлари тенг бўлган қиймати мос келади. Бундан эса параболанинг Ox ўқига нисбатан симметрик жойлашганлиги кўринади. Шунинг учун Ox ўқи параболанинг сим-



53-чизма.

метрия ўқи дейилади. (13) тенгламадан кўринадики, x ортиб бориши билан y ҳам ортиб боради. Демак, юқоридаги хоссаларга кўра параболанинг шаклини 53-чизмадагидек тасаввур қилиш мумкин. Агар параболалар координаталар системасига нисбатан 54 *а*, *б*, *в*-чизмалардагидек жойлашса, уларнинг тенгламалари мос равишда $x^2 = 2py$; $y^2 = -2px$; $x^2 = -2py$ кўринишда бўлади.



54-*а*, *б*, *в* чизма.

1-мисол. $y^2 = 4x$ парабола берилган. Параболанинг шундай нуқтасини топингки, ундан фокусигача бўлган масофа 1 га тенг бўлсин.

Ечиш. Шартга кўра $2p = 4 \Rightarrow \frac{p}{2} = 1$. Демак, парабола фокуси F (1; 0) нуқтада жойлашган. Айтайлик, M (x; y) — параболанинг биз излаётган нуқтаси бўлсин. Шартга кўра бу нуқтадан фокусгача бўлган масофа 1 га тенг. Изланаётган нуқтанинг x, y координаталарини топиш учун қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1, \\ y^2=4x. \end{cases}$$

Бу системани ечамиз:

$$(x-1)^2+4x=1 \Rightarrow x^2-2x+1+4x=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1=1 \Rightarrow (x+1)^2=1$$
$$x+1=\pm 1; \quad x=0.$$

У ҳолда $y^2=4x=4\cdot 0=0$. Демак, параболанинг фокусидан 1 бирлик масофада ётувчи нуқтаси (0; 0) бўлиб, у параболанинг учидир.

2-мисол. $x+4=0$ тўғри чизиқ ва $F(-2;\ 0)$ нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталар геометрик ўрнининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. $K(x,\ y)$ — биз излаётган геометрик ўрниннинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига асосан: $|FK|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$. Масала шартига кўра $x+4=0$ тўғри чизиқ $K(x,\ y)$ нуқтадан $|KF|=|x+4|$ масофада бўлади. Шунинг учун,

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=x+4$$

ёки

$$(x+2)^2+y^2=x^2+8x+16 \Rightarrow y^2-4x-12=0.$$

Бундан

$$y^2=4x+12 \quad \text{ёки} \quad x=\frac{1}{4}y^2-3.$$

Бу эса Ox ўқига нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламасидир.

3-мисол. $y=ax^2+bx+c$ парабола тенгламасини координаталар системасини алмаштириш билан каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $y=ax^2+bx+c$ ифодада шакл алмаштириш бажарамиз:

$$y=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c-\frac{b^2}{4a^2},$$
$$y-\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

$X=x+\dfrac{b}{2a};\ Y=y-\left(c-\dfrac{b^2}{4a^2}\right)$ координаталарни алмаштириш формуласини қўлласак,

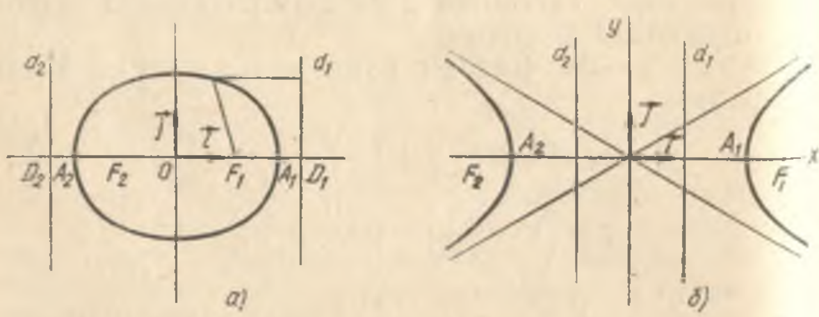
$Y = aX^2$ ёки $X^2 = \frac{1}{a} Y$ формулага эга бўламиз.

Агар $\frac{1}{a} = 2p$ десак, $X^2 = 2pY$ формулага эга бўламиз.

6-§. Эллипс ва гиперболанинг директрисалари

Таъриф. Эллипс (гипербола) нинг катта (фокал) ўқига перпендикуляр ва марказидан $\frac{a}{e}$ масофада унга симметрик ўтган иккита тўғри чизиқ эллипс (гипербола) нинг *директрисалари* дейилади. F_1 ва F_2 фокусларга мос директрисалар таърифга кўра d_1: $x - \frac{a}{e} = 0$, $d_2 : x + \frac{a}{e} = 0$ тенгламаларга эга бўлади. Бу ерда a — эллипс (гипербола) нинг катта (ҳақиқий) ярим ўқи, e — эксцентриситети. (Баъзан буларни мос равишда ўнг ва чап директрисалар деб ҳам аталади.) Эллипс учун $e < 1$, бундан $\frac{a}{e} > a$, гипербола учун $e > 1$, бундан $\frac{a}{e} < a$. Бу ердан эллипснинг ҳам, гиперболанинг ҳам директрисалари уларни кесмаслиги кўринади (55- a, $б$ чизмалар).

Эллипс (гипербола) нинг директрисалари учун қуйидаги мулоҳаза ўринлидир. Эллипс (гипербола) нинг ихтиёрий нуқтасидан фокусгача бўлган масофанинг ўша нуқтадан шу фокусга мос директрисасигача бўлган масофага нисбати ўзгармас миқдор бўлиб, эллипс (гипербола) нинг эксцентриситетига тенг бўлади. (Бу мулоҳазанинг исботини курсимиз талаб қилмагани учун келтириб ўтирмаймиз.)



55-*а*, *б*, чизма.

Мисол. Агар $x = \pm 6$ тўғри чизиқлар катта ўқи 10 га тенг бўлган эллипснинг директрисалари бўлса, шу эллипснинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масала шартига кўра $2a = 10 \Rightarrow a = 5$, яъни $\pm \frac{a}{e} = \pm 6$, бундан $\frac{a}{e} = 6$, аммо $e = \frac{c}{a}$, у ҳолда $\frac{a^2}{c} = 6$ ёки

$$c = \frac{a^2}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}.$$

Эллипс учун

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - \frac{625}{36} = \frac{900 - 625}{36} = \frac{275}{36}.$$

Демак, эллипснинг изланаётган тенгламаси $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{275}{36}} = 1$ кўринишда бўлади.

7-§. Иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш

Бирор тўғри бурчакли декарт координаталар системасида координаталари

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (14)$$

тенгламани қаноатлантирувчи текислик нуқталарининг геометрик ўрни иккинчи тартибли чизиқ дейилади. Бунда a_{ij} коэффициентлар ҳақиқий сонлардан иборат бўлиб, a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентлардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлади.

Иккинчи тартибли чизиқ назариясининг асосий масалаларидан бири унинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш масаласи ҳисобланади. Иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини соддалаштириш икки босқичдан иборат:

1) координаталар системасини буриш ёрдамида соддалаштириш. Агар иккинчи тартибли чизиқ бирор R тўғри бурчакли координаталар системасида (14) тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда бу координаталар системасини буриш ёрдамида шундай бир R' тўғри бурчакли координаталар системасига ўтиш мумкинки, у системада чизиқ ўз тенгламасида ўзгарувчилар кўпайтмасини, яъни xy ни сақламайди (бу

босқич $a_{22} \neq 0$ ҳолда қўлланилади). Бунинг учун ўтиш формулалари (5- боб, 7- §)

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases} \tag{15}$$

дан x, y ларни (14) га қўйсак ва ўхшаш ҳадларни ихчамласак, (14) тенглама R' координаталар системасида қуйидаги кўринишни олади:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \tag{16}$$

бу ерда

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{22}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} &= -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + \\ &\quad + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha, \\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{10} &= a_{11}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha, \\ a'_{20} &= -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha, \\ a'_{00} &= a_{00}. \end{aligned} \tag{17}$$

(17) белгилашлардан кўринадики, (16) тенгламадаги a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} коэффициентлар (14) тенгламадаги a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларга ва α бурчакка боғлиқ, шунинг билан бирга a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} нинг камида бири нолдан фарқли, акс ҳолда биринчи тартибли тенгламага эга бўлламиз.

α бурчакнинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уни шундай танлаб оламизки, натижада (16) тенгламадаги a'_{12} коэффициент нолга тенг бўлсин:

$$\begin{aligned} a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + \\ + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = -(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha + \\ + (a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0 \end{aligned}$$

ёки

$$\frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha}. \tag{18}$$

Бу нисбатни бирор λ га тенглаб, уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0, \\ a_{11}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Бу система бир жинсли, шунинг учун унинг детерминанти нолга тенг, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маълумки,

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \tag{20}$$

бўлгандагина система нолдан фарқли ечимга эга бўлади. (20) тенглама (14) чизиқнинг *характеристик тенгламаси* дейилади. (20) тенгламанинг дискриминанти:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12})^2 = \\ = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0.$$

Демак, (20) тенгламанинг λ_1 ва λ_2 илдизлари турли ва ҳақиқийдир. (18) дан

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda\cos\alpha, \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha \end{cases} \tag{21}$$

тенгликларни ёза оламиз. Уларнинг ҳар бирини $\cos\alpha \neq \neq 0$ га бўлиб (агар $\cos\alpha = 0$ бўлса, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлиб, $a_{12} = 0$ бўлади) ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda - a_{22}}. \tag{22}$$

(22) муносабатга навбат билан (20) характеристик тенгламанинг λ_1, λ_2 илдизларини қўямиз:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}. \tag{23}$$

(23) формулалардан фойдаланиб $\alpha = \alpha_1$ бурчакни аниқлаб, R координаталар системасини шу α_1 бурчакка буриш билан янги R' координаталар системасига ўтиш мумкинки, бу системага нисбатан (14) тенглама соддалашиб қуйидаги кўринишга келади:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0. \tag{24}$$

Агар берилган (14) тенгламада $a_{10} = a_{20} = 0$ бўлса, у ҳолда $a'_{10} = a'_{20} = 0$ бўлиб, (16) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{00} = 0. \tag{25}$$

Шундай қилиб, координаталар системасини бурии ёрдамида (14) тенгламани (24) кўринишдаги тенгламага келтирдик. (24) кўринишдаги тенгламани янада соддалаштириш учун координаталар бошини кўчиришдан фойдаланамиз:

2) координаталар бошини кўчириш йўли билан иккинчи тартибли чизиқ тенгламасини соддалаштириш (бу ҳолда R' координаталар системасининг ўқлари йўналишини ўзгартирмасдан, координаталар бошини бошқа нуқтага кўчирамиз, яъни R'' координаталар системасига ўтамиз).

Иккинчи тартибли чизиқнинг тенгламаси (24) кўринишда бўлсин. (20) характеристик тенгламанинг илдизлари λ_1 ва λ_2 эса бир вақтда нолга тенг бўлмасин. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0 \iff a_{11}a_{22} - a_{12}'^2 \neq 0.$

Бу ҳолда (24) тенгламада қуйидагича шакл алмаштириш бажарамиз:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a_{10}'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right) + \overset{*}{a}_{00} = 0,$$

бу ерда $\overset{*}{a}_{00} = a'_{00} - \frac{a_{10}'^2}{\lambda_1} - \frac{a_{20}'^2}{\lambda_2}$ деб белгилаймиз. Тубандаги шакл алмаштиришни бажарамиз:

$$x' = X + \left(-\frac{a_{10}'}{\lambda_1}\right);\quad y' = Y + \left(-\frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right).$$

У ҳолда R'' координаталар системасида эгри чизиқ қуйидаги тенгламага эга бўлади:

$$\lambda_1X^2 + \lambda_2Y^2 + \overset{*}{a}_{00} = 0, \tag{26}$$

бу ерда $0'\left(-\frac{a_{10}'}{\lambda_1};\ -\frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)$; агар $\overset{*}{a}_{00} \neq 0$ бўлса, (26) ни каноник кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{X^2}{-\frac{\overset{*}{a}_{00}}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{\overset{*}{a}_{00}}{\lambda_2}} = 1, \tag{*}$$

агар $\overset{*}{a}_{00} = 0$ бўлса, унинг каноник кўриниши тубандагича бўлади:

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0. \tag{**}$$

Шундай қилиб, R координаталар системасида (14) тенглама билан берилган иккинчи тартибли чизиқнинг характеристик тенгламаси илдизлари λ_1 ва λ_2 нолга тенг бўлмаса, у ҳолда чизиқ қуйидаги чизиқлардан бирортасини ифодалайди. Юқоридаги (*), (**) формулаларга кўра чизиқларнинг каноник тенгламасини тубандаги жадвалда ифодалаймиз:

№№	λ_1	λ_2	$\overset{*}{a}_{00}$	Каноник тенгламаси	Чизиқнинг номи
1	$+$ $-$	$+$ $-$	$-$ $+$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Эллипс
2	$+$ $-$	$+$ $-$	$+$ $-$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Мавҳум эллипс
3	$+$ $-$	$+$ $-$	0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Нуқта (кесишувчи мавҳум тўғри чизиқлар жуфти)
4	$+$ $-$	$-$ $+$	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	Гипербола
5	$+$ $-$	$-$ $+$	0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Кесишувчи тўғри чизиқлар жуфти

б) $\lambda_1 = 0,\ (\lambda_2 \neq 0);\ a'_{10} = 0.$

Бу ҳолда (24) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\lambda_2\left(y' + \frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)^2 + 2a_{10}' \cdot \left(x' - \frac{a_{20}'^2 \cdot \frac{1}{\lambda_2} - a_{00}'}{2a_{10}'}\right) = 0.$$

Қуйидаги координата алмаштириш формуласи

$$x' = X + \frac{a_{20}'^2 \cdot \frac{1}{\lambda_2} - a_{00}'}{2a_{10}'};\quad y = Y + \left(-\frac{a_{20}'}{\lambda_2}\right)$$

ни қўлласак, (24) тенгламадан чизиқнинг R'' даги каноник тенгламаси келиб чиқади:

$$\lambda^2 Y^2 + 2a'_{10}X = 0; \quad Y^2 = -2\frac{a'_{10}}{\lambda_2}X. \tag{27}$$

Агар $\lambda_2 = 0$; $a'_{20} \neq 0$ бўлса, у ҳолда (24) нинг кўриниши тубандагича бўлади: $X^2 = -2\frac{a'_{20}}{\lambda_1}Y$. Шундай қилиб, агар $\lambda_1 = 0$ бўлиб, $a'_{10} \neq 0$ бўлса ёки $\lambda_2 = 0$ бўлиб, $a'_{20} \neq 0$ бўлса, у ҳолда (14) тенглама параболани ифодалар экан.

в) $\lambda_1 = 0$, $a'_{10} = 0$. Бу ҳолда

$$(24) \Rightarrow \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a'_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} = 0.$$

$a'_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}$ ни a''_{00} билан белгиласак ва қуйидагича координата алмаштириш формуласи

$$x' = X; \quad y' = Y + \left(-\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$$

ни қўлласак, (24) тенглама R'' координаталар системасида қуйидаги кўринишни олади:

$$Y^2 + \frac{a''_{00}}{\lambda_2} = 0. \tag{28}$$

Бунда, агар $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$ бўлса ва уни $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -a^2$ деб белгиласак, (28) ни қуйидагича ёзамиз:

$$Y^2 - a^2 = 0 \Rightarrow Y - a = 0; \; Y + a = 0. \tag{29}$$

Демак, чизиқ ҳар хил параллел тўғри чизиқлар жуфтига ажралади, агар $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$ бўлса, яъни $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = a^2$ бўлса, у ҳолда

$$Y^2 + a^2 = 0 \Rightarrow Y + ai = 0; \; Y - ai = 0 \tag{30}$$

бўлади. Бу ҳолда чизиқ мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфтига ажралади. Агар $a''_{00} = 0$ бўлса,

$$(28) \Rightarrow Y^2 = 0 \Rightarrow Y = 0; \; Y = 0 \tag{31}$$

бўлади. Бу ҳолда чизиқ устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтини ифодалайди. Шундай қилиб, (14) тенглама қуйидаги 9 та чизиқдан биттасини ифодалайди:

1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) кесишувчи тўғри чизиқлар жуфти; 5) ҳар хил параллел тўғри чизиқлар жуфти; 6) устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфти; 7) мавҳум эллипс; 8) мавҳум кесишувчи тўғри чизиқлар жуфти; 9) мавҳум параллел тўғри чизиқлар жуфти.

8-§. Иккинчи тартибли чизиқни умумий тенгламасига кўра ясаш

Фараз қилайлик, R тўғри бурчакли координата системасида иккинчи тартибли чизиқ умумий тенгламаси

$$F(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+a_{20}y+a_{00}=0 \quad (32)$$

билан берилган бўлсин. Олдинги темадаги умумий тенгламани каноник кўринишга келтиришга асосан чизиқнинг нуқталарини ясаш мумкин. Бунинг учун тубандагиларни бажарамиз:

1) $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ характеристик тенгламани ёзиб, тенгламанинг илдизларини топамиз;

2) текисликни O нуқта атрофида α бурчакка бурганда R координаталар системасидан R' координаталар системаси ҳосил бўлади. Буриш бурчагининг катталигини топамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}} \Rightarrow \left(\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\right.$$
$$\left.\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right);$$

3) $$a_{10}'=a_{10}\cos\alpha+a_{20}\sin\alpha,$$
$$a_{20}'=-a_{10}\sin\alpha+a_{20}\cos\alpha$$

формулалар бўйича a_{10}', a_{20}' коэффициентларни ҳисоблаймиз ва R' координаталар системасидаги чизиқнинг

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+2a_{10}'x'+2a_{20}'y'+a_{00}=0 \quad (33)$$

тенгламасини тузамиз;

4) (33) тенгламадан координаталар бошини O' нуқтага кўчириш ёрдамида эгри чизиқнинг R'' координаталар системасидаги каноник тенгламасини ҳосил қиламиз.

5) Аввал R' координаталар системаси, кейин R'' координаталар системаси чизилади ва чизиқ каноник тенгламасига кўра ясалади.

1-мисол. Ушбу $x^2 - 8xy + 7y^2 + 5x - 6y + 7 = 0$ чизиқ тенгламасини соддалаштиринг.

Ечиш. 1) характеристик тенгламани тузиб, унинг илдизларини аниқлаймиз:

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0; \quad \lambda_1 = 9; \quad \lambda_2 = -1;$$

2) координаталар системасини буриш керак бўлган бурчакнинг қийматини топамиз:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -2; \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Бу ердаги α ни жадвалдан топилади. Координата ўқларидаги векторлар қуйидагича бўлади:

$$\vec{i'} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}; \quad \vec{j'} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j};$$

3) коэффициентларни аниқлаймиз (3-банддаги формулага кўра)

$$a'_{10} = \frac{17}{\sqrt{5}}; \quad a'_{20} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Булардан фойдаланиб, янги координаталар системасига нисбатан қуйидаги тенгламани тузамиз:

$$9x'^2 - y'^2 + 2\cdot\frac{17}{\sqrt{5}}x' + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}y' + 7 = 0;$$

4) координаталар бошини O' нуқтага кўчириш йўли билан тенглама шаклини ўзгартирамиз:

$$9\left(x' + \frac{17}{9\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{34}{9} = 0.$$

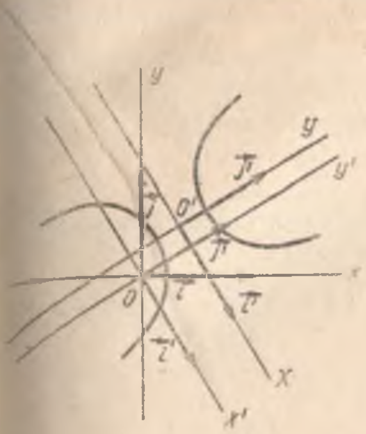
Натижада тубандаги тенгламага эга бўламиз:

$$-\frac{X^2}{\frac{34}{81}} + \frac{Y^2}{\frac{34}{9}} = 1; \quad O'\left(-\frac{17}{9\sqrt{5}};\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

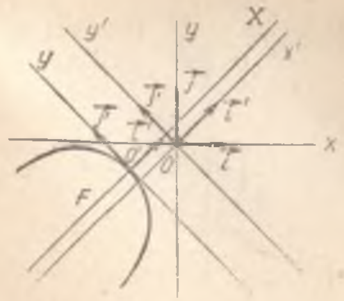
Демак, чизиқ гиперболадан иборат экан (56-чизма).

2-мисол. $x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 4y + 2 = 0$ эгри чизиқ тенгламасини соддалаштиринг.

Ечиш. 1) характеристик тенглама тузиб, унинг илдизларини аниқлаймиз:



56-чизма.



57-чизма.

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0; \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 2.$$

2) координата ўқларини буриш керак бўлган бурчакнинг қийматини топамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = 1; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\vec{i'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}j; \quad \vec{j'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j};$$

3) коэффициентларни аниқлаймиз:

$$a'_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a'_{20} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$2y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{2}{\sqrt{2}}y' + 2 = 0$$

ёки

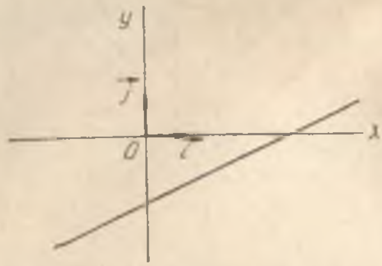
$$y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0;$$

4) координаталар бошини O' нуқтага кўчириш йўли билан тенгламани соддалаштирамиз:

$$\left(y' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + \frac{7}{4\sqrt{2}}\right) = 0,$$

бундан $Y^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}X$; $O'\left(-\frac{7}{4\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ тенгламага эга бўламиз.

Демак, чизиқ параболадан иборат экан (57- чизма)



58-чизма.

3- мисол. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ чизиқ тенгламасини соддалаштиринг.

Ечиш. Берилган тенгламани тубандагича ёзиш мумкин:

$$(x - 3y)^2 - 2(x - 3y) + 1 = 0$$

$$x - 3y = 1 \text{ ёки}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Бундан кўринадики, берилган эгри чизиқ устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар жуфтига ажралади (58- чизма).

9- §. Иккинчи тартибли чизиқларнинг татбиқи

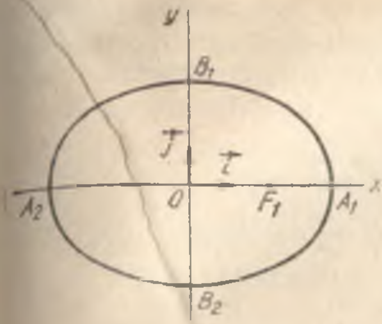
Осмон жисмларининг ҳаракат траекториялари иккинчи тартибли чизиқлар ёрдамида ўрганилади, чунки планеталар Қуёш атрофида эллиптик орбиталар бўйлаб, қуёш системасидаги кометалар эса ёки эллипс, ёки гипербола, ёки парабола бўйлаб ҳаракатланадилар.

Шунингдек, техникада кривошип-шатун механизмида, шатуннинг ўртасида ётувчи нуқта траекториясини текширсак, эллипс бўйича ҳаракатланади, автомобиль фарасининг кесими парабола шаклида ишланади. Умуман айтганда, иккинчи тартибли чизиқлар назарияси амалиёт ва техникада кенг қўлланилади. Мисоллар кўрайлик.

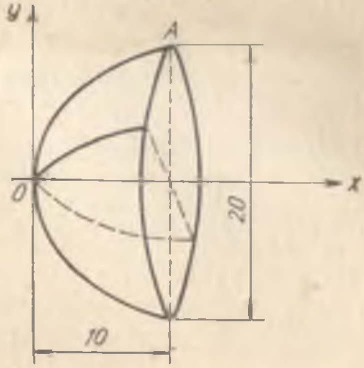
1- мисол. Ер Қуёш атрофида эллипс бўйича айланади. Қуёш эса бу эллипснинг фокусларидан бирида туради. Ер орбитасининг катта ўқи $2a = 300\,000\,000$ км. Орбитанинг эксцентриситети $e = \frac{1}{60}$ га тенг. Ер орбитасининг маркази Қуёшдан қанча масофада ётади? Қуёшдан Ергача энг қисқа масофа (декабрда) энг катта масофадан (июнда) қанча кичик?

Ечиш. Масала шартига кўра $2a = 300\,000\,000$ км, бундан $a = 150\,000\,000$ км.

1) Ер орбитасининг маркази Қуёшдан қанча масофада ётишини аниқлаш учун марказдан фокусгача масофасини топсак етарли, чунки Қуёш унинг фокусларидан бирида жойлашган, аниқлик учун F_1 да жой-



59-чизма.



60-чизма.

лашган бўлсин (59- чизма). Эксцентриситет таърифига асосан:

$$e = \frac{c}{a},\ \text{бу ердан}\ c = a \cdot e.$$

$$c = 150\,000\,000 \cdot \frac{1}{60} = 2\,500\,000.$$

Ер орбитасининг маркази Қуёшдан 2 500 000 км масофада экан.

2) Қуёшдан Ергача энг қисқа масофани, яъни F_1A_1 ни топамиз:

$$F_1A_1 = a - c = 150\,000\,000 - 2\,500\,000 = 147\,500\,000 \text{ км}.$$

Энг катта масофани, яъни A_2F_1 ни топамиз.

$$A_2F_1 = a + c = 150\,000\,000 + 2\,500\,000 = 152\,500\,000 \text{ км}.$$

Қуёшдан ергача энг қисқа масофа энг катта масофадан қанча кичик эканини топамиз. Агар бу масофани ρ десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\rho = A_2F_1 - F_1A_1 = 152\,500\,000 - 147\,500\,000 = 5\,000\,000 \text{ км}.$$

2- мисол. Автомобиль фонарининг кесими парабола формасида бўлиб, унинг диаметри 20 см, чуқурлиги 10 см. Парабола фокусининг координаталарини топинг.

Ечиш. F фокусдан параболанинг учигача бўлган масофани топиш учун парабола тенгламасини тузамиз. Координаталар системасини шундай танлаб оламизки, фонарнинг симметрия ўқи Ox ўқ билан, учи эса координаталар боши билан устма-уст тушсин (60- чизма).

Бу ҳолда парабола тенгламасини $y^2 = 2px$ (*) кўринишда излаймиз. Танлаб олинган координаталар системасида параболага тегишли нуқтанинг координаталари (10; 10) бўлади. Бу нуқтанинг координаталарини (*) тенгламага қўйсак:

$$10^2 = 2p \cdot 10$$

бўлиб, бундан $p = 5$ га эга бўламиз. Демак, параболанинг фокуси $F\left(\frac{5}{2};\ 0\right)$ нуқтада бўлади.

Машқлар

1. Маркази $C(-1;\ 4)$ нуқтада бўлиб, $A(3;\ 5)$ нуқтадан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.

2. Айлана $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$ тенглама билан берилган. $A(3;\ 1)$; $B(2;\ 3)$; $C(3;\ -9)$; $D(0;\ 3)$ нуқталар берилган айланага тегишлими?

3. Айлананинг тенгламаси $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$ бўлса, унинг маркази координаталарини ва радиуси узунлигини топинг.

4. Иккита айлана $x^2+y^2=16$ ва $x^2+y^2-12x+11=0$ тенгламалар билан берилган. Шу айланалар марказлари орасидаги масофани топинг.

5. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофа 6 см, унинг кичик ўқи 8 см га тенг. Эллипснинг каноник тенгламасини тузинг ва эксцентриситетини топинг.

6. Эксцентриситети $e = \frac{4}{5}$ бўлган ва $A(5\sqrt{3};\ 3)$ нуқтадан ўтувчи эллипснинг тенгламасини тузинг.

7. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипсда фокал радиусларининг айирмаси 8 га тенг бўлган нуқтани топинг.

8. M нуқта $F(2;\ 0)$ нуқтага $x = 9$ тўғри чизиққа қараганда 3 марта яқин туриб ҳаракат қилади. M нуқтанинг ҳаракат траекториясини топинг.

9. $5x^2 - 4y^2 = 20$ гиперболанинг ярим ўқларини, эксцентриситетини ва фокусларининг координаталарини топинг. $M(-4;\ \sqrt{15})$ нуқтадаги фокал радиусларининг узунликларини топинг.

10. Асимптотаси $y = \pm\frac{1}{2}x$ тўғри чизиқдан иборат ва (3; 1) нуқтадан ўтувчи гиперболанинг тенгламасини тузинг.

11. Гиперболанинг директрисалари орасидаги масофа 8 га, фокуслари орасидаги масофа 12 га тенг. Гиперболанинг тенгламасини тузинг.

12. $y^2=12x$ парабола фокусининг координаталарини топинг ва директрисасининг тенгламасини тузинг.

13. Директрисасининг тенгламаси $x=-3$ ва фокуси $F(1;\ 0)$ бўлган параболанинг тенгламасини тузинг.

14. Учи (5; 4) нуқтада, ўқи Ox ўқига параллел ва (4; 2) нуқтадан ўтувчи параболанинг тенгламасини тузинг ва графигини ясанг.

15. Координаталар бошини параллел кўчириш ёрдамида қуйидаги эгри чизиқ тенгламаларини соддалаштиринг:

а) $\frac{(x-5)^2}{9} + (y-3)^2 = 1$;

б) $(x+2)^2 = 16 + 4(y-4)^2$;

в) $(x-3)^2 = 7(y+4)$.

16. $x(x-6) + 4y(y-3) - 3 = 0$ эгри чизиқ тенгламасини каноник кўринишга келтиринг ва қандай чизиқ тенгламаси эканини аниқланг.

17. $xy = 2$ гипербола тенгламасини каноник кўринишга келтирилсин.

18. $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$ тенглама қандай эгри чизиқни тасвирлашини аниқланг ва уни соддалаштиринг.

19. Қуйидаги эгри чизиқ тенгламаларини каноник кўринишга келтиринг:

а) $14y^2 + 24xy + 21x^2 - 4y + 18x - 139 = 0$;

б) $25x^2 + 10xy + y^2 = 1$;

в) $9x^2 + 16y^2 = 20x - 110y + 24xy + 50$.

VIII боб

ФАЗОДА ТЕКИСЛИКЛАР ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

1-§. Текисликнинг берилиш усуллари

1. Ҳар қандай текислик фазода ўзининг бирор $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтасининг ва нормалининг берилиши билан тўла аниқланади. Текисликка перпендикуляр бўлган $\vec{n} \neq 0$ вектор текисликнинг *нормали* дейилади. Те-

кислик тенгламасини келтириб чиқариш учун декарт координаталар системасини танлаймиз. A, B, C лар $\vec n$ нормалнинг шу системадаги координаталари, x_0, y_0, z_0 лар эса Π текислик M_0 нуқтасининг шу системадаги координаталари бўлсин. $M(x; y; z)$ — фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда M нуқта Π текисликка тегишли бўлиши учун $\vec{M_0M}$ вектор $\vec n$ векторга перпендикуляр бўлиши, яъни $\vec{M_0M}\cdot\vec n = 0$ (уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг) бўлиши зарур ва етарли. $\vec{M_0M}$ вектор $\{x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0\}$ координаталарга эга бўлгани учун:

$$\vec{M_0M}\cdot\vec n = A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

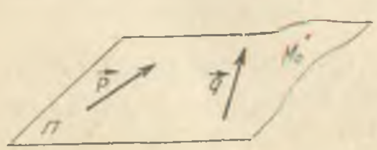
Демак, Π текислик ихтиёрий M нуқтасининг координаталари

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

тенгламани қаноатлантиради.

$\vec n \neq 0$ бўлгани учун $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Энди аксинча (1) тенгламанинг ҳар қандай x_1, y_1, z_1 ечими Π текисликнинг бирор нуқтасини аниқлашини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, M_1 нуқта x_1, y_1, z_1 координаталарга эга бўлсин, у ҳолда $\vec{M_0M_1}$ вектор $\{x_1-x_0;\ y_1-y_0;\ z_1-z_0\}$ координаталарга эга бўлади ва (1) муносабат ўринли бўлгани учун $\vec{M_0M_1}$ вектор $\vec n$ векторга перпендикуляр бўлади.

2. Текислик ўзининг бирор $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасининг ва текисликка параллел бўлган иккита ноколлинеар $\vec p=\{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\}$, $\vec q=\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\}$ векторларнинг берилиши билан аниқланади. Текисликда ихтиёрий $M(x,\ y,\ z)$ нуқтани олсак, $\vec{M_0M}$ вектор $\vec p$, $\vec q$ векторлар билан компланар бўлади, демак, бу векторлар чизиқли боғлиқ бўлиб, бундан уларнинг координаталаридан тузилган учинчи тартибли детерминантнинг нолга тенг бўлиши келиб чиқади (61-чизма). Қуйидагига эгамиз:



61-чизма.

$$\vec{M_0M}=\{x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0\},$$
$$\vec p=\{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\},$$
$$\vec q=\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\}.$$

У ҳолда юқорида айтилганига кўра қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z^0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Аксинча, бу шарт бажарилса, M нуқта Π текисликка тегишли бўлади. Демак, (2) Π текисликнинг тенгламасидир. Бу тенглама берилган нуқтадан ўтиб, берилган ноколлинеар икки векторга параллел бўлган текисликнинг тенгламаси деб аталади.

Текисликнинг параметрик тенгламаларини ҳосил қилиш учун $\vec{M_0M}$, $\vec p$, $\vec q$ векторларнинг бир текисликда ётишига эътибор берамиз, демак, улар чизиқли боғлиқдир, яъни

$$\vec{M_0M}=t\vec p+n\vec q,\quad t,\ n\in R, \qquad (3)$$

бу ерда t, n сонлар параметрлардир, (3) дан:

$$\begin{aligned} x &= x_0+\alpha_1 t+\alpha_2 n,\\ y &= y_0+\beta_1 t+\beta_2 n,\\ z &= z_0+\gamma_1 t+\gamma_2 n. \end{aligned} \qquad (4)$$

(4) — текисликнинг параметрик тенгламалари дейилади.

3. Уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бир текисликда ётмаган учта нуқта текисликнинг вазиятини тўла аниқлайди. Айтайлик, учта $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$; $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$; $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$ нуқта берилган бўлсин.

Агар $M_0=M_1$, $\vec p=\vec{M_1M_2}$, $\vec q=\vec{M_1M_3}$ деб олиб, $\vec{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$, $\vec{M_1M_3}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$ бўлишини ҳисобга олсак, (2) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Бу *уч нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасидан* иборатдир.

4. Текислик ўзининг координата ўқларидан кесган кесмалари a, b, c ларнинг берилиши билан аниқланиши ҳам мумкин. Айтайлик, текислик координаталар бошидан ўтмасин ҳамда Ox, Oy, Oz ўқларини мос равишда $M_1(a, 0, 0)$; $M_2(0, b, 0)$; $M_3(0, 0, c)$ нуқталарда кессин. У ҳолда (5) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

бу ердан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (6)$$

(6)—*текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалари бўйича тенгламаси* дейилади.

Текисликнинг юқорида кўриб чиқилган тенгламалари биринчи даражали бўлиб,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7)$$

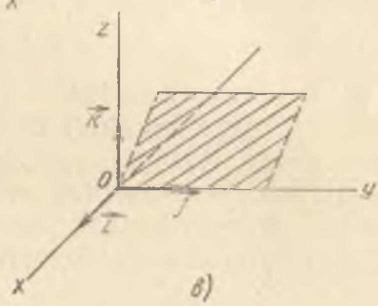
кўринишга эга бўлади. Шунинг учун (7) кўринишдаги тенглама текисликнинг *умумий* тенгламаси дейилади. Бунда A, B, C лар бир вақтда нолга тенг эмас. Текисликнинг умумий тенгламасига кўра унинг координата ўқларига нисбатан жойлашуви тўғрисида фикр юритиш мумкин:

а) агар $D = 0$ бўлса, (7) текислик координаталар бошидан ўтади (62-a чизма).

б) агар $A = 0$ бўлса, (7) текислик Ox ўқига параллел, (62-$б$ чизма). $B = 0$ бўлса, Oy ўқига параллел, $C = 0$ бўлса, Oz ўқига параллел бўлади. Худди шундай, қуйидаги ҳолларни кўриш мумкин:

$$A = 0 \Leftrightarrow \Pi \parallel (Ox), \ A = D = 0 \Leftrightarrow \Pi \supset (Ox);$$
$$B = 0 \Leftrightarrow \Pi \parallel (Oy), \ B = D = 0 \Leftrightarrow \Pi \supset (Oy);$$
$$C = 0 \Leftrightarrow \Pi \parallel (Oz), \ C = D = 0 \Leftrightarrow \Pi \supset (Oz) \ (62\text{-}в \text{ чизма}).$$

в) агар $A = B = 0$, $C \neq 0$ бўлса, $\Pi \parallel (xOy)$. Хусусий ҳолда $D = 0$ бўлса, $z = 0$, яъни xOy текислик тенгламасига эга бўламиз. Шунга ўхшаш, $x = a$ тенглама yOz текисликка параллел Π текисликни ифодалайди. $x = 0$ тенглама yOz текисликни ифодалайди. $y = b$ эса $\Pi \parallel (xOz)$ текисликни, $y = 0$ эса xOz текисликни ифодалайди.



62-*а, б, в* чизма.

1-мисол. $M(2;\ -3;\ 4)$ нуқта орқали ўтувчи ва $\vec{n}=\{1;\ -1;\ 4\}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ечиш. Маълумки, берилган $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, берилган $\vec{n}=\{A,\ B,\ C\}$ векторга перпендикуляр бўлган текисликнинг тенгламаси

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

кўринишга эга. Масала шартидан:

$$x_1=2;\quad y_1=-3;\quad z_1=4;$$
$$A=1;\quad B=-1;\quad C=4.$$

Буларни юқоридаги тенгламага қўйиб, изланган текислик тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$1(x-2)-1\cdot(y+3)+4(z-4)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-2-y-3+4z-16=0\Rightarrow x-y+4z-21=0.$$

2-мисол. Текислик $A(2;\ 2;\ 3)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{p}=\{1;\ 1;\ 2\}$; $\vec{q}=\{2;\ 4;\ 3\}$ векторларга параллел бўлсин. Шу текисликнинг умумий тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилганларни (2) тенглама билан солиштириб, қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$x_0=2;\qquad y_0=2;\qquad z_0=3,$$
$$\alpha_1=1;\qquad \beta_1=2;\qquad \gamma_1=1,$$
$$\alpha_2=2;\qquad \beta_2=4;\qquad \gamma_2=3.$$

Натижада бу ҳол учун (2) детерминант қуйидаги кўринишда булади:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Учинчи тартибли детерминантни ҳисобласак, изланган текисликнинг умумий тенгламасига эга бўламиз:

$$x - y + z - 3 = 0.$$

3-мисол. $2x + 3y - 5z - 30 = 0$ текислик берилган. Бу текисликнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг.

Ечиш. Текисликнинг берилган тенгламасини унинг координата ўқларидан кесган кесмалари бўйича тенглама кўринишига келтирамиз:

$$\frac{2x}{30} + \frac{3y}{30} - \frac{5z}{30} = 1$$

ёки

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Демак, текислик Ox ўқини (15; 0; 0), Oy ўқини (0; 10; 0), Oz ўқини (0, 0; -6) нуқталарда кесади.

2-§. Фазода иккита ва учта текисликнинг ўзаро жойлашуви

1. Айтайлик, декарт координаталар системасида иккита Π_1 ва Π_2 текислик ўзларининг тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (8)$$
$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (8')$$

Бу икки текисликнинг ўзаро жойлашувида қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) текисликлар тўғри чизиқ бўйича кесишади;

б) текисликлар ўзаро параллел (умумий нуқтага эга эмас);

в) текисликлар устма-уст тушади;

(63-*а*, *б*, *в* чизма). Бу ҳоллар қандай шартлар бажарилганда юз беришини билиш учун Π_1, Π_2 ларни

ифодаловчи тенгламалар системасини текшириш керак. Бунинг учун қуйидаги матрицаларни тузамиз:

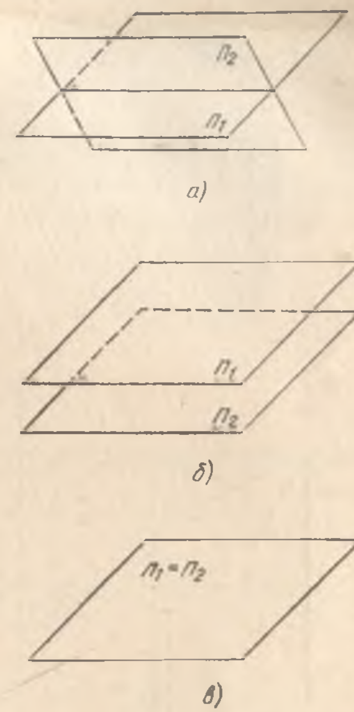
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix},$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

A матрицанинг рангини r билан, A^* матрицанинг рангини r^* билан белгилайлик. Юқоридаги ҳолларнинг юз беришини қараймиз.

а) агар текисликлар кесишса, система биргаликда бўлади, яъни Π_1 ва Π_2 текисликлар умумий нуқтага эга бўлиб, бир тўғри чизиқ бўйлаб кесишади, бунда $r = r^* = 2$ бўлади;

б) Π_1 ва Π_2 текисликлар параллел бўлса, $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ бажарилади ҳамда $r^* = 2$; $r = 1$ бўлади.



63-*а*, *б*, *в* чизма.

в) текисликлар устма-уст тушса, $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$, $D_1 = \lambda D_2$ бўлиб, $r = r^* = 1$ бўлади.

2. Айтайлик, декарт координаталар системасида учта текислик ўзининг тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (9)$$
$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (10)$$
$$\Pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \quad (11)$$

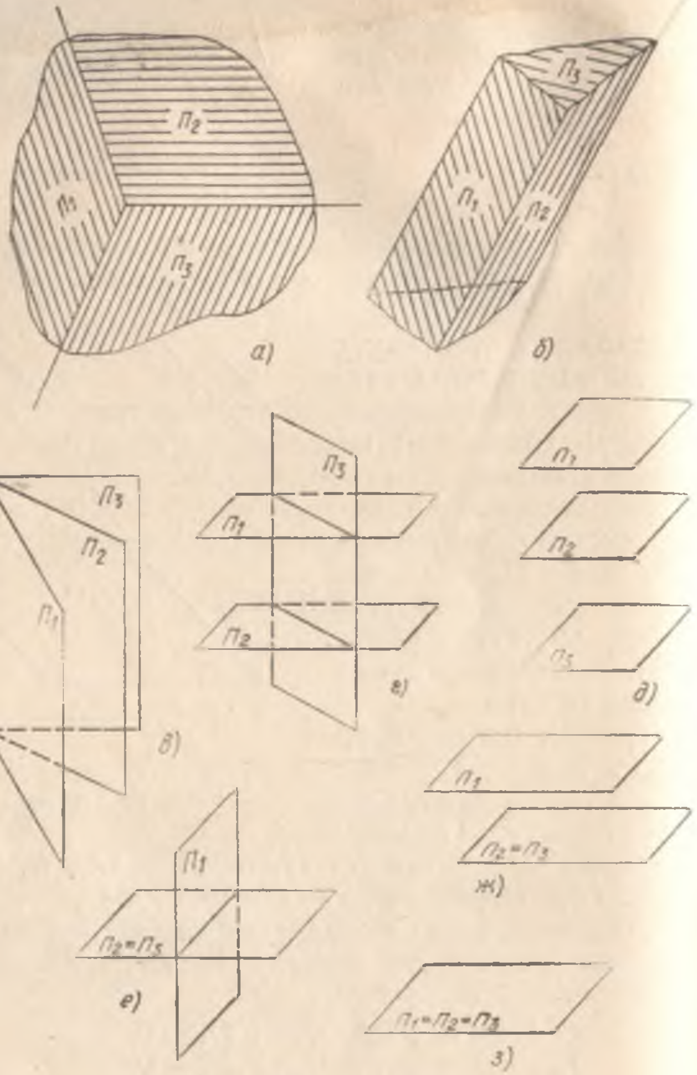
Бу учта текисликнинг фазода ўзаро жойлашувида 8 та ҳол рўй бериши мумкин (64-чизма):

1) учта текислик битта умумий нуқтага эга (64-*а* чизма);

2) текисликлар жуфт-жуфт кесишади, аммо умумий нуқтага эга эмас (64-*б* чизма);

3) Учта текислик битта тўғри чизиқ бўйича кесишади (64-*в* чизма);

4) иккита текислик ўзаро параллел бўлиб, учинчи текислик уларни кесади (64-*г* чизма);



64-*а, б, в, г, д, е, ж, з* чизма.

5) учта текислик ўзаро параллел жойлашган бўлади (64- *д* чизма);

6) иккита текислик устма-уст тушади ва учинчи текислик уларни кесади (64- *е* чизма);

7) иккита текислик устма-уст тушади ва учинчи текислик уларга параллел бўлади (64- *ж* чизма);

8) учала текислик ҳам устма-уст тушади (64- *з* чизма).

Бу ҳоллардан қайси бири юз беришини билиш учун Π_1, Π_2, Π_3 текисликларни ифодаловчи тенгламалар системасини текшириш керак (бу ҳам матрицалар ёрдамида текширилади).

Мисол. $2x+y=5$; $x+3z=16$ ва $5y-z=10$ текисликларнинг ўзаро жойлашишини аниқланг.

Ечиш. Бу текисликларнинг кесишиш-кесишмаслигини аниқлаш учун қуйидаги системанинг ечимини топамиз:

$$\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$$

Системани ечиш учун қуйидаги детерминантларни тузамиз ва уларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-30+1=-29;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-75+46=-29;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-92+5=-87;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & 16 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}=-160+15=-145,$$

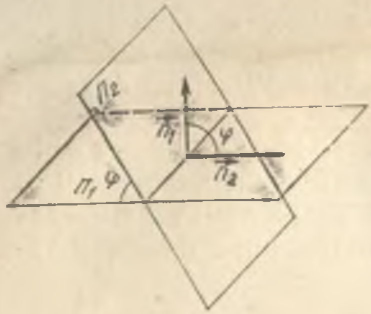
$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-29}{-29}=1,$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-87}{-29}=3,$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-145}{-29}=5.$$

Демак, текисликлар (1; 3; 5) нуқтада кесишади.

3- §. Икки текислик орасидаги бурчак



65-чизма.

Фазода декарт координаталар системасида кесишувчи икки текислик ўзининг тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (12)$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (13)$$

Икки текислик кесишганда тўртта икки ёқли бурчак ҳосил бўлиб, улардан ўзаро вертикал бўлганлари тенг бўлади (65- чизма). Демак, иккита ҳар хил бурчак ҳосил бўлиб, буларнинг бири иккинчисини тўлдиради. Шунинг учун шу икки бурчакдан бирини топиш етарлидир. Бу иккита икки ёқли бурчакдан бирининг чизиқли бурчаги берилган текисликларнинг $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ ва $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ нормал векторлари орасидаги бурчакка тенг бўлади. Π_1 ва Π_2 орасидаги бурчакни φ десак,

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \qquad (14)$$

ёки

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

(14) формуладан хусусий ҳолда иккита текисликнинг перпендикулярлик шарти келиб чиқади: Π_1 ва Π_2 текисликлар перпендикуляр бўлиши учун $\cos\varphi = 0$, яъни $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ёки $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ бўлиши керак. Икки текисликнинг параллеллик шартлари эса қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{ёки} \quad A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2. \qquad (15)$$

Мисол. Берилган $2x + 3y - z + 2 = 0$ ва $x + y + 5z - 1 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Икки текислик орасидаги бурчак формуласи

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

дан фойдаланамиз Берилишга кўра:

$$A_1 = 2, \quad B_1 = 3 \quad C_1 = -1$$

ва

$$A_2 = 1, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 5.$$

Буларни юқоридаги формулага қўямиз:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 1\cdot 5}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+5^2}} =$$

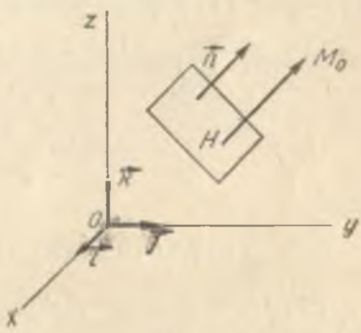
$$= \frac{2+3-5}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+25}} = \frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{27}} = 0,$$

$$\cos\varphi = 0: \ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Демак, берилган икки текислик ўзаро перпендикуляр экан.

4-§. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

Фазода декарт координаталар системасида $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта ва $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ текислик берилган бўлсин. M_0 нуқтадан текисликкача бўлган масофани ҳисоблаш талаб қилинсин. Бунинг учун берилган M_0 нуқтадан текисликка туширилган перпендикулярнинг асосини H билан белгилаймиз (66-чизма). $\rho(\overrightarrow{H, M_0}) = \rho(M_0, \Pi)$ биз излаётган масофа бўлади. Текисликнинг нормал векторни $\vec{n} = \{A, B, C\}$ ни ўтказамиз. $\overrightarrow{HM_0}$ вектор $\vec{n}$ векторга коллинеар. $\overrightarrow{HM_0}$ ва $\vec{n}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топамиз:



66-чизма.

$$\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{HM_0}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{HM_0},\vec{n}})=\rho(M_0, \Pi)\,|\vec{n}|\cdot(\pm 1).$$

Бундан

$$\rho(M_0,\ \Pi)=\frac{|\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}. \qquad (16)$$

(16) формулани координаталарда ифодалаймиз. Айтайлик, H нуқтанинг координаталари x_1, y_1, z_1 бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=$$
$$=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1).$$

H нуқта берилган текисликда ётгани учун Ax_1+By_1+ $+Cz_1+D=0$ бўлади, бундан эса $\overrightarrow{HM_0}\cdot\vec{n}=Ax_0+By_0+$ $+Cz_0+D.$

$\vec{n}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ эканини эътиборга олсак,

$$\rho(M_0,\ \Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (17)$$

формулага эга бўламиз. Бу формула берилган нуқтадан текисликкача бўлган масофани ҳисоблаш формуласидир.

Мисол. $M(3;\ -2;\ 1)$ нуқтадан $3x+6y-5z+2=0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

Ечиш. Берилишига кўра:

$$x_0=3;\quad y_0=-2;\quad z_0=1;$$
$$A=3;\quad B=6;\quad C=-5;\quad D=2,$$

Буларни (17) формулага қўямиз, у ҳолда

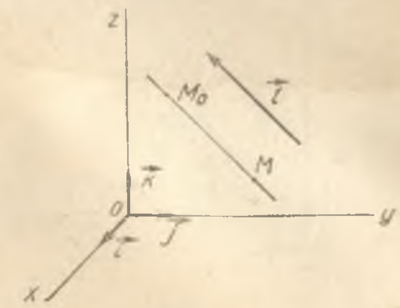
$$\rho(M,\ \Pi)=\frac{|3\cdot 3+6\cdot(-2)+(-5)\cdot 1+2|}{\sqrt{3^2+6^2+(-5)^2}}=\frac{6}{\sqrt{70}};$$

$$d=\frac{6}{\sqrt{70}}\ \text{бирлик}.$$

5-§. Тўғри чизиқнинг берилиш усуллари

Тўғри чизиққа параллел бўлган ҳар қандай вектор шу тўғри чизиқнинг *йўналтирувчи вектори* дейилади.

1. Тўғри чизиқ ўзининг бирор $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтаси ва шу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{l}=\{l_1;\ \ l_2;\ \ l_3\}$ нинг берилиши билан аниқланади (67-чизма). Тўғри чизиқнинг ихтиёрий $M(x;\ y;\ z)$ нуқтасини олайлик; $\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{l}$ векторлар коллинеар бўлгани учун:



67-чизма.

$$\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{l}\quad (t\in R). \qquad (18)$$

$\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}_0$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ десак ҳамда $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}$ ни ҳисобга олсак, (18) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{l}. \qquad (19)$$

(19) тенглама тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси деб аталади. $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0\}$ ва (10) дан қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} x&=x_0+l_1t,\\ y&=y_0+l_2t,\\ z&=z_0+l_3t. \end{aligned} \qquad (2)$$

(20) кўринишдаги тенгламалар системаси тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади.

2. (20) тенгламадан параметр t ни чиқариб,

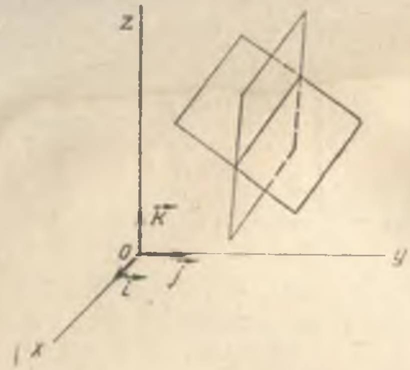
$$\frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{l_2}=\frac{z-z_0}{l_3} \qquad (21)$$

кўринишдаги тенгламаға эга бўламиз. Бу тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари дейилади.

3. Иккита $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ва $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (22)$$

кўринишда ифодаланади (бу тенглама биринчи пунктдаги M_0 нуқта ўрнига M ва $\vec{l}=\overrightarrow{MM_2}$ деб олинса, (18)



68-чизма.

муносабатдан келиб чиқади). (22) ни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t,$$
$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t. \qquad (23)$$

(23) тенгламалар системаси параметрик кўринишдаги тенгламадир.

4. Тўғри чизиқ иккита $П_1$ ва $П_2$ текисликларнинг кесишиш чизиғи сифатида ҳам берилиши мумкин, яъни $d = П_1 \cap П_2$, бу ерда

$$П_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$П_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (24)$$

Бу тенгламалар системаси $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ шарт бажарилганда тўғри чизиқни аниқлайди (68-чизма).

1-мисол. (1; 4; 3) нуқтадан ўтган ва йўналтирувчи вектори $\vec{l} = \{2; 3; 1\}$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. (21) тенгламадан фойдаланамиз. Масала шартига кўра:

$$x_0 = 1;\ y_0 = 4;\ z_0 = 3,\ l_1 = 2;\ l_2; = 3;\ l_3 = 1.$$

У ҳолда изланаётган тўғри чизиқ тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

2-мисол. $A(-3;\ 1;\ 2)$ ва $B(8;\ -2;\ 5)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

кўринишда бўлиб, унга A, B нуқталарнинг координаталарини қўйсак,

$$\frac{x+3}{8+3} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-2}{5-2}$$

$$\frac{x+3}{11}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{3}$$

тўғри чизиқ тенгламаларига эга бўламиз.

6-§. Тўғри чизиқ ва текисликнинг ўзаро жойлашуви. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак

Айтайлик, l тўғри чизиқ $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ декарт координаталар системасига нисбатан ўзининг

$$\begin{aligned} x&=x_0+l_1t,\\ y&=y_0+l_2t,\\ z&=z_0+l_3t \end{aligned} \tag{25}$$

параметрик тенгламалари, Π текислик эса

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{26}$$

тенгламаси билан берилган бўлсин. Тўғри чизиқ билан текисликнинг, ўзаро жойлашувини текшириш учун (25) даги x, y, z ларнинг қийматларини (26) га қўйиб, соддалаштирсак. тубандаги t га нисбатан тенглама ҳосил бўлади:

$$(Al_1+Bl_2+Cl_3)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0.$$

Бу тенгламани текширамиз. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) агар $Al_1+Bl_2+Cl_3\neq0$ бўлса, l тўғри чизиқ Π текислик билан кесишади.

2) агар

$$\left.\begin{aligned} Al_1+Bl_2+Cl_3&=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D&\neq0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

бажарилса, $l\cap\Pi=\varnothing$ бўлади.

3) агар

$$\left.\begin{aligned} Al_1+Bl_2+Cl_3&=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D&=0 \end{aligned}\right\}$$

бўлса, $l\subset\Pi$ бўлади.

Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб, тўғри чизиқ билан унинг шу текисликдаги ортогонал проекцияси орасидаги бурчакка айтилади. (25) тўғри чизиқ билан (26) текислик орасидаги бурчак (69-чизма)

$$\sin\theta = \frac{|Al_1 + Bl_2 + Cl_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}} \qquad (28)$$

формула ёрдамида топилади.

Берилган текисликнинг берилган тўғри чизиққа параллеллик шарти

$$Al_1 + Bl_2 + Cl_3 = 0, \qquad (29)$$

перпендикулярлик шарти эса

$$\frac{A}{l_1} = \frac{B}{l_2} = \frac{C}{l_3} \qquad (30)$$

кўринишда ифодаланади.

Энди текислик ва тўғри чизиққа доир машқлар бажаришда зарур бўладиган тенгламаларни келтириб ўтамиз.

1) берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, берилган $\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3}$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламаси:

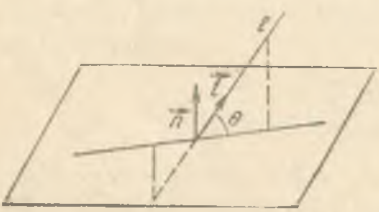
$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2} = \frac{z-z_1}{l_3}. \qquad (31)$$

2) берилган $M_1(x_1\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, берилган $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}. \qquad (32)$$

3) берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, берилган $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликка параллел бўлган текисликнинг тенгламаси:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0. \qquad (33)$$



69-чизма.

4) Берилган $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқта орқали ўтиб, $\frac{x-x'}{l_1} = \frac{y-y'}{l_2} = \frac{z-z'}{l_3}$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси:

$$l_1(x-x_1)+l_2(y-y_1)+l_3(z-z_1)=0. \qquad (34)$$

1-мисол. Берилган $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$ тўғри чизиқ ва $2x+y-2z-6=0$ текислик орасидаги бурчакни ва уларнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак

$$\sin\theta=\frac{|Al_1+Bl_2+Cl_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}}$$

формула ёрдамида аниқланади. Шунинг учун берилган $A=2$; $B=1$; $C=-2$; $l_1=1$; $l_2=2$; $l_3=-2$ ларни бу формулага қўйиб топамиз:

$$\sin\theta=\frac{2\cdot1+1\cdot2+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{2+2+4}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+4+4}}=\frac{8}{3\cdot3}=\frac{8}{9}.$$

Демак, $\theta=\arcsin\frac{8}{9}$.

Энди уларнинг кесишиш нуқтасини топамиз, унинг учун тўғри чизиқ тенгламасини параметрик кўринишга келтирамиз:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}=t,$$

$$\frac{x-1}{1}=t;\ \frac{y-1}{2}=t;\ \frac{z-1}{-2}=t,$$

$$\left.\begin{aligned} x&=t+1,\\ y&=2t+1,\\ z&=-2t+1\end{aligned}\right|\ (\alpha)$$

Буни текислик тенгламасига қўямиз:

$$2(t+1)+(2t+1)-2(-2t+1)-6=0;$$

$$2t+2+2t+1+4t-2-6=0;$$

$$8t+3-8=0;$$

$$8t-5=0;\quad t=\frac{5}{8}.$$

t нинг бу қийматини (α) га қўямиз:

$$x=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8};$$

$$y = \frac{10}{8} + 1 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4};$$

$$z = -\frac{10}{8} + 1 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Демак, берилган тўғри чизиқ ва текисликнинг кесишиш нуқтаси $\left(\frac{13}{8};\ \frac{9}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$ дан иборат.

2-мисол. $M(-1;\ 3;\ 0)$ нуқтадан ўтиб, $2x - y - 2z - 4 = 0$ текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ нуқтадан ўтиб, $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

формула ёрдамида аниқланади. Демак,

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-0}{-2}$$

ёки

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

7-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Иккита тўғри чизиқ $R = \{0;\ \vec{i};\ \vec{j}\}$ тўғри бурчакли координаталар системасида ўзининг тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$l:\ \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2} = \frac{z - z_0}{l_3},$$

$$l' = \frac{x - x_0'}{l_1'} = \frac{y - y_0'}{l_2'} = \frac{z - z_0'}{l_3'}. \qquad (35)$$

Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб, бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтилади.

l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{l} = \{l_1;\ l_2;\ l_3\}$, l' тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{l'} = \{l_1';\ l_2';\ l_3'\}$ бўлсин. $\vec{l'}$ ва $\vec{l}$ векторлар орасидаги бурчакни φ десак, у l ва l' тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни

беради. Шунинг учун икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак икки вектор орасидаги бурчак каби

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}\cdot\vec{l'}}{|\vec{l}|\,|\vec{l'}|} = \frac{l_1 l_1' + l_2 l_2' + l_3 l_3'}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2 + l_3'^2}} \qquad (37)$$

формула ёрдамида аниқланади.

(37) формуладан эса қуйидаги келиб чиқади:

$$l \perp l' \Longleftrightarrow \vec{l}\cdot\vec{l'} = 0 \Rightarrow l_1 \cdot l_1' + l_2 l_2' + l_3 l_3' = 0.$$

Мисол. Йўналтирувчи векторлари мос равишда

$$\vec{l} = \{10;\ 2;\ 11\}; \qquad \vec{l'} = \{3;\ 12;\ 4\}$$

бўлган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Бу векторлар орасидаги бурчак тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка тенг. Демак, берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак (37) формулага кўра қуйидагича аниқланади:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}\cdot\vec{l'}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{l'}|} = \frac{10\cdot 3 + 2\cdot 12 + 11\cdot 4}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2}\sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2}} = \frac{98}{195},$$

$$\varphi = \arccos\frac{98}{195} \approx 59°50'.$$

Машқлар

1. Декарт координаталар системасида $4x + y - 2z - 6 = 0$ текисликни ясанг.
2. $M(4;\ -2;\ 6)$ нуқтадан ўтиб, координата ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи текислик тенгламасини ёзинг.
3. $M_1(-1;\ 3;\ 2)$ ва $M_2(2;\ 7;\ 4)$ нуқталар берилган. M_1 нуқтадан ўтувчи ва $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2}$ векторга перпендикуляр текислик тенгламасини ёзинг ва текисликни ясанг.
4. $3x - 2y + 6z + 4 = 0$ ва $2x + y - 2z + 3 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг,
5. $(3;\ 5;\ 2)$ нуқтадан ўтувчи ва $x - 2y + 3z - 8 = 0$ текисликка параллел текислик тенгламасини топинг.
6. Ox ўқдан ва $M(1;\ -4;\ 3)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг ва текисликни ясанг.
7. $M_1(2;\ 3;\ 5)$ ва $M_2(0;\ 4;\ 6)$ нуқталардан ўтувчи ва Oy ўққа параллел текислик тенгламасини ёзинг.

11–10

8. Oz ўққа параллел, Ox ва Oy ўқларидан мос равишда $a=4$ ва $b=6$ кесмалар ажратувчи текислик тенгламасини ёзинг. Бу текисликни ясанг.

9. Қуйидаги текисликларнинг кесишиш нуқтасини топинг:

$$2x-4y+3z-1=0; \quad x-2y+4z-3=0$$

ва

$$4x+y+6z-2=0.$$

10. $x+2y-2z+4=0$ ва $2x+y+2z-5=0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

11. $A(-2;\ 3;\ 1)$ ва $B(3;\ 4;\ 2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

12. $A(1;\ 5;\ 3)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{p}=\{2;\ 1;\ 4\}$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

13. Ушбу
$$x=z-5$$
$$y=2+4x$$
тўғри чизиқни ясанг. Унинг xOy ва xOz текисликлардаги изларини топинг.

Кўрсатма. Тўғри чизиқ тенгламасида $z=0$ деб олинг.

14. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{2}$ тўғри чизиқ билан $4x-2y+4z=4$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

15. Ушбу
$$x=3t,$$
$$y=t-2,$$
$$z=t-1$$
тўғри чизиқнинг $x+3y-2z=4$ текислик билан кесишиш нуқтасини топинг.

16. Берилган $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$ ва $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-3}{1}$ тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётишини кўрсатинг.

17. $M(3;\ 1;\ -2)$ нуқтадан ўтиб, $x+3y-2z=0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини ёзинг.

18. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг:

$$\begin{cases} 2x-5y+2z+4=0, \\ x+4y-3z-2=0 \end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases} 3x+2y-z-3=0, \\ 2x-y+3z+4=0. \end{cases}$$

Кўрсатма: Берилган тўғри чизиқларнинг ҳар бирининг йўналтирувчи векторини текисликлар нормал векторларининг вектор кўпайтмаси сифатида аниқлаш керак.

19. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ тўғри чизиқдан ўтувчи ва $x+2y-3z+5=0$ текисликка перпендикуляр текисликнинг тенгламасини ёзинг.

20. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{4}$ тўғри чизиқдан ва $F(2;\ 1;\ 0)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

IX БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

1-§. Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси

Бирор декарт координаталар системасида координаталари қуйидаги тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами иккинчи тартибли сирт дейилади:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \quad (1)$$

бу тенгламадаги a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиши керак. Агар бирор сирт декарт системасида 2-даражали тенглама билан берилган бўлса, бошқа системада ҳам 2-даражали тенглама билан берилади. Биз оддий кўринишдаги иккинчи даражали тенгламаларнинг баъзиларини қараймиз.

2-§. Сфера тенгламаси. Сферик сирт

Сферанинг $Oxyz$ тўғри бурчакли декарт координаталар системасидаги тенгламасини тузамиз. Айтайлик, $(a;\ b;\ c)$ нуқта сферанинг маркази, R эса унинг радиуси бўлсин. Сферанинг ихтиёрий нуқтаси $M(x;\ y;\ z)$ унинг маркази бўлган $(a;\ b;\ c)$ нуқтадан R масофада жойлашиш хоссасидан фойдалансак, сфера тенгламаси қуйидагича бўлади (айлана тенгламасига ўхшаш келтириб чиқарилади):

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \quad (2)$$

(2) тенглама маркази $(a;\ b;\ c)$ нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган *сфера тенгламаси* дейилади. Агар

$a=b=c=0$ бўлса, (2) тенгламадан маркази координаталар бошида, радиуси R га тенг бўлган сферанинг ушбу тенгламасига эга бўламиз:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Энди (2) ни қуйидагича (очиб) ёзамиз:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+$$
$$+a^2+b^2+c^2-R^2=0, \tag{3}$$

бу ердан сферанинг иккинчи тартибли сирт эканини кўрамиз;

Энди сиртнинг умумий тенгламаси (1) да $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ ва $a_{11}=a_{22}=a_{33}$ деб олинса, у ҳолда

$$a_{11}x^2+a_{11}y^2+a_{11}z^2+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{4}$$

га эга бўламиз ва бу тенглама сферани ифода қилишини текширамиз. (3) ни $a_{11}\neq 0$ га бўламиз ва

$$\frac{2a_{14}}{a_{11}}=A; \quad \frac{2a_{24}}{a_{11}}=B; \quad \frac{2a_{34}}{a_{11}}=C; \quad \frac{a_{44}}{a_{11}}=D$$

белгилашларни киритиб,

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \tag{5}$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз.

(5) тенгламани ҳам бироз шакл ўзгартиришлардан кейин ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2-4D) \tag{6}$$

ёки

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2. \tag{7}$$

(7) дан кўринадики, $A^2+B^2+C^2-4D\geqslant 0$ бўлганда (4) тенглама маънога эга бўлади. $A^2+B^2+C^2-4D>0$ бўлса, (7) тенглама маркази $\left(-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}; -\frac{C}{2}\right)$ нуқтада ва радиуси $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ бўлган

сферани ифодалашини билдиради. Агар $A^2+B^2+C^2-4D=0$ бўлса, (7) тенглама $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$ кўринишда бўлиб, у фақат битта $\left(-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}; -\frac{C}{2}\right)$ нуқтани ифодалайди. Демак, (5) тенглама фақатгина $A^2+B^2+C^2-4D>0$ шартда сферани аниқлайди.

Мисол. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z+6=0$ сферанинг маркази ва радиусини топинг.

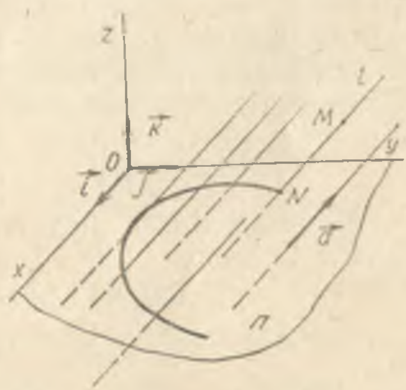
Ечиш. Берилган тенгламани $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-6)^2=R^2$ кўринишга келтирамиз. Бунинг учун тенгламада x, y, z ли ҳадларни олиб, уларни тўла квадратга келтирамиз:

$$x^2-2x+y^2+4y+z^2+8z+6=0\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2+6-1-4-16=0\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=15 \text{ ёки}$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=(\sqrt{15})^2.$$

Демак, сферанинг маркази $(1; -2; -4)$ нуқтада, радиуси эса $R=\sqrt{15}$ га тенг.

3-§. Иккинчи тартибли цилиндрик сирт

Айтайлик, Π текисликда γ иккинчи тартибли чизиқ ва бу текисликка параллел бўлмаган d тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бизга маълумки, d тўғри чизиқ ўзига параллел бўлган ε тўғри чизиқлар боғламини аниқлайди. Шу ε боғламнинг γ чизиқ билан кесишадиган тўғри чизиқларига тегишли бўлган фазонинг Φ нуқталар тўплами иккинчи тартибли *цилиндрик* сирт дейилади, бунда γ чизиқ унинг йўналтирувчиси, γ чизиқни кесувчи ε боғламнинг тўғри чизиқлари Φ цилиндрик сиртнинг ясовчилари дейилади.



70-чизма.

Ф цилиндрик сиртнинг $R = \{0,\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ координаталар системасидаги тенгламасини келтириб чиқарамиз.

Ушбу $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ $(a_3 \neq 0)$ вектор d тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлсин (70-чизма), l чизиқ эса берилган координаталар системасида

$$F(x;\ y) = 0 \tag{8}$$

тенглама билан аниқланган бўлсин. Ихтиёрий $M(x;\ y;\ z) \in Ф$ нуқтани оламиз. Шу M нуқтадан ўтган ясовчининг xOy текислик билан кесишган нуқтаси $N(x_1;\ y_1;\ 0)$ бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{MN} = \{x_1 - x;\ y_1 - y;\ -z\}$ ва $\vec{a}$ вектор билан $\overrightarrow{MN}$ вектор коллинеар бўлгани учун: $\overrightarrow{MN} = t \cdot \vec{a}$, бундан

$$x_1 = x + a_1t;\ y_1 = y + a_2t;\ 0 = z + a_3t;$$

$$x_1 = x - \frac{a_1}{a_3}z;\ y_1 = y - \frac{a_2}{a_3}z. \tag{9}$$

$$(8),\ (9) \Rightarrow F\left(x - \frac{a_1}{a_3}z;\ y - \frac{a_2}{a_3}z\right) = 0. \tag{10}$$

(10) — цилиндрик сиртнинг тенгламасидир. Агар иккинчи тартибли цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси эллипсдан иборат бўлса, у эллиптик цилиндр, гиперболадан (параболадан) иборат бўлса, гиперболик (параболик) цилиндр дейилади. Агар Ф цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси жуфт кесишувчи (параллел) тўғри чизиқлардан иборат бўлса, сирт жуфт кесишувчи (мос равишда параллел) текисликлардан иборат бўлади.

Мисол. Йўналтирувчиси xOy текисликда $x^2 + 3xy - 2y^2 - x + y + 1 = 0$ тенглама билан аниқланувчи, ясовчилари $\{1;\ 2;\ 1\}$ векторга параллел бўлган цилиндрик сирт тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Қуйидагиларга эгамиз:

$$F(x;\ y) = x^2 + 3xy - 2y^2 - x + y + 1 = 0;$$

$$\vec{a} = \{1;\ 2;\ 1\};\ a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 1.$$

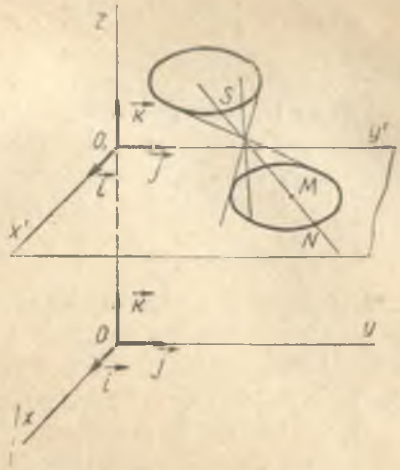
У ҳолда изланаётган сирт тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(x - z,\ y - 2z) = (x - z)^2 + 3(x - z)(y - 2z) -$$
$$- 2(y - 2z)^2 - (x - z) + (y - 2z) + 1 = 0$$

ёки

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 3xy - 8xz + 5yz - x + y - z + 1 = 0.$$

4-§. Иккинчи тартибли конус сирт



71-чизма.

Айтайлик, Π текисликда γ иккинчи тартибли чизиқ ва $s\notin\Pi$ нуқта берилган бўлсин. Бизга маълумки, s нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқлар $\varepsilon(s)$ тўғри чизиқлар боғламини аниқлайди. $\varepsilon(s)$ боғламнинг γ чизиқ билан кесувчи тўғри чизиқларига ёки γ га нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлган тўғри чизиқларга тегишли бўлган фазонинг нуқталар тўплами Ф иккинчи тартибли конус сирт (ёки конус) дейилади. Бунда γ — сиртнинг йўналтирувчиси, $\varepsilon(S)$ ясовчилар, S эса конус сиртнинг учи дейилади.

Конус сирт (конус) тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун xOy координата текислиги Π текисликка параллел бўлган

$$R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$$

координаталар системасини оламиз. Айтайлик, текислик Oz ўқини $O(0;\ 0;\ h)$ нуқтада кессин ҳамда Ф конус сиртининг учи $S(x_0;\ y_0;\ z_0)$ координаталарга эга бўлсин (71-чизма). Агар γ иккинчи тартибли чизиқнинг тенгламаси

$$F(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}$$

кўринишда бўлса, конус сиртнинг тенгламаси тубандаги кўринишда бўлади:

$$G(x,\ y,\ z)=\left(\frac{z-z_0}{h-z_0}\right)^2\cdot F\left\{x_0+\frac{x-x_0}{z-z_0}(h-z_0),\right.$$
$$\left.y_0+\frac{y-y_0}{z-z_0}(h-z_0)\right\}. \qquad (11)$$

Агар Ф конус сиртнинг учи R координаталар системасининг боши билан устма-уст тушса, у ҳолда $x_0=$ $=y_0=z_0=0$, $h\neq 0$ бўлиб, тенглама

$$a_{11}x^2+2a_{12}y+a_{22}y^2+2\frac{a_{10}}{h}x^2+2\frac{a_{20}}{h}yz+\frac{a_{00}}{h_2}z^2=0$$

кўринишга эга бўлади.

Мисол. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида конус сиртнинг учи $S(0; 0; 3)$ нуқтада, йўналтирувчиси эса

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=1 \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланган бўлиб, xOy текисликка параллел тенгламаси $z=1$ бўлган Π текисликда ётади. Π текислик эса Oz ўқини $O'(0; 0; 1)$ нуқтада кесади. Конус сирт тенгламасини тузинг.

Ечиш. Йўналтирувчи Π текисликда $x^2+y^2-1=0$ тенглама билан аниқланади. Берилганларга кўра:

$$F(x, y)=x^2+y^2-1;\ h=1,\ z_0=3.$$

У ҳолда (11) формуладан қуйидагига эга бўламиз:

$$G(x, y, z)=\frac{(z-3)^2}{4}\left\{\left[\frac{x}{z-3}(-2)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{y}{z-3}(-2)\right]^2-1\right\}=0$$

ёки

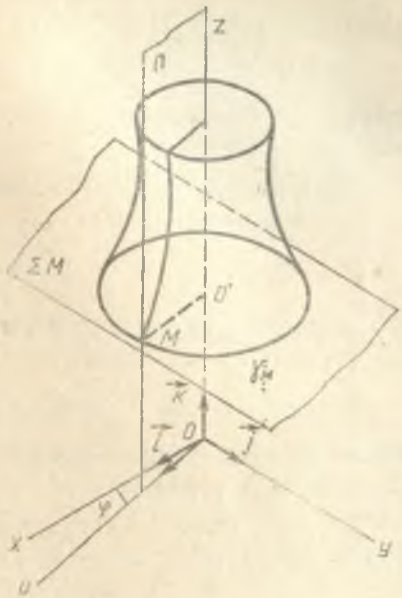
$$x^2+y^2-\frac{1}{4}(z-3)^2=0.$$

5-§. Айланма сиртлар

Айтайлик, Π текисликда s тўғри чизиқ ва γ эгри чизиқ берилган бўлсин. Фазода шундай $R=\{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ ортонормал репер оламизки, унинг Oz ўқи s тўғри чизиқ билан устма-уст тушсин. Π текисликда эса ортонормал Ouz координаталар системасини киритамиз, бунда $Ou=\Pi\cap xOy$. Бу координаталар системасига нисбатан γ чизиқ $u=f(z)$ тенглама билан аниқланади. Ox ва Ou ўқлар орасидаги мусбат бурчакни φ билан белгилаймиз ва $M\in\gamma$ оламиз. φ бурчак $[0; 2\pi)$ оралиқда ўзгарганда M нуқта маркази $O'\in Oz$ нуқтада Σ_M текисликда ётувчи $O\varphi$ ўққа перпендикуляр бўлган γ_M айлана ясайди (72-чизма). У ҳолда $F=\bigcup\limits_{M\in\gamma}\gamma_M$ фигура *айланма* сирт дейилади. s тўғри чизиқ айланиш ўқи дейилади. F сиртнинг айланиш ўқи орқали ўтувчи текисликлар билан кесишишидан ҳосил бўлган чизиқлар меридианлар дейилади. Айланиш ўқига параллел текисликлар билан F нинг кесишишидан ҳосил бўлган чизиқлар параллеллар дейилади. Агар ихтиёрий $M \in F$ нуқтанинг координаталари $(x; y; z)$ бўлса, у ҳолда

$$x = u\cos\varphi,$$
$$y = u\sin\varphi, \qquad (12)$$
$$u = f(z)$$

бўлади.



72-чизма.

$$(12) \Longrightarrow x^2 + y^2 = f^2(z). \qquad (13)$$

Шундай қилиб, (13) тенглама R реперда $\begin{cases} x = f(z) \\ y = 0 \end{cases}$ тенгламалар билан берилган γ чизиқнинг Oz ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасидир. Шунга ўхшаш, $x^2 + z^2 = y^2(x)$ тенглама $\begin{cases} y = y(x), \\ z = 0 \end{cases}$ тенгламалар билан берилган γ чизиқнинг Oz ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасидир. $x^2 + y^2 = h^2(y)$ эса $\begin{cases} x = h(y), \\ z = 0 \end{cases}$ тенгламалар билан берилган чизиқнинг Oy ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасидир.

1-мисол. $y = x$ тўғри чизиқнинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини тузинг.

Ечиш. Тўғри чизиқ тенгламасидаги y ни $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ билан алмаштирамиз:

$$x = \pm\sqrt{y^2 + z^2} \text{ ёки } y^2 + z^2 - x^2 = 0,$$

бу изланаётган айланма сирт тенгламасидир. Айланма сирт доиравий конус сирт экани равшан.

2-мисол. $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт тенгламасини тузинг.

Ечиш. Эллипс тенгламасидаги z ни $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ билан алмаштирамиз:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1.$$

Бу изланган сирт тенгламаси бўлиб, $b=c$ бўлганда бу сирт сферага айланади.

3-мисол. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболанинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган тенгламада x ни $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ билан алмаштириб, изланаётган сиртни ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

6-§. Эллипсоид

γ эллипснинг симметрия ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган Ф сирт айланма *эллипсоид* дейилади.

Айтайлик, γ эллипс $R=\{0;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}$ ортонормал репернинг xOz текислигида ётган бўлсин, у ҳолда $R_1=\{0;\ \vec{i};\ \vec{k}\}$ реперга нисбатан

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\Longrightarrow z^2=c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

тенгламага эга бўлади. γ эллипснинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган Ф$'$ айланма эллипсоиднинг тенгламаси эса тубандагича бўлади:

$$y^2+z^2=c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Longrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (14)$$

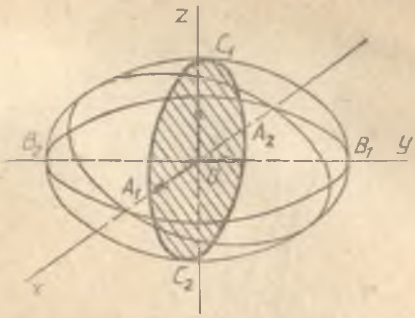
xOz текислигига нисбатан f сиқишни бажарамиз, яъни $x'=x;\ y'=ky;\ z'=z$ деймиз. У ҳолда R реперга нисбатан Ф $=f$(Ф$'$) эллипсоид тенгламасига эга бўламиз:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{c^2k^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

$k^2 \cdot c^2 = b^2$ деб белгилаб ҳамда координаталарни олдингидай қилиб олсак,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (15)$$

тенгламага эга бўламиз. (15) тенглама эллипсоиднинг каноник тенгламаси бўлиб, a, b, c лар эллипсоиднинг ярим ўқларидир. Эллипсоид учун берилган R репернинг координата текисликлари симметрия текисликлари, координата ўқлари эса симметрия ўқлари бўлиб хизмат қилади. Симметрия ўқлари эллипсоиднинг *ўқлари* дейилади. Эллипсоиднинг ўқлар билан кесишиш нуқталари унинг *учлари* дейилади. Симметрия маркази эллипсоиднинг *маркази* дейилади (73- чизма).



73-чизма.

Агар эллипсоидни xOy текислигига параллел бўлган $z = h$ текислик билан кессак, кесим тубандаги тенглама билан ифодаланади:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2},$$

бунда, агар $|h| < c$ бўлса, кесим эллипсни, агар $|h| > c$ бўлса, кесим бўш тўпламни, агар $|h| = c$ бўлса, кесим эллипсоиднинг учини ифодалайди. Шунга ўхшаш, эллипсоидни xOz ва yOz координата текисликларига параллел текисликлар билан кесиш натижасида (кесимда) эллипс, бўш тўплам ёки эллипсоид учи ҳосил бўлишини кўриш мумкин.

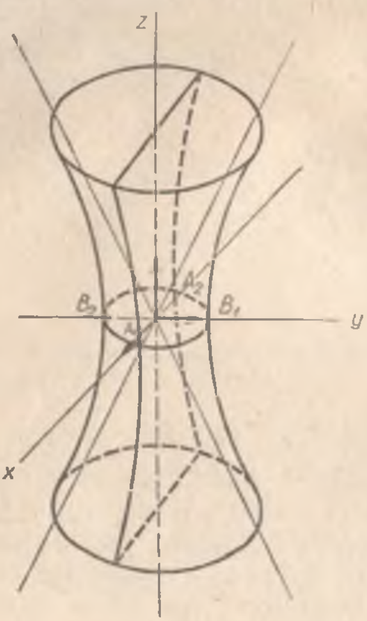
Мисол. Ярим ўқлари мос равишда 2, 3, 7 га тенг бўлган эллипсоид тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масала шартида берилганларга кўра $a = 2$; $b = 3$; $c = 7$. У ҳолда эллипсоид тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{49} = 1.$$

7-§. Гиперболоидлар

Дастлаб, гиперболоидлар икки хил — бир паллали гиперболоид ва икки паллали гиперболоид бўлишини айтиб ўтамиз.



74-чизма.

1. γ гиперболанинг ўзининг мавҳум ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган Φ' сирт бир паллали айланма *гиперболоид* дейилади. Фазони айланиш ўқи орқали ўтувчи Π текисликка f сиқишда Φ' бир паллали айланма гиперболоиднинг олган вазияти Φ *бир паллали* гиперболоид дейилади. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (16)$$

кўринишдаги тенглама бир паллали гиперболоиднинг каноник тенгламаси дейилади. (16) тенгламадан кўринадики, R репернинг координата текисликлари бир паллали гиперболоиднинг симметрия текисликлари ҳисобланади. Ox ва Oy ўқлар бир паллали гиперболоидни кесади ва унинг ҳақиқий ўқлари дейилади. Oz ўқ эса бир паллали гиперболоид билан кесишмайди, шунинг учун у мавҳум ўқ дейилади. Бир паллали гиперболоиднинг симметрия ўқлари билан кесишиш нуқталари унинг учлари дейилади. Координата боши (0 нуқта) бир паллали гиперболоиднинг симметрия маркази бўлиб, унинг маркази дейилади. a, b сонлари бир паллали гиперболоиднинг ҳақиқий ярим ўқлари, c эса унинг мавҳум ярим ўқи дейилади (74- чизма). Гиперболоидни xOy текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

эллипс ҳосил бўлади. Шунга ўхшаш, гиперболоидни xOz, yOz текисликлар билан кессак, кесимда

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases} \quad \text{ва} \quad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}$$

гиперболалар ҳосил бўлади. Агар гиперболоидни xOy текисликка параллел бўлган $x=h$ текислик билан кессак, кесимда

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=h \end{cases}$$

эллипс ҳосил бўлади. Бу эллипснинг ярим ўқлари:

$$\tilde{a}=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}; \qquad \tilde{b}=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}.$$

$h=0$ бўлса, эллипснинг ярим ўқлари ўзининг минимал қийматига эга бўлади, яъни $\tilde{a}=a$; $\tilde{b}=b$. Бир паллали гиперболоидни Oy ва Ox ўқига перпендикуляр бўлган текисликлар ($z=h$; $y=h$) билан кессак, кесимда γ' ва γ'' чизиқлар ҳосил бўлади:

$$\gamma': \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2} \\ y=h \end{cases}$$

ва

$$\gamma'': \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}. \\ x=h \end{cases}$$

Агар $|h|\neq a$; $|h|\neq b$ бўлса, у ҳолда γ' ва γ'' лар гиперболаларни ифодалайди. Агар $|h|=b$ бўлса, у ҳолда γ' кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтини, $|h|=a$ бўлса, γ'' кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтини ифодалайди.

2. γ гиперболани ўзининг ҳақиқий ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт Φ' *икки паллали* айланма гиперболоид дейилади. Фазони айланиш ўқи орқали ўтувчи Π текисликка f сиқишда Φ' нинг олган вазияти Φ икки паллали гиперболоид дейилади. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{17}$$

тенглама икки паллали гиперболоиднинг каноник тенгламаси дейилади (75-чизма). (17) тенгламадан кўринадики, координата текисликлари икки паллали гипер-

75-чизма.

болоид учун симметрия текисликлари ҳисобланади. Ox ўқи Ф сиртни икки ҳақиқий нуқтада кесади, шунинг учун унга ҳақиқий ўқ дейилади. Oy; Oz ўқлар икки паллали гиперболоид билан умумий ҳақиқий нуқталарга эга эмас, шунинг учун улар мавҳум ўқлар дейилади. Икки паллали гиперболоиднинг ўқлар билан кесишиш нуқталари, унинг учлари дейилади. У иккита ҳақиқий учга эга.

a сон икки паллали гиперболоиднинг ҳақиқий ярим ўқи, b ва c лар эса мавҳум ярим ўқлари дейилади. Икки паллали гиперболоидни Ox ўққа перпендикуляр бўлган текислик билан кессак, кесимда

$$\gamma''': \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{h^2}{a^2} - 1, \\ h = x \end{cases}$$

ҳосил бўлади.

Агар $|h| > a$ бўлса, γ''' эллипсдан иборат бўлади; агар $|h| < a$ бўлса, у ҳолда $\gamma''' = \varnothing$, агар $|h| = a$ бўлса, γ''' нуқтадан иборат бўлади. Шунга ўхшаш, икки паллали гиперболоидни мавҳум ўқларга перпендикуляр бўлган текисликлар билан кессак, кесимда гипербола бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

1-мисол. $x^2 - 7y^2 - 7z^2 + 49 = 0$ тенглама билан берилган сиртнинг шаклини аниқланг.

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини -49 га бўламиз, у ҳолда

$$-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2 + z^2}{7} = 1.$$

Демак, берилган тенглама айланиш ўқи Ox бўлган бир паллали гиперболоиднинг тенгламасидир.

2-мисол. Ушбу $3x^2 + 4y^2 - 8z^2 + 24 = 0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

Ечиш. Тенгламанинг иккала томонини 24 га бўлиб, уни

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{3} = -1$$

кўринишга келтирамиз. Бу тенглама ярим ўқлари $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3}$ бўлган уч ўқли икки паллали гиперболоидни тасвирлайди.

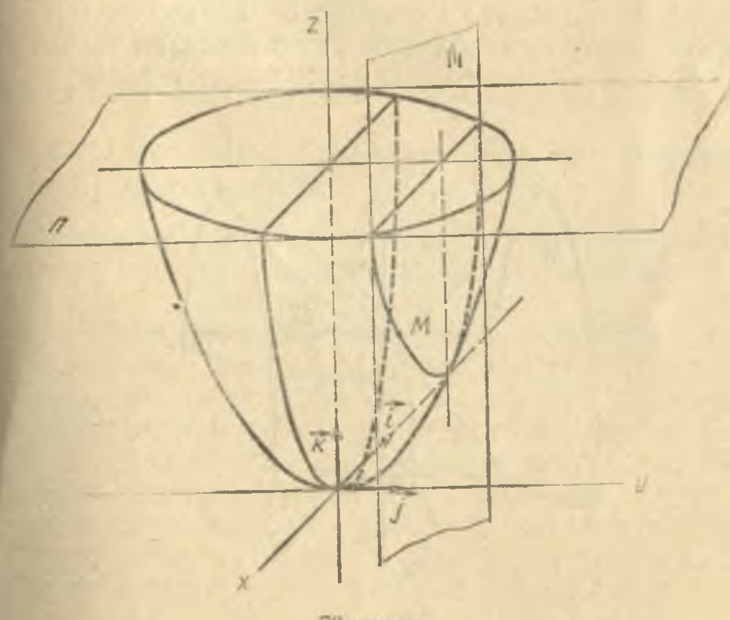
8-§. Параболоидлар

Параболанинг ўз ўқлари атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт *айланма параболоид* дейилади. Эллиптик ва гиперболик параболоидлар айланиш ўқи орқали ўтувчи Π_1 текисликка f сиқишни бажариш натижасида ҳосил бўлади.

1. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{18}$$

тенглама билан тасвирланган сирт *эллиптик параболоид* деб аталади (76-чизма). (18) тенгламадан кўри-



76-чизма.

надики, yOz ва xOz текисликлар эллиптик параболоид учун симметрия текисликлари ҳисобланади. Oz ўқи эллиптик параболоиднинг симметрия ўқи ҳисобланиб, унинг ўқи дейилади. Координаталар системасининг боши эллиптик параболоиднинг координата ўқлари билан кесишган нуқтаси бўлиб, унинг учи дейилади. Эллиптик параболоидни унинг ўқига перпендикуляр бўлган $z = h$ текислик билан кессак, кесим тубандаги тенглама билан аниқланади:

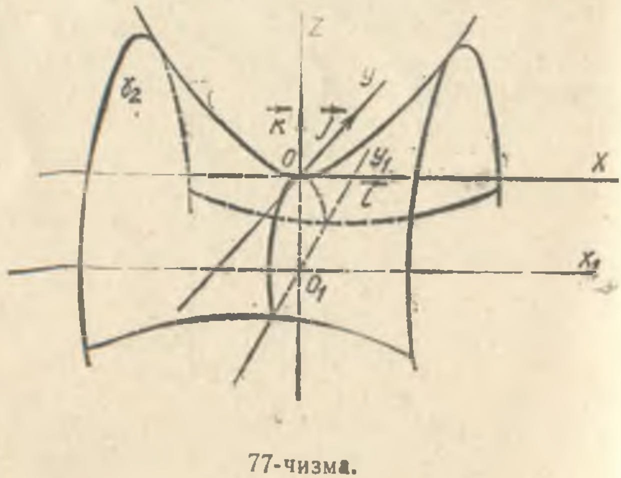
$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h; \end{cases}$$

агар $h > 0$ бўлса, γ — эллипс, агар $h < 0$, у ҳолда $\gamma = \varnothing$, агар $h = 0$ бўлса, γ кесим 0 учдан иборат бўлади. Эллиптик параболоидни Ox, Oy ўқларга перпендикуляр бўлган $x = h$ ва $y = h$ текисликлар билан кессак, кесимда парабола ҳосил бўлади.

2.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad (19)$$

тенглама билан тасвирланган сирт *гиперболик параболоид* дейилади. (19) тенглама унинг каноник тенгламасидир (77- чизма). Гиперболик параболоидни xOy текисликка параллел бўлган $z = h$ текислик билан кессак, кесим қуйидаги тенглама билан аниқланади:



77-чизма.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

$h > 0$ бўлганда, бу тенглама (чизик) ҳақиқий ўқи $z = h$ текисликда ва Ox ўққа параллел гиперболани, $h < 0$ бўлганда эса, ҳақиқий ўқи Oy ўққа параллел гиперболани тасвирлайди. $h = 0$ бўлганда, кесим иккита кесишувчи тўғри чизиқлар жуфтини аниқлайди. Шунга ўхшаш гиперболик параболоидни Oy ва Ox ўқларга перпендикуляр текисликлар билан кессак, кесимда парабола ҳосил бўлишини кўриш мумкин.

1-мисол. $3x^2 + 2y^2 = 24z$ тенглама билан берилган сирт шаклини аниқланг.

Ечиш. Сирт шаклини аниқлаш учун тенгламанинг ҳар иккала томонини 24 га бўламиз. У ҳолда $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = z$ кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани $z = \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{y^2}{2 \cdot 6}$ кўринишда ёзсак, берилган тенглама эллиптик параболоидни тасвирлашини кўрамиз.

2-мисол. $x^2 - y^2 = 6z$ тенглама билан берилган сиртнинг шаклини аниқланг.

Ечиш. Берилган сирт тенгламасини $z = \frac{x^2}{2 \cdot 3} - \frac{y^2}{2 \cdot 3}$ кўринишда ёзиш мумкин. Демак, берилган тенглама гиперболоик параболоидни тасвирлар экан.

9-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг техникада қўлланилиши

Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизиқли ясовчиларга эга бўлишидан улардан техниканинг турли соҳаларида, қурилишда фойдаланилади. Агар тўғри чизиқнинг ҳаракати натижасида сирт ҳосил қилиш мумкин бўлса, сирт тўғри чизиқли сирт дейилади. Конус, цилиндр, шунингдек, бир паллали гиперболоид ва гиперболоик параболоидлар ҳам тўғри чизиқли сиртлардир.

СССР Фанлар Академиясининг фахрий аъзоси Владимир Григорьевич Шухов лойиҳасига кўра Москва телевизион мачтаси қурилишида бир паллали айланма гиперболоид шаклидан фойдаланилди. Бу шаклда ишланган мачта мустаҳкам бўлиб, ишлаш учун енгил бўлади.

Эллиптик параболоид шаклидаги ҳар хил кўзгулар нурларни кучли ўзгартиради. Нурлар дастасининг таъсирини бир нуқтага тўплаш ёки параллел нурлар олиш учун ана шу хоссадан фойдаланилади.

Машқлар

1. Қуйидаги сфераларнинг маркази ва радиусини аниқланг:

а) $x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 81;$

б) $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 72.$

2. Ушбу $x^2 - 4x + y^2 - 4y - z^2 + 8z + 7 = 0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламасини ёзинг.

4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ эллипсоиднинг энг катта доиравий кесими юзини топинг.

5. Ушбу $25x^2 + 3y^2 - 15z^2 - 75 = 0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ бир паллали гиперболоиднинг ҳақиқий ярим ўқларини топинг.

7. Ушбу $4x^2 + 25y^2 + 10z^2 - 100 = 0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди. Сирт тенгламасини каноник кўринишдаги тенгламага келтиринг.

8. Ушбу $8z = 4x^2 + y^2$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди? Уни ясанг.

9. Ушбу $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{15} - \frac{z^2}{10} = 1$ тенглама қандай сиртни аниқлайди? Унинг $z = 1$ текислик билан кесишишидан қандай чизиқ ҳосил бўлади?

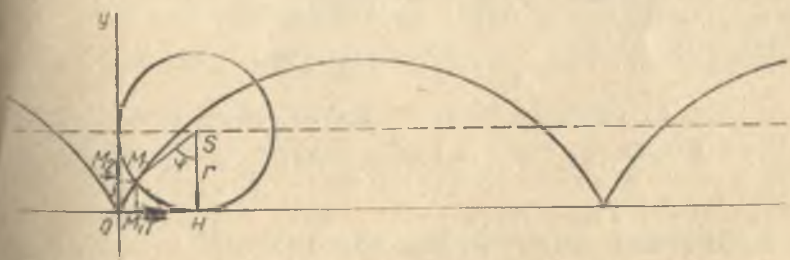
ИЛОВА

Баъзи бир ажойиб эгри чизиқлар

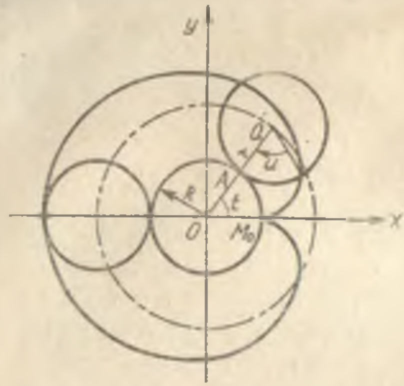
1. Циклоида. Берилган бирор l тўғри чизиқ бўйлаб сирпанмай ғилдираб борувчи r радиусли айлананинг ихтиёрий M нуқтаси чизган эгри чизиқ циклоида дейилади. l тўғри чизиқни абсциссалар ўқи, M нуқтанинг бошланғич ҳолатини координаталар боши сифатида танлаб, координата векторларини эса, 78-чизмадагидек олиб, циклоида тенгламасини келтириб чиқарамиз. Дастлаб, тенгламани параметрик кўринишда келтириб чиқарамиз. Айтайлик, $M(x;\ y)$ нуқта циклоиданинг ихтиёрий нуқтаси, S эса, ғилдираб борувчи r радиусли айлананинг маркази бўлсин (78-чизма). $[SM)$ ва $[SH)$ лар орасидаги φ бурчакни параметр деб танлаймиз. Чизмадан:

$$x = OM_1 = OH - M_1H = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = OM_2 = r = r\cos\varphi = r(1 - \cos\varphi).$$

Бу циклоиданинг параметрик тенгламаларидир. Энди циклоида тенгламасини тўғри бурчакли декарт координаталар системасида келтириб чиқарамиз. Бунинг учун (1) дан φ ни чиқарамиз, у ҳолда $x + \sqrt{y(2r-y)} = r\arccos\frac{r-y}{2}$ га эга бўламиз. Тенгламадан y нинг даврий экани кўринади. Унинг даври $OA = 2\pi r$ га тенг. Шунинг учун, циклоидани ясашда $0 \leqslant x \leqslant 2\pi r$ шартни қаноатлантирувчи нуқталарни ясаш етарли.



78-чизма.



79-чизма.

2. Эпициклоида. Ўзгармас R радиусли айланага ташқи уриниб, унинг устида сирпанмасдан ғилдирайдиган r радиусли айланадаги ихтиёрий M нуқта чизадиган текис эгри чизиқ эпициклоида дейилади. Қўзғалмас айлананинг маркази O ни координаталар боши қилиб, у орқали ўтувчи ихтиёрий иккита ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқларни координата ўқлари қилиб танлайлик (79- чизма). Ҳаракатланувчи айлана марказини O_1 билан белгиласак ва параметр сифатида $\angle O_1OX$ ни танласак, эпициклоиданинг тенгламаси тубандагича бўлади:

$$x = (R + r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t;$$

$$y = (R + r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t.$$

Эпициклоида ғилдирайдиган айлана радиуси қўзғалмас айлана радиусидан неча марта катта бўлишига қараб турли хилда бўлади (яъни унинг сиртмоғи сони шунга боғлиқ бўлади).

Хусусий ҳолда: $r = R$ бўлганда тенглама

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t,$$
$$y = 2r\sin t - r\sin 2t$$

кўринишни олади. Бу эгри чизиқ к а р д и о и д а дейилади. Эпициклоида битта сиртмоғининг узунлиги $l_1 = \frac{8(n+1)}{n}\cdot r$ га, умумий узунлиги эса $l = n\cdot l_1 = 8r(n+1)$ га тенг. Унинг битта сиртмоғининг юзи $S_1 = \frac{3n+2}{n}\pi r^2$ га, эпициклоиданинг умумий юзи эса $S = 3\pi r^2(n+1)$ га тенг.

3. Гипоциклоида. Бирор қўзғалмас R радиусли айлана бўйлаб ичкаридан сирпанмай, ғилдираб борувчи r радиусли айланадаги ихтиёрий M нуқта чизган эгри чизиқ г и п о ц и к л о и д а дейилади.

Қўзғалмас R радиусли айлана маркази O ни тўғри бурчакли координаталар системасининг боши қилиб, у орқали ўтувчи ихтиёрий иккита ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқларни координата ўқлари қилиб танлайлик. O_1 ғилдирайдиган айлана маркази бўлсин. Параметр сифатида $\varphi = \measuredangle O_1OX$ ни олсак, у ҳолда гипоциклоиданинг тенгламаси тубандагича бўлади (80-чизма):

80-чизма.

$$x = (R-r)\cos\varphi + r\cdot\cos z\frac{R-r}{r}\varphi,$$

$$y = (R-r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi.$$

Қўзғалмас ва қўзғалувчи айланалар радиуслари орасидаги муносабатга қараб, гипоциклоиданинг турли хиллари ҳосил бўлади. Хусусий ҳолда: $r=\frac{1}{4}R$ бўлганда, тенглама

$$x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi,$$
$$y = 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi$$

кўринишга эга бўлади ва эгри чизиқ астроида дейилади. Гипоциклоида бир сиртмоғи (ёйи) нинг узунлиги $l_1 = \frac{8(n-1)}{n}r$ га, умумий узунлиги $l = 8(n-1)r$ га тенг. Унинг битта сиртмоғи юзи $S_1 = \frac{3n-2}{n}\pi r^2$ га, умумий юзи эса $S = (n-1)(n-2)\pi r^2$ га тенг.

4. **Никомед конхоидаси.** l тўғри чизиқ ва ундан $a \neq 0$ масофада S нуқта берилган. S нуқта орқали мумкин бўлган барча тўғри чизиқлар ўтказамизки, унинг тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси A нинг икки томонида b кесма жойлашсин. Бу b кесма учларининг геометрик ўрни Никомед конхоидаси дейилади. S нуқтани қутб координаталар системасининг қутби

деб ва қутб ўқини S нуқтадан l тўғри чизиққа перпендикуляр йўналтириб, Никомед конхоидаси тенгламасини келтириб чиқарамиз.

Айтайлик, SA S нуқта орқали ўтувчи ва l тўғри чизиқни A нуқтада кесувчи ихтиёрий тўғри чизиқ бўлсин. У ҳолда A нуқтадан b масофада ётувчи M_1 ва M_2 нуқталар изланувчи нуқталар тўпламига тегишли бўлади. Агар (ρ_1, φ) ва (ρ_2, φ) — M_1 ва M_2 нуқталарнинг мос равишда умумлашган қутб координаталари бўлса, у ҳолда

$$\rho_1 = SM_1 = SA + AM_1 = \frac{a}{\cos\varphi} + b,$$

$$\rho_2 = SM_2 = SA - AM_2 = \frac{a}{\cos\varphi} - b.$$

Шундай қилиб, умумлашган декарт координаталар системасида эгри чизиқ тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

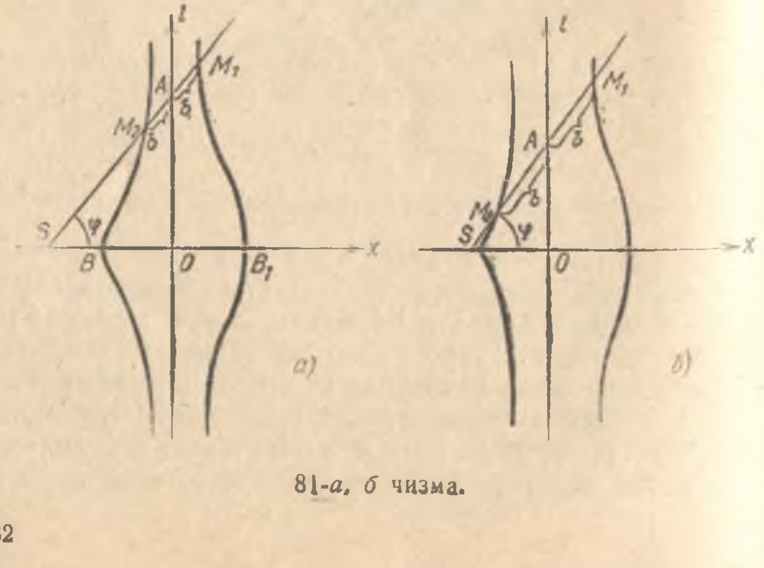
$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b. \qquad (2)$$

Бу тенглама

$$\left(\rho - \frac{a}{\cos\varphi}\right)^2 = b^2 \qquad (3)$$

тенгламага тенг кучли. Шунинг учун (3) тенглама ҳам Никомед конхоидаси тенгламасидир.

Агар қутб координаталар системасидан декарт координаталар системасига ўтиш формуласидан фойда-



81-*а, б* чизма.

лансак, Никомед конхоидасининг декарт координаталар системасидаги тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

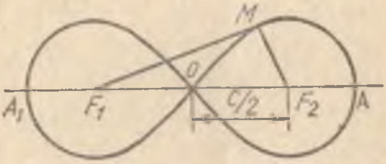
$$(x-a)\ (x^2+y^2)=b^2x^2. \qquad (4)$$

(81- a чизмада $a>b$ ҳол, 81- б чизмада $a=b$ ҳол тасвирланган.)

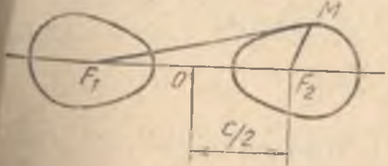
5. Бернулли лемнискатаси. Ихтиёрий нуқтасидан берилган икки нуқтасигача бўлган масофалар кўпайтмаси ўзгармас сон p га тенг бўлган текислик нуқталарининг геометрик ўрни Бернулли лемнискатаси дейилади. Агар берилган F_1, F_2 нуқталар орасидаги масофани c десак, у ҳолда $[F_1F_2]$ кесма ўргасидаги O нуқтадан F_1, F_2 нуқталаргача бўлган масофа $\frac{c}{2}$ га тенг бўлади. Аввало, O нуқта лемниската нуқтаси бўлгани учун (82- чизмага кўра)

$$MF_1\cdot MF_2=\frac{c^2}{4}$$

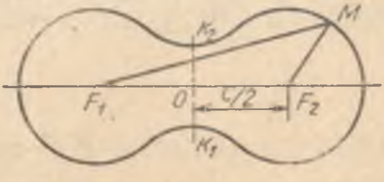
га тенг бўлсин деймиз, у ҳолда лемнискатанинг кўриниши ётқизилган 8 сонига ўхшайди. Агар ўзгармас кўпайтма p ни $\frac{c^2}{4}$ дан фарқли деб олсак, лемниската ўз кўринишини ўзгартиради. p $\frac{c^2}{4}$ дан кичик бўлса, лемниската иккита овалдан ташкил топади, уларнинг бири F_1 нуқтани, иккинчи эса F_2 нуқтани ўз ичига олади (83- чизма). Агар p $\frac{c^2}{4}$ дан катта, $\frac{c^2}{2}$ дан кичик бўлса, лемниската „бисквит“ кўринишига эга бўлади. Агар, p $\frac{c^2}{4}$ дан кам фарқ қилса, „бисквитнинг бели“ k_1k_2 жуда нозик бўлади (84- чизма) Агар p $\frac{c^2}{4}$ дан кам фарқ



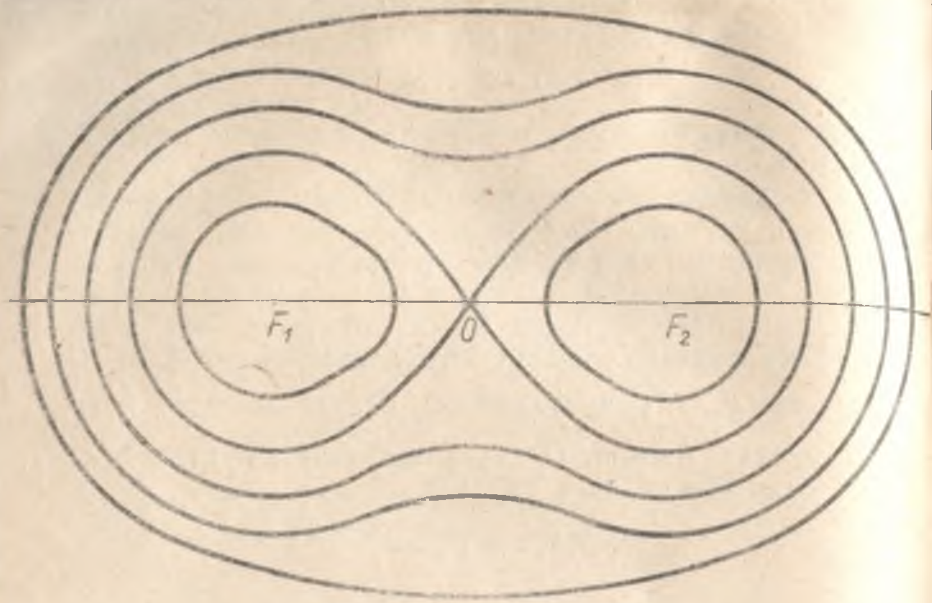
8 -чизма.



83-чизма.



84-чизма



85-чизма.

қилса, у ҳолда бисквит „белга“ эга бўлмайди. Агар p $\frac{c^2}{2}$ га тенг бўлса ёки ундан катта бўлса, у ҳолда лемниската овал кўринишга келади (85-чизма).

6. **Архимед спирали**. Ўзгармас V см/сек тезлик билан циферблат марказидан чексиз узун секунд стрелкаси устида югураётган қўнғизни кўз олдимизга келтирайлик. Қўнғиз бир минутдан кейин марказдан $60 \times \times v$ см, икки минутдан кейин $120 \cdot v$ см ва ҳ. к. узоқликда бўлади. Умуман олганда қўнғиз t секунд югургандан кейин, марказдан $v \cdot t$ узоқликда бўлади. Бу вақтда секунд стрелкаси $6t°$ бурчакка бурилади (чунки у бир секундда $360° : 60 = 6°$ га бурилади.) Агар стрелканинг бурилиш бурчагини α ва қўнғизнинг циферблат марказидан узоқлигини r десак, унда улар орасидаги боғланиш қуйидагича бўлади:

$$r = \frac{v}{6} \alpha.$$

Бошқача айтганда, r бурилиш бурчаги α га тўғри пропорционал, пропорционаллик коэффициенти $k = \frac{v}{6}$ бў-

86-чизма.

87-чизма.

лади. Агар биз югурувчи қўнғизнинг стрелка билан биргаликдаги ҳаракатининг траекториясини чизсак, унда биз биринчи марта Архимед томонидан ўрганилган эгри чизиққа эга бўламиз (86-чизма). Бу чизиқ олим шарафига **Архимед спирали** деб аталади. Архимед спиралининг ажойиб хоссаларидан бири, унинг ёрдамида ҳар қандай бурчакни истаган бўлакка бўлиш мумкин.

7. Логарифмик спираль. Бизга нур устида ҳаракатланаётган нуқтанинг, нур бошидан узоқлиги, нурнинг бурилиш бурчагига тўғри пропорционал бўлиши Архимед спиралидан маълум, яъни $r = k\alpha$. Агар биз нуқтанинг нур бошидан узоқлигининг логарифмини ёйнинг бурилиш бурчагига тўғри пропорционал бўлишини талаб қилсак, у холда биз **логарифмик спиралга** эга бўламиз (87-чизма), яъни $\ln z = k\alpha$ десак, унда $r = e^{k\alpha}$ — бу логарифмик спиралнинг тенгламаси. Логарифмик спиралнинг асосий хоссаларидан бири: Спираль бошидан чиққан ҳар қандай нур, шу спирални бир хил бурчак остида кесиб ўтади.

Машқлар

1. Бернулли лемнискатасини ясанг:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

2. Ушбу

$$x = 3(t - \sin t),$$
$$y = 1 - \cos t$$

циклоиданн ясанг,

3. $r = e^{2\varphi}$ логарифмик спирални ясанг.

4. $r = 3\varphi$ $(r \geqslant 0)$ Архимед спиралини ясанг.

5. Ушбу

$$\begin{cases} x = 2a\cos^3 t, \\ y = 3a\sin^3 t \end{cases}$$

гипоциклоида (астроида) ни ясанг.

6. $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ кардиоидани ясанг.

7. Никомед конхоидасини ясанг:

$$r = \frac{2a}{\cos\varphi} + 3b, \text{ бу ерда } a = 1;\ b = 1 \text{ деб олинг.}$$

АДАБИЁТ

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., „Наука“, 1968.
2. Атанасян Л. С. Геометрия, часть 1., М., „Просвещение“, 1973.
3. Атанасян Л. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., „Просвещение“, 1968.
4. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия, часть I, М., „Просвещение“, 1974.
5. Бакельман И. Я. „Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра“. Т., „Ўқитувчи“, 1978
6. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П. Аналитическая геометрия. М., „Просвещение“, 1970.
7. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., „Наука“, 1980.
8. Дадажонов Н. Д., Жураева М. Ш. Геометрия, I қисм, Т., „Ўқитувчи“, 1982.
9. Камолов М. А. Аналитик геометрия. Т., „Ўқитувчи“, 1972.
10. Курош А. Г. Олий алгебра курси. Т., 1976.
11. Погорелов А. В. Геометрия. М., „Наука“, 1983.
12. Луканкин Г. Л., Мартынов И. Н., Шадрин Г. А., Яковлев Г. Н. Высшая математика. М., „Просвещение“, 1988.

МУНДАРИЖА

боб Иккинчи тартибли сиртлар

На узбекском языке

ФАРХАД РАДЖАБОВИЧ РАДЖАБОВ
АХМЕД НУРМЕТОВИЧ НУРМЕТОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие для студентов педагогических институтов

Ташкент — „Ўқитувчи“ — 1990

Муҳаррир *Х. Алимов*
Бадиий муҳаррир *С. Соин*
Техмуҳаррирлар: *Д. Габдрахманова, Т. Скиба*
Мусаҳҳиҳ *М. Минахмедова*

ИБ № 5147

Теришга берилди 10.11.89. Босишга рухсат этилди 27.11.90. Формати $84\times108/_{32}$. Тип. қоғози № 2. Кегль 10 шпонсиз .Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б.-л. 10.08. Шартли кр.-отт 10,29. Нашр. л. 7,19. Тиражи 6000.
Зак. № 10. Баҳоси 40 т.

„Ўқитувчи“ нашриёти. Тошкент—129, Навоий кўчаси, 30.
Шартнома № 9—301—89.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги босмахонаси ва бирлашган нашриёти. Самарқанд, У. Турсунов кўчаси, 82. 1990.

Объединенное издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова. г. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.

22.151.5
Р 15

Ражабов Ф. Р., Нурметов А. Н.
Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра: Пед. ин-тларининг студентлари учун ўқув қўлланма. (Махсус муҳаррир Н. Дадажонов). —Т.: Ўқитувчи, 1990. — 192 б.

1. Автордош.

Раджабов Ф. Р., Нурметов А. Н. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов.

ББК 22.151.5я73 + 22.143я73.