Ўзбекистон Республикаси Олий ва
ўрта махсус таълим вазирлиги

Ш.А. АЮПОВ, М.А. БЕРДИҚУЛОВ,
Р.М. ТУРҒУНБОЕВ

ФУНКЦИЯЛАР НАЗАРИЯСИ

(Функциялар назарияси ва функционал анализ курсига кириш)

Педагогика олий ўқув юртларининг математика, математика-информатика йўналишидаги бакалавр талабалари учун дарслик

Тошкент — 2004

Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А., Турғунбоев Р.М. Функциялар назарияси (функциялар назарияси ва функционал анализ курсига кириш). Педагогика олий ўқув юртларининг математика, математика-информатика йўналишидаги бакалавр талабалари учун дарслик. Т., "ЎАЖБНТ" Маркази, 2004, 148 б.

Теория функций (введение в теорию функций и функционального анализа). Учебник для студентов бакалавров математического, математико-информа-тического направления педагогических высших учебных заведений. Т., "ЦПИУЛ", 2004, 148 с.

Тақризчилар: **Р.Н.Ғанихўжаев** — физика-математика фанлари доктори, профессор
М.М.Мадиримов — физика-математика фанлари номзоди, доцент

МУНДАРИЖА

КИРИШ

Ушбу дарслик педагогика университетлари учун қабул қилинган ва Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан тасдиқланган дастур асосида ёзилди.

Дарсликда ҳақиқий функциялар назариясининг ўлчовларга доир қисми ҳамда функционал анализнинг метрик фазолар бўлими иложи борича содда тилда баён қилинди. Асосий эътибор талаба(бакалавр)ларнинг берилаётган янги тушунчалар маъносини яхшироқ тушунишларига қаратилди. Айрим хосса ва тасдиқ, теоремаларнинг мураккаб исботи келтирилмади. Ўйлаймизки, қизиқувчан талаба, керак бўлганда ўзи учун зарур бўлган, ушбу китобда берилмай қолган маълумотларни топади ва билимини ошириб боради. Дарслик охирида бу соҳага доир барча муҳим китоблар рўйхати келтирилган.

Ўлчов тушунчаси тўплам функцияси ҳақида маълумот бериш билан бошланади ва тўғри чизиқдаги ўлчов, текисликдаги ўлчов қандай берилиши кераклиги тушунтирилиб, сўнгра умумий ҳолдаги — абстракт ўлчов тушунчаси берилади.

Бизнинг бундай йўл тутишимиздан мақсад умумий қонуниятни тўғри илғаб олишга ёрдам бериш холос. Масалан, кесманинг ўлчови сифатида унинг узунлигини олиш шарт эмас. Кесмага қандайдир усулда, бирор қоида билан мусбат сон мос қўювчи муносабат, функция берилса бўлди, фақат бу муносабатга кўра, умумий нуқтаси бўлмаган икки кесмага мос сон ҳар бир кесмага мос сонлар йиғиндисига тенг бўлишини талаб қилиш етарли.

Бу хосса нафақат кесмалар, балки ихтиёрий табиатли тўпламлар учун ўлчов тушунчасини умумлаштиришга хизмат қилади.

Узлуксиз функциялар учун ёки узилиш нуқталари «жуда кўп» бўлмаган функциялар учун Риман интегралини ҳисоблаш математик анализ курсидан маълум. Кейинчалик Риман интеграли баъзи бир функциялар синфи учун мавжуд эмаслиги, яъни бу интеграл ёрдамида айрим функцияларни интеграллаб бўлмаслиги аниқлангач, янада кенгроқ интеграл —Лебег интегралини киритиш заруряти туғилди. Масалан, Дирихле функциясининг Риман интеграли мавжуд эмаслигини биламиз. Бу каби мисолларни истаганча келтириш мумкин.

Кўрамизки, Риман интеграли тушунчасини математикада кўплаб ишлатиладиган муҳим функцияларга татбиқ қилиб бўлмайди. Шу сабабли Риман интеграли тушунчасини кенгайтириш масаласи туғилади.

Бу масала билан кўп математиклар шуғулланиб, Риман интегралининг турли умумлаштиришларини топишган. Буларнинг ичида энг муҳими Лебег томонидан киритилган интеграл тушунчасидир.

Лебег интеграли қуришнинг асосий ғояси шундаки, унда функция берилган $[a,b]$ сегментни бўлакларга бўлаётганда, функция қийматлари ҳисобга олинади. Бу ғоя бирйўла Риман интеграли мавжуд бўлган функциялар синфидан кенгроқ функциялар синфи учун интеграл тушунчасини аниқлашга имкон беради.

Риман ва Лебег ғояларини бошқача яна қуйидагича ҳам солиштириш мумкин:

Айтайлик, қийматлари ҳар хил бўлган қоғоз пуллардан бир қоп бор. Бу пулларнинг умумий миқдорини қандай қилиб топган маъқул? Икки кассирдан бири пулларни бир четдан олади ва миқдорларини қўшиб боради. Иккинчиси эса аввал пулларнинг миқдорига қараб ажратиб чиқади: масалан, 10 сўмликларни бир тўп, 50 сўмликларни бир тўп ва ҳоказо. Кейин ҳар бир тўпни алоҳида санаб қўшиб чиқади.

Мана шу кассирлардан биринчиси, ифодали қилиб айтганда «Риман», иккинчиси «Лебег» бўлади. Юзаки қараганда бу икки усулда ҳисоблашларнинг бир-биридан устунлиги сезилмаса-да, ушбу дарсликда биз Лебег усулининг катта имкониятларга эга эканлигини кўрамиз.

Маълумки, функция тўғри чизиқда, яъни сонлар ўқида аниқланган бўлса, унинг аниқланиш соҳасини бир нечта бўлакларга бўлиш ёрдамида Риман интеграли қурилади. Аммо функция тўғри чизиқда эмас, балки бирор ўлчовли, яъни ўлчов киритилган тўпламда аниқланган бўлса, бу тўпламни оралиқларга бўлиш деган тушунчанинг ўзи маънога эга эмас. Шунинг учун функциянинг қийматларидан фойдаланиб интеграл қуриш маъқул.

Яқинлашиш тушунчаси математик анализнинг энг асосий тушунчаларидан бири ҳисобланади. Икки соннинг бир-бирига яқинлиги улар айирмаси модулининг нолга яқинлиги билан аниқланиши талабага мактаб математика курсидан маълум.

Худди шунингдек, икки сонли функциянинг бир-бирига яқинлиги, уларнинг бир хил нуқтадаги қийматлари айирмаси модулининг аргумент бўйича максимуми нолга яқинлиги билан аниқланиши мумкин.

Энди икки вектор, икки матрица ёки икки акслантиришнинг бир-бирига яқинлиги қандай аниқланади, деган саволга жавоб дарров топила қолмайди.

Шунинг учун ихтиёрий табиатли тўпламлар элементлари орасида яқинлашиш тушунчасини аниқлашда ёрдам берадиган масофа тушунчасини киритиш масаласига китобда кенг ўрин берилган. Масофа тушунчаси киритилган тўплам метрик фазо деб аталади. Дарсликда метрик фазоларга доир деярли барча маълумотлар ўз аксини топган.

Математика қўлланиладиган барча соҳалардаги объектлар ичида кўпроқ учрайдиганлари, асосан метрик фазодан иборат бўлади. Шу сабабли, унда қисқартириб акслантириш принципи ва унинг қўлланилиш соҳасига доир хулоса ва тасдиқлар мисол ва масалалар ёрдамида кенгроқ тушунтирилган.

Дарслик охирида интегралланувчи ва квадрати билан интегралланувчи функциялар синфи метрик фазо бўлиши кўрсатилган.

Ушбу китобни ёзишда ўзининг қимматли маслаҳатларини аямаган профессор Р.Н.Ғанихўжаевга, доцентлар М.Мадиримов ва Ў.Тошметовга ўз миннатдорчилигимизни билдирамиз.

I БОБ. ТЎПЛАМНИНГ ҚУВВАТИ

1-§. Тўпламнинг қуввати тушунчаси

1. Чексиз тўпламлар.

Одатда, чекли ва чексиз тўпламларни бир-биридан фарқ қиладилар. Элементларининг сони чекли бўлган тўплам *чекли тўплам* дейилади. Математикада кўпинча *чексиз тўплам*лар билан иш кўришга тўғри келади. Умуман, чексиз тўплам дейилганда шундай тўпламни кўзда тутиш керакки, бу тўпламдан битта, иккита ва ҳоказо элементларни олганда ҳам, унда яна кўплаб элементлар қолаверади. Масалан, барча натурал сонлар тўплами, тўғри чизиқдаги нуқталар тўплами, ҳамма кўпҳадлар тўплами чексиз тўпламларга мисол бўлади.

Тўпламлар назариясининг яратилишига сабаб бўлган илк муаммо қуйидагидан иборат эди: «чексиз тўпламларни улардаги бор элементлар миқдори бўйича фарқлаш мумкинми, агар мумкин бўлса, уларни қандай фарқлаймиз?» Бу савол қадимдан файласуфлар ва математикларни қизиқтириб келган.

Бир томондан, чексиз тўпламларнинг ҳар бири чексиз элементлардан ташкил топганлиги туфайли улардаги элементлар бир хилда «кўп», деб ҳисоблаш равшандек кўринади. Иккинчи томондан, масалан, туб сонлар тўплами натурал сонлар тўпламининг қисми бўлганлиги туфайли, чексиз кўп элементлардан ташкил топган бўлса ҳам, туб сонлар натурал сонларга қараганда камдек туюлади.

Бундай мулоҳазалар ва қарама-қаршиликлар чексиз тўпламлар учун «элементлари кўп», «элементлари сони тенг» ва шунга ўхшаш фикрлар нимани англатишига аниқ таъриф берилмаганлиги сабабли ҳосил бўлади.

Г.Кантор биектив акслантириш тушунчасидан фойдаланиб, чексиз тўпламларни солиштириш мумкинлигини аниқлади.

2. Тўпламлар орасидаги акслантириш.

1-таъриф. Агар A тўпламнинг ҳар бир a элементига бирор f қоида бўйича B тўпламнинг аниқ битта, b элементи мос қўйилган бўлса, у ҳолда А тўплам В тўпламга *акслантирилган* дейилади ва $f:A\to B$ кўринишда ёзилади. Берилган f қоида эса *акслантириш* дейилади.

Шунингдек, b элемент a элементнинг f акслантиришдаги *образи (акси)* дейилади ва $f(a)$ каби ёзилади.

Агар $A_1\subset A$ бўлса, у ҳолда A_1 қисм тўплам элементларининг образлари тўпламини $f(A_1)$ орқали белгилаймиз:

$$f(A_1)=\{f(x)|\,x\in A_1\}.$$

Айтайлик, $f:A\to B$ акслантириш, b эса В тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин. А тўпламнинг b элементга аксланувчи барча элементларидан иборат қисми b элементнинг *прообрази (асли)* дейилади ва $f^{-1}(b)$ каби ёзилади.

Агар $B_1\subset B$ бўлса, у ҳолда B_1 қисм тўплам элементларининг прообразлари тўпламини $f^{-1}(B_1)$ билан белгилаймиз:

$$f^{-1}(B_1)=\{\,x\,|\,f(x)\in B_1\}.$$

Масалан, $A=B=R$, яъни А ҳам, В ҳам R ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат, $f:A\to B$ акслантириш $f(x)=\sin x$ формула билан берилган бўлсин. У ҳолда $b=0$ сонининг прообрази $a=k\pi$ $(k\in Z)$ кўринишдаги сонлардан иборат бўлади: $f^{-1}(0)=\{\,k\pi\,|\,k\in Z\}$.

2-таъриф. Агар $f:A\to B$ акслантириш учун $f(A)=B$, яъни А тўплам В тўпламнинг устига акслантирилган бўлса, у ҳолда f *сюръектив акслантириш (сюръекция)* дейилади.

3-таъриф. Агар $f:A\to B$ акслантириш учун $x_1\neq x_2$ дан $f(x_1)\neq f(x_2)$ келиб чиқса, f *тескариланувчи* ёки *инъектив акслантириш* (*инъекция*) дейилади.

4-таъриф. Агар $f:A\to B$ акслантириш ҳам инъектив, ҳам сюръектив акслантириш бўлса, у ҳолда *f биектив* ёки *ўзаро бир қийматли акслантириш* дейилади.

Баъзида бундай акслантириш А ва В тўпламлар орасидаги ўзаро бир қийматли мослик деб ҳам айтилади.

5-таъриф. Агар:

а) ҳар бир $a\in A$ элементга битта ва фақат битта $b\in B$ элемент мос келса;

б) ҳар бир $b\in B$ элемент битта ва фақат битта $a\in A$ элементга мос келса, у ҳолда А ва В тўпламлар орасидаги мослик *ўзаро бир қийматли мослик* дейилади.

Қуйидаги тасдиқларнинг ўринли эканлигини кўриш қийин эмас:

1°. Айний акслантириш $I:A\to A$ биектив бўлади.

2°. Агар $f:A\to B$ биектив акслантириш бўлса, у ҳолда тескари акслантириш $f^{-1}:B\to A$ мавжуд ва у ҳам биектив аксланитириш бўлади.

3°. Агар $f:A \to B$ ва $g:B \to C$ биектив акслантиришлар бўлса, у ҳолда уларнинг композицияси $g_0 f:A \to C$ ҳам биектив акслантириш бўлади.

3. Тенг қувватли тўпламлар. Тўпламнинг қуввати тушунчаси.

6-таъриф. Агар A ва B тўпламларнинг бирини иккинчисига биектив акслантириш мумкин бўлса, улар *тенг қувватли* тўпламлар дейилади ва $A \sim B$ кўринишда ёзилади.

Бошқача айтганда, агар A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, у ҳолда бу тўпламлар тенг қувватли тўпламлар дейилади.

7-таъриф. Бирор F тўпламнинг элементлари орасида берилган қандайдир «~» муносабат:

1) рефлексивлик: $a \sim a$, ихтиёрий элемент ўзи билан шу муносабатда;

2) симметриклик: $a \sim b$ бўлса, у ҳолда $b \sim a$;

3) транзитивлик: $a \sim b$ ва $b \sim c$ бўлса, у ҳолда $a \sim c$

каби шартларни қаноатлантирса, F тўпламда *эквивалентлик муносабати* берилган дейилади.

1-теорема. *Тўпламлар орасидаги тенг қувватлилик муносабати эквивалентлик муносабати бўлади.*

Исботи. Юқоридаги 1°-3° тасдиқлардан қуйидаги хоссаларнинг ўринлилиги келиб чиқади:

1) $A \sim A$;

2) Агар $A \sim B$ бўлса, у ҳолда $B \sim A$;

3) Агар $A \sim B$ ва $B \sim C$ бўлса, у ҳолда $A \sim C$.

Бу эса тенг қувватлилик муносабати рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга, яъни эквивалентлик муносабати эканлигини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

Келгусида тенг қувватли тўпламлар *эквивалент тўпламлар* деб ҳам юритилади.

Мисоллар. 1. A- барча натурал сонлар тўплами, B-барча мусбат жуфт натурал сонлар тўплами бўлсин. Бу тўпламлар орасида биектив акслантиришни қуйидагича ўрнатиш мумкин: $f:n \to 2n$, $f^{-1}:m \to \frac{m}{2}$.

2. A- барча натурал сонлар тўплами, B- барча бутун сонлар тўплами бўлсин. Ушбу $f(x)=(-1)^x\left[\frac{x}{2}\right]$ (бу ерда, $x\in A$, $\left[\frac{x}{2}\right]$ эса $\frac{x}{2}$ нинг бутун қисми) акслантириш бу тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади. Масалан, $1\to 0$, $2\to 1$, $3\to -1$, $4\to 2$, ...

3. Ихтиёрий $[a;b]$ кесманинг нуқталаридан иборат тўплам ихтиёрий бошқа бир $[c;d]$ кесманинг нуқталаридан иборат тўпламга тенг қувватли бўлади. Ўзаро бир қийматли мосликни қуйидагича ўрнатиш мумкин: $y=\frac{d-c}{b-\alpha}(x-\alpha)+c$.

Агар A ва B элементлари сони чекли бўлган тўпламлар бўлса, у ҳолда уларнинг эквивалентлиги элементларининг сони тенглиги билан бир хил бўлади.

Чексиз тўпламларнинг барчаси ўзаро эквивалент, яъни тенг қувватли эмасми, деган савол туғилади. Бундай эмаслигини кўрсатамиз.

2-теорема. *Натурал сонлар тўплами* N *ва ҳақиқий сонлар тўплами* R *тенг қувватли тўпламлар эмас.*

Исботи. Фараз қилайлик, N ва R тенг қувватли ва N ни R га акслантирувчи f биектив акслантириш мавжуд бўлсин. R да $\Delta=[0;1]$ кесмани олиб, уни тенг уч кесмага ажратамиз. 1 нинг образи шу кесмаларнинг камида бирига тегишли эмас. Бу кесмани Δ_1 билан белгилаймиз. Δ_1 кесмани тенг уч кесмага ажратамиз ва 2 нинг образи тегишли бўлмаган Δ_2 кесмани танлаб оламиз.

Бу жараённи чексиз давом эттириб, $\{\Delta_n\}$ кесмалар кетма-кетлигига эга бўламиз. Бу кетма-кетлик учун қуйидаги хоссалар ўринли:

1) $\Delta_1\supset\Delta_2\supset\ldots\supset\Delta_v\supset\ldots$;
2) $f(n)\notin\Delta_n$ $(n\in N)$

ва Δ_n кесманинг узунлиги $\frac{1}{3^n}$ тенг бўлиб, $n\to\infty$ да 0 га интилади. Ичма-ич жойлашган сегментлар принципига кўра, бу кесмаларнинг барчасига тегишли бўлган ягона *c* нуқта мавжуд. Аммо $c\in\Delta_n$ ва $f(n)\notin\Delta_n$ бўлганлиги туфайли, ҳеч бир *n* натурал сон ушбу *c* нинг прообрази бўла олмайди.

Демак, f биектив акслантириш эмас. Бу эса фаразимизга зид, яъни N ва R тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли акслантириш ўрнатиш мумкин эмас. Теорема исбот бўлди.

Шундай қилиб, чексиз тўпламларнинг ҳаммаси ҳам тенг қувватли эмаслигига ишонч ҳосил қилдик.

8-таъриф. Берилган A тўпламга тенг қувватли (эквивалент) бўлган тўпламлар синфи $\overline{\overline{A}}$ билан белгиланади ва $\overline{\overline{A}}$ ни A тўпламнинг ***қуввати*** ёки ***кардинал сони*** деб аталади.

Чекли тўпламнинг қуввати (кардинал сони) сифатида бу тўплам элементларининг сони олинади.

Саволлар ва машқлар

1. Чекли ва чексиз тўпламларга мисоллар келтиринг.

2. Эквивалент тўпламларни таърифланг, мисолларда тушунтиринг.

3. Тўпламнинг қуввати деганда нима тушунилади?

4. Қуйидаги машқларда f нинг A ни B га ўтказувчи акслантириш эканлигини кўрсатинг. Ҳар бир акслантириш учун унинг сюръекция, инъекция ёки биекция эканлигини аниқланг.

4.1. A-математикадаги атамалар, B-ўзбек тили алфавити бўлсин, $f:A\to B$ акслантириш ҳар бир атамага у бошланадиган ҳарфни мос қўяди.

4.2. A=B - ҳақиқий сонлар тўплами; $f:A\to B$ акслантириш

a) $f(x)=\sin x$; b) $f(x)=x^3-3x$; c) $f(x)=3^x$; d) $f(x)=x^5$ формула билан аниқланади.

4.3. A-текисликдаги барча мунтазам учбурчаклар тўплами, B-текисликдаги барча айланалар тўплами; $f:A\to B$ акслантириш ҳар бир учбурчакка унга ички чизилган айланани мос қўяди.

4.4. $A=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$ текисликдаги квадрат нуқталари тўплами, B - (0;1) интервал нуқталари; $f:A\to B$ акслантириш қуйидагича аниқланади: ҳар бир $M\in A$ нуқтанинг координаталари $x=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $y=0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ чексиз ўнли каср кўринишида ёзилади ва $M\in A$ нуқтага $z=0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots\in B$ мос қўйилади.

5. Қуйидаги машқларда берилган тўпламларнинг бирини иккинчисига биектив акслантиринг:

5.1. (0;1) интервал ва $(0;\infty)$ нур.

5.2. $(0;\infty)$ нур ва тўғри чизиқ.

5.3. Ихтиёрий айлана ва учбурчак томонларидан тузилган синиқ чизиқ.

5.4. $[a;b]$ кесма ва $(c;d)$ интервал.

6. Агар $A\backslash B \sim B\backslash A$ бўлса, $A \sim B$ эканлигини исботланг.

7. Агар $A \subset B$ ва $A \sim A \cup C$ бўлса, у ҳолда $B \sim B \cup C$ эканлигини исботланг.

8. Қуйидаги тасдиқ ўринлими: «Агар $A \supset B$, $C \supset D$ ва $A \sim C$, $B \sim D$ бўлса, у ҳолда $A\backslash B \sim C\backslash D$ бўлади».

2-§. Тўпламлар қувватини солиштириш

1. Қувватларни солиштириш.

Икки А ва В тўплам берилган бўлса, уларнинг қувватлари ҳақида қуйидаги мулоҳазаларни айтиш мумкин:

1) бу тўпламлар ўзаро эквивалент, яъни уларнинг қувватлари тенг;

2) А тўплам В тўпламнинг бирор B_1 қисмига эквивалент, аммо В тўплам А нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас (ёки В тўплам А тўпламнинг бирор A_1 қисмига эквивалент, аммо А тўплам В нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас);

3) А тўплам В тўпламнинг бирор B_1 қисмига эквивалент ва В тўплам А тўпламнинг бирор A_1 қисмига эквивалент;

4) А тўплам В тўпламнинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас ва В тўплам А нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас.

Агар А ва В тўпламлар чекли бўлса, учинчи ва тўртинчи ҳоллар рўй бермайди. Баъзи А ва В чексиз тўпламлар учун тўртинчи ҳолнинг ўринли бўлмаслигини кўрсатиш мумкин.

Иккинчи ҳолда А тўпламнинг қуввати В тўпламнинг қувватидан катта (В тўпламнинг қуввати А тўпламнинг қувватидан катта дейилади) ва $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ $(\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}})$ кўринишда белгиланади.

Учинчи ҳолда А ва В тўпламлар эквивалент бўлади. Бу тасдиқ келгусида исботланадиган Кантор-Бернштейн теоремасидан келиб чиқади.

Берилган А тўпламнинг қувватини аниқлашнинг табиий усули бу — тўпламни бирор қуввати маълум тўпламга биектив акслантиришдир. Аммо кўп ҳолларда аниқ бир биектив акслантиришни қуриш мураккаб масалага айланади. Шу сабабли, тўпламларнинг тенг қувватлилик белгиларини топиш масаласи вужудга келади. Қуйида шундай белгиларнинг иккитаси билан танишамиз. Бу белгилар Г.Кантор томонидан топилган, лекин уларнинг исботини анча кейин Ф.Бернштейн келтирган.

2. Оралиқ тўпламнинг қуввати.

9-таъриф. Агар $C \subset B \subset A$ бўлса, B тўплам A ва C тўпламлар учун *оралиқ тўплам* дейилади.

3-теорема. *Агар бирор тўплам иккита тенг қувватли тўплам учун оралиқ тўплам бўлса, у ҳолда бу учта тўпламнинг қувватлари ўзаро тенг бўлади.*

Исботи. A, B ва C тўпламлар берилган бўлиб, $C \subset B \subset A$ ва $A \sim C$ бўлсин. Агар $B=A$ ёки $B=C$ бўлса, теорема равшан.

Айтайлик, $A \neq B$ бўлсин. Теорема шартига кўра, $T:A \to C$ биекция мавжуд. Ихтиёрий $x \in A$ учун унинг образи $x'=T(x)$ элемент C тўпламга, демак, A тўпламга ҳам тегишли бўлади. Шунинг учун x' элементнинг T акслантиришдаги образи $x''=Tx'=T(T(x))$ ни топиш мумкин. Равшанки, $x'' \in A$. Шу x'' элементни $T^2(x)$ билан белгилаймиз. $T^3(x)$ билан $T^2(x)$ элементнинг образини, умуман, $T^n(x)$ $(n=2,3,\ldots)$ билан $T^{n-1}(x)$ элементнинг образини белгилаймиз. $T^n(x)$ кўринишдаги элементларни x элементнинг ворислари деб атаймиз.

Агар бирор z элемент $A \setminus B$ тўпламга тегишли бўлса, ёки $A \setminus B$ тўпламга тегишли бирор элементнинг ворислари бўлса, бу z элементни *қора* деб атаймиз. Қора элементлар тўплами бўш эмас, чунки $A \neq B$. Кўриш мумкинки, қора элемент x нинг образи T(x) ҳам қора бўлади, чунки агар x бирор $a \in A \setminus B$ элементнинг вориси бўлса, у ҳолда қандайдир $n \in N$ учун $x=T^n(a)$ бўлади ва $T(x)=T(T^n(a))=T^{n+1}(a)$ дан T(x) ҳам a элементнинг вориси эканлиги келиб чиқади.

A тўпламнинг қолган элементларини *оқ* деб атаймиз. Шундай қилиб, A тўплам ўзаро кесишмайдиган оқ ва қора элементлар синфига ажратилади.

Энди ҳар бир $x \in A$ элементга қуйидаги усулда f(x) элементни мос қўямиз:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \textit{агар x оқ бўлса,} \\ T(x), & \text{агар x қора бўлса.} \end{cases}$$

Бу қоида A ни B га акслантириш бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $x \in A$ бўлсин. Агар x оқ бўлса, у ҳолда $x \in B$, чунки $x \notin A \setminus B$. Аммо $f(x)=x$, демак, $f(x) \in B$. Агар x қора бўлса, у ҳолда $f(x)=T(x)$, аммо $T: A \to C$ ва $C \subset B$, бундан $f(x) \in B$. Равшанки, бу акслантириш биектив. Теорема исбот бўлди.

3. Кантор-Бернштейн теоремаси.

4-теорема. *Агар икки* A *ва* B *тўпламларнинг ҳар бири иккинчисининг қисмига эквивалент бўлса, у ҳолда улар ўзаро эквивалент бўлади.*

Бошқача айтганда, агар $A \supset A_1 \sim B$ ва $B \supset B_1 \sim A$ бўлса, у ҳолда $A \sim B$ бўлади.

Исботи. $A_1 \sim B$ бўлганлиги сабабли $f: B \to A_1$ биекция мавжуд, A_2 орқали B_1 тўпламнинг шу акслантиришдаги образини белгилаймиз. У ҳолда f ни B_1 даги акслантириш деб қарасак, у B_1 ни A_2 га акслантирувчи биекция бўлади. Шунинг учун $A_2 \sim B_1$, бундан эса эквивалентликнинг транзитивлик хоссасига кўра $A_2 \sim A$ бўлади. Энди $A_2 \subset A_1 \subset A$ эканлигидан 3-теоремага асосан $A_1 \sim A$ экан. Шартга кўра $A_1 \sim B$, бундан эса $A \sim B$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Тўғри чизиқдаги ихтиёрий интервал ва ихтиёрий сегмент тенг қувватли.

Ҳақиқатан ҳам маълумки, ҳар бир сегментга тегишли бирор интервал, ҳар бир интервалга тегишли бирор сегмент мавжуд. Барча сегментлар, шунингдек, барча интерваллар тенг қувватли бўлганлиги сабабли Кантор-Бернштейн теоремасидан керакли тасдиқ келиб чиқади.

Саволлар ва машқлар

1. Қачон A тўпламнинг қуввати B тўпламнинг қувватидан кичик (катта) дейилади? Мисолларда тушунтиринг.

2. Оралиқ тўплам нима? Мисоллар келтиринг.

3. Оралиқ тўпламнинг қуввати ҳақидаги теореманинг мазмуни нимадан иборат?

4. Кантор-Бернштейн теоремасининг мазмуни нимадан иборат? Бу теорема исботи режасини ёзинг.

5. Агар A тўплам B тўпламнинг бирор B_1 қисмига эквивалент бўлса, A тўпламнинг қуввати B тўпламнинг қувватидан катта эмас дейилади ва $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$ кўринишда ёзилади. «≤»-муносабатнинг ноқатъий тартиб муносабат эканлигини, яъни унинг рефлексив, транзитив ва антисимметрик эканлигини кўрсатинг.

6. Қуйидаги теоремани исботланг: Агар A тўпламни B тўпламга акслантирувчи сюръекция мавжуд бўлса, у ҳолда $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ бўлади.

7. Айлана нуқталари тўпламининг қуввати унинг диаметри нуқталари қувватидан кичик эмаслигини кўрсатинг.

8. Кантор-Бернштейн теоремасидан фойдаланиб, ихтиёрий доиранинг ихтиёрий квадратга эквивалентлигини исботланг.

3-§. Саноқли тўпламлар ва уларнинг хоссалари

1. Саноқли тўпламлар, мисоллар.

10-таъриф. Натурал сонлар тўплами ва унга эквивалент бўлган тўпламлар *саноқли тўпламлар* дейилади. Саноқли тўпламнинг қуввати χ_0 (алеф-нол) билан белгиланади.

Ҳар қандай саноқли тўплам чексиз кетма-кетлик шаклида ёзилади: $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, яъни саноқли тўплам элементларини номерлаб чиқиш мумкин.

Масалан, 1) бутун сонлар тўплами;

2) учга каррали бўлган натурал сонлар тўплами;

3) $B = \{ n2^n \mid n \in N \}$; 4) $B=\{ f(n) \mid n \in N$, f-қатъий монотон функция$\}$ тўпламлари саноқли тўпламларга мисол бўлади.

2. Саноқли тўпламларнинг чексиз тўпламлар орасидаги ўрни.

5-теорема. *Ҳар қандай чексиз тўпламнинг саноқли қисм тўплами мавжуд.*

Исботи. Айтайлик, B чексиз тўплам бўлсин. Ундан битта элемент танлаб оламиз ва уни x_1 орқали белгилаймиз. B тўплам чексиз бўлганлигидан $B\backslash\{x_1\}$ тўплам бўш эмас. Бу тўпламдан яна бир элементни танлаб олиб, уни x_2 билан белгилаймиз. Сўнгра $B\backslash\{x_1,x_2\}$ дан x_3 элементни танлаб оламиз. Шундай давом эттириб, B тўпламнинг номерланган, яъни саноқли $C=\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ қисм тўпламига эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема саноқли тўпламлар барча чексиз тўпламлар орасида муҳим ўрин тутишини, яъни чексиз қувватларнинг энг кичиги эканлигини кўрсатади.

6-теорема. *Ҳар қандай саноқли тўпламнинг чексиз қисми саноқли тўплам бўлади.*

Исботи. Айтайлик, A—саноқли тўплам, B—унинг чексиз қисми бўлсин. A тўпламнинг элементларини номерлаб чиқамиз. Натижада B тўпламнинг элементлари ҳам номерланган бўлади.

В тўплам элементларининг номерларини ўсиш тартибида жойлаштирамиз ва 1,2,3,... сонлар билан қайта номерлаб чиқамиз. Демак, В - саноқли тўплам. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *Саноқли тўпламдан унинг чекли қисмини айиришдан ҳосил бўлган тўплам ҳам саноқли бўлади.*

3. Чекли кетма-кетликлар тўпламининг саноқлилиги.

Иккита $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ва $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ чекли кетма-кетликлар (кортежлар) берилган бўлсин. Агар $k=s$ ва ихтиёрий i учун $m_i=n_i$ бўлса, бу кортежлар тенг, акс ҳолда тенг эмас дейилади.

7-теорема. *Элементлари натурал сонлардан иборат барча чекли кетма-кетликлар тўплами* K *саноқли бўлади.*

Исботи. P орқали ўсиш тартибида жойлаштирилган барча туб сонлар тўплами $\{ p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \}$ ни белгилаймиз. Ҳар бир натурал сонлардан иборат $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ кортежга $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ натурал сонни мос қўямиз. Сонни туб кўпайтувчиларга ажратишнинг ягоналиги ҳақидаги теоремага асосан, ҳар хил кортежга ҳар хил натурал сон мос келади. Натижада K тўплам натурал сонлар тўпламининг чексиз қисмига эквивалент бўлади, бундан K нинг саноқли эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *Индекслари натурал $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ кортежлардан иборат $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ элементлар тўплами саноқли.*

4. Саноқли тўпламлар бирлашмасининг саноқлилиги.

8-теорема. *Саноқли сондаги саноқли тўпламларнинг бирлашмаси саноқли тўплам бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ саноқли сондаги саноқли тўпламлар берилган бўлсин. Уларнинг ҳар бири чексиз кетма-кетлик кўринишида ёзилиши мумкин:

$$A_1 = \{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1m}, \ldots \},$$
$$A_2 = \{ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2m}, \ldots \},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \{ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nm}, \ldots \},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Бу тўпламларнинг бирлашмаси натурал индекслари билан фарқ қилувчи a_{nm} элементлардан иборат бўлади ва $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ тўпламларнинг элементлари тенг ёки тенг эмаслигига боғлиқ бўлмаган ҳолда чексиз кўп бўлади. Шу сабабли, юқоридаги 7-теоремага асосан, бирлашма саноқли тўплам экан. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан саноқли тўпламларнинг хоссаларини ифодаловчи бир нечта натижалар келиб чиқади:

1-натижа. *Чекли сондаги саноқли тўпламларнинг бирлашмаси саноқли тўплам бўлади.*

2-натижа. *Саноқли сондаги ўзаро кесишмайдиган чекли тўпламларнинг бирлашмаси саноқли тўплам бўлади.*

3-натижа. *Чекли ва саноқли тўпламларнинг бирлашмаси саноқли тўплам бўлади.*

Саволлар ва машқлар

1. Саноқли тўпламни таърифланг.
2. Саноқли тўпламга мисоллар келтиринг.
3. Чексиз тўпламлар ичида саноқли тўпламлар қандай ўрин тутади?
4. Қачон иккита кортеж тенг дейилади?
5. (1,6,3) кортежга қандай натурал сон мос келади?
6. 225 га қандай кортежни (учликни) мос қўйиш мумкин?
7. Туб сонлар тўпламининг саноқли эканлигини исботланг.
8. Текисликдаги иккала координаталари ҳам бутун сонлардан иборат бўлган нуқталар тўплами саноқли эканлигини исботланг.
9. Саноқли тўпламдан чекли тўпламни айиришдан ҳосил бўлган тўпламнинг саноқли эканлигини кўрсатинг.
10. Саноқли тўпламларнинг кесишмаси (айирмаси) ҳақида нима дейиш мумкин? Жавобларингизни мисолларда асосланг.
11. Ҳадларининг сони саноқли, лекин бирлашмаси саноқли бўлмаган чекли тўпламлар системасига мисол келтиринг.

4-§. Рационал ва алгебраик сонлар тўпламларининг саноқлилиги

1. Рационал сонлар тўпламининг саноқлилиги.

9-теорема. *Рационал сонлар тўплами саноқли.*

Исботи. Маълумки, ҳар қандай рационал сонни иккита бутун сонларнинг нисбати $\frac{p}{q}$ $(q\neq0)$ кўринишда ёзиш мумкин.

Аввал, p ва q натурал сонлар бўлганда, $\frac{p}{q}$ кўринишдаги мусбат касрларни қараймиз. Бундай касрлар тўплами элементлари натурал индексли a_{pq} кўринишдаги тўпламга эквивалент, демак саноқли. Худди шунга ўхшаш манфий касрлар тўплами ҳам саноқли. Рационал сонлар тўплами эса мусбат касрлар тўплами, манфий касрлар тўплами ва {0} тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлганлиги сабабли, 3-натижага асосан саноқли тўплам бўлади. Теорема исбот бўлди.

2. Алгебраик сонлар тўпламининг саноқлилиги.

10-теорема. *Барча алгебраик сонлар тўплами саноқли.*

Исботи. Алгебрадан маълумки, алгебраик сон деб коэффициентлари бутун сонлардан иборат n-даражали $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ кўпҳаднинг илдизи бўладиган ҳақиқий ёки комплекс сонга айтилади. Бундай кўринишдаги n-даражали кўпҳадлар тўпламини P_n орқали белгилаймиз. Бу тўплам (a_n, a_{n-1}, . . ., a_1, a_0) кўринишдаги бутун сонлар кортежлари тўпламига эквивалент. Шунинг учун саноқли. Барча бутун коэффициентли кўпҳадлар тўплами — $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ тўплам, 8-теоремага асосан саноқли. Ҳар бир кўпҳад чекли сондаги илдизларга эга. Демак, алгебраик сонлар тўплами саноқли сондаги чекли тўпламларнинг бирлашмасидан иборат. Бирлашмадаги тўпламлар умумий элементларга эга бўлиши мумкин, шу сабабли алгебраик сонлар тўпламининг қуввати саноқлидан катта эмас. Аммо чексиз тўплам, чунки рационал сонлар алгебраик сонлар тўпламининг қисми. Демак, 6-теоремага асосан алгебраик сонлар тўплами саноқли. Теорема исбот бўлди.

3. Чексиз ва саноқли тўпламнинг бирлашмаси.

11-теорема. *Агар бирор* A *чексиз тўпламга чекли ёки саноқли* K *тўплам қўшилса, у ҳолда* $A \cup K$ *тўплам* A *тўпламга эквивалент бўлади.*

Исботи. 5-теоремага асосланиб, A дан саноқли D қисмини ажратамиз ва $A \setminus D$ тўпламни E орқали белгилаймиз. У ҳолда $A = E \cup D$, $A \cup K = E \cup D \cup K$ тенгликлар ўринли бўлади. 8-теореманинг 1-натижасига кўра $D \sim D \cup K$, ва $E \sim E$, бундан $A \cup K \sim A$ эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Саволлар ва машқлар

1. Рационал сонлар тўпламининг саноқли эканлигини исботланг.

2. Алгебраик сонларга мисол келтиринг.

3. Комплекс алгебраик сонлар тўпламининг саноқлилигини исботланг.

4. Қуйидаги тўпламларнинг саноқли эканлигини исботланг:

4.1. Текисликдаги, учларининг координаталари рационал сонлардан иборат учбурчаклар тўплами.

4.2. Текисликдаги, марказининг координаталари рационал сонлардан, радиуси натурал сондан иборат айланалар тўплами.

4.3. Сонлар ўқида, ўзаро кесишмайдиган кесмалар тўплами.

5. Агар B чексиз тўплам ва $f: B \to N$ инъектив акслантириш мавжуд бўлса, у ҳолда B тўпламнинг саноқли эканлигини исботланг.

6. Агар B чексиз тўплам ва $f: N \to B$ сюръектив акслантириш мавжуд бўлса, у ҳолда B тўпламнинг саноқли эканлигини исботланг.

5-§. Саноқсиз тўпламлар

1. Саноқсиз тўплам, хоссалари.

11-таъриф. Саноқли бўлмаган чексиз тўплам *саноқсиз тўплам* дейилади.

12-теорема. *Тўғри чизиқдаги* $[0;1]$ *сегментнинг нуқталари тўплами саноқсиз тўплам бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, $[0;1]$ сегментдаги нуқталар тўплами саноқли бўлсин. У ҳолда бу тўпламнинг элементларини номерлаб чиқиш мумкин:

$$[0;1] = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, \ldots\}.$$

Энди $[0;1]$ даги барча ҳақиқий сонларни чексиз ўнли каср кўринишида ёзамиз:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots,\\
x_2 &= 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots,\\
x_3 &= 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m &= 0,a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn}\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Агар [0;1] сегментга тегишли, лекин юқоридаги кетма-кетликда учрамайдиган x_0 сонни кўрсата олсак, теоремани исботлаган бўламиз. Бунинг учун x_0 сифатида $x_0=0,b_1b_2b_3...b_m...$ ($b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, . . ., $b_m \neq a_{mm}$, . . .) чексиз ўнли касрни қараш кифоя. Бу $x_0 \in [0;1]$ элемент x_i ларнинг бирортасига тенг эмас, демак, бу кетма-кетликда йўқ. Теорема исбот бўлди.

13-теорема. *Агар* B *чексиз тўплам саноқсиз бўлиб,* K *унинг чекли ёки саноқли қисми бўлса, у ҳолда* B\K *тўплам* B *тўпламга эквивалент бўлади.*

Исботи. Ушбу B\K=A тўплам чекли ёки саноқли бўлиши мумкин эмас, акс ҳолда 8-теореманинг 3-натижасига кўра $B=K\cup(B\backslash K)$ чекли ёки саноқли бўлар эди. Шунинг учун 11-теоремага асосан $A\cup K\sim A$, бундан $B\sim B\backslash K$ муносабат келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *Ихтиёрий чексиз тўплам ўзига эквивалент хос қисмга эга.*

Бундай хоссага фақат чексиз тўпламларгина эга, шу сабабли баъзи ҳолларда чексиз тўплам ўзининг бирор қисмига эквивалент бўлган тўплам деб ҳам таърифланади.

2. Континуум қувватли тўпламлар, мисоллар.

12-таъриф. [0;1] сегментдаги нуқталар тўпламига эквивалент бўлган тўпламлар ***континуум қувватли тўплам*** дейилади ва унинг қуввати с орқали белгиланади.

14-теорема. *Ихтиёрий* $[a;b]$ $(a<b)$ *сегментдаги нуқталар тўплами континуум қувватли тўплам бўлади.*

Исботи. Агар $y\in[a;b]$ ва $x\in[0;1]$ бўлса, у ҳолда $y=(b-a)x+a$ чизиқли функция бу тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатади. Демак, $[a;b]$ - континуум қувватли тўплам.

Натижа. *Ихтиёрий* $[a;b)$ *ёки* $(a;b]$ *ярим оралиқлар, шунингдек,* $(a;b)$ *интервалдаги нуқталар тўплами континуум қувватга эга.*

15-теорема. *Саноқли тўпламнинг барча қисм тўпламларидан тузилган тўплам континуум қувватга эга.*

Исботи. Айтайлик, A саноқли тўплам берилган бўлсин. Унинг элементларини a_1, a_2, a_3, . . ., a_n,. . . кетма-кетлик кўринишида ёзиб оламиз. Бу элементлар бир-биридан индекслари билан фарқ қилади. Агар индекслар кетма-кетликлари тўпламининг, яъни ихтиёрий, қатъий ўсувчи натурал сонлар кетма-кетликлари (чекли ёки чексиз) тўпламининг (0;1] ярим оралиққа эквивалентлигини кўрсатсак, теоремани исботлаган бўламиз. Маълумки, (0;1] ярим оралиққа тегишли сонни ягона усулда чексиз, иккилик саноқ системасидаги ўнлик каср кўринишида ёзиб олиш мумкин. Қуйидаги усулда ҳар бир $0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ касрга қатъий ўсувчи $\{k_n\}$ натурал сонлар кетма-кетлигини мос қўямиз: кетма-кетлик ҳади сифатида касрнинг $\alpha_n=1$ бўладиган хона номерлари олинган, масалан, 0,010010001 иккилик касрга {2, 5, 9} кетма-кетликни мос қўямиз. Шундай қилиб, (0;1] ярим оралиқдан олинган ҳар бир сонга битта ва фақат битта кетма-кетлик мос келади ва аксинча, ҳар бир қатъий ўсувчи кетма-кетлик аниқ битта сонни аниқлайди: масалан, {2,4,7,...} кетма-кетлик 0,0101001... сонни аниқлайди. Шундай қилиб, (0;1] ярим оралиқ ва барча қатъий ўсувчи кетма-кетликлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди. Бу эса барча қатъий ўсувчи кетма-кетликлар тўплами, яъни саноқли тўпламнинг барча қисм тўпламларидан тузилган тўплам континуум қувватли эканлигини исботлайди. Теорема исбот бўлди.

3. Ҳақиқий сонлар тўпламининг саноқсизлиги.

1-§ даги 2-теоремадан R нинг саноқсизлиги келиб чиқади. Энди унинг қуввати қандай деган саволга жавоб берамиз.

16-теорема. *Ҳақиқий сонлар тўплами континуум қувватли тўплам.*

Исботи. $(0;1)\sim R$ эканлигини кўрсатиш учун (0;1) интервалда аниқланган $y=\mathrm{tg}\dfrac{\pi(2x-1)}{2}$ функцияни қараш етарли.

Бу теорема ва саноқсиз тўплам хоссаларидан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1-натижа. *Иррационал сонлар тўплами континуум қувватга эга.*

Ҳақиқатан ҳам, барча иррационал сонлар тўпламини I билан белгиласак, $I=R\backslash Q\sim R$ бўлади.

Маълумки, алгебраик бўлмаган ҳақиқий сон *трансцендент сон* дейилади.

2-натижа. *Барча трансцендент сонлар тўплами континуум қувватга эга.*

Исботи. R-ҳақиқий сонлар тўплами, A-алгебраик сонлар тўплами бўлсин. У ҳолда $R\backslash A$-трансцендент сонлар тўпламидан иборат бўлади. 16-ва 13-теоремалардан трансцендент сонлар тўпламининг континуум қувватли тўплам эканлиги келиб чиқади.

Саволлар ва машқлар

1. Қандай тўплам саноқсиз дейилади?

2. Саноқсиз тўпламга мисол келтиринг.

3. Ҳақиқий сонлар тўпламининг саноқсизлигини исботланг.

4. Континуум қувватли тўплам қандай тўплам? Унинг саноқсиз тўпламдан фарқини кўрсатинг.

5. Кесмани интервалга ўзаро бир қийматли акслантирувчи узлуксиз функция мавжудми? Жавобингизни асосланг.

6. Айлана нуқталари тўпламининг саноқсизлигини кўрсатинг.

7. Қуйидаги тўпламларнинг қувватини аниқланг:

7.1. Доира нуқталари тўплами.

7.2. Парабола нуқталари тўплами.

7.3. Комплекс сонлар тўплами.

7.4. Текисликдаги иррационал координатали нуқталар тўплами.

7.5. Текисликнинг битта координатаси рационал, иккинчиси иррационал бўлган нуқталари тўплами.

7.6. Параллел тўғри чизиқлар тўплами.

7.7. Концентрик айланалар тўплами.

8. Текисликда, ўзаро кесишмайдиган айланалар тўплами қандай қувватли тўплам?

9. Текисликда, ихтиёрий иккитасининг орасидаги масофа бирдан кичик бўлмаган нуқталар тўпламининг қуввати топилсин.

6-§. Тўпламлар ҳалқаси. Тўпламлар алгебраси

Тўпламлар системаси деганда элементлари тўпламлардан иборат тўпламни тушунамиз.

13-таъриф. Агар H тўпламлар системасининг исталган иккита A ва B элементлари учун $A\cap B\in H$ ва $A\Delta B\in H$ муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда H система *тўпламлар ҳалқаси* (қисқача *ҳалқа*) дейилади.

14-таъриф. Агар H тўпламлар системасининг бирор E элементи ва шу системанинг исталган A элементи учун $E\cap A=A$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда E элемент H системанинг *бирлик элементи* дейилади.

Ҳалқада бирлик элемент(агар бор бўлса) ягона бўлади.

15-таъриф. Бирлик элементга эга бўлган H тўпламлар ҳалқаси *тўпламлар алгебраси* дейилади.

Мисол. Бирор Е тўплам олиб, унинг барча қисм тўпламларидан тузилган Н тўплам остилар системасини қараймиз. Исталган иккита $A \in H$ ва $B \in H$ учун $A \cap B \in H$ ва $A \Delta B \in H$ муносабатларнинг ўринли эканлиги Н нинг тузилишидан кўриниб турибди. Демак, бу тўпламлар системаси ҳалқа ташкил этади. Е тўпламнинг ўзи Н система учун бирлик элемент бўлади. Демак, Н тўплам остилар системаси айни вақтда тўпламлар алгебраси ҳам экан.

Келгусида I орқали индекслар тўпламини белгилаймиз.

17-теорема. *Исталган сондаги* $\{H_\alpha, \alpha \in I\}$ *ҳалқалар системасининг кесишмаси* $H = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$ *ҳам ҳалқа бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $A, B \in H$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\alpha \in I$ учун $A, B \in H_\alpha$ бўлади. Энди H_αнинг ҳалқа эканлигидан ихтиёрий $\alpha \in I$ учун $A \cap B$, $A \Delta B \in H_\alpha$ келиб чиқади. Демак, $A \cap B$, $A \Delta B \in H$.

Бу теорема қуйидаги тушунчани киритишда асосий вазифани бажаради:

Фараз қилайлик, $\{F_\alpha, \alpha \in I\}$ ҳалқалар тўплами берилган ва ихтиёрий $\alpha \in I$ учун $H \subset F_\alpha$ бўлсин.

15.1-таъриф. Агар $\{F_\alpha\}$ ларнинг бирор F_{α_0} элементи учун $F_{\alpha_0} \subset F_\alpha$ шарт ихтиёрий $\alpha \in I$ учун бажарилса, яъни $F_{\alpha_0} = \cap F_\alpha$ бўлса, у ҳолда ҳалқа Н системани ўз ичига олган *минимал ҳалқа* дейилади.

18-теорема. *Ҳар қандай* Н *тўпламлар системаси учун шу системани ўз ичига олувчи ягона минимал ҳалқа мавжуд.*

Келгусида Н тўпламлар тўпламини ўз ичига олувчи минимал ҳалқа $\mathfrak{R}(H)$ кўринишда белгиланади.

16-таъриф. Бирор Н тўпламлар системаси қуйидаги уч шартни қаноатлантирса, у *ярим ҳалқа* дейилади:

1. $\varnothing \in H$.
2. Ихтиёрий $A, B \in H$ учун $A \cap B \in H$.
3. $A_1 \subset A$ шартни қаноатлантирувчи A_1, $A \in H$ элементлар учун Н да ўзаро кесишмайдиган чекли сондаги $A_2, A_3, \ldots, A_n$ элементлар топиладики, улар учун $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ тенглик ўринли бўлади.

Шуниси эътиборлики, ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқа элементларини, шу ярим ҳалқа элементлари орқали ифодалаш, яъни топиш мумкин экан.

19-теорема. *Берилган* Н *ярим ҳалқани ўз ичига олган* B(H) *минимал ҳалқанинг ҳар бир* А *элементи* Н *ярим ҳалқадан* *олинган сони чекли ўзаро кесишмайдиган* $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ *тўпламларнинг бирлашмасидан иборат, яъни ҳар бир* $A \in \Re(H)$ *ушбу кўринишга эга:*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,\ A_i \in H,\ i = 1,2,\dots,n,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j. \tag{1}$$

Исботи. H нинг элементларидан тузилган (1) кўринишдаги тўпламлар системасини F орқали белгилаймиз. Агар $A, B \in F$ бўлса, у ҳолда уларнинг ҳар бири ўзаро кесишмайдиган тўпламларга ёйилади: $A = \cup A_i$, $B = \cup B_j$, A_i, $B_j \in H$. Энди, H ярим ҳалқа эканлигидан $C_{ij} = A_i \cap B_j \in H$ бўлади. Яна бир бор ярим ҳалқа таърифидан фойдаланиб, $A_i = \cup_j C_{ij} \cup_k D_{ik}$, $B_j = \cup_i C_{ij} \cup_s E_{js}$ шартларни қаноатлантирувчи ўзаро кесишмайдиган $D_{ik}, E_{js} \in H$ лар мавжудлигини аниқлаймиз. Булардан $A \cap B$, $A \Delta B \in F$ келиб чиқади. Демак, F тўплам ҳалқа экан ва H ни ўз ичига олади. Теорема исбот бўлди.

Кўп масалаларда тўпламлар системаси H дан олинган саноқли сондаги элементларининг бирлашмаси ва кесишмасини қарашга тўғри келади. Шу туфайли қуйидаги таърифни киритамиз:

17-таъриф. Агар H тўпламлар ҳалқасида $A_n \in H$, $n = 1,2,3,\dots$ муносабатдан $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in H$ муносабат келиб чиқса, у ҳолда бундай ҳалқа *σ-ҳалқа* дейилади.

Бирлик элементга эга бўлган σ-ҳалқа *σ-алгебра* дейилади.

Мисол. Агар H сифатида $N = \{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларидан тузилган тўплам остилар тўплами қаралса, у ҳолда H тўпламлар системасининг ҳалқа бўлиши ўз-ўзидан равшан. Ундан ташқари, N тўпламнинг саноқли сондаги қисм тўпламларининг йиғиндиси ҳам унинг қисм тўплами бўлади. Демак, H тўпламлар системаси σ-ҳалқа экан. Айни вақтда H σ-алгебра ҳам бўлади. Чунки N тўпламнинг ўзи H нинг бирлик элементи вазифасини бажаради.

18-таъриф. Агар H тўпламлар ҳалқасида $A_n \in H$, $n = 1,2,3,\dots$ муносабатдан $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in H$ муносабат келиб чиқса, бундай ҳалқа *δ-ҳалқа* дейилади.

Саволлар ва машқлар

1. Ҳалқада бирлик элемент ягоналигини исботланг.
2. Тўпламлар алгебрасига мисоллар келтиринг.
3. 18-теоремани исботланг. Кўрсатма: X= $\bigcup_{A \in H} A$ тўпламнинг, яъни H га кирувчи барча тўпламлар бирлашмаси X нинг тўплам остилар тўплами бўлган M(X) ҳалқа ичидан H ни ўз ичига олувчи барча ҳалқалар кесишмасини қаранг.

II БОБ. МЕТРИК ФАЗОЛАР

1-§. Метрик фазо таърифи ва мисоллар

1. Метрик фазонинг таърифи.

1-таъриф. Агар X тўпламнинг ихтиёрий икки x ва y элементига мусбат сонни мос қўювчи $\rho(x,y)$ функция берилган бўлиб, у:

1) $\rho(x,y) \geq 0$; $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметриклик аксиомаси);

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (учбурчак аксиомаси)

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $\rho(x,y)$ функция *метрика* (*масофа*) дейилади.

Агар X тўпламда ρ метрика киритилган бўлса, у ҳолда X *метрик фазо* дейилади ва (X,ρ) кўринишда белгиланади.

Битта тўпламда метрикани турлича киритиш мумкин.

2. Метрик фазога мисоллар.

1) Ҳақиқий сонлар: $X=R$. Масалан, бу тўпламда x ва y сонлар орасидаги масофа

$\rho(x,y)=|y-x|$

каби киритилади.

2) n–ўлчамли Евклид фазоси: $X=R^n$ да $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ нуқталар орасидаги масофа $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$ формула ёрдамида ҳисобланади. Бундай метрика киритилган R^n фазо, қисқача, R_2^n орқали белгиланади.

Хусусан, n=2 бўлганда бу метрик фазо Евклид текислиги дейилади.

3) Агар n–ўлчамли R^n фазонинг $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ нуқталари орасидаги масофа $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|$ каби аниқланса, у ҳолда R^n метрик фазо бўлади (исботланг) ва R_1^n орқали белгиланади.

4) Агар n–ўлчамли R^n фазонинг $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ нуқталари орасидаги масофа $\rho(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|y_k-x_k|$ каби аниқланса, у ҳолда R^n метрик фазо бўлади (исботланг) ва R^n_∞ орқали белгиланади.

5) $X=\ell_2=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots),\ x_i\in R$ ва $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty\}$.

Бу тўпламда метрика $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty}(y_i-x_i)^2}$ каби аниқланади.

6) $X=C[a;b]$ тўплам $[a;b]$ кесмада берилган узлуксиз функциялар тўпламида, метрикани қуйидагича киритамиз:

$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[a;b]}|y(t)-x(t)|$. Бунинг метрика бўлишини текшириш қийин эмас.

Метрика аксиомаларидан биринчи ва иккинчисининг ўринлилиги равшан. Учбурчак аксиомасини текширамиз.

Ихтиёрий $t\in[a;b]$ нуқта ва $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар учун ушбу муносабат бажарилади:

$$|x(t)-y(t)|=|(x(t)-z(t))+(z(t)-y(t))|\le|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|.$$

Бу тенгсизликдан

$$\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\le t\le b}|z(t)-y(t)|$$

бўлиши келиб чиқади. Охирги тенгсизлик

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

эканини билдиради.

7) $C[a;b]$ да метрикани қуйидагича ҳам киритиш мумкин: $\rho(x,y)=\int\limits_a^b|y-x|\,dt$. Бу метрик фазо $C_1[a;b]$ орқали белгиланади.

8) $C[a;b]$да $\rho(x,y)=\left(\int\limits_a^b(y-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$ функция метрика аксиомаларини қаноатлантиради. Бу метрик фазо $C_2[a;b]$ орқали белгиланади.

9) Айтайлик, X, бўш бўлмаган ихтиёрий бир тўплам бўлсин. Ундан олинган x, $y \in X$ учун

$$\rho(x,y)=\begin{cases} 1, \text{агар } x \neq y \text{ бўлса,} \\ 0, \text{агар } x = y \text{ бўлса,} \end{cases}$$

шарт билан функция аниқлаймиз. Бу функция метрика аксиомаларини қаноатлантиради.

Бундай аниқланган метрика *дискрет метрика*, метрик фазо эса *дискрет метрик фазо* дейилади.

Метрик фазоларга мисоллар кўплиги қуйидагидан келиб чиқади:

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазо ва $M \subset X$ нинг ихтиёрий қисм тўплами бўлсин. У ҳолда $\rho(x,y)$ функция M тўпламда ҳам метрика бўлади ва (M,ρ) ни метрик фазо деб қараш мумкин. Бу метрик фазо (X,ρ) метрик фазонинг қисм фазоси дейилади.

Саволлар ва машқлар

1. Метрика аксиомаларини айтинг.

2. Метрик фазони таърифланг.

3. Метрик фазоларга мисоллар келтиринг.

4. Текисликдаги $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ нуқталар учун $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ каби аниқланган функция метрика бўладими?

5. Тўғри чизиқда:

a) $\rho(x,y)=x^3-y^3$;

b) $\rho(x,y)=|x^3-y^3|$;

c) $\rho(x,y)=|\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y|$

функцияларнинг қайси бири метрика бўлади?

6. $M=\{a,b,c\}$ тўпламда $\rho(a,c)=\rho(c,a)=\rho(a,b)=\rho(c,b)=2$, $\rho(b,c)=\rho(b,a)=1$ каби аниқланган ρ функция метрика бўладими? ρ учбурчак аксиомасини қаноатлантирадими?

7. Агар $M=\{a,b,c\}$ тўпламда $\rho(a,b)=\rho(b,c)=1$ шартни қаноатлантирувчи ρ метрика берилган бўлса, у ҳолда $\rho(a,c)$ қандай қийматларни қабул қилиши мумкин?

8. Метрика аксиомалари қуйидаги икки аксиомага тенг кучли эканлигини исботланг:

1. $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

2. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(y,z)$.

9. Айланада $\rho(A,B)$-ватар узунлиги бўйича ва $\rho(A,B)$-кичик ёй узунлиги бўйича A ва B нуқталар орасида метрика киритиш

мумкинлигини текширинг. Бу метрикаларнинг бирини иккинчиси орқали қандай ифодалаш мумкин?

10. Уч ўлчамли фазода координаталар бошидан чиқувчи нурлар тўплами икки нур орасидаги масофа сифатида улар ташкил қилган бурчаклар кичигининг радиан ўлчови олинса метрик фазо бўлишини кўрсатинг.

11. Кўпҳадлар фазосида $\rho(P_1,P_2)=|P_1(0)-P_2(0)|$ функция метрика аксиомаларини қаноатлантирадими?

12. Айтайлик, (M,ρ)-метрик фазо, A бирор тўплам ва $f{:}A\to M$ акслантириш берилган бўлсин. Ихтиёрий $x,y\in A$ учун

$$\rho_1(x,y)=\rho(f(x),f(y))$$

каби аниқланган функцияни қараймиз. Бу функция A тўпламда метрика бўлиши учун f акслантиришнинг инъектив бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

13. Бутун сонлар тўплами Z да аниқланган

$$\rho(m,n)=\begin{cases} 0, & \text{агар } m=n \text{ бўлса,} \\ \dfrac{1}{3^k}, & \text{агар } m\neq n \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функция метрика бўлишини исботланг. Бу ерда k сони m-n айирманинг туб ёйилмасида қатнашган 3 нинг энг катта даражаси. Масалан, $\rho(21,0)=\frac{1}{3}$, $\rho(21,3)=\frac{1}{9}$. Мустақил равишда $\rho(5,7)$, $\rho(7,-2)$, $\rho(7,25)$ларни ҳисобланг.

14. Натурал сонлар тўплами N да аниқланган

a) $\rho(m,n)=\dfrac{|m-n|}{mn}$; b) $\rho(m,n)=\begin{cases} 0, & \text{агар } m=n \text{ бўлса,} \\ 1+\dfrac{1}{m+n}, & \text{агар } m\neq n \text{ бўлса,} \end{cases}$

функциялар метрика бўладими?

15. Агар M тўпламда ρ метрика бўлса, у ҳолда

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

функция ҳам M да метрика бўлишини исботланг.

16. Айтайлик, f функция $[0;\infty)$ да аниқланган ва

1) $f(0)=0$;

2) ўсувчи;

3) ихтиёрий x, y учун $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ бўлсин.

Агар A тўпламда ρ метрика берилган бўлса, у ҳолда

$$\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$$

функция ҳам А да метрика бўлишини исботланг.

17. Айтайлик, f функция $[0;\infty)$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб,

1) $f(0)=0$;

2) ўсувчи;

3) $(0;\infty)$ оралиқда иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд ва $f''(x) < 0$ бўлсин.

Агар А тўпламда ρ метрика берилган бўлса, у ҳолда

$$\rho_1(x,y)=f(\rho(x,y))$$

функция ҳам А тўпламда метрика бўлишини исботланг.

18. Агар ρ_1 ва ρ_2 бирор М тўпламда берилган метрикалар бўлса, у ҳолда ихтиёрий α_1 ва α_2 мусбат сонлар учун $\rho(x,y)=\alpha_1\rho_1(x,y)+\alpha_2\rho_2(x,y)$ функция ҳам М тўпламда метрика бўлишини исботланг.

2-§. Метрик фазода яқинлашиш тушунчаси

1. Яқинлашувчи кетма-кетликлар.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазода бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай $n_o(\varepsilon)$ номер топилиб, барча $n>n_o(\varepsilon)$ лар учун $\rho(x_n,x)<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик X фазода x элементга *яқинлашади* дейилади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ёки $x_n \to x$ орқали белгиланади.

Бу x элемент $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* дейилади.

Метрик фазода кетма-кетлик лимитини қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар $n\to\infty$ да $\rho(x_n,x) \to 0$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$ бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик X фазода x элементга яқинлашади дейилади.

Умуман олганда, метрик фазо элементлари нафақат сонлардан иборат бўлиши, балки ихтиёрий табиатли қандайдир элементлардан иборат бўлиши ҳам мумкин. Шу сабабли кетма-кетлик лимитининг тушунчаси кенг татбиққа эга.

Масалан, $x_n(t)=t^n$ кўринишдаги функциялар кетма-кетлиги $C_1[0;1]$ фазода айнан нол, яъни $\theta(t)\equiv 0$ функцияга яқинлашади.

Ҳақиқатан, бу фазода $\rho(x_n,\theta)=\int\limits_0^1|t^n-0|dt=\int\limits_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$,

демак, $n\to\infty$ да $\rho(x_n,x) \to 0$ бўлади.

Бу кетма-кетлик $C[0;1]$ фазода $\theta(t)\equiv 0$ функцияга яқинлашмайди, чунки бу ҳолда $\rho(x_n,\theta)=\max\limits_{0\le t\le 1}|t^n-0|=\max\limits_{0\le t\le 1} t^n=1$ бўлади, яъни $n\to\infty$ да $\rho(x_n,x)\not\to 0$.

2. Яқинлашувчи кетма-кетлик хоссалари.

1-теорема. *Яқинлашувчи кетма-кетлик фақат битта лимитга эга.*

Исботи. Фараз қилайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити иккита, яъни $x_n\to x$, $x_n\to y$ ва $x\neq y$ бўлсин. У ҳолда метриканинг учбурчак аксиомасига кўра,

$$0\le\rho(x,y)\le\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)$$

бўлади.

Аммо, бу тенгсизликнинг ўнг томони $n\to\infty$ да 0 га интилади, демак, $\rho(x,y)=0$, бундан $x=y$ келиб чиқади.

2-теорема. *Ихтиёрий* $\rho(x,y)$ *метрика ўзининг аргументлари* x *ва* y *элементларнинг узлуксиз функциясидир, яъни агар* $x_n\to x$ *ва* $y_n\to y$ *бўлса, у ҳолда* $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$ *бўлади.*

Исботи. Ихтиёрий тўрт элемент $x,y,z,u\in X$ учун

$$|\rho(x,y)-\rho(z,u)|\le\rho(x,z)+\rho(y,u) \tag{1}$$

тенгсизлик ўринли.

Метриканинг учбурчак аксиомасидан фойдаланиб,

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,u)+\rho(u,y) \tag{2}$$

тенгсизликларни ёзиш мумкин. Бундан

$$\rho(x,y)-\rho(z,u)\le\rho(x,z)+\rho(u,y)$$

келиб чиқади. Бу тенгсизликда x, y ларни мос равишда z, u лар билан, z, u ларни мос равишда x, y лар билан алмаштириб,

$$\rho(z,u)-\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(u,y) \tag{3}$$

тенгсизликка эга бўламиз. (2) ва (3) дан (1) келиб чиқади.

Энди (1) тенгсизликда z ва u ларни мос равишда x_n ва y_n билан алмаштирилса,

$$|\rho(x,y)-\rho(x_n,y_n)|\le\rho(x,x_n)+\rho(y,y_n)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизликнинг ўнг томони, теорема шартига кўра нолга интилади, бундан эса $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3-теорема. *Агар* $\{x_n\}$ *кетма-кетлик* x *га яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетликнинг ихтиёрий* $\{x_{n_k}\}$ *қисм кетма-кетлиги ҳам шу* x *га яқинлашади.*

Бу теореманинг исботини мустақил бажаринг.

4-теорема. *Агар* $\{x_n\}$ *кетма-кетлик* x *га яқинлашса ва* $x_0 \in X$ *тайин бир элемент бўлса, у ҳолда* $\{\rho(x_n,x_0), n=1,2,...\}$ *сонлар тўплами чегараланган бўлади.*

Исботи. Умумий ҳади $c_n=\rho(x_n,x)$ бўлган сонли кетма-кетликни қараймиз. Бу $\{c_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлганлиги сабабли, у чегараланган бўлади. Унинг юқори чегарасини K билан белгилаймиз: $c_n \le K$. Метриканинг учбурчак аксиомасига кўра

$$\rho(x_n ,x_0)\le \rho(x_n ,x)+\rho(x ,x_0)\le K+\rho(x ,x_0)=K_1$$

бўлади. Теорема исбот бўлди.

3. Баъзи метрик фазоларда яқинлашиш тушунчасининг маънолари.

а) Дискрет метрик фазода кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун бу кетма-кетликнинг ҳамма элементлари бирор ҳадидан бошлаб бир-бирига тенг бўлиши зарур ва етарли.

б) n–ўлчамли Евклид фазосида $\{x^{(k)}\}$ кетма-кетликнинг x элементга яқинлашиши учун $x^{(k)}$ вектор координаталари мос равишда x вектор координаталарига яқинлашиши зарур ва етарли.

Масалан, R_2^n да $\rho(x^{(k)},x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-x_i)^2}\to 0(k\to\infty)$ бўлса, у ҳолда $x_i^{(k)}\to x_i$, $i=1,2,...,n$ бўлади.

в) Айтайлик, $C[a;b]$ фазонинг элементларидан иборат $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик учун $x_n(t)$ $\quad (t)\in C[a;b]$, яъни

$$\rho(x_n,x)=\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0,\ n \quad \infty$$

бўлсин. Бундан ихтиёрий кичик $\varepsilon>0$ сони учун шундай n_0 натурал сон топиладики, $n>n_0$ бўлганда

$$\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, t нинг $[a;b]$ даги барча қийматлари учун $n>n_0$ бўлганда

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли экан. Бу эса $\{x_n(t)\}$ кетма-кетликнинг x(t) функцияга текис яқинлашишини билдиради ва аксинча, $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $[a;b]$ кесмада x(t) га текис яқинлашса, у ҳолда $\rho(x_n,x)\to 0$ бўлади. Демак, $C[a;b]$ фазода метрика маъносида яқинлашиш текис яқинлашиш тушунчаси билан устма-уст тушар экан.

Саволлар ва машқлар

1. Яқинлашувчи кетма-кетликни таърифланг.

2. Кетма-кетлик лимитининг ягоналигини исботланг.

3. R^2, R^3 ва $C[0;1]$ фазоларда яқинлашувчи кетма-кетликларга мисоллар келтиринг.

4. Агар $x_n \to a$ ва $\rho(x_n, y_n) \to 0$ бўлса, у ҳолда $y_n \to a$ эканлигини исботланг.

5. Қуйидаги функциялар кетма-кетлиги кўрсатилган фазода $f(x) \equiv 0$ функцияга яқинлашадими?

1) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, a) $C[0;1]$; b) $C_1[0;1]$;

2) $f_n(x) = xe^{-nx}$, a) $C[0;10]$; b) $C_1[0;10]$;

3) $f_n(x) = n^{-\frac{1}{8}}\sqrt{2nxe}^{\,-\frac{1}{2}nx^2}$, a) $C[0;1]$; b) $C_2[0;1]$;

4) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, a) $C[-\pi;\pi]$; b) $C_1[-\pi;\pi]$.

6. R_2^n, R_1^n, R_∞^n фазоларда метрикага нисбатан яқинлашиш билан биргаликда координаталари бўйича яқинлашиш тушунчаси ҳам қаралади. Агар $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}_m = x_m$ $(m=1, \ldots, n)$ бўлса, у ҳолда $\{x^{(k)}\} = \{(x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \ldots, x^{(k)}_n)\}$ нуқталар кетма-кетлиги $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нуқтага координаталар бўйича яқинлашади дейилади.

Савол: R_2^2 фазода $M_n = \left(\dfrac{n-1}{n}; \dfrac{2n}{n+1}\right)$ нуқталар кетма-кетлиги координаталар бўйича қандай нуқтага яқинлашади? Бу кетма-кетлик R_1^2, R_∞^2 фазоларда шу нуқтага яқинлашадими?

7. R_2^n фазода яқинлашувчи ихтиёрий кетма-кетликнинг координаталар бўйича ҳам яқинлашувчи ва аксинча, координаталар бўйича яқинлашувчи кетма-кетликнинг метрика бўйича ҳам яқинлашувчи эканлигини исботланг.

3-§. Метрик фазода баъзи топологик тушунчалар

1. Очиқ ва ёпиқ шарлар, нуқтанинг ε-атрофи.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазо берилган бўлсин. Келгусида метрик фазо элементи ёки метрик фазо нуқтаси бир хил маънода ишлатилади.

3-таъриф. Бирор $x_0\in X$ нуқта ва $\rho > 0$ сон учун ушбу $S(x_0,r)=\{x\in X: \rho(x,x_0)<r\}$ тўплам X фазода *очиқ шар*;

$\bar{S}(x_0,r)=\{x\in X: \rho(x,x_0)\le r\}$ тўплам *ёпиқ шар* дейилади.

Шу x_0 нуқта шарнинг *маркази*, r сон шарнинг *радиуси* дейилади.

Зарурият туғилганда $\{x\in X: \rho(x,x_0)=r\}$ тўпламни ҳам ишлатамиз, у x_0 марказли, r радиусли *сфера* дейилади.

4-таъриф. $S(x_0,\varepsilon)$ очиқ шар x_0 нуқтанинг ε-*атрофи* дейилади ва $O_\varepsilon(x_0)$ каби белгиланади.

Нуқта атрофининг баъзи хоссаларини ўрганамиз.

1°. Ҳар бир нуқта ўзининг ихтиёрий атрофига тегишли.

Ҳақиқатан, агар $\varepsilon>0$ бўлса, у ҳолда $\rho(a,a)=0<\varepsilon$, шунинг учун $a\in O_\varepsilon(a)$.

2°. Бир нуқтанинг ихтиёрий икки атрофи кесишмаси ҳам шу нуқтанинг атрофи бўлади.

Ҳақиқатан, агар $\varepsilon<\delta$ бўлса, у ҳолда $O_\varepsilon(a)\cap O_\delta(a)=O_\varepsilon(a)$ бўлиши тушунарли.

3°. Агар $x\in O_\varepsilon(a)$ бўлса, у ҳолда x нуқтанинг $O_\varepsilon(a)$ да ётувчи атрофи мавжуд.

Ҳақиқатан, айтайлик, $\rho(a,x)=d$ бўлсин. $x\in O_\varepsilon(a)$ элемент учун $\delta=\varepsilon-d>0$ сонни қараймиз. Агар $y\in O_\delta(x)$ бўлса, у ҳолда метриканинг учбурчак аксиомасига кўра

$$\rho(a,y)\le\rho(a,x)+\rho(x,y)<d+\delta=d+(\varepsilon-d)=\varepsilon$$

бўлади. Демак, $y\in O_\varepsilon(a)$. Бундан $O_\delta(x)\subset O_\varepsilon(a)$ келиб чиқади.

4°. Бир-биридан фарқли икки нуқтанинг ўзаро кесишмайдиган атрофлари мавжуд.

Ҳақиқатан, айтайлик, $a,b\in X$, $a\ne b$ ва $\rho(a,b)=r$ бўлсин. $\varepsilon={}^r/_3$ бўлганда $O_\varepsilon(a)$ ва $O_\varepsilon(b)$ атрофларнинг кесишмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, бу атрофлар умумий x нуқтага эга бўлсин. У ҳолда

$\rho(a,x)<\varepsilon$, $\rho(b,x)<\varepsilon$ ва $\rho(a,b)\le\rho(a,x)+\rho(b,x)<2\varepsilon={}^{2r}/_3<r$.

Бу эса шартга зид.

2. Чегараланган тўплам.

5-таъриф. Агар (X,ρ) метрик фазодаги М тўплам бирор шар ичида жойлашган бўлса, у ҳолда бу тўплам *чегараланган тўплам* дейилади.

Бу таърифнинг қуйидаги таърифга эквивалент эканлигини текшириш қийин эмас:

Агар (X,ρ) метрик фазодаги М тўпламга тегишли барча x ва *y* нуқталар учун $\rho(x,y)<K$ тенгсизликни қаноатлантирувчи K мусбат сон мавжуд бўлса, у ҳолда М тўплам чегараланган дейилади.

Агар бир тўпламда икки хил метрика берилган бўлса, у ҳолда қаралаётган М тўплам бир метрикага нисбатан чегараланган, иккинчи бир метрикага нисбатан чегараланмаган бўлиши мумкин.

Масалан, N натурал сонлар тўплами $\rho(n,m)=|n-m|$ метрикага нисбатан чегараланмаган, лекин

$$\rho_1(n,m)=\begin{cases} 0, & \text{агар } m=n \text{ бўлса,}\\ 1+\dfrac{1}{m+n}, & \text{агар } m\neq n \text{ бўлса,}\end{cases}$$

метрикага нисбатан чегараланган тўпламдир. Чунки 1 дан фарқли барча n ларда $\rho_1(1,n)<2$, яъни бу метрикага нисбатан барча натурал сонлар тўплами маркази 1 нуқтада радиуси 2 га тенг очиқ шар ичига жойлашган бўлади.

3. Тўпламнинг уриниш, лимит нуқталари.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазода бирор М тўплам берилган бўлсин.

6-таъриф. Агар $x_0\in X$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида М тўпламнинг x_0 дан фарқли элементи мавжуд бўлса, у ҳолда x_0 нуқта М тўпламнинг *лимит нуқтаси* дейилади.

Мисоллар. 1. Ихтиёрий (X,ρ) метрик фазодаги $S(x_0,r)$ очиқ шарнинг лимит нуқталари тўплами $\bar{S}(x_0,r)$ ёпиқ шардан иборат бўлади.

2. Сонлар ўқидаги баъзи тўпламларни қараймиз:

а) $E_1=N$ натурал сонлар тўплами бўлсин. Бу тўпламнинг бирорта ҳам лимит нуқтаси мавжуд эмас.

b) $E_2=\{^1/_n : n=1,2,...\}$ бўлсин. Бу тўпламнинг биргина лимит нуқтаси 0 бор ва $0 \notin E_2$.

c) $E_3=(0;1)$. Бу тўпламнинг лимит нуқталари [0;1] кесманинг барча нуқталаридан иборат.

d) $E_4=(0;1)\cap Q$ бўлсин. Бу тўпламнинг лимит нуқталари ҳам [0;1] кесманинг барча нуқталаридан иборат.

7-таъриф. Агар $x_0 \in X$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида M тўпламнинг камида битта элементи мавжуд бўлса, у ҳолда x_0 нуқта M нинг *уриниш нуқтаси* дейилади.

Лимит нуқта уриниш нуқтаси бўлади, лекин аксинчаси ҳар доим ҳам ўринли эмас. Масалан, чекли тўпламнинг ҳар бир нуқтаси уриниш нуқтаси бўлади, аммо лимит нуқта бўла олмайди. Юқоридаги E_1 ва E_2 тўпламларнинг барча нуқталари уриниш нуқталари бўлади.

4. Тўпламнинг ёпилмаси.

8-таъриф. M тўпламнинг барча уриниш нуқталари тўплами $\overline{M}$ билан белгиланиб, M нинг *ёпилмаси* дейилади.

5-теорема. *Ихтиёрий* M, M_1 *ва* M_2 *тўпламлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли:*

1) $M \subset \overline{M}$;

2) $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$;

3) агар $M_1 \subset M_2$ *бўлса, у ҳолда* $\bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$ *бўлади;*

4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

Исботи. Биринчи хосса тўпламнинг уриниш нуқтаси таърифидан келиб чиқади.

Иккинчи хоссани исботлаймиз. Биринчи хоссага асосан $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Шунинг учун $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ муносабатни исботлаш етарли.

Айтайлик, $x \in \overline{\overline{M}}$ бўлсин. У ҳолда бу нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида $\overline{M}$ га тегишли x_1 нуқта топилади. Энди x_1 нуқтанинг радиуси $\varepsilon_1=\varepsilon-\rho(x,x_1)>0$ бўлган атрофини оламиз. Агар $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(z,x) \le \rho(z,x_1) + \rho(x_1,x) < \varepsilon,$$

яъни $z \in O_\varepsilon(x)$ бўлади. Шундай қилиб, $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Аммо $x_1 \in \overline{M}$, демак, x_1нинг ε_1-атрофида M га тегишли x_2 нуқта мавжуд. Шунинг учун $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Лекин $O_\varepsilon(x)$ шар x нуқтанинг ихтиёрий атрофи бўлгани учун $x \in \overline{M}$.

Учинчи хосса ўз-ўзидан равшан.

Тўртинчи хоссани исботлаймиз. Айтайлик $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ бўлсин, у ҳолда x нуқтанинг ихтиёрий $O_\varepsilon(x)$ атрофида $M_1 \cup M_2$ га тегишли x_1 элемент мавжуд. Агар $x \notin \overline{M_1}$ ва $x \notin \overline{M_2}$ бўлса, у ҳолда x нинг шундай $O_{\varepsilon_1}(x)$ ва $O_{\varepsilon_2}(x)$ атрофлари мавжудки, бу атрофлар мос равишда M_1 ва M_2 тўпламлар билан кесишмайди. Энди $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ деб олсак, у ҳолда x нуқтанинг $O_\varepsilon(x)$ атрофи $M_1 \cup M_2$ тўплам билан кесишмайди. Бу эса x нинг танланишига зид. Демак, x нуқта $\overline{M_1}$ ёки $\overline{M_2}$ тўпламлардан камида биттасига тегишли, яъни

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Тескари муносабатнинг ўринлиги $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ ва $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ муносабатлардан ҳамда учинчи хоссадан келиб чиқади.

Саволлар ва машқлар

1. Метрик фазода очиқ (ёпиқ) шарларни таърифланг.
2. Нуқтанинг атрофи қандай аниқланади?
3. Нукта атрофининг қандай хоссалари бор?
4. Тўпламнинг лимит нуқтаси қандай нуқта?
5. Тўпламнинг уриниш нуқтаси қандай нуқта?
6. Тўпламнинг ёпилмаси қандай аниқланади?
7. Тўплам ёпилмаси хоссаларини айтинг.
8. Метрик фазода иккита, ҳар хил радиусли очиқ шарлар устма-уст тушиши мумкинми?
9. Бирор метрик фазода радиуси 3 га тенг бўлган шар радиуси 2 га тенг бўлган шарнинг қисми бўлиши мумкинми?
10. Метрик фазода $r>0$ радиусли шар бўш тўплам бўлиши мумкинми?
11. Агар (X,ρ) метрик фазонинг бирор с нуқтаси a ва b нуқталардан фарқли бўлиб, $\rho(a,b)=\rho(a,c)+\rho(c,b)$ шартни

қаноатлантирса, у ҳолда с нуқта a ва b нуқталар *орасида ётади* деймиз.

a) Агар с нуқта a ва b нуқталар орасида, d нуқта эса a ва с нуқталар орасида ётса, у ҳолда d нуқта a ва b нуқталар орасида ётишини исботланг.

b) Агар с нуқта a ва b нуқталар орасида ётса, у ҳолда a нуқта с ва b нуқталар орасида ётмаслигини исботланг.

c) Агар с нуқта a ва b нуқталар орасида, d нуқта эса a ва с нуқталар орасида ётса, у ҳолда с нуқта d ва b нуқталар орасида ётишини исботланг.

d) Метрик фазонинг ихтиёрий икки нуқталари орасида ҳар доим шу фазонинг камида битта нуқтаси ётади, деган тасдиқ тўғрими?

12. Метрик фазода *кесма тушунчаси*ни киритиш мумкин: $[a,b]$ кесма деб шу фазонинг a, b ва бу нуқталар орасида ётадиган барча нуқталаридан ташкил топган тўпламга айтилади. 1-§ даги 2-, 7-, 10-, 11-мисоллардаги ва дискрет метрик фазодаги кесмалар қандай бўлади? Бу кесмалар чегараланганми?

13. Метрик фазода ҳар хил икки кесма фақат иккита умумий нуқтага эга эканлигини кўрсатинг.

14. Айтайлик, с нуқта a ва b нуқталар орасида ётсин. Ҳар доим $[a,b]=[a,c]\cup[c,d]$ муносабат ўринлими?

15. R_2^2 текисликда ҳар қандай тўғри тўртбурчакнинг чегараланган тўплам эканлигини кўрсатинг.

16. Ихтиёрий метрик фазода яқинлашувчи кетма-кетликнинг чегараланган тўплам эканлигини исботланг.

17. Сонлар ўқидаги $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$ $(n\in N)$ нуқталар тўпламининг уриниш ва лимит нуқталарини топинг.

18. Е тўплам R_2^2 текисликдаги рационал координатали нуқталар тўплами бўлса, унинг ёпилмасини топинг.

19. R_2^2 текисликда фақат иккита: A(1,3), B(3,0) лимит нуқтага эга бўлган Е тўпламга мисол келтиринг.

4-§. Метрик фазодаги очиқ ва ёпиқ тўпламлар

1. Ёпиқ тўплам ва унинг хоссалари, мисоллар.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазо бўлсин. Бу фазода $M\subset X$ тўплам оламиз.

9-таъриф. Агар $M = \overline{M}$ бўлса, у ҳолда M *ёпиқ тўплам* дейилади.

Ихтиёрий (X,ρ) метрик фазода $\bar{S}$ (x_0,r) ёпиқ шар, X нинг ўзи бўш тўплам ва ҳар бир чекли тўплам ёпиқ тўпламларга мисол бўлади.

Шунингдек, (R, $\rho(a,b)=|b-a|$) тўғри чизиқда ихтиёрий [c,d] кесма ёпиқ тўплам бўлади.

6-теорема. а) *Чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг бирлашмаси яна ёпиқ тўплам бўлади;*

б) ихтиёрий сондаги ёпиқ тўпламларнинг кесишмаси ёпиқ тўплам бўлади.

Исботи. Бу хоссани икки тўплам учун исботлаш етарли.

а) Айтайлик, F_1 ва F_2 ёпиқ тўпламлар бўлсин, яъни $\bar{F}_1 = F_1$ ва $\bar{F}_2 = F_2$ ўринли. У ҳолда 5-теоремадаги 4-хоссага кўра $\overline{F_1 \cup F_2} = \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2 = F_1 \cup F_2$. Таърифга кўра $F_1 \cup F_2$ ёпиқ тўплам.

б) Айтайлик, ихтиёрий сондаги $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ёпиқ тўпламлар системаси берилган ва x уларнинг кесишмаси бўлган $F=\bigcap_\alpha F_\alpha$ тўпламнинг уриниш нуқтаси бўлсин. У ҳолда x нинг ихтиёрий атрофида F нинг камида битта, масалан, x_1 элементи мавжуд ва кесишманинг хоссасига кўра α нинг барча қийматлари учун $x_1 \in F_\alpha$ бўлади. Бундан ихтиёрий α учун $x \in \bar{F}_\alpha = F_\alpha$, яъни $x\in\cap F_\alpha=F$ келиб чиқади. Демак, F ёпиқ тўплам. Теорема исбот бўлди.

2. Очиқ тўплам ва унинг хоссалари, мисоллар.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазо, $M\subset X$ бирор тўплам бўлсин.

10-таъриф. Агар x нуқтанинг M тўпламда бутунлай жойлашган бирор атрофи мавжуд бўлса, у ҳолда x нуқта M тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади.

Агар M тўпламнинг ҳамма нуқталари ички бўлса, у *очиқ тўплам* дейилади.

Ихтиёрий (X,ρ) метрик фазода $S(x_0,r)$ очиқ шар, R да $(a;b)$ интервал очиқ тўпламга мисол бўлади.

R да Q рационал сонлар тўплами очиқ тўплам эмас, чунки рационал сон Q га ички нуқта бўла олмайди, яъни, ихтиёрий рационал соннинг ҳар бир атрофи фақат рационал сонлардан иборат эмас.

Шу каби иррационал сонлар тўплами ҳам очиқ тўплам эмаслигини кўриш мумкин.

Бу тўпламларнинг R да ҳам ёпиқ тўплам бўлмаслигини кўриш қийин эмас.

7-теорема. *Бирор* $G\subset X$ *тўпламнинг очиқ бўлиши учун унинг тўлдирувчиси* $F=X\backslash G=CG$ *тўпламнинг ёпиқ бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. *Зарурийлиги.* Айтайлик, G очиқ тўплам бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x\in G$ нуқта бутунлай G да жойлашган атрофга эга. Демак, бу атроф F билан кесишмайди. Бундан кўринадики, F нинг бирорта ҳам уриниш нуқтаси G га кирмайди. Демак, F ёпиқ тўплам.

Етарлилиги. Айтайлик, $F=X\backslash G$ ёпиқ тўплам бўлсин. У ҳолда G дан олинган, яъни F га кирмаган ихтиёрий нуқта F билан кесишмайдиган, демак, G да бутунлай жойлашган атрофга эга, яъни G очиқ тўплам.

Натижа. *Бўш тўплам* $\varnothing$ *ва* X *фазо ҳам очиқ, ҳам ёпиқ тўпламлардир.*

8-теорема. *Ихтиёрий сондаги очиқ тўпламларнинг бирлашмаси ва чекли сондаги очиқ тўпламларнинг кесишмаси очиқ тўплам бўлади.*

Исботи. Ушбу $\bigcap\limits_{\alpha}(X\backslash G_{\alpha})=X\backslash(\bigcup\limits_{\alpha} G_{\alpha})$ ва $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(X\backslash G_{i})=X\backslash(\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_{i})$ тенгликлардан ва юқорида исботланган теоремалардан келиб чиқади.

Саволлар ва машқлар

1. Қандай тўплам ёпиқ тўплам дейилади?
2. Ёпиқ тўпламга мисоллар келтиринг.
3. Қандай тўплам очиқ тўплам дейилади?
4. Очиқ тўпламга мисоллар келтиринг.
5. Очиқ ва ёпиқ тўпламлар орасида қандай боғланиш мавжуд?
6. Очиқ ҳам, ёпиқ ҳам бўлмаган тўпламларга мисоллар келтиринг.
7. Ихтиёрий метрик фазода ёпиқ шар ёпиқ тўплам эканлигини исботланг.

8. Ихтиёрий метрик фазода очиқ шар очиқ тўплам эканлигини исботланг.

9. Текисликда мусбат координатали нуқталар тўплами очиқ тўплам бўладими? Жавобингизни асосланг.

10. Ихтиёрий $A < B$ сонлар учун $E=\{f\in C[a;b]: A<f(x)<B\}$ тўпламнинг очиқ тўплам эканлигини кўрсатинг.

11. $\begin{cases} x+y>5; \\ x^2+y^2<100 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан аниқланган тўпламнинг R_2^2 фазода очиқ тўплам эканлигини исботланг.

12. $\begin{cases} x+3y-2z\le 6; \\ x^2+y^2+z^2\ge 25 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан аниқланган тўпламнинг R_2^3 фазода ёпиқ тўплам эканлигини исботланг.

13. $\begin{cases} y\ge x^2+1; \\ x^2+y^2<64 \end{cases}$ тенгсизликлар системаси билан аниқланган тўпламнинг R_2^2 фазода очиқ ҳам, ёпиқ ҳам эмаслигини кўрсатинг.

14. $C[a,b]$ фазодаги кўпҳадлар тўплами очиқ ҳам, ёпиқ ҳам эмаслигини исботланг.

5-§. Сонлар ўқидаги очиқ ва ёпиқ тўпламлар ва уларнинг тузилиши

1. Ташкил қилувчи оралиқлар ва уларнинг хоссалари.

(R,ρ) метрик фазода ихтиёрий (a,b) интервал очиқ, ихтиёрий $[a,b]$ сегмент ёпиқ тўпламга мисол бўлади.

11-таъриф. Бирор G очиқ тўплам берилган бўлсин. Агар $(\alpha,\beta)\subset G$ ва $\alpha\notin G$, $\beta\notin G$ бўлса, у ҳолда (α,β) интервал *ташкил қилувчи оралиқ* дейилади.

9-теорема. *G очиқ тўпламнинг бир-биридан фарқли (α_1,β_1) ва (α_2,β_2) ташкил қилувчи оралиқлари умумий нуқтага эга эмас.*

Исботи. Фараз қилайлик, (α_1, β_1) ва (α_2, β_2) интерваллар бир-биридан фарқли (яъни $\alpha_1\neq\alpha_2$, $\beta_1\neq\beta_2$ муносабатлардан камида бири ўринли) бўлиб, умумий ξ нуқтага эга бўлсин. У ҳолда $\alpha_1<\xi<\beta_1$, $\alpha_2<\xi<\beta_2$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликлардан $\alpha_2<\xi<\beta_1$, $\alpha_1<\xi<\beta_2$ тенгсизликлар келиб чиқади. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин: $\alpha_2<\alpha_1$ ёки $\alpha_2>\alpha_1$.

Агар $\alpha_2<\alpha_1$ бўлса, у ҳолда $\alpha_1\in(\alpha_2,\beta_2)\subset G$. Бу муносабат бажарилиши мумкин эмас, чунки $\alpha_1\notin G$.

Агар $\alpha_2>\alpha_1$ бўлса, у ҳолда $\alpha_2\in(\alpha_1,\beta_1)\subset G$. Бундай бўлиши ҳам мумкин эмас, чунки $\alpha_2\notin G$. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1-натижа. *Агар G очиқ тўпламни ташкил қилувчи иккита интервал умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу интерваллар бир-бирига айнан тенг бўлади.*

2-натижа. *Бўш бўлмаган очиқ тўпламни ташкил қилувчи турли оралиқлар системаси чекли ёки саноқлидир.*

Исботи. Агар ҳар бир ташкил қилувчи оралиқдан биттадан рационал нуқта олинса, у ҳолда бу нуқталардан тузилган M тўплам кўпи билан саноқли бўлади ва G ни ташкил қилувчи турли оралиқлар системаси M билан ўзаро бир қийматли муносабатда бўлади.

2. Чегараланган очиқ тўпламнинг тузилиши.

10-теорема. *Агар G бўш бўлмаган очиқ ва чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда G нинг ҳар бир нуқтаси G ни ташкил қилувчи интерваллардан бирига тегишли бўлади.*

Исботи. Айтайлик, a нуқта G тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин. Ушбу $F=[a;+\infty)\cap CG$ тўпламни тузамиз. $[a;+\infty)$ ва CG тўпламларнинг ёпиқлигидан, F ҳам ёпиқ тўплам бўлади. Тузилишига кўра F тўплам бўш эмас ва қуйидан чегараланган. Бу F тўпламнинг қуйи чегарасини α билан белгилаймиз. Равшанки, $\alpha\in F$ бўлади. Шунингдек, $\alpha>a$, чунки a ва ундан чапдаги ҳамма нуқталар F тўпламга кирмайди.

Бундан ташқари, $[a,\alpha)\subset G$. Акс ҳолда, шундай b нуқта мавжуд бўлиб, $b\in[a,\alpha)$ ва $b\notin G$ бўлар эди. Бу муносабатлардан $b\in F$ ва $b<\alpha$ ўринли эканлиги келиб чиқади. Сўнгги тенгсизлик α нинг F учун қуйи чегара эканлигига зид.

Натижада α учун

$$\alpha>a,\ \alpha\notin G,\ [a;\alpha)\subset G \tag{1}$$

муносабат ўринли эканлиги кўрсатилди.

Худди шунга ўхшаш

$$\beta<a,\ \beta\notin G,\ (\beta;a]\subset G \tag{2}$$

муносабатни қаноатлантирадиган β нуқтанинг мавжудлиги кўрсатилади.

Бунинг учун $(-\infty;a]\cap CG$ тўпламни тузиб, юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар юритиш керак.

(1) ва (2) муносабатлардан $(\beta;\alpha)$ интервал G учун ташкил қилувчи оралиқ ва $a\in(\beta;\alpha)$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3-натижа. *Агар* G *бўш бўлмаган очиқ ва чегараланган тўплам бўлиб,* $(\beta;\alpha)$ *интервал* G *га бутунлай кирган бўлса, у ҳолда* G *ни ташкил қилувчи ва* $(\beta;\alpha)$ *интервални бутунлай ўз ичига олган интервал мавжуд бўлади.*

Юқоридаги 2- ва 3-натижалардан қуйидаги теорема келиб чиқади:

11-теорема. *Бўш бўлмаган, чегараланган* G *тўпламнинг очиқ тўплам бўлиши учун уни сони чекли ёки саноқли бўлган ўзаро кесишмайдиган интерваллларнинг бирлашмаси кўринишида ёзиш мумкин бўлиши зарур ва етарли.*

3. Чегараланган ёпиқ тўпламнинг тузилиши.

Айтайлик, F чегараланган ёпиқ тўплам бўлиб, $S=[a;b]$ уни ўз ичига олган энг кичик сегмент бўлсин. У ҳолда $C_SF=S\setminus F$ тўплам очиқ бўлади.

Агар C_SF бўш бўлмаса, унга 11-теоремани татбиқ қилиш мумкин. Натижада қуйидаги теоремага келамиз:

12-теорема. *Ихтиёрий чегараланган ёпиқ* F *тўплам ёки сегмент бўлади, ёки бирор сегментдан сони чекли ёки саноқли интерваллар системасини чиқариб ташлаш натижасида ҳосил қилинган тўпламдан иборат бўлади.*

12-таъриф. Очиқ C_SF тўпламнинг ташкил қилувчи оралиқлари *F* тўпламнинг *тўлдирувчи оралиқлари* дейилади.

Саволлар ва машқлар

1. Ташкил қилувчи оралиқ қандай тўплам?
2. Ташкил қилувчи оралиқлар қандай хоссаларга эга?
3. Чегараланган очиқ тўплам қандай тузилган?
4. Чегараланган ёпиқ тўплам қандай тузилган?

6-§. Мукаммал тўпламлар. Канторнинг мукаммал тўплами

1. Ёлғиз нуқта, ўзида зич тўплам, мисоллар. Айтайлик, (X,ρ) метрик фазода M тўплам берилган бўлсин.

13-таъриф. Агар $\xi\in M$ бўлиб, ξ нуқтанинг бирор атрофида M тўпламнинг ξ дан бошқа нуқтаси бўлмаса, у ҳолда ξ нуқта M тўпламнинг *ёлғиз нуқтаси* дейилади.

Масалан, сонлар ўқида $M=(0,2)\cup\{3\}$ тўпламни қарасак, 3 нуқта бу тўпламнинг ёлғиз нуқтаси бўлади.

14-таъриф. Агар Е тўпламнинг бирорта ҳам ёлғиз нуқтаси бўлмаса, у ҳолда бундай тўплам *ўзида зич тўплам* дейилади.

Масалан, координаталар текислигида иккала координатаси ҳам рационал сонлардан иборат нуқталар тўплами ўзида зич тўпламга мисол бўлади.

15-таъриф. Агар тўплам фақат ёлғиз нуқталардан иборат бўлса, бундай тўплам *дискрет тўплам* дейилади.

Мисоллар. 3-§ даги E_1 ва E_2 тўпламлар дискрет тўпламга, E_3 ва E_4 тўпламлар ўзида зич тўпламга мисол бўлади.

2. Ҳосила тўплам, мукаммал тўплам, мисоллар.

16-таъриф. М тўпламнинг барча лимит нуқталаридан иборат бўлган тўплам М тўпламнинг *ҳосила тўплами* дейилади ва M' орқали белгиланади.

3-§ даги мисоллар учун $E'_1=\varnothing$, $E'_2=\{0\}$, $E'_3=[0;1]$, $E'_4=[0;1]$ бўлади.

17-таъриф. Агар $M=M'$ бўлса, у ҳолда М *мукаммал тўплам* дейилади.

Энди сонлар ўқидаги мукаммал тўпламларни ўрганамиз.

13-теорема. *Ихтиёрий кесма мукаммал тўплам бўлади.*

Исботи. $[a;b]$ кесманинг ихтиёрий х нуқтаси унинг лимит нуқтаси эканлиги бевосита кўриниб турибди. Энди $[a;b]$ кесманинг ташқарисида унинг лимит нуқтаси йўқлигини кўрсатамиз.

Агар ξ нуқта $[a;b]$ кесманинг лимит нуқтаси бўлиб, унга тегишли бўлмаса ва аниқлик учун $\xi<a$ бўлса, у ҳолда ξ нуқтанинг $(\xi-\frac{a-\xi}{2},\ \xi+\frac{a-\xi}{2})$ атрофи $[a;b]$ кесманинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмайди. Бу эса ξ нуқтанинг $[a;b]$ кесма учун лимит нуқта эканлигига зид. Теорема исбот бўлди.

Равшанки, мукаммал тўплам ёпиқ тўплам бўлади. Аммо ҳар қандай ёпиқ тўплам ҳам мукаммал тўплам бўла олмайди. Масалан, икки элементдан иборат $\{1,2\}$ тўплам ёпиқ, лекин унинг ҳосила тўплами бўш тўпламдан иборат.

Чегараланган ёпиқ тўплам мукаммал бўлиши учун у ўзида зич тўплам бўлиши кераклиги равшан.

Ёпиқ тўпламнинг тузилиши ҳақидаги 12-теоремадан қуйидаги тасдиқ келиб чиқади:

14-теорема. *Ихтиёрий чегараланган, бўш бўлмаган мукаммал тўплам ёки сегментдан иборат, ёки бирор сегментдан ўзаро кесишмайдиган, умумий чегара нуқтага эга бўлмаган ва чегаралари шу сегментнинг чегараларига тенг бўлмаган, сони чекли ёки саноқли интервалларини чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўпламдан иборат бўлади.*

3. Кантор тўплами ва унинг хоссалари.

Назарий жиҳатдан муҳим аҳамиятга эга бўлган мукаммал тўпламлардан бири — Канторнинг мукаммал тўпламидир.

Ихтиёрий n учун $a_n=0$ ёки $a_n=2$ бўлган, $0,a_1a_2...a_n...$ кўринишдаги барча чексиз, учлик саноқ системасидаги ўнли касрларни қараймиз. Бундай сонли тўплам *Кантор тўплами* дейилади ва P_0 билан белгиланади.

- Бу тўплам қуйидаги хоссаларга эга:

1°. P_0 *чегараланган тўплам.*

Ҳақиқатан, ҳар бир $x\in P_0$ учун $0\leq x\leq 1$ тенгсизлик ўринли. Демак, $P_0\subset[0,1]$.

2) P_0 *мукаммал тўплам.*

Исботи. Бу тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг лимит нуқтаси бўлишини, яъни $P_0\subset P_0'$ эканлигини кўрсатамиз.

Айтайлик, $x=0,a_1a_2...a_n...$ нуқта P_0 тўпламнинг исталган нуқтаси ва ε ихтиёрий мусбат сон бўлсин. Ушбу $2^{-k}<\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи k натурал сонни танлаб оламиз ва $a_k=0$ бўлса, унинг ўрнига 2 ни, ёки аксинча, $a_k=2$ бўлса, унинг ўрнига 0 ни ёзамиз. Натижада ҳосил бўлган сон x нинг ε атрофига тегишли бўлади. Демак, $P_0\subset P_0'$ муносабат ўринли.

Энди $P_0'\subset P_0$ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун бирор $x=0,a_1a_2...a_n...\notin P_0\cap[0;1]$ нуқта P_0 тўпламнинг лимит нуқтаси бўла олмаслигини кўрсатиш етарли. Қаралаётган x сон учун қандайдир k да $a_k=1$ бўлиб, a_{k+1}, a_{k+2},... лардан камида бири 1 дан фарқли бўлади, акс ҳолда бу сонни фақат 0 ёки 2 билан ёзиш мумкин бўлиб, у P_0 тўпламга тегишли бўларди. Демак,

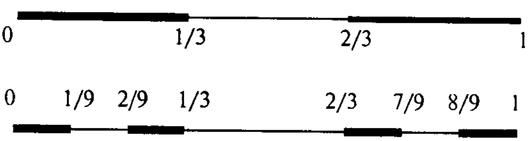
$$0,a_1a_2...a_{k-1}1 < x < 0,a_1a_2...a_{k+1}2$$

интервал фақат 0 ва 2 билан ёзиш мумкин бўлмаган сонлардан иборат бўлиб қолади. Шундай қилиб, x нуқтанинг P_0 тўпламга тегишли эмаслигидан x нинг P_0 га тегишли бўлмаган сонлардан иборат атрофининг мавжудлиги келиб чиқади. Демак, P_0 га тегишли бўлмаган нуқта бу тўплам учун лимит нуқта бўла олмайди. Бундан P_0 тўплам барча лимит нуқталарини ўз ичига олиши, яъни $P_0'\subset P_0$ келиб чиқади.

3^0. P_0 *континуум қувватли тўплам.*

Исботи. P_0 тўпламдан олинган ҳар бир $0,a_1a_2...a_n...$ касрга $a_k=2$ бўлган k ларни ўсиш тартибида ёзиб, $\{k_i\}$ ўсувчи кетма-кетликни мос қўямиз. Масалан, 0,020020002000020... га {2, 5, 9, 14, 20,...}кетма-кетлик мос келади. Бу мослик P_0 ва барча қатъий ўсувчи кетма-кетликлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик бўлади. I бобдаги 15-теоремага асосан, барча бундай кетма-кетликлар тўплами континуум қувватга эга.

Кантор тўпламини бошқача ҳам тузиш мумкин. Бунинг учун $\Delta=[0,1]$ сегментни оламиз ва уни $\frac{1}{3}$ ва $\frac{2}{3}$ нуқталар билан тенг уч қисмга бўлиб, ундан унинг ўрта қисмини, яъни $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ оралиқни чиқариб ташлаймиз. Қолган икки сегментларнинг ҳар бирини яна тенг уч қисмга бўламиз ва уларнинг ўрта қисмлари бўлган $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ ва $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$ оралиқларни чиқариб ташлаймиз. Натижада тўртта сегмент ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирини яна тенг уч қисмга бўлиб, уларнинг ўрта қисмларини чиқариб ташлаймиз. Бу жараённи чексиз давом эттирамиз.



Натижада $\Delta=[0,1]$ сегментдан

$$G_0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\cup\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)\cup\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)\cup\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)\cup\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$$

$\cup$... очиқ тўплам чиқариб ташланган бўлади.

Қолган тўплам, яъни $P_0=\Delta\setminus G_0$ тўплам, юқорида чексиз учлик касрлар орқали қурилган Кантор тўпламининг ўзи бўлади. Буни текширишни ўқувчига қолдирамиз.

Саволлар ва машқлар

1. Ҳосила тўпламни таърифланг, мисоллар келтиринг.

2. Мукаммал тўплам қандай аниқланади?

3. Кантор тўплами қандай тузилган?

4. Кантор тўплами қандай хоссаларга эга?

5. Агар M сонлар ўқида зич тўплам бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\alpha \in R$ ва $r>0$ учун $(\alpha-r;\alpha+r)$ интервалда M га тегишли камида битта нуқта мавжуд бўлишини исботланг.

6. Рационал сонлар тўпламининг ҳосила тўпламини топинг.

7. $E'=\{1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots, {}^1/_n, \ldots\}$ бўлган E тўплам мавжудми? Мавжуд бўлса, мисол келтиринг.

8. Томони 1 га тенг квадрат олиб, уни тенг тўққиз бўлакка бўламиз ва марказий квадратнинг ички нуқталарини ташлаб юборамиз. Қолган саккизта квадрат билан ҳам шундай иш тутамиз. Бу жараённи чексиз давом эттирамиз. n-қадамдан сўнг қолган нуқталар тўпламини S_n билан, улар кесишмасини $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n=S_o$ билан белгилаймиз. Бу S_o тўплам *Серпинский гилами* деб юритилади. Бу тўпламнинг ёпиқлигини исботланг.

9. Мукаммал тўпламнинг ёпиқлигини исботланг.

10. Ёпиқ, лекин мукаммал бўлмаган тўпламга мисол келтиринг.

11. Агар $M \subset M'$ (ёки $M' \subset M$) бўлган ҳолда, M тўплам ҳақида нима дейиш мумкин? Жавобингизни асосланг.

7-§. Метрик фазода компакт тўпламлар

1. **Компакт тўплам таърифи, мисоллар.**

Тўғри чизиқнинг, яъни сонлар ўқининг ажойиб хоссаларидан бири шуки, ундаги чегараланган ихтиёрий чексиз тўплам камида битта лимит нуқтага эга. Лекин ихтиёрий метрик фазода бундай содда натижа, умуман айтганда, ўринли эмас.

Шунинг учун қуйидаги саволнинг қўйилиши табиий: Метрик фазода қандай тўпламлар синфи учун юқоридаги хосса сақланади?

Шу сабабли қуйидаги муҳим таърифни киритамиз:

18-таъриф. Агар (X,ρ) метрик фазодаги $M \subset X$ тўпламнинг элементларидан тузилган ихтиёрий кетма-кетликдан M нинг бирор элементига яқинлашувчи қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин бўлса, у ҳолда M тўплам X да *компакт* дейилади.

Мисоллар. 1. Тўғри чизиқдаги ҳар қандай кесма;

2. Текисликдаги $r>0$ радиусли ёпиқ шар;

3. Текисликда координаталари $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ шартларни қаноатлантирувчи $(x;y)$ нуқталар тўплами компакт тўпламлар бўлади.

2. Тўпламнинг компакт бўлиши учун зарурий шартлар.

15-теорема. *Компакт тўплам чегараланган бўлади.*

Исботи. Бунинг учун бирор М компакт тўплам олиб чегараланмаган бўлсин, деб фараз қиламиз. У ҳолда М дан ихтиёрий x_1 нуқта олиб, радиуси $r_1=1$ га тенг $S(x_1,r_1)$ шарни қўрамиз. М чегараланмаганлиги учун у бу шарда тўла жойлашган бўлмайди. М тўпламнинг $S(x_1,r_1)$ шарга кирмаган бирор x_2 элементини оламиз. У ҳолда $\rho(x_1,x_2)\ge r_1$ бўлади. Энди радиуси $r_2=r(x_1,x_2)+1$ га тенг $S(x_2,r_2)$ шарни қуриб, М тўпламнинг бу шарга кирмаган x_3 элементини оламиз. Бундай элемент мавжуд, чунки М чегараланмаган тўплам ва $\rho(x_1,x_3) \ge r_2$ бўлади. Бу жараённи истаганча давом эттириш мумкин. Натижада $\{x_n\}$ $(x_n \in M)$ кетма-кетлик ва ўсиб борувчи $\{r_n\}$ сонли кетма-кетлик ҳосил бўлиб, улар учун

$$\rho(x_1,x_n)+1 = r_n > r_{n-1} \ (n=2,3,...),\ r_n - r_{n-1} \ge 1$$

тенгсизликлар бажарилади.

Демак, ихтиёрий $n>m\ge 2$ натурал сонлар учун

$$\rho(x_1,x_n)+1 = r_n > r_{n-1} \ge r_m = \rho(x_1,x_m)+1$$

муносабатлар ўринли бўлишини текшириш қийин эмас. Булардан ва

$$\rho(x_1,x_n) \le \rho(x_1,x_m) + \rho(x_m,x_n)$$

тенгсизликдан

$$r_n \le r_m + \rho(x_m,x_n),$$

яъни $\rho(x_m,x_n)\ge 1$ муносабат келиб чиқади.

Охирги тенгсизлик $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўзи ҳам ва унинг бирор қисми ҳам фундаментал бўла олмаслигини, яъни яқинлашувчи бўла олмаслигини кўрсатади. Бу эса М тўпламнинг компактлигига зид. Теорема исбот бўлди.

Бу теореманинг тескариси ўринли эмас. Масалан, ℓ_2 фазода ушбу $e_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...)$, $e_2=(0,\ 1,\ 0,\ 0,...)$, $e_3=(0,\ 0,\ 1,\ 0,...)$,... элементлардан иборат чегараланган тўпламни тузамиз. Бу элементларнинг ихтиёрий иккитаси орасидаги масофа $\rho(e_m,e_n)=\sqrt{2}$ га тенг $(m\ne n)$. Шунинг учун бу кетма-кетлик ва унинг ҳеч қандай қисми яқинлашувчи бўлмайди, демак, тузилган тўплам компакт эмас.

16-теорема. *Компакт тўплам ёпиқ бўлади.*

Исботи. Айтайлик, М тўплам компакт бўлиб, ёпиқ бўлмасин. У ҳолда М ёпиқ бўлмаганлиги учун $\{x_n\}\subset M$ яқинлашувчи кетма-кетлик мавжудки, унинг лимити бўлган b элемент М га тегишли бўлмайди. Энди, М компакт бўлганлиги учун, бу кетма-кетликдан М тўпламнинг a элементига яқинлашувчи қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Аммо $\{x_n\}$ кетма-кетлик иккита, a ва b турли лимитга эга бўлиши мумкин эмас. Бу зиддият М компакт тўпламнинг ёпиқ бўлиши кераклигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Компакт тўпламнинг ихтиёрий ёпиқ қисм тўплами ҳам компакт тўплам бўлишини исботлашни ўқувчига машқ сифатида қолдирамиз.

3. n-ўлчамли Евклид фазосида компакт тўпламлар.

17-теорема. R^n *фазода* М *тўпламнинг компакт бўлиши учун унинг чегараланган ва ёпиқ бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. *Зарурийлиги* юқоридаги теоремадан келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик, М чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлсин. М чегараланган бўлганлиги сабабли уни ўз ичига олувчи n-ўлчамли параллелепипед P, яъни $P=\{x=(x_1, x_2,...,x_n): a_i\le x_i\le b_i, i=1,2,...,n\}$, мавжуд. Бу параллелепипеднинг компакт тўплам эканлиги n та, $[a_i;b_i]$ кесмаларнинг Декарт кўпайтмаси каби тасвирланишидан келиб чиқади. Энди, М тўплам P нинг ёпиқ қисм тўплами бўлгани учун компакт бўлади. Теорема исбот бўлди.

Саволлар ва машқлар

1. Компакт тўплам қандай тўплам?

2. Тўплам компакт бўлиши учун зарурий шартларни айтинг.

3. R^n фазода тўплам компакт тўплам бўлишининг зарурий ва етарли шартлари қандай?

4. Компакт тўпламнинг ёпиқ қисм тўплами компакт бўлишини исботланг.

5. Компакт тўпламларнинг кесишмаси компакт тўплам эканлигини исботланг.

6. Иккита компакт тўпламнинг бирлашмаси компакт бўлишини кўрсатинг.

7. $C[0,1]$ фазода қуйидаги тўпламлар компакт тўплам бўладими?

а) $C[0,1]$ нинг ўзи;

б) коэффициентларининг модули 1 дан катта бўлмаган барча кўпҳадлар тўплами.

8. Айтайлик, $E=\{f\in C[0,1]:\ f(0)=0,\ f(1)=1,\ \max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\le 1\}$ бўлсин. Бу тўплам $C[0,1]$ фазода компакт тўплам бўладими?

8-§. Метрик фазоларда узлуксиз акслантиришлар

1. Узлуксиз акслантириш, мисоллар.

Айтайлик, (X,ρ_x) ва (Y,ρ_y) метрик фазолар бўлиб, X ни Y га акслантирувчи T акслантириш берилган бўлсин.

Акслантиришнинг нуқтада узлуксизлиги таърифини берамиз.

19-таъриф. Агар X тўпламдаги x_0 нуқтага яқинлашувчи ихтиёрий $\{x_n\}\subset X$ кетма-кетлик учун ушбу $Tx_n\to Tx_0$ муносабат Y да бажарилса, у ҳолда T акслантириш x_0 *нуқтада узлуксиз* дейилади.

20-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ сони учун шундай $\delta>0$ сон топилиб, $\rho_x(x_0,x)<\delta$ шартни қаноатлантирувчи барча x лар учун $\rho_y(T(x_0),T(x))<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда T акслантириш x_0 *нуқтада узлуксиз* дейилади.

21-таъриф. Агар $b=T(x_0)$ нуқтанинг ихтиёрий V атрофи учун X тўпламда x_0 нуқтанинг $T(U)\subset V$ шартни қаноатлантирувчи U атрофи мавжуд бўлса, у ҳолда T акслантириш x_0 *нуқтада узлуксиз* дейилади.

Бу уч таърифнинг тенг кучлилиги ёки бошқача айтганда, эквивалентлиги функция учун исботлангани каби исботланади.

Мисоллар. 1. $C[0;1]$ фазони R га акслантирувчи $T:x\to x(1)$ акслантириш ихтиёрий $a\in C[0;1]$ «нуқта»да узлуксиз бўлади, бу ерда x ва a «нуқталар» деганда, $[0;1]$ кесмада узлуксиз функциялар тушунилади.

Ҳақиқатан, $\varepsilon>0$ сон берилган бўлсин. У ҳолда $\delta=\varepsilon$ деб оламиз. Энди

$$\rho_c(a,x)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-a(t)|,\quad \rho(Ta,Tx)=|x(1)-a(1)|\le\rho_c(a,x)$$

бўлганлиги сабабли, $\rho_c(a,x)<\delta$ шартдан $\rho(Ta,Tx)<\varepsilon$ тенгсизликнинг келиб чиқиши тушунарли.

2. $C_1[0;1]$ фазони R га акслантирувчи $T:x \to x(1)$ акслантириш $\theta(t)\equiv 0$ нуқтада узлуксиз эмас.

Ҳақиқатан, $x_n(t)=t^n$ кетма-кетлик $C_1[0;1]$ фазода $\theta(t)\equiv 0$ функцияга яқинлашади, лекин $Tx_n= x_n(1)=1$, $T\theta=0$. Демак, $\{Tx_n\}$ кетма-кетлик $T\theta$ га яқинлашмайди.

22-таъриф. Агар T акслантириш X нинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда T *узлуксиз акслантириш* дейилади.

X метрик фазонинг элементлари турли табиатли, хусусан, функциялардан иборат бўлиши мумкинлиги айтилган эди. Шу сабабли X да аниқланган акслантиришнинг қийматлар тўплами сонли тўпламдан иборат бўлса, бу акслантириш функция деб эмас, балки *функционал* дейилади.

Хусусан, Y=R бўлган ҳолда, узлуксиз акслантириш *узлуксиз функционал* дейилади.

Масалан, C[0;1] фазони R га акслантирувчи $T(x)=x(1)$ акслантириш, бу ерда $x(1)$ сон $x(t)$ функциянинг 1 нуқтадаги қиймати, узлуксиз функционалга мисол бўлади.

2. Изометрия, унинг узлуксизлиги.

Айтайлик (X,ρ_x) ва (Y,ρ_y) метрик фазолар ва $T:X\to Y$ акслантириш берилган бўлсин.

23-таъриф. Агар X фазодан олинган ихтиёрий a ва b нуқталар учун $\rho_x(a, b)= \rho_y(T(a),T(b))$ тенглик бажарилса, у ҳолда T *изометрик акслантириш* ёки *изометрия* дейилади.

Равшанки, ҳар қандай изометрия узлуксиз акслантириш бўлади.

Текисликдаги ҳар қандай ҳаракат, хусусан, параллел кўчириш, буриш, ўқ симметрияси изометрияга мисол бўлади.

3. Узлуксиз акслантиришнинг хоссалари.

18-теорема. *Айтайлик,* $T: X\to Y$ *акслантириш* X *фазонинг* a *нуқтасида,* $F:Y\to Z$ *акслантириш* Y *фазонинг* $b=T(a)$ *нуқтасида узлуксиз бўлсин. У ҳолда* X *ни* Z *га акслантирувчи* $x\to F(T(x))$ *мураккаб акслантириш* a *нуқтада узлуксиз бўлади.*

Исботи. Z фазодаги $c=F(T(a))$ нуқтанинг ихтиёрий W атрофини оламиз. F акслантириш $b=T(a)$ нуқтада узлуксиз ва $c=F(b)$ бўлганлиги сабабли, b нуқтанинг $F(V)\subset W$ шартни қаноатлантирувчи V атрофи мавжуд. Шунингдек, T акслантириш a нуқтада узлуксиз бўлганлиги сабабли, a нуқтанинг $T(U)\subset V$ шартни қаноатлантирувчи U атрофи мавжуд. У ҳолда $F(T(U))\subset T(V)\subset W$ га эга бўламиз. Бу эса $x\to F(T(x))$ акслантиришнинг a нуқтада узлуксиз эканлигини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

19-теорема. *Агар T акслантириш X метрик фазони Y метрик фазога акс эттирувчи узлуксиз акслантириш бўлса, у ҳолда Y фазодан олинган ихтиёрий очиқ тўпламнинг X фазодаги прообрази очиқ, ёпиқ тўпламники эса ёпиқ бўлади.*

Исботи. Айтайлик, G тўплам Y да очиқ бўлсин. X фазодаги $D=T^{-1}(G)$ тўпламнинг барча нуқталари ички нуқта эканлигини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, $a\in D$ ва $T(a)=b$ бўлсин. У ҳолда $b\in G$ ва G очиқ бўлганлигидан b нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси бўлади. Шунинг учун бу нуқтанинг G га тўлалигича тегишли бўлган V атрофи мавжуд. T акслантиришнинг a нуқтада узлуксизлигидан a нуқтанинг шундай U атрофи мавжуд бўлиб, $T(U)\subset V$ бўлади. У ҳолда $T(U)\subset G$, бундан эса $U\subset D=T^{-1}(G)$ келиб чиқади. Бу эса ихтиёрий $a\in D$ нуқтанинг D га тегишли атрофи мавжудлиги, яъни a ички нуқта эканлигини исботлайди. Шунинг учун D очиқ тўплам.

Ёпиқ тўпламнинг тўлдирувчиси очиқ эканлигидан, Y фазода бири иккинчисига тўлдирувчи тўпламларнинг прообразлари X фазода ҳам бири иккинчисига тўлдирувчи бўлишидан ва теореманинг исбот қилинган қисмидан иккинчи қисмнинг исботи келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Узлуксиз акслантиришда очиқ тўпламнинг образи ҳар доим ҳам очиқ бўлавермайди. Масалан, $x\to\sin x$ узлуксиз акслантириш учун $(-\pi;\pi)$ интервалнинг образи $[-1;1]$ кесмадан иборат.

Саволлар ва машқлар

1. Узлуксиз акслантиришни таърифланг.
2. Узлуксиз акслантиришга мисоллар келтиринг.
3. Узлуксиз акслантиришга берилган таърифларнинг эквивалентлигини исботланг.
4. Изометрия қандай акслантириш?
5. Изометриянинг узлуксизлигини исботланг.
6. Узлуксиз акслантиришнинг хоссаларини айтинг.
7. R^2 фазони ўзига ўтказувчи $(x,y)\to(2x-3y+4,-x+4y)$ акслантириш берилган:

а) (2,3) нуқтанинг образини;

б) (−4,4) нуқтанинг образини;

в) $y=x$ тўғри чизиқ образини;

г) абсциссалар ўқининг прообразини топинг.

8. C[0,1] фазони R га ўтказувчи

$F: f \to \int_0^1 (x^2 - f^3(x))dx$ акслантириш берилган. F(sinπx) ни топинг. $F^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ га тегишли иккита элемент кўрсатинг.

9. R_2^2 фазони C[0,1]га ўтказувчи $F:(x,y)\to\varphi(t)=xt^2-2yt$ акслантириш берилган. (−1,1) нуқтанинг образини топинг. Шунингдек,

а) $f(t)=3t^2+4t$;

б) $f(t)=5t^2-2$;

в) f(t)=sint функцияларнинг прообразларини топинг.

10. Қуйидаги F:C[a;b]→R функционалларни узлуксизликка текширинг:

а) $F(f) = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$;

б) $F(f) = \min\limits_{a\le x\le b} f(x)$;

в) $F(f) = \int_a^b f(x)dx$.

9-§. Компакт тўпламлар ва узлуксиз акслантиришлар

1. Компакт тўпламнинг узлуксиз акслантиришдаги образи ҳақида.

20-теорема. *Компакт тўпламнинг узлуксиз акслантириш натижасидаги образи компакт тўплам бўлади.*

Исботи. Айтайлик, М компакт тўплам ва T:M→Y узлуксиз акслантириш бўлсин. У ҳолда М'=T(M) тўпламнинг компакт эканлигини исботлаймиз.

M' тўпламдан ихтиёрий $\{x_n'\}$ кетма-кетлик олиб, x_n орқали x_n' нуқтанинг T акслантиришдаги прообразини белгилаймиз: $x_n'=T(x_n)$. У ҳолда M тўпламдаги $\{x_n\}$ кетма-кетликка эга бўламиз. M компакт тўплам бўлганлиги сабабли бу кетма-кетликдан M тўпламнинг бирор c нуқтасига яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. T акслантиришда бу қисм кетма-кетлик $\{x_n'\}$ нинг $\{x'_{n_k}\}$ қисм кетма-кетликка ўтади. Т акслантиришнинг c нуқтада узлуксизлигидан

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \lim_{k\to\infty} T(x_{n_k}) = T(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = T(c) \in M'.$$

Шундай қилиб, M′ тўпламдан олинган ҳар бир кетма-кетлик M′ нинг элементига яқинлашувчи қисм кетма-кетликка эга. Бу эса M′ тўпламнинг компакт эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. Узлуксиз функционалнинг хоссалари.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазода f узлуксиз функционал берилган бўлсин.

21-теорема. *f функционал $M\subset X$ компакт тўпламда чегараланган ҳамда ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади.*

Исботи. 20-теоремага асосан, f функционалнинг қийматлар тўплами f(M)=E, компакт тўплам бўлади. Демак, E чегараланган, яъни шундай a ва b сонлар топилиб, $a\le f(x)\le b$ бўлади. Бундан f функционалнинг M да чегараланганлиги келиб чиқади.

E тўплам чегараланган. Шунинг учун унинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари мавжуд. Энди $\alpha=\sup E$ белгилаш киритамиз ва 0 га яқинлашувчи $\{\frac{1}{n}\}$ кетма-кетликни оламиз.

Аниқ юқори чегаранинг таърифига кўра, $\{\frac{1}{n}\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади учун M тўпламга тегишли шундай x_n нуқталар топилиб, бу нуқталар учун

$$\alpha - \frac{1}{n} < f(x_n) < \alpha, \quad (n=1,2,...) \tag{1}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Ҳосил бўлган $\{x_n\}$ кетма-кетликдан M тўпламнинг x_0 нуқтасига яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетлик ажратамиз. Бу x_0 нуқтада f функционал узлуксиз. Шу сабабли $f(x_0)=\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\alpha$ бўлади. Демак, f функционал ўзининг энг катта қийматини қабул қилади.

Шунга ўхшаш, f функционалнинг энг кичик қийматга эришиши исботланади. Теорема исбот бўлди.

3. Кантор теоремаси.

(X,ρ) метрик фазода унинг бирор *M* қисм тўплами ва f функционал берилган бўлсин.

24-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топилсаки, $\rho(x_1,x_2)<\delta$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай $x_1,x_2\in M$ учун

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда f функционал M тўпламда *текис узлуксиз* дейилади.

M тўпламда текис узлуксиз функционалнинг шу тўпламда узлуксиз бўлишини кўриш қийин эмас.

Ҳақиқатан, айтайлик, x_0 нуқта M тўпламга тегишли бўлсин. Ҳадлари M тўпламга тегишли бўлиб, x_0 нуқтага яқинлашувчи бирор $\{x_n\}$ кетма-кетликни тузиб оламиз. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топиладики, етарлича катта n ларда $\rho(x_n,x_0)<\delta$ тенгсизликнинг бажарилишидан $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, x_0 нуқтага яқинлашувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $\{f(x_n)\}$ сонли кетма-кетлик $f(x_0)$ га яқинлашади. Бу эса f функционалнинг x_0 нуқтада узлуксиз эканлигини билдиради. Танлашимизга кўра x_0 нуқта M тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси бўлганлиги сабабли, f функционал M тўпламда узлуксиз бўлади.

Қуйидаги теорема функционал текис узлуксизлигининг етарли шартини ифодалайди:

22-теорема(*Кантор*). *Агар X метрик фазодаги f функционал $M\subset X$ компакт тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда f функционал шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

Исботи. Айтайлик, f функционал M тўпламда узлуксиз, лекин текис узлуксиз бўлмасин. У ҳолда e мусбат сон учун $r(x_1,x_1')<1$, $|f(x_1)-f(x_1')|\geq e$ шартлар асосида M тўпламнинг x_1 ва x_1F нуқталарини танлаб олиш мумкин. Энди, M тўпламнинг $r(x_2,x_2')<{}^1/_2$, $|f(x_2)-f(x_2')|\geq e$ шартларни қаноатлантирувчи x_2 ва x_2' нуқталар жуфтини танлаймиз. Шу каби $r(x_n,x_n')<{}^1/_n$, $|f(x_n)-f(x_n')|\geq\varepsilon$ шартларни қаноатлантирувчи нуқталар жуфтини танлаш чексиз давом эттирилиб, $\{x_n\}$ ва $\{x_nF\}$ нуқталар кетма-кетлигига эга бўламиз. Компакт тўплам M нинг нуқталаридан тузилган $\{x_n\}$кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x_{n_k}'\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Бу қисм кетма-кетликнинг лимити x_0OM бўлсин. Иккинчи кетма-кетликнинг шу номерларга мос ҳадларидан тузилган $\{x_{n_k}'\}$ қисм кетма-кетлик ҳам x_0 нуқтага яқинлашади. Энди танланишга кўра

$$\varepsilon \le |f(x_n)-f(x_n')| \le |f(x_n)-f(x_o)| + |f(x_o)-f(x_n'')|$$

бўлганлиги сабабли, ўнг томондаги қўшилувчиларнинг камида бири n га боғлиқ бўлмаган ҳолда $^{\varepsilon}/_{2}$ дан кичик бўла олмайди. Бу эса функционалнинг x_o нуқтада узлуксизлигига зид. Теорема исбот бўлди.

Саволлар ва машқлар

1. Узлуксиз акслантиришда компакт тўпламнинг образи қандай тўплам бўлади?
2. Акслантириш билан функционал қандай фарқ қилади?
3. Текис узлуксиз функционални таърифланг.
4. Кантор теоремасининг мазмуни нимадан иборат?

10-§. Тўла метрик фазолар. Тўлдирувчи фазо ҳақидаги теорема

1. Фундаментал кетма-кетликлар.

Маълумки, сонли кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун у Коши шартини қаноатлантириши зарур ва етарли. Бу хосса катта аҳамиятга эга бўлиб, ҳақиқий сонлар тўпламининг тўлалигини кўрсатади.

Ҳақиқий сонлар тўпламининг бу хоссаси ҳар қандай метрик фазо учун ўринлими, деган савол туғилади. Бу саволга жавоб бериш учун қуйидаги таърифни киритамиз:

25-таъриф. Агар (X,ρ) метрик фазодан олинган $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши шартини қаноатлантирса, яъни ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $n(\varepsilon)$ номер мавжуд бўлиб, $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ тенгсизлик барча $n, m\ge n(\varepsilon)$ учун бажарилса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик *фундаментал кетма-кетлик* дейилади.

23-теорема. *Фундаментал кетма-кетлик чегараланган бўлади.*

Исботи. Таърифга кўра, $\varepsilon=1$ учун $n(\varepsilon)$ номер мавжуд бўлиб, $\rho(x_n,x_m)<1$ тенгсизлик барча $n, m\ge n(\varepsilon)$ қийматлар учун бажарилади. Хусусан, $k>n(\varepsilon)$ ва $n\ge k$ учун ҳам $\rho(x_n,x_k)<1$ тенгсизлик ўринли бўлади. Энди k ни тайинлаб оламиз, у ҳолда маркази x_k нуқтада, радиуси

$$r=\max(\rho(x_1,x_k),\ \rho(x_2,x_k),\ \dots,\ \rho(x_{k-1},x_k), \qquad 1)$$

бўлган шар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадларини ўз ичига олади, яъни $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлади. Теорема исбот бўлди.

24-теорема. *Яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетлик a нуқтага яқинлашсин. У ҳолда $\varepsilon>0$ сон учун шундай $n(\varepsilon)$ номер топилиб, барча $n\geq n(\varepsilon)$ учун $\rho(x_n,a)<\varepsilon/2$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $n,m\geq n(\varepsilon)$ лар учун $\rho(x_n,x_m)\leq\rho(x_n,a)+\rho(a,x_m)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ муносабат ўринли. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фундаментал эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2. Тўла метрик фазонинг таърифи, мисоллар.

26-таъриф. Агар X метрик фазода ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда X *тўла метрик фазо* дейилади.

Мисоллар. 1. $X=R$, $\rho(x,y)=|y-x|$; (R,ρ) — тўла метрик фазолиги ўз-ўзидан равшан.

2. $X=R_2^n$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$ (R_2^n,ρ)— тўла метрик фазо бўлади. Унинг тўлалиги бу метрика бўйича яқинлашиш, координаталар бўйича яқинлашиш билан бир хиллигидан келиб чиқади.

3. $X = Q$, $\rho(r_2,r_1)=|r_2-r_1|$.Маълумки, (Q,ρ) тўла бўлмаган метрик фазога мисол бўлади. Масалан, $\left\{r_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ рационал сонлар кетма-кетлиги фундаментал, аммо Qда яқинлашмайди. Унинг лимити e сони бўлиб, рационал сон эмас.

4. $C[a,b]$ тўла метрик фазо бўлади. Унинг тўлалигини кўрсатиш учун узлуксиз функциялардан иборат ихтиёрий $\{x_n(t)\}$ фундаментал кетма-кетликнинг $[a,b]$ кесмада узлуксиз функцияга яқинлашишини кўрсатишимиз керак.

Айтайлик, $\{x_n(t)\}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин. $C[a,b]$ фазодаги яқинлашиш функцияларнинг текис яқинлашишига эквивалент (2.3-параграф) эканлиги маълум. Ҳар бир тайин $t\in[a,b]$ нуқтада $\{x_n(t)\}$ сонли кетма-кетлик фундаментал бўлганлиги сабабли, яқинлашувчи бўлади. Унинг лимитини $x_0(t)$ билан белгилаймиз. $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $x_0(t)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлгани учун $x_0(t)$ функция узлуксиз бўлади: $x_0(t)\in C[a,b]$.

3. Ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма-кетлиги.

Математик анализ курсида ўрганилган, ичма-ич жойлашган сегментлар кетма-кетлиги ҳақидаги теоремага ўхшаш теорема тўла метрик фазолар учун ҳам ўринли бўлар экан.

25-теорема. *Айтайлик,* (X,ρ) *тўла метрик фазода ёпиқ шарлар кетма-кетлиги* $(\overline{S}_n = \overline{S}_n(a_n,\varepsilon_n))$ *берилган бўлиб, ихтиёрий* $m>n$ *учун* $\overline{S}_m \subset \overline{S}_n$ *ва* $n\to\infty$ *да* $\varepsilon_n\to 0$ *шартлар бажарилсин. У ҳолда бу шарларнинг умумий қисми биргина нуқтадан иборат бўлади.*

Демак, ичма-ич жойлашган ёпиқ шарлар кетма-кетлигининг умумий қисми уларнинг радиуслари нолга интилганда нуқта бўлар экан.

Исботи. Берилган $\overline{S}_n$ шарларнинг марказларидан иборат бўлган қуйидаги кетма-кетликни тузамиз:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \qquad (1)$$

Теорема шартига кўра, $m>n$ учун $a_m \in \overline{S}_n$. Шунинг учун $\rho(a_m,a_n)\le \varepsilon_n$ ёки $n\to\infty$ да $\rho(a_m,a_n)\to 0$ бўлади. Бу эса (1) кетма-кетликнинг фундаментал эканини билдиради. X тўла метрик фазо бўлганлиги учун бу кетма-кетлик бирор $a\in X$ элементга яқинлашади. Энди ихтиёрий $\overline{S}_m$ ёпиқ шарни оламиз (m-тайин натурал сон). У ҳолда $a \in \overline{S}_m$ бўлади, чунки a_m, a_{m+1},... нуқталар кетма-кетлиги (1) кетма-кетликнинг қисм кетма-кетлиги бўлганлиги учун a нуқтага яқинлашади. Бу кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади $\overline{S}_m$ га тегишли ва $\overline{S}_m$ ёпиқ бўлганлиги учун $a \in \overline{S}_m$, $m = 1, 2, \dots$. Демак, $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{S}_m$ бўлади.

Энди a нуқтанинг ягоналигини исботлаш учун тескарисини фараз қиламиз. Айтайлик, $\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{S}_m$ тўпламга a нуқтадан фарқли яна бир b элемент тегишли бўлсин. У ҳолда

$$0 < \rho(a,b) \le \rho(a,a_n) + \rho(a_n,b) \le 2\varepsilon_n$$

ва $n\to\infty$ да $\varepsilon_n\to 0$ бўлганлиги учун $\rho(a,b)=0$, яъни $a=b$ бўлади. Теорема исбот бўлди.

Келтирилган теореманинг тескариси ҳам ўринли.

26-теорема. *Агар* (X,ρ) *метрик фазода 25-теорема шартларини қаноатлантирувчи ҳар қандай ёпиқ шарлар кетма-кетлиги бўш бўлмаган умумий қисмга эга бўлса, у ҳолда* X *тўла метрик фазо бўлади.*

4. Тўлдирувчи фазо ҳақидаги теорема.

Қуйида функционал анализнинг асосий қоидаларидан бири бўлган тўлдирувчи фазо ҳақидаги теоремани келтирамиз:

27-таъриф. Агар (X,ρ) метрик фазо учун шундай (X*,ρ*) тўла метрик фазо мавжуд бўлиб, X фазо X* нинг ҳамма ерида зич (яъни $\overline{X} \supset X^*$) бўлса, у ҳолда (X*,ρ*) метрик фазо (X,ρ) *фазонинг тўлдирувчиси* дейилади.

Масалан, Q рационал сонлар тўплами ρ(r,q)=|q-r| метрикага нисбатан тўла эмас. Аммо R ҳақиқий сонлар тўплами ρ(x,y)=|y-x| метрикага нисбатан тўла метрик фазо. Шунингдек, биламизки, Q тўплам R да зич, яъни $\overline{Q} = R$, демак, R фазо Q фазонинг тўлдирувчиси бўлади.

27-теорема. *Ихтиёрий* (X,ρ) *метрик фазо тўлдирувчига эга бўлиб, у* X *нинг элементларини ўз ўрнида қолдирувчи изометрия аниқлигида ягона бўлади, яъни ҳар қандай икки тўлдирувчи фазонинг бирини иккинчисига акс эттирувчи ва* X *фазонинг ҳар бир нуқтасини ўз ўрнида қолдирувчи изометрия доим мавжуд.*

Исботи. Аввал, агар тўлдирувчи фазо мавжуд бўлса, унинг ягоналигини исботлаймиз. Айтайлик, (X^*,ρ_1) ва (X^{**},ρ_2) фазолар (X,ρ) фазонинг тўлдирувчилари бўлсин. Бизнинг мақсадимиз учун қуйидаги:

1) φ - изометрия;

2) ихтиёрий $x \in X$ учун φ(x)=x хоссаларга эга бўлган $\varphi: X^* \to X^{**}$ акслантиришнинг мавжудлигини кўрсатиш етарли.

Бундай φ изометрияни қуйидагича аниқлаймиз: Ихтиёрий бир $x^* \in X^*$ нуқта оламиз. У ҳолда тўлдирувчи фазонинг таърифига асосан x* га яқинлашувчи ва X нинг элементларидан тузилган $\{x_n\}$ кетма-кетлик мавжуд бўлади. Қолаверса, бу кетма-кетлик X** фазога ҳам тегишли. X** тўла бўлганлиги учун $\{x_n\}$ кетма-кетлик бирор $x^{**} \in X^{**}$ нуқтага яқинлашади. Ўз-ўзидан равшанки, x** нуқта $\{x_n\}$ кетма-кетликни танлашга боғлиқ эмас.

Акслантиришни φ(x*)=x** кўринишда аниқлаймиз. Равшанки, ихтиёрий $x \in X$ учун φ(x)=x бўлади.

Энди фараз қилайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ лар X фазодаги фундаментал кетма-кетликлар бўлиб, улар X* фазода мос равишда x* ва y* нуқталарга, X** фазода мос равишда x** ва y** нуқталарга яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда метриканинг узлуксизлигига асосан

$$\rho_1(x^*,y^*) = \lim_{n\to\infty}\rho_1(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),$$

$$\rho_2(x^{**},y^{**}) = \lim_{n\to\infty}\rho_2(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$$

муносабатлар, яъни $\rho_1(x^*,y^*)=\rho_2(x^{**},y^{**})$ тенглик ўринли. Шундай қилиб, φ биз излаган изометрия бўлади.

Энди тўлдирувчи фазонинг мавжудлигини исботлаймиз.

Агар метрик фазода икки $\{x_n\}$ ва $\{x'_n\}$ фундаментал кетма-кетликлар учун $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=0$ бажарилса, у ҳолда улар *эквивалент* дейилади ва $\{x_n\}\sim\{x'_n\}$ кўринишда белгиланади.

Бу муносабат эквивалентлик муносабати бўлади (исботланг). Демак, X метрик фазодаги фундаментал кетма-кетликлар тўплами ўзаро эквивалент бўлган кетма-кетликлар синфларига ажралади. Энди биз (X^*,ρ^*) фазони қуйидагича аниқлаймиз:

X^* нинг элементлари деб ўзаро эквивалент бўлган фундаментал кетма-кетликлар синфларига айтамиз.

Агар x^*, $y^*\in X^*$ икки синф бўлса, биз уларнинг ҳар биридан $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ фундаментал кетма-кетликларни олиб, X^* фазода метрикани

$$\rho^*(x^*,y^*) = \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n) \qquad (1)$$

кўринишда аниқлаймиз (бунинг метрика бўлишини мустақил исботланг).

Энди X метрик фазони X* метрик фазонинг қисм фазоси деб ҳисоблаш мумкинлигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий $x\in X$ элементга шу элементга яқинлашувчи бўлган фундаментал кетма-кетликлар синфини мос қўямиз. Бу синф бўш эмас, чунки бу синф стационар бўлган (яъни ҳамма x_n элементлари x га тенг бўлган) кетма-кетликни ўз ичига олади. Агар $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, $y=\lim_{n\to\infty}y_n$ бўлса, у ҳолда $\rho(x,y)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$. Шу тарзда ҳар бир $x\in X$ га юқорида айтилган синфни мос қўйсак, X ни X* га изометрик акслантириш ҳосил бўлади. Шунинг учун X ни унинг X*даги образи билан айнан тенг деб ҳисоблаймиз.

X ни X* нинг ҳамма ерида зич эканлигини исботлаймиз. Айтайлик, $x^* \in X^*$ ихтиёрий элемент ва $\varepsilon>0$ бўлсин. x* синфга тегишли бўлган бирор $\{x_n\} \in x^*$ фундаментал кетма-кетликни оламиз. n_0 натурал сон шундай бўлсинки, ушбу $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ тенгсизлик ихтиёрий $n,m>n_0$ лар учун бажарилсин. У ҳолда m бўйича лимитга ўтсак, $\rho^*(x_n,x^*)=\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\le\varepsilon$ тенгсизлик ихтиёрий $n>n_0$ учун бажарилади. Демак, x* нуқтанинг ихтиёрий атрофида X нинг элементи мавжуд, яъни X нинг ёпилмаси X* га тенг.

Ниҳоят, X* нинг тўла эканлигини исботлаймиз. Аввал шуни айтиш керакки, X* нинг таърифига кўра, X нинг элементларидан ҳосил бўлган ихтиёрий $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ фундаментал кетма-кетлик X* нинг бирор x* элементига яқинлашади, аниқроғи, шу элементни ўз ичига олувчи синф билан аниқланган x^* элементга яқинлашади. X фазо X* фазода зич бўлгани туфайли X* нинг элементларидан тузилган ихтиёрий $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, \ldots$ фундаментал кетма-кетлик учун унга эквивалент бўлган ва X нинг элементларидан тузилган $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлик мавжуд. Буни кўрсатиш учун x_n сифатида X нинг ушбу $\rho(x_n,x^*_n)<\frac{1}{n}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий элементини олса бўлади. Ҳосил бўлган $\{x_n\}$ кетма-кетлик X да фундаментал ва демак, бирор x* элементга яқинлашувчи бўлади. Шунингдек, бу ҳолда $\{x^*_n\}$ кетма-кетлик ҳам x* га яқинлашади. Теорема исбот бўлди.

Саволлар ва машқлар

1. Қандай кетма-кетлик фундаментал дейилади?
2. Фундаментал кетма-кетликка мисоллар келтиринг.
3. Фундаментал бўлмаган кетма-кетликка мисоллар келтиринг.
4. Тўла метрик фазо қандай аниқланади?
5. Тўла метрик фазога мисоллар келтиринг.
6. Тўлдирувчи фазога таъриф беринг.
7. Тўлдирувчи фазога мисоллар келтиринг.
8. Кетма-кетликлар учун киритилган эквивалентлик тушунчаси эквивалентлик муносабати бўлишини кўрсатинг.

9. Қачон икки метрик фазо изометрик дейилади?

10. Қандай кетма-кетликлар эквивалент дейилади? Мисоллар келтиринг.

11. 27-теорема исботини қисмларга ажратинг (режасини ёзинг).

12. Сонлар ўқида $x_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}$ кетма-кетликнинг фундаментал эканлигини исботланг.

13. $y_n(x)=x^n$ функциялар кетма-кетлиги: а) $C[-0,5;0,5]$; б) $C[0;1]$ фазода фундаментал кетма-кетлик бўладими?

14. R_2^n фазонинг тўлалигини исботланг.

15. R_1^n фазонинг тўлалигини исботланг.

16. $C[a;b]$ фазонинг кўпҳадлардан иборат қисм фазоси тўла бўладими?

17. 26- теоремани исботланг.

11-§. Қисқартириб акслантириш принципи

1. Акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазо ва $T : X \to X$ акслантириш берилган бўлсин.

28-таъриф. Агар X фазодаги бирор a нуқта учун $T(a)=a$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда a нуқта T акслантиришнинг *қўзғалмас нуқтаси* дейилади.

Мисоллар. 1. Сонлар ўқида берилган $T:x\to x^2$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқталари $x=x^2$ тенглама ечимларидан, яъни 0 ва 1 дан иборат.

2. $\begin{cases} u = 2x+3y-2 \\ v = x+y+1 \end{cases}$ формулалар текисликни ўз-ўзига акслантиради. Бу акслантиришнинг қўзғалмас нуқталари $\begin{cases} x = 2x+3y-2 \\ y = x+y+1 \end{cases}$ системанинг ечимидан, яъни (-1;1) нуқтадан иборат.

3. Агар $y(x)$ функция $[0;1]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $y^2(x)-y(x)-x^2$ функция ҳам $[0;1]$ кесмада узлуксиз функция бўлади. Шунинг учун $T(y)=y^2 - y - x^2$ формула билан аниқланган акслантириш $C[0;1]$ фазони ўз-ўзига акслантиради.

Бу акслантиришнинг қўзғалмас нуқталари $y^2(x)-y(x)-x^2=y(x)$ функционал тенгламанинг узлуксиз ечимларидан, яъни $y=1+\sqrt{1+x^2}$ ва $y=1-\sqrt{1+x^2}$ функциялардан иборат бўлади.

2. Қисқартириб акслантириш.

Айтайлик, (X,ρ) метрик фазони ўз-ўзига акс эттирувчи $T:X\to X$ акслантириш берилган бўлсин.

29-таъриф. Агар X фазодан олинган барча x ва y нуқталар учун

$$\rho(Tx,Ty) \le \alpha\rho(x,y) \qquad (*)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган α $(0<\alpha<1)$ сон мавжуд бўлса, у ҳолда T *қисқартириб акслантириш* дейилади.

Масалан, $X=[0;1/3]$, $\rho(x,y)=|y-x|$, $T(x)=x^2$ бўлсин. Агар x_1 ва x_2 лар, кесманинг ихтиёрий нуқталари бўлса, у ҳолда

$$\rho(Tx_1,Tx_2)=|x_2^2-x_1^2|=|x_2+x_1|\cdot|x_2-x_1| \le {}^2/_3\cdot|x_2-x_1|= {}^2/_3\cdot\rho(x_1,x_2)$$

бўлади. Демак, $\alpha={}^2/_3$ ва T акслантириш қисқартириб акслантириш экан.

28-теорема. *Агар* T *қисқартириб акслантириш бўлса, у ҳолда* T *узлуксиз бўлади.*

Исботи. Айтайлик, a нуқта X фазонинг ихтиёрий нуқтаси ва $\varepsilon>0$ бўлсин. У ҳолда $\rho(x,a)<\varepsilon$ шартни қаноатлантирувчи барча $x\in X$ лар учун (*) тенгсизликка кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\rho(Tx,Ta) \le \alpha\rho(x,a) < \alpha\varepsilon < \varepsilon.$$

Бу эса ихтиёрий a нуқтада T акслантиришнинг узлуксиз эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

3. Қисқартириб акслантириш принципи.

Тўла метрик фазоларда берилган ҳар хил тенгламаларнинг ечимлари мавжудлиги ва ягоналигини исботлашда, қисқартириб акслантириш принципи муҳим ва фойдали усуллардан бири сифатида ишлатилиб келинади.

29-теорема. (X,ρ) *тўла метрик фазода берилган ҳар бир* T *қисқартириб акслантириш ягона қўзғалмас нуқтага эга, яъни* $Tx=x$ *тенгламанинг ягона ечими мавжуд.*

Исботи. Айтайлик, a_0 нуқта X фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. T акслантириш X фазони ўз-ўзига акслантиргани учун a_0 нуқтанинг образи ҳам X фазога тегишли бўлади. Бу нуқтани a_1 билан белгилаймиз, яъни $a_1=T(a_0)$. Энди a_1 нуқтанинг образини топиб, уни a_2 билан белгилаймиз. Бу жараённи чексиз давом эттириб, X фазонинг элементларидан тузилган

$$a_1=T(a_0),\ a_2=T(a_1)=T^2(a_0),\ \dots,\ a_{n+1}=T(a_n)=T^{n+1}(a_0),\ \dots \qquad (2)$$

кетма-кетликка эга бўламиз.

Бу кетма-кетликнинг фундаментал эканлигини кўрсатамиз.

Қисқартириб акслантириш таърифидан ва метриканинг учбурчак тенгсизлигидан ихтиёрий n ва m натурал сонлар (m>n) учун

$$\rho(a_n,a_m)=\rho(T^n(a_0),T^m(a_0))=\rho(T^n(a_0),T^n(a_{m-n}))\leq\alpha^n\rho(a_0,a_{m-n})\leq$$
$$\leq\alpha^n(\rho(a_0,a_1)+\rho(a_1,a_2)+\ldots+\rho(a_{m-n-1},a_{m-n}))\leq\alpha^n(\rho(a_0,a_1)+$$
$$+\alpha\rho(a_0,a_1)+\ldots+\alpha^{m-n-1}\rho(a_0,a_1))\leq\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(a_0,a_1)$$

муносабат ўринли бўлади. Энди $\alpha<1$ бўлганлиги сабабли, n етарлича катта бўлганда бу тенгсизликнинг ўнг томонини исталганча кичик қилиш мумкин. Демак, $\{a_n\}$ кетма-кетлик фундаментал экан. Бундан $\{a_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ва X фазонинг тўлалигидан $a\in X$ келиб чиқади. T узлуксиз акслантириш бўлганлигидан

$$T(a)=T(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}T(a_n)=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a.$$

Демак, a қўзғалмас нуқта экан.

Энди қўзғалмас нуқтанинг ягоналигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, қўзғалмас нуқта иккита $T(a)=a$ ва $T(b)=b$ бўлсин. У ҳолда $\rho(a,b)=\rho(T(a),T(b))\leq\alpha\rho(a,b)$ муносабатдан $\rho(a,b)=0$ ва демак, $a=b$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Исботланган теорема, одатда, қисқартириб акслантириш принципи деб юритилади.

Саволлар ва машқлар

1. Қўзғалмас нуқта қандай нуқта?
2. Қисқартириб акслантиришни таърифланг ва мисоллар келтиринг.
3. Қисқартириб акслантиришнинг узлуксизлигини исботланг.
4. Қисқартириб акслантириш ҳақидаги асосий теореманинг исботи режасини тузинг ва шу асосда исботланг.
5. Текисликни ўз-ўзига акслантирувчи

$$\begin{cases} u=x(y-1)-2y^2+5y+x-3, \\ v=-x(y+1)+5 \end{cases}$$

акслантиришнинг қўзғалмас нуқталарини топинг.

6. Тўғри чизиқда берилган $f(x)=5x^2+2x+3-2\sin x$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

7. $f(x)=\sin x$ функция сонлар ўқида қисқартириб акслантириш бўладими?

8. $\begin{cases} u=0{,}7x+0{,}8y, \\ v=0{,}2x-0{,}05y \end{cases}$ система билан аниқланган $f:(x,y)\to(u,v)$ акслантириш текисликни: а) R_2^2; б) R_1^2 фазо деб қаралса, қисқартириб акслантириш бўладими?

9. $f(x)=\sqrt[3]{1000-x}$ функция $[9;10]$ кесмани ўзига акслантиришини кўрсатинг. У қисқартириб акслантириш бўладими?

12-§. Қисқартириб акслантириш принципининг татбиқлари

1. Дифференциал ва интеграл тенгламаларга татбиқи.

Узлуксиз функциялар фазоси $C[a;b]$ да ихтиёрий $y=y(x)$ функция учун

$$Ay=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

каби аниқланган акслантириш берилган бўлсин. Бу ерда, y_0 бирор сон, x, $x_0\in[a;b]$, $f(x,y)$ икки ўзгарувчили узлуксиз функция бўлиб, (x_0,y_0) нуқтани ўз ичига олувчи бирор

$$G=\{\ (x;y)\ :\ a\le x\le b,\ \ y_0\text{-}c<y\le y_0+c\ \}$$

соҳада иккинчи аргументи y бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради, яъни G соҳада қуйидаги муносабат бажарилади:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,$$

бу ердаги L сони G соҳа билан аниқланувчи ва $(x;y_1),(x;y_2)\in G$ нуқталарга боғлиқ бўлмаган мусбат сон.

Қаралаётган A акслантириш бирор x_0 нуқтанинг $|x-x_0|<\varepsilon$ етарлича кичик атрофида қисқартириб акслантириш эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, айтайлик, $y(x)$ ва $y_1(x)$ функциялар $C[a,b]$ фазонинг ихтиёрий элементлари бўлсин. У ҳолда

$$\rho(Ay,Ay_1)=\max_{x\in[a;b]}|Ay(x)-Ay_1(x)|\le \max_{x\in[a;b]}\int_{x_0}^{x}|f(t,y(t))-f(t,y_1(t))|dt\le$$

$$\le \max_{x\in[a;b]}\int_{x_0}^{x}L|y-y_1|dx=L|x-x_0|\max_{x\in[a;b]}|y(x)-y_1(x)|=\alpha\rho(y,y_1)$$

муносабатга эга бўламиз. Шунингдек, $|x-x_0|<{}^1/_L$ бўлган атрофда $\alpha=L|x-x_0|<1$ бўлади, яъни шу ҳолда А қисқартириб акслантириш бўлади.

$C[a,b]$ фазонинг тўлалигидан А акслантиришнинг ягона қўзғалмас нуқтаси мавжудлиги келиб чиқади.

Демак, $y=Ay$ тенгламанинг ёки

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt \qquad (1)$$

интеграл тенгламанинг узлуксиз ечими мавжуд бўлиши учун, $f(x,y)$ функция $|x-x_0|<{}^1/_L$ атрофда L ўзгармас сонга кўра Липшиц шартини қаноатлантириши етарли экан.

Кўриш мумкинки, (1) интеграл тенглама $y_0=y(x_0)$ бошланғич шарт билан берилган

$$y'=f(x,y) \qquad (2)$$

дифференциал тенгламага тенг кучли. Демак, юқоридаги мулоҳазалардан (2) дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги келиб чиқади.

2. Алгебрадаги татбиқи.

Қуйидаги тенгламалар системасини қараймиз:

$$x=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+b_i \quad (i=1, 2, ..., n). \qquad (3)$$

Бу тенгламалар системасини n ўлчамли вектор фазодаги $x=(x_1,x_2,...x_n)$ вектор ва $T=(a_{ij})$ матрица орқали ифодалаб, $x=Tx$ кўринишда ёзиш мумкин. Агар n ўлчамли вектор фазода $x=(x_1,x_2,...x_n)$ ва $y=(y_1,y_2,...y_n)$лар учун

$$\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$$

каби аниқланган метрикани қарасак, у ҳолда ихтиёрий иккита $x'=(x_1',x_2',...,x_n')$ ва $x''=(x_1'',x_2'',...,x_n'')$ нуқта учун

$$\rho(Tx',Tx'')=\rho(y',y'')=\max_{1\le i\le n}|y'_i-y''_i|\max_{1\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|(x'_k-x''_k)|\le$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|\cdot|x'_k-x''_k|\le\max_{1\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|\max_{1\le i\le n}|x'_k-x''_k|=$$

$$=\rho(x',x'')\max_{1\le i\le n}\sum_k|a_{ik}|$$

муносабатга эга бўламиз.

Бундан T акслантириш қаралаётган метрикага нисбатан қисқартириб акслантириш бўлиши учун

$$\sum_k|a_{ik}|=\alpha<1,\ i=1,2,\dots,n \tag{4}$$

тенгсизликларнинг ўринли бўлиши етарли эканлиги келиб чиқади. Демак, (3) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиши учун (4) тенгсизликларнинг ўринли бўлиши етарли.

3. Математик таҳлилдаги татбиқи.

Қуйида ошкормас функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теоремани исботлаймиз:

30-теорема. *Айтайлик,* $f(x,y)$ *функция* $G=\{(x,y): a\le x\le b, -\infty<y<+\infty)$ *соҳада* x *бўйича узлуксиз ва* y *бўйича мусбат, чегараланган ҳосилага эга бўлсин* $(0<m\le f'_y\le M)$. *У ҳолда* $f(x,y)=0$ *тенглама* $[a;b]$ *кесмада ягона* $y=y(x)$ *узлуксиз ечимга эга.*

Исботи. $C[a;b]$ фазони ўз-ўзига акс эттирувчи

$$Ay=y-\frac{1}{M}f(x,y)$$

акслантиришни қараймиз. Бу акслантиришнинг қисқартириб акслантириш эканлигини кўрсатамиз. Агар y_1 ва y_2 функциялар $C[a;b]$ фазонинг элементлари бўлса, у ҳолда

$$\rho(Ay_1,Ay_2)=|Ay_1-Ay_2|=|(y_1-\frac{1}{M}f(x,y_1))-(y_2-\frac{1}{M}f(x,y_2))|=$$

$$=|(y_1-y_2)-\frac{1}{M}f'_y(x,y_1+\theta(y_2-y_1))(y_1-y_2)|\le|1-\frac{m}{M}|\cdot|y_1-y_2|=\alpha\rho(y_1,y_2)$$

бўлади. Бу ерда $0<\alpha<1$.

Демак, ихтиёрий $y_0(x)\in C[a;b]$ функция учун $y_1=Ay_0$, $y_2=Ay_1$, . . . функциялар кетма-кетлиги яқинлашувчи бўлади ва $\lim_{n\to\infty}y_n=y$ функция $f(x,y)=0$ тенгламанинг $[a;b]$ кесмадаги ягона $y=y(x)$ узлуксиз ечими бўлади. Теорема исбот бўлди.

Саволлар ва машқлар

1. Дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремани айтинг. Қандай қилиб дифференциал тенгламани тақрибий ечиш мумкин?

2. n номаълумли n та тенгламалар системасининг ечими мавжудлигининг етарли шарти R^n фазодаги метрикаларга қандай боғлиқ?

3. Берилган a мусбат соннинг квадрат илдизини ҳисоблашда ихтиёрий $x_0 \geq \sqrt{a}$ учун $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}})$ формула билан қурилган кетма-кетлик яқинлашишидан фойдаланиш мумкинлигини исботланг.

4. Қуйидаги рекуррент формулалар билан берилган кетма-кетликларнинг яқинлашувчи эканлигини исботланг ва лимитини ҳисобланг:

а) $x_n = \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$, $(x_0=1)$; б) $x_n = \frac{x_{n-1}}{3-x_{n-1}}$, $(x_0=-5)$.

5. $f(x) \in C[a;b]$ бўлсин. $y(x)+\frac{1}{2}\sin y(x)+f(x)=0$ тенглама ягона $y(x) \in C[a;b]$ ечимга эга эканлигини исботланг.

III БОБ. ЎЛЧОВ ВА ЎЛЧОВЛИ ТЎПЛАМЛАР

1-§. Ўлчаш тушунчаси

Маълумки, ўлчаш ҳақида тушунчага эгамиз: узунлик, юза, ҳажм, оғирлик ва ҳоказо кабилар. Узунлик – кесма, масофани, юза – текисликдаги ясси фигуралар юзасини, ҳажм – фазовий жисмлар ҳажмини, оғирлик – бирор буюм ёки нарса оғирлигини ўлчашда ишлатилади.

Умуман олганда, кесма, фигура, жисм, буюм ва нарсалар битта ном остида – тўплам деб юритилишини ҳисобга олсак, у ҳолда *ўлчаш* бирор тўпламга сон қиймат бериш деб қаралиши мумкин экан.

Мисол. Ихтиёрий бир $X=\{a, b, c\}$ тўпламни олайлик. Унинг қисм тўпламлари бўш тўпламдан бошқа, яна 7 та эканини биламиз: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$. Мана шу қисм тўпламларга сон қийматлар бериб чиқайлик.

Битта a элементли $\{a\}$ тўпламга 1, $\{b\}$ га 2, $\{c\}$ га 3, $\{a,b\}$ га 4 ва ҳоказо қуйидагича бўлсин:

I. $\{a\} \to 1, \{b\} \to 2, \{c\} \to 3, \{a,b\} \to 4, \{a,c\} \to 5, \{b,c\} \to 6, \{a,b,c\} \to 7$.

Сонларни қандай бериш ўз қўлимизда бўлгани учун уни сал бошқароқ қилиб ўзгартиришимиз мумкин:

II. $\{a\} \to 1, \{b\} \to 2, \{c\} \to 3, \{a,b\} \to 3, \{a,c\} \to 4, \{b,c\} \to 5, \{a,b,c\} \to 6$.

Ёки яна бир оз ўзгартирсак:

III. $\{\alpha \to a\} \to 1, \{b\} \to 2, \{c\} \to 3, \{\alpha \to a,b\} \to 2, \{\alpha \to a,c\} \to 4, \{b,c\} \to 6, \{\alpha \to a,b,c\} \to 8$.

Бу жараённи истаганча давом эттириш мумкин.

Демак, юқоридаги 7 та тўпламга сон қийматларни хоҳлаганча беришга ва ўзгартиришга ҳаққимиз бор эканда. Шу тўғрими?

Албатта нотўғри!

Сабаб нимада?

Биз юқоридаги қийматларни беришда ҳеч қандай қонуниятга риоя қилмадик. Агар қандайдир қонун ва қоида асосида иш олиб бормасак, у ҳолда ўлчаш тушунчасининг ҳеч қандай маъноси қолмайди.

Келинглар, бирор ҳаётий мисол олиб унинг устида мулоҳаза юритиб кўрайлик.

Биздан қандайдир буюмнинг оғирлигини ўлчаш талаб қилинсин. Уни тарозига қўямизда – ўлчаймиз, масала ҳал бўлади. Энди шундай ҳолат бўлиши мумкинки, тарозимиз тошлари буюм оғирлигини ўлчашга етмай қолади. Нима қилиш керак? Бунинг йўли жуда осон: буюмни бир неча бўлакларга ажратамиз ва ҳар бир бўлак оғирликларини топиб қўшиб чиқамиз.

Худди мана шу ғоя ўлчов аниқлашнинг асосий қоидаларидан бири сифатида олинади. Юқорида кўрганимиз, тўпламларга сон қиймат бериш – ўлчаш, сон қийматлар эса тўпламнинг ўлчови дейилади.

Тўпламнинг ўлчови, бирлашмаси шу тўпламга тенг ва умумий қисмга эга бўлмаган бўлаклари ўлчовлари йиғиндисига тенг бўлиши зарур.

Бу қоида *ўлчовнинг асосий хоссаси* ҳисобланади.

Энди аввалги, $X=\{a,\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ тўплам ва унинг қисм тўпламлари ва уларнинг ўлчови мисолига қайтсак. Учала ҳолда ҳам бир элементли тўпламлар ўлчови бир хил берилган. Дастлаб, I ҳолни кўрайлик. Икки элементли $\{\alpha\to a,\mathrm{b}\}$ тўпламнинг ўлчови аниқланишга кўра 4 га тенг. Агар уни икки бўлакка $\{\alpha\to a\}$ ва $\{\mathrm{b}\}$ тўпламларга ажратсак $\{\alpha\to a,\mathrm{b}\}=\{\alpha\to a\}\cup\{\mathrm{b}\}$, у ҳолда киритилган қоидага кўра $\{\alpha\to a,\mathrm{b}\}$ тўпламнинг ўлчови ўз бўлаклари ўлчовлари йиғиндиси: $1+2=3$ га тенг бўлиши керак.

Бу эса $\{\alpha\to a,\mathrm{b}\}$ тўпламнинг ўлчови сифатида 4 ни олишимиз нотўғри эканини билдиради. Худди шунингдек, $\{\alpha\to a,\mathrm{c}\}$ тўпламнинг ўлчови 5 эмас 4, $\{\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ ники 6 эмас 5, $\{\alpha\to a,\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ ники 7 эмас 6 бўлиши кераклиги келиб чиқади.

Эътибор берсак, II ҳолда ўлчов тўғри аниқланганига ишонч ҳосил қиламиз. Шунингдек, III ҳолда ҳам ўлчов нотўғри берилган. Негалигини ўзингиз текшириб кўринг.

Келгусида ўлчовни юқоридагидек, тўпламга унинг ўлчовини "$\to$" каби мослик орқали эмас, балки содда қилиб $m(\{\alpha\to a,\mathrm{b}\})=4$ каби белгилаймиз.

Бу ердаги m инглизча "*measure*" –ўлчов сўзининг биринчи ҳарфи.

Келишувга асосан, $X=\{a,\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ тўпламдаги ўлчовни (II ҳолда тўғри берилган) қисқача

$m(\{a\})=1,\ m(\{\mathrm{b}\})=2,\ m(\{\mathrm{c}\})=3,\ m(\{a,\mathrm{b}\})=3,$

$m(\{a,\mathrm{c}\})=4,\ m(\{\mathrm{b},\mathrm{c}\})=5,\ m(\{a,\mathrm{b},\mathrm{c}\})=6$

каби ёзамиз.

Асосий хоссадан қуйидаги формула келиб чиқади:

$$m(\{c\})=m(\{b,c\})-m(\{b\}).$$

Яъни, ''каттароқ'' тўплам ўлчовидан унинг қисм тўплами ўлчовини айириб, қолган қисм тўпламнинг ўлчовини топиш мумкин экан.

Ҳақиқатан, асосий хоссага кўра

$$m(\{b,c\})=m(\{b\}) + m(\{c\})$$

бўлади. Бундан m({c}) ни топсак, юқоридаги формула келиб чиқади.

Саволлар ва машқлар

Қуйидаги машқларнинг ҳар бирида $X=\{a,b,c\}$ тўплам ва унинг қисм тўпламлари иштирок этади.

1. Берилганларга кўра қолган 4 та қисм тўпламларнинг ўлчовини аниқланг:

a) $m(\{a\})=2,\ m(\{b\})=2,\ m(\{c\})=2.$
b) $m(\{a\})=1,\ m(\{b\})=2,\ m(\{c\})=2.$
c) $m(\{a\})=3,\ m(\{b\})=3,\ m(\{c\})=4.$
d) $m(\{a\})=1/2,\ m(\{b\})=2/3,\ m(\{c\})=3/5.$
e) $m(\{c\})=3,\ m(\{a,b\})=3,\ m(\{a,c\})=4.$
f) $m(\{c\})=6,\ m(\{a,b\})=20,\ m(\{a,c\})=10.$
g) $m(\{b\})=4,\ m(\{a,b\})=6,\ m(\{a,c\})=4.$
h) $m(\{a\})=5,\ m(\{a,b\})=8,\ m(\{b,c\})=4.$
i) $m(\{b\})=3,\ m(\{b,c\})=30,\ m(\{a,c\})=37.$
j) $m(\{a,b,c\})=7,\ m(\{a,b\})=3,\ m(\{a,c\})=4.$

2. Қуйидагича берилганлар ўлчов бўла олмаслигини тушунтиринг.

a) $f(\{c\})=3,\ f(\{a,b\})=2,\ f(\{a,c\})=6.$
b) $g(\{a\})=11,\ g(\{a,c\})=4,\ g(\{b,c\})=10.$
c) $f(\{b\})=13,\ f(\{a,b\})=15,\ f(\{a,c\})=4.$
d) $g(\{a,b,c\})=6,\ g(\{a,b\})=2,\ g(\{a,c\})=3.$
e) $f(\{a,b,c\})=7,\ f(\{a,b\})=3,\ f(\{a,c\})=3.$
f) $g(\{a,b,c\})=7,\ g(\{b,c\})=3,\ g(\{c\})=4.$
g) $f(\{b,c\})=6,\ f(\{a,b,c\})=12,\ f(\{a\})=8.$

3. Агар $m(\{a,b\})=3,\ m(\{a,c\})=4$ бўлса, у ҳолда $m(X)=8$ бўла оладими?

4. Агар $m(\{a,b\})=4,\ m(\{b,c\})=5$ бўлса, у ҳолда $m(X)$ нинг қиймати қандай сонларга тенг бўлиши мумкин?

2-§. Тўплам функцияси

Сиз, албатта, функция тушунчаси билан 1-бобда танишгансиз. Одатда, функция икки тўплам орасидаги муносабат сифатида аниқланади. Бу ерда биз бирор тўпламда берилган ва ҳақиқий сон қиймат қабул қиладиган функцияларни қараймиз.

Ушбу параграфда элементларининг ўзи ҳам тўплам бўлган, тўпламлар тўплами устида берилган функциялар ўрганилади. Келгусида тўпламлар тўплами деганда элементлари тўпламлардан иборат тўпламни тушунамиз.

1-таъриф. Тўпламлар тўпламида берилган функция *тўплам функцияси* дейилади.

Демак, тўплам функциясининг аргументлари тўпламлардан иборат экан.

Агар функция аниқланган тўплам тўпламлар ҳалқаси бўлса, у ҳолда бу функция ҳалқада берилган функция дейилади.

Албатта, биз тўплам функциясининг қийматлари ҳақиқий сонлардан иборатлигини таъкидлаб қўйишимиз лозим.

Тўплам функциясига *мисоллар* кўрайлик.

1. Аввалги параграфда аниқлаганимиз – ўлчаш тўплам функцияси эканини сезиш қийин эмас.

2. Агар $X=\{a,b,c\}$ бўлса, унинг барча тўплам остилари тўплами $E=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ да f тўплам функциясини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$f(\varnothing)=0$, $f(\{a\})=1$, $f(\{b\})=2$, $f(\{c\})=3$, $f(\{a,b\})=4$, $f(\{a,c\})=4$, $f(\{b,c\})=5$, $f(\{a,b,c\})=7$.

Шуни таъкидлашни истардикки, бу ердаги сон қийматларни истаганча ўзгартириб янги-янги тўплам функцияларини ҳосил қилишимиз мумкин. Эътибор беринг, ўлчовни аниқлашда бундай эркинлик йўқ эди.

Аввалги параграфнинг 2-машқида берилган функцияларнинг ҳар бири, қолган қисм тўпламлардаги қийматлари қандай аниқланмасин, тўплам функциясига мисол бўлади.

3. Ушбу $F(A)=\int\limits_A x^2dx$ функция ҳақиқий сонларнинг ихтиёрий А кесмасига бирор сонни мос қўювчи тўплам функциясидир.

Ҳақиқатан,агар $A=[0,2]$ бўлса, у ҳолда

$$F(A)=F([0,2])=\int\limits_{[0,2]}x^2dx=\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Худди шунингдек, $A=[-3,0]$ учун $F([-3,0])=9$,

$A=[1,3]\cup[5,6]$ учун $F(A)=36$,

$A=[-1,1]$ учун $F(A)={}^{2}/_{3}$ бўлади.

4. Агар ҳақиқий сонларнинг ихтиёрий A кесмаси учун тўплам функциясини $g(A)=\int\limits_{A}x^3dx$ каби аниқласак, у ҳолда

$$g([0,2])=\int\limits_{[0,2]}x^3dx=\int\limits_{0}^{2}x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^2=4$$

$$g([-3,0])=-{}^{81}/_{4},\quad g([-1,1])=0$$

бўлади.

Охирги мисолдан кўринадики, тўплам функцияси манфий қийматлар ҳам қабул қилиши, бўш бўлмаган тўпламда 0 га тенг бўлиши мумкин экан.

Тўплам функциясининг хоссаларини ўрганамиз.

Айтайлик, бирор E тўпламлар тўпламида f тўплам функцияси берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар E дан олинган ихтиёрий чекли сондаги (масалан, n та), ихтиёрий иккитаси ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламлар учун уларнинг бирлашмаси $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ ҳам E га тегишли бўлиб,

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n}f(A_i) \tag{1}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда f тўплам функцияси *чекли - аддитив* дейилади.

Айтайлик, f тўплам функцияси *тўпламлар ҳалқаси* E да берилган бўлсин. У ҳолда чекли сондаги тўпламлар бирлашмаси яна E ҳалқага тегишли бўлади. Шунинг учун ҳалқада берилган бирор тўплам функцияси чекли-аддитив бўлиши учун ихтиёрий икки, ўзаро кесишмайдиган A_1 ва A_2 ($A_1\cap A_2=\varnothing$) тўпламлар учун

$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)+f(A_2) \tag{2}$$

шарт бажарилишини талаб қилиш етарли, чунки индукция бўйича (1) тенглик ихтиёрий, ўзаро кесишмайдиган чекли сондаги тўпламлар учун ўринлилиги келиб чиқади.

Охирги (2) тенглик тўплам функциясининг *аддитивлик хоссаси* дейилади.

Демак, тўпламлар ҳалқасида берилган тўплам функцияси учун чекли аддитивлик ва аддитивлик бир хил маънони англатар экан.

Юқорида келтирилган 2-мисолдаги тўплам функцияси аддитив эмас, яъни $f(\{a,b\}) \neq f(\{a\}) + f(\{b\})$, чунки $f(\{a,b\})=4$ ва $f(\{a\})=1$, $f(\{b\})=2$.

Шунингдек, 1-, 3- ва 4- мисоллардаги тўплам функциялари аддитив эканлигини текшириш қийин эмас.

3-таъриф. Агар (1) тенглик нафақат чекли, балки саноқли сондаги ўзаро кесишмайдиган тўпламлар бирлашмаси кўринишида тасвирланган А лар учун ўринли бўлса, яъни саноқли сондаги ихтиёрий иккиси ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ тўпламлар учун уларнинг бирлашмаси $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ҳам Е га тегишли бўлиб,

$$f(A)=\sum_{i=1}^{\infty} f(A_i) \qquad (3)$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда f тўплам функцияси *саноқли-аддитив* дейилади.

Юқоридаги 3- ва 4- мисолларда келтирилган тўплам функциялари саноқли-аддитив бўлади. Текшириб кўринг.

Тўплам функциясининг қабул қиладиган қийматлари чегараси ҳақида нима дейиш мумкин?

Умуман олганда, тўплам функцияси хоҳлаганча катта қиймат қабул қила олади.

Аммо ҳалқада берилган *мусбат қийматли* чекли-аддитив тўплам функцияси яхши бир хусусиятга эга:

1-теорема. *Агар* Е *тўпламлар ҳалқасининг* А *ва* В *элементлари учун* $B \subset A$ *бўлиб,* f(A) *қиймат чекли сон бўлса, у ҳолда* f(B) *қиймат ҳам чекли сон бўлади.*

Исботи. Ҳақиқатан, f тўплам функциясининг аддитивлигидан

$$f(A) = f(B) + f(A \setminus B) \qquad (4)$$

тенгликка эга бўламиз (Е ҳалқа эканлигидан $A \setminus B$ ҳам Е га тегишли ва $f(A \setminus B) \geq 0$). Агар $f(B)=\infty$ десак, у ҳолда юқоридаги тенгликдан $f(A)=\infty$ келиб чиқади. Бу эса шартга зид. Демак, f(B) чекли. Теорема исбот бўлди.

Биламизки, бўш тўплам ҳар қандай тўпламга қисм бўлади. Тўплам функциясининг бўш тўпламдаги қиймати қандай бўлишини текширайлик.

2-теорема. *Агар тўпламлар ҳалқаси* E *да берилган* f *тўплам функцияси учун* f(A) *қиймати чекли бўлган бирорта* A *тўплам мавжуд бўлса, у ҳолда* $f(\varnothing)=0$ *бўлади, яъни* f *нинг бўш тўпламдаги қиймати нолга тенг.*

Исботи. Ҳақиқатан, айтайлик, A ва B тўпламлар E нинг элементлари ҳамда $B \subset A$ бўлсин. Агар f(A) чекли бўлса, юқоридаги хоссага кўра f(B) ҳам чекли ва (4) тенгликка кўра

$$f(A \setminus B) = f(A) - f(B) \qquad (5)$$

бўлади. Бу тенгликда $B = A$ десак,

$$f(\varnothing) = f(A) - f(A) = 0.$$

Бу эса бизга керакли натижадир. Теорема исбот бўлди.

Энди баъзи муҳим тасдиқларни эслатиб ўтамиз.

3-теорема. *Агар* A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *тўпламлар камаювчи, яъни ичма-ич жойлашган тўпламлар*

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_i \supset \ldots$$

кетма-кетлиги ва $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ *бўлса, у ҳолда*

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1}) \qquad (6)$$

тенглик ўринли бўлади ва ўнг томондаги бирлашманинг қўшилувчилари ўзаро кесишмайди.

Исботи. Кўриниб турибдики, тенгликнинг ўнг томони — A_1 нинг қисми. Энди A_1 нинг ўзи ўнг томоннинг қисми эканлигини кўрсатамиз.

Агар $x \in A_1$ бўлса, у ҳолда барча A_i лар A_1 нинг қисми бўлганлиги учун шундай бир n номер топиладики, $x \in A_n$ ва $x \notin A_{n+1}$ бўлади. Демак, $x \in A_n \setminus A_{n+1}$. Бундан керакли тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

4-теорема. *Агар* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *бўлиб, ундаги қўшилувчилар ўзаро кесишмаса ва* $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ *белгилаш киритсак, у ҳолда* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$ *бўлади.*

Бу ерда кўриниб турибдики, B_n тўпламлар камаювчи кетма-кетлик ташкил қилади.

Исботи. Агар бирор k да $x \in B_k$ бўлса, у ҳолда шундай бир $m>k$ номер топиладики, $x \in A_m$ бўлади. Аммо барча $i > m$ ларда $x \notin A_i$, чунки улар ўзаро кесишмайди. Бундан барча $n > m$ ларда $x \notin B_n$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, барча B_n ларга тегишли элемент мавжуд эмас экан. Теорема исбот бўлди.

5-теорема. *Агар* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *бўлиб, ундаги* A_i *қўшилувчилар ўсувчи кетма-кетлик ташкил қилса, яъни*

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_i \subset \ldots$$

бўлса, у ҳолда

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \cdots \cup (A_i \setminus A_{i-1}) \cup \cdots \qquad (7)$$

бўлади.

Шунингдек, тенгликнинг ўнг томонида турган қўшилувчилар ўзаро кесишмайди.

Бу хоссанинг исботини машқ сифатида ўзингизга қолдирамиз.

Энди келтирилган теорема ва хулосалар ёрдамида чекли қиймат қабул қиладиган саноқли-аддитив тўплам функциясининг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.

6-теорема. *Бирор* E *ҳалқада берилган чекли-аддитив* f *тўплам функцияси саноқли-аддитив бўлиши учун* E *дан олинган, умумий кесишмаси бўш бўлган* $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing)$ *ихтиёрий камаювчи* A_i $(i=1, 2, \ldots)$ *тўпламлар кетма-кетлиги учун* $f(A_i) \to 0$ *бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Агар f саноқли-аддитив бўлса, у ҳолда умумий кесишмаси бўш бўлган $A_i \in E$ камаювчи тўпламлар кетма-кетлиги учун (6) ва (5) формулаларга кўра

$$f(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty}[f(A_i) - f(A_{i+1})] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}[f(A_i) - f(A_{i+1})] = f(A_1) - \lim_{n\to\infty} f(A_n)$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан $f(A_n) \to 0$ келиб чиқади.

Тескариси. Айтайлик, теорема шартлари бажарилсин ва $A_i \in E$ ўзаро кесишмайдиган тўпламлар ҳамда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ $A \in E$ бўлсин. Ушбу белгилашни киритамиз. У ҳолда

$$B_n = A\setminus(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \in E$$

каби тасвирланади ва f нинг чекли аддитивлигидан

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i) f(A_i) + f(B_n)$$

келиб чиқади. Аммо шартга кўра, $f(B_n) \to 0$ ва шунинг учун

$$f(A) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i)$$

ўринли. Демак, f тўплам функцияси саноқли-аддитив экан. Теорема исбот бўлди.

7-теорема. *Айтайлик,* E *ҳалқада чекли қийматли, саноқли-аддитив* f *тўплам функцияси берилган бўлсин. Агар* E *даги* A *тўплам учун* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *шарт бажарилиб,* $A_i \in E$ *тўпламлар ўсувчи кетма-кетлик ташкил этса, у ҳолда*

$$f(A) = \lim_{i \to \infty} f(A_i) \qquad (8)$$

муносабат ўринли.

Худди шундай тенглик $A_i \in E$ тўпламлар камаювчи кетма-кетлик ҳосил қилиб, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ($A \in E$) шартни қаноатлантирганда ҳам ўринли.

Исботи. Айтайлик, $A_i \in E$ тўпламлар ўсувчи кетма - кетлик ҳосил қилсин. У ҳолда бизга керакли натижа (7) тенгликдан келиб чиқади.

f саноқли-аддитив бўлгани учун уни (7) га қўллаймиз:

$$f(A) = f(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} [f(A_i) - f(A_{i-1})]$$

Бу эса (8) га тенг кучлидир.

Энди $A_i \in E$ тўпламлар камаювчи кетма - кетлик ташкил қилган ҳол 6-теоремадан келиб чиқади. Чунки бу ҳолда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A) = \varnothing$$

бўлиб, 6-теоремага кўра $f(A_i \setminus A) \to 0$ ва бу ҳам (8) га тенг кучли. Теорема исбот бўлди.

Айтайлик, f тўплам функцияси бўлсин.

3'-таъриф. Агар $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_i \supset \dots$ ва $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ учун $f(A_n) \to 0$ бўлса, у ҳолда f *узлуксиз* дейилади.

Келтирилган 6- ва 7- теоремалар тўплам функциясининг узлуксизлиги ҳақидаги теоремалар деб қаралиши мумкин.

Мана биз тўплам функцияси билан танишдик ва унинг баъзи хоссаларини кўриб чиқдик.

Бир оз олдинга кетиб шуни айтиш мумкинки, келгусида ўрганадиган асосий тушунчамиз ўлчов – тўплам функциясининг хусусий ҳолидир. Яъни ўлчов айрим хоссаларга эга бўлган тўплам функцияси сифатида киритилади.

Саволлар ва машқлар

1. Тўплам функцияси манфий қийматлар қабул қила оладими? Иррационал-чи?

2. Ҳар доим ҳам тўплам функциясининг бўш тўпламдаги қиймати 0 га тенг бўладими?

3. Саноқли-аддитив тўплам функцияси чекли-аддитив бўладими?

4. Чекли-аддитив тўплам функциясининг қиймати ∞ га тенг бўлиши мумкинми?

3-§. Ўлчовнинг таърифи ва хоссалари

Ушбу параграфда чекли ўлчовга таъриф берамиз ва унинг хоссаларини кўриб чиқамиз.

4-таъриф. Айтайлик, X ихтиёрий тўплам ва унинг қисм тўпламларидан тузилган бирор E тўпламлар алгебраси берилган бўлсин. Аниқланиш соҳаси E бўлган m(A) тўплам функцияси учун:

а) ихтиёрий $A \in E$ учун $m(A) \geq 0$;

б) m(A) саноқли-аддитив

шартлари бажарилса, m тўплам функцияси X да *чекли ўлчов* дейилади.

Демак, ўлчов деганда қийматлари чекли ва мусбат бўлган саноқли-аддитив тўплам функциясини тушунар эканмиз.

Қулайлик учун келгусида “чекли ўлчов” ўрнига, оддий қилиб, ўлчов сўзи ишлатилади.

Ўлчовларнинг баъзи хоссаларини кўриб ўтайлик.

i) Бўш тўпламнинг ўлчови нолга тенг: $m(\varnothing)=0$ (бу хоссани олдинги параграфда исботлаган эдик).

ii) Агар A ва B тўпламлар E нинг элементлари бўлиб, $B \subset A$ бўлса, у ҳолда $m(B) \le m(A)$ бўлади (ўлчовнинг *монотонлик* хоссаси).

Бу хосса 2-§ даги (2) формуладан келиб чиқади:

$m(A) - m(B) = m(A \setminus B) \ge 0.$

iii) Ҳар бир A учун $m(A) \le m(X)$ ўринли. Бу ii) дан келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган ўлчов тўпламлар алгебраси E да *чегараланган* экан.

iv) Агар E нинг ихтиёрий A элементи учун $A \subset \bigcup_i A_i$ бўлиб, бу ердаги қўшилувчиларнинг сони чекли ёки саноқли бўлса, у ҳолда

$$m(A) \le \sum_i m(A_i)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу хоссани *исботлаш* учун ҳар бир A_i тўпламдан B_i қисм тўпламларни қуйидагича ажратиб оламиз:

$$B_1 = A_1 \cap A\ ,\quad B_2 = (A_2 \setminus A_1) \cap A\ ,$$
$$B_3 = [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cap A\ , \ldots$$

Кўриниб турибдики, B_i лар E нинг элементи ва ўзаро кесишмайди. Қолаверса, $A \supset \cup B_i$. Энди A тўплам $\cup B_i$ бирлашмага қисм бўлишини текшириш қолди. Агар $x \in A$ бўлса, у ҳолда шундай бир номер i топиладики, шартга кўра $x \in A_i$ бўлади. Агар x бир нечта A_j ларга тегишли бўлиб қолса, у ҳолда бу индекслардан энг кичиги i бўлсин деймиз. Бундан $x \in B_i$ бўлади ва керакли муносабат келиб чиқади.

Энди ўлчовнинг саноқли-аддитивлигини ва монотонлигини эътиборга олсак,

$$m(A) = \sum_i mB_i \le \sum_i m(A_i)$$

бўлади.

Худди 6-теоремадагидек, тўплам функцияси каби ўлчовнинг ҳам узлуксизлиги исботланади.

8-теорема. Е *дан олинган, умумий кесишмаси бўш бўлган* ($\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$) *ихтиёрий камаювчи* A_i (i=1, 2, . . .) *тўпламлар кетма-кетлиги учун* $m(A_i) \to 0$ *бўлади.*

Саволлар ва машқлар

1. Тўплам функцияси ва ўлчовнинг фарқини кўрсатинг.
2. Ўлчовнинг аниқланиш соҳаси ихтиёрий тўпламлар тўплами бўлиши мумкинми?
3. 2-§ нинг 4-мисолида келтирилган тўплам функцияси нега ўлчов бўла олмайди?
4. X={a,b,c} тўпламни олайлик. Унинг қисм тўпламларидан тузилган Е={∅, {c}, {a,b}, X} тўпламлар алгебрасида берилган

$$f(\{c\})=3,\ f(\{a,b\})=4,\ f(\{a,b,c\})=f(X)=7$$

тўплам функцияси ўлчов бўладими?

5. Ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган $h(A) = \int_A \sin x dx$ тўплам функцияси ўлчов бўладими? Бу ерда А ихтиёрий кесма.

4-§. Тўғри чизиқдаги ўлчов ҳақида

Тўғри чизиқдаги ўлчов тушунчаси ва унинг баъзи хоссаларига бир оз тўхталиб ўтайлик.

Тўғри чизиқда бирор (a;b) интервал ёки [a;b] сегмент берилган бўлса, унинг *узунлиги* ёки *ўлчови* деб одатда b-a сонга айтилади. Агар тўплам бир нечта кесишмайдиган интервал ёки сегментларнинг бирлашмаси каби тасвирланган бўлса, у ҳолда унинг ўлчовини топиш учун ҳар бир интервал ёки сегмент узунлигини топиб қўшиб чиқилади.

Бошқачароқ характердаги тўплам берилганда, масалан, [0;1] сегментдаги Q рационал сонлар (нуқталар) тўпламининг ўлчовини топиш талаб қилинганда, қандай иш тутишимиз лозим? Ўзи Q тўпламнинг узунлигини ўлчаб бўладими? Бу мисолга кейинроқ қайтамиз ва унинг ўлчови, яъни узунлиги 0 га тенг бўлишини кўрсатамиз.

Энди умумий ҳолда тўғри чизиқда ихтиёрий тўплам учун ўлчов тушунчасини киритиш масаласини кўрайлик. Тўпламнинг ўлчови турлича киритилиши мумкинлигини биламиз.

Қуйида узунлик тушунчасига асосланган ўлчов киритиш усули келтирилади.

5-таъриф. Агар тўғри чизиқдаги G тўплам учун уни ўз ичига олувчи бирор $[a;b]$ сегмент мавжуд бўлса, уни *чегараланган тўплам* деймиз.

Маълумки, оралиқ деганда $(a;b)$, $[a;b]$ дан ташқари $[a;b)$ ва $(a;b]$ кўринишдаги тўпламлар ҳам тушунилади ва уларнинг узунлиги ҳам $b-a$ га тенг.

Айтайлик, G бирор тўплам, $[a;b]$ уни ўз ичига олувчи энг кичик сегмент бўлсин. Фараз қилайлик, G_1, G_2, ..., G_n,....лар сони чекли ёки саноқли оралиқлар системаси бўлиб, G нинг ҳар бир нуқтаси G_i (i=1, 2, 3, . . .) оралиқларнинг бирортасига тегишли бўлсин. Бу ҳолда $G \subset \bigcup_i G_i$ бўлади. Энди δ_i билан G_i оралиқнинг узунлигини белгилаймиз. G ни қопловчи бундай G_i оралиқлар системасини жуда кўп усул билан тузиш мумкин. Масалан, $G_1=[a;b]$ деб олсак, у ҳолда $G \subset G_1$, яъни G битта қопламага эга. Демак, $\sum_i \delta_i$ йиғинди ҳам қопламанинг танланишига қараб ҳар хил қийматларга эга бўлади. Равшанки, ҳар бир йиғиндининг қиймати мусбат: $\sum_i \delta_i > 0$, чунки δ_i лар оралиқ узунлиги бўлганлиги учун мусбат сонлар. Демак, $\sum_i \delta_i$ йиғиндилар системаси қуйидан чегараланган ва шунинг учун у аниқ қуйи чегарага эга.

6-таъриф. Берилган G тўплам учун тузилган $\sum_i \delta_i$ йиғиндилар системасининг аниқ қуйи чегараси G нинг *ташқи ўлчови* дейилади ва у $m^*(G)$ орқали белгиланади, яъни

$$m^*(G) = \inf \sum_i \delta_i .$$

Изоҳ. а) $\sum_i \delta_i > 0$ 0 бўлгани учун $m^*(G) \geq 0$ бўлади.

б) $m^*(G) \leq b-a$ тенгсизлик ўринли.

Ҳақиқатан, ҳар қандай кичик сон $\varepsilon>0$ учун G тўплам $(a-e, b+e)$ оралиққа қисм бўлади. Бундан

$$m^*(G) < b - a + 2\varepsilon$$

келиб чиқади. Бу ерда ε ихтиёрий бўлганлигидан

$$m^*(G) \leq b - a$$
тенгсизликни ҳосил қиламиз.

7-таъриф. Ушбу
$$m_*(G) = b - a - m^*(CE)$$
формула билан аниқланган сон G тўпламнинг *ички ўлчови* дейилади. Бу ерда $CG = [a;b] \setminus G$.

Ўз навбатида $m_*(G) \geq 0$, чунки CG тўплам ҳам $[a;b]$ нинг қисми ва демак, $m^*(CG) \leq b-a$ тенгсизлик ҳам ўринли.

Ташқи ва ички ўлчовнинг бир нечта хоссаларини кўриб ўтамиз.

9-теорема. *Ихтиёрий G тўпламнинг ташқи ўлчови унинг ички ўлчовидан кичик эмас, яъни*
$$m_*(G) \leq m^*(G).$$

Исботи. Аниқ қуйи чегаранинг таърифига кўра, ихтиёрий кичик мусбат сон ε учун G тўпламни ўз ичига олувчи шундай G_1, G_2, G_3, ... оралиқлар системаси топиладики,
$$\sum_i \delta_i < m^*(G) + \varepsilon \qquad (1)$$
тенгсизлик бажарилади. Бу ерда δ_i сон G_i оралиқ узунлиги.

Худди шунингдек, CG тўпламни ўз ичига олувчи шундай F_1, F_2, F_3,... оралиқлар системаси топиладики,
$$\sum_i s_i < m^*(CG) + \varepsilon \qquad (2)$$
тенгсизлик бажарилади. Бу ерда s_i сон F_i оралиқ узунлиги.

Ушбу $\{G_i\}$ ва $\{F_i\}$ оралиқлар системасининг тузилишига кўра,
$$G \subset \bigcup_i G_i \qquad \text{ва} \qquad CG \subset \bigcup_i F_i\,.$$
Демак,
$$G \cup CG = [a;b] \subset (\bigcup_i G_i) \cup (\bigcup_i F_i). \qquad (3)$$

Ҳосил қилинган (1),(2) ва (3) муносабатларга кўра,
$$b - a \leq \sum_i \delta_i + \sum_i s_i \leq m^*(G) + m^*(CG) + 2\varepsilon\,.$$

Бу тенгсизлик ихтиёрий кичик сон ε>0 учун ўринли бўлганлигидан
$$m_*(G) \leq m^*(G)$$
муносабат келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

10-теорема. *Агар* A *ва* B *тўпламлар учун* $A \subset B$ *бўлса, у ҳолда*

$$m_*(A) \le m_*(B) \ , \ m^*(A) \le m^*(B)$$
муносабатлар ўринли.

11-теорема. *Агар чегараланган* G *тўплам чекли ёки саноқли сондаги* $G_1, G_2, \ldots$ *тўпламларнинг бирлашмасидан иборат, яъни* $G = \bigcup_i G_i$ *бўлса, у ҳолда*

$$m^*(G) \le \sum_i m^*(G_i)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

12-теорема. *Агар чегараланган* G *тўплам учун* $G = \bigcup_i G_i$ *бўлса ва* G_i *лар ўзаро кесишмаса, у ҳолда*

$$m_*(G) \ge \sum_i m_*(G_i)$$

бўлади.

Келтирилган теоремалар худди 9-теоремадаги каби ташқи ва ички ўлчов таърифларидан фойдаланиб исботланади.

Энди, тўғри чизиқда Лебег маъносида киритилган ўлчов таърифини берамиз.

8-таъриф. Агар G тўпламнинг $m^*(G)$ ташқи ўлчови ва унинг $m_*(G)$ ички ўлчови ўзаро тенг, яъни

$$m(G) = m_*(G) = m^*(G)$$

бўлса, у ҳолда G тўплам *ўлчовли тўплам* дейилади ҳамда унинг ўлчови $m(G)$ орқали белгиланади.

Бу таъриф умумий бўлиб, ўлчов қайси тўпламда берилаётганига боғлиқ холос. Келгусида тўғри чизиқдаги ўлчовли тўплам деганда, шу таъриф маъносидаги ўлчовли тўпламни тушунамиз.

13-теорема. *Агар* G *тўплам ўлчовли бўлса, у ҳолда* CG *тўлдирувчи тўплам ҳам ўлчовли бўлади.*

Исботи. Шартга кўра, G ўлчовли бўлганлиги учун

$$m(G) = m_*(G) = m^*(G).$$

Ички ўлчовнинг таърифига кўра,

$$m_*(G) = b - a - m^*(CG) = m(G)$$

ёки

$$m^*(CG) = b - a - m_*(G) = b - a - m(G).$$

Худди шунингдек,

$$m_*(CG) = b - a - m^*(G) = b - a - m(G)$$

ни ҳосил қиламиз. Булардан

$$m(CG) = m_*(CG) = m^*(CG)$$

тенгликлар, яъни CG тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Тўғри чизиқдаги ўлчовли тўпламлар ҳалқа ташкил қилади. Ўлчовнинг бу ҳалқада аддитив бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Қуйидаги теорема унинг саноқли-аддитив эканлигини билдиради:

14-теорема. *Агар* $[a;b]$ *сегментда жойлашган* G_1, $G_2,\ldots,$ *ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда уларнинг бирлашмаси* $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$ *тўплам ўлчовли бўлади.*

Шунингдек, агар $G_i \cap G_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ *бўлса, у ҳолда*

$$m(G) = \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i)$$

тенглик ўринли.

Исботи. Айтайлик, $G_i \cap G_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ бўлсин. Ушбу

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

тўпламни қараймиз. Теореманинг шартига кўра, $A_n \subset G$. Юқоридаги 10-теоремага асосан

$$m_*(G) \geq m_*(A_n) = m(A_n) = \sum_{i=1}^{n} m(G_i)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизлик ихтиёрий n учун ўринли бўлганлиги сабабли у $n\to\infty$ да ҳам ўринли. Демак,

$$m_*(G) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i). \tag{4}$$

Энди G тўпламнинг тузилишига ва ҳар бир G_i нинг ўлчовлигига асосан, 9-теоремага кўра

$$m^*(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i) \tag{5}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Шундай қилиб, 4-теоремага ва (4), (5) ларга асосланиб

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(G_i) \leq m_*(G) \leq m^*(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i)$$

тенгсизликларни ёза оламиз. Бундан

$$m_*(G) = m^*(G) = \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i)$$

тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Ўлчовнинг бу хоссасидан фойдаланиб, шу параграф бошида келтирилган [0;1] сегментдаги Q рационал сонлар тўпламининг ўлчовини топамиз.

Айтайлик, G={c} тўғри чизиқдаги бир элементли тўплам бўлсин. Уни бошқача, G=[c;c] сегмент кўринишда ёзиб оламиз. Бу тўпламнинг ўлчови, яъни узунлиги m(G)=m([c;c])=c-c=0 га тенг.

Маълумки, рационал сонлар саноқли бўлганлиги учун уларни номерлаб чиқиш мумкин: $Q_{[0;1]}=\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Агар $G_k=\{x_k\}$ белгилаш киритсак, у ҳолда

$$Q_{[0;1]} = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

тенгликка келамиз. Энди бунга юқоридаги 14-теоремани қўлласак ва ҳар бир E_k нинг ўлчови 0 га тенглигини эътиборга олсак, $Q_{[0;1]}$ нинг ўлчови 0 эканлиги келиб чиқади.

Умумий ҳолда қараганимизда ҳам қуйидаги хулоса ўринли бўлади:

15-теорема. *Тўғри чизиқдаги ҳар қандай чегараланган саноқли тўпламнинг ўлчови* 0 *га тенг.*

Бу теореманинг исботи худди ҳозирги мисол исботи каби олиб борилади. Ўзингиз бажариб кўринг.

Саволлар ва машқлар

1. Битта нуқтадан иборат тўпламнинг ўлчовини ички ва ташқи ўлчовлар ёрдамида ҳисобланг.

2. Тўғри чизиқдаги ўлчов учун 6- ва 7- теоремаларни айтинг ва исбот қилинг.

3. Ўлчови 0 га тенг тўплам кўпи билан саноқлидир, тасдиғи нотўғри эканлигини исботланг.

4. Кантор тўпламининг ўлчови 0 га тенглигини кўрсатинг.

5. Чегараланган G тўплам ўлчовли бўлиши учун ихтиёрий чегараланган A тўплам билан

$$m^*(A) = m^*(A \cap G) + m^*(A \cap CG)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

6. [0;1] даги сонлар ўнли каср кўринишида ёзилган. A орқали бундай ёзувида камида битта 7 қатнашган сонлар (нуқталар) тўпламини белгилайлик. Бу тўпламнинг ўлчовли бўлишини кўрсатинг ва унинг ўлчовини топинг.

Ечилиши. Аввало, A тўпламнинг қандай тузилганини кўрайлик. Дастлаб, A_1 орқали [0;1]даги ўнли каср ёзувининг вергулдан кейинги биринчи рақами 7 бўлган сонлар тўпламини белгилаймиз. Бундай сонлар (0,7; 0,8) интервалдан иборатлиги равшан, яъни A_1=(0,7; 0,8). Унинг ўлчови, яъни узунлиги 0,1 га тенг.

Энди $[0;1]\setminus A_1$ тўпламдан ўнли каср ёзувининг, вергулдан кейинги иккинчи рақами 7 бўлган сонлар тўпламини ажратиб оламиз ва уни A_2 орқали белгилаймиз.

A_2 тўплам узунликлари 0,01 бўлган 9 та (0,07; 0,08), (0,17; 0,18), (0,27; 0,28), (0,37; 0,38), (0,47; 0,48), (0,57; 0,58), (0,67; 0,68), (0,87; 0,88), (0,97; 0,98) оралиқлар бирлашмасидан иборат. Демак, A_2 тўпламнинг ўлчови 0,09 га тенг.

Худди шунингдек, A_3 орқали $[0;1]\setminus(A_1\cup A_2)$ тўпламдаги ўнли каср ёзувининг вергулдан кейинги учинчи рақами 7 бўлган сонлар тўпламини белгилаймиз. Бу тўплам узунликлари 0,001 бўлган 81 та оралиқлар бирлашмасидан иборат. Демак, A_3 тўпламнинг ўлчови 0,081 га тенг ва ҳоказо. Бу жараённи чексиз давом эттириш мумкин.

Натижада $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ ни ҳосил қиламиз. Бу ерда ҳар бир A_i чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган интерваллар бирлашмасидан иборат ўлчовли тўплам. Демак, A ҳам ўлчовли ва унинг ўлчови

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + \dots \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \dots + \frac{9^{n-1}}{10^n} + \dots = 1$$

га тенг.

Қуйидаги мисолларда [0;1] нинг баъзи қисм тўпламлари берилган. Уларнинг ўлчовли бўлишини кўрсатинг ва ўлчовини топинг.

7. Ўнли каср ёзувида 7 рақами қатнашмаган сонлар тўплами.

8. Ўнли каср ёзувида 4 ёки 5 рақамларидан бири қатнашмаган сонлар тўплами.

9. Ўнли каср ёзувида иккита 4 ва 5 рақамлари қатнашмаган сонлар тўплами.

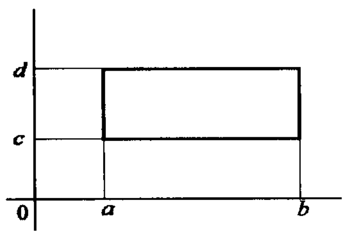
IV БОБ. ЎЛЧОВ ТУШУНЧАСИНИ УМУМЛАШТИРИШ

1-§. Текисликдаги Лебег ўлчови

Келинглар, текисликдаги тўғри тўртбурчак, параллелограмм, учбурчак, трапеция, кўпбурчак, доира ва ҳоказо фигураларнинг юзи қандай ҳисобланишини эслайлик.

Дастлаб томон узунлиги 1 бирликка тенг бўлган квадрат юзини 1 га (1 кв.бирлик) тенг деб олиб, сўнгра томонлари узунликлари a ва b бўлган тўғри тўртбурчак юзи ab (кв.бирлик) га тенглигини кўрсатар эдик. Қолган фигуралар юзи эса шулар асосида ҳисобланади: параллелограмм тўғри тўртбурчакка келтирилиб, учбурчак параллелограммга тўлдирилиб, трапеция ва кўпбурчак учбурчакларга ажратилиб кўрилади.

Доира юзини топишда эса унинг ичига ва ташқарисига мунтазам кўпбурчаклар чизиб, улар юзаларининг лимити топилар эди.



1-шакл.

Текисликда координаталар системаси киритилган бўлса, у ҳолда ушбу

$$a \le x \le b, \ c \le y \le d \qquad (1)$$

шартларни қаноатлантирувчи (x;y) нуқталар тўплами бирор тўғри тўртбурчакни тасвирлайди.

Бу тўғри тўртбурчакнинг томонлари мос равишда b-a ва d-c узунликларга эга бўлгани учун унинг юзини (b-a)(d-c) га тенг деб олишимиз табиий (1-шаклга қаранг).

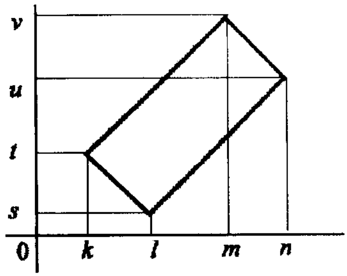
Худди шунингдек,

$$a < x < b, \ c < y < d \qquad (2)$$

шартларни қаноатлантирувчи *(x;y)* нуқталар тўплами ҳам худди ўша тўғри тўртбурчакни тасвирлайди, фақат бу ҳолда тўғри тўртбурчак томонлари қаралаётган тўпламга тегишли бўлмайди. Унинг юзасини ҳам (b-a)(d-c) сонга тенг деб оламиз.

Демак, тўғри тўртбурчак томонлари координаталар ўқларига параллел бўлса, унинг юзи берилган a, b, c, d сонлари орқали топилар экан.

Шу тўғри тўртбурчакнинг 45^0 га бурилган ҳолатини қарайлик(2-шакл). Равшанки, бу тўғри тўртбурчакнинг юзи ҳам (b-a)(d-c) га тенг. Аммо координаталар системасида берилган муносабатларга кўра, аввало унинг тўғри тўртбурчак эканлигини аниқлаш, кейин эса томонлари b-a ва d-c бўлишини топиш керак. Бизнинг вазифа эса берилган k, l, m, n ва s, t, u, v лар ёрдамида тўғри тўртбурчак юзини аниқлашдан иборат.



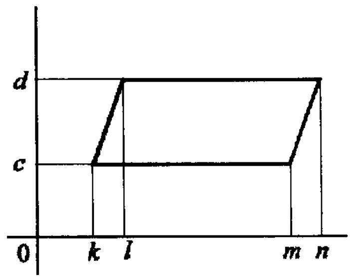
2-шакл.

Агар параллелограммнинг бир томони координата ўқларидан бирига параллел бўлса, у ҳолда унинг юзини юқоридаги каби, тўғри тўртбурчак юзаси тушунчасига асосланиб топиш мумкин (3-шакл):

$$S_E=(m-k)(d-c)=(n-l)(d-c).$$

Аммо ҳар доим ҳам ихтиёрий параллелограммнинг бирор томони координата ўқларидан бирига параллел бўлиши шарт эмас.

Демак, бу ҳолда текисликдаги ихтиёрий фигура юзини топиш формуласини, худди элементар геометриядагидек, келтириб чиқариш мумкин эмас экан.



3-шакл.

Ушбу параграфда фақат махсус тўғри тўртбурчаклар ёрдамида юза ёки умумийроқ қилиб айтганда, ўлчов тушунчаси қандай киритилишини кўриб чиқамиз.

Келгусида *биз тўғри тўртбурчак деганда томонлари координаталар ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчакнигина тушунамиз.*

Зарурият туғилганда бу тўғри тўртбурчакларни ҳам турли синфларга ажратиш мумкин.

Юқоридаги (1) шартлар билан берилган тўғри тўртбурчак *ёпиқ тўғри тўртбурчак* дейилади. Шунингдек, (2) шартлар билан берилган тўғри тўртбурчак *очиқ тўғри тўртбурчак* дейилади. Қолган барча ҳолларда, яъни бир томонли (масалан, $a \leq x < b$, $c < y < d$ бўлганда, фақат бир томон тўғри тўртбурчакка тегишли), икки томонли, уч томонли тўғри тўртбурчаклар *ярим очиқ тўғри тўртбурчаклар* дейилади.

Текисликдаги барча тўғри тўртбурчаклар тўпламини P орқали белгилаймиз.

Ҳар бир тўғри тўртбурчак учун элементар геометриядаги юза тушунчасидан фойдаланиб, унинг ўлчовини аниқлаймиз:

- бўш тўпламнинг ўлчови 0 га тенг;

- бўш бўлмаган, шунингдек, a, b, c ва d сонлари билан аниқланган (ёпиқ, очиқ ёки ярим очиқ) E тўғри тўртбурчакнинг ўлчови

$$(b-a)(d-c)$$

га тенг.

Шундай қилиб, P дан олинган ҳар бир E тўғри тўртбурчакка унинг m(E) ўлчови мос қўйилди. Бу ўлчов қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

a) m(E) ўлчов манфий бўлмаган ҳақиқий сон;

b) m(E) ўлчов аддитив, яъни агар $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ва $i \neq j$ бўлганда $E_i \cap E_j = \varnothing$ бўлса, у ҳолда

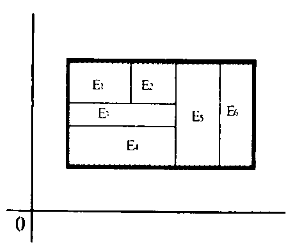
$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$$

бўлади.

Охирги тенглик бир нечта ўзаро кесишмайдиган тўғри тўртбурчаклар бирлашмасининг юзаси, бирлашмага кирган ҳар бир тўғри тўртбурчак юзаларини топиб йиғиш кераклигини билдиради.

Бундай бўлиши эса табиий (4-шакл).

Бизнинг эндиги вазифамиз фақат тўғри тўртбурчаклар учун аниқланган m(E)-ўлчов ту-шунчасини бошқа, кенгроқ тўпламлар синфи учун, a) ва b) хоссаларни сақлаган ҳолда

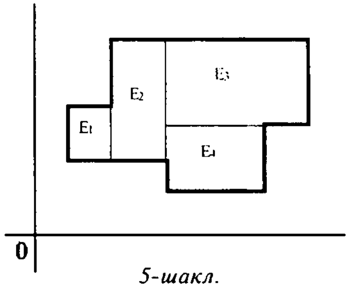


4-шакл.

киритишдан ёки бошқача айтганда, давом эттиришдан иборат.

Дастлаб ўлчовни элементар тўпламлар деб номланган тўпламлар учун аниқлаймиз.

1-таъриф. Агар текисликдаги тўпламни қандайдир усулда ўзаро кесишмайдиган, чекли сондаги тўғри тўртбурчаклар бирлашмаси кўринишида тасвирлаш мумкин бўлса, у ҳолда бундай тўплам *элементар* ёки *содда* тўплам дейилади.



5-шакл.

5-шаклдаги тўплам элементар тўпламдир. Бу шаклда у 4 та тўғри тўртбурчакларга ажратилган. Кўриниб турибдики, бундай ажратиш ягона эмас.

Қуйидаги тасдиқ бизга кўп керак бўлади:

1-теорема. *Ихтиёрий икки элементар тўпламларнинг бирлашмаси, кесишмаси, айирмаси ва симметрик айирмаси ҳам элементар тўплам бўлади.*

Бошқача айтганда, элементар тўпламлар тўплами ҳалқа ташкил қилар экан.

Исботи. Икки тўғри тўртбурчакнинг кесишмаси яна тўғри тўртбурчак бўлиши тушунарли. Айтайлик, A ва B тўпламлар элементар тўпламлар бўлсин. У ҳолда

$$A = \bigcup_i E_i \qquad ва \qquad B = \bigcup_{i,j} (E_i \cap Q_j)$$

бўлади. Бу ердаги E_i ва Q_j лар чекли сондаги тўғри тўртбурчаклар. Уларнинг кесишмаси

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} (E_i \cap Q_j)$$

ҳам элементар тўплам, чунки $E_i \cap Q_j$ ларнинг ҳар бири тўғри тўртбурчак ва уларнинг сони чекли.

Икки тўғри тўртбурчакнинг айирмаси элементар тўплам бўлиши равшан. Шунинг учун тўғри тўртбурчакдан бирор элементар тўпламни айириб, яна элементар тўплам ҳосил қиламиз. Чунки бу жараён, худди икки элементар тўпламнинг кесишмаси каби қаралиши мумкин.

Айтайлик, А ва В икки элементар тўплам бўлсин. У ҳолда уларнинг ҳар иккисини ҳам ўз ичига олган Е тўғри тўртбурчак топилади. Энди

$$A \cup B = E \setminus [(E \setminus A) \cap (E \setminus B)]$$

тенгликка ва юқорида айтилганларга кўра, А ва В нинг бирлашмаси ҳам элементар тўплам бўлади. Бундан ва

$$A \setminus B = A \cap (E \setminus B), \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

тенгликлардан элементар тўпламлар айирмаси ва симметрик айирмаси яна элементар тўплам бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди ихтиёрий А элементар тўпламнинг $m'(A)$ ўлчовини аниқлаймиз.

Агар

$$A = \bigcup_i E_i$$

бўлиб, E_i лар ўзаро кесишмайдиган тўғри тўртбурчаклар бўлса, у ҳолда А нинг ўлчови

$$m'(A) = \sum_i m(E_i)$$

каби аниқланади.

Ўлчовнинг бундай аниқланиши A тўплам чекли сондаги тўғри тўртбурчаклар орқали қандай тасвирланишига боғлиқ эмас.

Ҳақиқатан, айтайлик, A икки хил ёйилмага эга бўлсин:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{s} Q_j,$$

бу ерда, E_i ва Q_j лар тўғри тўртбурчаклар ҳамда $i \neq k$ бўлганда $E_i \cap E_k = \varnothing$ ва $i \neq j$ бўлганда $Q_i \cap Q_j = \varnothing$.

Маълумки, икки тўғри тўртбурчакнинг кесишмаси $E_i \cap Q_j$ яна тўғри тўртбурчак бўлади ва А нинг тасвирланишига кўра,

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{s} (E_i \cap Q_j), \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap Q_j).$$

У ҳолда тўғри тўртбурчак учун ўлчовнинг аддитивлик хоссасига кўра,

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} m(E_i \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{s} m(Q_j).$$

Хусусан, тўғри тўртбурчаклар учун m′ ўлчов берилган m ўлчов билан устма-уст тушади.

Элементар тўпламлар учун шу усулда киритилган ўлчов мусбат ва аддитив эканлигини кўриш қийин эмас.

Элементар тўпламларда аниқланган ўлчовнинг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.

2-теорема. *Агар* A *элементар тўплам ва* $\{A_n\}$ *— чекли ёки саноқли сондаги элементар тўпламлар берилган бўлиб,*

$$A \subset \bigcup_n A_n$$

шарт бажарилса, у ҳолда

$$m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$$

муносабат ўринли.

Бу хоссадан элементар тўпламлар учун аниқланган ўлчовнинг *саноқли аддитивлиги* келиб чиқади.

3-теорема. *Айтайлик,* A *элементар тўплам саноқли сондаги, ўзаро кесишмайдиган* $\{A_n\}$ *элементар тўпламлар бирлашмаси кўринишида тасвирланган бўлсин:*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

у ҳолда

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

тенглик ўринли.

Бу хосса «саноқли сондаги, ўзаро кесишмайдиган тўпламлар бирлашмасининг ўлчови ўлчовлар йиғиндисига тенг» деб ўқилади.

Исботи. Ихтиёрий чекли N сони учун $A \supset \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ ва ўлчовнинг аддитивлик хоссасига кўра

$$m'(A) \geq m'(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n)$$

бўлишини аниқлаймиз. Энди $n \to \infty$ да лимитга ўтиб,

$$m'(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

тенгсизликка келамиз. Бу тенгсизлик ва 2-теоремадаги тенгсизлик биргаликда бизга керакли натижани беради. Демак, m′ ўлчов саноқли-аддитив экан. Теорема исбот бўлди.

Маълумки, текисликдаги барча тўпламлар элементар тўпламлардан иборат эмас. Шунинг учун ўлчов тушунчасини фақат томонлари координата ўқларига параллел бўлган тўғри тўртбурчакларнинг чекли сондаги бирлашмасидан ташкил топган тўпламлардан кўра кенгроқ тўпламлар синфи учун кенгайтиришга ҳаракат қиламиз.

2-таъриф. Агар текисликда қаралаётган A тўплам бирор тўғри тўртбурчак ичида жойлашган бўлса, у ҳолда A *чегараланган тўплам* дейилади.

Чегараланган тўпламни тўғри тўртбурчаклар билан қоплаш мумкин.

Чегараланган тўпламлар учун ташқи ўлчов тушунчасини киритамиз.

3-таъриф. A тўпламнинг *ташқи ўлчови* деб

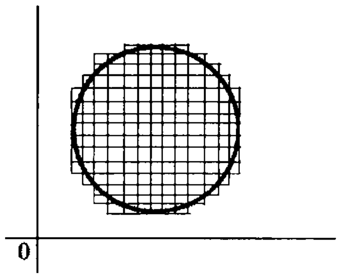
$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup P_k} \left\{ \sum_k m(P_k) \right\}$$

сонга айтилади.

Бу ерда қуйи чегара (инфимум) A тўпламни қопловчи барча чекли ёки саноқли сондаги P_k тўғри тўртбурчаклар бирлашмаси бўйича олинади.

Бу таърифдан кўринадики, текисликдаги ихтиёрий тўпламнинг ўлчови уни қопловчи тўғри тўртбурчаклар ўлчовининг лимити сифатида топилар экан. Масалан, доира ўлчовини(юзини) топиш учун у иложи борича кичик ўлчовли тўғри тўртбурчаклар (квадратчалар) билан қопланади (6-шакл).

Элементар геометрияда эса бундай вазифани мунтазам кўпбурчаклар бажарар эди, яъни доира юзи мунтазам кўпбурчаклар юзаларининг лимити сифатида топилади.



6-шакл.

Равшанки, агар A элементар тўплам бўлса, у ҳолда m*(A)= m′(A) тенглик ўринли. Бу хосса элементар тўпламнинг таърифидан келиб чиқади.

Текисликдаги ихтиёрий тўпламлар учун қуйидаги тасдиқни айтиш мумкин:

4-теорема. *Агар* A *ва* $\{A_n\}$ *текисликдаги ихтиёрий чекли ёки саноқли сондаги тўпламлар бўлиб, улар учун*

$$A \subset \bigcup_n A_n$$

шарт бажарилса, у ҳолда

$$\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n)$$

муносабат ўринли бўлади. Хусусан, агар $A \subset B$ *бўлса, у ҳолда* $m^*(A) \le m^*(B)$ *тенгсизлик ўринли.*

Исботи. Ташқи ўлчовнинг таърифига кўра, ҳар бир A_n ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир чекли ёки саноқли $\{P_{nk}\}$ тўғри тўртбурчаклар системаси топиладики, $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ ва

$\sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ бғлади. У ҳолда

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk}$$

ва

$$\mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

бўлади. Олинган $\varepsilon > 0$ сон ихтиёрийлигидан керакли тасдиқ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

4-таъриф. Текисликда A тўплам берилган. Агар ихтиёрий кичик мусбат ε сон учун шундай бир B элементар тўплам топилиб,

$$m^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

шарт бажарилса, у ҳолда A тўплам *ўлчовли тўплам* дейилади.

Худди шу усулда тўпламнинг ички ўлчови тушунчасини киритиб, ўлчовли тўпламлар синфини аниқлаш мумкин.

5-таъриф. Текисликдаги бирор A тўпламнинг *ички ўлчови* деб

$$\mu_*(A) = \sup_{\cup P_k \subset A} \left\{ \sum_k m(P_k) \right\}$$

сонга айтилади. Бу ерда аниқ юқори чегара (супремум) A тўпламнинг ичига жойлашган барча чекли ёки саноқли сондаги P_k тўғри тўртбурчаклар бўйича олинади.

Қуйидаги тасдиқни машқ сифатида исботланг:

5-теорема. *Текисликдаги А тўплам ўлчовли бўлиши учун* $m_*(A)=m^*(A)$ *бўлиши зарур ва етарли.*

Мана, текисликда ҳам ўлчовли тўплам тушунчасини аниқлаб олдик. Бу ерда киритилган ўлчовли тўпламнинг маъносини 6-шаклдаги мисол жуда яхши очиб беради. Яъни, тўплам ўлчовли бўлса, уни «жуда катта аниқликда» элементар тўплам билан яқинлаштириш мумкин экан.

Текисликдаги бундай усулда аниқланган ўлчовли тўпламлар *Лебег маъносидаги ўлчовли тўпламлар* дейилади. Агар текисликдаги бирор Е тўплам берилган бўлса, у ҳолда Е нинг барча ўлчовли қисм тўпламлари тўплами M_E орқали белгиланади.

Келгусида ўлчовли тўпламлар тўплами M_E даги ўлчовни m орқали белгилаймиз. Умумийликни чегараламаган ҳолда, $m(E)=1$ деб олишимиз мумкин.

6-теорема. *Ўлчовли тўпламнинг тўлдирувчиси ҳам ўлчовли бўлади.*

Исботи. Тўпламлар устидаги амалларга доир формулалардан бири

$$(E\setminus A)\Delta(E\setminus B)=A\Delta B$$

тенгликдан ва $E\setminus B$ тўпламнинг ҳам элементар тўплам бўлишидан $E\setminus A$ нинг ўлчовли экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

7-теорема. *Чекли сондаги ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна ўлчовли тўплам бўлади.*

Исботи. Исботни иккита тўплам учун кўрсатиш етарли. Чунки ихтиёрий, чекли *n* та бўлган ҳол индукция усули билан исботланади.

Айтайлик, A_1 ва A_2 икки ўлчовли тўплам бўлсин. Демак, ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай B_1 ва B_2 элементар тўпламлар топиладики, улар учун

$$\mu^*(A_1\Delta B_1) < \varepsilon/2, \qquad \mu^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon/2$$

шартлар бажарилади. Маълумки,

$$(A_1\cup A_2)\ \Delta\ (B_1\cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$$

муносабат ўринли, у ҳолда булардан

$$\mu^*[(A_1\cup A_2)\ \Delta\ (B_1\cup B_2)] \le m^*(A_1\Delta B_1)+m^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon$$

келиб чиқади. Аммо $B_1\cup B_2$ элементар тўплам, шунинг учун $A_1\cup A_2$ ўлчовли тўплам бўлади.

Икки ўлчовли тўплам кесишмасининг ўлчовли бўлиши 6-теоремадан ва

$$A_1\cap A_2 = E\setminus[(E\setminus A_1)\cup(E\setminus A_2)]$$

муносабатдан келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Натижа. *Ўлчовли тўпламларнинг айирмаси ва симметрик айирмаси ўлчовли тўплам бўлади.*

Бундай хулосанинг ўринлилиги юқоридаги 6-, 7-теоремалардан ва

$$A_1 \backslash A_2 = A_1 \cap (E \backslash A_2), \quad A_1 \Delta A_2 = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1)$$

тенгликлардан келиб чиқади.

8-теорема. *Агар* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ўзаро кесишмайдиган ўлчовли тўпламлар бўлса, у ҳолда*

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу теореманинг исботини мустақил иш сифатида ўқувчининг ўзига қолдирамиз.

Хусусан, бу теоремадан ихтиёрий A ўлчовли тўплам учун

$$\mu(E \backslash A) = 1 - \mu(A)$$

муносабат келиб чиқади.

Юқоридаги 7-теореманинг тасдиғи саноқли сондаги тўпламлар учун ҳам ўринли.

9-теорема. *Саноқли сондаги ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна ўлчовли тўплам бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ саноқли сондаги ўлчовли тўпламлар системаси ва $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлсин. Ушбу $A'_n = A_n / \bigcup_{k}^{n-1} A_k$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ бўлади ва A'_n тўпламлар ўзаро кесишмайди. 7-теорема ва унинг натижасига кўра, барча A'_n лар ўлчовли бўлади. Энди 8-теоремага ва ташқи ўлчовнинг таърифига асосан

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leq \mu^*(A)$$

муносабатлар ихтиёрий чекли n учун ўринли. Шунинг учун

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A'_k)$$

қатор яқинлашувчи, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай бир N номер топиладики,

$$\sum_{n>N}\mu(A'_k)<\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади, яъни қаторнинг қолдиғи исталган кичик сондан ҳам кичик бўлиши маълум. Теорема исбот бўлди.

Саволлар ва машқлар

1. Агар E ўлчовли тўплам бўлиб, унинг A қисм тўплами ҳам ўлчовли бўлса, у ҳолда $E\backslash A$ тўпламнинг ҳам ўлчовли бўлишини кўрсатинг.

2. Чекли сондаги ўлчовли тўпламлар бирлашмаси, кесишмаси, айирмаси ва симметрик айирмаси ҳам ўлчовли эканини исботланг.

3. Текисликдаги ва тўғри чизиқдаги ўлчов ҳамда ташқи ўлчовлар таърифини таққосланг. Хулосаларингизни ёзиб мулоҳаза қилинг.

4. Текисликдаги m Лебег ўлчови учун 3-боб 2-§ даги 3-, 4-, 5-теоремалар ўринли эканлигини текширинг.

5. Агар A тўпламнинг ташқи ўлчови 0 га тенг бўлса, у ҳолда унинг ўлчовли бўлишини исботланг.

6. Текисликда қуйидаги фигуралар берилган:

$A = \{(x,y) : 1 \le x^2 < 9;\ 4 < y^2 \le 25\}$,

$B = \{(x,y) : \sin x < \frac{1}{2};\ \ y \le 1\}$,

$C = \{(x,y) : 1 \le x^2 < 4;\ |y| > 2\}$,

$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

Улар орасида қайси бири элементар тўплам эканини аниқланг.

7. Текисликдаги ихтиёрий чекли тўплам элементар тўплам эканини кўрсатинг.

8. Икки элементар тўпламнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна элементар тўплам бўлишини кўрсатинг.

9. Элементар тўпламларда ўлчовнинг аддитив бўлишини исботланг.

10. Бирор F тўпламни ўлчови истаганча кичик бўлган элементар тўпламга жойлаштириш мумкин бўлса, унинг ўлчовли бўлишини ва ўлчови 0 га тенглигини исботланг.

11. Тўғри чизиқдаги Кантор тўплами ўлчовли эканини кўрсатинг ва унинг ўлчовини топинг.

12. [0;1] даги иррационал сонлар тўплами ўлчовлими? Агар ўлчовли бўлса, у ҳолда унинг ўлчовини топинг.

13. Ихтиёрий ўлчовли тўпламнинг ўлчови номанфий эканини исботланг.

14. Ихтиёрий саноқли тўплам ўлчовли бўлишини кўрсатинг ва унинг ўлчовини топинг.

15. [*a*;b] кесмадаги иррационал сонлар тўплами ўлчовли бўлишини кўрсатинг ва унинг ўлчовини топинг.

16. Ўлчови нолга тенг тўпламнинг ихтиёрий қисм тўплами ўлчовли бўлишини кўрсатинг ва унинг ҳам ўлчови ноллигини исботланг.

2-§. Ўлчовнинг умумий таърифи. Давом эттириш масаласи

Олдинги параграфларда тўғри чизиқ ва текисликда ўлчов қандай аниқланишини кўриб ўтдик. Тўплам ўлчовини киритишда кесманинг узунлиги ёки тўғри тўртбурчакнинг юзасига асосландик, сўнгра мураккаб тўпламлар учун ўлчов тушунчасини аниқладик. Эътибор берган бўлсангиз, биз учун тўғри тўртбурчак юзи қандай формула билан топилиши эмас, балки юза – бу тўпламлар устидаги номанфий аддитив функция эканлиги муҳим эди. Бу хосса тўғри тўртбурчаклар ўлчовидан элементар тўпламлар ўлчовига ўтишда асосий рол ўйнади.

Энди умумий ҳолда ўлчов тушунчасини берамиз.

6-таъриф. Берилган $G_{m\to\mu}$ ярим ҳалқада аниқланган $m\to\mu$ ҳақиқий тўплам функцияси учун қуйидаги икки шарт бажарилса, бундай тўплам функцияси *ўлчов* дейилади:

1. Ҳар қандай $A \in G_{m\to\mu}$ учун $m\to\mu(A) \geq 0$;

2. μ аддитив функция, яъни $A \in G_\mu$ учун

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \; A_k \cap A_j = \varnothing, \; k \neq j, \; A_k \in G_\mu, \; k = 1,2,\dots,n .$$

Бу ҳолда

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Ушбу таъриф билан 3-бобнинг 3-§ даги таъриф бир-биридан фарқ қилади.

Демак, ўлчов ярим ҳалқада берилар экан. Агар таърифда $G\mu$ ҳалқа бўлсин деб ўзгартирсак, у ҳолда ўлчов ҳалқада берилган бўлади.

Биз асосан ярим ҳалқада берилган ўлчовларни ўрганамиз.

Текисликда аниқланган ўлчовни, дастлаб тўғри тўртбурчаклар учун киритиб, сўнгра уни элементар тўпламларга давом эттирган, яъни ўзаро кесишмайдиган тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмаси учун аниқлаган эдик. Энди шу ғояни бу ерда қўллаймиз.

Фараз қилайлик, иккита μ_1 ва μ_2 ўлчов берилган бўлсин.

7-таъриф. Агар μ_1 ва μ_2 ўлчовлар учун $G_{\mu_1} \subset G_{\mu_2}$ бўлиб, ҳар бир $A \in G_\mu$ учун $\mu_1(A)=\mu_2(A)$ бўлса, у ҳолда μ_2 ўлчов μ_1 ўлчовнинг *давоми* дейилади.

Демак, ўлчовни давом эттириш деганда, уни ўзи аниқланган бирор тўпламлар тўпламидан янада кенгроқ, тўпламлар тўпламида ҳам аниқлашни тушуниш керак.

Одатда, ўлчов ярим ҳалқада берилади ва уни берилган ярим ҳалқани ўз ичига олувчи минимал ҳалқагача давом эттириш масаласи ўрганилади.

10-теорема. *Бирор G_μ ярим ҳалқада аниқланган ҳар бир $m \to \mu$ ўлчов учун шундай ягона μ' давоми мавжудки, унинг аниқланиш соҳаси G_μ ярим ҳалқани ўз ичига олган $\Re(G_\mu)$ минимал ҳалқадан иборат.*

Исботи. Минимал ҳалқа таърифига кўра, $\Re(G_\mu)$ нинг ҳар бир A элементи учун

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \ (B_k \in G_\mu, B_k \cap B_j = \varnothing \ \text{агар, } k \neq j \text{ бўлса}), \qquad (1)$$

муносабат ўринли. Энди таъриф бўйича

$$\mu'(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \qquad (2)$$

деб оламиз.

Кўриниб турибдики, бу (2) каби аниқланган $\mu'(A)$ миқдор A тўпламнинг (1) кўринишдаги танланишига боғлиқ эмас.

Ҳақиқатан, айтайлик A икки

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{j=1}^{r} C_j, \quad B_k \in G_\mu, C_j \in G_\mu$$

ёйилмага эга бўлсин. У ҳолда ҳар бир $B_k \cap C_j$ кесишма G_m га тегишли ва демак, μ ўлчовнинг аддитивлигига кўра,

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(B_k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\mu(B_k\cap C_j)=\sum_{j=1}^{r}\mu(C_j)$$

ўринли.

Шунингдек, (2) тенглик билан аниқланган $\mu'(A)$ функциянинг аддитивлиги ва манфий бўлмаган қийматлар қабул қилиши равшан. Шундай қилиб, μ ўлчовнинг $\Re(G_\mu)$ ҳалқага давоми, μ' нинг мавжудлиги исботланди.

Унинг ягоналигини исботлаймиз. Айтайлик, $\mu^\wedge$ ўлчов μ нинг бошқа бир давоми бўлсин. Агар $A=\bigcup_{k=1}^{n} B_k$, B_k лар G_μ дан олинган ўзаро кесишмайдиган тўпламлари бўлса, у ҳолда

$$\mu^\wedge(A)=\sum_k\mu^\wedge(B_k)=\sum_k\mu(B_k)=\mu'(A)$$

бўлади. Демак, $\mu^\wedge$ ўлчов (2) тенглик билан аниқланган μ' ўлчов билан устма-уст тушар экан. Теорема исбот бўлди.

Шундай қилиб, агар ярим ҳалқада аниқланган ўлчов мавжуд бўлса, шу ярим ҳалқа орқали ҳосил бўлган минимал ҳалқада ўлчовни аниқлаш имкониятига эга бўлдик. Бу ўлчов қуйидаги муҳим хоссаларга эга:

1°. Агар m ўлчов F ҳалқада аниқланган бўлиб, шу ҳалқадан олинган A, A_1, A_2, ... , A_n тўпламлар учун ушбу

$$A\supset\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\quad A_k\cap A_j=\varnothing,\quad k\neq j$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда

$$m(A)\geq\sum_{k=1}^{n}m(A_k)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

2°. F ҳалқадан олинган A, A_1, A_2, ..., A_n тўпламлар учун

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

муносабат бажарилса, у ҳолда

$$m(A)\leq\sum_{k=1}^{n}m(A_k)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу хоссаларни исботлаймиз.

Ҳақиқатан, A, A_1, A_2, ..., A_n тўпламлар ўзаро кесишмаса ва уларнинг ҳар бири A тўпламнинг қисми бўлса, у ҳолда

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

тенгликдан m ўлчовнинг аддитивлигига асосан ушбу

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) + m(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан $m(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq 0$ бўлгани учун

$$m(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса 1° хоссани исботлайди.

Энди 2° хоссани исботлаймиз. Ҳар қандай $A_1 \in F$ ва $A_2 \in F$ учун ушбу

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))$$

ва

$$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))$$

муносабатлардан

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2) \leq m(A_1) + m(A_2)$$

муносабат келиб чиқади. Бундан ихтиёрий n учун

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \qquad (1)$$

тенгсизлик индукция усули билан исботланади. Энди $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ муносабатдан ушбу

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A \cup ((\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus A)$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Бундан m ўлчовнинг аддитивлигига асосан

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = m(A) + m((\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus A) \geq m(A).$$

Бундан ва (1) тенгсизликдан

$$m(A) \le \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан 2° хосса ҳам исботланди.

Математик анализнинг кўпчилик масалаларида баъзи бир тўпламларни чекли сондаги тўпламларнинг йиғиндиси сифатида эмас, балки чексиз сондаги тўпламларнинг йиғиндиси сифатида ифодалашга тўғри келади. Масалан, доиранинг юзини ҳисоблашда уни сони чексиз бўлган тўғри тўртбурчакларнинг йиғиндиси шаклида ифодаланишидан фойдаланилади. Бундай масалаларда ўлчовнинг аддитивлик хоссаси етарли бўлмай қолади ва шу сабабли бу хосса умумийроқ бўлган ва қуйида таърифланадиган саноқли-аддитивлик ёки σ - аддитивлик деб аталадиган хосса билан алмаштирилади.

8-таъриф. Агар m ўлчовнинг G_m аниқланиш соҳасидан олинган, саноқли сондаги ўзаро кесишмайдиган A_1, A_2,..., A_n, ... тўпламлар учун $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in G_m$ бўлганда,

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда m ўлчов *σ-аддитив ўлчов* дейилади.

Текисликда аниқланган ўлчов (1-§га қаранг) σ-аддитив ўлчовга мисол бўлади.

Мисоллар. 1. Айтайлик, $X=\{x_1, x_2, ...\}$ — бирор саноқли тўплам бўлсин. Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ шартни қаноатлантирувчи $\{p_n\}$ мусбат сонлар кетма-кетлигини оламиз. Маълумки, X нинг барча қисм тўпламлари ҳалқа ташкил қилади. Шу ҳалқада ўлчовни қуйидагича аниқлаймиз:

ҳар бир $A \subset X$ учун $m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$.

Кўриниб турибдики, бу m(A) ўлчов σ-аддитив ўлчов бўлади. Шунингдек, m(X)=1 экани равшан.

2. *Аддитив, аммо σ-аддитив бўлмаган ўлчовга мисол.* Айтайлик, $Q_{[0;1]}$ тўплам [0;1] кесмадаги барча рационал

сонлар тўплами бўлсин. Энди $Q_{[0;1]}$ нинг $[0;1]$ даги ихтиёрий $(a;b)$ очиқ интервал, $[a;b]$ кесма ёки $(a;b]$, $[a;b)$ ярим очиқ интерваллар билан кесишмаси кўринишидаги A_{ab} тўпламлар тўплами G_m ни қарайлик. Кўриниб турибдики, G_m даги тўпламлар ярим ҳалқа ташкил этади. Бундай аниқланган $A_{ab} \in G_m$ тўпламлар ўлчовини

$$m(A_{ab})=b-a$$

каби аниқлаймиз.

Бу ўлчов аддитив, аммо σ-аддитив эмас. Чунки таърифга кўра $m(Q_{[0;1]})=1$, аммо ўлчовни σ-аддитив деб олсак, саноқли сондаги ўлчови 0 бўлган нуқталар бирлашмаси сифатида $Q_{[0;1]}$ нинг ўлчови 0 га тенг. Демак, бу ўлчов σ-аддитив бўла олмайди.

11-теорема. *Агар G_m ярим ҳалқада берилган m ўлчов σ-аддитив бўлса, у ҳолда унинг $\mathfrak{R}(G_m)$ ҳалқагача давоми бўлган m ўлчов ҳам σ-аддитив бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $A\in\mathfrak{R}(G_m)$, $B\in\mathfrak{R}(G_m)$, $n=1,2,...$ ва

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_s \cap B_k = \varnothing \quad k \neq s$$

бўлсин. У ҳолда G_m ярим ҳалқада шундай A_j ва B_{ni} тўпламлар топиладики,

$$A=\bigcup_j A_j,\ B_n=\bigcup_i B_{ni},\ n=1,2...,$$

бўлади. Шунингдек, бу тенгликларнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўзаро кесишмайди, бирлашмалар эса чекли сондаги i ва j лар бўйича олинади.

Энди $C_{nij} = B_{ni} \cap A_j$ белгилаш киритайлик. У ҳолда C_{nij} тўпламлар ўзаро кесишмайди ва

$$A_j=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_i C_{nij},\ B_{ni}=\bigcup_j C_{nij}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Ярим ҳалқа G_m да берилган m ўлчовнинг σ-аддитивлигидан

$$m(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_i m(C_{nij}), \quad m(B_{ni})=\sum_j m(C_{nij})$$

тенгликларни, шунингдек, μ нинг $\mathfrak{R}(G_m)$ да аниқланишига кўра

$$\mu(A)=\sum_j m(A_j),\ \mu(B_n)=\sum_i m(B_{ni})$$

тенгликларни ёзамиз. Булардан $\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_n)$ бўлган бизга керакли натижага келамиз. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан кўринадики, берилган ўлчовнинг давоми учун σ-аддитивлик хоссаси сақланади, демак, ўлчовни бошиданоқ бирор ҳалқада берилган, деб олсак бўлаверар экан.

3-§. Ўлчовни Лебег маъносида давом эттириш

Ушбу параграфда биз бирор E тўпламнинг қисм тўпламларидан тузилган, қандайдир G_m ярим ҳалқада берилган, σ-аддитив m ўлчовни E нинг барча қисм тўпламлари учун аниқлаш масаласи билан шуғулланамиз, яъни 1-§ даги ғояни умумий ҳолда амалга оширамиз.

Айтайлик, E бирор тўплам ва уни ўз ичига олган G_m ихтиёрий ярим ҳалқа, m эса G_m да берилган σ-аддитив ўлчов бўлсин. У ҳолда E даги ҳар бир A тўпламни G_m нинг элементлари ёрдамида қоплаш мумкин, яъни шундай бир $\{B_n\}$ тўпламлар борки, $A\subset\bigcup_n B_n$ бўлади.

9-таъриф. Ихтиёрий $A\subset E$ учун

$$\mu^*(A)=\inf\sum_n m(B_n)$$

тенглик билан аниқланган $\mu^*(A)$ сонни A тўпламнинг *ташқи ўлчови* деймиз. Бу ерда инфимум A тўпламни қопловчи барча чекли ёки саноқли $\{B_n\in G_m\}$ тўпламлар системаси бўйича олинган.

Эътибор берсангиз, 1-§ да G_m ярим ҳалқа вазифасини барча типдаги тўғри тўртбурчаклар тўплами бажарган эди. 3-бобнинг 4-§ да эса худди шу ярим ҳалқа сифатида барча очиқ, ёпиқ ва ярим очиқ интерваллар тўпламини олган эдик.

Шу эслатилган ҳоллардаги каби бу ерда ҳам қуйидаги теорема ўринли:

12-теорема. *Агар* $A\in E$ *ва* $\{A_n\}\subset E$ *ихтиёрий чекли ёки саноқли сондаги тўпламлар берилган бўлиб, улар учун*

$$A\subset\bigcup_n A_n$$

шарт бажарилса, у ҳолда

$$\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n)$$

муносабат ўринли.

Исботи. 1-§ дагидек исботланади.

10-таъриф. Агар ихтиёрий кичик мусбат ε сон учун шундай бир $B \in \Re(G_m)$ тўплам топилиб,

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

шарт бажарилса, у ҳолда А тўплам ***ўлчовли*** (Лебег бўйича ўлчовли) ***тўплам*** дейилади.

Бу ерда киритилган ва фақат ўлчовли тўпламлар учун аниқланган $m \to \mu^*$ функция *Лебег ўлчови* дейилади ва қулайлик учун у $m \to \mu$ орқали белгиланади.

Ўлчовли тўпламлар синфи ҳалқа ташкил қилиши, ўлчовнинг σ-аддитивлиги, узлуксизлиги худди 1-§ дагидек исботланади.

Саволлар ва машқлар

1. Лебег бўйича ўлчовли икки тўпламнинг бирлашмаси ўлчовли бўлишини кўрсатинг.

2. Лебег бўйича ўлчовли тўпламнинг тўлдирувчиси ўлчовли бўлишини кўрсатинг.

3. Лебег бўйича ўлчовли икки тўпламнинг кесишмаси ўлчовли бўлишини кўрсатинг.

4. Лебег бўйича ўлчовли икки чегараланган тўпламнинг айирмаси ўлчовли бўлишини кўрсатинг.

5. Лебег бўйича ўлчовли икки A ва B тўпламлар учун

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

муносабат ўринли эканини исботланг.

V БОБ. ЎЛЧОВЛИ ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Ўлчовли функциялар

Маълумки, функция унинг аниқланиш соҳаси деб аталадиган тўпламда берилади. Агар функция берилган тўпламда ўлчов киритилган бўлса, у ҳолда бу функциянинг ўлчовли тўпламлардаги ҳолати қандай бўлади? Ўлчовли тўпламнинг образи ўлчовли бўладими? Ўлчовли тўпламнинг прообрази ўлчовли бўладими? Бу каби саволлар туғилиши табиий. Демак, ўлчовли функция бирор ўлчовли тўпламда аниқланган ва маълум бир хусусиятларга эга функция экан.

Келгусида биз, асосан, қийматлари ҳақиқий сонлар бўлган функцияларни ўрганамиз.

Айтайлик, бизга E ўлчовли тўплам, $m \to \mu$ ундаги ўлчов, $E_{m \to \mu}$ эса E даги μ га нисбатан ўлчовли тўпламлар тўплами ва унда аниқланган ҳақиқий қийматли $f : E \to R$ функция берилган бўлсин.

Баъзи белгилашларни киритамиз:

f(x) функция ўлчовли E тўпламда аниқланган ва a бирор ҳақиқий сон бўлсин.

E нинг қисми бўлган $f(x)>a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар тўпламини $E\{f>a\}$ билан белгилаймиз, яъни

$$E\{f>a\} = \{x \in E:\ f(x)>a\}.$$

Худди шунингдек,

$E\{f \geq a\} = \{x \in E:\ f(x) \geq a\}$,

$E\{f \leq a\} = \{x \in E:\ f(x) \leq a\}$,

$E\{f = a\} = \{x \in E:\ f(x)=a\}$,

$E\{a < f < b\} = \{x \in E:\ a < f(x) < b\}$

тўпламларни ҳам аниқлаб оламиз.

Умуман олганда, f(x) функция E тўпламда чексиз қийматга ҳам эришиши мумкин. Бундай ҳолда чексиз қиймат аниқ $+\infty$ ёки $-\infty$ га тенг деб олинади.

1-таъриф. Агар ўлчовли E тўпламда берилган f(x) функция учун $E\{f>a\}$ тўплам ихтиёрий a да ўлчовли бўлса, у ҳолда f(x) *ўлчовли функция* дейилади.

Таърифдаги $E\{f>a\}$ тўплам ўлчовли дегани, бу тўпламни μ ёрдамида ўлчаш мумкин, яъни $\mu(E\{f>a\})$ сонни ҳисоблаш мумкин деганидир. Ёки бошқача $E\{f>a\}\in E_\mu$ деб тушуниш керак.

Бу таърифдаги ўлчовли тўпламлар E да киритилган Лебег ўлчови маъносида қаралгани учун f(x) функция баъзан (L) ўлчовли, яъни Лебег маъносида ўлчовли функция дейилади. Агар бу таърифда E ва $E\{f>a\}$ тўпламлар Лебег ўлчовидан бошқа бирор ўлчовга нисбатан ўлчовли бўлса, у ҳолда f(x) функция ҳам шу маънода ўлчовли дейилади.

Мисоллар. 1. $E = [0,20]$ да $f(x) = \frac{1}{x}$ бўлсин.

Агар $a>0$ бўлса, у ҳолда $E\{f > a\} = \{x : \frac{1}{x} > a\} = (0, \frac{1}{a})$,

агар $a\leq 0$ бўлса, у ҳолда $E\{f>a\}=E$ бўлиб, бу тўпламлар ўлчовли.

2. $X=\{a, b, c\}$, $E_\mu=\{\varnothing, \{a\}, \ldots\}=2^X$ бўлсин. Ихтиёрий $A\in E_\mu$ учун $\chi_A(x)$ ўлчовли функция бўлади.

1-теорема. *Агар* f(x) *функция* E *тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда ҳар қандай ҳақиқий a ва* b *сонлар учун*

1) $E\{f \leq a\}$; 2) $E\{a < f \leq b\}$; 3) $E\{f = a\}$;

4) $E\{f \geq a\}$; 5) $E\{f < a\}$

тўпламларнинг ҳар бири ҳам ўлчовли бўлади.

Исботи. 1) Маълумки,

$$E\{f \leq a\} = E \setminus E\{f > a\}.$$

Берилганларга кўра, E ва $E\{f>a\}$ тўпламлар ўлчовли, демак, уларнинг айирмаси $E\{f \leq a\}$ тўплам ҳам ўлчовли.

2) $E\{a < f \leq b\} = E\{f > a\} \cap E\{f \leq b\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар таърифга ва 1) га кўра ўлчовли, демак, уларнинг кесишмаси $E\{a < f \leq b\}$ тўплам ўлчовли.

3) $E\{f = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left\{a - \frac{1}{n} < f(x) \leq a + \frac{1}{n}\right\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли бўлгани учун уларнинг саноқли сондаги кесишмаси ҳам ўлчовли бўлади (ўлчовли тўпламлар хоссаси, 4-боб, 1-§ га қаранг, 9-теорема).

4) $E\{f\geq a\}=E\{f>a\}\cup E\{f=a\}$ тенгликнинг ўнг томонида ўлчовли тўпламлар бирлашмаси турибди, демак, $E\{f\geq a\}$ тўплам ҳам ўлчовли.

5) $E\{f < a\} = E\{f \leq a\} \setminus E\{f=a\}$ тенгликдан ва 1), 3) лардан $E\{f<a\}$ тўпламнинг ўлчовлилиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. *Агар ихтиёрий ҳақиқий a ва b сонлар учун 1), 2), 4), 5) тўпламларнинг бироратаси ўлчовли бўлса*, f(x) *функция* E *тўпламда ўлчовли бўлади.*

Теореманинг исботи юқоридаги каби олиб борилади.

Ўлчовли функцияларга доир мисол ва масалалар ечиш.

1-мисол. Агар ўлчовли E тўпламда $f^3(x)$ функция ўлчовли бўлса, у ҳолда f(x) функциянинг ўлчовли эканлигини исботланг.

Ечиш. Шартга кўра, ихтиёрий $a \in R$ учун $E(f^3(x)>a)=\{x\in E: f^3(x)>a\}$ ўлчовли бўлади. У ҳолда $E(f>c)=\{x: f(x)>c\}=\{x: f^3(x)>c^3\}$ муносабатга кўра f(x) нинг ўлчовли экани келиб чиқади.

2-мисол. Агар f(x) функция $[a;b]$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f'(x)$ нинг $[a;b]$ да ўлчовли эканини кўрсатинг.

Ечиш. Ҳосилага эга функция узлуксиз бўлади, демак, ўлчовли бўлади. Ихтиёрий $n\in N$ учун ушбу

$$\varphi_n(x)=\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

функцияни қараймиз. Бу функция $[a;b-\frac{1}{n}]$ кесмада аниқланган ва ўлчовли бўлади. Шунингдек, унинг лимити мавжуд: $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f'(x)$, $\forall x\in[a;b-\frac{1}{n}]$. Демак, $f'(x)$ функция $[a;b-\frac{1}{n}]$ да ўлчовли.

Энди $[a;b)=\bigcup\limits_{n}^{\infty}[a;b-\frac{1}{n}]$ га кўра, $f'(x)$ $[a;b)$ да ўлчовли. Унга ўлчови 0 бўлган $\{b\}$ тўпламни қўшишимиз мумкин.

Шундай қилиб, $f'(x)$ функция $[a;b]$ да ўлчовли экан.

Мустақил ишлаш учун мисол ва масалалар.

1. Ўлчовли E тўпламда $f^2(x)$ функциянинг ўлчовли эканлигидан, умуман олганда, f(x) нинг ўлчовли бўлиши келиб чиқмаслигини кўрсатинг.

2. Агар f(x) ўлчовли бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ нинг ўлчовли бўлишини исботланг. Бу хулосанинг тескариси ўринли эмаслигига мисол келтиринг.

3. Дирихле функцияси билан ихтиёрий функция кўпайтмаси ўлчовли функция бўлишини исботланг.

4. Айтайлик, $f(x)$ бирор $[a;b]$ кесмада узлуксиз ва $E_1=f(E)$ унинг қийматлар тўплами бўлсин. Агар $g(x)$ функция E_1 да ўлчовли бўлса, у ҳолда уларнинг суперпозицияси $g(f(x))$ функция ўлчовли бўладими?

5. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ ўлчовли функциялар бўлса, у ҳолда $p(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ ва $q(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ функциялар ҳам ўлчовли бўлишини исботланг.

Энди ўлчовли функцияларнинг асосий хоссаларини кўриб ўтамиз.

2-§. Ўлчовли функциялар устида амаллар

3-теорема. *Агар* $f(x)$ *функция* E *тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда бу функция* E *тўпламнинг ихтиёрий ўлчовли* E_1 *қисмида ҳам ўлчовли бўлади.*

Исботи. Ўлчовли функция таърифига кўра,

$$E_1\{f > a\} = \{x\in E_1 : f(x) > a\}$$

тўпламнинг ўлчовли эканлигини кўрсатишимиз зарур. Бу тўпламнинг ўлчовлиги эса

$$E_1\{f > a\} = E_1 \cap E\{f > a\}$$

тенгликдан келиб чиқади. Чунки берилишга кўра, E_1 ва $E\{f>a\}$ тўпламлар ўлчовли, демак, уларнинг кесишмаси ҳам ўлчовли. Теорема исбот бўлди.

4-теорема. *Айтайлик,* $\{E_k\}$, *чекли ёки саноқли сондаги ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар* $f(x)$ *функция бу тўпламларнинг ҳар бирида ўлчовли бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *уларнинг* $E=\bigcup_k E_k$ *бирлашмасида ҳам ўлчовли бўлади.*

Исботи. Ихтиёрий k учун E_k ва $E_k\{f>a\}$ тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли. Ўлчовли тўпламлар хоссасига кўра, уларнинг ихтиёрий сондаги бирлашмаси ҳам ўлчовли. Демак, $E=\bigcup_k E_k$ ўлчовли тўплам. Энди

$$E\{f > a\} = \bigcup_k (E\{f > a\} \cap E_k)$$

тенгликдан эса $f(x)$ функциянинг E тўпламда ўлчовли бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

5-теорема. *Агар* $f(x)$ *функция ўлчовли* E *тўпламда ўзгармас* k *сонга тенг бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *ўлчовли функция бўлади.*

Исботи. Бу ерда икки ҳолдан бири бўлиши мумкин: танланган a сон учун ёки $k>a$, ёки $k\leq a$.

Агар $k>a$ бўлса, у ҳолда

$$E\{f>a\}=E,$$

агар $k\leq a$ бўлса, у ҳолда

$$E\{f>a\}=\varnothing$$

бўлади ва бу тўпламлар ўлчовли. Теорема исбот бўлди.

6-теорема. *Агар* $f(x)$ *функция ўлчовли функция ва* k *ўзгармас сон бўлса, у ҳолда* $f(x)+k$ *ва* $kf(x)$ *функциялар ҳам ўлчовли бўлади.*

Исботи. Теореманинг тасдиғи

$$E\{f+k>a\}=E\{f>a-k\}$$

тенгликдан ҳамда $k>0$ бўлганда

$$E\{kf>a\}=E\{f>\frac{a}{k}\}$$

ва $k<0$ бўлганда

$$E\{kf>a\}=E\{f<\frac{a}{k}\}$$

тенгликлардан келиб чиқади.

Агар $k=0$ бўлса, у ҳолда охирги икки тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўз маъносини йўқотади. Аммо бу ҳолда $kf(x)\equiv 0$ бўлиб, 5-теоремага асосан $kf(x)$ функция ўлчовли бўлади. Теорема исбот бўлди.

7-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* E *тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда* $E\{f>g\}$ *тўплам ўлчовли бўлади.*

Исботи. Барча рационал сонларни $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ кўринишда номерлаб чиқамиз. У ҳолда

$$E\{f>g\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{F>r_k\}\cap E\{g<r_k\}] \qquad (1)$$

тенгликни ёзишимиз мумкин.

Бу тўпламлар тенглигини қуйидагича исботлаш мумкин: (1) тенгликнинг чап томони унинг ўнг томонининг қисми эканлигини кўрсатамиз. Агар $x\in E\{f>g\}$ бўлса, у ҳолда $f(x)>g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ сонлари учун шундай бир r_k рационал сон топиладики,

$$f(x)>r_k>g(x)$$

тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, $x\in E\{f>r_k\}$ ва $x\in E\{g<r_k\}$ муносабатларга келамиз. Демак,

$$x\in E\{f>r_k\}\cap E\{g<r_k\}$$

бўлади. Бундан $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f > r_k\} \cap E\{g < r_k\}]$ муносабат келиб чиқади.

Энди x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E\{f > g\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f > r_k\} \cap E\{g < r_k\}] \qquad (2)$$

муносабатни оламиз.

(1) тенгликнинг ўнг томони унинг чап томонининг қисми эканлигини кўрсатамиз. Айтайлик, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f > r_k\} \cap E\{g < r_k\}]$ бўлсин. У ҳолда камида битта r_n рационал сон топиладики, $x \in E\{f > r_n\} \cap E\{g < r_n\}$ бўлади. Демак, $x \in E\{f > r_n\}$ ва $x \in E\{g < r_n\}$ бўлиб, ушбу $f(x) > r_n$ ва $g(x) < r_n$ тенгсизликларни оламиз. Булардан $f(x) > g(x)$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса $x \in E\{f > g\}$ эканини билдиради. Энди x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E\{f > g\} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f > r_k\} \cap E\{g < r_k\}]$$

келиб чиқади. Бундан ва (2) муносабатдан (1) тенгликнинг ўринлилиги исботланади. Энди теорема исботига қайтамиз.

Ҳар бир рационал сон r_k учун $E\{f > r_k\}$ ва $E\{g < r_k\}$ тўпламлар ўлчовли. Ўлчовли тўпламларнинг саноқли сондаги бирлашмаси яна ўлчовли бўлгани учун, (1) тенгликнинг ўнг томонидаги тўплам ўлчовли. Демак, $E\{f > g\}$ тўплам ўлчовли. Теорема исбот бўлди.

8-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* E *тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда* $f(x)+g(x)$ *ва* $f(x)-g(x)$ *функциялар ҳам* E *тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исботи. Бу теореманинг исботи

$$E\{f + g > a\} = E\{f > a - g\},$$

$$E\{f - g > a\} = E\{f > a + g\}$$

тенгликлардан ва 7-теоремадан келиб чиқади.

9-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* E *тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси* $f(x)g(x)$ *функция ҳам* E *тўпламда ўлчовли* бўлади.

Исботи. Агар $f(x)$ ўлчовли бўлса, у ҳолда $f^2(x)$ функциянинг ўлчовли бўлиши $a \geq 0$ бўлганда

$$E\{f^2 > a\} = E\{f > \sqrt{a}\} \cup E\{f < -\sqrt{a}\}$$

тенгликдан, $a<0$ бўлганда

$$E\{f^2 > a\} = E$$

тенгликдан келиб чиқади. Булардан ва ушбу

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}[f(x)+g(x)]^2 - \frac{1}{4}[f(x)-g(x)]^2$$

тенгликдан тасдиқнинг тўғрилиги келиб чиқади, чунки ўнг томондаги функциялар 8- теоремага асосан ўлчовли. Теорема исбот бўлди.

10-теорема. *Агар* g(x) *функция* E *тўпламда ўлчовли бўлиб,* E *нинг ихтиёрий* x *элементида* g(x)≠ 0 *бўлса, у ҳолда* $\frac{1}{g(x)}$ *функция ҳам* E *тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исботи. Агар g(x) ўлчовли функция бўлса, у ҳолда $a>0$ бўлганда,

$$E\left\{\frac{1}{g} > a\right\} = E\left\{0 < g < \frac{1}{a}\right\}$$

тўплам; $a < 0$ бўлганда,

$$E\left\{\frac{1}{g} > a\right\} = E\{g > 0\} \cup E\left\{g < \frac{1}{a}\right\}$$

тўплам; $a=0$ бўлганда,

$$E\left\{\frac{1}{g} > a\right\} = E\{g > 0\}$$

тўпламларнинг ўлчовли эканлигидан $\frac{1}{g(x)}$ функциянинг ўлчовлилиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

11-теорема. *Агар* f(x) *ва* g(x) *функциялар* E *тўпламда ўлчовли бўлиб,* E *нинг ихтиёрий* x *элементида* g(x)≠ 0 *бўлса, у ҳолда* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *функция ҳам* E *тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исботи. Бу теореманинг тўғрилиги

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$$

муносабатдан ҳамда 9- ва 10-теоремаларнинг тасдиғидан келиб чиқади.

12-теорема. *Агар* f(x) *функция* E *тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда* f(x) *бу тўпламда ўлчовли бўлади.*

Бу теореманинг исботини мустақил бажариш учун қолдирамиз.

3-§. Ўлчовли функциялар кетма-кетлиги

Ўлчовли функциялар тўпламида қўшиш, айириш, бўлиш ва кўпайтириш амаллари бажарилар экан. Қуйидаги теорема ўлчовли функциялар кетма-кетлиги устида лимитга ўтиш ҳам ўринли эканини кўрсатади:

13-теорема. *Айтайлик, ўлчовли* E *тўпламда* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *ўлчовли функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар* E *тўпламнинг ҳар бир* x *нуқтасида*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда f(x) *функция* E *тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $f_n(x) \to f(x)$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcup_{m>n} \left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \qquad (1)$$

муносабат ўринли.

Ҳақиқатан, айтайлик, x чап томондаги тўпламга тегишли бўлсин. У ҳолда $f(x)<c$, демак, шундай бир k номер топиладики, $f(x) < c - \frac{2}{k}$ бўлади. Қолаверса, k ни хоҳлаганча катта қилиб олиш мумкинки, катта *n* ларда ҳам $m \geq n$ ҳол учун

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса *x* элемент (1) муносабатнинг ўнг томонига ҳам тегишли эканини билдиради.

Аксинча, агар x элемент (1) муносабатнинг ўнг томонига тегишли бўлса, у ҳолда шундай бир k номер топиладики, етарлича катта m лар учун

$$f_m(x) < c - \frac{1}{k}$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $f(x)<c$ эканини, яъни x элемент (1) тенгликнинг чап томонига тегишлилигини билдиради.

Шартга кўра $f_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири ўлчовли, яъни $\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$ тўпламлар ихтиёрий m ва k лар учун ўлчовли бўлади. Маълумки, ўлчовли тўпламлар тўплами σ-алгебра ташкил этади. Демак, (1) тенгликка асосан

$$\{x: f(x) < c\}$$

тўплам ҳам ўлчовли бўлади. Бу эса *f(x)* функциянинг ўлчовли эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Эквивалентлик

Келгусида ўлчови нолга тенг тўпламлар қанчалик муҳим, балки уларни эътиборга олмасак ҳам бўлаверар, каби саволларга жавоб излаймиз.

Ўлчовли функция таърифидан кўринадики, унинг ўлчови 0 га тенг тўпламдаги қиймати ҳеч қандай рол ўйнамайди.

Умуман, бирор хосса Е тўпламнинг 0 ўлчовли қисмида бажарилмаса, бу хосса барибир бажариляпти дейишга асосимиз бор.

Шу сабабли бизга керакли бўлган айрим таърифларни берамиз.

2-таъриф. Бирор ўлчовли Е тўплам учун $\mu(E)>0$ бўлсин. Агар бирор хосса ўлчови нолга тенг $A \subset E$ тўпламда бажарилмай, Е тўпламнинг қолган қисмида (яъни $E \setminus A$ тўпламда) бажарилса, у ҳолда бу хосса Е *тўпламда деярли бажарилади* дейилади.

Қуйидаги таъриф жуда муҳим таърифлардан бири ҳисобланади:

3-таъриф. Агар $\mu(\{x: f(x) \neq g(x)\}) = 0$ бўлса, f(x) ва g(x) функциялар Е тўпламда *эквивалент* дейилади.

Бунинг маъноси шуки, берилган икки функция Е тўпламнинг деярли ҳамма жойида устма-уст тушади. Шунинг учун ҳам Е тўпламда эквивалент бўлган икки функция бир-бирига *деярли тенг* дейиш ўринли бўлади.

Масалан, [0;1] кесмада берилган Дирихле функцияси

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \in Q \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in I \text{ бўлса} \end{cases}$$

ва шу [0;1] да айнан 0 га тенг: $\theta(x)=0$, функциялар эквивалент, яъни деярли тенг функциялар, чунки улар бир-биридан саноқли нуқталарда фарқ қилади. Биламизки, саноқли тўпламнинг ўлчови 0 га тенг.

14-теорема. *Ўлчовли* E *тўпламда аниқланган* f(x) *функция бирор бир ўлчовли* g(x) *функцияга эквивалент бўлса, у ҳолда унинг ўзи ҳам ўлчовли бўлади.*

Исботи. Функцияларнинг эквивалентлиги таърифига кўра,

$$\{x: f(x)<a\} \text{ ва } \{x: g(x)<a\}$$

тўпламлар бир-биридан фақат ўлчови нолга тенг бўлган қисмлари билан фарқ қилади. Демак, бу тўпламлардан бири ўлчовли бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам ўлчовли бўлади. Теорема исбот бўлди.

Классик анализда функцияларнинг эквивалентлиги муҳим рол ўйнамайди, чунки у ерда асосан узлуксиз функциялар ўрганилади. Узлуксиз функциялар учун эса эквивалентлик айнан тенгликни билдиради.

Ҳақиқатан, агар икки узлуксиз f(x) ва g(x) функциялар бирор $[a,b]$ сегментнинг x_0 нуқтасида устма-уст тушмаса, яъни $f(x_0) \neq g(x_0)$ бўлса, у ҳолда уларнинг узлуксизлигига кўра x_0 нинг шундай атрофи топиладики, бу атрофнинг барча x нуқталари учун $f(x) \neq g(x)$ бўлади. Бундай атрофнинг ўлчови нолдан фарқли мусбат сон. Демак, узлуксиз функциялар устма-уст тушмаса, эквивалент бўла олмайди.

4-§. Деярли яқинлашиш

4-таъриф. Бирор E ўлчовли тўплам берилган бўлиб, $\mu(E)>0$ бўлсин. Агар E тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги ўлчови нолга тенг бўлган бирор A тўпламнинг ташқарисида (яъни $E\setminus A$ тўпламда) f(x) функцияга яқинлашса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга *деярли яқинлашувчи* дейилади.

Бошқача айтганда, $\{x: \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик f(x) га деярли яқинлашади дейилади.

Масалан, $f_n(x)=x^n$ кўринишда берилган функциялар кетма-кетлиги $[0,1]$ кесмада $f(x)=0$ функцияга $n\to\infty$ да деярли яқинлашади. Чунки $\{x: \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0\} = \{1\}$ ва бу бир элементли тўплам ўлчови 0 га тенг.

15-теорема. *Агар ўлчовли* E *тўпламда* $f_n(x)$ *ўлчовли функциялар кетма-кетлиги* f(x) *функцияга деярли яқинлашса, у ҳолда* f(x) *функция* E *тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исботи. Бунинг учун $A=\{x:\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\}$ тўпламни қараймиз. Теорема шартига кўра, $\mu(E\setminus A)=0$. Демак, f(x) функция E\A тўпламда ўлчовли (нафақат f(x), балки ихтиёрий функция ўлчови нолга тенг тўпламда ўлчовли бўлади). 13-теоремага кўра f(x) функция A тўпламда ўлчовли. Шундай қилиб, f(x) функция E да ўлчовли экан. Теорема исбот бўлди.

Текис яқинлашиш

Функциялар кетма-кетлиги учун текис яқинлашиш тушунчаси билан яхши танишсиз.

Шундай бўлса ҳам, бу керакли таърифни эслатиб ўтамиз.

5-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун шундай бир $n_o=n_o(\varepsilon)$ номер мавжуд бўлиб, барча $n>n_o$ лар ва барча $x\in E$ учун

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда E тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги шу тўпламда f(x)га *текис яқинлашувчи* дейилади.

Ўлчовли функцияларнинг қуйида келтириладиган хоссалари биз келгусида аниқламоқчи бўлган интегрални қуришда асосий вазифани ўтайди.

6-таъриф. Агар E тўпламда аниқланган ҳақиқий f(x) функция ўлчовли бўлиб, унинг қийматлари тўплами чекли ёки саноқли бўлса, у ҳолда бундай функция *содда функция* дейилади.

16-теорема. E *тўпламда берилган ҳамда қийматлари тўплами чекли ёки саноқли* $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ *тўпламдан иборат бўлган* f(x) *функциянинг ўлчовли бўлиши учун*

$$A_n=\{x\in E: f(x)=y_n\},\quad n=1,2,\dots$$

тўпламларнинг ўлчовли бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. *Зарурийлиги.* Айтайлик, f ўлчовли бўлсин. Битта элементли тўплам $\{y_n\}$ ўлчовли бўлганлиги учун унинг прообрази $A_n=f^{-1}(\{y_n\})$ ўлчовли бўлади.

Етарлилиги. Айтайлик, барча A_n, $(n=1,2,\dots)$ лар ўлчовли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий c сон учун $E=(f>c)=\bigcup_{y_n\in(c,\infty)} A_n$ тенгликдан ва A_n ларнинг ўлчовлилигидан f нинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Қуйидаги теорема жуда муҳим:

17-теорема. E *тўпламда аниқланган* f(x) *функция ўлчовли бўлиши учун бу функцияга шу тўпламда текис яқинлашувчи,* *ўлчовли* $\{f_n(x)\}$ *содда функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. *Зарурийлиги.* f(x) функцияни ўлчовли деб, унга текис яқинлашувчи ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини қуйидагича тузамиз: ҳар бир тайинланган n натурал сон учун ўлчовли f(x) функция

$$\frac{m}{n} \le f(x) < \frac{m+1}{n}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталарда (бу ерда m — бутун сон) $f_n(x)$ функцияни ушбу

$$f_n(x) = \frac{m}{n}$$

тенглик билан аниқлаймиз. У ҳолда $f_n(x)$ содда функция бўлиб, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $n\to\infty$ да f(x) га текис яқинлашади.

Ҳақиқатан, $f_n(x)$ функциянинг таърифланишидан E нинг ҳар қандай x элементи учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринли эканлиги равшан. Бу эса $n\to\infty$ да $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг f(x) га текис яқинлашишини кўрсатади.

Етарлилиги. Берилган E тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ ўлчовли содда функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда 4-теоремага асосан f(x) функция ўлчовли бўлади. Теорема исбот бўлди.

Егоров теоремаси

Текис яқинлашиш билан юқорида киритилган деярли яқинлашиш орасида қандай боғланиш борлигини қуйидаги теорема кўрсатади:

18-теорема. *Айтайлик, ўлчови чекли* E *тўплам ва ундаги* f(x) *функцияга деярли яқинлашувчи* $f_n(x)$ *ўлчовли функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир* $\delta>0$ *сон учун шундай бир* $E_\delta \subset E$ *ўлчовли қисм тўплам топиладики, унинг ўлчови* E *нинг ўлчовидан кўпи билан* δ *га фарқ қилади ва* E_δ *тўпламда* $f_n(x)$ *кетма-кетлик* f(x) *га текис яқинлашади.*

Исботи. Исботнинг асосий ғояси теорема шартини қаноатлантирувчи E_δ тўпламни топишдан иборат. Юқоридаги 15-теоремага кўра f(x) ўлчовли бўлади. Энди

$$E_n^m = \bigcap_{i\ge n}\left\{x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}$$

тўпламни қараймиз.

Бу E_n^m тўплам тайин n ва m ларда, ихтиёрий $i \ge n$ лар учун

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

шартни қаноатлантирувчи барча x лар тўпламини ифодалайди.

Айтайлик,

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m$$

бўлсин. E_n^m тўпламларнинг аниқланишига кўра, тайин m лар учун

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots \subset E_n^m \subset \ldots$$

бўлади.

Маълумки, σ-аддитив ўлчов узлуксиз, шунинг учун ихтиёрий m ва ихтиёрий δ>0 учун шундай бир $n_o(m)$ номер топиладики,

$$\mu(E^m \setminus E^m_{n_o(m)}) < \delta / 2^m$$

бўлади. Агар

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}$$

деб олсак, бундай аниқланган E_δ тўплам теорема шартини қаноатлантиради.

Ҳақиқатан, $\{f_i(x)\}$ кетма-кетлик E_δ тўпламда f(x) га текис яқинлашади. Чунки, агар $x \in E_\delta$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий m учун $i > n_o(m)$ бўлганда

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

тенгсизлик ўринли.

Энди $E \setminus E_\delta$ тўплам ўлчовини баҳолаймиз. Кўриниб турибдики, ҳар бир m учун $\mu(E \setminus E^m)=0$. Бундан

$$\mu(E \setminus E^m_{n_o(m)}) = \mu(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}) < \delta / 2^m$$

келиб чиқади. Шунинг учун

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}) = \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty}(E \setminus E^m_{n_0(m)})) \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E^m_{n_0(m)}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

Теорема исбот бўлди.

5-§. Ўлчов бўйича яқинлашиш

Энди ўлчовли функциялар синфида яна бир яқинлашиш тушунчаси билан танишамиз ва турли хил лимитга ўтиш амалларини кўриб, уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

7-таъриф. Ўлчовли E тўпламда f(x) ўлчовли функция ва $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат σ сон учун

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}) = 0$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик f(x) функцияга *ўлчов бўйича яқинлашувчи* дейилади ва $f_n \Rightarrow f$ кўринишда ёзилади.

Юқорида киритилган деярли яқинлашиш билан ўлчов бўйича яқинлашиш орасида қандай боғланиш бор, деган саволга қуйидаги теорема жавоб беради:

19-теорема. *Айтайлик,* f(x) *функцияга деярли яқинлашувчи* $\{f_n(x)\}$ *ўлчовли функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда* $\{f_n(x)\}$ *функциялар кетма- кетлиги* f(x) *функцияга ўлчов бўйича ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Исботи. 15-теоремага кўра, f(x) ўлчовли бўлади. Айтайлик, A орқали $f_n(x)$ ларнинг f(x) га яқинлашмайдиган нуқталар тўплами белгилансин: $A = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$. Теорема шартига кўра, A нинг ўлчови нолга тенг. Қуйидаги тўпламларни киритамиз:

$$E_k(\sigma)=\{x: | f_k(x) - f(x) | \geq \sigma\},$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), \quad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Бу тўпламларнинг ўлчовли эканлиги равшан. Шунингдек,

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$$

муносабат ўринли. У ҳолда ўлчовнинг узлуксизлик хоссасига асосан $n \to \infty$ да

$$\mu(R_n(\sigma)) \to \mu(M)$$

бўлади. Энди $M \subset A$ эканини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, агар $x_0 \notin A$ бўлса, яъни

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

бўлса, у ҳолда берилган ихтиёрий $\sigma > 0$ учун шундай бир n топиладики, $k \geq n$ бўлганда,

$$| f_k(x_0) - f(x_0) | < \sigma$$

бўлади. Бу эса $x_0 \notin R_n(\sigma)$ эканини, қолаверса, $x_0 \notin M$ бўлишини билдиради.

Аммо $\mu(A)=0$ ва шунинг учун $\mu(M)=0$, чунки $M \subset A$. Шундай қилиб, $n \to \infty$ да

$$\mu(R_n(\sigma)) \to 0$$

экан. Энди $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$ эканлигидан теореманинг хулосаси келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Бу теореманинг тескариси ўринли эмас, яъни функциялар кетма-кетлигининг ўлчов бўйича яқинлашишидан уларнинг деярли яқинлашиши келиб чиқмайди.

Ҳақиқатан, ҳар бир натурал k учун (0,1] ярим оралиқда

$$f_1^{(k)},\ f_2^{(k)},\ \ldots,\ f_k^{(k)},\ \ldots$$

функциялар кетма-кетлигини қуйидагича аниқлаймиз:

$$f_i^{(k)} = \begin{cases} 1, \text{агар} & \dfrac{i-1}{k} < x \leq \dfrac{i}{k} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{қолган ҳолларда.} \end{cases}$$

Бу функцияларни $k=1, 2, \ldots$ учун қуриб оламиз ва бир четдан номерлаб чиқамиз. Натижада ўлчов бўйича нолга яқинлашувчи, аммо бирорта ҳам нуқтада нолга яқинлашмайдиган функциялар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз.

Бу мисол 19-теореманинг тескариси ўринли эмаслигини тасдиқласа ҳам, қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади:

20-теорема. *Айтайлик,* $\{f_n(x)\}$ *ўлчовли функциялар кетма-кетлиги* $f(x)$ *функцияга ўлчов бўйича яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда бу кетма-кетликдан* $f(x)$ *функцияга деярли яқинлашувчи* $\{f_{n_k}(x)\}$ *қисмий кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин.*

Бу теореманинг исботи юқорида қурилган мисол ғояси каби кўрсатилади. Шу мисолнинг, масалан, $\{f_k^{(k)}\}$ қисм кетма-кетлиги нолга деярли яқинлашади.

Саволлар ва машқлар

1. Айтайлик, $\{f_n\}$ ва $\{g_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ га ўлчов бўйича яқинлашсин. У ҳолда $\{f_n+g_n\}$, $\{f_n g_n\}$ кетма-кетликлар мос равишда $f+g$ га ва fg га ўлчов бўйича яқинлашишини кўрсатинг.

2. Айтайлик, $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ га ўлчов бўйича яқинлашсин. Агар барча n лар учун $f_n(x)\le a$ шарт бажарилса, у ҳолда $f(x)\le a$ тенгсизлик деярли бажарилишини кўрсатинг.

3. Агар $f(x)$ ўлчов бўйича яқинлашувчи $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $g(x)$ га ҳам ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг эквивалентлигини исботланг.

4. Аввалги мисолдаги ўлчов бўйича яқинлашиш деярли яқинлашиш билан алмаштирилса, хулоса ўринлилигича қоладими?

VI БОБ. ЛЕБЕГ ИНТЕГРАЛИ

1-§. Интеграл тушунчаси ва уни қуришнинг биринчи усули

Узлуксиз функциялар учун ёки узилиш нуқталари «жуда кўп» бўлмаган функциялар учун Риман интегралини ҳисоблаш математик анализ курсидан маълум. Кейинчалик Риман интеграли баъзи бир функциялар синфи учун мавжуд эмаслиги, яъни бу интеграл тушунчаси ёрдамида айрим функцияларни интеграллаб бўлмаслиги аниқлангач, янада кенгроқ интеграл — «Лебег интеграли» тушунчаси киритилади.

Шу жараённи қисқача эслаб ўтайлик.

Бирор $[a;b]$ сегментда аниқланган f(x) функциянинг Риман интегралини қуриш учун $[a;b]$ оралиқ узунликлари n та бўлакка бўлинади ва ҳар бир бўлакдан биттадан нуқта танланиб, интеграл йиғинди тузилади. Сўнгра бўлаклар узунликлари энг каттаси 0 га интилганда (бу ҳолда $n \to \infty$ бўлади), тузилган интеграл йиғинди лимити текширилади. Агар лимит мавжуд бўлса ва $[a;b]$ оралиқни бўлиш усулига ҳамда ҳар бир бўлакдан олинган нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, бу лимит f(x) функциядан $[a;b]$ сегмент бўйича олинган Риман интеграли дейилади.

Агар $[a,b]$ сегментда аниқланган f(x) функция сифатида

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар x рационал бўлса,} \\ 0, & \text{агар x иррационал бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясини олсак, у ҳолда юқорида келтирилган таъриф бўйича бу функциянинг Риман интеграли мавжуд бўлмайди.

Ҳақиқатан, агар ажратилган бўлакларнинг ҳар биридан олинган ва интеграл йиғиндида ишлатиладиган нуқталар рационал қилиб танланса, интеграл йиғиндилар $b\text{-}a$ га, демак, лимит ҳам $b\text{-}a$ га тенг бўлади. Агарда олинаётган нуқталар иррационал қилиб танланса, у ҳолда интеграл йиғиндилар ҳар бир n да 0 га тенг ва демак, лимит ҳам 0 га тенг бўлади. Бундан кўринадики, интеграл йиғиндилар кетма-кетлигининг лимити бўлакчалардан олинган нуқталарнинг танланишига боғлиқ экан. Бу эса f(x) ни Риман маъносида интеграллаб бўлмаслигини билдиради.

Бу каби мисолларни истаганча келтириш мумкин.

Кўрамизки, Риман интеграли тушунчасини математикада кўплаб ишлатиладиган муҳим функцияларга татбиқ қилиб бўлмас экан. Шу сабабли Риман интеграли тушунчасини кенгайтириш масаласи туғилади.

Бу масала билан кўп математиклар шуғулланиб, Риман интегралининг турли умумлаштиришларини топишган. Буларнинг ичида энг муҳими Лебег томонидан киритилган интеграл тушунчасидир.

Лебег интеграли қуришнинг асосий ғояси шундаки, унда функциянинг аниқлаш соҳаси бўлган $[a;b]$ сегментни бўлакларга бўлинаётганда аргумент қийматларининг яқинлиги эмас, балки функция қийматларининг яқинлиги ҳисобга олинади. Бу ғоя бирйўла Риман интеграли мавжуд бўлган функциялар синфидан кенгроқ функциялар синфи учун интеграл тушунчасини аниқлашга имкон беради.

Риман ва Лебег ғояларини бошқача яна қуйидагича ҳам солиштириш мумкин:

Айтайлик, қийматлари ҳар хил бўлган қоғоз пуллардан бир қоп бор. Бу пулларнинг умумий миқдорини қандай қилиб топган маъқул. Икки кассирдан бири пулларни бир четдан олади ва миқдорларини қўшиб боради. Иккинчиси эса аввал пулларнинг миқдорига қараб ажратиб чиқади: масалан, 10 сўмликларни бир тўп, 50 сўмликларни бир тўп ва ҳоказо. Кейин ҳар бир тўпни алоҳида санаб қўшиб чиқади.

Мана шу кассирлардан биринчиси, ифодали қилиб айтганда «Риман», иккинчиси «Лебег» бўлади. Юзаки қараганда, бу икки усулда ҳисоблашларнинг бир-биридан устунлиги сезилмаса-да, ушбу дарсликда биз Лебег усулининг катта имкониятларга эга эканлигини кўрамиз.

Чегараланган функциянинг Лебег интеграли

Айтайлик, тўғри чизиқда μ ўлчов аниқланган бўлсин. Аввало, Лебег интегралини $[a;b]$ сегментдаги ўлчовли E тўпламнинг характеристик функцияси учун аниқлаймиз.

Ушбу

$$f_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

функция Е тўпламнинг характеристик функцияси дейилади.

Энди $f_E(x)$ функциянинг *Лебег интеграли* деб $\mu(E)$ сонга (яъни Е тўпламнинг ўлчовига) айтамиз ва қуйидагича белгилаймиз:

$$(L)\int_E f_E(x)dx = \mu(E).$$

Бу ерда, (L) белги интеграл Лебег маъносида эканлигини билдириб туради.

Шунингдек,

$$f(x) = \begin{cases} k, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$$

функция учун Лебег интегралини

$$(L)\int_E f(x)d\mu = k\mu(E)$$

тенглик билан аниқлаш кераклиги тушунарли.

Умумий ҳол (1-усул). Функцияларнинг қийматларига кўра интеграл қуриш.

Маълумки, функция тўғри чизиқда, яъни сонлар ўқида аниқланган бўлса, унинг аниқланиш соҳасини бир нечта бўлакларга бўлиш ёрдамида Риман интеграли қурилади. Аммо функция тўғри чизиқда эмас, балки бирор ўлчовли, яъни ўлчов киритилган тўпламда аниқланган бўлса, бу тўпламни оралиқларга бўлиш деган тушунчанинг ўзи маънога эга эмас. Шунинг учун функциянинг қийматларидан фойдаланиб интеграл қуришни ўрганамиз.

Ўлчовли Е тўпламда аниқланган ва чегараланган f(x) функциянинг аниқ қуйи ва аниқ юқори чегаралари мос равишда А ва В орқали белгиланган бўлсин. Энди $[A,B]$ сегментни қандайдир усулда n та қисмга бўламиз:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B.$$

Биз E_ν ($\nu=0, 1, 2, \ldots, n-1$) орқали $y_\nu \le f(x) < y_{\nu+1}$ тенгсизликни қаноатлантирадиган x нуқталардан иборат тўпламни белгилаймиз, яъни $E_\nu=\{x \in E : y_\nu \le f(x) < y_{\nu+1}\}$.

Берилган f(x) функция ўлчовли бўлганлиги учун E_ν тўплам ўлчовли бўлади.

Энди ушбу

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu \mu(E_\nu), \qquad S_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_{\nu+1} \mu(E_\nu) \qquad (1)$$

йиғиндиларни тузамиз (s_n ва S_n мос равишда қуйи ва юқори йиғиндилар дейилади) ва қуйидаги таърифни киритамиз:

1-таъриф. Агар $\lambda_n (= \max\limits_{0\le\nu\le n-1} [y_{\nu+1} - y_\nu])$ нолга интилганда ($n\to\infty$) s_n ва S_n йиғиндиларнинг лимити мавжуд бўлиб, улар бир-бирига тенг бўлса ва бу лимит y_n нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимит f(x) функциянинг E тўпламдаги *Лебег интеграли* дейилади ва бу интеграл юқоридаги, хусусий ҳоллар каби ушбу

$$(L)\int_E f(x)d\mu \quad \text{ёки} \quad (L)\int_E f(x)dx$$

кўринишда белгиланади.

Бундай интегралнинг мавжудлиги ҳақида тасдиқ ва теоремалар кўп. Шулардан бирини келтирамиз:

1-теорема. *Агар* f(x) *функция ўлчовли* E *тўпламда ўлчовли ва чегараланган бўлса, у ҳолда унинг Лебег интеграли мавжуд.*

Исботи. Чегараланган ва ўлчовли f(x) функция олиб, унинг учун (1) каби s_n ва S_n йиғиндилар тузиб, уларнинг умумий лимитга эга бўлишини кўрсатамиз.

Бу функция чегараланган бўлганлиги учун унинг аниқ қуйи ва аниқ юқори чегаралари мавжуд ва бу қийматларни мос равишда A ва B орқали белгилайлик.

[A,B] сегментни икки усулда n та ва k та қисмларга бўламиз:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = B, \qquad (2)$$

$$A = y'_0 < y'_1 < y'_2 < \dots < y'_{k-1} < y'_k = B. \qquad (3)$$

Агар

$$\lambda_n = \max_{0\le\nu\le n-1} (y_{\nu+1} - y_\nu), \quad \lambda_k = \max_{0\le\nu\le k-1} (y'_{\nu+1} - y'_\nu), \quad \lambda = \max\{\lambda_n, \lambda_k\}$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда y_n ва y'_ν бўлиниш нуқталари учун

$$y_{\nu+1} - y_\nu \le \lambda \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

ва

$$y'_{\nu+1} - y'_\nu \le \lambda \qquad (\nu = 0, 1, \dots, k-1)$$

тенгсизликлар бир вақтда бажарилади. Бу тенгсизликлардан эса қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$S_n - s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1}(y_{\nu+1} - y_\nu)\mu(E_\nu) \le \lambda\sum_{\nu=0}^{n-1}\mu(E_\nu) = \lambda\mu(E),$$

$$S'_k - s'_k = \sum_{\nu=0}^{k-1}(y'_{\nu+1} - y'_\nu)\mu(E'_\nu) \le \lambda\sum_{\nu=0}^{k-1}\mu(E'_\nu) = \lambda\mu(E),$$

бу ерда, s'_k ва S'_k сонлар (йиғиндилар) (3) бўлиниш учун тузилган қуйи ва юқори йиғиндилар.

Энди (2) ва (3) кўринишдаги бўлиниш нуқталарини, яъни y_n ва y'_n бўлиниш нуқталарининг ҳаммасини бирлаштириб, янги бўлиниш нуқталари сифатида оламиз. Бундай бўлинишга мос s''_{n+k} ва S''_{n+k} йиғиндиларни тузамиз. Натижада s_n ва s'_k йиғиндилар камаймайди, шунингдек, S_n ва S'_k йиғиндилар эса ортмайди.

Демак,

$$\begin{aligned} s_n \le s''_{n+k} \le S''_{n+k} \le S_n, \\ s'_k \le s''_{n+k} \le S''_{n+k} \le S'_k \end{aligned} \qquad (4)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Ҳақиқатан, агар $(y_\nu, y_{\nu+1})$ оралиқни бирорта, янги ξ нуқта ёрдамида (y_ν, ξ) ва $(\xi, y_{\nu+1})$ оралиқларга бўлсак, у ҳолда ушбу

$$y_n\mu(E_\nu) \le y_\nu\mu\{E(y_\nu \le f < \xi)\} + \xi\mu\{(\xi \le f < y_{\nu+1})\}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан кўринадики, $s_n \le s''_{n+k}$, яъни қўшимча бўлиниш нуқталари киритилиши натижасида қуйи йиғинди камаймайди.

Худди шунингдек, ушбу

$$y_{\nu+1}\mu(E_n) \ge \xi\mu\{E(y_\nu \le f < \xi)\} + y_{\nu+1}\mu\{(\xi \le f < y_{\nu+1})\}$$

тенгсизликни ҳам ёзишимиз мумкин. Бундан кўринадики, янги нуқта киритиш натижасида S_n йиғиндининг мос ҳади қиймати ортмас экан, демак, S_n юқори йиғиндининг ўзи ҳам ортмайди.

Юқоридаги (4) муносабатлардан кўринадики, (s_n, S_n) ва (s'_k, S'_k) оралиқлар (s''_{n+k}, S''_{n+k}) оралиқдан иборат умумий қисмга эга экан. Демак, s_n, s'_k, S_n ва S'_k сонларнинг ҳаммаси узунлиги $2\lambda\mu(E)$ дан катта бўлмаган оралиқда жойлашган.

Бу ердаги λ мусбат сонни исталганча кичик қилиш мумкинлиги ва математик анализдаги яқинлашиш принципидан $\{s_n\}$ ва $\{S_n\}$ кетма-кетликларнинг умумий лимитга эга эканлиги келиб чиқади.

Демак, таърифга кўра ихтиёрий чегараланган ўлчовли f(x) функциянинг Лебег интеграли ҳар доим мавжуд экан. Теорема исбот бўлди.

Саволлар ва машқлар

1. Дирихле функциясини Лебег маъносида интегралланг.

2. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар} \quad x\neq\frac{1}{n},\\ x^2, & \text{агар} \quad x=\frac{1}{n}\end{cases}$$

функция $[0;1]$ да Риман бўйича интегралланувчи бўлишини кўрсатинг ва уни интегралланг.

3. Олдинги мисолдаги функцияни Лебег маъносида интегралланг.

4. Ўлчови нолга тенг бўлган тўпламда аниқланган ва чегараланган функция Лебег маъносида интегралланувчи ва бу интеграл 0 га тенглигини исботланг.

5. Кесмада Риман маъносида интегралланувчи функция Лебег маъносида ҳам интегралланувчи бўлишини ва бу интеграллар устма-уст тушишини исботланг.

2-§. Лебег интегралининг хоссалари

Чегараланган ўлчовли функциялар учун Лебег интеграли худди Риман интеграли каби қуйидаги хоссаларга эга:

2-теорема. *Агар* E *тўпламда ўлчовли бўлган ва чегараланган* f(x) *функция учун* $m \le f(x) \le M$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда*

$$m\mu(E)\le\int\limits_E f(x)d\mu\le M\mu(E)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исботи. Бу ҳолда тузилган s_n ва S_n йиғиндилар учун

$$m\mu(E)\le s_n\le S_n\le M\mu(E)$$

тенгсизликлар ўринли. Ҳосил қилинган тенгсизликларда тегишли лимитларга ўтилса, юқоридаги муносабатлар келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

1-натижа. *Агар ўлчовли* f(x) *функция* E *тўпламда манфий бўлмаса, у ҳолда унинг бу тўплам бўйича олинган интеграли ҳам манфий бўлмайди, яъни агар* $f(x) \geq 0$ *бўлса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)d\mu \geq 0$$

бўлади.

2-натижа. *Агар* E *тўпламнинг ўлчови нол (яъни* $\mu(E) = 0$) *бўлса, у ҳолда ҳар қандай чегараланган ўлчовли* f(x) *функция учун*

$$\int_E f(x)d\mu = 0$$

бўлади.

3-натижа. *Ихтиёрий* c *ўзгармас сон учун*

$$\int_E cf(x)d\mu = c\int_E f(x)d\mu$$

тенглик ўринли.

3-теорема. *Агар* E, E_i, (i = 1, 2, ...) *ўлчовли тўпламлар бўлиб, улар учун*

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \qquad (E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j)$$

муносабат ўринли ва f(x) *ўлчовли функция* E *тўпламда берилган бўлса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x)d\mu$$

тенглик бажарилади.

Интегралнинг бу хоссаси унинг *тўла аддитивлиги* дейилади.

4-теорема. *Агар ўлчовли* E *тўпламда* $f_1(x)$ *ва* $f_2(x)$ *ўлчовли функциялар берилган бўлса, у ҳолда*

$$\int_E (f_1(x) + f_2(x))d\mu = \int_E f_1(x)d\mu + \int_E f_2(x)d\mu$$

тенглик ўринли.

5-теорема. *Агар ўлчовли* E *тўпламда берилган* f(x) *ва* g(x) *ўлчовли функциялар ўзаро эквивалент бўлса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)d\mu = \int_E g(x)d\mu$$

бўлади.

6-теорема. *Агар ўлчовли* E *тўпламда* f(x) *ва* g(x) *ўлчовли функциялар учун* $f(x) \le g(x)$ *бўлса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)d\mu \le \int_E g(x)d\mu$$

бўлади.

7-теорема. *Қуйидаги тенгсизлик ўринли:*

$$\int_E f(x)d\mu \le \int_E |f(x)|d\mu.$$

8-теорема. *Агар* $f(x) \ge 0$ *ва*

$$\int_E f(x)d\mu = 0$$

бўлса, у ҳолда f(x) *функция* E *тўпламда деярли нолга тенг бўлади.*

Бу тасдиқ ва хулосаларнинг исботи бир оз ўзгартиришлар ва белгилашлар ёрдамида худди Риман интеграли учун берилган исботларга ўхшаш бўлганлиги сабабли келтирмадик. Исботларни мустақил машқ сифатида тиклашга ҳаракат қилинг.

Лебег интегралини ҳисоблашга доир мисоллар.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x - \text{иррационал бўлса,} \\ 1, & x - \text{рационал бўлса,} \end{cases}$$

функция [0;1] да Риман бўйича интегралланувчими? Лебег бўйича-чи? Унинг [0;1] даги интегралини ҳисобланг.

Ечиш. Бу функция [0;1] да Риман бўйича интегралланувчи эмас, чунки унинг узилиш нуқталари тўплами ўлчови нолдан фарқли. [0;1] кесманинг деярли барча нуқталари f(x) Лебег бўйича интегралланувчи, чунки у ўлчовли ва чегараланган. Унинг Лебег интегралини ҳисоблаш учун f(x) ни унга эквивалент бўлган $g(x)=x^3$ функция билан алмаштирамиз. У ҳолда

$$(L)\int_{[0,1]} f(x)dx = (L)\int_{[0,1]} g(x)dx = (L)\int_0^1 x^3dx = (R)\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}.$$

2-мисол. Агар f(x) функция $[a;b]$ да $f'(x)$ ҳосилага эга ва $f'(x)$ $[a;b]$ да чегараланган бўлса, у ҳолда $f'(x)$ нинг $[a;b]$ да Лебег бўйича интегралланувчи бўлишини исботланг.

Ечиш. Шартлардан келиб чиқадики, $f'(x)$ $[a;b]$ да ўлчовли (5-боб 1-§, 2-мисол) ва чегараланган. Маълумки, ўлчовли ва чегараланган функция Лебег бўйича интегралланувчи. Демак, $f'(x)$ функция $[a;b]$ да Лебег бўйича интегралланувчи.

Саволлар ва машқлар

1.
$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{агар } x - \text{иррационал ва } x>\frac{1}{3} \text{ бўлса,} \\ x^3, \text{агар } x - \text{иррационал ва } x<\frac{1}{3} \text{ бўлса,} \\ 0, \text{рационал нуқталарда} \end{cases}$$

функция учун $(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)dx$ ни ҳисобланг.

2. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a;b]$да ўлчовли ва чегараланган бўлсин. Агар ихтиёрий $c\in[a;b]$ учун $(L)\int\limits_{[a,c]} f(x)dx=0$ бўлса, у ҳолда $[a;b]$ да $f(x)$ деярли нолга тенг эканлигини исботланг.

3. Агар чегараланган $f(x)$ функция $[a;b]$да Лебег бўйича интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f^8(x)$ ва $|f(x)|$ функциялар $[a;b]$да Лебег бўйича интегралланувчи бўладими?

3-§. Риман ва Лебег интегралларини солиштириш

Маълумки, Риман интеграли тўғри чизиқда берилган функциялар учун аниқланган.

9-теорема. *Агар* $[a;b]$ *сегментда* $f(x)$ *функция учун Риман интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда бу функция учун Лебег интеграли ҳам мавжуд бўлади ва бу интеграллар ўзаро устма-уст тушади.*

Исботи. Айтайлик, $f(x)$ функциянинг $[a;b]$ сегментда Риман интеграли мавжуд бўлсин. У ҳолда қуйидагилар ўринли:

- $f(x)$ функция чегараланган;
- $f(x)$ функциянинг узилиш нуқталари ўлчови нолга тенг, яъни $f(x)$ функция деярли узлуксиз.

Булардан $f(x)$ нинг $[a;b]$ сегментда ўлчовли эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(x)$ функция чегараланган ва ўлчовли. У ҳолда 1-теоремага кўра $f(x)$ функция учун Лебег интеграли мавжуд.

Энди f(x) функциянинг Риман ва Лебег интеграллари ўзаро тенг бўлишини кўрсатамиз.

Одатдагидек, $[a;b]$ сегментни n та $[x_k;x_{k+1}]$ сегментчаларга бўламиз. Лебег интегралининг 2-теоремада келтирилган хоссасига асосан, шу $[x_k;x_{k+1}]$ сегмент учун

$$m_k \Delta x_k \le (L)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)d\mu \le M_k \Delta x_k$$

тенгсизликни ёзамиз, бу ерда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, m_k ва M_k мос равишда f(x) функциянинг $[x_k;x_{k+1}]$ сегментдаги қуйи ва юқори чегаралари. Бу тенгсизликдан фойдаланиб,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} (L)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)d\mu =$$

$$= (L)\int_a^b f(x)d\mu \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S_n$$

(*)

муносабатга келамиз. Бу ердаги s_n ва S_n лар f(x) функциянинг $[a;b]$ сегмент бўйича тузилган Дарбу йиғиндилари.

Берилишига кўра, f(x) функциянинг $[a;b]$ сегментда Риман интеграли мавжуд. Шу сабабли, таърифга асосан,

$$\lim_{\alpha_n \to 0} s_n = \lim_{\alpha_n \to 0} S_n = (R)\int_a^b f(x)dx \qquad (**)$$

муносабатлар ўринли. Бу ерда $\alpha_n = \max\limits_{0 \le k \le n-1} (\Delta x_k)$.

Юқоридаги (*) ва (**) муносабатлардан бевосита қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)d\mu.$$

Теорема исбот бўлди.

4-§. Содда функциялар учун Лебег интеграли

Энди Лебег интегралини қуришнинг бошқа бир, иккинчи усули билан танишамиз.

5-боб 4-§ да содда функция тушунчасини киритган эдик. Мана шу содда функциялар учун Лебег интеграли тушунчасини берамиз. Шунингдек, ўша ердаги 17-теоремага кўра ихтиёрий ўлчовли функцияга текис яқинлашувчи содда функциялар кетма-кетлиги мавжудлиги интеграл қуришда асосий рол ўйнайди.

Фараз қилайлик, E тўпламнинг бирор ўлчовли A қисмида аниқланган f(x) содда функция берилган бўлиб, $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ унинг барча қийматлари бўлсин.

Ушбу

$$A_n = \{x \in A : f(x) = y_n\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

тўпламларни оламиз. Бу тўпламлар 5-бобдаги 16-теоремага кўра ўлчовли. Демак, $\mu(A_n)$ сон аниқ қийматга эга.

Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n) \qquad (1)$$

қаторни тузамиз.

2-таъриф. Агар f(x) содда функция орқали ҳосил қилинган (1) қатор абсолют яқинлашса, у ҳолда унинг қиймати f(x) функциянинг *Лебег интеграли* дейилади ва у ушбу

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n)$$

кўринишда ёзилади, f(x) функция эса μ ўлчов бўйича A тўпламда *интегралланувчи* ёки *жамланувчи* функция дейилади.

Бу таърифда f(x) содда функциянинг қийматлари бўлган y_n сонлар бир-биридан фарқли деб қаралди. Умуман, содда функцияларнинг Лебег интегралини унинг қийматлари бир-биридан фарқли бўлмаган ҳол учун ҳам аниқлаш мумкин.

10-теорема. *Агар* $A = \bigcup_k B_k, B_k \cap B_j = \varnothing, k \neq 1, k = 1, 2, \ldots$ *бўлиб,* f(x) *функция ҳар бир* B_k *тўпламда ўзгармас* c_k *сонга тенг бўлса, у ҳолда*

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k) \qquad (2)$$

тенглик ўринли бўлади ва f(x) *функциянинг интегралланувчи бўлиши учун ўнг томондаги қаторнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исботи. Содда функциянинг бир-биридан фарқли қийматларини $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ орқали белгиласак, $A_n = \{x \in A:$

$f(x)=y_n\}$ тўплам учун $A_n = \bigcup_{c_k=y_n} B_k$ муносабатга ва $\mu(A_n) = \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k)$ тенгликка эга бўламиз. Булардан (1) ва (2) қаторларнинг тенглиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Содда функциялар учун аниқланган Лебег интеграли ҳам қуйидаги хоссаларга эга бўлиши осон кўрсатилади:

A. $\int\limits_A [f_1(x)+f_2(x)]d\mu = \int\limits_A f_1(x)d\mu + \int\limits_A f_2(x)d\mu$.

B. Ихтиёрий k ўзгармас сон учун

$$\int\limits_A kf(x)d\mu = k\int\limits_A f(x)d\mu$$

тенглик ўринли.

C. Ўлчовли A тўпламда чегараланган f(x) функция интегралланувчи, қолаверса, агар A да $|f(x)| \le M$ бўлса, у ҳолда

$$\left|\int\limits_A f(x)d\mu\right| \le M\mu(A)$$

бўлади.

Бу хоссаларнинг исботи содда функциялар ёрдамида тузилган (1) каби қаторлар яқинлашувчи бўлишидан келиб чиқади.

Саволлар ва машқлар

1. $y = [x]$ функцияни [3,13] тўплам бўйича интегралланг. Бу ерда $[x]$- белги x нинг бутун қисми.

2. [0,13) да $y = \frac{1}{2^{[x]}}$ функцияни интегралланг.

3. [0,17) да $y=\sin[x]$ функция интегралланувчи бўладими? Агар интегралланувчи бўлса, у ҳолда унинг интегралини ҳисобланг.

4. Ихтиёрий n учун

$$f(x) = \frac{1}{n+2}, \text{ агар } \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \text{ бўлса,}$$

функция [0;1] оралиқда интегралланувчи эканини кўрсатинг ва бу интегрални ҳисобланг.

5-§. Умумий ҳол учун Лебег интегралининг таърифи (2-усул)

Бу ерда, аввалги 3-§ да содда функциялар учун киритилган интеграл ёрдамида ўлчовли функциялар учун Лебег интеграли тушунчасини аниқлаймиз.

Айтайлик, X бирор тўплам ва F ундаги қисм тўпламлар σ-алгебраси, μ эса F да берилган σ - аддитив ўлчов бўлсин.

11-теорема. A *тўпламда интегралланувчи, содда функциялардан иборат* $\{f_n(x)\}$ *кетма-кетлик текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ушбу*

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu$$

лимит мавжуд.

Исботи. Текис яқинлашиш хоссасидан A тўпламда текис яқинлашувчи ихтиёрий $\{f_n(x)\}$ содда функциялар кетма-кетлиги учун $n, m \to\infty$ да ушбу

$$\sup_{x\in A}|f_n(x) - f_m(x)| \to 0$$

муносабат ўринли бўлиши келиб чиқади.

Содда функциялар учун Лебег интегралининг C_0 хоссасига кўра,

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f_m(x)d\mu\right| \le \mu(A)\sup_{x\in A}|f_n(x) - f_m(x)|$$

тенгсизлик ўринли.

Бундан ва юқоридаги тенгсизликдан

$$I_n = \int_A f_n(x)d\mu$$

сонлар кетма-кетлигининг фундаменталлиги келиб чиқади. Демак, I_n кетма-кетлик яқинлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

12-теорема. *Агар* $\{f_n(x)\}$ *ва* $\{g_n(x)\}$ *кетма-кетликлар* A *тўпламда интегралланувчи бўлган содда функциялардан иборат бўлиб, шу тўпламда* f(x) *функцияга текис яқинлашса, у ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)d\mu$$

бўлади.

Исботи. Айтайлик, $\{f_n(x)\}$ ва $\{g_n(x)\}$ содда функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга текис яқинлашсин. У ҳолда $n\to\infty$ да

$$\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \quad \text{ва} \quad \sup_{x\in A}|g_n(x)-f(x)|\to 0 \qquad (*)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Булардан ва содда функциялар учун Лебег интегралининг А, В, С хоссаларига кўра,

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A g_n(x)d\mu\right| = \left|\int_A \{[f_n(x)-f(x)]-[g_n(x)-\right.$$

$$\left.-f(x)]\}d\mu\right| \le \left|\int_A [f_n(x)-f(x)]d\mu\right| + \left|\int_A [g_n(x)-f(x)]d\mu\right| \le$$

$$\le \mu(A)\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)| + \mu(A)\sup_{x\in A}|g_n(x)-f(x)|$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан ва (*) муносабатдан

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n(x)d\mu$$

тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3-таъриф. Ушбу

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu$$

лимит А тўпламда f(x) функцияга текис яқинлашувчи $\{f_n(x)\}$ содда функциялар кетма-кетлигининг танланишига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимитнинг I қиймати f(x) функциянинг А тўпламда μ ўлчов бўйича *Лебег интеграли* дейилади ва

$$\int_A f(x)d\mu$$

кўринишда белгиланади.

Агар f(x) функциянинг μ ўлчов бўйича А тўпламда Лебег интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда бу функция *интегралланувчи* ёки *жамланувчи* функция дейилади.

13-теорема. *Агар* $\varphi(x)$ *функция* E *тўпламда интегралланувчи бўлиб,* $f(x)$ *ўлчовли функция учун* $|f(x)| \leq \varphi(x)$ *тенгсизлик ихтиёрий* $x \in E$ *да бажарилса, у ҳолда* $f(x)$ *функция ҳам* E *да интегралланувчи бўлади ва*

$$\int_E |f(x)| d\mu \leq \int_E \varphi(x) d\mu$$

муносабат ўринли.

Бу теореманинг исботини мустақил машқ сифатида ўқувчиларнинг ўзига қолдирамиз.

VII БОБ. ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИ

Ушбу бобда интегралланувчи ва квадрати билан интегралланувчи функциялар тўплами метрик фазо бўлиши кўрсатилган.

1-§. Интеграл белгиси остида лимитга ўтиш

Риман интеграли билан боғлиқ масалаларни ечишда баъзан интеграл белгиси остида лимитга ўтишга доир бир қанча хулоса ва тасдиқлардан фойдаланилади. Лебег интеграли учун ҳам шундай хоссаларнинг айримлари ўринли бўлади.

Айтайлик, X ўлчовли тўплам ва μ ундаги ўлчов бўлсин. X нинг бирор A ўлчовли қисм тўпламини оламиз.

1-теорема. *Айтайлик, $\varphi(x)$ функция A да интегралланувчи бўлсин. Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги A тўпламда $f(x)$ функцияга яқинлашса ва барча $x \in A$, $n \in N$ ларда*

$$|f_n(x)| \le \varphi(x)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда лимит функция f ҳам A интегралланувчи бўлади ва

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$$

тенглик бажарилади.

Исботи. Теорема шартидан f(x) учун $|f(x)| \le \varphi(x)$ бўлиши келиб чиқади. Шунинг учун 6-бобдаги 6-теоремага кўра, f(x) ҳам интегралланувчи бўлади.

6-бобдаги 2-теоремага асосан, ихтиёрий кичик $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сони топиладики, $\mu(B)<\delta$ шартни қаноатлантирувчи B ўлчовли тўплам учун

$$\int_B \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1}$$

бўлади.

Егоров теоремасига кўра, В ни шундай танлаш мумкинки, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $A\setminus B$ тўпламда текис яқинлашади. Демак, шундай бир N номер топилиб, барча $n \geq N$ ва $x \in A\setminus B$ учун

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(A \setminus B)}$$

муносабат ўринли бўлади. У ҳолда $|f(x)| \leq \varphi(x)$, $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ бўлгани учун

$$\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu = \int_{A\setminus B}(f(x) - f_n(x))d\mu + \int_B f(x)d\mu - \int_B f_n(x)d\mu$$

тенгликка ва (1) га кўра

$$\left|\int_A f\ (x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теоремаларни исботлаш мумкин:

2-теорема. *Айтайлик, А тўпламда берилган $\{f_n(x)\}$ интегралланувчи функциялар кетма-кетлиги*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f_n(x) \leq \ldots$$

шартни қаноатлантирсин ва бирор К сони учун

$$\int_A f_n(x)d\mu \leq K$$

тенгсизлик барча n ларда ўринли бўлсин. У ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга деярли яқинлашади, f(x) ҳам А тўпламда интегралланувчи бўлади ва

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$$

тенглик бажарилади.

3-теорема. *Агар $\{f_n(x)\}$ мусбат ўлчовли функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга деярли яқинлашса ва бирор К сони учун*

$$\int_A f_n(x)d\mu \leq K$$

тенгсизлик барча n ларда ўринли бўлса, у ҳолда f(x) ҳам А тўпламда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_A f(x)d\mu \leq K$$

шарт бажарилади.

2-§. Интегралланувчи функциялар метрик фазоси(L_1 фазо)

Айтайлик, X ўлчовли тўплам ва μ ундаги ўлчов бўлсин. Биз, асосан $\mu(X) < \infty$, яъни X тўпламнинг ўлчови чекли сон бўлган ҳолни ўрганамиз.

X тўпламда интегралланувчи барча функциялар тўпламини (синфини) $L_1(X, \mu)$ орқали белгилаймиз.

Лебег интеграли хоссаларидан интегралланувчи функциялар йиғиндиси ва бирор сонга кўпайтмаси ҳам интегралланувчи бўлиши келиб чиқади. Булар қуйидагича ёзилади:

$$f(x),\ g(x) \in L_1(X, \mu) \Rightarrow f(x)+g(x) \in L_1(X, \mu),$$

$$\alpha \text{ ихтиёрий сон, } f(x) \in L_1(X, \mu) \Rightarrow \alpha f(x) \in L_1(X, \mu).$$

Демак, $L_1(X, \mu)$ тўплам чизиқли фазо ташкил қилади.

Изоҳ. Функциялар тенг деганда, $f(x)=g(x)$ тенглик деярли барча x лар учун ўринли бўлган ҳол тушунилишини эслатиб ўтамиз:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \mu\{\, x : f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Энди, $L_1(X, \mu)$ тўпламда масофа тушунчаси қуйидагича киритилади.

4-теорема. *Ихтиёрий $f(x)$, $g(x) \in L_1(X, \mu)$ функциялар учун*

$$\rho(f,g) = \int_X |f(x) - g(x)|\,d\mu \qquad (2)$$

формула $L_1(X, \mu)$ да метрика аниқлайди.

Исботи. Метрика аксиомалари бажарилишини текширамиз:

1) $\rho(f,g) \geq 0$ экани равшан.

$$\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow \int_X |f(x) - g(x)|\,d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

2) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ экани равшан.

3) Ихтиёрий $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in L_1(X, \mu)$ учун

$$\rho(f,g) = \int_X |f(x) - g(x)|\,d\mu = \int_X |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|\,d\mu \leq$$

$$\leq \int_X |f(x) - h(x)|\,d\mu + \int_X |h(x) - g(x)|\,d\mu = \rho(f,h) + \rho(h,g).$$

1-таъриф. Чизиқли фазо $L_1(X, \mu)$ юқоридаги (2) метрика билан биргаликда L_1 *фазо* дейилади.

Шу (2) метрика ёрдамида аниқланган яқинлашиш *ўртача яқинлашиш* деб юритилади.

5-теорема. *L_1 фазо тўла метрик фазо бўлади.*

Исботи. Айтайлик, L_1 фазода $\{f_n(x)\}$ фундаментал кетма-кетлик берилган бўлсин. Яъни $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик учун n, m →∞ да

$$\rho(f_n, f_m) \to 0, \quad \text{яъни} \quad \int_X |f_n(x) - g_m(x)| d\mu \to 0$$

бўлсин. У ҳолда индексларнинг шундай бир $n_1 < n_2 < \ldots$ ўсувчи қисмий кетма-кетлиги топиладики,

$$\rho(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) = \int_X |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| d\mu < \frac{1}{2^k}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан ва 2-теоремадан

$$|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots$$

қаторнинг X да деярли яқинлашувчилиги келиб чиқади. Шунинг учун

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \ldots$$

қатор ҳам X да бирор f(x) функцияга деярли яқинлашади:

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Демак, L_1 фазода фундаментал бўлган кетма-кетлик деярли яқинлашувчи қисмий кетма-кетликка эга. Мана шу $\{f_{n_k}(x)\}$ қисмий кетма-кетлик f(x) га ўртача яқинлашишини кўрсатамиз.

Берилган $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлганлиги учун, қандай кичик ε > 0 олмайлик, етарлича катта p ва q лар учун

$$\int_X |f_{n_p}(x) - f_{n_q}(x)| d\mu < \varepsilon$$

бўлади. 3-теоремага асосланиб, бу тенгсизликда q бўйича интеграл остида лимитга ўтамиз:

$$\int_X |f_{n_p}(x) - f(x)| d\mu \le \varepsilon.$$

Бундан $f(x) \in L_1(X, \mu)$ ва $f_{n_k}(x) \to f(x)$ келиб чиiади.

Маълумки, метрик фазода фундаментал кетма-кетлик бирор лимитга яқинлашувчи қисм кетма-кетликка эга бўлса, у ҳолда кетма-кетликнинг ўзи ҳам шу лимитга яқинлашади.

Демак, L_1 фазодаги ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик L_1 да яқинлашувчи экан. Теорема исбот бўлди.

3-§. Квадрати билан интегралланувчи функциялар метрик фазоси(L_2 фазо)

Айтайлик, X ўлчовли тўплам ва μ ундаги ўлчов ва $\mu(X)<\infty$ бўлсин. Функция берилган деганда X да аниқланган ўлчовли функцияларни тушунамиз.

2-таъриф. Агар X да берилган f(x) функция учун

$$\int_X f^2(x)d\mu < \infty$$

бўлса, у ҳолда f(x) функция *квадрати билан интегралланувчи* функция дейилади.

Квадрати билан интегралланувчи функциялар тўпламини (синфини) $L_2(X, \mu)$ орқали белгилаймиз.

6-теорема. *$L_2(X, \mu)$ тўплам чизиқли фазо бўлади.*

Исботи. Айтайлик, $f(x), g(x) \in L_2(X, \mu)$ бўлсин. У ҳолда

$$(f(x) + g(x))^2 \le 2(f^2(x)+g^2(x))$$

тенгсизликдан

$$(f(x)+g(x))^2 \le 2(\int_X f^2(x)d\mu + \int_X g^2(x)d\mu) < \infty$$

келиб чиқади, яъни $f(x)+g(x) \in L_2(X, \mu)$.

Худди шунингдек, ихтиёрий α сон учун

$$\int_X (\alpha f(x))^2 d\mu = \alpha^2 \int_X f^2(x)d\mu < \infty$$

муносабатдан $\alpha f(x) \in L_2(X, \mu)$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Энди, $L_2(X,\mu)$ да масофа тушунчасини аниқлаймиз.

Дастлаб квадрати билан интегралланувчи функциялар интегралига алоқадор ва келгуси хулосаларда ишлатиладиган баъзи тенгсизликларни кўриб чиқамиз.

7-теорема. *Ихтиёрий $f(x), g(x) \in L_2(X, \mu)$ функциялар учун Коши-Буняковский тенгсизлиги деб аталадиган*

$$\left(\int_X f(x)g(x)d\mu\right)^2 \le \int_X f^2(x)d\mu \int_X g^2(x)d\mu \qquad (3)$$

тенгсизлик ва

$$\left(\int_X (f(x)+g(x))^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_X f^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X g^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

тенгсизлик ўринли.

Исботи. Ихтиёрий λ сони учун

$$\int_X (f(x)+\lambda g(x))^2 d\mu \ge 0$$

бўлиши равшан. Бундан

$$\int_X f^2(x)d\mu + 2\lambda \int_X f(x)g(x)d\mu + \lambda^2 \int_X g^2(x)d\mu \ge 0$$

келиб чиқади. Маълумки, λ га нисбатан $a\lambda^2+2b\lambda+c$ квадрат учҳад қийматлари мусбат бўлиши учун унинг дискриминанти манфий бўлиши керак: $D=4b^2 - 4ac \le 0$. Демак, $b^2 \le ac$. Юқоридаги тенгсизликда

$$\int_X f^2(x)d\mu = c, \quad \int_X f(x)g(x)d\mu = b, \quad \int_X g^2(x)d\mu = a$$

эканини эътиборга олсак, (3) тенгсизлик ҳосил бўлади.

Энди, (4) тенгсизликни исботлаш қийинчилик туғдирмайди:

$$\int_X (f(x)+g(x))^2 d\mu = \int_X f^2(x)d\mu + 2\int_X f(x)g(x)d\mu + \int_X g^2(x)d\mu \le$$

$$\le \left(\int_X f^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2} + 2\left(\int_X f^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_X g^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X g^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2} =$$

$$= \left(\left(\int_X f^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X g^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 .$$

Теорема исбот бўлди.

Агар (3) тенгсизликда $g(x)\equiv 1$ деб олсак,

$$\left(\int_X f(x)d\mu\right)^2 \le \mu(X)\int_X f^2(x)d\mu \qquad (5)$$

муносабатга эга бўламиз.

8-теорема. *Ихтиёрий $f(x)$, $g(x) \in L_2(X, \mu)$ функциялар учун*

$$\rho(f,g) = \left(\int_X (f(x) - g(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

формула метрика аниқлайди.

Исботи. Метрика аксиомалари бажарилишини текширамиз:

1) $\rho(f,g) \geq 0$ экани равшан.

$$\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow \int_X (f(x) - g(x))^2 d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

2) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ экани равшан.

3) Метриканинг учбурчак аксиомаси (4) тенгсизликдан келиб чиқади. Ихтиёрий $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in L_1(X, \mu)$ учун

$$\rho(f,g) = \left(\int_X (f(x) - g(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X ([f(x) - h(x)] + [h(x) - g(x)])^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\int_X (f(x) - h(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X (h(x) - g(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \rho(f,h) + \rho(h,g).$$

3-таъриф. Чизиқли фазо $L_2(X, \mu)$, юқоридаги (6) метрика билан биргаликда L_2 *фазо* дейилади.

Шу (6) метрика ёрдамида аниқланган яқинлашиш *ўртача квадратик яқинлашиш* деб юритилади.

9-теорема. *L_2 фазо тўла метрик фазо бўлади.*

Исботи. Айтайлик, L_2 фазода $\{f_n(x)\}$ фундаментал кетма-кетлик берилган бўлсин. Яъни $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик учун $n, m \to \infty$ да

$$\left(\int_X (f_n(x) - f_m(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

бўлсин. У ҳолда (5) тенгсизликка асосан

$$\int_X |f_n(x) - f_m(x)| d\mu \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{2}} \left(\int_X (f_n(x) - f_m(x))^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

муносабат ўринли бўлади. Демак, берилган $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик L_1 фазода ҳам фундаментал бўлар экан.

Худди L_1 фазонинг тўлалигини исботлаганимиздаги каби мулоҳазалар юритиб, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликдан $\{f_{n_k}(x)\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб оламиз ва у бирор f(x) функцияга деярли яқинлашади.

Энди бу қисм кетма-кетликнинг етарлича катта k ва l ҳадлари учун ўринли бўлган

$$\int_X \left(f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)\right)^2 d\mu < \varepsilon$$

тенгсизликда 3-теоремадан фойдаланиб $l \to \infty$ лимитга ўтамиз.

Натижада

$$\int_X \left(f_{n_k}(x) - f(x)\right)^2 d\mu \le \varepsilon$$

муносабат ҳосил қилинади. Бундан $f(x) \in L_2$ ва $f_{n_k} \to f$ келиб чиқади.

Метрик фазода фундаментал кетма-кетлик бирор лимитга яқинлашувчи қисм кетма-кетликка эга бўлса, у ҳолда кетма-кетликнинг ўзи ҳам шу лимитга яқинлашади.

Демак, L_2 фазодаги ихтиёрий фундаментал кетма-кетлик L_2 да яқинлашувчи экан. Теорема исбот бўлди.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Саримсоқов Т. А. Функционал анализ курси. Т.: «Ўқитувчи», 1986.-400 б.

2. Саримсоқов Т.А. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси. Т.: «Ўзбекистон», 1993.- 340 б.

3. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: " Наука ", 1977.

4. Виленкин Н.Я., Балк М.Б., Петров В.А. Математический анализ. Мощность. Метрика. Интеграл. М.: «Просвещение», 1980.-144 с.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: «Наука», 1989.-624 с.

6. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М, 1974.

7. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. М.: «Просвещение», 1981.

8. Петров В.А., Виленкин Н.Я., Граев М.И. Элементы функционального анализа в задачах. М.: «Просвещение», 1978.-128 с.

Шавкат Аюпов, Мусулмон Бердиқулов,
Рискелди Турғунбоев

ФУНКЦИЯЛАР НАЗАРИЯСИ

Тошкент—2004

Нашр учун масъул	*Н. Халилов*
Таҳририят мудири	*М.Миркомилов*
Муҳаррир	*Д. Саъдуллаева*
Мусаҳҳиҳа	*М. Усмонова*
Компьютерда саҳифаловчи	*Ш. Хазратова*

Босишга рухсат этилди 15.04. 2004. Бичими 84х108$^{1}/_{32}$. Офсет қоғози. Шартли босма табоғи 9,25. Нашр табоғи 9,0. Адади 1000. Буюртма 36.

"ЎАЖБНТ" Маркази, 700078, Тошкент, Мустақиллик майдони, 5

Андоза нусхаси Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги "ЎАЖБНТ" Марказининг компьютер бўлимида тайёрланди

«Хега-Принт» босмахонасида чоп этилди.
Сирғали 17, 52^ уй