



С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

517 4/5459
H 64 Нидерландский
деревянный матов
Анализ
H. 1989 D-35

217
Н-64

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для слушателей подготовительных отделений вузов*

УДК 517.51



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.161

Н 64

УДК 517 (075.4)

Никольский С. М. Элементы математического анализа: Учеб. пособие.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— С. 224.— ISBN 5-02-013957-2.

Математический анализ в этой книге изучается на геометрической и физической основе. Непрерывный график и движение сами по себе служат основой для фундаментальных выводов. Излагаются дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения.

Последняя глава посвящена действительному числу, изучаемому на базе представления его в виде десятичной (вообще бесконечной) дроби.

Первое издание вышло в 1981 г. Для второго издания книга переработана и дополнена.

Для школьников и преподавателей средних школ. Может оказаться полезной учащимся техникумов и для самообразования.

Ил. 122.

Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой член-корреспондент АН СССР С. И. Похожаев);

доктор физико-математических наук профессор Г. Н. Яковлев

Н $\frac{1602070000-069}{053 (02)-89}$ 57-89

ISBN 5-02-013957-2

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1981; с изменениями, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	6
Из предисловия к первому изданию	8
Глава 1. Функция	9
§ 1.1. Чем занимается математический анализ?	9
§ 1.2. Обозначение множества чисел	9
§ 1.3. Примеры функций	10
§ 1.4. Определение понятия функции	11
§ 1.5. Задание функции формулой	12
§ 1.6. Задание функции графиком	14
§ 1.7. Задание функции таблицей	16
§ 1.8. Сложная функция	17
§ 1.9. Свойства некоторых функций	18
Глава 2. Тригонометрические функции	24
§ 2.1. Числовая окружность	24
§ 2.2. Функция $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$	28
§ 2.3. Графики функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$	32
§ 2.4. Функции $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$	35
§ 2.5. Ось тангенсов и ось котангенсов	37
§ 2.6. Графики функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$	40
§ 2.7. Арксинус	43
§ 2.8. Арккосинус	46
§ 2.9. Арктангенс и арккотангенс	49
§ 2.10. Обратная функция	52
§ 2.11. Функции $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$	54
§ 2.12. Примеры решений тригонометрических уравнений	57
§ 2.13. Список основных формул тригонометрии	60
Глава 3. Предел	63
§ 3.1. Предел последовательности	63
§ 3.2. Бесконечно большая величина	66
§ 3.3. Действия с пределами	66
§ 3.4. Предел $\frac{\sin x}{x}$	70
§ 3.5. Предел функции	72
§ 3.6. Действия с пределами функций	74
§ 3.7. Непрерывность функции	77
§ 3.8. Элементарные функции	81
§ 3.9. Непрерывность сложной функции	81
§ 3.10. Разрывные функции	82
Глава 4. Показательная, логарифмическая и общая степенная функции	86
§ 4.1. Свойства функции a^x	86

§ 4.2.	a^x для целых и рациональных x	87
§ 4.3.	a^x для действительных x	89
§ 4.4.	Неравенство Бернулли	90
§ 4.5.	Число e	92
§ 4.6.	Логарифмическая функция	96
§ 4.7.	Логарифм с основанием 10	102
§ 4.8.	Степенная функция	104
Глава 5.	Производная	107
§ 5.1.	Мгновенная скорость	107
§ 5.2.	Касательная к кривой и сила тока	109
§ 5.3.	Производная	111
§ 5.4.	Непрерывность функции, имеющей производную	112
§ 5.5.	Формулы дифференцирования	114
§ 5.6.	Производная от показательной функции	116
§ 5.7.	Производная от логарифмической функции	117
§ 5.8.	Производная от произведения и частного	117
§ 5.9.	Производная от $\lg x$ и $\operatorname{ctg} x$	118
§ 5.10.	Задачи	118
§ 5.11.	Производная сложной функции	119
§ 5.12.	Производная обратной функции	121
Глава 6.	Применения производной	124
§ 6.1.	Максимум и минимум функции	124
§ 6.2.	Возрастание и убывание функции	130
§ 6.3.	Выпуклость и вогнутость	131
§ 6.4.	Черчение схематических графиков	134
§ 6.5.	Теоремы о среднем	137
Глава 7.	Интегральное исчисление	141
§ 7.1.	Первообразная	141
§ 7.2.	Неопределенный интеграл	142
§ 7.3.	Замена переменной	144
§ 7.4.	Проблема интегрирования элементарных функций	146
§ 7.5.	Площадь криволинейной фигуры. Определенный интеграл	147
§ 7.6.	Работа. Масса стержня	149
§ 7.7.	Теорема Ньютона—Лейбница	150
§ 7.8.	Доказательство формулы Ньютона—Лейбница	153
§ 7.9.	Свойства определенных интегралов	154
§ 7.10.	Площадь круга	156
§ 7.11.	Длина окружности	157
§ 7.12.	Объем тела вращения	158
§ 7.13.	Объем шара	159
§ 7.14.	Площадь поверхности шара	159
§ 7.15.	Работа электрического заряда	160
§ 7.16.	Давление жидкости на стенку	161
§ 7.17.	Центр тяжести	162
Глава 8.	Дифференциальные уравнения	165
§ 8.1.	Охлаждение тела	165
§ 8.2.	Нахождение закона движения тела по его скорости	166
§ 8.3.	Равномерно ускоренное движение	167
§ 8.4.	Колебание пружины	168

Глава 9. Формула Тейлора	172
§ 9.1. Понятие формулы Тейлора	172
§ 9.2. Примеры	174
Глава 10. Действительное число	176
§ 10.1. Десятичные разложения рациональных чисел . .	176
§ 10.2. Десятичные разложения иррациональных чисел .	179
§ 10.3. Сравнение действительных чисел	181
§ 10.4. Десятичное приближение действительного числа	182
§ 10.5. Числовая прямая	183
§ 10.6. Принцип вложенных отрезков	187
§ 10.7. Арифметические действия. Оценки приближений	187
§ 10.8. Свойства действительных чисел	190
Глава 11. Формула бинома Ньютона. Комбинаторика . . .	192
§ 11.1. Число C_n^k	192
§ 11.2. Формула бинома Ньютона. Метод индукции . . .	193
§ 11.3. Перестановки	195
§ 11.4. Размещения	196
§ 11.5. Сочетания	197
§ 11.6. Связь с биномиальными коэффициентами. Другой вывод формулы бинома Ньютона	199
§ 11.7. Вероятность события	199
Глава 12. Комплексные числа	203
§ 12.1. Понятие комплексного числа	203
§ 12.2. Уравнение $x^2=c$	205
§ 12.3. Применение комплексных чисел в квадратных уравнениях	207
§ 12.4. Геометрическое изображение комплексных чисел	209
§ 12.5. Показательная форма комплексного числа . . .	210
Глава 13. Приближенные вычисления	214
§ 13.1. Понятие приближения	214
§ 13.2. Абсолютная погрешность	215
§ 13.3. Относительная погрешность	216
§ 13.4. Вычисление произведения и частного	217
§ 13.5. Обоснование правила	219
Дополнительные упражнения	221

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Моя книга «Элементы математического анализа», изданная в 1981 г. массовым тиражом, была быстро распродана, и теперь видно, что ее целесообразно выпустить вторым изданием. Для второго издания я решил ее переработать на основании опыта, который приобрел в последние годы, занимаясь школьными учебниками.

Изменения направлены на то, чтобы книгу свободно мог читать всякий, кто знает математику в пределах 8 классов десятилетней школы. Я проследил за тем, чтобы в новом издании был охвачен программный материал 9 и 10 классов. Этот материал исчерпывают первые восемь глав настоящей книги.

Появилась необходимость ввести главу «Тригонометрические функции». Тригонометрию хотя и изучают в 8 классе, но без введения тригонометрических функций, тем более без обратных тригонометрических функций.

Во втором издании читатель также обнаружит некоторые методические изменения в изложении материала о показательной функции. В школе показательную функцию проходят в 10 классе. Определение функции a^x для любых действительных x — трудный вопрос. Автор много размышлял над тем, как лучше преподнести его школьнику, чтобы было и элементарно, и научно.

Изложение понятий собственно анализа — предела, производной, интеграла — осталось прежним, как в первом издании. Понятие предела дается на интуитивной основе, выясняется на примерах, без формальных определений. Без доказательства формулируются основные свойства пределов. Такие факты как существование максимума у непрерывной на отрезке функции или существование и единственность точки пересечения непрерывного монотонного графика с прямой, параллельной оси абсцисс, обнаруживаются из рассмотрения графика. Но и при этом можно изложить вопрос совсем элементарно или провести формальные рассуждения. Последние даны

петитом. Добавлена глава о дифференциальных уравнениях.

Остальные пять глав (9—13) могут быть использованы для дополнительного изучения в школах с физико-математическим уклоном. Комплексные числа, бинном Ньютона, комбинаторика, приближенные вычисления — все это совершенно необходимые темы. Неплохо подвести также итог своих знаний о действительных числах. Кстати, надо сказать, что о них школьник получает довольно-таки разрозненные сведения.

Автор придает значение главе «Формула Тейлора», дающей важную точку зрения на элементарные функции. В настоящем издании вывод этой формулы приведен в более доходчивой форме, чем в первом издании. Я благодарю академика А. Д. Александрова, обратившего мое внимание на то, что в первом издании изложение этого вопроса трудное.

Эта книга будет полезна не только школьникам, но и учащимся ПТУ, техникумов и студентам вузов с очень краткой программой по математике, учителям и вообще для общего образования.

Считаю своим долгом выразить благодарность А. В. Шевкину, который помог мне написать главу «Тригонометрические функции» и перераспределить главу «Функции».

С. М. Никольский

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Я имею опыт преподавания математического анализа на элементарной основе. В тридцатых годах я преподавал в технических вузах Днепропетровска, где слушателями были в основном рабфаковцы. Сейчас я делюсь своим опытом.

Эту книгу порекомендовали мне написать академик И. М. Виноградов, академик К. К. Марджанишвили и член-корреспондент АН СССР Е. Ф. Мищенко. Они ознакомились с написанной рукописью и дали весьма ценные советы. Рукопись была прочитана подробно проф. С. И. Адяном, проф. А. А. Карацубой и официальными рецензентами издательства «Наука» проф. А. В. Ефимовым и проф. М. К. Потаповым. Они дали много ценных советов. Полезные замечания по рукописи я получил также от профессора С. А. Теляковского и Главного управления школ Министерства просвещения СССР, где она изучалась. Наконец, главу «Математический анализ» с дополнением к ней подробно изучил академик Л. С. Понтрягин. Ряд его замечаний я учел, в частности, дополнив рукопись (петитом) формальными доказательствами некоторых положений, объясненных из наглядных соображений.

Всем указанным лицам и Главному управлению школ Министерства просвещения СССР я выражаю глубокую благодарность.

Наконец, я отмечаю, что Комиссия по реформе математического образования в средней школе при Бюро отделения математики Академии наук СССР под председательством академика И. М. Виноградова рекомендовала Министерству просвещения СССР допустить данную книгу как учебное пособие для учащихся средних школ.

Сейчас, когда книга находится в корректуре, стало известно, что она рекомендована в качестве пособия для учителей. Все же я не изменяю начало своего предисловия, потому что убежден, что эта книга вполне доступна школьникам.

§ 1.1. Чем занимается математический анализ?

Название «математический анализ» — сокращенное видоизменение старого названия «анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин. Функции мы всюду встречаем в практике, функции описывают движения, физические явления. Они встречаются в технике, геометрии, механике, химии, экономике. Изучая функции, мы изучаем конкретные явления, которые они описывают. Одна и та же функция может описывать явления совершенно различной природы и тем самым объединять в себе закономерности, которым эти явления подчиняются.

Математический анализ является средством изучения функций, но тогда и средством изучения окружающих нас явлений. Важными понятиями математического анализа являются предел и непрерывность функции, производная и интеграл. В этой главе читатель получит начальные сведения об этих понятиях, их связи и их приложениях.

§ 1.2. Обозначение некоторых множеств чисел

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными числами* (см. гл. 10).

Пусть a и b — действительные числа (точки числовой прямой), удовлетворяющие неравенству $a < b$.

Отрезком $[a, b]$ называется множество чисел (точек) x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$. *Интервалом* (a, b) называется множество чисел x , удовлетворяющих

неравенствам $a < x < b$. *Интервалом* $(-\infty, +\infty)$ называется множество всех действительных чисел x (точек числовой прямой). Говорят еще, что это есть множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < +\infty$. *Интервалом* $(a, +\infty)$ называется множество чисел x , больших числа a , или, как говорят, множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < +\infty$. *Интервалом* $(-\infty, b)$ называется множество чисел x , меньших числа b , или, как говорят, множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < b$.

Полуинтервалом $[a, b)$ или $(a, b]$ называется множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$ соответственно.

Отрезок, интервал или полуинтервал мы будем называть еще *промежутком*.

Нам встретятся и другие множества (совокупности) чисел, которые не обязательно имеют специальные названия. Их обозначают разными буквами: $E, A, B, \dots$

§ 1.3. Примеры функций

В окружающей нас действительности мы всюду наблюдаем явления, органически связанные между собой. Нередко эти явления сопровождаются связями между теми или иными величинами, заключающимися в том, что одна величина, вообще говоря переменная, зависит в силу определенного закона от другой переменной величины. В таких случаях говорят, что первая величина есть *функция* второй. При этом вторую величину называют *независимой переменной* или *аргументом*, а первую — *зависимой*.

Приведем примеры таких функций.

1. Пусть в начальный момент времени $t=0$ материальная точка находилась в покое, а затем (при $t > 0$) начала падать под воздействием силы тяжести. Тогда путь s , пройденный точкой за время t , выразится формулой

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести. В данном случае мы имеем дело с двумя переменными величинами t и s . Каждому значению времени t в силу закона, выраженного формулой (1), приводится в соответствие определенное значение s . Этим определена функция $s = \frac{gt^2}{2}$ на множестве неотрицательных значений t .

2. Закон Бойля—Мариотта устанавливает связь между давлением и объемом данного количества газа при постоянной температуре:

$$p = \frac{c}{v} \quad (v > 0), \quad (2)$$

где c —константа, v —объем, занимаемый данным количеством газа, p —его давление. Здесь p является функцией v и однозначно вычисляется по формуле (2).

3. Площадь круга радиуса r есть величина S , зависящая от r . S вычисляется по формуле

$$S = \pi r^2 \quad (r > 0).$$

Если изменять r , то соответственно будет изменяться S . Поскольку здесь речь идет о площади круга, то данная функция определена на множестве положительных чисел r .

§ 1.4. Определение понятия функции

Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие одно число y ; тогда говорят, что на E задана функция, которую записывают так:

$$y = f(x).$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле*). Множество E называют областью задания или областью определения функции $f(x)$. Говорят также, что задана независимая переменная x , которая может принимать частные значения x из множества E . Каждому такому значению x в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y , называемой функцией аргумента x .

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество точек x действительной прямой—область определения функции — и закон, в силу которого каждой точке множества E приводится в соответствие число $y = f(x)$. Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводя-

*) Н. И. Лобачевский (1792—1856)—русский математик, создатель неевклидовой геометрии. П. Г. Дирихле (1805—1859)—немецкий математик.

щем в соответствие каждому числу x из E некоторое число y , то достаточно ее обозначить одной буквой f . Символ $f(x)$ обозначает число y , которое в силу закона f соответствует числу x . Если, например, число 1 принадлежит области E определения функции f , то $f(1)$ есть значение функции f в точке $x=1$. Если 1 не принадлежит E , то говорят, что функция f не определена в точке $x=1$.

Для функций f и φ , имеющих одну и ту же область определения E , определяются сумма $f+\varphi$, разность $f-\varphi$, произведение $f\varphi$, частное f/φ . Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x) + \varphi(x), \quad f(x) - \varphi(x), \quad f(x)\varphi(x),$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}, \quad \text{где } x \in E;$$

здесь в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E .

Для обозначения функции употребляются и любые другие буквы: $F, \Phi, \Psi, \dots$, так же как вместо x, y можно писать $z, u, v, w, \dots$

§ 1.5. Задание функции формулой

Возможны различные способы задания функции. Среди них особенно важное значение имеет задание функции при помощи формулы.

Приведем несколько примеров функций, заданных формулами.

Постоянная функция

$$y=c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Каждому действительному x соответствует одно и то же значение y , равное числу c .

Степенная функция

$$y=x^n \quad (-\infty < x < +\infty, \quad n=1, 2, 3, \dots).$$

При различных значениях n получим $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$ и т. д.

Линейная функция

$$y=kx+b.$$

Линейные функции встречаются в приложениях очень часто. Многие физические законы выражаются, и притом

достаточно точно, линейными функциями. Например, длина l стержня с хорошим приближением рассматривается как линейная функция его температуры t :

$$l = l_0 + \alpha t,$$

где α — коэффициент линейного расширения, l_0 — длина стержня при $t=0$. Если x — время, а y — путь, пройденный за это время точкой, то линейная функция $y = kx + b$ выражает тот факт, что точка движется равномерно со скоростью k , число же b есть расстояние точки от начала отсчета пути в момент времени $x=0$. Возможность приближенно считать равномерными различные изменения хотя бы на малых участках и простота линейной функции делают ее очень употребительной.

Частным случаем линейной функции (при $b=0$) является *прямая пропорциональность*

$$y = kx, \quad k \neq 0.$$

Функция второй степени

$$y = ax^2 + bx + c \quad (-\infty < x < +\infty)$$

тоже встречается в приложениях, например, при описании равномерного ускоренного движения.

Можно рассматривать функции третьей, четвертой и вообще n -й степени. Функция

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

есть пример функции четвертой степени.

Функция n -й степени, или, как ее называют, многочлен n -й степени, получается из заданных постоянных и степенной функции $y = x$ при помощи действий сложения, вычитания и умножения, взятых в конечном числе. Если прибавить к этим действиям еще деление, то будем получать так называемые *рациональные функции*. Вот примеры рациональных функций:

$$y = \frac{-6}{x}, \quad y = \frac{1+x}{1-x}, \quad y = \frac{1+x^2}{x^2-5x+6}.$$

Рациональную функцию всегда можно записать в виде дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены. Рациональная функция определена для всех действительных x , которые не обращают знаменатель в нуль

Частным случаем рациональной функции является функция, выражающая обратную пропорциональность

$$y = \frac{k}{x} \quad (x \neq 0).$$

Функция на различных частях ее области определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t=0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 км/ч и, прибыв в пункт B , стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью 80 км/ч. Тогда функция $s=f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) поезда от A в момент времени t , очевидно будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leq t < 2, \\ 200, & 2 \leq t < 3, \\ 80t - 40, & 3 \leq t \leq 6. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем мы остановимся достаточно подробно на тригонометрических функциях и введем новые функции — показательную и логарифмическую.

§ 1.6. Задание функции графиком

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную (декартову) систему координат xOy (рис. 1), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобра-

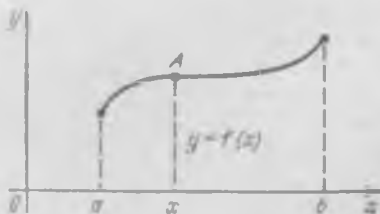


Рис. 1

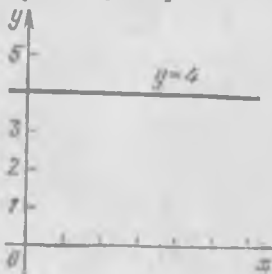


Рис. 2

зим любую кривую Γ , обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка x отрезка, прямая, проходящая через нее параллельно оси y , пересекает кривую Γ в единственной точке A . Такую кривую Γ мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y=f(x)$ на отрез-

ке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение $y = f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 1). Следовательно, с помощью графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y = f(x)$.

Графиком функции $y = c$ является прямая, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке $(0; c)$. На рис. 2 изображен график функции $y = 4$.

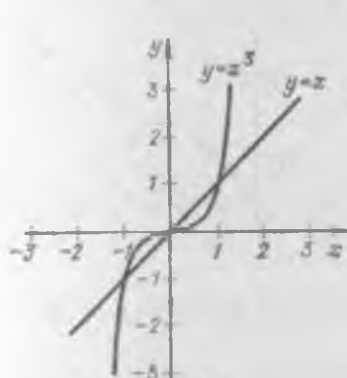


Рис. 3

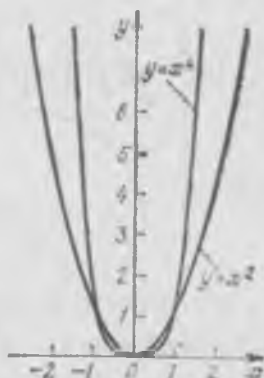


Рис. 4

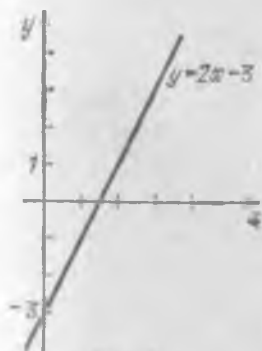


Рис. 5

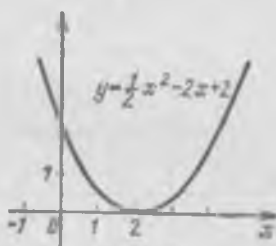


Рис. 6

Графики степенной функции для $n = 1, 2, 3, 4$ изображены на рис. 3 и 4.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая, образующая с положительным направлением оси x угол, тангенс которого равен k , и пересекающая ось y в точке, ордината которой равна b .

Графиком функции второй степени $y = ax^2 + bx + c$ является парабола.

Графиком обратной пропорциональности является гиперболой.

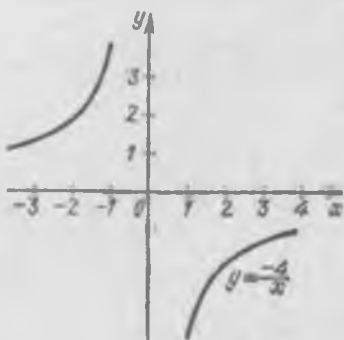


Рис. 7

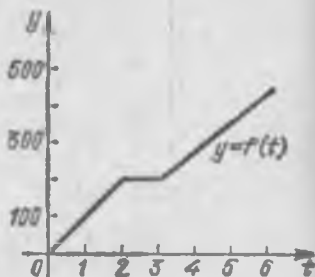


Рис. 8

На рис. 5—7 приведены графики функций $y = 2x - 3$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ и $y = \frac{-4}{x}$.

График функции, заданный формулами (3), изображен на рис. 8.

§ 1.7. Задание функции таблицей

Функция может быть задана с помощью таблицы. Пусть, например, результаты измерения температуры воздуха T в момент времени $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ часов занесены в таблицу:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	2	1,5	1	1	0,5	1	1,5	2	3	4	6

Таким образом, мы получили функцию $T = f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 10, заданную таблицей. График функции $T = f(t)$, состоящий из 12 точек, изображен на рис. 9.

Используя приведенную таблицу и учитывая, что температура T изменялась непрерывно, можно рассмотреть

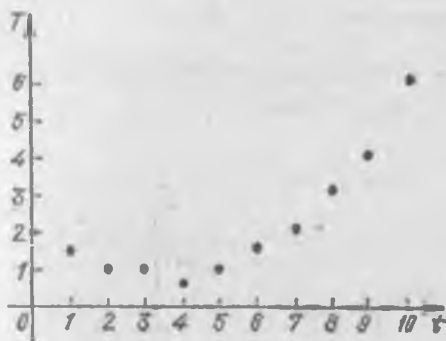


Рис. 9

функцию $T = f(t)$ на множестве $[0, 10]$. Ее график может быть получен из первого лишь приближенно, плавным соединением его точек.

§ 1.8. Сложная функция

С помощью арифметических действий можно конструировать по данным функциям новые функции. Но существует еще и другое средство конструирования функции по данным функциям. Мы имеем в виду операцию *функции от функции*.

Пусть заданы две функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где G есть область определения f , а E — область определения φ , и пусть каждому x из E соответствует при помощи функции φ значение u , принадлежащее G . Тогда можно сконструировать сложную функцию $y = f(\varphi(x))$ от x с областью определения E . Ее называют также *функцией от функции*.

Например, функцию

$$y = (x^2 + 1)^3 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

можно рассматривать как сложную функцию

$$y = u^3, \quad u = x^2 + 1 \quad (-\infty < x < +\infty),$$

определенную для всех точек x или, как говорят, определенную на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций:

$$z = F_1(F_2(F_3(\dots(F_n(x))\dots))).$$

Например, функция

$$z = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (4)$$

есть сложная функция, сконструированная из трех функций:

$$z = \sqrt{u}, \quad u = 1 - y, \quad y = x^2.$$

Так как функция $\sqrt{u}$ определена только для $u \geq 0$, то функция (4) определена для таких x , которые удовлетворяют неравенству $1 - x^2 \geq 0$ или, что все равно, неравенствам $-1 \leq x \leq 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое

- 1) функция,
- 2) область задания функции,
- 3) постоянная функция,
- 4) линейная функция,
- 5) степенная функция,
- 6) многочлен второй степени,
- 7) многочлен n -й степени,
- 8) рациональная функция,
- 9) сложная функция?

2. Нарисуйте схематические графики функций x^2 , x^3 ,

$$x^4, \frac{1}{x},$$

3. Укажите области определения функций

- 1) $\frac{1}{x-1}$, 2) $\sqrt{x}$, 3) $\sqrt[3]{x}$.

4. По цепочкам функций написать соответствующую сложную функцию и указать область ее задания:

- 1) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 + u$, $u = x^2$;
- 2) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 - u$, $u = x^2$;
- 3) $y = \frac{1}{v}$, $v = 1 + \sqrt{u}$, $u = 1 - x$.

§ 1.9. Свойства некоторых функций

Функция $f(x)$ называется *четной*, если выполняется равенство

$$f(-x) = f(x)$$

для всех значений x из области ее определения.

Например, функция x^2 четная, потому, что $(-x)^2 = x^2$ для всех x . Вообще любая функция вида x^n , где n — четное число, четная. Ведь для четного n выполняется равенство

$$(-x)^n = x^n,$$

каково бы ни было x .

График четной функции $y=f(x)$ симметричен относительно оси y , потому что при условии $f(-x)=f(x)$ точки графика $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси y . На рис. 4 изображены графики четных функций $y=x^2$ и $y=x^4$.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x)$$

для всех значений x из области ее определения.

Например, функция x^3 нечетная, потому что $(-x)^3 = -x^3$ для всех x . Вообще функция x^n при нечетном n нечетные, а при четном n — четные.

График нечетной функции $y=f(x)$ симметричен относительно начала координат, потому что при условии $f(-x) = -f(x)$ точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно начала координат. На рис. 3 изображены графики нечетных функций $y=x$ и $y=x^3$.

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке значений x , если большему значению x из этого промежутка соответствует большее значение y .



Рис. 10

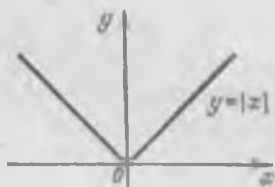


Рис. 11

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если большему значению x из этого промежутка соответствует меньшее значение y .

Следовательно, если точки x_1 и x_2 принадлежат промежутку и $x_1 < x_2$, то в случае возрастающей функции $f(x_1) < f(x_2)$ и в случае убывающей функции $f(x_1) > f(x_2)$.

На рис. 10 изображен график функции, возрастающей на $[a, b]$ и убывающей на $[b, c]$.

Функция $y = x^n$ при нечетном n возрастает на всей действительной оси $(-\infty, \infty)$; при четном же n она возрастает только на $[0, \infty)$ и убывает на $(-\infty, 0]$ (см. рис. 3 и 4).

График функции $|f(x)|$ совпадает с графиком $f(x)$ там, где $f(x) > 0$, и симметричен ему относительно оси x там, где $f(x) < 0$. На рис. 11 изображен график функции $y = |x|$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x = 0, \\ -x & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

На рис. 12 приведены графики функций $x^2 - 2x - 3$ и $|x^2 - 2x - 3|$.

График функции $f(x + \alpha)$, где α — заданное число, получается сдвигом графика $f(x)$ влево на величину α . При

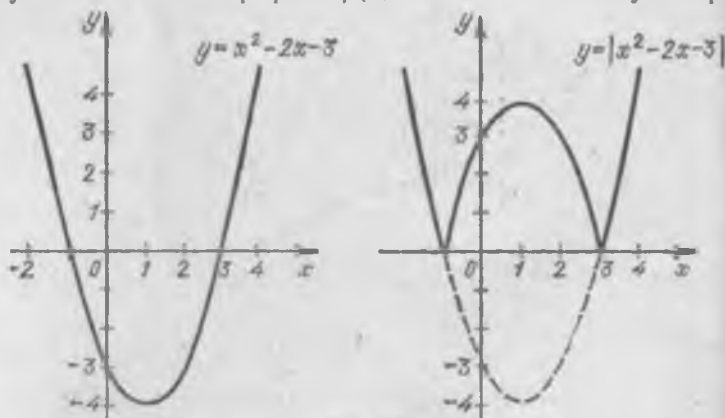


Рис. 12

$\alpha < 0$ на самом деле это есть сдвиг на величину $|\alpha|$ вправо. На рис. 13 изображен график функции $|x - 2|$.

На рис. 14 изображен график функции $y = \frac{-3x - 2}{x + 2}$. Так как

$$y = \frac{-3(x + 2) + 4}{x + 2} = -3 + \frac{4}{x + 2},$$

то график этой функции можно получить следующим образом. В системе координат xOy задан пунктиром график

функции $\frac{4}{x}$. Сдвигая его (мысленно) влево на величину 2, получим график функции $\frac{4}{x+2}$. Опуская последний вниз на величину 3, получим искомый график функции $-3 + \frac{4}{x+2}$.

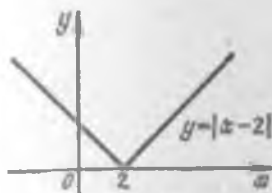


Рис. 13

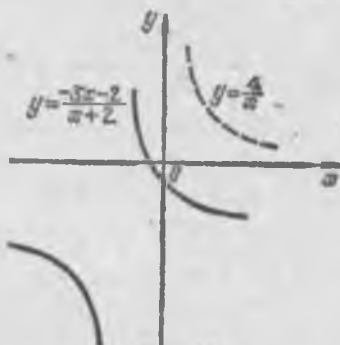


Рис. 14

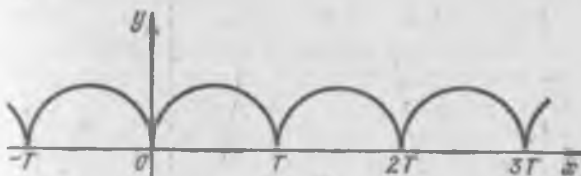


Рис. 15

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T ($T > 0$), если выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x)$$

для всех x . Чтобы изобразить график этой функции, надо нарисовать его для отрезка $[0, T)$, а затем продолжить его периодически на всю действительную ось (рис. 15).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам (см. п. 1.2)

1) $a \leq x < b$; 2) $a < x \leq b$; 3) $-\infty < x \leq b$;

4) $a \leq x < \infty$.

2. Что называется функцией?

3. Функция $y=f(x)$ задана таблицей

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Задайте эту функцию графиком. Его точки соедините плавной кривой.

4. Даны функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varphi(x) = x^2 + 3x$. Задайте формулой функцию

1) $f(\varphi(x))$; 2) $\varphi(f(x))$; 3) $f(\varphi(f(x)))$.

5. Докажите, что функция

а) $y = -4x^2 + 5$ является четной,

б) $y = 7x^3 - 3x$ является нечетной.

6. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ четные. Докажите, что функции

1) $f(x) + \varphi(x)$; 2) $f(x) - \varphi(x)$; 3) $f(\varphi(x))$

являются четными. Нужна ли четность f ?

7. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ нечетные. Какими (четными или нечетными) являются функции

1) $f(x) + \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(\varphi(x))$?

Нужна ли нечетность f ?

8. Какие из функций

1) $y = 5x^4 - 4x^2 + 2$; 2) $y = 5x^3 + 3x^5 + x$; 3) $y = x^2 + x^3$

являются нечетными?

9. Какая функция называется а) возрастающей, б) убывающей на данном числовом промежутке?

10. Докажите, что функция $y = x^3$ является

а) возрастающей на $[0, +\infty)$;

б) убывающей на $(-\infty, 0]$.

Является ли функция $y = x^n$ возрастающей на всей своей области определения?

11. Докажите, что функция $y = \frac{k}{x}$ является

а) возрастающей при $k < 0$,

б) убывающей при $k > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

12. Постройте графики функций

1) $y = x - 4$; 2) $y = |x - 4|$; 3) $y = |x - 4| - 2$;

4) $y = ||x - 4| - 2|$; 5) $y = (x - 1)^2$; 6) $y = (|x| - 1)^2$;

7) $y = (|x| - 1)^2 - 1$; 8) $y = ||x| - 1|^2 - 1$;

9) $y = x^2 - 6x + 5$; 10) $y = x^2 - 6|x| + 5$;

11) $y = |x^2 - 6x + 5|$; 12) $y = |x^2 - 6|x| + 5|$;

$$13) y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{(2x-5) \cdot 2}{2x-6} = \frac{(2x-6) \cdot 2 + 2}{2x-6} = 2 + \frac{1}{x-3};$$

$$14) y = \frac{3x+10}{x+2}; \quad 15) y = |x-2| + |x+2|;$$

$$16) y = \sqrt{x}; \quad 17) y = \sqrt{x+4}; \quad 18) y = \sqrt{-x-4}.$$

13. Найдите область определения функции:

$$1) y = \frac{3}{x-2}; \quad 2) y = \frac{10}{\sqrt{x+3}}; \quad 3) y = \sqrt{x^2-5x};$$

$$4) y = \sqrt{0,5x^2-2,5x+3};$$

$$5) y = \sqrt{x^2-7x+12} + \sqrt{-x^2+8x-15}.$$

14. Постройте график функции

$$1) y = \frac{|x|}{x}; \quad 2) y = \frac{|x-2|}{x-2}; \quad 3) y = \frac{x^2-9}{x+3};$$

$$4) y = |x|-x; \quad 5) y = x-|x|; \quad 6) y = x+2-|x+2|.$$

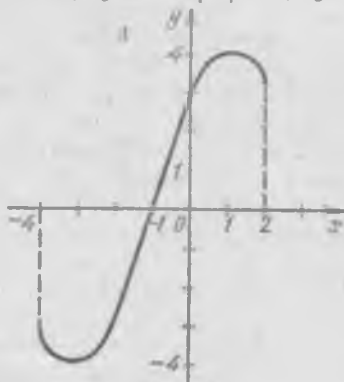


Рис. 16

15. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком на отрезке $[-4, 2]$ (рис. 16). Постройте график функции

$$1) y = -f(x); \quad 2) y = |f(x)|; \quad 3) y = f(|x|);$$

$$4) y = f(x) - |f(x)|; \quad 5) y = |f(x)| - f(x); \quad 6) y = \frac{|f(x)|}{f(x)};$$

$$7) y = f\left(\frac{1}{2}x\right); \quad 8) y = f(-x); \quad 9) y = 2f(x).$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 2.1. Числовая окружность

Величины $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ изучались в 7—8 классах на уроках геометрии и алгебры. Эти величины можно рассматривать как функции от угла α или, отвлекаясь от понятия угла, как функции от числового аргумента α . Их называют *тригонометрическими функциями*. Здесь мы рассматриваем графики этих функций. Чтобы понять как они устроены, напомним определения тригонометрических функций, которые, как мы знаем, даются из геометрических соображений—при помощи единичной числовой окружности. С нее и начнем.

Но прежде всего вспомним понятие радиана. *Радианом* называется величина центрального угла окружности, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу окружности. Это определение не зависит от размеров окружности. Поэтому можно еще сказать, что радиан есть величина центрального угла единичной окружности, опирающегося на дугу длины 1.

Окружность радиуса 1 называют *единичной*. Так как длина единичной окружности равна 2π , то

$$360^\circ = 2\pi \text{ радиана} = 2\pi$$

или

$$1 = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ.$$

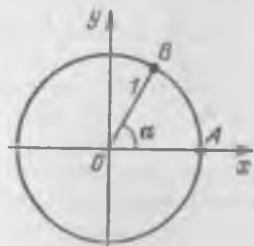


Рис. 17

В прямоугольной системе координат xOy зададим окружность радиуса 1 с центром в начале координат, называемую *числовой окружностью*. Точку A ее пересечения с положительной полуосью x будем называть *начальной точкой числовой окружности* (рис. 17).

Будем поворачивать радиус OA вокруг точки O в положительном направлении (против часовой стрелки) и в отрицательном направлении (по часовой стрелке). В отличие от геометрии тригонометрия рассматривает углы поворота;

которые могут быть больше π , 2π радиан, а также любые отрицательные углы, отложенные в отрицательном направлении.

Каждому действительному числу α поставим в соответствие точку B (рис. 17) числовой окружности, полученную с помощью поворота радиуса OA на угол $|\alpha|$ радиан вокруг точки O в положительном направлении, если $\alpha > 0$, и в отрицательном направлении, если $\alpha < 0$. Точку B , соответствующую числу α , будем называть точкой α . На рис. 18

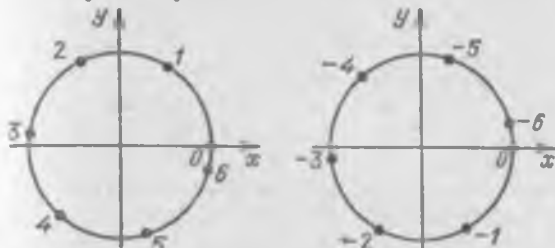


Рис. 18

показаны точки $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4, -5, -6$. Так как числовая окружность имеет радиус 1 , то угол $|\alpha|$ радиан равен длине дуги, на которую он опирается.

Поэтому указанное соответствие можно определить и следующим образом: каждому числу α соответствует такая точка B числовой окружности, чтобы дуга $\widehat{AB}$ имела длину $|\alpha|$ и была отложена в положительном направлении, если $\alpha > 0$, и в отрицательном, если $\alpha < 0$. При этом имеются в виду дуги какой угодно длины. То есть числовую окружность можно рассматривать как окружность радиуса 1 , на которую «намотана» числовая прямая.

Так как окружность радиуса 1 имеет длину 2π , то в силу сказанного числа

$\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \alpha + 6\pi, \dots, \alpha - 2\pi, \alpha - 4\pi, \alpha - 6\pi, \dots$

изображаются одной и той же точкой числовой окружности. Короче, числа вида $\alpha + 2\pi n$, где n — любое целое число, изображаются одной и той же точкой числовой окружности (рис. 19).

Так как числовая окружность имеет длину 2π , то на пересечении ее с осями координат расположены точки

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

Но эти же точки могут соответствовать также числам

$$2\pi, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad 3\pi, \quad \frac{7\pi}{2}$$

или числам

$$-2\pi, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\pi, \quad -\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. В приведенных рассуждениях число α определяет величину угла, выраженную в радианах.



Рис. 19



Рис. 20

Бывает удобно эту величину выразить в градусах:

$$\beta^\circ = \frac{\alpha}{2\pi} 360^\circ \approx \alpha \cdot 57^\circ.$$

Пример 1. Какой четверти принадлежат точки $1\frac{1}{6}\pi$, $7\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{\pi}{5}$?

Решение. Так как $\pi < 1\frac{1}{6}\pi < \frac{3\pi}{2}$, то точка $1\frac{1}{6}\pi$ принадлежит III четверти. Так как $7\frac{3}{4}\pi = 6\pi + 1\frac{3}{4}\pi$

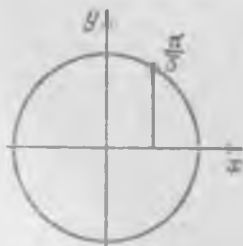


Рис. 21

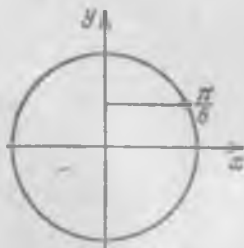


Рис. 22

$\frac{3\pi}{4} < 1\frac{3}{4}\pi < 2\pi$, то точка $7\frac{3}{4}\pi$ (как и точка $1\frac{3}{4}\pi$) принадлежит IV четверти.

Замечание. В дальнейшем нам довольно часто придется на числовой окружности отмечать числа, кратные $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$.

Для построения соответствующих точек следует помнить, что $\frac{\pi}{4}$ — половина $\frac{\pi}{2}$ (рис. 20), $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (рис. 21); $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 22).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Что такое радиан?
2. Как определяется радиан при помощи окружности а) радиуса 2? б) радиуса 1?
3. Запишите формулу перехода от градусов к радианам.
4. Как определяется точка α на числовой окружности, если α заданное действительное число?
5. Как могут отличаться между собой числа α и β , определяющие одну и ту же геометрическую точку числовой окружности?
6. По какому закону каждому действительному числу приводится в соответствие точка числовой окружности?
7. Точка B числовой окружности соответствует целому числу α . Найдется ли такое целое число (отличное от α), которому соответствует та же точка B ?
8. Запишите все точки α , изображенные на числовой окружности точкой
 - 1) 0; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$.
9. Какой четверти принадлежат точки
 - 1) $\frac{7\pi}{3}$; 2) $\frac{19\pi}{4}$; 3) $\frac{17\pi}{5}$; 4) $-\frac{15\pi}{4}$;
 - 5) $-\frac{27\pi}{5}$; 6) $-\frac{8\pi}{7}$; 7) 20; 8) -100 ?
10. Запишите три числа, которые изображаются на окружности той же точкой, что и $\frac{17\pi}{3}$.
11. Выразите в градусах 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 3π , $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{9\pi}{2}$ радиан.

Но эти же точки могут соответствовать также числам

$$2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}$$

или числам

$$-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. В приведенных рассуждениях число α определяет величину угла, выраженную в радианах.

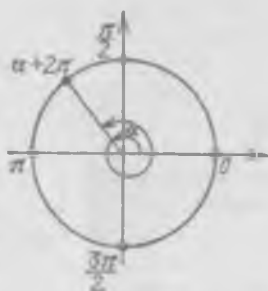


Рис. 19



Рис. 20

Бывает удобно эту величину выразить в градусах:

$$\beta^\circ = \frac{\alpha}{2\pi} 360^\circ \approx \alpha \cdot 57^\circ.$$

Пример 1. Какой четверти принадлежат точки $1\frac{1}{6}\pi$, $7\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{\pi}{5}$?

Решение. Так как $\pi < 1\frac{1}{6}\pi < \frac{3\pi}{2}$, то точка $1\frac{1}{6}\pi$ принадлежит III четверти. Так как $7\frac{3}{4}\pi = 6\pi + 1\frac{3}{4}\pi$

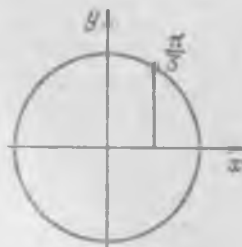


Рис. 21

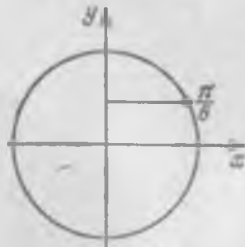


Рис. 22

$\frac{3\pi}{2} < 1\frac{3}{4}\pi < 2\pi$, то точка $7\frac{3}{4}\pi$ (как и точка $1\frac{3}{4}\pi$) принадлежит IV четверти.

Замечание. В дальнейшем нам довольно часто придется на числовой окружности отмечать числа, кратные $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$.

Для построения соответствующих точек следует помнить, что $\frac{\pi}{4}$ — половина $\frac{\pi}{2}$ (рис. 20), $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (рис. 21); $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 22).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Что такое радиан?
2. Как определяется радиан при помощи окружности
а) радиуса 2? б) радиуса 1?
3. Запишите формулу перехода от градусов к радианам.
4. Как определяется точка α на числовой окружности, если α заданное действительное число?
5. Как могут отличаться между собой числа α и β , определяющие одну и ту же геометрическую точку числовой окружности?
6. По какому закону каждому действительному числу приводится в соответствие точка числовой окружности?
7. Точка B числовой окружности соответствует целому числу α . Найдется ли такое целое число (отличное от α), которому соответствует та же точка B ?
8. Запишите все точки α , изображенные на числовой окружности точкой

1) 0; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$.

9. Какой четверти принадлежат точки

1) $\frac{7\pi}{3}$; 2) $\frac{19\pi}{4}$; 3) $\frac{17\pi}{5}$; 4) $-\frac{15\pi}{4}$;

5) $-\frac{27\pi}{5}$; 6) $-\frac{8\pi}{7}$; 7) 20; 8) -100 ?

10. Запишите три числа, которые изображаются на окружности той же точкой, что и $\frac{17\pi}{3}$.

11. Выразите в градусах 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 3π , $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{9\pi}{2}$ радиан.

12. Выразите в радианах 60° , 150° , 225° , 765° , 390° , -30° , -45° , 240° , -300° .

13. На числовой окружности отмечена точка $\frac{\pi}{4}$. Перенесите рис. 20 в тетрадь и отметьте точки $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{4} = \pi$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$.

14. На числовой окружности отмечена точка $\frac{\pi}{3}$. Перенесите рис. 21 в тетрадь и отметьте точки $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3} = \pi$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

15. На числовой окружности отмечена точка $\frac{\pi}{6}$. Перенесите рис. 22 в тетрадь и отметьте точки $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, π , $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.

16. Точка M числовой окружности имеет координаты $(0,8; 0,6)$. Определите координаты точек M_1 , M_2 , M_3 , симметричных точке M относительно оси x , оси y , начала координат соответственно.

17. На числовой прямой изобразите числовые промежутки

а) $[0, \pi]$; б) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; в) $(\pi, 2\pi)$;

г) $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$; д) $[-\pi, 0]$; е) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Укажите один промежуток, для всех точек α которого

а) абсцисса точки α положительна; отрицательна;

б) ордината точки α положительна; отрицательна.

19. Точка B соответствует целому числу α ; найдется ли такое рациональное число, отличное от α , которому соответствует та же точка B ?

§ 2.2. Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$

Рассмотрим в системе координат xOy единичную окружность и на ней произвольную точку α (см. рис. 23). *Косинусом* числа α называется абсцисса точки α и обозначается $\cos \alpha$. *Синусом* числа α называется ордината точки α и обозначается $\sin \alpha$.

Формулы $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ определяют функции от α . Так как α — произвольное действительное число, то эти функции определены на интервале $(-\infty, \infty)$. Перечислим некоторые свойства функций $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, которые помогут понять, как выглядят графики этих функций.

1. Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ непрерывны. Ведь из геометрических соображений видно, что при непрерывном изменении числа α в свою очередь непрерывно изменяются x и y .

2. Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ имеют период 2π , т. е. для любого значения α выполняются равенства

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha. \quad (1)$$

Это следует из того, что точки α и $\alpha + 2\pi$ геометрически совпадают, таким образом, совпадают также их абсциссы и ординаты.

3. Функция $\cos \alpha$ четная, т. е. для любого α выполняется равенство

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha. \quad (2)$$

4. Функция $\sin \alpha$ нечетная, т. е. для любого α выполняется равенство

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad (3)$$

Свойства 3 и 4 следуют из того (рис. 24), что для любого α точки α и $-\alpha$ симметричны относительно оси x ,

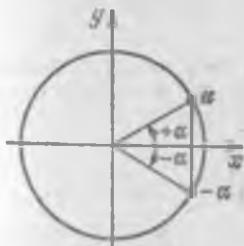


Рис. 24

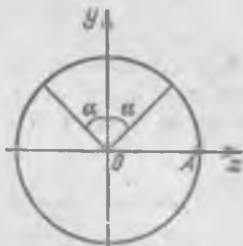


Рис. 25

поэтому их абсциссы равны между собой, а ординаты равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

3. Для любого α выполняются равенства

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad (4)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (5)$$

Это следует из того, что точки $\frac{\pi}{2} + \alpha$ и $\frac{\pi}{2} - \alpha$ симметричны относительно оси y и потому их ординаты равны, а абсциссы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку (рис. 25).

6. Если α непрерывно возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin \alpha$ непрерывно возрастает от 0 до 1 ($\sin 0 = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$), а $\cos \alpha$ непрерывно убывает от 1 до 0 ($\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$). Это свойство вытекает из геометрических соображений (см. рис. 13).

Значения $\sin \alpha$ для различных α из отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ можно вычислить с любой степенью точности. Существуют таблицы таких значений, но их можно получить и при помощи микрокалькулятора. Например, чтобы вычислить

$$\sin 10^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot 10\right) = \sin \frac{\pi}{18},$$

надо выполнить такие операции (нажать на указанные кнопки):

$$\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\sin} \boxed{=} \approx 0,1736482.$$

Так как $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, то вычисление косинуса от α сводится к вычислению синуса от $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется косинусом и синусом числа α ?
2. На каком интервале определены функции $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$? Какие значения принимают эти функции?
3. Какая функция называется а) периодической с периодом T ; б) четной; в) нечетной?
4. Сформулируйте свойства функций $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

5. Какие из функций

а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$; г) $\sin \alpha + \cos \alpha$ являются четными, нечетными?

6. Отметьте точки α на числовой окружности, определите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ при

а) $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$;

б) $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$;

г) $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

7. Сравните с нулем

а) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \sin 5, \sin 6$;

б) $\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5, \cos 6$.

8. Сравните а) $\sin 2$ и 2 ; б) $\sin \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$;

в) $\sin \frac{3\pi}{4}$ и $\cos \frac{3\pi}{4}$.

9. Докажите тождества:

а) $\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha)$; б) $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$;

в) $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

10. Вычислите а) $\cos 240^\circ$; б) $\sin 390^\circ$; в) $\cos(-150^\circ)$; г) $\sin(-780^\circ)$; д) $\cos 585^\circ$; е) $\cos 235^\circ$.

11. Вычислите а) $\cos \frac{7\pi}{2}$; б) $\sin \frac{17\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$; д) $\sin \frac{23\pi}{3}$; е) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

12. Приведите к вычислению синуса или косинуса наименьшего положительного угла (от 0° до 45° или от 0 до $\frac{\pi}{4}$ радиан):

а) $\sin 173^\circ$; б) $\cos 121^\circ$; в) $\sin(-127^\circ)$;

г) $\cos(-185^\circ)$; д) $\sin 417^\circ$; е) $\cos 284^\circ$;

ж) $\sin \frac{23\pi}{11}$; з) $\sin \frac{3\pi}{7}$; и) $\sin\left(-\frac{12\pi}{13}\right)$;

к) $\cos \frac{45\pi}{11}$; л) $\cos \frac{5\pi}{6}$; м) $\cos\left(-\frac{16\pi}{7}\right)$.

13. Задайте формулой все точки α , отмеченные на числовой окружности (рис. 26).

14. Укажите на числовой окружности точки α , для которых верны следующие равенства:

а) $\sin \alpha = 1$; б) $\cos \alpha = 0$; в) $\sin \alpha = -1$;

г) $\cos \alpha = 1$; д) $\sin \alpha = 0$; е) $\cos \alpha = -1$.

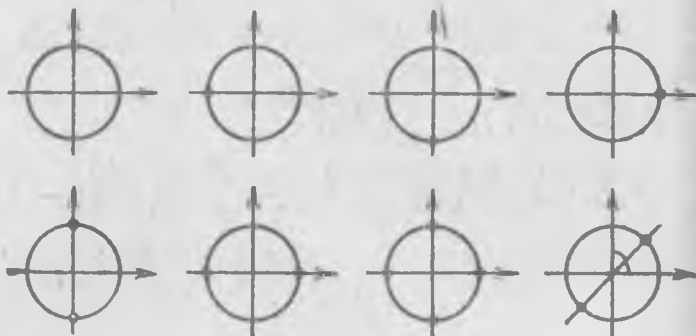


Рис. 26

16. Найдите все α , для которых

а) $\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha = 0$; б) $\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha + 2 = 0$;

в) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$; г) $\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0$.

Запишите 3 решения каждого уравнения. Задайте формулой все решения уравнений.

§ 2.3. Графики функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$

График функции $\sin \alpha$ называется *синусоидой*; чтобы его нарисовать в прямоугольной системе координат αOy , составим таблицу значений $y = \sin \alpha$, например, для α , пробегающих значения через $\frac{\pi}{12}$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

α	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1

Эти данные можно взять из тригонометрических таблиц или вычислить на микрокалькуляторе. Например, пользуясь микрокалькулятором, получим

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \boxed{1} \boxed{5} \boxed{\sin} \boxed{=} 0,2588 \approx 0,26.$$

Нанесем точки $(\alpha, \sin \alpha)$ из таблицы в системе координат αOy и соединим плавной кривой (рис. 27). Получим приближенный график синусоиды, соответствующий отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ изменения α . Для любых других значений α

график синусоиды естественно получить, воспользовавшись свойствами функции $\sin \alpha$, перечисленными в предыдущем пункте.

На основании свойства $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ график синусоиды должен быть симметричен относительно

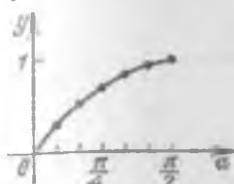


Рис. 27

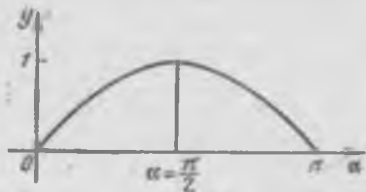


Рис. 28

прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому на отрезке $[0, \pi]$ график синусоиды выглядит так, как показано на рис. 28. На основании же свойства $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ график синусоиды

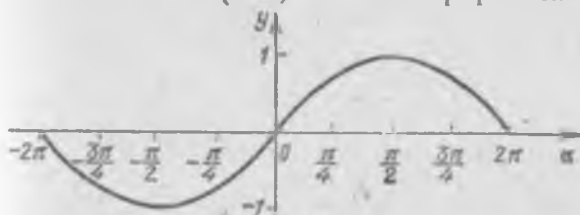


Рис. 29

симметричен относительно начала координат системы αOy . Поэтому на отрезке $[-\pi, \pi]$ график выглядит, как на рис. 29.

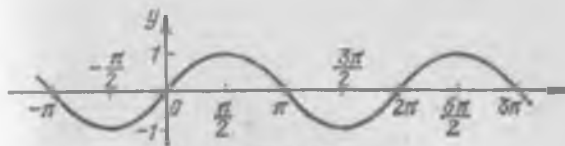


Рис. 30

Наконец на основании свойства $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$, верного для любого α , график синусоиды периодический с периодом 2π . Поэтому он выглядит как на рис. 30.

График функции $\cos \alpha$ называется *косинусоидой*. Косинусоида есть сдвинутая на величину $\frac{\pi}{2}$ влево синусоида

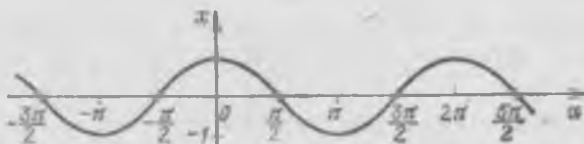


Рис. 31

(рис. 31). Это следует из равенства

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha,$$

верного для любого α . Ведь $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В каких четвертях а) $\sin \alpha > 0$; б) $\sin \alpha < 0$; в) $\cos \alpha > 0$; г) $\cos \alpha < 0$?
2. Укажите все числовые промежутки, для которых а) $\sin \alpha > 0$; б) $\sin \alpha < 0$; в) $\cos \alpha > 0$; г) $\cos \alpha < 0$?

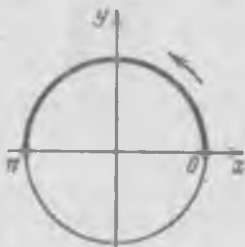


Рис. 32



Рис. 33

Решение. а) $\sin \alpha > 0$, в частности, если α в I или во II четверти, т. е. $0 < \alpha < \pi$ (рис. 32). Вообще, $\sin \alpha > 0$, если $0 + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi$, где k — целое число.

Ответ: $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, где k — любое целое число.

3. В каких четвертях с увеличением α

а) $\sin \alpha$ увеличивается; уменьшается?

б) $\cos \alpha$ увеличивается; уменьшается?

4. Сформулируйте определение функции

а) возрастающей; б) убывающей на отрезке $[a, b]$.

5. На каких отрезках функция $y = \sin \alpha$

а) возрастает; б) убывает?

Решение. а) С увеличением α функция $\sin \alpha$ увеличивается (рис. 33) на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое число.

б. На каких отрезках функция $x = \cos \alpha$

а) возрастает; б) убывает?

7. Постройте

а) синусоиду, б) косинусоиду.

8. Ответьте на вопросы заданий 2, 5, 6 с помощью графика.

9. Постройте графики функций

а) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 4]$; б) $f(2x)$; в) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

10. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 34). Постройте графики функций

а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

11. Постройте схематически графики функций

а) $y = -\sin \alpha$; б) $y = |\sin \alpha|$;

в) $y = \sin |\alpha|$;

г) $y = \sin 2\alpha$; д) $y =$

$= \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$; е) $y = \cos(3\alpha)$.

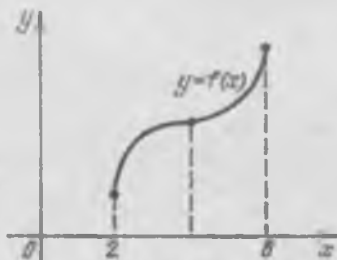


Рис. 34

Все ли эти функции периодические?

Определите наименьший положительный период для периодических функций.

12. Постройте график функции

а) $y = |\sin \alpha| - \sin \alpha$; б) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

§ 2.4. Функции $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$

Тангенсом числа α называется отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$, обозначаемое так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

Котангенсом числа α называется отношение $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$, обозначаемое так:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (7)$$

Эти определения обобщают известные определения тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике.

Величина $\operatorname{tg} \alpha$ определена для всех действительных α кроме тех, для которых $\cos \alpha = 0$, т. е. кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число. Этим определена функция $\operatorname{tg} \alpha$.

Величина $\operatorname{ctg} \alpha$ определена для всех действительных α кроме тех, для которых $\sin \alpha = 0$, т. е. кроме $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число. Этим определена функция $\operatorname{ctg} \alpha$.

Из равенств $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ следует, что для всех действительных чисел α выполняются равенства

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad (8)$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (\alpha \neq k\pi), \quad (9)$$

означающие, что $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ — нечетные функции. Докажем равенство (8):

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

доказательство равенства (9) аналогично. Функции $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ периодические с периодом $T = \pi$, так как верны равенства

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi), \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi). \quad (11)$$

Докажем равенство (10):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

доказательство равенства (11) аналогично.

Верны также равенства

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (\alpha \neq k\pi).$$

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Что называется а) тангенсом числа α , б) котангенсом числа α ?

2. Для каких значений α не определена функция а) $\operatorname{tg} \alpha$? б) $\operatorname{ctg} \alpha$?

3. Сформулируйте свойства функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

4. Докажите формулы из § 2.13 (с. 60).

5. Вычислите тангенс и котангенс

- а) $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$; б) $120^\circ, 130^\circ, 150^\circ$;
 в) $210^\circ, 225^\circ, 240^\circ$; г) $300^\circ, 315^\circ, 330^\circ$;
 д) $-30^\circ, -45^\circ, -60^\circ$; е) $405^\circ, -315^\circ, -495^\circ$.
 б. а) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$;
 в) $\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{15\pi}{4}; -\frac{17\pi}{3}; \frac{23\pi}{6}; -\frac{19\pi}{3}$.

7. Сведите вычисление к наименьшему положительному углу (от 0° до 45° или от 0 до $\frac{\pi}{4}$):

- а) $\operatorname{tg} 228^\circ$; б) $\operatorname{tg} (-250^\circ)$; в) $\operatorname{tg} (-400^\circ)$;
 г) $\operatorname{ctg} 260^\circ$; д) $\operatorname{ctg} (-410^\circ)$; е) $\operatorname{ctg} 525^\circ$;
 ж) $\operatorname{tg} \frac{16\pi}{5}$; з) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{19\pi}{3}\right)$; и) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$.

8. Сравните

- а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5}$.

9. Задайте формулой все точки α , отмеченные на числовой окружности (рис. 35).

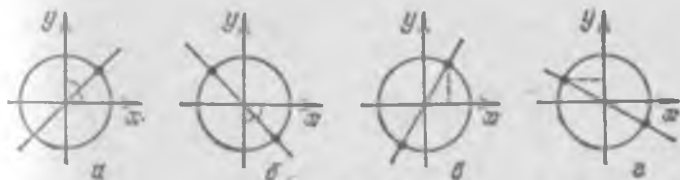


Рис. 35

10. Известно, что для некоторого числа α $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Вычислите

- а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$.

§ 2.5. Ось тангенсов и ось котангенсов

В системе координат xOy зададим числовую окружность с начальной точкой A на ней. Проведем касательную к окружности в точке A , которую будем считать числовой осью, направленной вверх. Эта ось называется *линией тангенсов* (рис. 36 и 37).

Каждому действительному числу α соответствует точка B числовой окружности. Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k — любое целое число), то прямая OB пересекает ось тангенсов в точке $D(1; y)$. Докажем, что $y = \operatorname{tg} \alpha$.

1. Если α в I четверти, то $\triangle OB_1C_1 \sim \triangle ODA$ (рис. 36) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{B_1C_1}{OC_1} = \frac{AD}{OA} = \frac{AD}{1} = y.$$

2. Если α во II четверти, то $\triangle OB_2C_2 \sim \triangle ODA$ (рис. 37) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{B_2C_2}{-OC_2} = -\frac{B_2C_2}{OC_2} = -\frac{AD}{OA} = -\frac{AD}{1} = -AD = y.$$

3. Если α в III четверти, то $\triangle OB_3C_3 \sim \triangle ODA$ (рис. 36) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-B_3C_3}{-OC_3} = \frac{B_3C_3}{OC_3} = \frac{AD}{OA} = \frac{AD}{1} = AD = y.$$

4. Если α в IV четверти, то $\triangle OB_4C_4 \sim \triangle ODA$ (рис. 37) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-B_4C_4}{OC_4} = -\frac{B_4C_4}{OC_4} = -\frac{AD}{OA} = -\frac{AD}{1} = -AD = y.$$

5. Если $\alpha = \pi k$, то точка D совпадает с точкой A , но и в этом случае равенство $y = \operatorname{tg} \alpha$ верно.

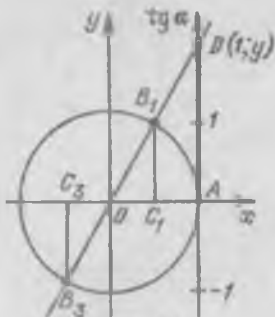


Рис. 36

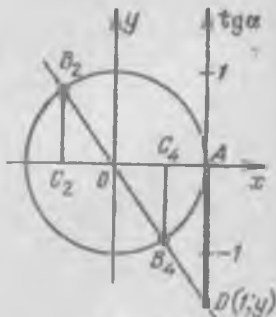


Рис. 37

Таким образом, любому действительному числу α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, k — любое целое число) соответствует единственная точка D оси тангенсов, ордината которой равна $\operatorname{tg} \alpha$:

$$y = \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассмотрим снова в системе координат xOy числовую окружность (рис. 38, 39). Проведем к ней касательную в точке M ее пересечения с положительной полуосью y .

Вудем считать эту касательную числовой прямой, направленной вправо. Она называется *осью котангенсов*. Пусть B есть точка α .

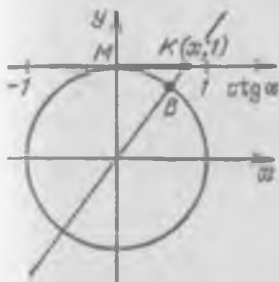


Рис. 38

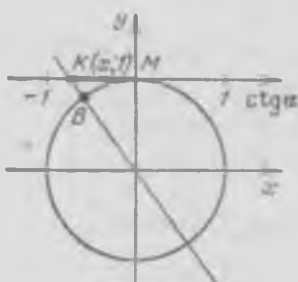


Рис. 39

Так же как и для $\operatorname{tg} \alpha$, можно показать, что если $\alpha \neq k\pi$ (k —любое целое число), то прямая OB пересечет ось котангенсов в точке k , координата которой равна $\operatorname{ctg} \alpha$:

$$x = \operatorname{ctg} \alpha.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называют осью тангенсов и чему равен $\operatorname{tg} \alpha$?
2. Что называют осью котангенсов и чему равен $\operatorname{ctg} \alpha$?
3. Покажите на числовой окружности точки α , для которых

- а) $\operatorname{tg} \alpha = 1$; б) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 0$;
 г) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$; д) $\operatorname{ctg} \alpha = -1$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.

4. Задайте формулой все решения каждого уравнения:

- а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$;
 г) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 ж) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$; з) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$.

5. Как изменяется $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ при увеличении α

- а) от 0 до $\frac{\pi}{2}$? б) от $\frac{\pi}{2}$ до π ?
 в) от π до $-\frac{\pi}{2}$? г) от $-\frac{\pi}{2}$ до 0?

6. Покажите на числовой окружности все точки α , для которых

- а) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -3$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{4}$.

7. Решите уравнения

а) $\operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0$; б) $2 \operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$;

в) $\operatorname{tg}^3 \alpha - 1 = 0$; г) $\operatorname{tg}^3 \alpha - 4 = 0$.

§ 2.6. Графики функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$

Чтобы построить график функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ в прямоугольной системе координат αOy , составим таблицу значений функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, например через интервал $\frac{\pi}{12}$:

α	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	0,27	0,58	1	1,7	3,7

Эти данные можно взять из таблиц или вычислить с помощью микрокалькулятора. Если α непрерывно возрастает от 0, приближаясь к $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки D (рис. 36) непрерывно, неограниченно возрастает, т. е. если $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), то $y \rightarrow +\infty$.

Если учесть еще, что $\operatorname{tg} 0 = 0$, то график функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ представляет собой непрерывную кривую, выходящую из начала координат и такую, что для ее точек (α, y) с возрастанием α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ y неограниченно возрастает от 0 до $+\infty$.

По табличным данным построим в системе координат αOy точки $(\alpha, \operatorname{tg} \alpha)$ и соединим их плавной линией. Мы получим график функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 40).

Функция $y = \operatorname{tg} \alpha$ нечетная, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. На рис. 41 изображен график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для удобства на рис. 40, 41 проведены прямые $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. К ним неограниченно приближается график

функции $y = \operatorname{tg} \alpha$. При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow +\infty$, при $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ($\alpha > -\frac{\pi}{2}$) $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow -\infty$. Такие прямые

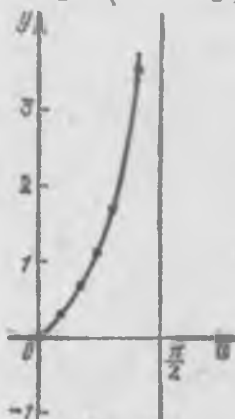


Рис. 40

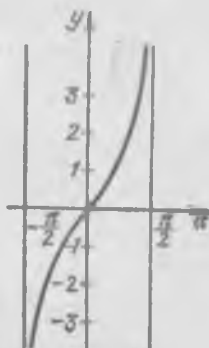


Рис. 41

называются *вертикальными асимптотами* графика. График их не пересекает.

Если учесть, что функция $y = \operatorname{tg} \alpha$ периодическая с периодом π , то представление о ее полном графике можно

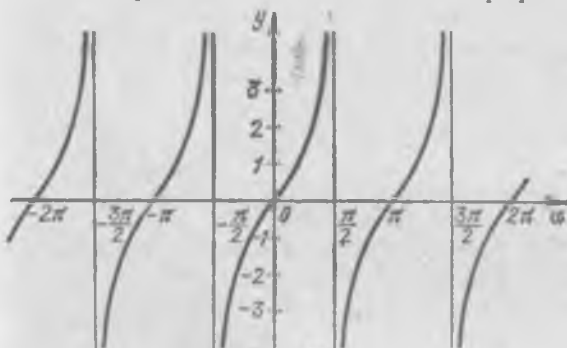


Рис. 42

получить из рис. 42. График функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ называется *тангенсоидой*, он состоит из бесконечного числа непрерывных кривых. Для значений α , равных

$$\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

функция $\operatorname{tg} \alpha$ не определена.

Для построения графика функции $x = \operatorname{ctg} \alpha$ воспользуемся равенством

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Перенесем тангенсоиду на $\frac{\pi}{2}$ вправо и симметрично отразим относительно оси α . Мы получим график функции $x = \operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 43).

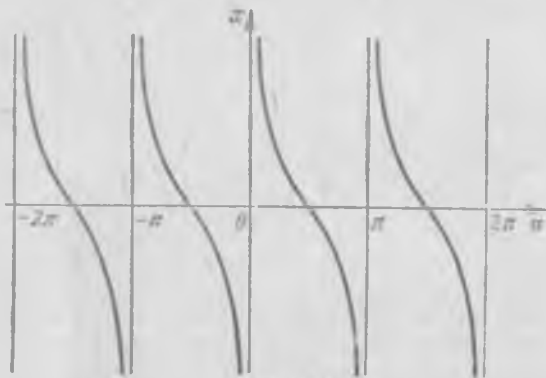


Рис. 43

Замечание. Для выражения тригонометрических функций независимую переменную мы обозначили α . Однако часто мы будем употреблять и другие буквы. Например, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{tg} x$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое ось тангенсов и ось котангенсов?
2. Как называется график функции
 - а) $y = \operatorname{tg} \alpha$? б) $x = \operatorname{ctg} \alpha$?
 Нарисуйте эти графики схематически.
3. Как изменяется $\operatorname{tg} \alpha$
 - а) при $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$?
 - б) при $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$?
 - в) при $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, $\alpha < -\frac{\pi}{2}$?
 - г) при $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, $\alpha > -\frac{\pi}{2}$?

д) при $\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, $\alpha < \frac{3\pi}{2}$?

е) при $\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, $\alpha > \frac{3\pi}{2}$?

4. Постройте схематически график функции

а) $y = -\operatorname{tg} \alpha$; б) $y = |\operatorname{tg} \alpha|$; в) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$;

г) $\operatorname{tg} 3\alpha$; д) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; е) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

5. Постройте график функции

а) $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$; б) $y = \operatorname{tg} |x|$; в) $y = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$;

г) $y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; д) $y = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

§ 2.7. Арксинус

Зададим число β , удовлетворяющее условию $|\beta| \leq 1$.

Покажем, что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственное число α , синус которого равен β :

$$\sin \alpha = \beta.$$

Рассмотрим числовую окружность в системе координат xOy . Проведем прямую $y = \beta$. Так как $|\beta| \leq 1$, то эта

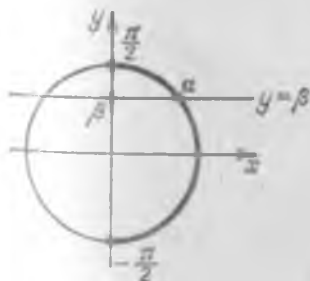


Рис. 44

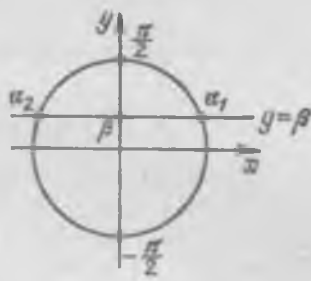


Рис. 45

прямая пересечет правую полуокружность в некоторой точке α с ординатой $y = \beta$, причем эта точка единственна (рис. 44). Это означает, что существует единственное число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен β .

Число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен β , называется *арксинусом* β и обозначается так:

$$\alpha = \arcsin \beta.$$

Например, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$,
 $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Заметим, что $\arcsin \beta$, где $|\beta| > 1$, не имеет смысла, потому что модуль синуса любого числа не превышает 1.

Например, $\arcsin \frac{\pi}{2}$ не имеет смысла, так как $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$.

Из определения арксинуса следует, что если $-1 \leq \beta \leq 1$, то $\sin(\arcsin \beta) = \beta$.

С помощью арксинуса можно записать все решения уравнения

$$\sin \alpha = \beta. \quad (12)$$

Если $|\beta| > 1$, то уравнение (12) не имеет решений. Если $|\beta| < 1$, то прямая $y = \beta$ пересекает числовую окружность в двух точках $\alpha_1 = \arcsin \beta$, $\alpha_2 = \pi - \arcsin \beta$ (рис. 45). Все решения уравнения (1) можно записать так:

$$\alpha = \arcsin \beta + 2k\pi, \quad (13)_1$$

$$\alpha = \pi - \arcsin \beta + 2k\pi = -\arcsin \beta + (2k + 1)\pi, \quad (13)_2$$

где k —любое целое число. Объединим формулы (13)₁ и (13)₂ в одну:

$$\alpha = (-1)^n \arcsin \beta + n\pi, \quad (13)$$

где n —любое целое число. Очевидно, что при подстановке в (13) вместо n четного числа $n = 2k$ получится формула (13)₁, нечетного $n = 2k + 1$ —формула (13)₂.

Формула (13) дает все решения уравнения $\beta = \sin \alpha$ и в том случае, если $|\beta| = 1$.

Примеры.

1. Решениями уравнения $\sin \alpha = -1$ являются все $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, где n —любое целое (рис. 46, а).

2. Решениями уравнения $\sin 4\alpha = 1$ являются все $4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, где n —любое целое (рис. 46, б).

8. Решениями уравнения $\sin \frac{\alpha}{3} = 0$ являются все $\frac{\alpha}{3} = 0 + \pi$, т. е. $\alpha = 3\pi$, где n — любое целое (рис. 46, в).

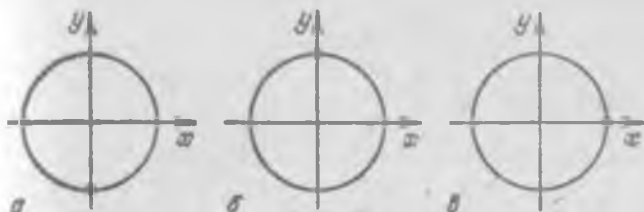


Рис. 46

4. Решениями уравнения $\sin \alpha = 0,1$ являются все $\alpha = (-1)^n \arcsin 0,1 + \pi n$, где n — любое целое.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется арксинусом числа β ? Для каких β $\arcsin \beta$ определен, для каких нет?

2. Вычислите $\arcsin \beta$, если

а) $\beta = 0$; б) $\beta = 1$; в) $\beta = -1$; г) $\beta = \frac{1}{2}$; д) $\beta = -\frac{1}{2}$;

е) $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Постройте на числовой окружности точки

а) $\arcsin \frac{1}{2}$; б) $\arcsin \frac{1}{4}$; в) $\arcsin \frac{3}{4}$;

г) $\arcsin(-0,5)$; д) $\arcsin(-0,25)$; е) $\arcsin(-0,75)$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin(\arcsin 0,3)$; б) $\sin(\arcsin(-0,9))$;

в) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$;

д) $\arcsin(\cos 0)$; е) $\arcsin\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$.

5. Решите уравнение:

а) $\sin \alpha = 0$; б) $\sin \alpha = 1$; в) $\sin \alpha = -1$;

г) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; д) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; е) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\sin \alpha = 0,6$; л) $\sin \alpha = -0,7$; м) $\sin \alpha = -\frac{3}{2}$;

н) $\sin 2\alpha = 0$; о) $\sin \frac{1}{2} \alpha = 1$; п) $\sin \frac{1}{3} \alpha = -1$;

$$p) \sin(\alpha - \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad c) \sin(2\alpha + \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$т) \sin(\alpha + 7\pi) = \frac{1}{2}.$$

6. При каких x равенство

а) $\sin(\arcsin x) = x$; б) $\arcsin(\sin x) = x$ выполняется, при каких нет? Приведите примеры.



Рис. 47

7. На числовой окружности задана точка α_1 (рис. 47). Укажите на числовой окружности точку $\alpha_2 = \arcsin(\sin \alpha_1)$.

8. Вычислите а) $\sin(\arcsin x)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$.

§ 2.8. Арккосинус

Зададим число β , удовлетворяющее условию $|\beta| \leq 1$. Покажем, что существует единственное число α , удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \alpha \leq \pi$, косинус которого равен β :

$$\cos \alpha = \beta.$$

Рассмотрим числовую окружность в системе координат xOy . Проведем прямую $x = \beta$. Так как $|\beta| \leq 1$, то

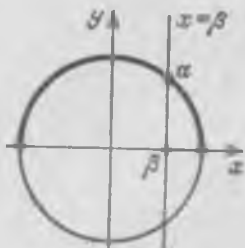


Рис. 48

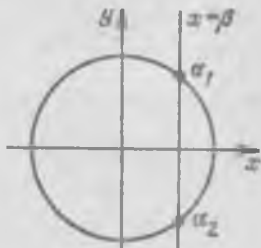


Рис. 49

эта прямая пересечет верхнюю полуокружность в точке с абсциссой $x = \beta$, причем эта точка единственная (рис. 48). Это означает, что существует единственное число α из отрезка $[0, \pi]$, косинус которого равен β .

Число α из отрезка $[0, \pi]$, косинус которого равен β , называется *арккосинусом* β и обозначается $\arccos \beta$.

Например, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;
 $\arccos 1 = 0$; $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$; $\arccos(-1) = \pi$.

Заметим, что $\arccos \beta$, где $|\beta| > 1$, не имеет смысла, потому что модуль косинуса любого числа не превышает 1. Например, $\arccos 2$ не имеет смысла.

Из определения арккосинуса следует, что если $-1 \leq \beta \leq 1$, то

$$\cos(\arccos \beta) = \beta.$$

С помощью арккосинуса можно записать все решения уравнения

$$\cos \alpha = \beta, \quad (14)$$

т. е. все α , для которых выполняется равенство (14).

Если $|\beta| > 1$, то уравнение (14) не имеет решений.

Если $|\beta| < 1$, то прямая $x = \beta$ пересекает числовую окружность в двух точках $\alpha_1 = \arccos \beta$ и $\alpha_2 = -\arccos \beta$ (рис. 49) решения уравнения (14) можно записать так:

$$\alpha = \arccos \beta + 2k\pi, \quad (15)_1$$

$$\alpha = -\arccos \beta + 2k\pi, \quad (15)_2$$

где k — любое целое число. Объединим формулы (15)₁ и (15)₂ в одну:

$$\alpha = \pm \arccos \beta + 2k\pi, \quad (15)$$

где k — любое целое число. Формула (15) дает все решения уравнения (14) и при $|\beta| = 1$.

Примеры.

1. Решениями уравнения $\cos \alpha = -1$ являются все $\alpha = \pi + 2k\pi$, где k — любое целое число (рис. 50, а).

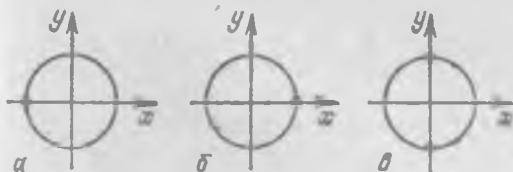


Рис. 50

2. Решениями уравнения $\cos \alpha = 1$ являются все $\alpha = \pi + 2k\pi = 2k\pi$, где k — любое целое число (рис. 50, б).

3. Решениями уравнения $\cos 2\alpha = 0$ являются все $2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, где k — любое целое число (рис. 50, в).

4. Решениями уравнения $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ являются все $\alpha = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется арккосинусом числа β ? Для каких β $\arccos \beta$ определен, для каких нет?

2. Вычислите $\arccos \beta$, если

- а) $\beta = 1$; б) $\beta = 0$; в) $\beta = -1$; г) $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
е) $\beta = \frac{1}{2}$; ж) $\beta = -\frac{1}{2}$; з) $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. На числовой окружности постройте точки:

- а) $\arccos \frac{1}{2}$; б) $\arccos \frac{1}{4}$; в) $\arccos \frac{3}{4}$;
г) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$; д) $\arccos \left(-\frac{1}{4}\right)$; е) $\arccos \left(-\frac{3}{4}\right)$.

4. Упростите выражение:

- а) $\cos \left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; б) $\cos (\arccos 0)$;
в) $\arccos \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\arccos \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;
д) $\arccos \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$; е) $\arccos (\sin 0)$.

5. Решите уравнение:

- а) $\cos \alpha = 0$; б) $\cos \alpha = 1$; в) $\cos \alpha = -1$;
г) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; д) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; е) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
ж) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; з) $\cos \alpha = -0,1$; и) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$;

6. а) $\cos 3\alpha = 0$; б) $\cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\cos 0,2\alpha = 1$.

7. При каких x равенство

- а) $\cos (\arccos x) = x$; б) $\arccos (\cos x) = x$

выполняется, при каких нет? Приведите примеры.

8. На числовой окружности задана точка α_1 (рис. 51). Укажите на числовой окружности точку $\alpha_2 = \arccos (\cos \alpha_1)$.

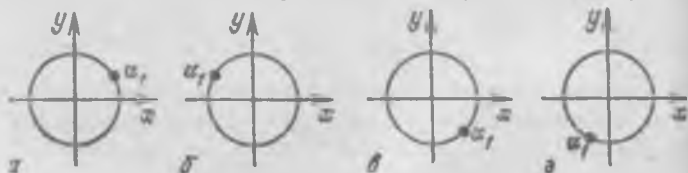


Рис. 51

9. Докажите, что

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$;

в) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$.

§ 2.9. Арктангенс и арккотангенс

На рис. 52 изображена числовая окружность и ось тангенсов. Очевидно, что для любого действительного числа β ($-\infty < \beta < +\infty$) на правой полуокружности найдется единственная точка α такая, что $\operatorname{tg} \alpha = \beta$.

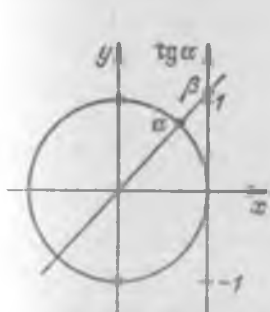


Рис. 52

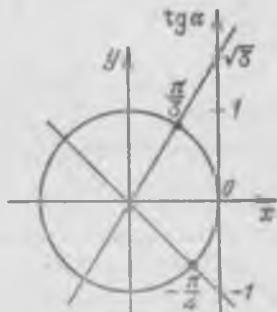


Рис. 53

Арктангенсом числа β ($-\infty < \beta < +\infty$) называется число α из промежутка $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен β и обозначается

$$\alpha = \operatorname{arctg} \beta.$$

Например, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} (-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} (\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (рис. 53).

На рис. 54 изображена числовая окружность и ось котангенсов. Очевидно, что для любого действительного β ($-\infty < \beta < +\infty$) на верхней полуокружности найдется точка α такая, что $\operatorname{ctg} \alpha = \beta$.

Арккотангенсом числа β ($-\infty < \beta < +\infty$) называется число из промежутка $(0, \pi)$, котангенс которого равен β и обозначается

$$\alpha = \operatorname{arcctg} \beta.$$

Например, $\operatorname{arccctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccctg} (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ (рис. 55).

Арккотангенс и арктангенс используются для записи решений уравнений вида $\operatorname{ctg} \alpha = \beta$ и $\operatorname{tg} \alpha = \beta$. Уравнение

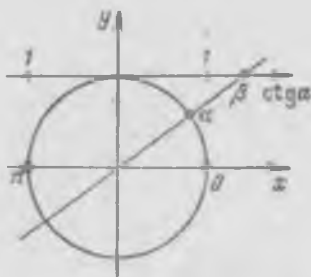


Рис. 54

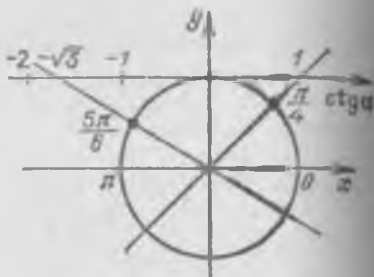


Рис. 55

$\operatorname{ctg} \alpha = \beta$ с учетом периодичности котангенса имеет решение $\alpha = \operatorname{arccctg} \beta + k\pi$, где k — любое целое число.

Уравнение $\operatorname{tg} \alpha = \beta$ с учетом периодичности тангенса имеет решение

$$\alpha = \operatorname{arctg} \beta + k\pi, \text{ где } k \text{ — любое целое.}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется а) $\operatorname{arccctg} \alpha$? б) $\operatorname{arctg} \alpha$?
2. Вычислите $\operatorname{arccctg} \beta$ и $\operatorname{arctg} \beta$, если
 - а) $\beta = 0$; б) $\beta = 1$; в) $\beta = -1$; г) $\beta = \sqrt{3}$;
 - д) $\beta = -\sqrt{3}$; е) $\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Изобразите на числовой окружности точки
 - а) $\operatorname{arctg} 2$; б) $\operatorname{arccctg} (-1,5)$; в) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right)$;
 - г) $\operatorname{arccctg} \frac{1}{4}$; д) $\operatorname{arccctg} 2$; е) $\operatorname{arctg} (-1,5)$.
4. Упростите выражение:
 - а) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 1)$; б) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} (-0,2))$,
 - в) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccctg} \sqrt{3})$; г) $\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;
 - д) $\operatorname{tg} (\operatorname{arccctg} (-\sqrt{3}))$, е) $\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

5. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} \alpha = 0$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 1$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$; д) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$;

ж) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$; з) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$; и) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

к) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; л) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; м) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

6. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} \alpha = 5$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = 3$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -2$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$; д) $\operatorname{tg} \alpha = -0,3$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = 1\frac{2}{3}$.

7. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$; б) $\operatorname{ctg} 0,5\alpha = 0$; в) $\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -1$;

г) $\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{4}\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 1$; д) $\operatorname{tg} 3\alpha = 7$; е) $\operatorname{ctg} 7\alpha = 3$.

8. При каких x равенства

а) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x) = x$; б) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccctg} x) = x$;

в) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x) = x$; г) $\operatorname{arccctg} (\operatorname{ctg} x) = x$

выполняются, при каких нет? Приведите примеры.

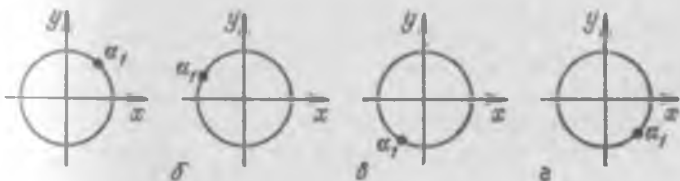


Рис. 56

9. На числовой окружности задана точка α_1 (рис. 56). Укажите на числовой окружности точку

а) $\alpha_2 = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \alpha_1)$; б) $\alpha_2 = \operatorname{arccctg} (\operatorname{ctg} \alpha_1)$.

10. Вычислите

а) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x)$; б) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccctg} x)$;

в) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x \right)$; г) $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$.

11. Докажите, что

а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg} (\operatorname{arccctg} x) = \frac{1}{x}$; в) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$.

§ 2.10. Обратная функция

Рассмотрим непрерывную возрастающую на $[a, b]$ функцию

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Ее график изображен на рис. 57. С помощью графика мы можем для каждого значения x из отрезка $[a, b]$ определить соответствующее значение $y = f(x)$. При этом, если x непрерывно возрастает от a до b , то y соответственно непрерывно возрастает от $c = f(a)$ до $d = f(b)$.

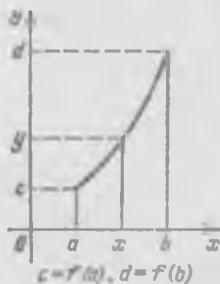


Рис. 57

С другой стороны, мы видим, что и обратно каждое значение y из отрезка $[c, d]$ соответствует одному и только одному значению x из отрезка $[a, b]$. Таким образом, возникает новая функция x от y , определенная на отрезке $[c, d]$, называемая *обратной функцией* к функции $f(x)$. Обозначим ее

$$x = \varphi(y), \quad c \leq y \leq d.$$

Эта функция тоже возрастает и непрерывна на $[c, d]$.

Итак, для каждой непрерывной возрастающей на $[a, b]$ функции $f(x)$ существует обратная ей функция x от y , определяемая следующим образом: каждому y из отрезка $[c, d]$ соответствует единственное значение x на отрезке $[a, b]$, такое что $y = f(x)$, где $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Отметим равенства

$$\varphi[f(x)] = x \quad (a \leq x \leq b),$$

$$f[\varphi(y)] = y \quad (c \leq y \leq d).$$

В самом деле,

$$\varphi[f(x)] = \varphi(y) = x \quad (a \leq x \leq b),$$

$$f[\varphi(y)] = f(x) = y \quad (c \leq y \leq d).$$

Отметим еще, что функция $f(x)$ может быть задана на интервале (a, b) , тогда утверждение остается верным, если считать, что $\varphi(y)$ определяется на интервале (c, d) , где

$$c = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad d = \lim_{x \rightarrow b} f(x),$$

т. е. c есть число, к которому стремится $f(x)$, когда x стремится к a , а d — число, к которому стремится $f(x)$, когда x стремится к b . Но может быть $c = -\infty$ или $d = +\infty$.

Функция f может быть задана на полуинтервале $[a, b)$, и тогда функция φ задается на полуинтервале $[c, d)$, где $c = f(a)$, $d = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$.

Аналогично, если f задана на $(a, b]$, то φ задана на $(c, d]$, где $c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $d = f(b)$.

Пример. Функция $y = x^2$ ($0 \leq x < +\infty$) непрерывна и возрастает на полуинтервале $[0, +\infty)$. Поэтому существует обратная к ней функция $x = \varphi(y)$ ($0 \leq y < +\infty$), которую условились обозначать так:

$$x = \sqrt{y} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Здесь $a = 0$, $b = \infty$, $c = 0^2 = 0$, $d = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$.

Замечание 1. Кривая на рис. 57 есть график функции $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$). В то же время она есть также график функции $x = \varphi(y)$ на отрезке $[c, d]$.

Если бы мы захотели получить график функции φ в виде

$$y = \varphi(x) \quad (c \leq x \leq d),$$

то можно рассуждать следующим образом. В системе координат xOy рисуем график функции (рис. 58)

$$x = f(y) \quad (a \leq y \leq b),$$

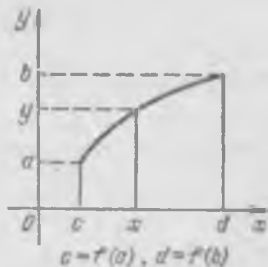


Рис. 58

т. е. значения независимой переменной y откладываем на оси ординат, а значение x откладываем на оси абсцисс. Полученная кривая автоматически будет графиком функции

$$y = \varphi(x) \quad (c \leq x \leq d).$$

Отметим, что графики функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Это свойство упрощает построение графиков обратных функций.

Замечание 2. По аналогии можно получить следующее утверждение. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и убывает на нем (т. е. если x возрастает от a до b , то $f(x)$ убывает от $c = f(a)$ до $d = f(b)$, $c > d$). Тогда существует обратная к функции f функция

$$x = \varphi(y) \quad (d \leq y \leq c),$$

убывающая на отрезке $[d, c]$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что значит, что существует обратная функция к данной непрерывной возрастающей функции $y = f(x)$?

2. Если непрерывная и возрастающая функция $y = f(x)$ задана на

а) отрезке $[a, b]$, б) интервале (a, b) ,

в) полуинтервале $[a, b)$, г) полуинтервале $(a, b]$, то на каком промежутке задана обратная ей функция?

3. Как по данной возрастающей непрерывной функции f построить обратную ей функцию в виде $y = \varphi(x)$?

§ 2.11. Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$

Функция

$$y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

непрерывна и, если x возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то y возрастает от -1 до 1 . Поэтому, как мы знаем, существует обратная к этой функции функция, т. е. каждому y из

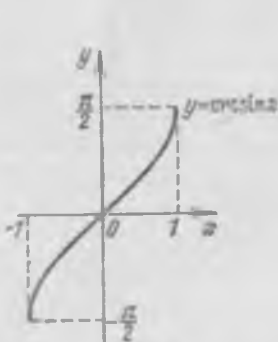


Рис. 59

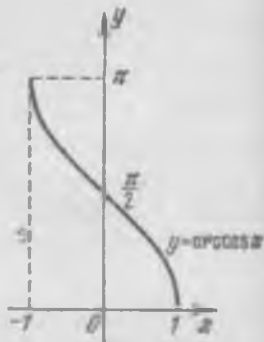


Рис. 60

отрезка $[-1, 1]$ соответствует единственное значение x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, для которого $y = \sin x$. Но тогда

$$x = \arcsin y \quad (-1 \leq y \leq 1).$$

Таким образом, функция $\arcsin y$ есть обратная функция к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Чтобы получить в системе координат xOy график функции

$$y = \arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

строим график функции (рис. 59)

$$x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Одновременно он является также графиком функции $y = \arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1$). Функция

$$y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

непрерывна, и если x возрастает от 0 до π , то y убывает от 1 до -1 . Но тогда, рассуждая как выше, получаем, что существует обратная ей функция, определяемая формулой $x = \arccos y$ ($-1 \leq y \leq 1$).

График функции

$$y = \arccos x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

в системе координат xOy совпадает с графиком функции (рис. 60)

$$x = \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi).$$

Функция

$$y = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и при этом, если x возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, она возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, существует обратная к ней функция

$$x = \operatorname{arctg} y \quad (-\infty < y < +\infty).$$

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ ($-\infty < x < \infty$) (см. рис. 61) совпадает с графиком $x = \operatorname{tg} y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ (и симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно биссектрисы первого координатного угла).

Справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad (16)$$

верное для любого a , удовлетворяющего неравенствам $-1 \leq a \leq 1$.

В самом деле, равенство (16) проверяется непосредственно при $a=0, 1, -1$. Если же $0 < a < 1$, то обратимся к числовой окружности (рис. 62), на которой отметим в I четверти точку B , имеющую ординату, равную a .

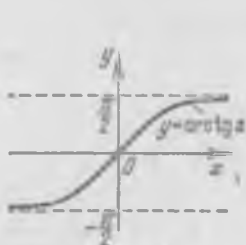


Рис. 61

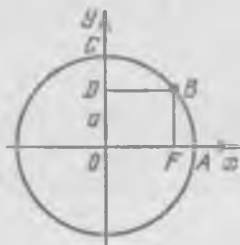


Рис. 62

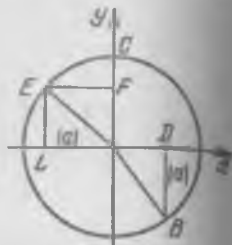


Рис. 63

Опустим из B на оси координат перпендикуляры. Отметим, что $a = BF = OD = \sin \angle AOB = \cos \angle BOC$. Поэтому

$$\angle AOB = \arcsin a, \quad \angle BOC = \arccos a,$$

$$\arcsin a + \arccos a = \angle AOB + \angle BOC = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть теперь $-1 < a < 0$. Отмечаем (рис. 63) на числовой окружности в IV четверти точку B , имеющую ординату, равную $a = -|a|$, и опускаем из B на ось x перпендикуляр BD . Отмечаем также на числовой окружности точку E , имеющую абсциссу, равную $a = -|a|$, и опускаем из E на оси координат перпендикуляры EL и EF . Очевидно, $\angle ECB = \angle AOB$, поэтому $\angle AOE - \angle AOB = \frac{\pi}{2}$. Так как $\arccos a = \angle AOE$, $\arcsin a = -\angle AOB$, то $\arccos a + \arcsin a = \angle AOE - \angle AOB = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое

а) $\arcsin x$? б) $\arccos x$? в) $\arctg x$?

2. Какой функции обратна функция

а) $\arcsin x$? б) $\arccos x$? в) $\arctg x$?

3. Как можно получить графики этих функций, если воспользоваться соответственно графиками функций $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$?

§ 2.12. Примеры решений тригонометрических уравнений

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin mx - \sin lx = 0 \quad (m-l \neq 0, \quad m+l \neq 0).$$

Решение.

$$2 \sin \frac{m-l}{2} x \cos \frac{m+l}{2} x = 0,$$

$$\sin \frac{m-l}{2} x = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{m+l}{2} x = 0,$$

$$\frac{m-l}{2} x = k\pi, \quad x = \frac{2k\pi}{m-l},$$

$$\frac{m+l}{2} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{m+l},$$

где k — любое целое число.

Ответ: $x = \frac{2k\pi}{m-l}$ и $x = \frac{(2k+1)\pi}{m+l}$, где k — любое целое число.

Подобным образом решаются уравнения

$$\begin{aligned} \sin mx + \sin lx &= 0, & \cos mx - \cos lx &= 0, \\ \cos mx + \cos lx &= 0 \end{aligned}$$

с помощью формул для суммы синусов и косинусов углов и разности косинусов.

В некоторых частных случаях уравнения рассмотренного вида можно решить другими способами. Вот пример.

Пример 2. $\sin 2x - \sin x = 0$.

Решение.

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0, \quad \sin x (2 \cos x - 1) = 0,$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = k\pi$ и $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\cos x = a, \quad \sin x = b,$$

где a и b — данные числа.

Решение. Если $a^2 + b^2 \neq 1$, то система не имеет решения, потому что $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ для любого x . Пусть теперь $a^2 + b^2 = 1$. Тогда точка (a, b) находится на число-

вой окружности. Она определяет некоторый угол α_0 , который и является решением задачи.

На оси x отмечаем точку, имеющую координату, равную a , и восстанавливаем из нее перпендикуляр до пересечения с окружностью в положительном направлении, если $b > 0$, или отрицательном, если $b < 0$. Точка пересечения и будет иметь координаты (a, b) .

Общее решение задачи записывается в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi,$$

где k — произвольное целое число.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

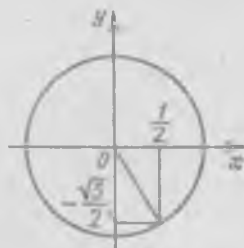


Рис. 64

Решение. Сумма квадратов правых частей системы равна 1. Поэтому точка $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ находится на числовой окружности (рис. 64). Ей соответствует угол (рис. 64) $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где k — произвольное целое число.

Пример 5. Решить уравнение

$$A \cos x + B \sin x = C. \quad (17)$$

Решение. Делим обе части уравнения на $\sqrt{A^2 + B^2}$. Получаем

$$a \cos x + b \sin x = c,$$

где

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как $a^2 + b^2 = 1$, то можно подобрать такой угол, что $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$. Заданное уравнение тогда можно записать в виде

$$\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = c$$

или

$$\cos(x - \alpha) = c. \quad (18)$$

Если $|c| > 1$, то уравнение (18), а следовательно (17), не имеет решений. Если же $|c| \leq 1$, то все реше-

записываются формулой

$$x - \alpha = \pm \arccos c + 2k\pi,$$

или

$$x = \alpha \pm \arccos c + 2k\pi,$$

где k — любое целое число.

Пример 6. Решить уравнение

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}.$$

Решение.

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin x = 1,$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

Пример 7. Решить уравнение $7 \sin^2 x - \sin x - 8 = 0$.

Решение. Выполним подстановку $\sin x = a$; решим уравнение $7a^2 - a - 8 = 0$; получим $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{8}{7}$.

Следовательно,

$$\sin x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k — любое целое число;

$$\sin x = \frac{8}{7},$$

нет решений, так как $\sin x$

не может быть больше 1.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

Пример 8. Решить уравнение $2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos x = 3$.

Решение.

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos x = 3, \quad 2 \cos 2x + \cos x = 3,$$

$$2(2 \cos^2 x - 1) + \cos x = 3, \quad 4 \cos^2 x + \cos x - 5 = 0,$$

$$\cos x = a, \quad 4a^2 + a - 5 = 0, \quad a_1 = -\frac{5}{4}, \quad a_2 = 1;$$

$$\cos x = -\frac{5}{4} \text{ или } \cos x = 1$$

В первом случае нет решений — не может быть $|\cos x| > 1$; во втором случае $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ответ: $2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Другое решение. Заметим, что в уравнении

$$2 \cos 2x + \cos x = 3$$

$2 \cos 2x \leq 2$, $\cos x \leq 1$, следовательно, равенство возможно лишь при одновременном выполнении условий

$$\begin{array}{l|l} 2 \cos 2x = 2 & \text{и} \quad \cos x = 1; \\ \cos 2x = 1, & x = 2k\pi, \\ 2x = 2n\pi, & \text{где } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = n\pi, & \\ \text{где } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots & \end{array}$$

Оба условия выполняются в точках

$$x = 2k\pi, \text{ где } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0. \quad (19)$$

Решение. Каждое слагаемое в левой части имеет степень 2. Очевидно, что $\cos x \neq 0$, так как в противном случае $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$, но в том и в другом случае равенство (19) неверно. Разделим правую и левую части на $\cos^2 x$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 5 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0, \\ \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = a$:

$$a^2 + 4a - 5 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = -5.$$

Отсюда

$$\begin{array}{l|l} \operatorname{tg} x = 1 & \text{или} \quad \operatorname{tg} x = -5, \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, & x = \operatorname{arctg}(-5) + k\pi, \\ \text{где } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; & \text{где } k=0, \pm 1, \pm 2. \end{array}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + k\pi, \operatorname{arctg}(-5) + k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

§ 2.13. Список основных формул тригонометрии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти все решения уравнения

$$1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.

2. Решить уравнение

$$\sin 2x = \sqrt{3} \sin x.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{4 + \sin x} = -2 \cos x.$$

4. Вычислить $\cos 2x$, если $\sin x = \frac{1}{3}$.

5. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

§ 3.1. Предел последовательности

Метод пределов — это основной метод, с которым оперирует математический анализ.

Чтобы уяснить, что такое предел, начнем с классической задачи. В прямоугольной системе координат задана фигура, ограниченная параболой (рис. 65) $y = x^2$, осью x и прямой $x = 1$. Требуется найти ее площадь. Вот как можно поступить.

Разделим отрезок $[0, 1]$ оси x на n равных частей точками

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$

и построим на каждой из этих частей прямоугольник, левый верхний угол которого достигает параболы. Тогда

получим заштрихованные на рис. 11 прямоугольники, сумма площадей которых S_n , очевидно, равна

$$S_n = 0 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \\ = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} *).$$

*) Мы воспользовались формулой

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

которая может быть введена следующим образом. Сложив левые и правые части равенств $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, соответствующих значениям $k = 1, 2, \dots, n-1$, получим уравнение

$$n^3 - 1 = 3\sigma_{n-1} + \frac{3(n-1)n}{2} + n - 1, \text{ где } \sigma_{n-1} = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2.$$

Решив его, получим $\sigma_{n-1} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$

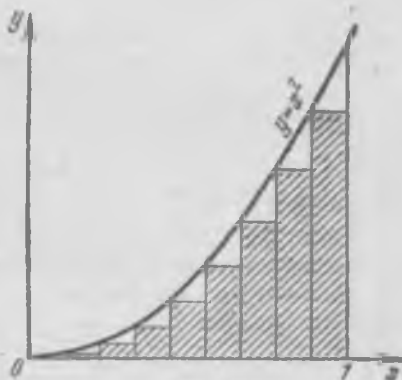


Рис. 65

Представим S_n в виде

$$S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{3} + \alpha_n. \quad (1)$$

Величина α_n хотя и имеет сложный вид, но обладает замечательным свойством: она стремится к нулю при неограниченном возрастании n . Такие величины называют *бесконечно малыми*.

Бесконечно малой называется переменная величина α_n , зависящая от натурального n , стремящаяся к нулю при неограниченном возрастании n .

Дадим формальное определение бесконечно малой величины.

Величина α_n , зависящая от натурального значения n , называется *бесконечно малой*, если, как бы ни было малое заданное положительное число ε , найдется число $N > 0$ настолько большое, что выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$.

Сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 65 прямоугольников есть тоже переменная величина, зависящая от натурального n . Мы показали, что она может быть записана следующим образом:

$$S = \frac{1}{3} + \alpha_n$$

где α_n есть бесконечно малая величина. Но тогда естественно считать, что S_n стремится при неограниченном возрастании n к числу $\frac{1}{3}$, и естественно считать, что $S = \frac{1}{3}$ есть площадь рассматриваемой фигуры. Поставленная задача решена.

В ходе рассуждений мы, во-первых, дали определенные площади рассматриваемой фигуры как числа S , к которому стремится сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 65 прямоугольников при неограниченном возрастании n , а во-вторых, нашли это число. Оказалось, что $S = \frac{1}{3}$.

Дадим определение предела. Пусть задана переменная x_n , зависящая от натурального $n = 1, 2, \dots$. Если x_n можно записать в виде суммы

$$x_n = a + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где a — некоторое постоянное число, α_n — бесконечно малая, то говорят, что x_n имеет своим пределом число a или x_n стремится к a , и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

или

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Приведем примеры переменных величин, зависящих от натурального n :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n}, & y_n &= -\frac{1}{n}, & z_n &= \frac{(-1)^n}{n}, \\ u_n &= q^n, & 0 < q < 1, & & v_n &= \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, \\ w_n &= (-1)^n, & \beta_n &= a. \end{aligned}$$

Переменные x_n , y_n , z_n и u_n — бесконечно малые; x_n и u_n стремятся к нулю, принимая положительные значения, убывая; y_n стремится к нулю, принимая отрицательные значения, возрастая; а z_n стремится к нулю, колеблясь. Величина v_n стремится к 1 ($\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$).

Переменная β_n есть на самом деле постоянная, равная для любого n одному и тому же числу a ($\lim \beta_n = a$). Что же касается величины w_n , то она ни к какому пределу не стремится, принимая последовательно значения $+1$ и -1 .

Очевидно, если α_n есть бесконечно малая, то ее предел равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите пределы переменных, представляя их как сумму постоянной и бесконечно малой:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2}$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3}{n^3}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1}$.

§ 3.2. Бесконечно большая величина

Антиподами бесконечно малых величин являются бесконечно большие величины.

Переменная x_n называется *бесконечно большой*, если, как бы ни было велико число $M > 0$, найдется такое N , что $|x_n| > M$ для всех $n > N$.

Если x_n бесконечно большая, то пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Может случиться, что бесконечно большая величина x_n начиная с некоторого n становится положительной; тогда пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

или отрицательной, тогда пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Вот примеры бесконечно больших величин:

$$x_n = n, \quad y_n = -n, \quad z_n = (-1)^n n, \quad u_n = n^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty.$$

Что же касается величины z_n , то про нее можно написать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

но здесь нельзя символ ∞ заменить ни символом $+\infty$, ни символом $-\infty$. Впрочем, мы часто будем писать ∞ вместо $+\infty$, если нет опасности недоразумений.

§ 3.3. Действия с пределами

Переменные x_n и y_n можно складывать, вычитать, умножать и делить, образуя величины

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n}.$$

В случае частного надо предполагать, что $y_n \neq 0$ для любых $n = 1, 2, 3, \dots$

Справедливы следующие, в сущности очевидные, свойства пределов:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, если $x_n = c$ постоянная, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right).$$

Эти свойства надо понимать в том смысле, что если существуют пределы, фигурирующие в правых частях равенств (2), то автоматически существуют пределы в левых частях соответствующих равенств и справедливы сами равенства.

Добавим еще, что

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow A \neq 0 \\ y_n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = \infty, \quad \lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n \neq 0}} \frac{1}{x_n} = \infty. \quad (3)$$

Более сложный вопрос возникает при вычислении предела частного $\frac{x_n}{y_n}$, когда и $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow 0$ или если $x_n \rightarrow \infty$ и $y_n \rightarrow \infty$. В таких случаях заранее невозможно сказать, чему равен предел. В зависимости от индивидуальных свойств переменных x_n и y_n предел может быть любым конечным или бесконечным числом *). Может также случиться, что отношение $\frac{x_n}{y_n}$ не имеет никакого предела, даже бесконечного.

Например, пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$; тогда, очевидно, $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty, \quad \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Если же $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ ни к какому пределу не стремится.

Мы рассматривали переменные x_n , зависящие от натурального n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Такие переменные называют *последовательностями*.

*) Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ удобно называть бесконечными числами, хотя это вовсе не числа, и тогда обычные числа называют конечными числами.

Пример 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пояснение. У дроби $\frac{n+3}{n+1}$ как числитель, так и знаменатель стремится к бесконечности, и непосредственно нельзя сказать, к какому пределу она стремится. Однако после деления числителя и знаменателя на n обнаружилось, что числитель стремится к 1 и знаменатель стремится к 1. Это дает возможность воспользоваться формулой о пределе частного.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 100n^3 - 2n^2 + 1) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^4 \left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Пояснение. Сразу неясно, к чему стремится исходное выражение: первый член n^4 стремится к $+\infty$, а член $-100n^3 - 2n^2$ стремится к $-\infty$. Но после вынесения за скобки n^4 все проясняется: множитель $n^4 \rightarrow +\infty$, а $\left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) \rightarrow 1 \neq 0$. Но тогда произведение стремится к ∞ и даже к $+\infty$ (см. (3)).

Пример 3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n+2})^3 - (\sqrt[3]{n})^3}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2} \sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2} \sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = 0, \end{aligned}$$

потому что знаменатель последней дроби стремится к ∞ .

Нет общего способа вычисления предела разности двух переменных, каждая из которых стремится к $+\infty$. В каждом конкретном случае приходится придумывать свой способ.

Пример 4. Сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q ($q \neq 1$) и первым членом 1

равна

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - q^n \frac{1}{1-q}. \quad (4)$$

Если прогрессия убывающая, т. е. если $|q| < 1$, то второй член правой части (4) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$-q^n \frac{1}{1-q} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1),$$

который называют *суммой ряда*

$$1 + q + q^2 + \dots \quad (5)$$

(состоящего из бесконечного числа членов!), и при этом пишут

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots,$$

т. е. приписывают выражению (5) число, равное сумме ряда. В этом случае говорят, что *ряд (5) сходится*.

Если $|q| > 1$, то

$$q^n \frac{1}{1-q} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty);$$

при $q = 1$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 1 + \dots + 1 = n \rightarrow \infty.$$

Если же $q = -1$, то

$$S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 1, \dots$$

и S_n не стремится к пределу.

Из сказанного следует, что если условие $|q| < 1$ не выполняется, то S_n не стремится к конечному пределу при $n \rightarrow \infty$. В этом случае говорят, что ряд (5) *расходится*. Ему не приписывают никакого числа.

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на свойства переменных, имеющих предел (конечный и бесконечный), выраженные формулами (2). Надо знать также, что переменная, имеющая предел, равный a , есть сумма $a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая. О самом же понятии бесконечно малой для наших целей достаточно иметь чисто интуитивное представление, выясненное на примерах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Приведите примеры бесконечно малых x_n , зависящих от натурального $n = 1, 2, \dots$

2. Что значит, что переменная x_n ($n = 1, 2, \dots$) имеет предел, равный числу a ? Приведите примеры.

3. Каким свойством обладает переменная x_n , называемая бесконечно большой? Приведите примеры.

4. Что значит $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$? Приведите примеры.

5. По каким правилам вычисляют пределы суммы, разности, произведения и частного переменных x_n и y_n ?

6. Что называется суммой убывающей геометрической прогрессии?

7. Вычислить пределы:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3n^2+1}{n^3-100n-5}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n}{n^2-1}$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3-10n^2+2n-1)$; 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3-10n^2+2n-1)$;

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2-10n^2+1}$.

§ 3.4. Предел $\frac{\sin x}{x}$

Рассмотрим функцию (рис. 66)

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Она определена для всех значений x , за исключением $x=0$. Посмотрим, как изменяется эта функция, когда x

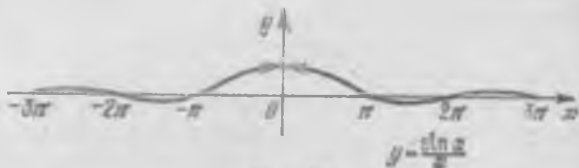


Рис. 66

приближается к нулю все ближе и ближе, оставаясь отличным от нуля. Вот таблица

x	0,50	0,10	0,05
$\frac{\sin x}{x}$	0,9589	0,9983	0,9996

Таблица наводит на мысль, что когда независимая переменная x приближается к 0, оставаясь положительной, функция приближается к 1. Этот факт можно получить из геометрических соображений. На рис. 67 изображена окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Пусть $\angle AOC = \alpha$. Тогда $AB = \sin \alpha$, $AD = \operatorname{tg} \alpha$.

Но тогда, как видно из рисунка (длина дуги окружности больше стягиваемой ею хорды и меньше encompassing ее ломаной),

$$2AB < 2(\widehat{AC}) < 2AD.$$

Поэтому

$$2 \sin \alpha < 2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1.$$

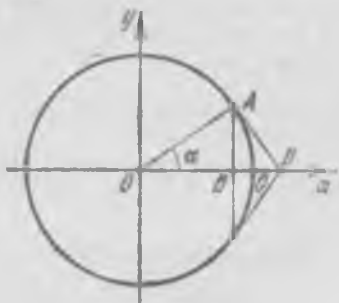


Рис. 67

Если теперь α приближать (стремить) к 0, то функция $\cos \alpha$, как это видно из графика (см. рис. 67), будет приближаться к 1. Но функция $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ находится все время между $\cos \alpha$ и 1. Это показывает, что она стремится к 1, когда α стремится к нулю, оставаясь положительной. Этот факт записывают так:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \quad (6')$$

и говорят, что предел функции $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, когда α стремится к нулю, принимая положительные значения, равен 1.

Но если $\alpha \rightarrow 0$, принимая отрицательные значения, то указанный предел все равно существует и равен 1. Это получается из (6') посредством замены переменной $\alpha = -t$,

в силу которой, если $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha < 0$, то $t \rightarrow 0$, $t > 0$:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha < 0}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha < 0}} \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad (6'')$$

Равенства (6') и (6'') объединяют в одно:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \quad (6)$$

и говорят, что предел $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при $\alpha \rightarrow 0$ равен 1.

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y/2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(2 \frac{\sin y}{y} \right) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Чтобы свести вычисление этого предела к пределу (6), делаем замену переменной x на y при помощи равенства $y = 2x$. Очевидно, $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{2(x/2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Здесь сделана замена $\frac{x}{2} = y$, где $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$.

2. Повторите вывод формулы (6) и запомните эту формулу.

§ 3.5. Предел функции

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$. Пусть она определена в некоторой правой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a . Это значит, что она определена для значений x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + \delta$, где δ — некоторое положительное число.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет правый предел в точке a , равный A , если из того, что x приближается (стремится) к a , оставаясь в правой окрестности точки a , следует, что $f(x)$ приближается к A . Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A.$$

Аналогично, если функция $y = f(x)$ определена в левой окрестности точки a , за исключением, быть может, точки a , т. е. она задана для значений x , удовлетворяющих неравенствам $a - \delta < x < a$ ($\delta > 0$) при некотором $\delta > 0$, то говорят, что она имеет левый предел в точке a , равный числу B , если из того, что x приближается к a , оставаясь в левой окрестности a , следует, что $f(x)$ приближается (стремится) к B . Этот факт записывают так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = B.$$

Если существуют левый и правый пределы функции $y = f(x)$ в точке a и они равны одному и тому же числу A , то говорят, что функция имеет предел в точке a , равный A , и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

В этом случае само собой разумеется, что функция f определена в некоторой полной окрестности $a - \delta < x < a + \delta$ точки a за исключением, быть может, самой точки a .

Функция $y = \frac{\sin x}{x}$, которую мы рассмотрели выше, определена для всех значений x , за исключением $x = 0$. Мы уже знаем, что эта функция имеет предел при $x \rightarrow 0$, равный 1.

Формально выражение «при x , стремящемся к a , функция $f(x)$ стремится к A » надо понимать следующим образом: для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

для всех x , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |x - a| < \delta.$$

О функции $f(x)$ говорят, что она *стремится к ∞ при $x \rightarrow a$* , если для значений x , достаточно близких к a , она может сделаться по абсолютной величине больше как

угодно большого числа $M > 0$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Можно при этом говорить о правом и левом пределе в точке a и заменять символ ∞ на $+\infty$ или $-\infty$, если функция вблизи a положительна или, соответственно, отрицательна.

Например, мы знаем, что

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$$

и, что точнее (см. рис. 42),

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x > \pi/2}} \operatorname{tg} x = -\infty. \quad (7')$$

Заметим, наконец, что в этих определениях конечное число a (точку числовой прямой) можно заменить на символ ∞ , или $+\infty$, или $-\infty$.

Вспомним, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ задана для всех значений x , т. е. на интервале $-\infty < x < \infty$. Для нее справедливы равенства (см. § 2.11 рис. 61)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2.$$

§ 3.6. Действия с пределами функций

Так же как для пределов переменных, пробегающих последовательности, для пределов функций имеют место аналогичные свойства:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x), \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x), \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0). \quad (10)$$

В частности, если $f(x)$ есть постоянная ($f(x) = c$), то следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} [c\varphi(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x). \quad (11)$$

Эти свойства снова надо понимать в том смысле, что если существуют конечные пределы в правых частях равенств

(8) — (11), то автоматически существуют пределы в левых частях этих равенств и выполняются сами равенства.

Верны также свойства ($f(x) \neq 0$):

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$;

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

Замечание. В приведенных равенствах a может быть не только конечным, но и бесконечным, т. е. может быть $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow \infty$.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^2 + bx + c) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^2) + \lim_{x \rightarrow x_0} (bx) + \lim_{x \rightarrow x_0} c = \\ &= a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^2 + b \lim_{x \rightarrow x_0} x + c = ax_0^2 + bx_0 + c \end{aligned}$$

при x_0 конечном.

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)} = \frac{4 + 4}{2 + 2} = 2.$$

В этих примерах, чтобы вычислить предел функции при $x \rightarrow a$, достаточно подставить в нее $x = a$. В частности, в примере 2 это можно сделать потому, что как числитель, так и знаменатель стремятся к конечным пределам и при этом предел знаменателя не равен нулю.

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3} = \infty$.

Здесь нельзя применить свойство (10), выражающее, что предел частного равен частному пределов, потому что предел знаменателя равен нулю. С другой стороны, надо считать очевидным, что если числитель дроби стремится к конечному числу, не равному нулю, а знаменатель стремится к нулю, то дробь стремится к бесконечности.

Пример 4. Требуется вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Решение. В данном случае числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю и соображения, приведенные в примере 3, тоже неприменимы. Но вот как можно поступить. Для любого $x \neq 2$ имеем $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, а так как при определении предела при $x \rightarrow 2$ совсем не прини-

мается во внимание значение f в точке $x=2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2).$$

Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $\frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)}$, достаточно вычислить предел более простой функции $x + 2$. Последний при $x \rightarrow 2$, очевидно, равен 4. Ведь

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = 4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ и $\varphi(x) = x + 2$ являются разными функциями. Первая из них определена

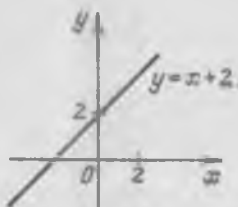


Рис. 68

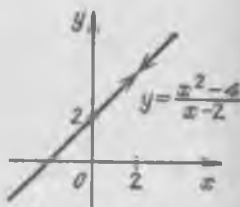


Рис. 69

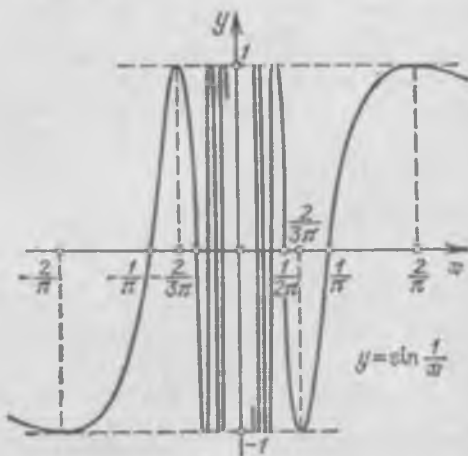


Рис. 70

для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x . Однако при вычислении предела функции при $x \rightarrow 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x=2$, и так как $f(x)=\varphi(x)$ для $x \neq 2$, то (рис. 68 и 69)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

Пример 5. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ (график ее изображен на рис. 70) определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки $x=0$ за исключением самой точки $x=0$. Эта функция не имеет предела при $x \rightarrow 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений $x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) стремится к нулю, и в то же время $f(x_k) = (-1)^k$ не стремится при $k \rightarrow \infty$ ни к какому пределу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте утверждения о пределе суммы, разности, произведения и частного функций.

2. Что значит, что функция стремится

а) к ∞ , б) к $+\infty$, в) к $-\infty$

при $x \rightarrow a$?

3. Вычислить пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \operatorname{ctg} x$; 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{ctg} x$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 20x^2 + 1)$; 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 20x^2 + 1)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$; 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$.

§ 3.7. Непрерывность функции

На рис. 71 изображен график функции $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$). Его естественно назвать *непрерывным* графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) x отрезка $[a, b]$. Близкая к ней другая точка x' отрезка $[a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число положительное или отрицательное, называемое *приращением* x .

Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции f* в точке x , соответствующим приращению Δx . На рис. 71 Δy равно длине отрезка BC .

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь график функции $F(x)$, изображенный на рис. 72. Он состоит из двух непрерывных кусков

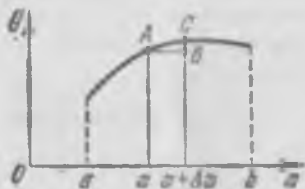


Рис. 71

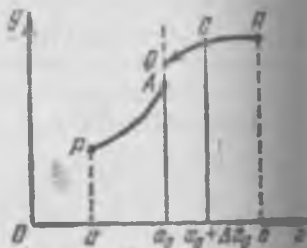


Рис. 72

PA и QR . Однако эти куски не соединены непрерывно, и потому график естественно назвать *разрывным*. В точке x_0 нам надо как-то определить нашу функцию; условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0 ; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двузначной в точке x_0 .

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0 , стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0 , оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ .

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение. Функция f , заданная на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной в точке x этого отрезка*, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx , стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю при $\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$. Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (12) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (13)$$

Запись (13) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его. В частности, Δx может пробегать любую стремящуюся к нулю последовательность, значения которой могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке x этого отрезка, т. е. в этой точке для нее не выполняется свойство (13) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной в точке x* .

Функция, изображенная на рис. 71, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$, функция же, изображенная на рис. 72, очевидно, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$ за исключением точки x_0 , потому что для последней соотношение (13) не выполняется, когда $\Delta x_0 \rightarrow 0$, оставаясь положительным.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной на нем*.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции).

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s , пройденного телом, от времени t . Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризую-

[a, b].²⁾ Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x$ принадлежит

щуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды — твердые, жидкие или газообразные, например металлы, воду, воздух. На самом деле всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной, без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности, естественно, играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

Из (12) следует

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0) + (f(x) - f(x_0))] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f(x_0) + 0 = f(x_0),\end{aligned}$$

и мы получили равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (14)$$

которое может служить другим эквивалентным определением непрерывности f в точке x_0 : если функция f непрерывна в точке x_0 , то она должна быть определена в окрестности этой точки, в том числе в самой точке x_0 , должен существовать предел f в точке x_0 и должно выполняться равенство (14).

Равенство (14) можно еще записать так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right). \quad (15)$$

Говорят, что если функция f непрерывна в точке x_0 , то «предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен f от $\lim x$ », или еще говорят, что в этом случае символы f и $\lim$ перестановочны.

§ 3.8. Элементарные функции

Функции x^p , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и функции a^x и $\lg_a x$, которые рассматриваются в следующей главе, называются *простейшими элементарными функциями*. Они непрерывны на областях их определения (интервалах или отрезках). Это надо учитывать при вычислении пределов этих функций. Справедливы, например, равенства:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n \quad (n = 1, 2, \dots, -\infty < x_0 < \infty);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad (p \neq 0, 0 < x_0 < \infty);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a > 0, a \neq 1, -\infty < x_0 < \infty);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad (a > 0, a \neq 1, 0 < x_0 < \infty);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \quad \left(x_0 \neq \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi, \right. \\ \left. k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right);$$

$$8) \lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \quad (-1 \leq x_0, x \leq 1);$$

$$9) \lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad (-1 \leq x_0, x \leq 1);$$

$$10) \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty).$$

Если простейшие элементарные функции комбинировать, разрешая применять конечное число раз операции сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, то будем получать функции, которые называются *элементарными функциями*, например, $2 + x^3$, $\sqrt{1 - x^2}$, $\cos^3 x$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\frac{2-x}{x+1}$ — элементарные функции.

§ 3.9. Непрерывность сложной функции

При вычислении пределов функции надо учитывать, что если функция $x = \varphi(u)$ непрерывна в точке u_0 , а функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(u_0)$, то функция

$$F(u) = f[\varphi(u)]$$

непрерывна в точке u_0 . Ведь

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow u_0} F(u) &= \lim_{u \rightarrow u_0} f[\varphi(u)] = \lim_{x = \varphi(u) \rightarrow x_0} f[\varphi(u)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = F[\varphi(u_0)].\end{aligned}\quad (16)$$

Пример 1. Функцию $y = \sin x^3$ можно записать через две непрерывные функции $y = \sin u$, $u = x^3$, поэтому она тоже непрерывна для всех x .

Пример 2. Функцию

$$y = \sqrt{1-x}$$

можно записать в виде цепи функций

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1-v, \quad v = x^2.$$

Первая из этих трех функций непрерывна для $u \geq 0$, вторая непрерывна для всех v , и третья непрерывна для всех x . Это показывает, что исходная функция непрерывна для всех тех x , для которых $1-x^2 \geq 0$, т. е. для x , удовлетворяющих неравенствам $-1 \leq x \leq 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выяснить, для каких x непрерывны функции $\cos^3 x$, $\cos 3x$, $\lg 2x$, $x^3 + 2x - 1$, $\frac{x+3}{x-1}$.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которыми оперирует математический анализ.

§ 3.10. Разрывные функции

Разрывные функции описывают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками.

Пример 1. Упругий шарик двигался прямолинейно и равномерно со скоростью v_0 . В момент времени t_0 он ударился о стенку и после этого стал двигаться в противоположном направлении с той же скоростью v_0 . Зависимость скорости шарика от времени t изображена графиком на рис. 73, разрывным в точке t_0 .

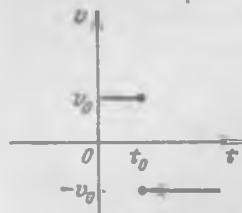


Рис. 73

Практически можно считать, что скорость в момент t_0 изменилась мгновенно: в момент t_0 она еще равнялась v_0 , а при $t > t_0$ стала равной $-v_0$.

График изображает функцию $v(t)$, определяемую следующими равенствами:

$$v(t) = \begin{cases} v_0 & (t \leq t_0), \\ -v_0 & (t > t_0). \end{cases}$$

Она разрывна при $t = t_0$ и непрерывна для остальных $t (t \neq t_0)$.

Пример 2. Зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий находящегося в ней тепла, когда t изменяется между -10° и $+10^\circ$, если принять условно, что при -10° величина $Q = 0$, выражается следующими формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 0,5t + 5, & -10 \leq t < 0, \\ t + 85^*, & 0 < t \leq 10. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной: многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например $f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, очевидно, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 74.



Рис. 74

На рис. 66 изображен график функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Она определена и непрерывна для всех $x \neq 0$. Непрерывность следует из того, что функции $y = \sin x$ и $y = x$ отдельно непрерывны, поэтому их частное тоже есть непрерывная функция для тех x , для которых знаменатель не равен нулю, т. е. для всех x , исключая $x = 0$.

Из графика видно, и мы это подкрепили выше вычислениями, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Положив $f(0) = 1$, мы получим, что функция $f(x)$ будет определена и непрерывна для всех x , в том числе и $x = 0$.

* Удельная теплота таяния льда при 0°C равна 80 кал. на грамм.

Обратим внимание на график функции $y = \sin \frac{1}{x}$, изображенный на рис. 70. Эта функция не определена при $x=0$, и ее пределы в точке $x=0$ (правый и левый) не существуют. Следовательно, функция $\sin \frac{1}{x}$ будет иметь разрыв в точке $x=0$ при любом доопределении ее в этой точке.

Часто встречаются функции $f(x)$, непрерывные на некотором интервале, за исключением отдельных точек x_0 , где

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Говорят, что в таких точках функция f обращается в бесконечность. Например, функция

$$\frac{x^2 + 1}{(x-2)(x+3)}$$

непрерывна на $(-\infty, \infty)$, за исключением точек $x=2$, $x=-3$, где она обращается в бесконечность:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x+3)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x+3)} = \infty.$$

З а м е ч а н и е. Надо знать два определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 : 1) на языке приращений (если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$) и 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Надо знать также, что если функция $f(x)$ непрерывна в любой точке интервала (отрезка), то ее график непрерывен на этом интервале (отрезке), и обратно, непрерывность графика $f(x)$ на интервале (отрезке) влечет непрерывность $f(x)$ во всех его точках. Функция разрывна в точке x_0 , если она не является непрерывной в ней.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Что такое приращение Δy функции $y = f(x)$ в точках x , соответствующее приращению аргумента Δx ?
2. Сформулируйте непрерывность функции $y = f(x)$
 - а) на языке свойств ее графика,
 - б) при помощи Δy и Δx .
3. Если функция f непрерывна в точке x_0 , то как она ведет себя при $x \rightarrow x_0$?
4. Приведите примеры разрывных функций.

5. Перечислите простейшие элементарные функции.

6. Как определяются элементарные функции? Приведите примеры.

7. Приведите примеры функций, обращающихся в точку в бесконечность.

8. В каких точках обращаются в бесконечность функции

$$\frac{1}{x^3}, \quad \frac{x+1}{x^3-3x+2}, \quad \frac{x^2+x+2}{x-3}, \quad \frac{x-2}{x+5}?$$

9. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ И ОБЩАЯ СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Свойства функции a^x

Показательная функция a^x для положительного числа a , не равного 1 ($a > 0, a \neq 1$), определялась в школе на различных этапах обучения для x натуральных, целых и рациональных. Ниже она будет определена для произвольных действительных x .

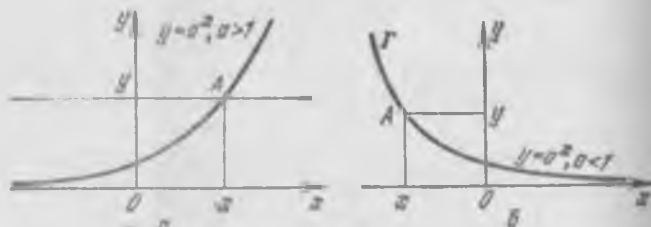


Рис. 75

Имеют место следующие фундаментальные свойства показательной функции:

$$a^0 = 1, \quad (1)$$

$$a^x > 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2)$$

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad (-\infty < x, y < \infty), \quad (3)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (4)$$

и, если $a > 1$ (рис. 75, а), то

$$a^x < a^y \quad (-\infty < x < y < \infty), \quad (5)$$

$$a^x \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

$$a^x \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Если же $a < 1$ (рис. 75, б), то в силу равенства

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x},$$

и из (4), (5), (6) следует, что

$$a^x > a^y \quad (-\infty < x < y < \infty), \quad (5')$$

$$a^x \rightarrow 0, \quad \text{если } x \rightarrow +\infty, \quad (6')$$

$$a^x \rightarrow +\infty, \quad \text{если } x \rightarrow -\infty. \quad (7')$$

Кроме того, справедливо свойство: *показательная функция a^x непрерывна на всей действительной оси.*

На рис. 75 изображены графики a^x при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

§ 4.2. a^x для целых и рациональных x

Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \dots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a , а число a^{-n} — при помощи равенства

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

По определению $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Этим функция a^x определена для любых целых n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Свойства (1) — (7) для целых x проверяются легко. Если q — натуральное, то число $a^{1/q}$ определяется как арифметическое значение корня q -й степени из a , т. е. $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ есть такое неотрицательное число, q -я степень которого равна a :

$$(a^{1/q})^q = a.$$

На самом деле это число положительное, потому что q -я степень нуля есть нуль, а в данном случае $a > 0$.

Возникает вопрос о существовании числа $a^{1/q}$, т. е. есть ли на самом деле такое положительное число, q -я степень которого равна a . Да, есть. Убедимся в этом. Функция

$$y = x^q,$$

где q — натуральное число, имеет для значений $x \geq 0$ график Γ вида, как на рис. 76. Ордината y точек Γ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, когда ее абсцисса непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$. Проведем выше оси x прямую, параллельную оси x , на расстоянии, равном a .

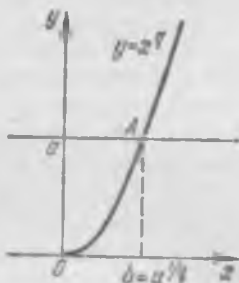


Рис. 76

Она пересекает Γ в одной-единственной точке A , абсциссу которой обозначим через b :

$$b^q = a.$$

Следовательно,

$$b = a^{1/q}.$$

Мы доказали существование числа $b = a^{1/q}$ графическим методом. Можно доказать это и формально, не обращаясь к графику. Число b — единственное: любое другое число, возведенное в степень q , дает число либо большее, чем a , либо меньшее, чем a .

Из единственности вытекает следующий факт: если A и B — положительные числа и

$$A^q = B^q,$$

то

$$A = B.$$

В самом деле, A и B суть арифметические значения корня q -й степени из одного и того же числа. Но тогда $A = B$, потому что арифметическое значение корня q -й степени из положительного числа единственно.

Пусть теперь p/q есть произвольное положительное рациональное число (p и q — целые, $q > 0$).

По определению

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q} \quad \text{или} \quad a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}. \quad (8)$$

Здесь первое равенство дает определение $a^{p/q}$, второе же можно доказать. В самом деле, если возвести третий член в (8) в q -ю степень, то получим a^p , а если возвести второй член (8) в q -ю степень, то тоже получим a^p :

$$(\sqrt[q]{a})^{pq} = [(\sqrt[q]{a})^q]^p = a^p.$$

Этим функция a^x определена для любых рациональных x . Ее свойства (1) — (7) п. 4.1 для рациональных x , y вытекают из соответствующих свойств корней. Например, если $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$ дроби (q, s — натуральные и p, r — целые), то

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{rq}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \sqrt[qs]{a^{rq}} = \\ &= \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{s+y}, \end{aligned}$$

§ 4.3. a^x для действительных x

Показательной функцией a^x называется непрерывная функция, определенная на действительной оси x , вычисляемая для рациональных значений $x = \frac{p}{q}$ по формуле

$$a^x = \sqrt[q]{a^p}.$$

Из этого определения следует, что если x есть иррациональное число, то для того чтобы вычислить a^x , надо взять любую последовательность рациональных чисел r_k , стремящуюся к x ($r_k \rightarrow x$), и положить a^x равным пределу переменной a^{r_k} , когда $r_k \rightarrow x$, т. е.

$$\lim_{r_k \rightarrow x} a^{r_k} = a^x. \quad (9)$$

В системе координат xOy мысленно отметим все точки (x, a^x) для рациональных значений x (рис. 77).

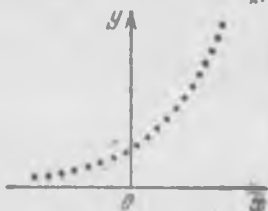


Рис. 77

График изображен пунктирной линией, чтобы подчеркнуть, что он состоит из точек, соответствующих только рациональным значениям x . Это точки вида $(\frac{p}{q}, \sqrt[q]{a^p})$, где p, q — целые и $q \neq 0$.

Оказывается, этот график можно продолжить для любых иррациональных x единственным образом, так что пунктирная линия превращается в непрерывную линию, график непрерывной функции a^x .

Доказательство свойств (1)–(7) п. 4.1 для действительных x, y может быть получено на основании того, что эти свойства верны для рациональных x, y , применением метода пределов.

Например, пусть x и y — данные действительные числа; вводим две последовательности рациональных чисел r_k и p_k , для которых

$$r_k \rightarrow x, \quad p_k \rightarrow y.$$

Тогда

$$a^x a^y = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{r_k} \lim_{k \rightarrow \infty} a^{p_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (a^{r_k} a^{p_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{r_k + p_k} = a^{x+y}.$$

Мы получим свойство (3) для действительных x, y .

Замечание. Сформулированное выше определение показательной функции требует обоснования. Именно,

требуется доказать, что существует, и притом единственная, функция, указанная в определении.

Ниже выводится неравенство (неравенство Бернулли), на основе которого возможно провести это доказательство.

§ 4.4. Неравенство Бернулли

Рассмотрим функцию a^x на отрезке $[c, d]$. Положим $M = a^d$. Справедливо неравенство ($a > 1$)

$$|a^y - a^x| \leq 2M(a-1)|x-y|, \quad c \leq x, \quad y \leq d, \quad |x-y| < 1, \quad (10)$$

называемое *неравенством Бернулли*.

Это неравенство показывает, что если приращение $y-x$ аргумента x мало, то соответствующее ему приращение показательной функции $a^y - a^x$ тоже мало, т.е. функция a^x непрерывна.

Пример. Вычислить приближенно $3^{\sqrt{2}}$. Определить абсолютную погрешность.

Решение. На микрокалькуляторе получаем

$$\sqrt{2} \approx 1,4142136,$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4142136} = 4,728817 \approx 4,72882.$$

Абсолютная погрешность не превышает ($a=3$, $|x-y| < 10^{-1}$, $\sqrt{2} < 2=d$, $M < 3^2$):

$$2M(a-1) \cdot 10^{-1} \leq 2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 36 \cdot 10^{-1} < 10^{-1}.$$

Поэтому результат естественно округлить до пятого знака после запятой:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4,72882.$$

Дадим обоснование неравенства (10). Отметим прежде всего неравенство

$$(1+\alpha)^N \geq 1+N\alpha \quad (\alpha > 0, \quad N=1, 2, 3, \dots). \quad (11)$$

При $N=1$ оно тривиально. Допустим теперь, что оно верно при $N-1$:

$$(1+\alpha)^{N-1} \geq 1+(N-1)\alpha.$$

Тогда оно верно и при N :

$$(1+\alpha)^N = (1+\alpha)^{N-1}(1+\alpha) \geq [1+(N-1)\alpha](1+\alpha) = 1+N\alpha+(N-1)\alpha^2 \geq 1+N\alpha.$$

Мы доказали неравенство (11) по индукции (см. далее § 11.2).

Пусть теперь $a > 1$ и N — натуральное число, тогда $a^{1/N} > 1$ и

$$a^{1/N} = 1 + \alpha \quad (\alpha > 0), \quad a = (1 + \alpha)^N \geq 1 + N\alpha,$$

$$a - 1 \geq N\alpha, \quad \frac{a-1}{N} \geq \alpha.$$

Следовательно, $a^{1/N} - 1 \leq \frac{a-1}{N}$.

Пусть теперь h — произвольное рациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < h < 1$. Подберем натуральное N так,

$$\frac{1}{N+1} \leq h < \frac{1}{N}.$$

Тогда

$$a^h - 1 < a^{1/N} - 1 \leq \frac{a-1}{N} = \frac{a-1}{N+1} \cdot \frac{N+1}{N} \leq 2(a-1)h, \quad (12)$$

потому что

$$\frac{1}{N+1} \leq h, \quad \frac{N+1}{N} = 1 + \frac{1}{N} < 2.$$

Пусть теперь x и y — рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $|x-y| < 1$, $c \leq x$, $y \leq d$ и $M = a^d$; тогда на основании неравенства (12), считая, что $y > x$ и $y-x=h$, получаем

$$|a^x - a^y| = a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) < \\ < M \cdot 2(a-1)(y-x) = 2M(a-1)|x-y|.$$

Мы доказали неравенство Бернулли для рациональных чисел x, y ($M = a^d$, $c \leq x$, $y \leq d$, $0 < y-x < 1$):

$$|a^x - a^y| \leq 2M(a-1)|x-y|.$$

Если x — рациональное число и переменная y_k ($k=1, 2, \dots$), пробегая рациональные числа, стремится к x , то имеет место неравенство $|a^x - a^{y_k}| \leq 2M(a-1)|x-y_k|$. Правая его часть при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю ($x-y_k \rightarrow 0$), следовательно, и левая. Откуда для рациональных x

$$a^x = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{y_k}.$$

Если теперь x — произвольное иррациональное число, то для него тоже можно подобрать стремящуюся к нему переменную y_k ($y_k \rightarrow x$) и доказать, что переменная a^{y_k} имеет предел. Естественного его обозначить через a^x . Этим дается определение показательной функции для иррационального x . Доказательство существования предела основано на уже выведенном неравенстве Бернулли для рациональных x, y . При этом приходится обращаться к более развитой теории пределов чем та, которую мы получили в этой главе. Переход в (10) от рациональных x, y к действительным затруднен.

Пример 1. Вычислить $2^{\sqrt{2}}$ с помощью микрокалькулятора.

Решение.

$$\boxed{2} \boxed{y^x} \boxed{1} \boxed{,} \boxed{7} \boxed{=} 3,2490096,$$

результат выписан с точностью до единицы седьмого разряда после запятой, т.е. абсолютная погрешность не превышает 10^{-7} .

Пример 2. Вычислить на микрокалькуляторе $7^{1/11}$.
Решение.

$$\frac{1}{11} \approx \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{=} 0,0909091 \text{ (записываем),}$$

$$\frac{1}{11} \approx 7^{0,0909091} =$$

$$= \boxed{7} \boxed{y^x} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{0} \boxed{9} \boxed{0} \boxed{9} \boxed{0} \boxed{9} \boxed{1} \boxed{=} 1,19351.$$

В оценке Бернулли приближения $7^{1/11} \approx 7^{0,0909091}$ имеем $M = 2^{1/11} \leq 2$, $a = 7$, $|x - y| < 10^{-7}$, следовательно, абсолютная погрешность этого приближения не больше

$$2M(a-1)|x-y| < 2 \cdot 2(7-1) \cdot 10^{-7} = 24 \cdot 10^{-7} \leq 10^{-6}.$$

Поэтому мы оставили только 5 цифр у окончательного результата.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для какого числа a определяется показательная функция a^x ?
2. Определите a^x для x натуральных, целых отрицательных, рациональных.
3. Дайте определение функции a^x для любого действительного числа.
4. Сформулируйте неравенство Бернулли.
5. Вычислите на микрокалькуляторе числа $2^{3,1}$, $2^{3,23}$, $4^{0,27}$. Оцените погрешность приближения.
6. Вычислить на микрокалькуляторе числа $2^{\sqrt{3}}$, 3^{3^2} , $5^{1/7}$.

§ 4.5. Число e

Рассмотрим переменную x_n , пробегающую последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \dots$.

Определение. Переменная x_n ограничена сверху числом M , если выполняются неравенства $x_n \leq M$ для любых $n = 1, 2, \dots$

Определение. Переменная x_n не убывает, если для любого n

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Теорема 1. Если переменная x_n не убывает и ограничена сверху числом M , то она имеет предел, равный некоторому числу a , не превышающему M :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \leq M.$$

Наметим доказательство.

Если на числовой прямой отметить точки $x_1, x_2, x_3, \dots$ и точку M (рис. 78), то каждая последующая точка x_{n+1} будет находиться правее предыдущей x_n или совпадать

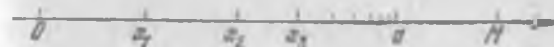


Рис. 78

с ней и в то же время все точки x_n будут находиться левее M или, может быть, какая-либо из них совпадает с M (но тогда, очевидно, и все последующие за ней совпадут с M) и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$.

Так как номеров n бесконечное множество, то точки x_n обязательно должны сгущаться около некоторой точки $a \leq M$, которая и будет пределом x_n .

Замечание 1. В теореме 1 можно считать, что переменная x_n ограничена снизу числом m ($m \leq x_n$, $n = 1, 2, \dots$) и не возрастает ($x_{n+1} \leq x_n$), и тогда тоже существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq m$.

Рассмотрим переменную

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

Вот таблица первых ее значений:

$$u_1 = 2; \quad u_2 = 2,25; \quad u_3 \approx 2,37; \quad u_4 \approx 2,44; \dots$$

Мы видим, что для малых n переменная u_n возрастает. Можно установить и в общем случае, разлагая выражение (13) по формуле бинома Ньютона (см. п. 11.2), что (доказательство см. ниже)

$$u_n < u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Кроме того, с помощью разложения по биному Ньютона показывается, что переменная u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) ограничена сверху.

ничена сверху числом 3. Но тогда на основании теоремы 1 переменная u_n имеет предел, не превышающий 3.

Этот предел называется *числом e* . Он равен *)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828 \dots \quad (14)$$

Если положить в формуле (14) $\alpha = 1/n$, то получим, что при $n \rightarrow \infty$ будет $\alpha \rightarrow 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e. \quad (15)$$

Мы установили формулу (15) в предположении, что α стремится к нулю по закону $\alpha = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Но можно доказать, что эта формула (и этим мы будем пользоваться в дальнейшем) верна при любом способе стремления α к нулю.

Докажем приведенные выше утверждения.

Согласно формуле бинома Ньютона для натурального n имеют место равенства

$$\begin{aligned} u(n) &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \\ u(n+1) &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^n}. \end{aligned}$$

Члены суммы $u(n)$ меньше соответствующих членов $u(n+1)$ и, кроме того, $u(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше чем $u(n)$. Поэтому $u(n) < u(n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$) и переменная $u(n)$ возрастает.

Далее

$$\begin{aligned} u(n) &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

*) Читатель, который ознакомится с гл. 9, может вычислить самостоятельно число e с любой точностью.

Это показывает, что переменная $u(n)$ ограничена сверху чис-

3. Таким образом, переменная $u(n)$ возрастает и ограничена сверху числом 3. По теореме 1 она имеет предел, не превышающий 3, который мы называем числом e .

Мы доказали равенство (14), когда n стремится к бесконечности, пробегая натуральные числа. Но равенство (14) верно и тогда, когда n стремится к ∞ любого знака, и притом пробегая любые числовые значения, не обязательно натуральные. Докажем это.

Пусть сначала n стремится к $+\infty$, пробегая какие-либо значения не обязательно целые. Обозначим через $[n]$ целую часть n . Таким образом, например,

$$[7,3] = 7, \quad [7] = 7.$$

Для любого положительного числа n имеют место очевидные неравенства

$$[n] \leq n < [n] + 1.$$

Но тогда

$$\left(1 + \frac{1}{[n] + 1}\right)^{[n] + 1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^{[n] + 1} < e \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2.$$

Деля на $1 + \frac{1}{n}$, получим неравенства

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{[n] + 1}\right)^{[n] + 1}}{1 + \frac{1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \frac{\left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2}{1 + \frac{1}{n}}. \quad (16)$$

Будем n стремиться к $+\infty$. Тогда переменное число $[n] + 1$ будет тоже стремиться к $+\infty$, пробегая натуральные числа. Но тогда числитель в левой части соотношений (16) стремится к e . Что же касается знаменателя, то он стремится к 1. Следовательно, левая и правая части в (16) стремятся к e , но тогда средняя часть, равная $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, тоже стремится к e . Этим доказана верность равенства (14), когда положительное n стремится к $+\infty$ по любому закону.

Пусть теперь $n \rightarrow -\infty$, тогда $m = -n \rightarrow +\infty$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)\right] = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Теперь уже равенство (14) доказано как в случае $n \rightarrow +\infty$, так и в случае $n \rightarrow -\infty$, где числа n не обязательно целые.

Введем теперь новую переменную α при помощи равенства

$\alpha = \frac{1}{n}$. Тогда, очевидно, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, и мы доказали формулу (15), когда α стремится к нулю по любому закону.

Пример 1. Если $0 < q < 1$, то переменная q^n убывает ($q^{n+1} < q^n$) и ограничена снизу числом 0 ($0 < q^n$). Поэтому на основании замечания 1 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = A \geq 0.$$

На самом деле $A = 0$, потому что

$$A = \lim_{n+1 \rightarrow \infty} q^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \cdot q) = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \cdot q = Aq$$

и $A = Aq$, т. е. $A(1 - q) = 0$, откуда $A = 0$.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 = \\ &= \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 = e^2. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить пределы:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; 4) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + 2\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

2. Сформулируйте теорему о существовании предела ограниченной неубывающей последовательности.

3. Что такое число e ? Дайте несколько определений.

4. Нарисуйте схематические графики функций e^x и e^{-x} .

§ 4.6. Логарифмическая функция

Пусть a есть положительное число, не равное единице ($0 < a$, $a \neq 1$), и y есть произвольное положительное число ($0 < y < \infty$). Логарифмом y при основании a называется такое число $x = \log_a y$, что если возвести a в степень x , то получается y . Таким образом,

$$a^x = y. \quad (17)$$

Поэтому можно еще написать

$$a^{\log_a y} = y, \quad 0 < y < \infty, \quad (18)$$

или еще

$$\log_a a^x = x, \quad -\infty < x < \infty. \quad (19)$$

Примеры

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0,$$

$$\log_2 8 = \log 2^3 = 3,$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = \log_2 2^{-3} = -3, \quad \log_{10} 10^k = k,$$

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_{10} 10 = 1,$$

$$\log_{10} 100 = 2,$$

$$\log_{10} 1000 = 3,$$

$$\log_{10} 0,1 = -1,$$

$$\log_{10} 0,01 = -2.$$

Возникает вопрос, всегда ли решается относительно x уравнение (17), или, что все равно, существует ли для положительного числа y его логарифм при основании a . Да, существует, и единственный. В этом мы убедимся на основании свойств функции a^x , которые мы сейчас перечислим (будем считать, что $a > 1$):

1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$, т. е. имеет непрерывный график;

2) a^x — возрастающая функция, т. е. $a^x < a^y$, если $x < y$;

3) $a^x \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$;

4) $a^x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

На рис. 75, a изображен график функции a^x ($a > 1$). В силу 1) это непрерывная кривая, распространенная над всей осью x . В силу 2), 3), 4), когда абсцисса x точки графика возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, ее ордината y возрастает от 0 до $+\infty$.

Значение x , удовлетворяющее уравнению (17) для данного $y > 0$, можно получить следующим образом. На оси ординат отложим вверх от начала координат на расстоянии, равном y , точку и через эту точку проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая обязательно пересечет график, и притом в единственной точке A . Абсцисса x точки A и решает, очевидно, уравнение (17) для данного y (см. рис. 75, a).

Мы доказали существование логарифма y ($y > 0$) при основании a , применив графический метод. При этом мы получили новую функцию x , зависящую от y , которая называется логарифмом y при основании a и обозначается так: $x = \log_a y$.

Итак,

$$x = \log_a y \quad (0 < y < \infty)$$

есть функция, приводящая в соответствие каждому положительному числу y такое x , что $y = a^x$, т. е. выполняется равенство (18).

Благодаря свойствам (18) и (19) функция $\log_a y$ называется обратной по отношению к функции a^x , а функция a^x называется обратной по отношению к $\log_a y$ (см. § 2.10).

Логарифмическая функция $x = \log_a y$ при $a > 1$ обладает следующими, вытекающими непосредственно из приведенных рассуждений свойствами:

- 1) $\log_a y$ непрерывна на $(0, \infty)$;
- 2) $\log_a y$ — возрастающая функция, т. е.

$$\log_a y_1 < \log_a y_2 \quad (0 < y_1 < y_2 < \infty)$$

для любых указанных y_1, y_2 ;

$$3) \log_a y \rightarrow \infty \text{ при } y \rightarrow +\infty;$$

$$4) \log_a y \rightarrow -\infty \text{ при } y \rightarrow 0.$$

Если в формуле $x = \log_a y$ ($0 < y < \infty$) поменять местами x и y , то получим запись логарифмической функции в обычном виде:

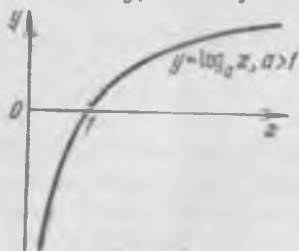


Рис. 79

$$y = \log_a x \quad (0 < x < \infty),$$

где x — аргумент, а y — функция. График функции $y = \log_a x$ в системе координат xOy получим, если в этой системе изобразить график функции

$$x = a^y \quad (-\infty < y < \infty)$$

(рис. 79), т. е. множество точек вида (a^y, y) или, так как

$$x = a^y, \quad y = \log_a x,$$

то множество точек $(x, \log_a x)$.

Таким образом, кривая на рис. 79 есть не только график функции $x = a^y$ ($-\infty < y < \infty$), но и график функции $y = \log_a x$ ($0 < x < \infty$).

Можно еще сказать, что при $a > 1$ функция $\log_a x$ отображает интервал $(0, \infty)$ значений x на интервал $(-\infty, \infty)$ значений y .

Пусть теперь a удовлетворяет неравенству $0 < a < 1$. Выпишем нужные нам свойства функции $y = a^x$:

- 1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$;
- 2) a^x — убывающая функция, т. е. $a^x > a^y$ ($x < y$);
- 3) $a^x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$;
- 4) $a^x \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$.

График a^x при $0 < a < 1$ изображен на рис. 75, б. Мы видим, что функция $y = a^x$ и в случае $0 < a < 1$ отобра-

жает интервал $(-\infty, \infty)$ значений x на интервал $(0, \infty)$ значений y .

Мы, как и выше, можем задать произвольное положительное (т. е. принадлежащее к интервалу $(0, \infty)$) значение y и привести ему в соответствие такое x , что будет выполняться равенство $x = \log_a y$.

Чтобы получить x по данному y , надо взять на оси ординат (см. рис. 75, б) точку, имеющую ординату y , и провести через эту точку прямую, параллельную оси x . Последняя пересечет график Γ в единственной точке A , абсцисса которой и есть искомое значение x , т. е. такое x , для которого $y = a^x$.

Свойства функции $\log_a y$ при $0 < a < 1$ такие же, как в случае $a > 1$; однако есть исключение. Теперь, когда y возрастает от 0 до $+\infty$, соответственно x убывает от $+\infty$ до $-\infty$:

$$\log_a y_1 > \log_a y_2 \quad (0 < y_1 < y_2 < \infty).$$

Выпишем формулы (18) и (19):

$$x = a^{\log_a x} \quad (0 < x < \infty), \quad (20)$$

$$\log_a a^x = x \quad (-\infty < x < \infty). \quad (21)$$

Мы заменили в (18) y на x , но это не имеет значения.

Число a может быть здесь любым положительным числом, отличным от 1 ($a \neq 1$). Равенства (20) и (21) называют тождествами на указанных там интервалах, потому что они имеют место для любых x , принадлежащих к указанным интервалам.

Из равенства (20) на основании свойств показательной функции следует для любых $x, y > 0$:

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}. \quad (22)$$

Но тогда

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (23)$$

$$(0 < x, y < \infty, a > 0, a \neq 1).$$

Из (22) следует (23), потому что если $a^{u_1} = a^{u_2}$, то $u_1 = u_2$. Если бы $u_1 \neq u_2$, то числа a^{u_1} и a^{u_2} были бы различны. Но можно и формально получить (23), взяв логарифм при основании a от левой и правой частей (22), т. е. воспользовавшись формулой (21).

Если в (23) заменить x на $\frac{x}{y}$, то получим

$$\log_a x = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y,$$

или

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (24)$$

$$(0 < x, y < \infty, a > 0, a \neq 1).$$

Далее

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x},$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad (0 < x, y < \infty, a > 0, a \neq 1). \quad (25)$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\log_a b \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$

$$\log_a b \log_b a = 1. \quad (26)$$

Верно также

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b \quad (A > 0), \quad (27)$$

потому что $a^{\log_a A} = A$ и $a^{\log_a b \log_b A} = b^{\log_b A} = A$.

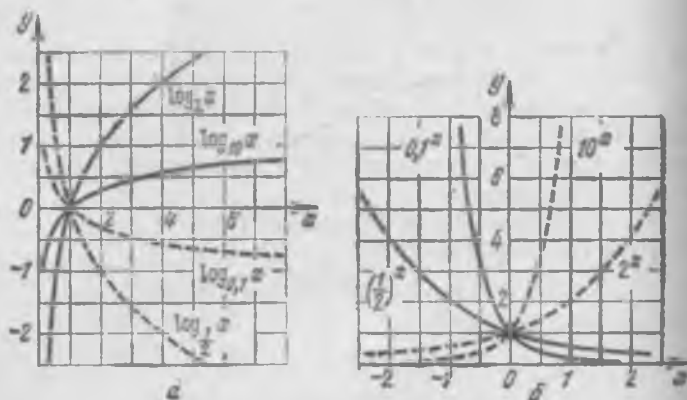


Рис. 80

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\log_e a = \ln a$.

Формулы (20)—(27) являются основными при вычислениях с логарифмами. Их надо усвоить и запомнить.

На рис. 80, а, б приведены графики частных функций a^x , $\log_a x$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для каких оснований рассматриваются логарифмы?
2. Что такое логарифм числа y при основании a ?
3. Для каких чисел y определяется логарифм? Может ли y быть отрицательным?
4. Заполните таблицу

x	1	10	100	1000	10000	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\log_{10} x$									

5. Сравните эти числа с нулями и между собой:
а) $\log_{10} 7$; б) $\log_{10} 17$; в) $\log_{10} 873$;
г) $\log_{10} 10232$; д) $\log_{10} 0,7$; е) $\log_{10} 0,03$;
ж) $\log_{10} 0$; з) $\log_{10} 0,0027$; и) $\log_{10}(-10)$.
6. Покажите с помощью графика функции $y = a^x$, что $\log_a y$ существует.
7. Как называются функции $y = a^x$ и $x = \log_a y$?
8. Как построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ при помощи графика показательной функции?
9. Чем отличаются графики $\log_a x$ с $a > 1$ от графика $\log_a x$ с $a < 1$?
10. Выпишите основные формулы логарифмирования.
11. Решите уравнения:
1) $a^x = b$, 2) $a^x = a^3$, 3) $a^x = a^{-3}$,
4) $a^x = 1$, 5) $10^x = 1000$, 6) $10^x = \frac{1}{1000}$, 7) $10^x = 0$,
8) $2^x = 32$, 9) $2^x = \frac{1}{32}$, 10) $2^x = -3$.

Решение. 1) По определению логарифм от b при основании a есть такое число x , что $a^x = b$, т. е. $x = \log_a b$. Но можно рассуждать так. Прологарифмируем при основании a левую и правую части равенства $a^x = b$. Тогда $\log_a a^x = \log_a b$. Но $\log_a a^x = x$, поэтому $x = \log_a b$.

12. Чему равно число y , если

- 1) $\log_a y = x$, 4) $\log_{10} y = x$,
- 2) $\log_a y = 2$, 5) $\log_{10} y = 2$,
- 3) $\log_a y = -3$, 6) $\log_{10} y = -2$.

Решение. 1) $y = a^{\log_a y} = a^x$.

§ 4.7. Логарифм с основанием 10

Пусть в десятичной системе счисления задано положительное число A .

Значащей цифрой числа A называется первая (слева направо) цифра, не равная нулю, а также любая следующая за ней цифра. Например, все цифры числа 830 200 значащие, у числа 0,00 302 цифра 3 и следующие за ней цифры 0 и 2 — значащие.

Положительное число A можно представить в виде

$$A = a \cdot 10^k, \quad (28)$$

где a удовлетворяет неравенствам

$$1 \leq a < 10$$

и k — целое. Говорят, что число A записано в *стандартном виде*

Число a можно получить, переставив в A запятую так, чтобы она оказалась непосредственно после первой значащей цифры. Например, правые части равенств

$$830200 = 8,302 \cdot 10^5,$$

$$0,00302 = 3,02 \cdot 10^{-3},$$

$$100 = 1 \cdot 10^2$$

суть записи левых в стандартном виде.

Логарифмируя равенство (28) при основании 10, получим

$$\log_{10} A = k + \log_{10} a.$$

Число k называется *характеристикой*, а число $\log_{10} a$ — *мантиссой десятичного логарифма* A . Характеристика — целое число, а мантисса — неотрицательное число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \log_{10} a < 1$. Ведь $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 10 = 1$, а функция $y = \log_{10} x$ возрастает.

Существуют подробные таблицы мантисс — таблицы десятичных логарифмов. Ими широко пользовались несколько столетий для вычислений произведения и частного чисел, а также корней из чисел. Однако в настоящее время эта работа выполняется на электронных микрокалькуляторах.

Пример 1.

$$\log_{10} 830\,200 = \log_{10} (8,302 \cdot 10^5) = 5,9041744,$$

$$\log_{10} (0,00302) = \log_{10} (3,02 \cdot 10^{-3}) = \bar{3},4800069,$$

$$\log_{10} 100 = \log_{10} (1 \cdot 10^2) = 2.$$

После запятой выписаны вычисленные на микрокалькуляторе или по таблицам мантиссы соответствующих чисел.

Пример 2.

$$\log_{10} 3,02 = \boxed{3} \boxed{,} \boxed{0} \boxed{2} \boxed{\log_{10}} \boxed{=} = 0,4800069.$$

Перед запятой записывается характеристика. Если она отрицательная, то знак ставится над ее абсолютной величиной ($-3 = \bar{3}$). Таким образом, если характеристика отрицательная, то перед запятой стоит отрицательное число, а после запятой — положительное.

Пример 3. Пусть $\log_{10} x = \bar{3},4800069$, тогда $x = 10^{-3} \cdot 10^{0,4800069} = 10^{-3} \cdot 3,0199997 = 0,00302$.

Действия умножения и деления больших чисел мы выполняем на микрокалькуляторах. Все же приведем пример вычисления при помощи таблиц десятичных логарифмов. Пусть надо вычислить произведение $A = 830\,200 \times 0,0032$. Находим с помощью таблиц логарифмы множителей. Имеем

$$\begin{aligned} \log_{10} A &= \log_{10} 830\,200 + \log_{10} 0,0032 = \\ &= 5,9041744 + \bar{3},4800069 = 3,3841813. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A = a \cdot 10^3 = 10^3 \cdot 10^{0,3841813} = 10^3 \cdot 2,4220399 = 2422,0399.$$

В предпоследнем равенстве по мантиссе 0,3841813 находим число a .

Часто обозначают $\log_{10} a = \lg a$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В десятичной системе счисления задано положительное число A .

1) Что такое значащие цифры числа A ?

2) Что такое число, заданное в стандартной форме?

Дайте три примера приведения числа к стандартной форме.

3) Как найти характеристику и мантиссу десятичного логарифма числа?

2. С помощью микрокалькулятора вычислите $\lg$ числа

1) 3070, 2) 2003, 3) 0,75, 4) 0,00101, 5) 0,00032.

3. С помощью микрокалькулятора по полученным в предыдущей задаче логарифмам восстановите исходные числа. (Могут получиться не точно исходные числа, потому что вычисления ведутся приближенно.)

§ 4.8. Степенная функция

Функция вида

$$y = x^a \quad (0 < x < \infty),$$

где $a \neq 0$, называется *степенной функцией*. При любом a степенная функция во всяком случае определена для положительных x .

Степенная функция непрерывна, т. е. ее график есть непрерывная кривая.

Если a положительное, то функция $y = x^a$ определена также и при $x = 0$, именно — она равна нулю при $x = 0$, потому что в математике считают, что $0^a = 0$ ($a > 0$).

Попутно скажем, что 0^0 не есть число, не есть также число 0^a , где $a < 0$.

Таким образом, при $a > 0$ функция

$$y = x^a \quad (0 \leq x < \infty)$$

определена не только для положительных x , но и для $x = 0$.

На рис. 81 даны графики степенных функций $y = x^p$ для некоторых значений p . Для $p > 0$ они равны нулю

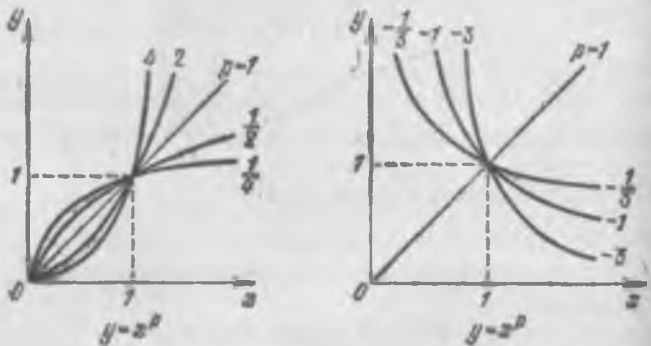


Рис. 81

при $x = 0$, поэтому их графики выходят из начала координат. При возрастании x от 0 до ∞ соответствующие ординаты y всех графиков возрастают тоже от 0 до ∞ . Однако характер возрастания различный. Также очевидно, что

$$\begin{aligned} x^4 &< x^2 < x < x^{1/2} < x^{1/4}, & 0 < x < 1, \\ x^4 &> x^2 > x > x^{1/2} > x^{1/4}, & 1 < x < \infty. \end{aligned}$$

Если $x = 1$, то $y = 1$ для всех графиков.

Функции x и $x^{1/2}$ можно рассматривать и для отрицательных x .

Что же касается функций $x^{1/3}$ и $x^{1/4}$, то они при $x < 0$ не имеют для нас смысла, потому что не существует действительного числа, квадрат или четвертая степень которого равнялись бы отрицательному числу x . Среди комплексных чисел есть такие числа, но мы о них сейчас не говорим.

Выделим в особую группу степенные функции, соответствующие натуральным a ($a = 1, 2, 3, \dots$). Они определены и непрерывны на всей действительной оси x . На

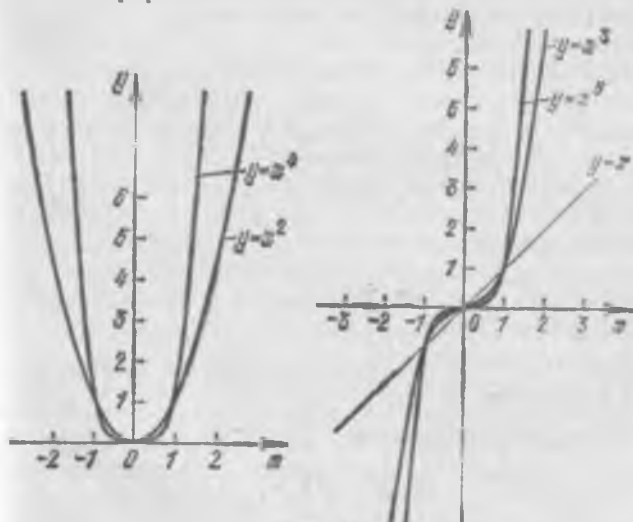


Рис. 82

рис. 82 даны графики функций действительного переменного x^2 , x^4 , x , x^2 , x^3 .

Степенную функцию можно записать в виде

$$y = x^a = b^{\log_b x^a} = b^{a \log_b x} \quad (29)$$

при любом положительном b ($b > 0$). Часто в качестве b берут неперово число e . Тогда формула (2) примет вид

$$y = x^a = e^{a \ln x}. \quad (29')$$

Степенная функция x^a обладает следующим характерным для нее свойством:

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad 0 < x, y < \infty. \quad (30)$$

Действительно,

$$(xy)^a = e^{a \ln(xy)} = e^{a(\ln x + \ln y)} = e^{a \ln x} e^{a \ln y} = e^{\ln x^a} e^{\ln y^a} = x^a y^a.$$

Отметим, что степенная функция x^a при иррациональном a как функция действительного переменного для отрицательных x не имеет смысла. Более глубокое изучение показывает, что функция x^a при иррациональном a должна быть комплексной для отрицательных x . Однако на этом вопросе, относящемся к теории функций комплексного переменного, мы здесь останавливаться не можем.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какое из двух чисел больше:

- а) $2^{\sqrt{2}}$ и 2^2 , б) $3^{\frac{1}{1.7}}$ и $3^{\frac{1}{2.3}}$, в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}$,
 г) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, д) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$, е) 7 и $\sqrt[3]{7}$.

2. Решить уравнения:

- а) $e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$,
 б) $\log_2(x-1) = \log_2 \frac{x}{1+x}$,
 в) $4^{x-1} = 3^{2x}$ (прологарифмировать по основанию 4).
 г) $\log_3 x + \log_x 3 = 2,5$.

3. Решить неравенства:

- а) $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$, б) $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$,
 в) $\frac{3}{2} \log_2 \sqrt[3]{x} - 2 \log_4 x > 1$.

§ 5.1. Мгновенная скорость

Понятие производной возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой, о вычислении скорости неравномерного движения. Подобными задачами и задачей о вычислении площади криволинейной фигуры занимались математики с древних времен. В XVII веке в работах Ньютона и Лейбница эта деятельность получила определенное теоретическое завершение. Ньютон и Лейбниц *) создали общие методы дифференцирования и интегрирования функций и доказали важную теорему, носящую их имя, устанавливающую тесную связь между операциями дифференцирования и интегрирования. Надо, однако, иметь в виду, что современное изложение этих вопросов существенно отличается от того, как они излагались во времена Ньютона и Лейбница. В рассуждениях и понятиях, которыми оперировали в то время, с нашей точки зрения, можно найти много неясного; да и сами математики того времени это сознавали, о чем свидетельствуют ожесточенные дискуссии, которые происходили по этим вопросам между ними.

Современный математический анализ базируется на понятии предела, которое выкристаллизовалось в четкую формулировку не так уж давно—в первой половине прошлого столетия. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши **).

Понятие предела существенно используется в определениях понятий непрерывности функции, производной, интеграла.

*) И. Ньютон (1643—1727)—английский физик и математик.
Г. В. Лейбниц (1646—1716)—немецкий математик.

**) О. Л. Коши (1789—1857)—французский математик. В его трудах впервые определены понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл,...) так, как это принято в современной математике.

Пусть точка движется по прямой и функция $s=f(t)$ выражает зависимость от времени t ($a < t < b$) ее расстояния (с учетом знака) до начальной точки O прямой. В момент времени t точка находится на расстоянии $s=f(t)$ от O . В момент же времени $t+\Delta t$ ($\Delta t \neq 0$) она находится на расстоянии $s+\Delta s=f(t+\Delta t)$ от O . Средняя скорость ее на промежутке времени $(t, t+\Delta t)$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенную, или истинную, скорость v точки в момент времени t естественно определить как предел, к которому стремится $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Пример. Как известно, свободно падающее тело под влиянием силы притяжения Земли движется в безвоздушном пространстве по закону

$$s = g \frac{t^2}{2}$$

в предположении, что отсчет пути происходит с момента времени $t=0$ и скорость тела в момент $t=0$ равна нулю.

Мгновенная скорость тела в момент времени t ($t > 0$) равна

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} g (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} = \\ &= \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} 2t = gt, \end{aligned}$$

и мы получили известную формулу для скорости равномерно ускоренного движения

$$v = gt.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите мгновенную скорость в момент времени t точки, движущейся по закону:

а) $s = 2t + 4$; б) $s = t^3$.

§ 5.2. Касательная к кривой и сила тока

Рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую Γ в плоскости или пространстве (рис. 83). Пусть A — лежащая на ней точка и A' — другая лежащая на Γ точка. Прямую S , проходящую через A и A' , будем называть *секущей* (кривую Γ). Будем теперь точку A' двигать непрерывно по Γ , неограниченно приближая к A . Тогда секущая S будет вращаться относительно A . Может случиться, что при этом S будет стремиться занять в пределе положение вполне определенной (проходящей, очевидно,

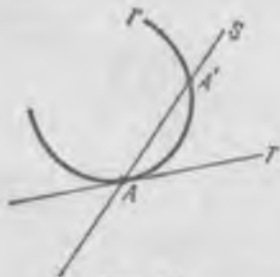


Рис. 83



Рис. 84

через A) прямой, которую мы обозначили через T . Если это будет иметь место, то говорят, что кривая Γ имеет в точке A *касательную*. Именно прямую T называют *касательной* к Γ в точке A .

Не всякая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Тривиальным примером этого может служить кривая, изображенная на рис. 84. Она состоит из двух гладких кусков Γ_1 и Γ_2 , соединенных в точке A «под углом». На рисунке отмечены две другие точки A' , A'' , соответственно лежащие на Γ_1 , Γ_2 ; через S' и S'' обозначены проходящие через A' , A'' и A секущие.

Очевидно, что если A' , A'' , двигаясь соответственно по Γ_1 , Γ_2 , будут приближаться к A , то секущие S' , S'' будут стремиться занять в пределе положение двух разных прямых T' и T'' . Поэтому рассматриваемая кривая не имеет касательной в точке A . Впрочем, можно было бы, развивая введенное определение, сказать, что наша кривая имеет в точке A две односторонние касательные, но об этом речь сейчас не идет.

Пусть теперь кривая Γ есть график непрерывной на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ (рис. 85, а или б).

Зададим на Γ точку A , имеющую абсциссу x и ординату y , и другую точку C , имеющую абсциссу $x + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) и соответствующую ординату $y + \Delta y$. Секущая S ,

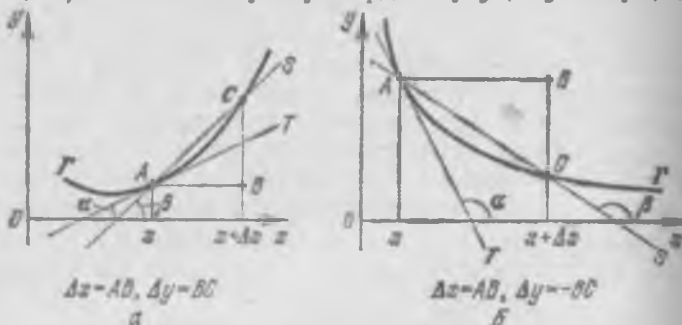


Рис. 85

проходящая через A и C , очевидно, образует с положительным направлением оси x угол β , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В случае рис. 85, а $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, а в случае рис. 85, б $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Будем Δx стремиться к нулю; тогда, вследствие непрерывности f , будет также Δy стремиться к нулю и точка C , двигаясь по Γ , будет стремиться к точке A . Если окажется (этого может и не быть!), что при этом отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при любом способе стремления Δx к нулю к одному и тому же конечному пределу (числу) k :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow k \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому отличному от $\pi/2$ углу α . Вместе с β и секущая S , вращаясь около точки A , будет стремиться занять в пределе положение прямой T , проходящей через A под углом α к положительному направлению оси x . Но тогда T есть касательная к Γ в точке A и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

(Для рис. 85, а $0 < \alpha < \pi/2$ и для рис. 85, б $\pi/2 < \alpha < \pi$.) Мы установили, что если отношение $\Delta y/\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$

стремится к конечному пределу, то кривая Γ имеет в точке A касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси x равен этому пределу.

Сила тока. Допустим, что известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t . За период от t до $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ дает силу тока в момент t :

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Нарисовать в прямоугольной системе координат параболу $y = x^2$ и касательную к ней в точке, имеющей абсциссу $x = 1$. Найти угловой коэффициент этой касательной, т. е. тангенс угла, образованного ею с положительным направлением оси x .

§ 5.3. Производная

Все три рассмотренные задачи, несмотря на то что они относятся к различным областям человеческого знания — механике, геометрии, теории электричества, — привели к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над функцией. Надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Мы могли бы как угодно увеличить число задач, решение которых приводится к подобной операции. К ней приводят задачи о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Естественно, что эта операция получила в математике специальное название. Она называется операцией *дифференцирования функции*. Результат ее называется *производной*.

Итак, *производной от функции f , заданной на некотором интервале (a, b) , в точке x этого интервала называется*

предел, к которому стремится отношение приращения функции f в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производную принято обозначать так:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$. Результаты рассмотренных примеров теперь можно сформулировать так:

скорость точки, пройденный путь которой s есть функция $s = f(t)$ от времени t , равна производной от этой функции $s' = f'(t)$;

тангенс угла α между касательной к кривой $y = f(x)$ в точке, имеющей абсциссу x , и положительным направлением оси x равен производной $f'(x)$;

сила тока I в проводе в момент t , если функция $Q = f(t)$ выражает количество электричества, прошедшее за время t через сечение провода, равна производной $I = Q' = f'(t)$.

§ 5.4. Непрерывность функции, имеющей производную

Если функция f имеет в точке x производную, т. е. для нее отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при $\Delta x \rightarrow 0$ к конечному числу $f'(x)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x) \quad (\Delta x \rightarrow 0), \quad (1)$$

то она необходимо непрерывна в этой точке.

В самом деле, из (1) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \quad (2)$$

*) Предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где рассматриваются только $\Delta x > 0$ или только $\Delta x < 0$, называется соответственно *правой* или *левой производной* от f в точке x . Про функцию f , заданную на отрезке $[a, b]$, принято говорить, что она имеет на этом отрезке производную, если она имеет производную в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b .

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$. Но тогда приращение Δy нашей функции можно записать в виде суммы

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

двух слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, т. е. функция f непрерывна в точке x .

Обратное утверждение не всегда верно. Если функция f непрерывна в точке x , то она может и не иметь производной в этой точке. Например, функция

$$y = |x| \quad (-\infty < x < \infty),$$

как видно из ее графика (рис. 86), непрерывна для всех x но в точке $x=0$ не имеет производной. В этой точке не существует касательной к графику. Есть правая касательная и левая, но они не совпадают.

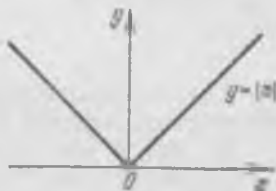


Рис. 86

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла между этой прямой и положительным направлением оси x . Прямые S и T на рис. 85, а образуют острые углы β , α с положительным направлением оси x , а на рис. 85, б — тупые углы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти угловые коэффициенты касательных к кривым (уравнения которых заданы ниже) в заданных точках x_0 :

а) $y = x^2$, $x_0 = 1$;

б) $y = x^3$, $x_0 = 1$;

в) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$.

2. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \sqrt{1+x}$ или $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$.

3. Вычислить мгновенную скорость точки, движущейся по закону $s = 5t^2$, в моменты времени $t = 1, 2, 3$.

4. В чем заключается геометрический и механический смысл определения производной?

§ 5.5. Формулы дифференцирования

При любом натуральном n справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (3)$$

Убедимся в справедливости этой формулы при $n=2$ и $n=3$. В самом деле, считая $\Delta x = h$, будем иметь

$$\begin{aligned} (x^2)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^2 + 2xh + h^2 - x^2) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

Доказательство формулы (3) для любого натурального n будет дано в конце § 5.5.

На самом деле формула (3) верна при любом n — положительном и отрицательном — не обязательно натуральном. Это будет доказано ниже.

Справедливы также формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (4)$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (5)$$

Докажем равенство (4) (доказательство (5) предоставляем читателю):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

Мы воспользовались свойством $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ и тем фактом, что функция $\cos x$ непрерывна.

Производная от функции $f(x)$ есть в свою очередь функция $f'(x)$. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается так: $f''(x)$. Подобным же образом определяются *высшие производные* $f^{(n)}(x)$ от $f(x)$ порядка n , где n — любое натуральное число.

Вторая производная от функции $s = f(t)$, выражающей закон движения точки на прямой, равна, очевидно, ускорению этой точки в момент времени t .

Уже из сказанного видно, что понятие производной имеет громадное значение в прикладных вопросах, но оно является фундаментальным и в самой математике.

Отметим, что *постоянное число* C , рассматриваемое как функция от x , *имеет производную, равную нулю тождественно* (т. е. равную нулю для всех x). В самом деле,

$$f(x) = C, \quad f(x + \Delta x) = C, \quad C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (6)$$

Отметим еще, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производную и A, B — постоянные числа, то функция

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \quad (7)$$

также имеет производную, равную

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \quad (8)$$

В частности, при $A = B = 1$ получим формулу

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x), \quad (9)$$

выражающую тот факт, что производная от суммы функций равна сумме производных от этих функций. А при $B = 0$ получим формулу

$$(Au)' = Au', \quad (10)$$

выражающую, что постоянную можно вынести за знак производной.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Au(x+h) + Bv(x+h) - [Au(x) + Bv(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(A \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(B \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) = \\ &= A \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + B \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \\ &= Au'(x) + Bv'(x). \end{aligned}$$

Во втором равенстве в этой цепочке равенств мы воспользовались тем фактом, что предел суммы равен сумме пределов, и в третьем — что постоянную законно вынести за знак предела.

По индукции (см. § 11.2, замечание) можно доказать более общее утверждение *):

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j u_j(x) \right)' = \sum_{j=1}^n a_j u_j'(x), \quad (11)$$

где a_j — постоянные числа, а про функции $u_j(x)$ предполагается, что они имеют производные.

В частности, получим производную от многочлена:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

(a_k — постоянные).

Доказательство формулы (3) для любого натурального n . Применяем метод индукции. При $n=2$ формула верна. Допустим, что она верна для некоторого натурального n . Тогда она верна также, если в ней n заменить на $n+1$:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Но тогда согласно принципу индукции формула (3) верна для любого натурального n .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вывести формулу (5).
2. Вычислить производные от функций

$$x^3 - 3x + 1, \quad x^2 + 6x - x + 7, \quad 2 \cos x - 3 \sin x + x - 2, \\ 5 \sin x + 4 \cos x - x^2 + 7.$$

3. Напишите производные от x^n , $\sin x$, $\cos x$ и запомните их.

§ 5.6. Производная от показательной функции

Производная от a^x вычисляется по формуле

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, \quad a \neq 1). \quad (12)$$

В частности, $(e^x)' = e^x$.

*) Надо иметь в виду обозначение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_1^n \alpha_j.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\log_a(1+z)} = \\ &= a^x \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0} \log_a(1+z)^{1/z}} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались подстановкой $a^h - 1 = z \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), откуда $h = \log_a(1+z)$. Надо учесть, что функция $\log_a u$ для $u > 0$, в частности при $u = e$, непрерывна ($\log_a u \xrightarrow{u \rightarrow e} \log_a e$).

§ 5.7. Производная от логарифмической функции

Производная от $\log_a x$ вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \quad (13)$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (14)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)^{1/h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+z)^{1/z} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.\end{aligned}$$

§ 5.8. Производная от произведения и частного

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x , то их произведение и частное (при условии, что $v(x) \neq 0$) имеют производные и справедливы равенства

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad (15)$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \quad (16)$$

Придадим независимой переменной x приращение Δx . Пусть соответствующие приращения функций u и v будут Δu и Δv . Тогда

$$\begin{aligned}(uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = uv' + vu',\end{aligned}$$

потому что из того, что v имеет производную, следует, что она непрерывна, т. е. что $\Delta v \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

В частности, если C — постоянная, то

$$(Cu)' = Cu' + C'u = Cu',$$

потому что $C' = 0$.

Далее,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

§ 5.9. Производная от $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (\cos x \neq 0), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \quad (\sin x \neq 0). \end{aligned} \quad (18)$$

§ 5.10. Задачи

Задача 1. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; x \neq 0).$$

Это показывает, что формула (3) верна и при отрицательных целых n . Далее мы увидим, что она верна и для нецелых n .

Задача 2. Вычислить производные от следующих функций:

$$\frac{x}{x-1}, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+2x-1}{x}, \quad 2 \sin x \cos x,$$

$$2e^x + 3 \ln x - 5, \quad \sec x, \quad e^x \sin x, \quad e^x \cos x, \quad xe^x,$$

$$x^2 e^x, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad x \ln x, \quad x^2 \ln x.$$

§ 5.11. Производная сложной функции

Пусть $y = f(x) = \varphi[\psi(x)]$ есть сложная функция, заданная на некотором интервале. При этом известно, что функции

$$y = \varphi(u), \quad u = \psi(x)$$

имеют производные. Тогда функция $y = f(x)$ тоже имеет производную, вычисляемую по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x, \quad (19)$$

где y'_x есть производная от y по x ($y'_x = f'(x)$), а y'_u есть производная от y по u ($y'_u = \varphi'(u)$) или

$$f'(x) = \varphi'(u) \psi'(x). \quad (19')$$

Чтобы доказать (19), зададим x и придадим ему произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда и $u = \psi(x)$ получит соответствующее приращение Δu , а y ($y = \varphi(u)$) получит в свою очередь определенное приращение Δy .

Имеем при условии, что $\Delta u \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\Delta u \neq 0). \quad (20)$$

Если перейти в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, то получим

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x,$$

т. е. формулу (19).

Надо учесть, что так как функция $u = \psi(x)$ имеет по условию производную, то $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е. В равенстве (20) мы предполагали, что каждому достаточно малому $\Delta x \neq 0$ соответствует $\Delta u \neq 0$. Если случится, что $\Delta u = 0$ при некотором Δx , то уже делить и умножать на Δu нельзя и надо доказывать формулу (19) другим путем. Это можно сделать, но мы соответствующее доказательство не приводим, тем более что этот случай встречается редко.

Пример 1. Найти производную от функции $y = e^{2x}$.

Решение. Полагаем $y = e^u$, $u = 2x$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (2x)'_x = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Пример 2. Найти производную от функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Полагаем $y = e^u$, $u = x^2$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (x^2)'_x = e^u 2x = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = \sin(kx + b)$.

Решение. Полагаем $y = \sin u$, $u = kx + b$; поэтому

$$y'_x = (\sin u)'_u (kx + b)'_x = (\cos u) k = k \cos(kx + b).$$

Пример 4. Найти производную от функции $y = x^a = e^{a \ln x}$ ($x > 0$, $a \neq 0$).

Решение. Полагаем $y = e^u$, $u = a \ln x$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (a \ln x)' = e^u \frac{a}{x} = \frac{ae^{a \ln x}}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Мы получили формулу

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

верную при любом $a \neq 0$, не обязательно целом. Таким образом, например,

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Пример 5. Найти производную от функции $y = \sin^3 x^3$.

Решение. Полагаем $y = u^3$, $u = \sin z$, $z = x^3$. Поэтому

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u u'_z = y'_u u'_z z'_x = 3u^2 \cos z \cdot 2x = \\ &= 6x \sin^2 z \cos z = 6x \sin^2 x^3 \cos x^3. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить производные от функций:

1) e^{-x^2} ; 2) e^{-x} ; 3) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

4) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$; 5) $\cos(kx + b)$; 6) $\sin^3 x$;

7) $\sin^3 2x$; 8) $\sqrt{x+1}$; 9) $\sqrt{x^2+x}$;

10) $\sqrt{x^2+2x+1}$; 11) $\ln(2x-3)$; 12) $\sqrt[3]{x^2-1}$;

13) e^{3x-1} ; 14) $\sqrt{a^2+x^2}$; 15) $\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$.

§ 5.12. Производная обратной функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную и возрастающую на отрезке $[a, b]$. Последнее означает, что большему значению x из отрезка $[a, b]$ соответствует большее значение y (рис. 87).

Пусть $c=f(a)$, $d=f(b)$. На рис. 87 видно, что каждому значению y из отрезка $[c, d]$ соответствует, и притом одно, значение x из отрезка $[a, b]$ такое, что $y=f(x)$. Этим мы задали на отрезке $[c, d]$ вполне определенную функцию $x=\varphi(y)$, которая называется *обратной функцией* по отношению к функции $y=f(x)$. На рис. 87 видно, что функция $\varphi(y)$ непрерывна (см. § 2.10).

Так как функция $f(x)$ возрастает и непрерывна, то при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$ будет $\Delta y \neq 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x / \Delta y}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x / \Delta y}.$$

Мы получили формулу для производной обратной функции:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (x'_y \neq 0); \quad (21)$$

она верна, если существует производная $x'_y \neq 0$.

Производная $\arcsin x$. Пусть

$$y = \arcsin x \quad (-1 < x < 1). \quad (22)$$

Это непрерывная, строго возрастающая функция на интервале $(-1, +1)$. Обратная к ней функция, тоже непрерывная и строго возрастающая, есть (см. § 2.11)

$$x = \sin y \quad (-\pi/2 < y < \pi/2).$$

В силу формулы (21)

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' = y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned} \quad (23)$$

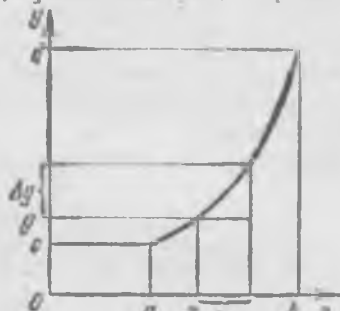


Рис. 87

В данном случае $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos y > 0$ и перед корнем должен быть знак $+$.

При $x = \pm 1$ правая часть (23) обращается в ∞ . Касательная к кривой (22) в этих точках параллельна оси y .

З а м е ч а н и е. Запомните формулы производных суммы, разности, произведения и формулы производных основных элементарных функций: x^n , a^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, а также формулу производной сложной функции. Это даст вам возможность вычислить производную любой элементарной функции. Вся трудность здесь сводится к тому, чтобы уметь свести каждую данную элементарную функцию к цепочке основных (простейших) элементарных функций.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Пользуясь формулой (21), докажите равенства:

$$1) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$2) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$3) (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\text{учесть, что } (e^x)' = e^x, x > 0);$$

4) Вычислить производные от следующих функций: $\ln(2x)$, $\ln(ax)$, $\operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ($a > 0$), $\arcsin x + \arccos x$, $\arcsin 2x$, $\operatorname{arctg} x^3$.

2. Как определяется мгновенная скорость точки, движущейся по закону $s = f(t)$? Как определяется касательная к кривой в ее точке?

3. Чему равен тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x ?

4. Что называется силой тока?

5. Что называется производной от функции f в точке x ?

6. Как выражается через производную

а) скорость движущейся точки,

б) тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$?

в) сила тока в проводе в момент t ?

7. Что называется угловым коэффициентом прямой? Объясните, почему функция f , имеющая производную в точке x , непрерывна в этой точке?

8. По какой формуле вычисляется производная

а) x^n ?

б) $\sin x$, $\cos x$?

- в) постоянной C ?
- г) суммы и разности?
- д) произведения функций на постоянную?
- е) e^x , a^x , $\ln x$, $\log_a x$?
- ж) логарифмической функции?
- з) произведения?
- и) частного?
- к) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$?
- л) сложной функции?
- м) обратной функции?
- н) $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$?

9. Что такое вторая производная? Каков ее физический смысл?

10. Определить ускорение точки, движущейся по законам

- а) $s = 3t^3$, б) $s = 5t^3$, в) $s = 2t$

в момент времени $t = 0, 1, 3, 4$.

11. Вычислить угловой коэффициент касательной к кривой

- а) $y = \sin x$, б) $y = \cos x$, в) $y = \operatorname{tg} x$

в точках $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

12. Вычислить производные функций

- а) $y = x + \sqrt[3]{x}$, б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$,

- в) $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$, г) $y = \ln (\ln (\ln x))$.

§ 6.1. Максимум и минимум функции

На рис. 88 изображена непрерывная функция $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), которую будем предполагать непрерывно дифференцируемой, т. е. имеющей непрерывную производную, на $[a, b]$.

На отрезке $[a, b]$ имеются две замечательные точки x_0 и x_1 . Именно ордината $f(x_0)$, соответствующая точке x_0 , является наибольшей среди ординат $f(x)$, соответствующих любым точкам x отрезка $[a, b]$, а ордината $f(x_1)$ является наименьшей среди указанных $f(x)$.

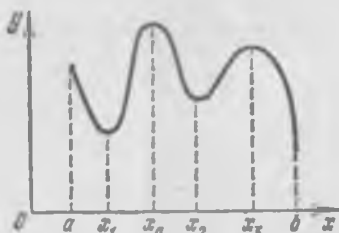


Рис. 88

Введем определения. Точка x_0 отрезка $[a, b]$ называется *точкой максимума функции f на этом отрезке*, если $f(x_0)$ есть наибольшее среди значений

$f(x)$, соответствующих любым x из $[a, b]$:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

(см. рис. 88). Точка x_1 отрезка $[a, b]$ называется *точкой минимума функции f на этом отрезке*, если $f(x_1)$ есть наименьшее среди значений $f(x)$, соответствующих любым x из $[a, b]$:

$$f(x_1) \leq f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Точка максимума или минимума f на отрезке $[a, b]$ называется *точкой экстремума* (extremum) на $[a, b]$.

Аналогично определяются точки экстремума на интервале (a, b) , т. е. на совокупности точек x оси x , для которых $a < x < b$ (см. ниже замечание 2).

Введем определения.

Окрестностью точки x_0 (оси x) называется любой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (оси x) с центром в этой точке ($\delta > 0$).

Левой окрестностью точки x_0 называется множество точек x , удовлетворяющих условиям $x_0 - \delta < x \leq x_0$.

Правой окрестностью точки x_0 называется множество точек x , удовлетворяющих условиям $x_0 \leq x < x_0 + \delta$.

На рис. 88 кроме точки x_0 отмечены еще три замечательные точки x_1, x_2, x_3 . Точка x_2 не является точкой максимума на $[a, b]$. Однако можно указать ее окрестность $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ настолько малую, что на ней x_2 есть точка максимума. Такую точку называют точкой *локального максимума* функции f .

Итак, точку x_0 отрезка $[a, b]$ называют *точкой локального максимума* f , если существует ее окрестность, принадлежащая отрезку $[a, b]$, на которой x_0 есть точка максимума.

Соответственно точку x_0 отрезка $[a, b]$ называют *точкой локального минимума* f , если существует ее окрестность, принадлежащая отрезку $[a, b]$, на которой x_0 есть точка минимума.

Мы видим (см. рис. 88), что x_1 и x_3 суть точки локального минимума f , а x_0, x_2 — точки локального максимума f . При этом x_0 , кроме того, есть точка максимума на отрезке $[a, b]$.

Точки локального максимума и минимума f называют *точками локального экстремума* f .

В точках локального экстремума f , очевидно, производная от f равна нулю*). В случае рис. 88

$$f'(x_0) = 0, \quad f'(x_1) = 0, \quad f'(x_2) = 0, \quad f'(x_3) = 0.$$

Все же надо иметь в виду, что обратное утверждение не всегда верно. Если производная от f в некоторой точке x_0 равна нулю ($f'(x_0) = 0$), то x_0 может не быть точкой локального экстремума f (см. ниже пример 1).

Дадим формальное доказательство того факта, что если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , являющейся точкой локального экстремума f , то производная от f в этой точке равна нулю.

В самом деле, пусть для определенности f имеет в x_0 локальный максимум. Тогда выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ для точек x , достаточно близких к x_0 , независимо от того, будет ли x

*) Можно было бы сказать, что функция f имеет правый локальный максимум в точке x_0 , если $f(x) \leq f(x_0)$ для всех x , принадлежащих к некоторой правой окрестности x_0 ($x_0 < x < x_0 + \delta$), как это, например, имеет место для графика на рис. 88 при $x_0 = a$. Но производная $f'(x_0)$ в такой точке не обязательно равна нулю.

больше или меньше x_0 . Следовательно, для точек x , достаточно близких к x_0 ,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ если } x - x_0 > 0, \quad (1)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ если } x - x_0 < 0. \quad (2)$$

По условию функция f имеет производную в точке x_0 , и потому существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Но этот предел должен быть одним и тем же числом, будет ли разность $x - x_0$ стремиться к нулю, оставаясь положительной или отрицательной. Из (1) следует, что $f'(x_0) \leq 0$, а из (2) следует, что $f'(x_0) \geq 0$. Но это возможно, лишь если $f'(x_0) = 0$.

Пример 1. Функция (рис. 89) $y = f(x) = x^3$ ($-1 \leq x \leq 1$) не имеет локальных экстремумов на отрезке $[-1, +1]$, но ее производная $f'(x) = 3x^2$ в точке $x = 0$ равна нулю ($f'(0) = 0$).

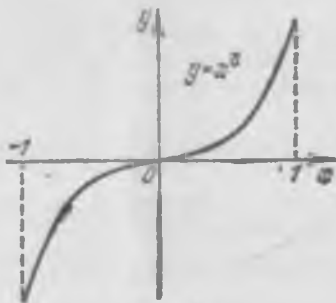


Рис. 89

Сказанное поможет нам указать путь, следуя которому можно находить максимум и минимум (экстремумы) функции на отрезке.

Пусть надо найти экстремумы функции f на отрезке $[a, b]$, где она непрерывна и имеет непрерывную производную. Находим производную $f'(x)$; приравниваем ее

нулю: $f'(x) = 0$, находим все корни полученного уравнения, принадлежащие (a, b) , считая, что их конечное число:

$$x_1, x_2, \dots, x_N;$$

вычисляем числа

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N), f(b) \quad (3)$$

и выбираем среди них наибольшее и наименьшее, которые обозначим соответственно через M и m .

Та из точек $a, x_1, x_2, \dots, x_N, b$, для которой значения (3) достигают максимума, и есть точка максимума f на $[a, b]$, обозначим ее через x_0 . Та же точка, для которой значения (3) достигают минимума, есть точка мини-

муна f на $[a, b]$, обозначим ее через x_0 . Итак,

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_0) = M, \quad \min_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_0) = m.$$

Замечание 1. Если на отрезке $[a, b]$ нет вовсе корней уравнения $f'(x) = 0$, то M есть максимальное, а m — минимальное среди чисел $f(a)$ и $f(b)$.

Замечание 2. Бывает, что надо искать экстремум на интервале (a, b) , где может оказаться, что $a = -\infty$, а $b = +\infty$. Тогда роль чисел $f(a)$ и $f(b)$ будут играть пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)$$

и M может оказаться не $\max_{a \leq x \leq b} f(x)$, а наименьшим числом большим $f(x)$ на (a, b) .

Пример 2. Дан квадратный лист жести со стороной a . Из него в его углах вырезают одинаковые квадраты (рис. 90) и, загибая лист по пунктирным линиям, делают прямоугольную коробку. При каких размерах квадратов объем коробки будет наибольшим?

Длину стороны каждого из вырезанных квадратов обозначим через x . Тогда объем коробки V есть функция от x , выражаемая формулой

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a}{2}\right).$$

Надо найти максимум этой функции на $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Имеем

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4(a - 2x)x = (a - 2x)(a - 6x).$$

Приравняв нулю $V'(x)$, получим два корня: $x = \frac{a}{2}$,

$x = \frac{a}{6}$, оба принадлежащие отрезку $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

Наибольшее из следующих трех чисел

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}, \quad V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

и есть максимальный объем коробки, соответствующий

$$x = \frac{a}{6}.$$

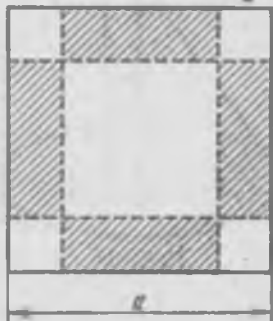


Рис. 90

Пример 3. В центре круговой конькобежной дорожки радиуса r на высоте h подвешен фонарь. Освещенность дорожки можно выразить числом T , которое вычисляется по формуле

$$T = \frac{k \sin \alpha}{h^2 + r^2},$$

где k — число, определяемое мощностью фонаря, а $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r}$ (рис. 91). Найти высоту h столба, при которой дорожка будет освещена максимально.

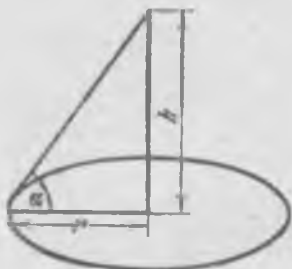


Рис. 91

Решение. Выразим T через α , исключив h :

$$T = \frac{k}{r^2} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{k}{r^2} \sin \alpha \cos^3 \alpha \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Надо найти максимум функции $T = T(\alpha)$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. среди значений α , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Решаем уравнение

$$T'(\alpha) = \frac{k}{r^2} (\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения

$$\cos \alpha = 0,$$

$$\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Первое уравнение на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет корень $\alpha = \frac{\pi}{2}$; второе же имеет единственное решение

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 35^\circ 15',$$

$$T(\alpha_0) = \frac{k}{r^2} \frac{\sin \alpha_0}{3/2} = \frac{2}{3} \frac{k}{r^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0}} = \frac{2}{3} \frac{k}{\sqrt{3} r^2},$$

$$T(0) = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Наибольшее среди этих чисел есть $T(\alpha_0)$. Ему соответствует высота столба

$$h = r \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Конечно, скорее всего, у администрации катка нет такого высокого столба. Придется поставить какой есть. Пусть в распоряжении администрации имеется столб высотой $H < \frac{r}{\sqrt{2}}$. Ему соответствует угол

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{H}{r} < \alpha_0.$$

Производная $T'(\alpha)$ не обращается в нуль (не имеет корней) на интервале $(0, \alpha_1)$. Тогда максимум $T(\alpha)$ на $(0, \alpha_1)$ есть наибольшее среди чисел $T(0)=0$ и $T(\alpha_1)$, т. е. число $T(\alpha_1)$, которому соответствует высота H .

Таким образом, уменьшать имеющийся столб (его длина $H < \frac{r}{\sqrt{2}}$) во всяком случае не нужно.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Число 12 разложить на два слагаемых, чтобы их сумма квадратов была наименьшей.

2. Число 12 разложить на два множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R .

4. Корабль стоит в 9 км от ближайшей точки прямолинейного берега; с него нужно послать курьера в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь находится на берегу). В каком пункте берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время, если он идет пешком со скоростью 5 км/ч, а на веслах со скоростью 4 км/ч?

5. Из круглого бревна диаметра d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h (рис. 92). При каких значениях a и h прочность

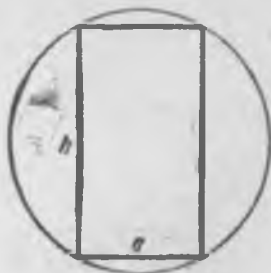


Рис. 92

балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^3 ?

6. Найти наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

7. Что такое точка максимума (минимума) функции $f(x)$ на отрезке?

8. Что такое точка локального максимума (минимума) функции $f(x)$?

9. Что такое точка экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и точка ее локального экстремума?

10. Может ли точка локального экстремума функции $f(x)$ быть концевой точкой отрезка $[a, b]$, где задана эта функция?

11. Чему равна производная от функции в точке ее локального экстремума?

12. Приведите два примера функций, которые имеют в некоторой точке x_0 производную, равную нулю ($f'(x_0)=0$), и чтобы при этом x_0 не была бы точкой локального экстремума функции f .

13. В чем состоит метод нахождения экстремумов функции на отрезке?

§ 6.2. Возрастание и убывание функции

На рис. 93, а (соответственно на рис. 93, б) изображен график непрерывной возрастающей (убывающей) на $[a, b]$ функции.

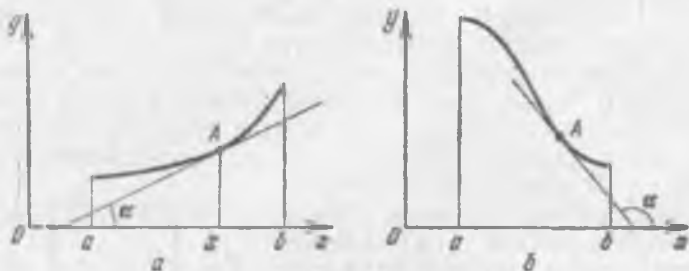


Рис. 93

Если функция f не только непрерывна на отрезке $[a, b]$, но и имеет на нем непрерывную производную $f'(x)$, то по знаку производной можно заключать, возрастает или убывает f на $[a, b]$. Именно, имеют место утверждения:

- 1) Если $f'(x) > 0$ на (a, b) , то f возрастает на $[a, b]$.
 2) Если $f'(x) < 0$ на (a, b) , то f убывает на $[a, b]$.

В самом деле,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть угол между касательной к графику в точке x^* и положительным направлением оси x . Но если $f'(x) > 0$ на (a, b) , то всюду на $(a, b)^{**})$ угол α острый, и из графика видно, что в этом случае функция должна возрастать на $[a, b]$.

Подчеркнем, что при этом первая производная в конечных точках $[a, b]$ может быть равна нулю.

Если же $f'(x) < 0$ на (a, b) , то всюду на (a, b) угол α тупой, что, очевидно, может быть, лишь если f убывает на $[a, b]^{***})$.

Пример 1. Функция $y = e^x$ ($-\infty < x < \infty$) возрастает на всей действительной оси, потому что $y' = e^x > 0$ ($-\infty < x < \infty$).

Пример 2. Функция

$$y = x^3 + 2x + 1 \quad (4)$$

имеет производную $y' = 2x + 2$. Неравенство $2x + 2 > 0$ имеет место для $x > -1$, а неравенство $2x + 2 < 0$ имеет место для $x < -1$. Следовательно, функция (4) убывает для $x \leq -1$ и возрастает для $x \geq -1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

- а) $x^3 - 4x + 2$; б) $-x^3 + 2x + 1$; в) $\cos x$; г) $(x-1)^3 + 2$; д) $(x+2)^4$.

§ 6.3. Выпуклость и вогнутость

Рассмотрим функцию

$$y = f(x) \quad (a < x < b).$$

Предположим, что она имеет вторую непрерывную производную $f''(x)$.

*) То есть в точке графика, имеющей абсциссу x .

**) То есть для всех значений x из интервала (a, b) .

***)) Формальное обоснование утверждений 1), 2) см. далее в § 6.5.

балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^2 ?

6. Найти наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

7. Что такое точка максимума (минимума) функции $f(x)$ на отрезке?

8. Что такое точка локального максимума (минимума) функции $f(x)$?

9. Что такое точка экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и точка ее локального экстремума?

10. Может ли точка локального экстремума функции $f(x)$ быть концевой точкой отрезка $[a, b]$, где задана эта функция?

11. Чему равна производная от функции в точке ее локального экстремума?

12. Приведите два примера функций, которые имеют в некоторой точке x_0 производную, равную нулю ($f'(x_0)=0$), и чтобы при этом x_0 не была бы точкой локального экстремума функции f .

13. В чем состоит метод нахождения экстремумов функции на отрезке?

§ 6.2. Возрастание и убывание функции

На рис. 93, а (соответственно на рис. 93, б) изображен график непрерывной возрастающей (убывающей) на $[a, b]$ функции.

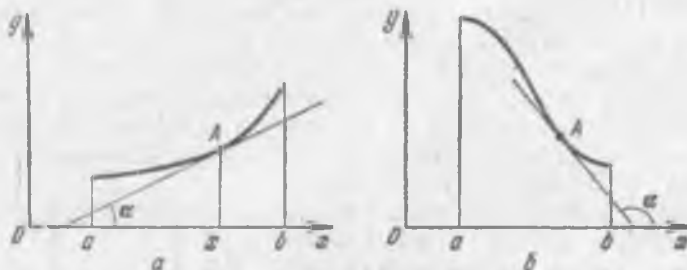


Рис. 93

Если функция f не только непрерывна на отрезке $[a, b]$, но и имеет на нем непрерывную производную $f'(x)$, то по знаку производной можно заключать, возрастает или убывает f на $[a, b]$. Именно, имеют место утверждения:

- 1) Если $f'(x) > 0$ на (a, b) , то f возрастает на $[a, b]$.
 2) Если $f'(x) < 0$ на (a, b) , то f убывает на $[a, b]$.
 В самом деле,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть угол между касательной к графику в точке $x^*)$ и положительным направлением оси x . Но если $f'(x) > 0$ на (a, b) , то всюду на $(a, b)^{**})$ угол α острый, и из графика видно, что в этом случае функция должна возрастать на $[a, b]$.

Подчеркнем, что при этом первая производная в концевых точках $[a, b]$ может быть равна нулю.

Если же $f'(x) < 0$ на (a, b) , то всюду на (a, b) угол α тупой, что, очевидно, может быть, лишь если f убывает на $[a, b]^{***})$.

Пример 1. Функция $y = e^x$ ($-\infty < x < \infty$) возрастает на всей действительной оси, потому что $y' = e^x > 0$ ($-\infty < x < \infty$).

Пример 2. Функция

$$y = x^3 + 2x + 1 \quad (4)$$

имеет производную $y' = 2x + 2$. Неравенство $2x + 2 > 0$ имеет место для $x > -1$, а неравенство $2x + 2 < 0$ имеет место для $x < -1$. Следовательно, функция (4) убывает для $x \leq -1$ и возрастает для $x \geq -1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

- а) $x^3 - 4x + 2$; б) $-x^3 + 2x + 1$; в) $\cos x$; г) $(x-1)^3 + 2$; д) $(x+2)^4$.

§ 6.3. Выпуклость и вогнутость

Рассмотрим функцию

$$y = f(x) \quad (a < x < b).$$

Предположим, что она имеет вторую непрерывную производную $f''(x)$.

*) То есть в точке графика, имеющей абсциссу x .

**) То есть для всех значений x из интервала (a, b) .

***)) Формальное обоснование утверждений 1), 2) см. далее в § 6.5.

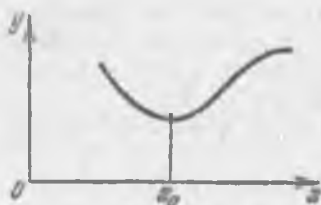


Рис. 100

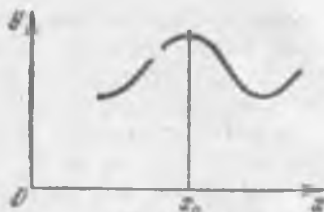


Рис. 101

что из того, что вторая производная отрицательна (положительна) в точке x_0 , следует в силу ее непрерывности, что она отрицательна (положительна) и в некоторой окрестности этой точки.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется функцией а) возрастающей, б) убывающей на отрезке $[a, b]$?

2. Как по знаку производной можно узнать, возрастает или убывает функция f на отрезке $[a, b]$?

3. Что называется графиком функции а) выпуклым кверху, б) выпуклым книзу на интервале (a, b) ?

4. Как по знаку второй производной узнать, что кривая $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпукла

а) кверху, б) книзу?

5. Сформулируйте на языке производных достаточное условие существования у функции f в точке x_0 локального

а) максимума, б) минимума.

6. Определите интервалы выпуклости кверху и книзу у кривых; определить по знаку 2-й производной их точки локального максимума, минимума:

1) $y = x^3$; 2) $y = 3x^3$; 3) $y = -2x^3$, $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = 2x^2 - 3x + 1$; 5) $y = 2 - x - x^3$; 6) $y = 2x^3 - x^4$;

7) $y = e^x \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$); 8) $y = \sin x + 0,5 \sin 2x$.

§ 6.4. Черчение схематических графиков

Чтобы получить схематический график функции $y = f(x)$, надо прежде всего отдать себе отчет в том, какова ее область определения. Обычно это есть вся ось x , либо ось с выколотыми точками, либо множество, состоящее из нескольких интервалов или отрезков. Полезно вычисле-

нием определить одну или несколько точек, через которые проходит график функции. Если область определения функции не ограничена, то надо вычислить пределы функции при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, чтобы представить себе, как говорят, поведение функции на бесконечности.

Важно вычислить первую и вторую производные ($f'(x)$ и $f''(x)$) и найти корни уравнений

$$f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x) = 0.$$

Для каждого значения x_0 , где первая производная равна нулю, следует проверить, не будет ли для него локального максимума или минимума функции. Надо также вычислить для x_0 и соответствующее значение функции $f(x_0)$. Мы, таким образом, будем знать важные точки $(x_0, f(x_0))$, через которые проходит график функции. Знание этих точек поможет найти интервалы возрастания и убывания функции.

Наконец, если удастся найти корни уравнения $f''(x) = 0$, то последние помогут указать интервалы выпуклости функции кверху и книзу. На основе этих данных уже нетрудно представить себе схематический вид графика исследуемой функции.

Но обратимся к примерам.

Пример 1. Надо нарисовать схематический график функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 1.$$

Эта функция определена и непрерывна на всей оси x .

Чтобы узнать, как она ведет себя на бесконечности, возьмем пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] = -\infty.$$

Имеем также

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(x) &= x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5), \\ f''(x) &= 2x - 6, \end{aligned}$$

откуда

$$f'(1) = f'(5) = 0,$$

$$f''(3) = 0, \quad f''(x) > 0 \quad (x > 3), \quad f''(x) < 0 \quad (x < 3).$$

Выпишем точки x , где $f'(x)=0$ и $f''(x)=0$, и точку $x=0$ и вычислим соответствующие этим точкам значения функции

x	0	1	3	5
$f(x)$	1	$10/3$	-2	$-22/3$

На основании этих данных нарисуем схематический график исследуемой функции (рис. 102).

На интервале $(-\infty, 1)$ (где $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$) функция f возрастает от $-\infty$ до $y = \frac{10}{3}$, график обращен выпуклостью кверху. В точке $x=1$ функция f достигает локального максимума. На интервале $(1, 5)$ функция f убывает, достигая при $x=5$ локального минимума, равного $y = -\frac{22}{3}$, а затем

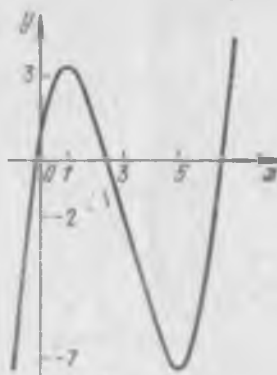


Рис. 102

на интервале $(5, \infty)$ она возрастает, стремясь к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. При этом на интервале $(1, 3)$ (где $f''(x) < 0$) график продолжает иметь выпуклость кверху, а на интервале $(3, \infty)$ (где $f''(x) > 0$) он обращен выпуклостью книзу.

Точка графика *) с абсциссой $x=3$ замечательная. При переходе x через эту точку выпуклость графика кверху заменяется на выпуклость книзу. Такая точка называется *точкой перегиба графика*. В точке перегиба вторая производная от f равна нулю. В данном случае $f''(3)=0$.

Пример 2. Нарисовать схематический график функции

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

*) То есть точка графика, имеющая абсциссу $x=3$.

Имеем

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3} > 0 \quad (-\infty < x < 1, \quad 1 < x < +\infty),$$

$$f''(x) = \frac{4}{(1-x)^4} \begin{cases} > 0 & (x < 1), \\ < 0 & (x > 1). \end{cases}$$

Рассматриваемая функция не определена при $x=1$ и

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{i}{x}} = -1.$$

На рис. 103 на основании этих данных построен схематический график функции f .

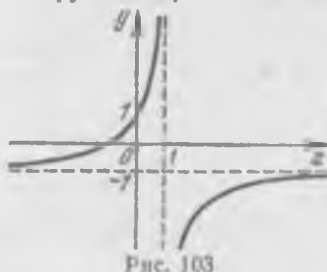


Рис. 103

Пример 3. Нарисовать схематические графики функций:

- 1) $x^3 + x + 1$; 2) $x^2 - 5x + 6$; 3) $-x^3 + x + 2$;
- 4) $\frac{x-1}{x+1}$; 5) $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 2$.

§ 6.5. Теоремы о среднем

Ниже мы доказываем теоремы, имеющие большое значение в анализе — теорему Ролля и теорему Лагранжа. Их называют теоремами о среднем. С помощью этих теорем дается формальное обоснование утверждений, доказанных в п. 6.2 и п. 6.3.

Теорема I (Ролля). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$ ($f(a) = f(b)$). Тогда на интервале (a, b) всегда найдется такая точка c , что в ней производная от f равна нулю:

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b.$$

На рис. 104 и 105 изображены графики функций f , удовлетворяющих условию теоремы Ролля. У первой функции имеется одна точка из интервала (a, b) , в которой ее производная равна нулю ($f'(c)=0$), у второй — имеются две такие точки c_1 и c_2 ($f'(c_1)=f'(c_2)=0$).

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 суть точки, в которых f достигает на отрезке $[a, b]$ соответственно минимума и максимума.

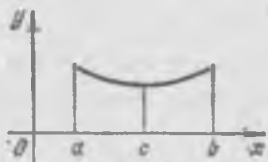


Рис. 104

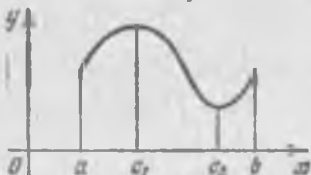


Рис. 105

Если $f(x_1) < f(a)$, то точка x_1 принадлежит очевидно интервалу (a, b) и в ней функция f достигает локального минимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_1)=0$ и можно считать, что $c=x_1$.

Если $f(x_2) > f(a)$, то точка x_2 принадлежит интервалу (a, b) и в ней функция f достигает локального максимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_2)=0$ и можно считать, что $c=x_2$.

Остается еще случай, когда $f(x_1)=f(x_2)$. Но тогда, очевидно, для всех x из отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ равна одной и той же константе $C=f(a)$. В этом случае в качестве c можно взять любую точку интервала (a, b) — в ней $f'(c)=0$.

Теорема 2 (Лагранжа). Пусть функция f имеет производную на отрезке $[a, b]$. Тогда на интервале (a, b) найдется точка c такая, что в ней производная от f удовлетворяет равенству

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a < c < b), \quad (5)$$

или, что то же самое, равенству

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \quad (a < c < b). \quad (6)$$

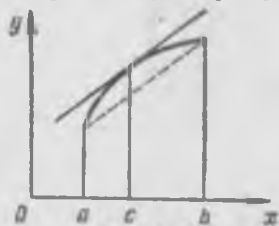


Рис. 106

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис. 106). Левая часть равенства (5) есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y=f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой точке c , принадлежащей к (a, b) . Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая есть график функции, имеющей производную на $[a, b]$, то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе c ($a < c < b$) такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = [f(b)-f(a)]x - (b-a)f(x).$$

Она имеет производную на $[a, b]$, равную

$$F'(x) = [f(b)-f(a)] - (b-a)f'(x).$$

Кроме того,

$$F(b) = -f(a)b + af(b), \quad F(a) = af(b) - f(a)b,$$

и, следовательно, $F(a) = F(b)$. Но тогда по теореме Ролля должна существовать на интервале (a, b) точка c , для которой $F'(c) = 0$, т. е.

$$[f(b) - f(a)] - (b - a)f'(c) = 0 \quad (a < c < b),$$

откуда следует (4).

Пример 1. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а производную имеет только на полуинтервале $(0, 1]$. К ней применима теорема Лагранжа, потому что для ее выполнения производная от f должна существовать на интервале $(0; 1)$.

Докажем теперь теорему, которая дает обоснование утверждениям 1) и 2) § 6.2.

Теорема 3. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет положительную (отрицательную) производную на интервале (a, b) , то она возрастает (убывает) на $[a, b]$. Если же производная равна тождественно нулю на $[a, b]$, то $f(x) = C$, где C — постоянная.

Подчеркнем, что в точках $x = a$ и $x = b$ производная может не существовать или быть равной нулю.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — произвольные точки, удовлетворяющие неравенствам $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. По теореме Лагранжа, примененной к отрезку $[x_1, x_2]$, найдется на (x_1, x_2) такая точка c , что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, потому что по условию $f'(c) > 0$. Но тогда $f(x_1) < f(x_2)$, что доказывает, что f возрастает на $[a, b]$. В случае же, когда $f'(x) < 0$ на (a, b) , получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$, а это доказывает, что f убывает на $[a, b]$.

Если же $f'(x) = 0$ на (a, b) , то $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ и $f(x_1) = f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$. Зафиксируем x_1 и будем считать $x_2 = x$ переменной; тогда $f(x) = C$, где $C = f(x_1)$.

Наконец, докажем теорему, которая дает обоснование последнему утверждению § 6.3.

Теорема 4. Если функция f имеет на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ положительную (отрицательную) производную f'' второго порядка и в точке x_0 первую производную, равную нулю ($f'(x_0) = 0$), то в этой точке f достигает локального минимума (максимума).

Доказательство. Пусть $f''(x) > 0$ на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и $f'(x_0) = 0$. Так как вторая производная есть первая производная от первой производной: $f''(x) = (f'(x))'$, то на основании теоремы 3 функция $f'(x)$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ возрастает. Но $f'(x_0) = 0$. Поэтому

$$f'(x) < 0 \quad \text{на} \quad [x_0 - \delta, x_0]$$

и

$$f'(x) > 0 \quad \text{на} \quad (x_0, x_0 + \delta].$$

Применяем теперь теорему 3 к f . Так как функция f непрерывна на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$ и имеет отрицательную производную на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, то она убывает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$. Так как, далее, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$ и имеет положительную производную на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, то она возрастает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$. Но это показывает, что функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0 . Подобным образом доказывается теорема в случае $f''(x) < 0$, приводящем к максимуму в x_0 .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте теорему а) Ролля, б) Лагранжа.
2. Объясните эти теоремы на графиках.
3. Покажите с помощью теоремы Лагранжа, что если функция имеет на отрезке $[a, b]$ производную, тождественно равную нулю, то она есть постоянная ($f'(x) = 0$).
4. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = (x-1)(x-2)$ на $[1, 2]$.
5. Многочлен $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ имеет корень $x=1$. Доказать, что многочлен $p''(x)$ имеет действительный корень на интервале $(0, 1)$.
6. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = 1 + x + x^3$.
7. Доказать неравенство $e^x > 1 + x$, $x \in (0, \infty)$.
8. Определить промежутки монотонности (возрастания, убывания) функции
 - а) $y = 3 + x - x^3$, б) $y = 4x - x^3$.
9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
 - а) $y = 2^x$ на $[0, 5]$, б) $y = x + \frac{1}{x}$ на $\left[\frac{1}{2}, 10\right]$.
10. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции
 - а) $y = 3x^3 - x^3$, б) $y = e^{-x^2}$.
11. Доказать неравенство $e^x \geq 1 + x$ для любого x (выяснить знак производной функции $\varphi(x) = e^x - 1 - x$, учесть, что $\varphi(0) = 0$).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 7.1. Первообразная

Мы знаем, что постоянное число C , рассматриваемое как функция от x , имеет производную, равную нулю тождественно (т. е. равную нулю для всех x).

Обратное утверждение также верно: если про функцию известно, что ее производная равна нулю тождественно, $f'(x) = 0$, то она есть постоянная.

Из механических соображений это простое утверждение совершенно очевидно*). В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость тождественно равна нулю: $v = f'(t) = 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s ее до начальной точки O равно постоянной при любом t . Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t , не имеет значения: время тоже можно обозначить через x .

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию f , заданную на интервале (a, b) , т. е. на множестве значений x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

Функция F называется первообразной для f на интервале (a, b) **), если на нем производная от F равна f :

$$F'(x) = f(x).$$

Очевидно, что если функция F есть первообразная для f на (a, b) , а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f , потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

*) Формальное доказательство: см. теорему 3 § 6.5.

**) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$, т. е. множестве значений x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$. Нужно только под производной в точке a понимать правую производную, а в точке b — левую производную:

$$F'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b) , то они necessarily отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C :

$$F_1(x) = F(x) + C. \quad (1)$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Но тогда, как отмечалось выше, существует такое (постоянное) число C , что $F_1(x) - F(x) = C$ на (a, b) , откуда следует (1).

Итак, пользуясь механическими соображениями, мы установили важный факт: *если F есть какая-либо первообразная от f на интервале (a, b) , то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.*

§ 7.2. Неопределенный интеграл

Дадим теперь следующее определение:

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется произвольная ее первообразная функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x) dx.$$

Из сказанного следует, что *если F есть некоторая определенная первообразная функция для f на интервале (a, b) , то неопределенный интеграл от f на этом интервале равен*

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (2)$$

где C — постоянная.

Если f_1, f_2 — непрерывные на интервале (a, b) функции и A_1, A_2 — постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)) dx = A_1 \int f_1(x) dx + A_2 \int f_2(x) dx + C, \quad (3)$$

где C есть некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в (3) стоит какая-то одна из первообразных функций

от $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$\begin{aligned} (A_1 \int f_1(x) dx + A_2 \int f_2(x) dx)' &= \\ &= A_1 (\int f_1(x) dx)' + A_2 (\int f_2(x) dx)' = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x), \end{aligned}$$

потому что интегралы $\int f_1 dx$, $\int f_2 dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные функции от f_1 и f_2 . Поэтому правая часть (3) без последнего члена C есть также первообразная для $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$, но тогда она отличается от левой части (3) на некоторую постоянную.

Свойство (3) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на (a, b) функций $f_1, \dots, f_n$ и постоянных $A_1, \dots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^n A_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^n A_j \int f_j(x) dx + C. \quad (4)$$

Как следствие при $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ получаем равенство

$$\int (f_1 \pm f_2) dx = \int f_1 dx \pm \int f_2 dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0$, $f_1 = f$ — равенство

$$\int A f dx = A \int f dx + C.$$

Примеры.

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \quad a \neq 0,$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^n}{n} \right)' &= \frac{1}{n} (x^n)' = x^{n-1}, \\ \left(\frac{\sin ax}{a} \right)' &= \frac{1}{a} (\sin ax)' = \frac{1}{a} a \cos ax = \cos ax, \\ \left(-\frac{\cos ax}{a} \right)' &= -\frac{1}{a} (\cos ax)' = \sin ax. \end{aligned}$$

Из (4) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Приведем основную таблицу неопределенных интегралов, составленную непосредственно из формул производных от элементарных функций (см. § 5.5—5.12):

$$\begin{aligned} \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ &(a \neq -1), & \int \sec^2 x dx &= \operatorname{tg} x + C, \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C^*), & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C = \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C & &= -\arccos x + \\ &(a \neq 1, a > 0), & &+ C_1 \left(C_1 - C = \frac{\pi}{2} \right), \\ \int e^x dx &= e^x + C, & \int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x + C. \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, \end{aligned}$$

В каждом из этих равенств производная от правой части равна подынтегральной функции в левой.

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить интегралы **)

1. $\int \sqrt{x} dx.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}.$
3. $\int \frac{dx}{x^3}.$
4. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx.$
5. $\int \frac{dx}{x^2+4}.$
6. $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx.$
7. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$
8. $\int 2^x dx.$
9. $\int \frac{xe^x - x}{x} dx.$
10. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx.$

§ 7.3. Замена переменной

При вычислении неопределенных интегралов нередко пользуются *методом подстановки* или *замены переменной*. Он сводится к формуле

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du + C, \quad (5)$$

где $f(u)$ — непрерывная функция, а $u = \varphi(x)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

*) Для $x > 0$ имеем $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, а для $x < 0$ $(\ln |x|)' =$
 $= (\ln (-x))' = -\frac{1}{(-x)} = \frac{1}{x}.$

**) Решение задач 5, 10 можно отложить до § 7.3.

Это надо понимать так. Если подынтегральное выражение интеграла удалось представить в виде

$$F(x) dx = f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx,$$

то можно в этом интеграле чисто формально произвести замену $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x) dx$, проинтегрировать полученное выражение $f(u) du$ по переменной u , а затем заменить u на $\varphi(x)$. Выражение $du = \varphi'(x) dx$ называется *дифференциалом функции* $\varphi(x)$. Оно имеет в анализе самостоятельное значение, но мы в этой книге пользуемся им только как обозначением.

Поясним формулу (5) на примере

$$\int \cos(kx) k dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin kx + C.$$

Мы сделали подстановку $u = kx$, $du = (kx)' dx = k dx$, в силу которой наш интеграл превратился в табличный.

Чтобы доказать формулу (5), надо убедиться в том, что производная по x от ее левой части равна производной по x от правой части. В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \right)'_x &= f[\varphi(x)] \varphi'(x), \\ \left(\int f(u) du \right)'_x &= \left(\int f(u) du \right)'_u u'_x = f(u) \varphi'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x). \end{aligned}$$

Приведем несколько примеров на применение метода подстановки:

$$\int e^{kx} dx = \int e^t \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \int e^t dt = \frac{1}{k} e^t + C = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

(подстановка $kx = t$, откуда $k dx = dt$);

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \int dt = -t + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

(подстановка $t = \sqrt{a^2 - x^2}$, откуда $dt = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$);

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} a \cos u du = \\ &= a^2 \int \cos^2 u du = a^2 \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \frac{a^2}{2} \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} (u + \sin u \cos u) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C \end{aligned}$$

(подстановка $x = a \sin u$);

$$\begin{aligned}\int \cos kx dx &= \frac{1}{k} \int \cos kx k dx = \frac{1}{k} \int \cos u du = \\ &= \frac{1}{k} \sin u + C = \frac{1}{k} \sin kx + C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} x dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \\ &= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} + C\end{aligned}$$

(подстановка $u = 1 + x^2$, $du = 2x dx$);

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C\end{aligned}$$

(подстановка $u = 1 + x^2$, $du = 2x dx$).

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx$.
2. $\int (x^2+1)^2 x dx$.
3. $\int \operatorname{tg} x dx$.
4. $\int e^{2x} x dx$.
5. $\int e^{x^2} x^2 dx$.
6. $\int \cos^3 x dx$.
7. $\int e^{2x} dx$.
8. $\int \cos 3x dx$.
9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
11. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
12. $\int e^{x^2-1} x dx$.

§ 7.4. Проблема интегрирования элементарных функций

Как видно из примеров, метод замены переменных значительно расширяет класс тех элементарных функций, которые мы теперь можем проинтегрировать, т. е. получить для них первообразные, являющиеся снова элементарными функциями. Однако надо иметь в виду, что с вычислительной точки зрения с интегрированием обстоит дело, вообще говоря, гораздо хуже, чем с дифференцированием.

Из гл. 5 известно, что производная от любой элементарной функции есть снова элементарная функция, которую можно получить совершенно эффективно, воспользовавшись правилами дифференцирования. Но обратное

утверждение, вообще говоря, неверно, так как существуют такие элементарные функции, неопределенные интегралы от которых не являются в свою очередь элементарными функциями. Например, такими функциями являются e^{-x^2} , $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ и др. Для получения интегралов от них приходится пользоваться приближенными методами и вводить в обиход новые функции, не сводимые к элементарным. Мы не имеем возможности задерживаться на этом вопросе, заметим только, что уже в элементарной математике можно найти много примеров, когда прямая операция выполнима в некотором классе чисел, в то время как обратная ей операция в этом же классе не выполняется; так, квадрат любого рационального числа есть снова рациональное число, но корень квадратный из рационального числа далеко не всегда является рациональным числом.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Что такое первообразная функция для данной функции?
2. Что такое неопределенный интеграл от функции?
3. Запомните формулы (3) и (5), выражающие основные свойства неопределенного интеграла, и основную таблицу неопределенных интегралов (см. § 7.2).
4. Приведите три примера применения метода замены переменных в неопределенном интеграле.

§ 7.5. Площадь криволинейной фигуры.

Определенный интеграл

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изображен на рис. 107. Поставим задачу разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x , прямыми $x=a$ и $x=b$, и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad (6)$$

выберем на каждом из частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \quad (7)$$

по произвольной точке ξ_j , определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \quad (8)$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников (рис. 107).

Будем теперь стремиться все Δx_j к нулю, и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S , не зависящему от

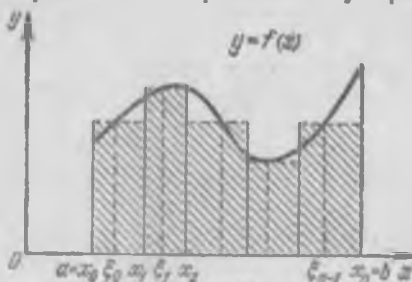


Рис. 107

способа разбиения (6) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то величину S называют *площадью данной криволинейной фигуры*. Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j. \quad (9)$$

Итак, мы дали определение площади криволинейной фигуры. Возникает вопрос: имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n , когда $\max \Delta x_j \rightarrow 0$? Этот вопрос решается положительно: *каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле указанного определения, выражаемую зависящим от этой фигуры числом S .*

Другой возникающий здесь вопрос — насколько естественно данное определение площади, — как всегда в таких случаях решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение.

Но обратим внимание на выражение (9). Отвлекаясь от задачи нахождения площади, мы можем на него смотреть как на некоторую операцию, при помощи которой по данной функции f , заданной на $[a, b]$, определяется число S . Она называется *операцией интегрирования* функции f на (конечном) отрезке $[a, b]$, а результат ее, если

он существует, называется *определенным интегралом* от f на $[a, b]$ и записывается так:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x) dx. \quad (10)$$

В этом определении функция $f(x)$ не обязательно положительная на $[a, b]$. Она может быть отрицательной или менять знак на $[a, b]$.

Итак, *определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы (10), когда максимальный частичный отрезок разбиения (6) стремится к нулю.*

В теории определенного интеграла доказывается, что *всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т. е. для нее предел (10) существует.* Отсюда и следует упомянутый факт, что всякая фигура рассмотренного выше типа (см. рис. 107) имеет площадь.

Пример. Площадь S , ограниченная параболой $y = x^2$, осью x , прямой $x = 1$, как доказано в § 3.1, равна

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Тот факт, что сумма $\sum_0^{n-1} (x_j)^2 \Delta x_j$, соответствующая произвольному разбиению $[0, 1]$ и произвольному выбору точек ξ_j , принадлежащих отрезкам $[x_j, x_{j+1}]$, стремится к $\frac{1}{3}$, когда $\max \Delta x_j \rightarrow 0$, непосредственно доказать элементарными методами не так уж просто. Это, однако, следует из упомянутого утверждения, что определенный интеграл от непрерывной на (конечном) отрезке функции всегда существует.

§ 7.6. Работа. Масса стержня

Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — абсциссы движущейся точки. Работа силы F при передви-

жении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x) dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности f произведение $f(x_j) \Delta x_j$ близко к истинной работе на $[x_j, x_{j+1}]$, а сумма таких произведений близка к истинной работе на $[a, b]$, и притом тем ближе, чем меньше $\max \Delta x_j$.

Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a, b]$ оси x имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geq 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Общая масса этого отрезка

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j) \Delta x_j = \int_a^b \rho(x) dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

§ 7.7. Теорема Ньютона — Лейбница

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (10) связано с трудностями: интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую нелегко преобразовывать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решили задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного интеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Теорема Ньютона — Лейбница. Пусть задана непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ есть ее

первообразная. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (11)$$

Формула (11) показывает, что если для функции f известна ее первообразная F , то вычисление определенного интеграла от f на $[a, b]$ сводится к простой подстановке чисел a и b в F . Дадим простое механическое толкование этой теоремы. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения точки по прямой, т. е. y есть расстояние с соответствующим знаком в момент x движущейся точки до закрепленной нулевой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $a \leq x \leq b$, очевидно, равен *)

$$\Delta = F(b) - F(a). \quad (12)$$

С другой стороны, он может быть вычислен интегрированием скорости $f(x) = F'(x)$ точки:

$$\Delta = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x) dx. \quad (13)$$

Мы разделили промежуток времени $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. В силу непрерывности функции f скорость точки на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$ можно считать приближенно постоянной, равной числу $f(x_j)$. Тогда путь, пройденный точкой на этом отрезке времени, будет приближенно равен $f(x_j) \Delta x_j$, а весь путь будет приближенно равен сумме $\sum_{j=0}^n f(x_j) \Delta x_j$. Если $\max \Delta x_j \rightarrow 0$, то эта сумма стремится к числу, равному истинной величине пути, пройденного точкой за промежуток времени $[a, b]$. В то же время это число есть, очевидно, определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b . Но тогда из (12) и (13) следует (11).

Обычно пишут, что $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

*) Впрочем, термин «путь, пройденный точкой», не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь Δ_1 , а затем влево, пройдя путь Δ_2 , то $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$.

Примеры.

$$\int_a^b x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} \Big|_a^b = \frac{1}{n} (b^n - a^n), \quad n \neq 0,$$

$$\int_a^b \cos \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \Big|_a^b = \frac{1}{\alpha} (\sin \alpha b - \sin \alpha a), \quad \alpha \neq 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на $[0, \pi]$ и осью x .

2. Определите площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью x .

3. Вычислите интеграл $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

4. Вычислите площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$ и осью x .

5. Вычислите путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за первые T секунд движения, если известно, что скорость свободного падения в пустоте $v = v_0 + gt$, где t — время, g — ускорение силы тяжести, v_0 — начальная скорость.

6. При растяжении пружины в пределах ее упругости сила сопротивления, возникающая в ней, равна $F = kx$, где x — удлинение пружины, а k — коэффициент, характеризующий свойства пружины. Вычислите работу, которую надо затратить, чтобы в результате получилось удлинение l .

7. Вычислите интегралы $\int_{-1}^1 x^2 dx$ и $\int_{-1}^1 x^3 dx$, нарисуйте графики функций x^2 и x^3 и объясните результаты.

8. Что такое определенный интеграл от функции $f(x)$?

9. Как вычисляется определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ через первообразную от $f(x)$?

10. В чем заключается связь между определенным интегралом и площадью соответствующей фигуры?

11. Как вычисляется работа силы при помощи определенного интеграла?

12. Сформулируйте теорему Ньютона — Лейбница.

§ 7.8. Доказательство формулы Ньютона — Лейбница

Пусть $f(x)$ есть непрерывная положительная функция на отрезке $[a, b]$ и пусть u есть произвольная точка интервала (a, b) (рис. 108).

Определенный интеграл

$$\Phi(u) = \int_a^u f(x) dx$$

от функции $f(x)$ на отрезке $[0, u]$ есть площадь затушеванной (одной штриховкой) фигуры. Если верхний предел интеграла есть переменная величина u , то интеграл $\Phi(u)$ есть функция верхнего предела.

Приращение Φ в точке u , соответствующее приращению h ($h > 0$) аргумента u , есть площадь фигуры, затушеванной двойной штриховкой:

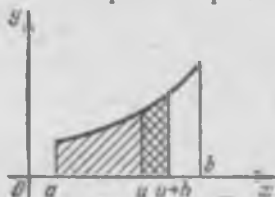


Рис. 108

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) = \int_a^{u+h} f(x) dx - \int_a^u f(x) dx = \int_u^{u+h} f(x) dx.$$

Обозначим через m минимальную ординату, а через M — максимальную ординату графика $y=f(x)$ на отрезке $[u, u+h]$. Очевидно,

$$mh \leq \Phi(u+h) - \Phi(u) \leq Mh$$

или

$$m \leq \frac{\Phi(u+h) - \Phi(u)}{h} \leq M.$$

Если h стремиться к нулю, то $m \rightarrow f(u)$, $M \rightarrow f(u)$, следовательно, существует производная

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(u+h) - \Phi(u)}{h} = \Phi'(u) = f(u).$$

Мы доказали, что производная интеграла как функции верхнего предела равна подынтегральной функции:

$$\frac{d}{du} \int_a^u f(x) dx = f(u).$$

Таким образом, $\Phi(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. Любая другая первообразная $F(x)$ отличается

от нее на постоянную:

$$F(x) = \Phi(x) + C.$$

Но

$$\Phi(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$$

и

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) &= (F(b) + c) - \\ &- (F(a) + c) = F(b) - F(a), \end{aligned}$$

и мы доказали формулу Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

§ 7.9. Свойства определенных интегралов

Основные свойства определенного интеграла выражаются формулами

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (14)$$

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx, \text{ где } A \text{ — постоянная,} \quad (15)$$

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (16)$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_c^d f(u) du, \text{ где } c = \varphi(a), \quad d = \varphi(b). \quad (17)$$

Свойство (14) (для случая $a < c < b$) видно из рис. 109: площадь криволинейной трапеции над $[a, b]$ равна площади над $[a, c]$ плюс площадь над $[c, b]$.

Свойство (15) выражает, что площадь криволинейной трапеции, определяемой функцией $f(x)$, увеличивается в A раз для функции $Af(x)$.

Свойство же (16) выражает, что площадь криволинейной трапеции, определяемой суммой $f(x) + \varphi(x)$, равна сумме площадей, соответствующих слагаемым $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Конечно, в этих пояснениях мы неявно предполагали, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, так же как и число A , неотрицательные. Ведь если, например, $f(x) < 0$ на $[a, b]$, то интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ равен площади соответ-

ствующей криволинейной трапеции, взятой со знаком минус. Но и в этом и вообще в других случаях свойства (14) — (17) верны.

Из (15) следует

$$\int_a^b [-f(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

$$\begin{aligned} \int_a^b [Af(x) + B\varphi(x)] dx &= \int_a^b Af(x) dx + \int_a^b B\varphi(x) dx = \\ &= A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

где A и B — постоянные.

Последнее равенство легко по индукции распространить на любое конечное число слагаемых. Например,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx &= \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 x dx + \int_0^1 1 dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2 \cos x + 3 \sin x) dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx + 3 \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \\ &= 2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 3 \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

В формуле (17) $\varphi(x)$ есть непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, для которой $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Если $F(u)$ — первообразная для $f(u)$, то

$$(F[\varphi(x)])'_x = f[\varphi(x)] \varphi'(x),$$

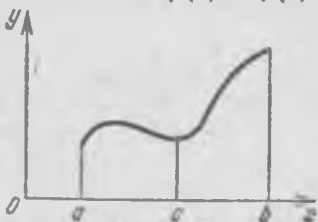


Рис. 109

поэтому

$$\int_c^d f(u) du = F(d) - F(c) = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = \int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx.$$

Пример.

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u du = \frac{1}{2} (-\cos u) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

(подстановка $u = 2\theta$; $\theta = 0$, $u = 0$; $\theta = \pi/2$, $u = \pi$).

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить интегралы

$$1. \int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx. \quad 2. \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx.$$

$$3. \int_0^{\pi/2} (\cos 2x - \sin 3x) dx. \quad 4. \int_0^1 (e^{x^2} x + e^{-x}) dx.$$

$$5. \int_0^{2\pi} (\cos 3x + \sin 2x) dx. \quad 6. \int_0^1 e^{x^2} x dx. \quad 7. \int_0^1 e^{2x} dx.$$

$$8. \int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta. \quad 9. \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx.$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx. \quad 11. \int_0^1 (x^2 + 1)^2 x dx. \quad 12. \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$$

§ 7.10. Площадь круга

Уравнение окружности (рис. 110) радиуса R с центром в начале координат x, y имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Следовательно, уравнение ее части, расположенной выше оси x , записывается в виде

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leq x \leq R).$$

Но тогда площадь круга радиуса R равна (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \theta} R \cos \theta d\theta = \\
 &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \\
 &= 2R^2 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right] \Big|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2.
 \end{aligned}$$

Во втором равенстве этой цепи сделана замена переменной

$$x = R \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

и использована формула (17), но примененная в обратном порядке. При возрастании переменной θ от $-\pi/2$ до $\pi/2$

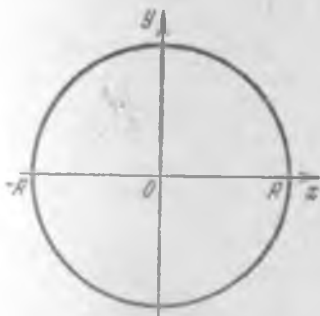


Рис. 110

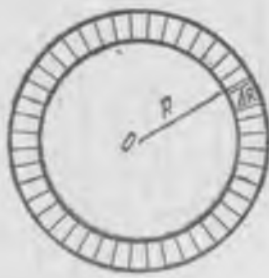


Рис. 111

переменная x возрастает от $-R$ до R . При этом

$$dx = R \cos \theta d\theta.$$

§ 7.11. Длина окружности

Площадь круга есть функция $S = \pi R^2$ от R . Придадим R приращение $\Delta R > 0$. Тогда соответствующее приращение

$$\Delta S = S(R + \Delta R) - S(R)$$

будет представлять собою площадь заштрихованного кольца на рис. 111. Длина окружности $L(R)$ есть тоже функ-

ция от R . Очевидно,

$$L(R) \Delta R < \Delta S < L(R + \Delta R) \Delta R,$$

поэтому

$$L(R) < \frac{\Delta S}{\Delta R} < L(R + \Delta R).$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\Delta R \rightarrow 0$, учитывая, что функция $L(R)$ непрерывна, получаем

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta R} = L(R),$$

т. е.

$$L(R) = S'(R) = (\pi R^2)' = 2\pi R,$$

и мы получили формулу длины окружности.

§ 7.12. Объем тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$). Вычислим объем V тела вращения, ограниченного по-

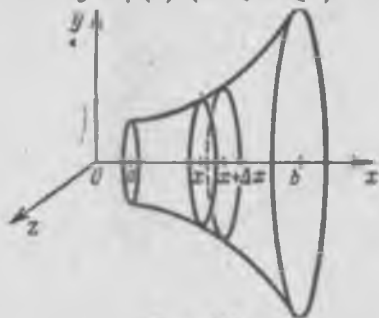


Рис. 112

верхностью вращения кривой Γ вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точки $x = a$, $x = b$ перпендикулярно оси x (см. рис. 112).

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и будем считать, что элемент объема ΔV_k тела вращения, ограничен-

ный плоскостями, проходящими через точки x_k и x_{k+1} перпендикулярно оси x , приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Но тогда объем V может быть записан при помощи приближенного равенства $V \approx \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k$. Чтобы получить точное равенство, надо взять предел

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

и мы получаем формулу для объема тела вращения

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (18)$$

§ 7.13. Объем шара

Объем V шара радиуса R равен

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

В самом деле, круг радиуса R в плоскости xOy имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а верхняя полуокружность Γ имеет уравнение

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leq x \leq R).$$

Если вращать Γ вокруг оси x , то получим поверхность нашего шара. Но тогда согласно формуле (18)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned} \quad (19)$$

§ 7.14. Площадь поверхности шара

Объем шара радиуса R

$$V(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

есть функция от R .

Площадь $S(R)$ поверхности этого шара можно получить как производную:

$$S(R) = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{V(R + \Delta R) - V(R)}{\Delta R} = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)' = 4\pi R^2.$$

Поясним эти выкладки. Приращение объема шара, соответствующее приращению ΔR ,

$$\Delta V = V(R + \Delta R) - V(R),$$

очевидно, равно объему слоя, ограниченного изнутри шаровой поверхностью радиуса R и извне шаровой поверх-

постью радиуса $R + \Delta R$. Если $S(R)$ есть площадь поверхности шара радиуса R , то, очевидно,

$$S(R) \Delta R < \Delta V < S(R + \Delta R) \Delta R$$

или

$$S(R) < \frac{\Delta V}{\Delta R} < S(R + \Delta R).$$

Поэтому, учитывая непрерывность $S(R)$, получим

$$S(R) = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V'(R).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить объем кругового цилиндра высоты H и радиуса основания R .

2. Вычислить объем тела вращения, ограниченного плоскостью, проходящей через точку $x=1$ оси x перпендикулярно к ней, и поверхностью вращения около оси x кривой:

1) $y = x^2$ (рис. 113); 2) $y = x^n$

3) $y = \sqrt{x}$.

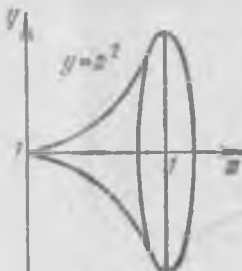


Рис. 113

§ 7.15. Работа электрического заряда

Пусть c и c' — два заряда, находящиеся на прямой на расстоянии r друг от друга. Сила взаимодействия F

между ними направлена вдоль этой прямой и равна $F = \frac{a}{r^2}$ ($a = kcc'$, где k — постоянная). Работу W этой силы, когда заряд c неподвижен, а заряд c' передвигается по отрезку $[R_1, R_2]$, можно подсчитать, разбивая отрезок $[R_1, R_2]$ на части длины Δr_i . На каждой из них приближенно считаем силу постоянной, тогда работа на таком участке равна $\frac{a}{r_i^2} \Delta r_i$. Делая частицы разбиения все более мелкими, убеждаемся, что работа W равна интегралу

$$W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum \frac{a}{r_i^2} \Delta r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2} dr \quad (0 < R_1 < R_2).$$

Этот интеграл мы сразу находим, принимая во внимание, что

$$\frac{a}{r^2} = \left(-\frac{a}{r}\right)';$$

отсюда

$$W = -\frac{a}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

В частности, работа, выполненная силой F , при передвижении заряда c' , находившегося сначала на расстоянии R_1 от заряда c , на бесконечность, равна

$$W = \lim_{R_2 \rightarrow 0} a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{a}{R_1} \quad (0 < R_1).$$

При $c' = 1$ мы получили потенциал заряда c как функцию от R .

§ 7.16. Давление жидкости на стенку

Бассейн высоты H наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бассейна, с основанием прямоугольника, равным a .

Делим высоту на равные малые части Δh . Стенка разделится на «элементы» (один из них заштрихован, рис. 114). Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м, имеющего сечение 1 м^2 , равно h_i тоннам. Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i , равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a \Delta h$. Величина давления на стену приближенно равна

$$P \approx \sum_{i=1}^n a h_i \Delta h = a \sum_{i=1}^n h_i \Delta h,$$

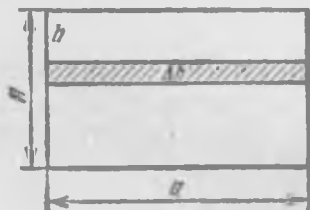


Рис. 114

где сумма распространена на все Δh . Точное же ее выражение равно интегралу

$$P = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} a \sum_{i=1}^n h_i \Delta h = a \int_0^H h \, dh = a \left. \frac{h^2}{2} \right|_0^H = \frac{aH^2}{2}.$$

§ 7.17. Центр тяжести

Центр тяжести системы материальных точек

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

с массами $m_1, m_2, \dots, m_N$ соответственно имеет координаты

$$x_0 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j x_j}{\sum_{j=1}^N m_j}, \quad y_0 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j y_j}{\sum_{j=1}^N m_j}.$$

Эти формулы распространяются на непрерывно распределенные по площади массы. Роль конечных сумм играют тогда интегралы.

Найдем центр тяжести сегмента параболы $y = 1 - x^2$ равномерно распределенной по нему массой, ограниченного

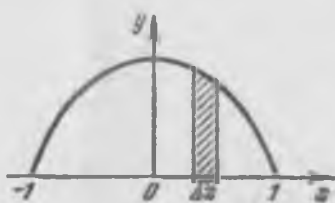


Рис. 115

снизу осью x (рис. 115). Для этого отрезок $[-1, 1]$ оси x разделим на n равных частей длины Δx . Одна такая часть заштрихована на рис. 115. Ввиду малости Δx можно считать, что масса заштрихованного элемента сегмента равна

$$\rho f(x_i) \Delta x = \rho y_i \Delta x$$

и она сконцентрирована в точке $(x_i, \frac{y_i}{2})$. Здесь ρ — плотность распределения массы.

Ввиду симметрии сегмента абсцисса его центра тяжести равна $x_0 = 0$. Ординату же можно приближенно записать в виде

$$y_0 \approx \frac{\rho \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{2} y_i \Delta x}{\rho \sum_{i=1}^n y_i \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta x}{\sum_{i=1}^n y_i \Delta x},$$

где сумма распространена на все частичные отрезки деления $[-1, 1]$.

Точное выражение для ординаты центра тяжести нашей фигуры получим, перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$y_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta x}{\sum_{i=1}^n y_i \Delta x}}{\frac{1}{2} \frac{\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}} \quad (20)$$

где в данном случае $a = -1$, $b = 1$. Таким образом,

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Выражение (20) можно рассматривать как общую формулу для ординаты центра тяжести фигуры, изображенной на рис. 116, с равномерно распределенной по ней массой. Соответствующая формула для x_0 имеет вид

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}.$$

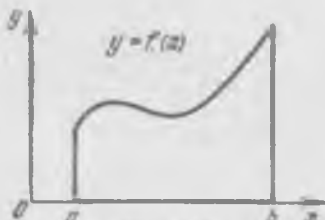


Рис. 116

УПРАЖНЕНИЯ

1. В бассейн с водой опущена полукруглая пластина радиуса R так, что ее диаметр находится на уровне воды (рис. 117). Определить давление воды на одну из сторон пластины.

2. Найти координаты центра тяжести верхнего полукруга $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

3. Найти координаты центра тяжести сегмента параболы $y = 1 - x^2$, ограниченного сверху прямой $y = 1$.



Рис. 117

4. Сила тока в проводнике есть функция времени $y = 1 + t^2$. Какое количество электричества проходит через сечение проводника за промежуток времени $0 \leq t \leq 3$?

5. Чему равна производная определенного интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу?

6. Сформулируйте и запишите основные свойства определенных интегралов.

7. Чему равны а) площадь круга, б) длина окружности, в) объем шара, г) площадь поверхности шара.

8. Запишите формулу для объема вращения. Объясните ее.

9. Запишите формулу

а) для центра тяжести системы материальных точек;

б) для координат центра тяжести системы материальных точек;

в) для координат центра тяжести, выраженных через интегралы.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8.1. Охлаждение тела

Тело, имеющее температуру θ_0 , помещено в среду с температурой 0° ($\theta_0 > 0$). Требуется найти закон $\theta(t)$ изменения его температуры в зависимости от времени t .

Из курса физики известно, что скорость охлаждения тела $\frac{d\theta}{dt}$ пропорциональна разности температуры тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $\theta(t)$ убывающая, получаем равенство

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Мы получили уравнение относительно неизвестной функции $\theta = \theta(t)$. Оно называется *дифференциальным уравнением*, потому что в него входит неизвестная под знаком производной.

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$\theta = Ae^{-kt}, \quad (2)$$

где A может быть любой постоянной. В самом деле,

$$\frac{d\theta}{dt} = -kAe^{-kt}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим тождество, т. е. равенство, верное для любого t . Формула (2) дает бесконечно много решений поставленной задачи, соответствующих разным значениям постоянной A . Для нашей задачи $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, откуда $A = \theta(0) = \theta_0$ и решение данной задачи имеет вид

$$\theta = \theta_0 e^{-kt}.$$

Из полученной формулы видно, что $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, затем с увеличением t температура θ тела весьма быстро

4. Сила тока в проводнике есть функция времени $y = 1 + t^2$. Какое количество электричества проходит через сечение проводника за промежуток времени $0 \leq t \leq 3$?

5. Чему равна производная определенного интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу?

6. Сформулируйте и запишите основные свойства определенных интегралов.

7. Чему равны а) площадь круга, б) длина окружности, в) объем шара, г) площадь поверхности шара.

8. Запишите формулу для объема вращения. Объясните ее.

9. Запишите формулу

а) для центра тяжести системы материальных точек;

б) для координат центра тяжести системы материальных точек;

в) для координат центра тяжести, выраженных через интегралы.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8.1. Охлаждение тела

Тело, имеющее температуру θ_0 , помещено в среду с температурой 0° ($\theta_0 > 0$). Требуется найти закон $\theta(t)$ изменения его температуры в зависимости от времени t .

Из курса физики известно, что скорость охлаждения тела $\frac{d\theta}{dt}$ пропорциональна разности температуры тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $\theta(t)$ убывающая, получаем равенство

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Мы получили уравнение относительно неизвестной функции $\theta = \theta(t)$. Оно называется *дифференциальным уравнением*, потому что в него входит неизвестная под знаком производной.

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$\theta = Ae^{-kt}, \quad (2)$$

где A может быть любой постоянной. В самом деле,

$$\frac{d\theta}{dt} = -kAe^{-kt}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим тождество, т. е. равенство, верное для любого t . Формула (2) дает бесконечно много решений поставленной задачи, соответствующих разным значениям постоянной A . Для нашей задачи $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, откуда $A = \theta(0) = \theta_0$ и решение данной задачи имеет вид

$$\theta = \theta_0 e^{-kt}.$$

Из полученной формулы видно, что $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, затем с увеличением t температура θ тела весьма быстро

уменьшается. При $t \rightarrow +\infty$ она стремится к нулю ($\theta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Замечание 1. Дифференциальное уравнение (1) можно рассматривать как уравнение радиоактивного распада. В этом случае $\theta = \theta(t)$ есть масса вещества, подвергающегося распаду, а θ_0 — его масса в момент времени $t = 0$.

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, обращающееся в $y = y_0$ при $t = 0$:

$$\text{а) } \frac{dy}{dt} = -2y, \quad \text{б) } \frac{dy}{dt} = -y, \quad \text{в) } \frac{dy}{dt} = 3y.$$

§ 8.2. Нахождение закона движения тела по его скорости

Точка движется по оси x . Ее скорость — заданная функция времени $v = f(t)$. Надо найти закон движения точки, т. е. зависимость ее координаты x от t , или, как говорят, зависимость пути от времени.

Решение. Пусть искомый закон движения определяется формулой $x = F(t)$. Производная от x по t равна $v = f(t)$, т. е.

$$F'(t) = f(t). \quad (4)$$

Мы получили дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $F(t)$. Его решить нетрудно: оно показывает, что $F(t)$ есть первообразная от f . Следовательно,

$$F(t) = \int f(t) dt + C, \quad (5)$$

где C — произвольная постоянная. Чтобы найти C для конкретного закона, надо знать дополнительно, где находилась точка в некоторый момент времени t , например при $t = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка движется по оси x со скоростью

- а) $v = 3$, б) $v = a$, в) $v = 2t$, г) $v = at$, $v = \cos t$, д) $v = \cos t$,
е) $v = e^t$.

Найти возможные законы ее движения. Определить среди этих законов тот, для которого $x = 0$ при $t = 0$ а также тот, для которого $x = 1$ при $t = 1$.

Решение. а) $x = \int 3dt + C = 3t + C$. При условии $t = 0$, $x = 0$, получим $C = 0$; следовательно, в этом случае закон движения имеет вид $x = 3t$. При условии $t = 1$, $x = 1$, получим $1 = 3 + C$, т. е. $C = -2$. Закон имеет вид $x = 3t - 2$.

§ 8.3. Равномерно ускоренное движение

Точка движется по оси x равномерно ускоренно с ускорением, равным a . Найти закон ее движения.

Решение. Пусть искомый закон движения определяется функцией $x = F(t)$. По условию вторая ее производная равна a :

$$F''(t) = a.$$

Но первая производная есть первообразная от второй, поэтому

$$F'(t) = \int a dt + b = at + b,$$

где b — произвольная постоянная. Искомая же функция $F(t)$ есть первообразная от $F'(t)$, поэтому

$$F(t) = \int (at + b) dt + C = \frac{at^2}{2} + bt + C.$$

Итак, общий закон движения выражается формулой

$$x = F(t) = \frac{at^2}{2} + bt + C, \quad (6)$$

где b и C — произвольные постоянные. Таким образом, имеется бесконечно много законов движения, решающих задачу — каждой паре чисел b и C соответствует свой конкретный закон. Чтобы найти закон, соответствующий данному движению, надо, например, знать, где находилась точка в некоторый момент времени t_0 и какова была скорость v_0 ее в этот момент.

Задача. Из винтовки выстрелили вверх. Напишите закон движения пули, считая, что ускорение земного притяжения 10 м/с, скорость вылета пули из винтовки 800 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Ось x направим вертикально вверх, ее начало считаем точкой вылета пули, за единицу длины примем метр. Ускорение силы тяжести направлено вниз вместе с силой тяжести. Поэтому в наших расчетах надо считать ускорение равным отрицательному числу -10 .

На основании формулы (6) закон движения выражается функцией $x = -5t^2 + at + C$. Так как пуля в момент $t=0$ имела координату $x=0$, то $0=0+0+C$ или $C=0$, поэтому

$$x = -5t^2 + at.$$

Чтобы определить a , возьмем производную от x по t

$$\frac{dx}{dt} = -10t + a.$$

При $t=0$ производная равна скорости вылета пули 800 м/с. Поэтому $a=800$, и закон движения имеет вид

$$x = -5t^2 + 800t.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Нарисуйте график функции $x = -5t^2 + 800t$ и определите наибольшую высоту достижения пули, момент ее достижения, момент падения на землю и скорость в момент падения.

2. Материальная точка падает с высоты 1000 м. Через сколько времени она упадет на землю и с какой скоростью? Сопротивлением воздуха пренебречь и за ускорение земного притяжения принять 10 м/с.

3. На высоте 2000 м от земли выстрелили из винтовки вверх. Скорость вылета пули 800 м/с. Написать закон движения пули, нарисовать его график. Какой наибольшей высоты достигнет пуля и через сколько времени? Через какое время пуля упадет на землю и с какой скоростью? Сопротивлением воздуха пренебречь и за ускорение земного притяжения принять 10 м/с.

4. В предыдущей задаче считать, что выстрел направлен вниз. Через какое время пуля достигнет земли и с какой скоростью упадет на землю?

§ 8.4. Колебание пружины

Внизу к висящей пружине прикреплен груз m . Ось направлена вдоль пружины вниз (рис. 118). В неподвижном состоянии груз находится в начале оси x . Выведем пружину из равновесия, сжав или растянув ее, и представим самой себе с момента времени $t=0$. Груз будет колебаться в вертикальном направлении. Пусть $x=x(t)$ — координата груза в момент t . Чтобы найти функцию $x(t)$, напомним ее дифференциальное уравнение.

По закону Ньютона в любой момент времени произведение массы груза на его ускорение m равно силе, действующей на груз в этот момент. Это сила упругости, равная по закону Гука произведению некоторого постоянного коэффициента a на величину отклонения груза от положения равновесия. Сила эта, таким образом, равна $-ax$. Знак минус возникает из следующих соображений.

Если $x > 0$, то пружина (рис. 118) находится в растянутом состоянии и сила упругости действует на груз снизу вверх, т. е. она отрицательна; если же $x < 0$, то пружина сжата и сила упругости положительна. Итак, $mx'' = -ax$ или

$$x'' + k^2 x = 0 \quad \left(k^2 = \frac{a}{m}\right). \quad (7)$$

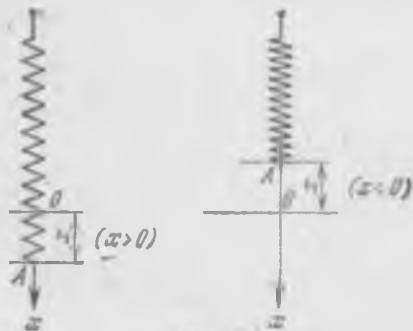


Рис. 118

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, потому что неизвестная функция в нем находится под знаком второй производной. Функции $\sin kt$ и $\cos kt$ являются решениями уравнения (7), потому что, например,

$$(\sin kt)'' + k^2 \sin kt = -k^2 \sin kt + k^2 \sin kt = 0.$$

Но тогда функция вида

$$x(t) = A \sin kt + B \cos kt, \quad (8)$$

где A и B — любые произвольные постоянные, есть тоже решение уравнения (7). Ведь если y — решение, то Ay есть тоже решение:

$$(Ay)'' + k^2 Ay = A(y'' + k^2 y) = A \cdot 0 = 0,$$

а также, если y и z — решения, то и $y + z$ есть решение:

$$(y + z)'' + k^2 (y + z) = (y'' + k^2 y) + (z'' + k^2 z) = 0 + 0 = 0.$$

Выходит, что дифференциальное уравнение (7) имеет бесконечно много решений, соответствующих произвольным значениям чисел A и B . Каждое конкретное движение находится заданием двух начальных условий. Обычно в ка-

честве этих начальных условий задают два числа x_0 и x'_0 , где x_0 — отклонение груза в момент времени $t=0$, а x'_0 — скорость, сообщенная грузу в момент $t=0$.

Например, пусть $x'_0=0$ и $x_0 \neq 0$ при $t=0$. Тогда из формулы (8) следует, что $x_0=B$, $x'(t)=kA \cos kt - x_0 k \sin kt$ и $0=kA$ или $A=0$. Поэтому груз колеблется по закону

$$x(t) = x_0 \cos kt.$$

Мы знаем, что формулу (8) можно записать в виде

$$x = C \cos(kt - \alpha) \quad (C > 0). \quad (8')$$

Число C называется *амплитудой* колебания. Отклонение груза $x(t)$ от точки 0 удовлетворяет неравенству $-C \leq x(t) \leq C$, и при этом существуют значения t , для которых $x=C$ и $x=-C$. Число k называется *частотой* колебания. Функция (8) имеет период, равный $\frac{2\pi}{k}$. За

единицу времени происходит $1: \frac{2\pi}{k} = \frac{k}{2\pi}$ колебаний. Наконец, число α называется *фазой* колебания.

З а м е ч а н и е. Формула (8') моделирует процесс колебания пружины неточно и пригодна только для достаточно малого отрезка времени $[0, t_0]$, при ее выводе не учтены трения, возникающие при колебании пружины, сопротивление воздуха.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Написать уравнение описанного выше движения груза при условии, что начальное (при $t=0$) его отклонение x_0 и начальная скорость x'_0 равняются

а) $x_0=0,01$, $x'_0=0$; б) $x_0=0$, $x'_0=0,01$.

2. Напишите дифференциальное уравнение для температуры охлаждающегося тела. Напишите общую формулу решения этого уравнения. Много ли решений имеет это уравнение? Как можно выделить частное решение? Почему это уравнение называется уравнением первого порядка?

3. Напишите дифференциальное уравнение, выражающее связь между законом движения тела и скоростью движения. Каков порядок этого уравнения? Напишите общую формулу решения этого уравнения.

4. Напишите дифференциальное уравнение для закона равномерного ускоренного движения. Каков его порядок?

Напишите общую формулу решения этого уравнения. От скольких произвольных постоянных это решение зависит? Что надо знать, чтобы определить конкретные значения этих постоянных для данного частного решения?

5. Напишите дифференциальное уравнение колебания точки пружины. Объясните его. Каков его порядок? Каково его общее решение? От скольких произвольных постоянных оно зависит? Как их находят на практике?

6. Для дифференциального уравнения

$$x'' + 4x = 0$$

найти

а) общее решение;

б) частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

$$t = 0, \quad x = 2, \quad x' = 3;$$

$$t = 0, \quad x = 2, \quad x' = 0;$$

$$t = 0, \quad x = 0, \quad x' = 3.$$

§ 9.1. Понятие формулы Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[0, a]$. Тогда для любого ее значения выполняется формула Лагранжа (см. § 6.5):

$$f(x) - f(0) = xf'(c),$$

где c — некоторое число, для которого выполняются неравенства $0 < c < x$. Эту формулу можно записать так:

$$f(x) = f(0) + xf'(c) \quad (0 < c < x). \quad (1)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0, a]$ не только первую, но и вторую производную. Тогда для нее верна формула, которую называют *формулой Тейлора*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{x^2}{2!} f''(c) \quad (0 < c < x), \quad (2)$$

для любого значения x из отрезка $[0, a]$.

Вообще, если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0, a]$ производные до порядка n включительно, то для любого x из отрезка $[0, a]$ выполняется равенство

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n, \quad (3)$$

где

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c) \quad (0 < c < x) \quad (4)$$

и c — некоторое число, зависящее от x и n .

Это равенство называется *формулой Тейлора* с остатком n -й степени. Величину R_n называют *остатком* или *остаточным числом формулы Тейлора* *).

*) Может быть $a < 0$, и тогда символ $[0, a]$ на самом деле обозначает $[a, 0]$ и формулы (1) — (4) остаются верными при $a < x < c < 0$.

Мы не знаем точно, чему равен остаток, потому что про число c только известно, что оно находится где-то между 0 и x . Но и этой информации бывает достаточно, чтобы формула Тейлора имела практическое значение. Практический смысл формулы Тейлора заключается в том, что в ряде случаев удастся заключить, что ее остаток мал настолько, что им можно пренебречь, и тогда получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1},$$

которое дает возможность вычислить $f(x)$, если можно вычислить числа $f(0)$, $f'(0)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(0)$.

Для примера выведем формулу Тейлора с остатком второй степени, т. е. формулу (2).

Зададим x из отрезка $[0, a]$. Найдем такое P , чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x^2 P. \quad (5)$$

Можно было бы решить это уравнение относительно P . Но нас интересует другое — мы хотим неизвестное P выразить через вторую производную от функции $f(x)$. Для этого будем рассуждать следующим образом.

Каждое заданное значение x определяет при помощи равенства (5) число P . Введем функцию от переменной u , заданную на отрезке $[0, x]$:

$$F(u) = f(u) + (x-u)f'(u) + (x-u)^2 P. \quad (6)$$

Будем помнить, что здесь x и P — фиксированы и это выражение есть функция от переменной u . Функция $F(u)$ имеет на отрезке $[0, x]$ производную, потому что по условию $f(u)$ имеет вторую производную и, следовательно, можно взять производную не только от $f(u)$, но и от $f'(u)$. Кроме того, функция $F(u)$ имеет равные значения на концах отрезка $[0, x]$. Ведь

$$F(0) = f(0) + xf'(0) + x^2 P = f(x)$$

(см. (5)) и $F(x) = f(x)$. Поэтому согласно теореме Ролля существует точка c , удовлетворяющая неравенствам $0 < c < x$, в которой производная от функции F равна нулю:

$$F'(c) = 0.$$

Нам остается лишь, пользуясь формулой (6), вычислить производную $F'(u)$ и положить в ней $x=c$:

$$F'(u) = f'(u) - f'(u) + (x-u)f''(u) - 2(x-u)P,$$

$$(x-c)f''(c) - 2(x-c)P = 0, \quad f''(c) - 2P = 0, \quad P = \frac{f''(c)}{2}.$$

Подставляя это значение для P в равенство (5), получим искомого формулу Тейлора (2).

§ 9.2. Примеры

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Напишем для нее формулу Тейлора при $n = 5$. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f^I(x) &= \cos x, & f^{II}(x) &= -\sin x, \\ f^{III}(x) &= -\cos x, & f^{IV}(x) &= \sin x, & f^V(x) &= \cos x, \\ f(0) &= 0, & f^I(0) &= 1, & f^{II}(0) &= 0, \\ f^{III}(0) &= -1, & f^{IV}(0) &= 0, & f^V(c) &= \cos c. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6!} + R_5(x), \quad R_5(x) = \frac{\cos c}{5!} x^5 = \frac{\cos c}{120} x^5.$$

Для значений x , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$,

$$|R_5(x)| \leq \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 < \frac{1}{400}.$$

Следовательно, имеет место приближенное равенство

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6!} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

с точностью до $1/400$.

Если в разложении $\sin x$ по формуле Тейлора взять больше членов, то получим многочлен более высокой степени, приближающий $\sin x$ еще точнее.

Замечание 1. При оценках остаточных членов следует учесть, что $|\cos c| \leq 1$ при любом c ,

$$\begin{aligned} e^c &< e^x & \text{при } 0 < c < x; \\ e^c &\leq 1 & \text{при } x < c < 0; \\ \frac{1}{1+c} &< 1 & \text{при } 0 < c < x. \end{aligned}$$

Для отрицательных x неизвестное число c тоже отрицательно и последняя оценка не проходит. На случай отрицательных x для функций $(1+x)^m$ и $\ln(1+x)$ имеются другие формулы остатков, позволяющие сделать нулевые оценки.

Замечание 2. Вычисления, связанные с формулами (3), в настоящее время производят на микрокалькуляторах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что формулы Тейлора для функций $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ при $n=5$ имеют вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_5(x),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} x^4 + R_5(x).$$

2. Для функции $\cos x$ оценить $R_4(x)$ для $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

3. Для функции e^x оценить остаток $R_4(x)$ для $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

4. Написать рассмотренные в задаче 1 формулы при $n=5$.

5. Вычислить числа e , $e^{1/3}$, $\cos \frac{1}{100}$, $\ln \frac{1}{10}$ с точностью до 10^{-4} . Углы взяты в радианах.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

§ 10.1. Десятичные разложения рациональных чисел

Пусть задано положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ ($p > 0$, $q > 0$). Требуется превратить его в десятичную дробь.

Начнем с самого простого случая, когда q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5. Вот примеры:

$$\frac{7}{2^3 \cdot 5^4} = \frac{7 \cdot 2^3}{2^3 \cdot 5^4} = \frac{28}{10^4} = 0,0028,$$

$$\frac{3}{2^6 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 125}{2^6 \cdot 5^3} = \frac{375}{10^6} = 0,00375.$$

Мы видим, что произвольное положительное рациональное число $\frac{p}{q}$, где q не имеет других делителей, кроме 2 и 5, разлагается в конечную десятичную дробь:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m. \quad (1)$$

Здесь α_0 — целое неотрицательное число, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — цифры, каждая из них может принимать одно из значений 0, 1, 2, ..., 9.

Но и обратное утверждение верно, произвольная конечная дробь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m$ есть рациональное число

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m}{10^m}.$$

Здесь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m$ — целое число, состоящее из α_m единиц, α_{m-1} десятков, α_{m-2} сотен, ...

Мы доказали, что для того чтобы положительное рациональное число, выраженное несократимой дробью $\frac{p}{q}$, разлагалось в конечную десятичную дробь, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель ее q не имел других простых делителей, кроме 2 и 5.

Остальные дроби $\frac{p}{q}$ могут иметь только бесконечные десятичные разложения $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$, т. е. такие, что для любого натурального k найдется натуральное $l > k$ такое, что $\alpha_l > 0$.

Произвольную конечную десятичную дробь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \dots \alpha_m$ ($\alpha_m > 0$) мы будем записывать еще в виде

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m 000 \dots$$

или в виде бесконечной десятичной дроби

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{m-1} (\alpha_m - 1) 999 \dots \quad (2)$$

Например, будем писать

$$0,2365 = 0,2365000 \dots = 0,2364999 \dots$$

Читатель сам проверит, деля числитель на знаменатель «уголком», следующие бесконечные десятичные разложения:

$$\frac{5}{9} = 0,555 \dots = 0, (5),$$

$$\frac{7}{9} = 0,777 \dots = 0, (7),$$

$$\frac{23}{99} = 0,2323 \dots = 0, (23),$$

$$\frac{71}{99} = 0,7171 \dots = 0, (71),$$

$$\frac{7}{999} = 0,007007 \dots = 0, (007).$$

Все это — периодические разложения. Например $\frac{5}{9}$ есть, как говорят, нуль целых и 5 в периоде, а $\frac{71}{99}$ — нуль целых и 71 в периоде.

Вообще, имеет место равенство

$$\underbrace{\frac{\alpha_1 \dots \alpha_m}{9 \dots 9}}_{m \text{ раз}} = 0, (\alpha_1 \dots \alpha_m).$$

Выясним его справедливость на примере дроби $\frac{17}{99}$. Будем делить 17 на 99 по известному правилу; однако припишем к числу 17 сразу два нуля. Имеем

$$1700 = 17(99 + 1) = 17 \cdot 99 + 17.$$

Следовательно, после второго этапа деления 17 на 99 получим такую картину:

$$\begin{array}{r} 17 \quad | \quad 99 \\ 1700 \quad | \quad 0,17, \\ \hline 17 \quad | \end{array}$$

т. е. в частном получается 17 и в остатке 17. Теперь снова к остатку припишем два нуля и после деления получим снова в частном 17 и в остатке 17. Так наш процесс будет продолжаться периодически без конца:

$$\begin{array}{r} 17 \quad | \quad 99 \\ \hline 0,1717 \dots \end{array}$$

Следовательно, $\frac{17}{99} = 0,1717 \dots$

Ниже приводятся примеры десятичных периодических дробей более сложного вида:

$$1,21353535 \dots = 1,21(35) = \frac{121}{100} + 0,00(35) = \frac{121}{100} + \frac{35}{99} \cdot \frac{1}{100}.$$

$$0,2(371) = \frac{2, (371)}{10} = \frac{2}{10} + \frac{371}{990},$$

$$3,13(4) = \frac{313, (4)}{100} = \frac{313}{100} + \frac{4}{900}.$$

Мы видим, что произвольную десятичную периодическую дробь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m(\beta_1 \dots \beta_n)$ можно рассматривать как десятичное разложение некоторого рационального числа:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m(\beta_1 \dots \beta_n). \quad (3)$$

Но и обратно, десятичное разложение произвольного положительного рационального числа $\frac{p}{q}$ необходимо периодическое.

В самом деле, будем делить p на q обычным способом:

$$\begin{array}{r} p \quad | \quad q \\ \hline \beta_1 \quad | \quad \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha_{s+1}, \\ \dots \\ \hline \beta_s \\ \hline \beta_{s+1} \\ \dots \end{array} \quad (4)$$

Пусть на s -м этапе этого процесса получился остаток β_s , и все цифры числа p оказались уже снесенными. Рассмотрим остатки $\beta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+q-1}$. Количество их q , и каждый из них меньше q . Но тогда какие-то два из них обязательно должны быть равны. Пусть равны β_m и β_n ($\beta_m = \beta_n; m < n$). Это показывает, что процесс (4), начиная с m -го этапа, становится периодическим ($\alpha_{m+1} = \alpha_{n+1}, \alpha_{m+2} = \alpha_{n+2}, \dots$).

Итак, каждому положительному рациональному числу $\frac{p}{q}$ соответствует его бесконечное десятичное периодическое разложение вида (3). Это разложение получается при помощи процесса (4), дополняемого в случае (1) процессом (2).

С другой стороны, произвольное бесконечное периодическое разложение (вида (3)) соответствует, таким образом, единственному положительному рациональному числу.

Отрицательному рациональному числу $-\frac{p}{q}$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение числа $\frac{p}{q}$, взятое со знаком «—».

Числу 0 (оно тоже рациональное) естественно привести в соответствие разложение $0 = +0,000 \dots = -0,00 \dots = 0,00 \dots$.

§ 10.2. Десятичные разложения иррациональных чисел

Кроме периодических десятичных дробей существуют непериодические, например:

10100100101...; 0,121122111222...

Вот пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим непериодическую бесконечную десятичную дробь: $\sqrt{2} = 1,41\dots$. Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k k -го разряда числа $\sqrt{2}$, однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Если навигатор не знает это правило, то он может, чтобы получить десятичное разложение числа $\sqrt{2}$, рассуждать так. Сначала найти наибольшее целое число, квадрат которого меньше 2. Это, очевидно, число 1. Затем находим наибольшее число вида 1, α_1 , квадрат которого меньше 2. Это есть число 1,4. Затем находим наибольшее число вида 1,4 α_2 , квадрат которого меньше

2. Это есть число 1,41. И рассуждая так можно получить однозначно любое число цифр после запятой десятичного разложения числа $\sqrt{2}$.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π с любой наперед заданной точностью. Это приводит к определенному бесконечному десятичному разложению π , которое, как оказывается, не является периодическим.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом* называется произвольная бесконечная непериодическая дробь *)

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots, \quad (5)$$

где α_0 — целое неотрицательное число, α_k ($k = 1, 2, \dots$) — цифры, знак же равенства выражает, что мы обозначили правую часть (5) через a . Впрочем, удобно говорить, что правая часть (5) есть десятичное разложение числа a .

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными* (или *вещественными*) числами.

Из сказанного следует, что всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби (5). Если оно рационально, то его десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае, согласно нашему определению, выражение (5) само определяет иррациональное число.

Десятичная не равная нулю дробь может быть конечной. В силу соглашения, выраженного равенством (2), она может быть заменена равной ей бесконечной периодической дробью.

Число a , где не все α_k равны нулю, называется *положительным* или *отрицательным* в зависимости от того, будет ли в (5) фигурировать «+» или «—»; при этом, как обычно, «+» будем опускать.

Действительные числа определены пока формально; надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие «>» и проверить, что эти операции и понятие «>» согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием «>» для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

*) Конечно, знаку «+» соответствует одно число (положительное), а знаку «—» другое (отрицательное).

§ 10.3. Сравнение действительных чисел

По определению два числа

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \quad b = \pm \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots,$$

разложенные оба в бесконечные, но не имеющие периода 9, или конечные десятичные дроби, равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Для тех же положительных чисел a и b по определению $a < b$, если $\alpha_0 < \beta_0$ или если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l , что

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k=0, 1, \dots, l) \quad \text{и} \quad \alpha_{l+1} < \beta_{l+1}. \quad (7)$$

Это определение годится для конечных и бесконечных разложений, не имеющих периода 9. Чтобы применить это определение к десятичным дробям с периодом 9, надо превратить их в конечные десятичные дроби. Впрочем, удобно писать

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m 99 \dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{m-1} (\alpha_m + 1),$$

хотя промежуточный член в этой цепи не обязателен.

Между двумя действительными числами a и b ($a < b$) имеется рациональное число r ($a < r < b$), разлагающееся в конечную десятичную дробь. Если $a < 0$, $b > 0$, то можно считать $r = 0$.

Пусть $0 < a < b$ и

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots$$

— бесконечные десятичные дроби. Если $\alpha_0 < \beta_0$, то

$$a \leq \alpha_0, 99 \dots = \alpha_0 + 1 \leq \beta_0 < \beta_0, \beta_1 \dots \beta_k < \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots = b,$$

где k такое, что $\beta_k > 0$. Это показывает, что в данном случае можно положить $r = \beta_0, \beta_1 \dots \beta_k$.

Если же $\alpha_0 = \beta_0$, то при некотором l

$$\alpha_s = \beta_s \quad (s=0, 1, \dots, l-1), \quad \alpha_l < \beta_l;$$

поэтому

$$\begin{aligned} a \leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_l 99 \dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{l-1} (\alpha_l + 1) \leq \\ \leq \beta_0, \beta_1 \dots \beta_{l-1} \beta_l < \beta_0, \beta_1 \dots \beta_l \beta_{l+1} \dots \beta_k < \\ < \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots = b \quad (\beta_k > 0), \end{aligned}$$

и, следовательно, можно считать $r = \beta_0, \beta_1 \dots \beta_k$.

Случай $a < b < 0$ сводится к предыдущему.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Между числами

0,(78) и 0,935050050005 ...

найти: 1) рациональное число, 2) иррациональное число, 3) рациональное и иррациональное число, 4) два рациональных числа, 5) два иррациональных числа.

§ 10.4. Десятичное приближение действительного числа

Зададим произвольное положительное число

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

в виде десятичной дроби. Число

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

будем называть *n*-м десятичным приближением числа *a* с недостатком.

Справедливы неравенства

$$a^{(n)} \leq a \leq a^{(n)} + 10^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n &\leq \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \leq \\ &\leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n 99\dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + 10^{-n} = \\ &= a^{(n)} + 10^{-n}. \end{aligned}$$

Число $a^{(n)} + 10^{-n}$ называют *n*-м приближением числа *a* с избытком.

Справедливы неравенства

$$a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq a^{(3)} \leq \dots,$$

т. е. $a^{(n)} \leq a^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots)$.

В самом деле,

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} = a^{(n+1)}.$$

Имеют также место неравенства

$$a^{(1)} + 10^{-1} \geq a^{(2)} + 10^{-2} \geq a^{(3)} + 10^{-3} \geq \dots,$$

т. е.

$$a^{(n)} + 10^{-n} \geq a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В самом деле,

$$a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} 999 \leqslant \leqslant \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n 99 \dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + 10^{-n} = a^{(n)} + 10^{-n}.$$

Мы видим, что числа $a^{(n)}$ не убывают при возрастании n , оставаясь все время не большими числа a . Числа же $a^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастают, оставаясь не меньшими числа a . Кроме того, разность

$$(a^{(n)} + 10^{-n}) - a^{(n)} = 10^{-n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е. стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Числа $a^{(n)}$ и $a^{(n)} + 10^{-n}$ — рациональные, к тому же они разлагаются в конечные десятичные дроби. Современные счетные машины приспособлены к вычислениям с десятичными дробями *).

В практических вычислениях точные значения чисел заменяют приближенными, в частности приближениями $a^{(n)}$ и $a^{(n)} + 10^{-n}$.

§ 10.5. Числовая прямая

Зададим отрезок, который будем считать единичным — имеющим длину 1. Мы хотим определить понятие длины произвольного отрезка AB относительно выбранной единицы (единичного отрезка).

Отрезок AB называется *соизмеримым* с единицей (с единичным отрезком), если существуют натуральные числа p и q такие, что если q -ю часть единичного отрезка отложить p раз от A в направлении к B , то приходим в точности в точку B . Про такой отрезок говорят, что он имеет длину $\frac{p}{q}$.

Примером отрезка, не соизмеримого с единицей, является гипотенуза прямоугольного треугольника, имеющего единичные катеты. Длина этого отрезка равна $\sqrt{2}$.

Не соизмеримых с единицей отрезков имеется бесконечное множество. Дадим общий метод измерения отрезков. Нас интересует чисто теоретическая сторона вопроса. Мы отдаем себе отчет, что длину отрезка (соизмеримого или не соизмеримого с единицей) практически можно получить только приближенно, но мы хотим

*) Впрочем, на самом деле широко применяется так называемое двоичное исчисление.

представить себе, как это можно сделать теоретически точно.

Зададим прямую L , для которой выберем положительное направление (указано стрелкой, рис. 119), единичный отрезок и начальную точку O . Такую прямую называют *числовой*



Рис. 119

прямой потому, что ее точки можно рассматривать как иллюстрации действительных чисел. Каждому положительному рациональному числу $\frac{p}{q}$ приведем в соответствие точку прямой L , называемую точкой $\frac{p}{q}$, лежащую справа от O на расстоянии $\frac{p}{q}$ от O . Каждому же отрицательному рациональному числу $-\frac{p}{q}$ приведем в соответствие на L точку (точку $-\frac{p}{q}$), симметричную точке $\frac{p}{q}$ относительно O . Числу 0 пусть соответствует точка O .

Будем называть A на L *рациональной* или *иррациональной точкой* в зависимости от того, будет ли отрезок OA , соединяющий ее с точкой O , соизмерим или не соизмерим с единицей.

Мы указали способ, в силу которого устанавливается взаимно однозначное соответствие между рациональными числами и рациональными точками прямой. Будем пользоваться этим соответствием, чтобы решить более сложную задачу об измерении отрезка OA , где A — любая точка прямой L .

Зададим на положительном луче L_+ прямой L произвольную точку A (рациональную или иррациональную). Чтобы определить длину $|OA|$ отрезка OA , рассуждаем следующим образом. Подберем целое неотрицательное число α_0 , приближающее длину $|OA|$ с точностью до единицы с недостатком (снизу). Это значит, что точка α_0 луча L_+ либо совпадает с A , либо находится левее A , однако точка $\alpha_0 + 1$ находится на L_+ правее A .

Отрезок $[\alpha_0, \alpha_0 + 1]$, соединяющий точки α_0 и $\alpha_0 + 1$, обозначим через $\sigma_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$. Он обладает следующими свойствами:

а) точка A принадлежит σ_0 ($A \in \sigma_0$), но не является правым концом σ_0 :

б) длина σ_0 равна единице: $|\sigma_0| = 1$.

Приближим теперь длину $|OA|$ снизу с точностью до одной десятой. Это значит, что мы подбираем цифру α_1 (т. е. одно из чисел 0, 1, ..., 9) так, чтобы точка α_0, α_1 луча L_+ либо совпала с A , либо была левее A , но при этом чтобы точка $\alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}$ была правее A . Введем отрезок

$$\sigma_1 = [\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}],$$

который, очевидно, обладает следующими свойствами:

а) точка A принадлежит σ_1 , но не является правым концом σ_1 ;

б) длина σ_1 равна $|\sigma_1| = 10^{-1}$.

Приближаем далее длину $|OA|$ снизу с точностью до одной сотой, т. е. находим цифру α_2 такую, что отрезок $\sigma_2 = [\alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + 10^{-2}]$ будет содержать в себе A , правый его конец не совпадает с A . Длина $|\sigma_2| = 10^{-2}$. Очевидно, σ_2 принадлежит σ_1 . Этот процесс продолжим неограниченно. В результате получим последовательность чисел

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_k \quad (k=1, 2, \dots),$$

где α_0 — неотрицательное целое число, а α_j ($j=1, 2, \dots, k$) — цифры. При этом для любого натурального k отрезок

$$\sigma_k = [\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k}]$$

содержит в себе точку A , правый его конец не совпадает с A , длина $|\sigma_k| = 10^{-k}$ ($k=1, 2, \dots$), и σ_k принадлежит σ_{k-1} .

Итак, точка A принадлежит всем отрезкам σ_k ($k=0, 1, 2, \dots$) и длины их при неограниченном возрастании k , очевидно, стремятся к нулю: $|\sigma_k| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Определим теперь число a при помощи десятичного разложения

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ — найденные выше числа. Число a удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k \leq a < \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k} \quad (9)$$

при любом $k=0, 1, 2, \dots$, а точка A при любом указанном k лежит на L_+ между точками $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k$ и $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k}$. Это показывает, что именно число a есть длина $|OA|$ отрезка OA : $a = |OA|$.

Итак, каждой точке A луча L_+ при помощи рассмотренного процесса (1) приводится в соответствие положи-

тельное число $a = |OA|$. При этом, если какая-либо другая точка B луча L_+ находится правее A , то ей соответствует большее число ($b > a$). Число a называется координатой точки A на прямой L .

Надо учесть, что раз точка A находится на L_+ , т. е. лежит на L правее точки O , то в процессе (9) при достаточно большом n окажется, что $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n > 0$, откуда $a > 0$.

Далее, если точка B лежит на L_+ правее точки A , то при достаточно большом n окажется, что $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + 10^{-n} < \beta_0, \beta_1 \dots \beta_n$, откуда $a < b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots$.

Поставим обратную задачу. Задано положительное число

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots^*)$$

Спрашивается, существует ли на L_+ точка A такая, что $a = |OA|$? На основании сказанного этот вопрос можно выразить еще так: существует ли на L_+ точка A , одновременно принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_k = [\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots)? \quad (10)$$

Решение этого вопроса относится к геометрии. Геометрия решает его положительно, т. е. она утверждает, что *существует на L_+ единственная точка A , принадлежащая всем σ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$)*.

Это утверждение обычно предлагается в виде одной из аксиом геометрии (принципа вложенных отрезков, см. 10.6), либо оно есть следствие других исходных аксиом.

Заметим, что если

$$a = \frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

есть рациональное положительное число, то ему соответствует на L_+ рациональная точка p/q . Эта точка принадлежит всем отрезкам σ_k луча L_+ (см. (9)). Ее как раз мы и получили, применяя рассмотренный выше процесс. Ведь существует только одна точка, принадлежащая всем σ_k .

Точке O приписывается в качестве ее координаты число 0, а произвольной точке A' отрицательного луча L_- приписываем число $-a$, где a — координата точки A , симметричной A' относительно O .

*) Мы считаем, что это десятичное разложение не имеет периода 9.

На основании сказанного между действительными числами и точками прямой L имеет место взаимно однозначное соответствие. При этом рациональные числа $\pm \frac{p}{q}$ переходят в рациональные точки $\pm \frac{p}{q}$ и обратно. Далее, если точка B находится на L правее точки A , то соответствующие им числа b и a находятся в соотношении $a < b$, и обратно.

§ 10.6. Принцип вложенных отрезков

Пусть по некоторому закону задана последовательность отрезков $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$, лежащих на прямой L и обладающих свойствами:

- а) отрезки σ_n вложены; это значит, что при любом n отрезок σ_{n+1} принадлежит к σ_n ($\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$, $n = 1, 2, \dots$);
- б) при неограниченном возрастании n длина $|\sigma_n|$ стремится к нулю ($|\sigma_n| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$).

Тогда на L существует, и притом единственная, точка A , принадлежащая всем отрезкам σ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Отрезки σ_n , о которых шла речь в § 10.5, как раз являются вложенными, и для них $|\sigma_n| = 10^{-n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Принцип вложенных отрезков утверждает существование точки A , принадлежащей всем σ_n , и ее единственность.

§ 10.7. Арифметические действия, Оценки приближений

Зададим два положительных числа

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \dots, \quad b = \beta_0, \beta_1\beta_2, \dots,$$

определенных конечными или бесконечными десятичными дробями.

Читатель хорошо знает, как складываются конечные десятичные дроби. Он легко догадается, как это сделать в случае сложения конечной десятичной дроби и бесконечной. Если же оба слагаемых имеют бесконечные десятичные разложения, то возникают затруднения. Эти затруднения можно преодолеть—можно указать правило сложения дробей с бесконечными хвостами. Впрочем, это правило носит чисто теоретический характер—оно практически неосуществимо до конца, потому что представляет собой некоторый бесконечный процесс.

На практике приходится числа a и b заменять их приближениями

$$\bar{a} \approx a, \quad \bar{b} \approx b,$$

обычно конечными десятичными дробями $\bar{a}$, $\bar{b}$. Сумму $\bar{a} + \bar{b}$ считают приближением теоретической суммы $a + b$:

$$\bar{a} + \bar{b} \approx a + b.$$

Но тогда возникает вопрос об оценке погрешности приближения. Однако и для теории, и для практики важно отдать себе отчет в том, что сумма произвольных действительных чисел a и b может быть определена пусть теоретически, но точно. Тогда только имеет смысл говорить о приближении какого-либо числа, в данном случае числа $a + b$, когда мы уверены в том, что оно существует,

Сказанное можно распространить и на разность, и произведение, и частное чисел.

Ниже мы даем представление о том, как можно чисто теоретически определить арифметические действия над числами. Однако эти соображения полезны и для практики вычислений, потому что они показывают, как соответствующие действия надо производить приближенно и какие в этих случаях возникают оценки погрешности.

Положим

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n, \\ b^{(n)} &= \beta_0, \beta_1 \dots \beta_n \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

При неограниченном возрастании n числа $a^{(n)}$ стремятся к a , не убывая:

$$a^{(0)} \leq a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq \dots \leq a, \quad (11)$$

а числа $a^{(n)} + 10^{-n}$ — не возрастают:

$$a^{(1)} + 10^{-1} > a^{(2)} + 10^{-2} > \dots > a. \quad (12)$$

Сумма $a + b$ определяется как число, для которого удовлетворяются неравенства

$$a^{(n)} + b^{(n)} \leq a + b < (a^{(n)} + 10^{-n}) + (b^{(n)} + 10^{-n}) \quad (13)$$

для всех $n=1, 2, \dots$ или, выражаясь геометрическим языком, $a + b$ есть число, которому на числовой прямой соответствует точка, принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)} + b^{(n)}, a^{(n)} + b^{(n)} + 2 \cdot 10^{-n}].$$

Такая точка есть, и притом единственная, потому что левые концы σ_n не убывают, правые же не возрастают, следовательно, отрезки σ_n вложены ($\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots$). Кроме того, $|\sigma_n| = 2 \cdot 10^{-n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

На самом деле, если бы надо было сложить a и b практически, мы бы сложили $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$ при достаточно больших n и считали бы, что число $a^{(n)} + b^{(n)}$ есть приближение $a + b$. Погрешность μ_n , которую мы при этом допускаем, не превышает $2 \cdot 10^{-n}$:

$$\mu_n \leq 2 \cdot 10^{-n}.$$

Подобным образом разность $a - b$ ($a > b$) определяется как число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) < a - b < (a^{(n)} + 10^{-n}) - b^{(n)}. \quad (14)$$

Этому числу соответствует точка на числовой прямой, принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}), a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}] \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Такая точка существует, и единственная, потому что $|\sigma_n| = 2 \cdot 10^{-n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, а отрезки σ_n вкладываются. Надо учесть, что $a^{(n)}$ не убывает, а $b^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает, следовательно, $a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})$ не убывает. Далее, $a^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает, а $b^{(n)}$ не убывает, откуда $a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}$ не возрастает.

Если взять в качестве приближения $a - b$ число $a^{(n)} - b^{(n)}$, то погрешность не превысит $2 \cdot 10^{-n}$, потому что точка $a^{(n)} - b^{(n)}$ принадлежит σ_n .

Естественно далее определить произведение ab как число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{(n)} b^{(n)} \leq ab < (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n}) \quad (15)$$

для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ или как число, которому соответствует точка на числовой прямой, принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)} b^{(n)}, (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n})] \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Это определение корректно, потому что отрезки σ_n вложены и

$$|\sigma_n| = a^{(n)} 10^{-n} + b^{(n)} 10^{-n} + 10^{-2n} < \\ < (\alpha_0 + 1) 10^{-n} + (\beta_0 + 1) 10^{-n} + 10^{-2n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В данном случае оценка приближения зависит не только от n , но и от α_0 и β_0 .

Наконец, частное $\frac{a}{b}$ ($a > 0$, $b > 0$) определяется как число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} < \frac{a}{b} < \frac{a^{(n)} + 10^{-n}}{b^{(n)}} \quad (n \geq l). \quad (16)$$

Это определение тоже корректно, потому что отрезки

$$\sigma_n = \left[\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}, \frac{a^{(n)} + 10^{-n}}{b^{(n)}} \right] \quad (n \geq l)$$

вложены и

$$\begin{aligned} |\sigma_n| &= \frac{a^{(n)} + 10^{-n}}{b^{(n)}} - \frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} = \frac{a^{(n)}10^{-n} + b^{(n)}10^{-n} + 10^{-2n}}{b^{(n)}(b^{(n)} + 10^{-n})} < \\ &< \frac{(\alpha_0 + 1)10^{-n} + (\beta_0 + 1)10^{-n} + 10^{-2n}}{(\beta_l)^2 10^{-2l}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (n \geq l). \end{aligned} \quad (17)$$

Число l есть наименьшее целое неотрицательное, для которого $\beta_l > 0$. Таким образом, либо $\beta_0 > 0$, либо $\beta_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, l-1$) и $\beta_l > 0$.

Мы видим, что в качестве приближения $\frac{a}{b}$ можно взять число $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$, принадлежащее, очевидно, к σ_n , с оценкой приближения, указанной в (17). Но на практике $\frac{a}{b}$ (также как ab) приближаются выражениями $\frac{a^{(n)}}{b^{(m)}}$, $(a^{(n)}b^{(m)})$, где n и m определяются структурой a , b .

На арифметических действиях с числами любого знака мы специально не останавливаемся. Как читатель знает, они сводятся к надлежащим действиям над положительными числами. Например, чтобы сложить два числа a и b разных знаков, где $|a| \geq |b|$, надо положить $a + b = \mp(|a| - |b|)$, где выбирается знак, одинаковый с знаком a .

§ 10.8. Свойства действительных чисел

Перечислим свойства действительных чисел, которые могут быть обоснованы методами, применявшимися выше. Эти свойства разделены на 5 групп (I—V).

К группам I, II, III относятся обычные элементарные свойства, с которыми нам всегда приходится иметь дело при вычислениях и при сравнении чисел.

Группа IV состоит из одного свойства (архимедова).

Группа V тоже состоит из одного свойства (непрерывности множества действительных чисел).

Мы привыкли к тому, что рациональные числа удовлетворяют свойствам I, II, III, IV. Сейчас утверждается, что свойствам I—IV удовлетворяют не только рациональные числа, но и вообще все действительные числа.

Что касается свойства V, то множество одних только рациональных чисел ему не удовлетворяет—оно недостаточно полно.

I. Свойства порядка

I₁. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a=b, \quad a>b, \quad a<b.$$

I₂. Из $a<b$ и $b<c$ следует $a<c$.

I₃. Если $a<b$, то найдется такое рациональное число c , что $a<c<b$.

II. Свойства действий сложения и вычитания

II₁. $a+b=b+a$.

II₂. $(a+b)+c=a+(b+c)$.

II₃. $a+0=a$.

II₄. $a+(b-a)=b$.

II₅. Из $a<b$ следует, что $a+c<b+c$ для любого c .

III. Свойства действий умножения и деления

III₁. $ab=ba$.

III₂. $(ab)c=a(bc)$.

III₃. $a \cdot 1 = a$.

III₄. $a \cdot \frac{b}{a} = b, \quad a \neq 0$.

III₅. $(a+b)c=ac+bc$.

III₆. Из $a<b$, $c>0$ следует $ac<bc$.

IV. Архимедово свойство

Каково бы ни было число $c>0$, существует натуральное $n>c$.

V. Свойство непрерывности множества действительных чисел

Пусть задана последовательность вложенных отрезков (множеств чисел x , для которых $a_n \leq x \leq b_n$)

$$\sigma_n = [a_n, b_n] \quad (n=1, 2, \dots),$$

т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ ($n=1, 2, \dots$), с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тогда существует, и притом единственное, число, принадлежащее всем σ_n .

С геометрическим аналогом свойства V мы познакомились в § 10.6. Там было сказано, что это свойство для натуральных отрезков σ_n на прямой в геометрии приходится постулировать. Здесь под отрезками понимаются соответствующие множества чисел, и в этом случае свойство проверяется (доказывается) на десятичных разложениях чисел, так же как все остальные свойства I—IV.

ФОРМУЛА БИНОМА НЬЮТОНА. КОМБИНАТОРИКА

§ 11.1. Число C_n^k

Произведение натуральных чисел от 1 до n называют n -факториалом и обозначают так:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

В частности,

$$1! = 1.$$

По определению считают, что

$$0! = 1,$$

хотя сам по себе символ $0!$ не имеет никакого смысла.

Зададим натуральное число n , и пусть k есть одно из чисел $k = 0, 1, 2, \dots, n$. По определению

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (1)$$

В частности,

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1 \quad (2)$$

(при $k=0$ вторым равенством в (1) пользоваться нельзя).

Из первого равенства (1) непосредственно следует формула

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Справедлива также формула

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (4)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k+1} \right] = \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \\ &= \frac{n! (n+1)}{(k+1)! (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! [(n+1)-(k+1)]!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

Вот примеры чисел C_n^k :

$$\begin{aligned} n=2: & 1, 2, 1; \\ n=3: & 1, 3, 3, 1; \\ n=4: & 1, 4, 6, 4, 1; \\ n=5: & 1, 5, 10, 10, 5, 1; \end{aligned} \quad (5)$$

Мы видим здесь закономерность. В каждом ряду (5) числа C_n^k расположены симметрично относительно середины ряда—это следует из формулы (3), а по краям стоят единицы—это следует из (2). В каждом ряду числа C_n^k возрастают до середины ряда, затем убывают (см. в конце параграфа задачи 2, 4).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Написать числа C_n^k для $n=6, 7, 8$.

§ 11.2. Формула бинома Ньютона.

Метод индукции

Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \dots \\ \dots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Слагаемые суммы в правой части называются *членами разложения бинома Ньютона*. Член a^n называют *нулевым членом разложения формулы Ньютона*, дальше идут первый, второй и т. д. члены до n -го включительно (равного x^n); k -й член бинома Ньютона имеет вид

$$C_n^k a^{n-k} x^k \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (7)$$

Формула (7) в силу свойства (2) годится и для $k=0$, и $k=n$. Формулу (6) можно записать еще так:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k. \quad (6')$$

Правая часть (6') читается так: *сумма слагаемых $C_n^k a^{n-k} x^k$, распространенная на целые k от 0 до n* . Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Докажем формулу (6). При $n=1$ она верна: $a+x = a+x$. При $n=2$ тоже она верна:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Она также верна при $n=3$:

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

(см. табл. (5)).

Для доказательства формулы (6) в общем виде (при любом натуральном n) будет использован тот факт, что она верна при $n=2$. Будем рассуждать так. Допустим, что формула (6) верна при некотором натуральном n ; докажем, что она тогда необходимо верна и при $n+1$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(a+x)^{n+1} &= (a+x)(a+x)^n = \\ &= a^{n+1} + C_n^1 a^n x + C_n^2 a^{n-1} x^2 + \dots + C_n^n a x^n + \\ &\quad + C_n^0 a^n x + C_n^1 a^{n-1} x^2 + \dots + C_n^{n-1} a x^n + x^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n x + C_{n+1}^2 a^{n-1} x^2 + \dots + C_{n+1}^n a x^n + x^{n+1}.\end{aligned}$$

Мы нарочно во втором равенстве справа второй ряд сдвинули так, чтобы в столбцах стояли подобные члены с одинаковыми произведениями $a^{n-k}x^{k+1}$. Сумма коэффициентов при них вычисляется по формуле (4).

Замечание. Мы применили при выводе формулы (6) *метод полной математической индукции*. Этот метод заключается в следующем. Пусть надо доказать некоторое утверждение для любого натурального числа n . Например, надо доказать формулу бинома Ньютона для произвольного натурального n . Допустим, что мы убедились, что это утверждение верно при $n=1$, и, кроме того, убедились в том, что утверждение верно при натуральном $n+1$, если предположить, что оно верно для n . Тогда надо считать наше утверждение доказанным для любого натурального n .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать разложения по формуле бинома Ньютона

$$(a+x)^5, \quad (a+x)^6, \quad (a+x)^7.$$

2. Доказать, что

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1} \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (8)$$

3. Сравнив дробь (8) с 1, доказать, что при n четном

$$1 = C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^{n/2} > C_n^{(n+1)/2} > \dots > C_n^n = 1$$

и при n нечетном

$$1 = C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^{(n-1)/2} = C_n^{(n+1)/2} > \dots > C_n^n = 1.$$

4. Повторить вывод формул (3), (4), (6). Запомнить формулы (1) и (6) и уметь применять их для частных значений n и k . Повторить метод индукции.

§ 11.3. Перестановки

Два элемента (две вещи) x_1 и x_2 могут быть расположены (записаны) двумя способами:

$$x_1, x_2, \quad (9)$$

$$x_2, x_1. \quad (10)$$

Будем говорить, что расположения (9) и (10) являются различными *перестановками* из двух элементов (x_1 и x_2). Таким образом, из двух элементов можно составить две (различные) перестановки.

Из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить шесть перестановок:

$$x_1, x_2, x_3,$$

$$x_1, x_3, x_2,$$

$$x_2, x_1, x_3,$$

$$x_2, x_3, x_1,$$

$$x_3, x_1, x_2,$$

$$x_3, x_2, x_1.$$

Других перестановок нет.

Рассмотрим теперь n элементов

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Они расположены в порядке возрастания номеров и этим образуют определенную перестановку. При другом расположении, например, когда номера убывают:

$$x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 \quad (n \geq 2),$$

они образуют уже другую перестановку.

Перестановка из n элементов — это определенное расположение их (в ряд). Таким образом, различные перестановки из n элементов соответствуют различным расположениям (в ряд) n элементов. Количество возможных перестановок из n элементов обозначают символом P_n : перестановка по-французски — permutation.

Покажем, что

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n! \quad (11)$$

В самом деле, при $n=1$ формула (11) очевидна: из одного элемента можно составить только одну перестановку. Теперь, рассуждая по индукции, допустим, что формула (11) верна для P_n ; докажем ее верность для P_{n+1} . Чтобы получить всевозможные перестановки из элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, поставим на первое место элемент x_1 , а за ним остальные n элементов, расположенных любым образом. Количество таких расположений (перестановок из n элементов) равно $P_n = n!$. Так как количество элементов x_j ($j=1, 2, \dots, n+1$) равно $n+1$, то количество всех перестановок из $n+1$ элементов равно, очевидно,

$$P_{n+1} = (n+1)n! = (n+1)!$$

Этим формула (11) доказана для любого натурального n .

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Выписать все перестановки из элементов a_1, a_2, a_3, a_4 .
2. Сколькими способами можно рассадить 10 человек на 10 стульях?

§ 11.4. Размещения

Пусть n и k — натуральные числа и $k \leq n$. *Размещением из данных n элементов по k называется какая-либо группа из k элементов, взятых из данных n элементов, определенным образом расположенная (в ряд).*

Например, пусть дано три ($n=3$) элемента x_1, x_2, x_3 .

Ниже переписаны возможные размещения данных трех элементов по два:

$x_1,$	$x_2,$
$x_2,$	$x_1,$
$x_1,$	$x_3,$
$x_3,$	$x_1,$
$x_2,$	$x_3,$
$x_3,$	$x_2,$

Других размещений нет. Мы видим, что два размещения отличаются либо хотя бы одним элементом, либо расположением входящих в них элементов.

Количество возможных размещений из данных n элементов по k ($k \leq n$) обозначается символом A_n^k : размещение по-французски — *arrangement*.

Справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (12)$$

В самом деле, при $k=1$ она очевидна:

$$A_n^1 = n.$$

Рассуждая по индукции, будем считать, что формула (12) для k верна. Докажем, что она верна для $k+1$.

Произвольное размещение из данных n элементов по $k+1$ может быть получено следующим образом. На первом месте размещения ставим элемент x_j , а за ним располагаем всевозможные размещения из оставшихся $n-1$ элементов $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ по k ; количество их равно A_{n-1}^k .

Итак, количество возможных размещений из данных n элементов по $k+1$, имеющих на первом месте элемент x_j , равно A_{n-1}^k . Но так как j может принимать значения $j=1, 2, \dots, n$, то количество всех размещений из данных n элементов по $k+1$ равно

$$\begin{aligned} A_n^{k+1} &= n A_{n-1}^k = n(n-1)(n-2) \dots ((n-1)-k+1) = \\ &= n(n-1) \dots (n-(k+1)+1). \end{aligned}$$

Этим формула (12) доказана для любого $k \geq 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выпишите все размещения из элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по 2.
2. Сколькими возможными способами можно присудить семи лицам три премии разного значения (первую, вторую и третью)?
3. Сколькими возможными способами можно распределить между шестью лицами две разные путевки в санаторий?

§ 11.5. Сочетания

Сочетанием из данных n элементов по k называется какая-либо группа, состоящая из k этих элементов ($k \leq n$).

Например, из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить следующие сочетания по два:

$$\begin{array}{ll} x_1, & x_2, \\ x_1, & x_3, \\ x_2, & x_3. \end{array}$$

Других сочетаний из рассматриваемых трех элементов по два нет. Вот еще сочетания по три из четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{array}{lll} x_2, & x_3, & x_4, \\ x_1, & x_3, & x_4, \\ x_1, & x_2, & x_4, \\ x_1, & x_2, & x_3. \end{array}$$

Подчеркнем, что понятие сочетания не связано с расположением (порядком) элементов. Если в данном сочетании переставить каким-либо образом его элементы, то оно (как сочетание) не изменится.

Количество сочетаний из n элементов по k ($k \leq n$) обозначается символом C_n^k ; сочетание по-французски — combinaison.

Справедлива формула

$$C_n^k = \frac{A_n}{P_k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (13)$$

В самом деле, в каждом сочетании из n элементов по k можно произвести всевозможные перестановки. Количество их равно $P_k = k!$, а количество всех сочетаний равно C_n^k . Очевидно,

$$A_n^k = C_n^k P_k,$$

потому что перебирая все сочетания и сделав в каждом из них P_k перестановок, получим всевозможные размещения из n элементов по k . Этим формула (13) доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выпишите все сочетания из элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по два.
2. Сколькими возможными способами можно присудить семи лицам одинаковые премии?
3. Сколькими возможными способами можно распределить между шестью лицами две одинаковые путевки в санаторий?

§ 11.6. Связь с биномиальными коэффициентами. Другой вывод формулы бинома Ньютона

Числа C_n^k мы назвали в п. 11.2 биномиальными коэффициентами, потому что они входят в разложение бинома Ньютона

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k \quad (14)$$

как коэффициенты при $a^{n-k} x^k$.

Конечно, формулу (14) можно вывести комбинаторным путем. Для этого представим ее левую часть в следующем виде:

$$(a+x_1)(a+x_2) \dots (a+x_n), \quad (15)$$

где отдельным x , входящим в произведение, приписан отдельный номер, несмотря на то что все они равны $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$.

Раскроем в (15) скобки

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= (a+x_1) \dots (a+x_n) = \\ &= a^n + a^{n-1}(x_1+x_2+\dots+x_n) + \\ &+ a^{n-2}(x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n) + \\ &+ a^{n-3}(x_1x_2x_3+\dots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}) + \dots + x_1 \dots x_n \end{aligned} \quad (16)$$

Заменяя все x_m на x , получим

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \dots + C_n^n x^n,$$

т. е. формулу (14).

В самом деле, количество слагаемых в первых скобках (правой части (16)) равно n (каждое слагаемое равно x). Слагаемые во вторых скобках суть всевозможные сочетания из n элементов $x_1, \dots, x_n$ по два, количество их равно C_n^2 (каждое из них равно x^2). Слагаемые в третьих скобках суть всевозможные сочетания из указанных n элементов по три (каждое из них равно x^3) и т. д.

§ 11.7. Вероятность события

Приведем примеры, на которых мы выясним понятие вероятности.

Пример 1. Из ящика, где было 2 черных и 5 белых шаров, вынут наугад один шар. Ниже мы вводим число, которое называется вероятностью того, что вынут черный шар.

Для удобства рассуждения представим себе, что шары в ящике перенумерованы. Возможны 7 различных случаев: мы могли вынуть первый шар, либо второй, либо третий и т. д., либо, наконец, седьмой шар. Все эти случаи равновозможны, и один из них должен произойти. Поэтому говорят, что они равновозможны и единственно возможны.

С другой стороны, только 2 из 7 указанных (равно-возможных и единственно возможных) случаев благоприятствуют событию, заключающемуся в том, что вынут черный шар. Отношение 2 к 7 и называется *вероятностью указанного события*.

Таким образом, вероятность того, что при указанных обстоятельствах вынут черный шар, равна $P = \frac{2}{7}$.

Пример 2. Из ящика, где было 3 черных и 5 белых шаров, вынуто наугад два шара. Какова вероятность, что оба шара черные?

Решение. Снова для удобства будем считать, что шары в ящике перенумерованы. Количество всевозможных способов выемки из ящика двух шаров равно числу сочетаний из 8 элементов по 2:

$$n = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

Указанные способы равновозможны и единственно возможны.

Только $m = C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ из указанных способов благоприятствуют событию, заключающемуся в том, что вынуты на самом деле два черных шара. Например, если считать, что черные шары имеют номера 1, 2, 3, то это способы, соответствующие сочетаниям (1, 2), (1, 3), (2, 3).

Число $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{28}$ и называется вероятностью того, что при указанных обстоятельствах вынуто 2 черных шара.

Пример 3. В первом ряду театра сидят 3 женщины и 27 мужчин. Какова вероятность, что все три женщины сидят рядом?

Решение. Возможны $n = 30!$ различных расположений (перестановок) указанных лиц в ряду. Эти перестановки будем считать равновозможными. С другой стороны, 3 женщины могут занимать места с номерами 1, 2, 3 либо с номерами 2, 3, 4 и т. д., либо, наконец, с номерами 28, 29, 30. Всего таких случаев 28. Но в каждом из этих случаев возможны $3!$ перестановок, характеризующих

расположение женщин по отношению друг к другу. Каждой такой перестановке соответствует $27!$ перестановок мужчин на занимаемых ими местах. Следовательно, количество перестановок (из 30 лиц!), *благоприятных для события*, заключающегося в том, что 3 женщины сидят рядом, равно

$$m = 28 \cdot 3!27! = 3!28!$$

Отсюда следует, что вероятность указанного события

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3!28!}{30!} = \frac{6}{29 \cdot 30} = \frac{1}{145}.$$

Замечание. С точки зрения теории вероятностей в данном примере рассмотрено *случайное событие* A , заключающееся в том, что в первом ряду театра все три женщины оказались сидящими вместе. Это событие может произойти и не произойти в различных возможных случаях, которые *предположены равновозможными и единственно возможными*. В данном примере отдельным возможным случаем является перестановка из 30 лиц. Количество таких равновозможных случаев равно n . Некоторые из этих случаев, как говорят, *благоприятны событию* A : если произойдет один из них, то будет иметь место событие A . Пусть m — количество таких случаев.

В данном примере случаями, благоприятными событию A , являются те перестановки (расположения) из 30 указанных лиц, при которых все три женщины сидят вместе.

По определению *вероятностью* P события A называется число

$$P = \frac{m}{n},$$

где n — количество единственно возможных, равновозможных случаев, а m — количество этих случаев, благоприятствующих событию A .

Пример 4. Из урны, где находятся 10 белых и 10 черных шаров, вынимают наугад 3 шара. Какая вероятность того, что будет вынуто а) 3 белых шара? б) 1 белый и 2 черных шара?

Решение. Равновозможными случаями здесь будут сочетания из 20 шаров по 3. Количество их равно

$$n = C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}.$$

Среди этих сочетаний благоприятных событию а) будет

$$m = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!},$$

откуда

$$P = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2}{19}.$$

Благоприятных же событию б) сочетаний будет

$$m = 10 \cdot C_1^1 = 10 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 450,$$

откуда

$$P = \frac{m}{n} = \frac{450 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{15}{38}.$$

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Чему равна вероятность того, что случайная перестановка из цифр 0, 1, 2, 3 образует четырехзначное число (т. е. не начинается с цифры 0)?

2. В группе 32 ученика. Двое из них выбраны совсем случайно и посажены на первую скамью. Какова вероятность того, что оба они значатся в списке группы среди первых десяти учеников?

3. Положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Сколько различных плоскостей можно провести через каждые три точки, принадлежащие к заданной системе из 1) 4 точек, 2) 7 точек, 3) 10 точек, если никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие 4 точки не лежат на одной плоскости?

4. Запомните определения перестановок, размещений и сочетаний и формулы их количеств.

Усвоить понятие вероятности события на приведенных примерах.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 12.1. Понятие комплексного числа

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2x + 4 = 0. \quad (1)$$

Применив к нему известное правило нахождения корней квадратного уравнения, получим формально выражения

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3}, \quad (2)$$

которые еще записывают следующим образом:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (2')$$

Но мы не получили действительного решения, ведь $\sqrt{-3}$ не есть действительное число. Не существует действительного числа, квадрат которого равен -3 . Однако выражения вида (2) оказались полезными в математике, хотя они и не являются действительными числами. Их называют *комплексными числами*.

По определению *комплексным числом называется выражение*

$$a + bi, \quad (3)$$

где a и b — действительные числа, а i — специальный знак, при этом надо учесть следующие соглашения:

$$1) \quad i^2 = -1, \quad (4)$$

$$2) \quad a + 0i = a, \quad (5)$$

$$3) \quad 0 + bi = bi, \quad (6)$$

4) равенство $a + bi = c + di$, где a, b, c, d — действительные числа, имеет место тогда и только тогда, когда

$$a = c \quad \text{и} \quad b = d,$$

5) с выражениями (3) можно производить арифметические операции по правилам, которые приняты для буквенных выражений в алгебре.

Число $0 + bi = bi$ называется *мнимым* или *чисто мнимым*.

Из сказанного следует, что любое действительное число a есть частный случай комплексного числа. Ведь на основании 2) его можно записать в виде $a = a + 0i$. В частности, $0 = 0 + 0i$, но тогда, если $a + bi = 0$, то $a + bi = 0 + 0i$, следовательно,

$$a = b = 0.$$

Таким образом, комплексное число $a + bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$.

Из соглашения 5) следует, что при арифметических действиях над комплексными числами законно делать следующие преобразования:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (bc + ad)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i, \quad c + di \neq 0.$$

Мы видим, что сумма, разность, произведение и частное (где делитель не равен нулю) комплексных чисел есть, в свою очередь, комплексное число.

Пример.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{(1-1)+2i}{2} = i.$$

Заметим еще, что из (4) следует:

$$i^2 = i^2i = -i, \quad i^4 = i^2i^2 = 1,$$

$$i^6 = i^4i = i, \quad i^8 = i^4i^2 = -1, \dots$$

Комплексные числа нередко обозначают одной буквой. Пишут

$$z = a + bi$$

и говорят: задано комплексное число z .

Число a называют *действительной частью* z и обозначают так:

$$\operatorname{Re} z = a,$$

число же b называют *мнимой частью* z и обозначают так:

$$\operatorname{Im} z = b;$$

real — по-французски реальный, действительный, imaginaire — мнимый, воображаемый.

Как видите, надо различать термины мнимая часть комплексного числа и мнимое число. Мнимая часть комплексного числа $a+bi$ есть действительное число b .

По определению, если $z=a+bi$ есть комплексное число (a, b — действительные), то $a-bi$ называют *ему сопряженным числом* и пишут $\bar{z}=a-bi$.

Конечно, если $b=0$, т. е. если на самом деле z есть действительное число, то $z=\bar{z}$.

Числа z и $\bar{z}$ взаимно сопряжены друг с другом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Привести к виду $a+bi$, где a и b — действительные, следующие комплексные числа:

1) $\frac{1}{i}$, 2) $\frac{1}{-i}$, 3) $\frac{1}{1+i}$, 4) $\frac{1}{1-i}$,

5) i^3-2i^2+i-1 , 6) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$,

7) $i^2+i^{22}+i^3+i^4+i^5+i^{60}$.

2. Убедиться в том, что

а) числа $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ удовлетворяют уравнению $x^3+x+1=0$; б) числа $1 \pm i$ удовлетворяют уравнению $x^3-2x+2=0$.

3. Вычислить выражения

$$(x+i)(x-i), (1-i)^4.$$

4. Показать, что $\overline{u+v}=\bar{u}+\bar{v}$, $\overline{u-v}=\bar{u}-\bar{v}$, где u и v — произвольные комплексные числа.

§ 12.2. Уравнение $x^2=c$

Поставим задачу. Задано уравнение

$$x^2=c, \quad (7)$$

где c — действительное число. Требуется решить его в комплексных числах, т. е. найти все комплексные $x=\alpha+\beta i$, которые удовлетворяют уравнению (7).

Будем рассуждать, как обычно. Допустим, что существует комплексное число $x=\alpha+\beta i$ (α и β — действительные), удовлетворяющее уравнению (7). Подставим его в (7) и будем делать законные для комплексных чисел

преобразования:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta i)^2 &= c, \\ \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i &= c.\end{aligned}$$

Так как c — действительное число, то

$$\alpha^2 - \beta^2 = c, \quad 2\alpha\beta = 0. \quad (8)$$

Из второго равенства в (8) следует, что по крайней мере одно из чисел α , β равно нулю.

Пусть $c = 0$, тогда $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ и $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, т. е. $\alpha = \beta = 0$.

Пусть $c > 0$. Так как из второго уравнения (2) следует, что одно из чисел α , β равно нулю, то из первого следует, что $\beta = 0$, и мы получим уравнение $\alpha^2 = c$, где надо искать действительные числа α . Это уравнение имеет два решения (корня):

$$\alpha = \pm \sqrt{c},$$

где $\sqrt{c}$ — арифметическое значение квадратного корня из c . Мы получили $x = \pm \sqrt{c}$.

Если теперь $c < 0$, то придется заключить, что $\alpha = 0$, а $\beta \neq 0$, и тогда $-\beta^2 = c$ или $\beta^2 = -c > 0$, откуда

$$\beta = \pm \sqrt{-c}$$

и, следовательно, $x = \pm \sqrt{-c}i$.

Мы решили поставленную задачу: если $c > 0$, то уравнение (7) имеет два действительных решения $\pm \sqrt{c}$ и комплексных решений не имеет, если же $c < 0$, то уравнение (7) имеет два чисто мнимых решения $\pm \sqrt{-c}i$, а действительных решений не имеет; при $c = 0$ имеется только одно решение: $x = 0$.

Замечание. Любое комплексное число x , удовлетворяющее уравнению (7), называют корнем квадратным из числа c и обозначают символом $\sqrt{c}$. Мы доказали, что

$$\sqrt{c} = \begin{cases} 0 & \text{при } c = 0, \\ \pm \sqrt{c} & \text{при } c > 0, \\ \pm \sqrt{-c}i & \text{при } c < 0, \end{cases}$$

где справа знак $\sqrt{}$ понимается в смысле арифметического значения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить в комплексных числах уравнения:

- 1) $x^2 = 1$, 2) $x^2 = -1$, 3) $x^2 = 9$, 4) $x^2 = -9$,
5) $x^2 = 10$, 6) $x^2 = -10$.

§ 12.3. Применение комплексных чисел в квадратных уравнениях

Рассмотрим квадратное уравнение в общем виде

$$x^2 + px + q = 0, \quad (9)$$

где p и q — заданные действительные числа.

Будем искать комплексные решения этого уравнения. Пусть комплексное число $x = a + bi$ является решением (или корнем) уравнения (9).

Имеем

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

где справа стоит любое комплексное число, квадрат которого равен $\frac{p^2}{4} - q$.

Отсюда (см. замечание в конце п. 12.2)

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} && \text{при } \frac{p^2}{4} - q \geq 0, \\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i && \text{при } \frac{p^2}{4} - q < 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Мы получили формулы решения квадратного уравнения.

Итак, квадратное уравнение (9) в случае, когда $\frac{p^2}{4} - q > 0$, имеет два действительных решения, а в случае, когда $\frac{p^2}{4} - q < 0$, — два комплексных решения. В случае же $\frac{p^2}{4} - q = 0$ оно имеет одно решение, равное $-p/2$, но считают, что и в этом случае решений два, но они совпадают и называют решение (корень) уравнения (9) *кратным*.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (9). Покажем, что для любого действительного x

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q. \quad (11)$$

Это тождество, т. е. равенство, верное для всех x в случае, когда x_1 и x_2 — действительные корни, читатель, надо полагать, знает. Его называют *равенством* (или *теоремой*) *Виета*. Повторим его доказательство:

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) &= \\&= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \\&= x^2 + px + q.\end{aligned}$$

Докажем теперь (11), когда x_1 и x_2 комплексные. В этом случае

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i \quad \left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) &= \\&= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i\right) \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i\right) = \\&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = x^2 + px + q.\end{aligned}$$

Мы доказали тождество (11), где p и q — произвольные действительные числа, а x_1 и x_2 — корни уравнения (1).

Интересно, что равенство (11) может быть обобщено на многочлены любой степени: всякий многочлен

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

степени n может быть представлен в виде произведения

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — числа, вообще говоря, комплексные — корни многочлена ($P_n(x_j) = 0$; $j = 1, \dots, n$). Если коэффициенты a_j действительные, то комплексные корни x_j обязательно попарно сопряжены.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить в комплексных числах квадратные уравнения:

1) $x^2 + x + 1 = 0$, 2) $x^2 + 3x + \frac{25}{4} = 0$,

3) $x^2 - 5x + 6 = 0$, 4) $x^2 - 2x + 5 = 0$.

§ 12.4. Геометрическое изображение комплексных чисел

Зададим в плоскости прямоугольную систему координат (x, y) . Комплексное число $z = x + yi$ удобно изображать на плоскости точкой, с координатами (x, y) . Эту точку называют точкой z .

Мы видим, что имеет место взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и комплексными числами, т. е. каждому комплексному числу соответствует (указанным путем) точка плоскости; двум разным комплексным числам соответствуют разные точки, и каждая точка соответствует (указанным путем) некоторому комплексному числу.

В силу этого соответствия координатную плоскость называют еще *комплексной плоскостью*.

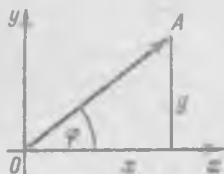


Рис. 120

На рис. 120 отмечена точка $z = x + iy$. Введем вектор с началом в нулевой точке O и концом в A . Длина его

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется *модулем комплексного числа z* . Угол φ , образуемый вектором $\overrightarrow{OA}$ с положительной полуосью x (отсчитываемый против часовой стрелки), называется *аргументом числа z* .

Таким образом, каждое комплексное число z имеет свой модуль, который записывают так:

$$\rho = |z|,$$

и аргумент φ , записываемый так:

$$\varphi = \text{Arg } z.$$

Но аргумент определяется неоднозначно. Если φ есть аргумент z , то $\varphi + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ есть тоже аргумент z . Чтобы внести четкость в этот вопрос, можно искать аргумент z , удовлетворяющий неравенству $0 \leq \varphi < 2\pi$. Его обозначают $\arg z$ и называют *главным значением аргумента z* или *аргументом z в приведенном виде*; $\arg z$ однозначно определяется числом z .

Любое значение аргумента z обозначается через $\text{Arg } z$. Оно определяется по формуле

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (12)$$

В связи с равенством (12) говорят, что комплексное число записано в тригонометрической форме.

§ 12.5. Показательная форма комплексного числа

Выражение в скобках в формуле (12) § 12.4 обозначают следующим образом:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

и тогда его можно записать в более компактной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad (13)$$

называемой *показательной формой комплексного числа*.

Отметим важные свойства величины $e^{i\varphi}$

$$|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

при любом φ .

Это показывает, что точка $z = e^{i\varphi}$ комплексной плоскости находится на окружности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

На рис. 121 единичная окружность разделена на 12 частей. При этом точка, соответствующая $\varphi = 0$, входит в число точек деления. Ниже приведена таблица комплексных чисел, соответствующих этим точкам.

φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	...
$e^{i\varphi}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	i	...

Если φ непрерывно возрастает от 0 до 2π , то комплексная точка $e^{i\varphi}$ непрерывно описывает нашу окружность.

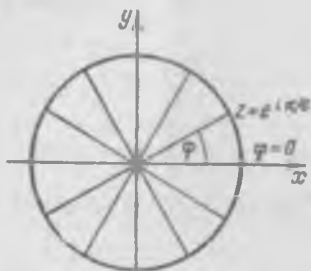


Рис. 121

а при дальнейшем возрастании φ точка будет продолжать движение по окружности. Имеем

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

для любых φ .

Мы доказали формулу

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2},$$

верную для любых φ_1 и φ_2 . Но тогда

$$e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2)} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} e^{i\varphi_2}.$$

Поэтому

$$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$$

для любых φ_1 и φ_2 .

Зададим теперь два комплексных числа, которые записаны в форме

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \quad (\rho_1, \rho_2 \geq 0).$$

Произведение их равно

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Так как $\rho_1 \rho_2 \geq 0$, то мы получили тригонометрическое представление числа $z_1 z_2$; при этом

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2 = |z_1| |z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Утверждается, что сумма $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ отличается от $\operatorname{Arg}(z_1 + z_2)$ на величину вида $2k\pi$, где k — некоторое целое число.

Подобным образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\rho_2 > 0).$$

Поэтому

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Мы доказали: модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей плюс, быть может, число, равное $2k\pi$, где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Мы доказали также: модуль частного комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей этих чисел, а аргумент частного равен с точностью до $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) разности аргументов z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$).

Сумма комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

равна

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

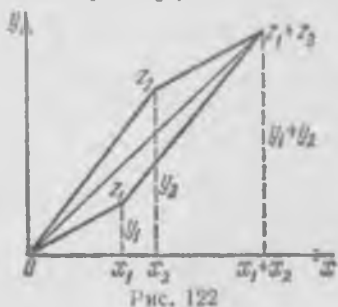


Рис. 122

Из рис. 122 видно, что радиус-вектор точки $z_1 + z_2$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на радиус-векторах точек z_1 и z_2 . Длина диагонали равна $|z_1 + z_2|$, а длины его сторон равны $|z_1|$ и $|z_2|$, но тогда

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

т. е. модуль суммы комплексных чисел не превышает суммы их модулей.

Отсюда, как следствие, вытекает, что модуль разности z_1 и z_2 не меньше разности модулей z_1 и z_2 :

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Пример 1. Привести комплексное число

$$z = \sqrt{3} + i$$

к тригонометрической форме.

Решение. Находим

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Следовательно,

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right).$$

При этом среди углов α , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, существует, и притом единственный, такой,

что

$$\sqrt{3}/2 = \cos \alpha, \quad 1/2 = \sin \alpha.$$

Очевидно, $\alpha = \pi/6$ и

$$z = 2 (\cos (\pi/6) + i \sin (\pi/6)) = 2e^{i\pi/6}.$$

Пример 2. Привести число

$$z = 3 + 4i$$

к тригонометрической форме.

Решение. Находим

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

и

$$z = 5 \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) = 5 (\cos \alpha + i \sin \alpha) = 5e^{i\alpha},$$

где α — угол, для которого

$$\cos \alpha = 3/5, \quad \sin \alpha = 4/5. \quad (14)$$

Будем искать α среди удовлетворяющих неравенству $0 \leq \alpha < 2\pi$. Так как в данном случае $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$, то α находится в первой четверти. Из (14) следует: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, т. е. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Пример 3. Привести число

$$z = -3 (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

к тригонометрической форме.

Решение. Если бы перед скобкой стояло положительное число, то данное выражение и было бы тригонометрической формой комплексного числа.

Имеем

$$-\cos \alpha = \cos (\pi + \alpha), \quad -\sin \alpha = \sin (\pi + \alpha),$$

поэтому

$$-1 (\cos \alpha + i \sin \alpha) = 3 (\cos (\pi + \alpha) + i \sin (\pi + \alpha)) = 3e^{i(\pi + \alpha)},$$

и мы получили тригонометрическую форму.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Представить в тригонометрической форме числа:

а) $5 - 4i$, б) $1 + 2i$, в) 4 , г) $6i$, д) $-2e^{-\frac{\pi}{3}}$.

2. Решить в комплексных числах уравнения:

а) $x^3 - 1 = 0$, б) $x^3 + 1 = 0$, в) $x^3 + 3x + 3 = 0$.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 13.1. Понятие приближения

Пусть задано число a и мало отличающееся от него число $\bar{a}$, которое будем называть *приближением числа a* . Будем при этом писать приближенное равенство

$$a \approx \bar{a} \quad (1)$$

и читать его так: *число a приближенно равно числу $\bar{a}$* . Символ $\approx$ есть знак приближенного равенства. Будем еще писать

$$\bar{a} - a = \Delta a$$

и величину

$$|\Delta a| = |\bar{a} - a|$$

называть *абсолютной погрешностью приближения (1)*.

Не всегда известно точное значение абсолютной погрешности a , но нередко известно число δ , ее превышающее,

$$\delta > |\Delta a| = |\bar{a} - a|, \quad (2)$$

называемое *погрешностью приближения (1)*. Неравенство (2) эквивалентно двум неравенствам

$$\bar{a} - \delta < a < \bar{a} + \delta,$$

так что если известны δ и $\bar{a}$, то можно сказать, что a есть некоторое число, принадлежащее к интервалу $(\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta)$.

Если известно, что $\bar{a} \leq a$, то говорят, что $\bar{a}$ *приближает a с недостатком (снизу)*, а если $\bar{a} \geq a$, то говорят, что $\bar{a}$ *приближает a с избытком (сверху)*.

Если известно неравенство (2), то будем говорить, что *приближенное равенство (1) имеет место с точностью до δ* .

Пример. При измерении температуры большого мениска ртути термометра оказался между отметками $38,6^\circ$ и $38,7^\circ$. Таким образом, температура T удовлетворяет неравенствам

$$38,6^\circ < T < 38,7^\circ.$$

Хотя точное значение T неизвестно, все же можно написать приближенные равенства

$$T \approx 38,6^\circ, \quad T \approx 38,7^\circ,$$

сказав, что они имеют место с точностью до 0,1; можно еще добавить, что $38,6^\circ$ есть приближение снизу, а $38,7^\circ$ — приближение сверху числа T .

Впрочем, на практике вместо $\approx$ пишут знак $\doteq$, т. е. в данном случае пишут

$$T = 38,7^\circ \quad \text{или} \quad T = 38,7^\circ,$$

считая само собой разумеющимся, что эти равенства приближенные и при том взятые с точностью до 0,1, т. е. с точностью до последнего знака числа T .

Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$ и для любого натурального n

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n.$$

Тогда (см. § 10.4)

$$a^{(n)} \leq a < a^{(n)} + 10^{-n}$$

и можно считать, что имеет место приближенное равенство

$$a \approx a^{(n)}$$

с точностью до 10^{-n} , при этом $a^{(n)}$ есть приближение a снизу.

Можно еще приближать десятичную дробь a с точностью до n -го знака с округлением. Такое приближение дает погрешность $\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$.

Пример 1. Следующие приближения

$$0,(73) = 0,7373 \dots \approx 0,7, \quad (3)$$

$$0,(73) \approx 0,74, \quad (4)$$

$$0,73651 \approx 0,737 \quad (5)$$

взяты с округлением: если первая отброшенная цифра ≥ 5 , то последняя оставшаяся цифра увеличена на 1, если же первая отброшенная цифра < 5 , то оставленные цифры не изменены.

Приближения (3), (4), (5) имеют место соответственно с погрешностями $\frac{1}{2} \cdot 0,1$, $\frac{1}{2} \cdot 0,01$, $\frac{1}{2} \cdot 0,001$.

§ 13.2. Абсолютная погрешность

Теорема 1. *Абсолютная погрешность приближений суммы и разности чисел не превышает сумму абсолютных погрешностей приближений этих чисел.*

Доказательство. Даны приближения $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$. Тогда приближение

$$a \pm b \approx \bar{a} \pm \bar{b}$$

имеет абсолютную погрешность

$$|\Delta(a \pm b)| = |(\bar{a} \pm \bar{b}) - (a \pm b)| = |\Delta a \pm \Delta b| \leq |\Delta a| + |\Delta b|,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Даны приближения $a \approx 3,728$, $b \approx -0,103$, $c \approx 2,107$ все три с точностями до 0,001. Тогда приближение

$$a + b + c \approx 3,728 - 0,103 + 2,107$$

имеет погрешность

$$\delta \leq 0,001 + 0,001 + 0,001 = 0,003.$$

§ 13.3. Относительная погрешность

Относительной погрешностью приближения $a \approx \bar{a}$ называется величина

$$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| \quad \text{или} \quad \left| \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right|. \quad (6)$$

Конечно, два эти числа разные. Но мы считаем, что эти числа настолько мало отличаются друг от друга, что можно одно из них заменить другим. Можно еще сказать, что мы рассматриваем относительные погрешности настолько малые, что их произведениями можно пренебречь. Это видно из следующих соотношений:

$$\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{\bar{a}} = \frac{\bar{a} - a}{a\bar{a}} \Delta a = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta a}{\bar{a}}, \quad (7)$$

$$\left| \left| \frac{\Delta a}{a} \right| - \left| \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right| \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right|. \quad (8)$$

Теорема 2. Относительная погрешность приближения произведения или частного чисел не превышает сумму относительных погрешностей приближений этих чисел:

$$\left| \frac{\Delta(ab)}{ab} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|, \quad (9)$$

$$\left| \frac{\Delta(a/b)}{a/b} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$. Тогда считаем $ab \approx \bar{a}\bar{b}$, $\frac{a}{b} \approx \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$. Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(cb)}{ab} &= \frac{(a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab}{ab} = \frac{b\Delta a + a\Delta b + \Delta a \Delta b}{ab} = \\ &= \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}. \end{aligned}$$

Последнее равенство написано с точностью до произведения $\left| \frac{\Delta a}{a} \right| \cdot \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$. Следовательно,

$$\left| \frac{\Delta(ab)}{ab} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$$

и мы доказали (9). Далее,

$$\frac{\Delta(a/b)}{a/b} = \frac{\frac{a+\Delta a}{b+\Delta b} - \frac{a}{b}}{a/b} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{a(b+\Delta b)} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}$$

Здесь четвертое равенство записано с погрешностью, оцениваемой величинами, которыми мы условились пренебречь — произведениями относительных погрешностей чисел a , b . Ведь

$$\frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} - \frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b} \right) = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{a} \frac{\Delta b}{b^2} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{\Delta b}{b} \quad (11)$$

§ 13.4. Вычисление произведения и частного

В § 10.7 отмечалось, что при практическом умножении и делении двух десятичных дробей

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots, \quad \beta = \beta_0, \beta_1\beta_2\dots \quad (12)$$

в качестве их приближений берут конечные десятичные дроби

$$\alpha^{(m)} = \alpha_0, \alpha_1\dots, \alpha_m, \quad \beta^{(n)} = \beta_0, \beta_1\dots, \beta_n.$$

Но чтобы получить достаточно хорошие приближения

$$ab \approx \alpha^{(m)}\beta^{(n)}, \quad \frac{a}{b} \approx \frac{\alpha^{(m)}}{\beta^{(n)}}, \quad (13)$$

не загромождая вычисления излишними выкладками, надо умело подобрать натуральные m и n в зависимости от структуры данных чисел a , b .

Надо знать, какие цифры следует оставить при приближении, чтобы получить оптимальный (наилучший) результат, т. е. такой, чтобы приближение было по возможности точнее и вычисления были экономичнее. Точность вычисления находится в противоречии с простотой вычисления. Большая точность связана с употреблением большего количества цифр, меньшая требует употребления меньшего количества цифр, если вычисление производится правильно.

Чтобы правильно приближенно умножать и делить числа, надо правильно округлять их.

Ниже формулируется правило приближенного вычисления умножения и деления чисел, заданных десятичными дробями. В нем употребляется понятие значащей цифры, которое было введено в § 4.7. Повторим определение этого понятия.

Значащими цифрами в десятичной дроби называются ее первая отличная от нуля цифра и следующие за ней цифры.

Например, в числе 33 000 все цифры значащие, в числе 0,3001 все цифры после запятой значащие, в числе же 0,000302 цифры, начиная с 3, значащие.

Округлить число с точностью до k -й значащей цифры — это значит округлить его с точностью до того знака, где находится k -я

значащая цифра. Например, следующие приближения взяты с точностью до 3-й значащей цифры:

$$235678 \approx 236000, \quad 2,70315 \approx 2,70, \quad 0,002031 \approx 0,00203.$$

Правило. Чтобы вычислить приближенно произведение или частное положительных чисел с точностью до k -й значащей цифры, надо округлить эти числа с указанной точностью, перемножить или разделить полученные приближения и результат округлить с точностью до k -й значащей цифры.

Полученные приближения $ab \approx \overline{ab}$, $\frac{a}{b} \approx \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ имеют гарантированную относительную погрешность 10^{k-1} .

Пример. Пусть $a = 135,78$, $b = 0,0068751$. Вычислить приближенно ab , $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ с точностью до третьей значащей цифры.

Каковы абсолютные погрешности этих приближений?

Решение. С помощью калькулятора вычислим

$$ab \approx 136 \cdot 0,00688 = 0,93568 \approx 0,936;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{135}{0,00688} = 19767,4 \dots \approx 19800;$$

$$\frac{b}{a} \approx \frac{0,00688}{136} = 0,00005058 \dots \approx 0,0000506.$$

Ответ. $ab \approx 0,936$, $\frac{a}{b} \approx 19800$, $\frac{b}{a} \approx 0,0000506$ с относительными погрешностями 0,01.

В следующем параграфе будет обосновано, что, округляя числа a , b с точностью до третьей значащей цифры, мы получим приближения $a \approx \overline{a}$, $b \approx \overline{b}$ с относительными погрешностями $\frac{1}{2} \cdot 0,01$. Но тогда приближения

$$ab \approx \overline{a}\overline{b}, \quad \frac{a}{b} \approx \frac{\overline{a}}{\overline{b}}, \quad \frac{b}{a} \approx \frac{\overline{b}}{\overline{a}}$$

будут с гарантированной относительной погрешностью $\frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,01$.

Абсолютные погрешности этих приближений оцениваются следующим образом:

$$|\Delta(ab)| \leq 0,01 \cdot |ab| \leq 0,01 \cdot 1 = 0,01;$$

$$\left| \Delta \frac{a}{b} \right| \leq 0,01 \cdot 20000 = 200;$$

$$\left| \Delta \frac{b}{a} \right| \leq 0,01 \cdot 0,0001 = 10^{-6}$$

$$(0,0000506 < 0,0001).$$

*) Последняя цифра 8 нам нужна для округления; чтобы ее получить, надо на калькуляторе разделить 688:135 и передвинуть запятую.

§ 13.5. Обоснование правила

Лемма. Пусть $a > 0$ — десятичная дробь и $\bar{a}$ — ее округление с точностью до k -й значащей цифры. Тогда приближение $a \approx \bar{a}$ имеет относительную погрешность, равную $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(k-1)}$;

$$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| = \left| \frac{\bar{a} - a}{a} \right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-(k-1)}.$$

Примеры. Следующие округления чисел взяты с точностью до их четвертой значащей цифры:

$$356\,273 \approx 356\,300, \quad 37,205 \approx 37,21, \quad 0,0020136 \approx 0,002014.$$

Согласно лемме относительная погрешность каждого из этих приближений равна $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

Доказательство леммы. Дана десятичная дробь a . Пусть α_s — ее первая значащая цифра. Приведем a к стандартному виду (§ 4.7). Для этого надо в дроби a перенести запятую так, чтобы она оказалась непосредственно после α_s :

$$a = 10^l \cdot \alpha_s, \alpha_{s+1} \alpha_{s+2} \dots$$

Здесь 10^l — возникающий при переносе запятой множитель.

Округлив a с точностью до k -й значащей цифры, получим $\bar{a} = 10^l \cdot \alpha_s, \alpha_{s+1} \dots \alpha_{s+k-1}$.

Относительная погрешность приближения $a \approx \bar{a}$ оценивается следующим образом (пояснения ниже):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta a}{a} \right| &= \left| \frac{a - \bar{a}}{a} \right| = \left| \frac{10^l \cdot 0,0 \dots \alpha_{s+k} \alpha_{s+k+1} \dots}{10^l \cdot \alpha_s, \alpha_{s+1} \alpha_{s+2} \dots} \right| < \\ &< \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}}{1} = \frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}. \end{aligned}$$

Мы сократили дробь на 10^l ; числитель не превышает $\frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}$. Далее, $\alpha_s, \alpha_{s+1} \alpha_{s+2} \dots \geq 1$, потому что $\alpha_s \geq 1$ есть первая значащая цифра дроби a .

Лемма доказана.

Переходим к обоснованию правила. Пусть $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}$ — округления соответственно a и b с точностью до k -й значащей цифры. Тогда по лемме

$$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| < \frac{1}{2} 10^{-(k-1)}, \quad \left| \frac{\Delta b}{b} \right| < \frac{1}{2} 10^{-(k-1)}$$

и по теореме 2

$$\left| \frac{\Delta ab}{ab} \right| < \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| < 10^{-(k-1)},$$

$$\left| \frac{\Delta (a/b)}{a/b} \right| < \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| < 10^{-(k-1)}.$$

Остается заметить, что у полученных при помощи микрокалькулятора дробей, выражающих приближенно $\overline{ab}$ и $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$, надо оставить k значащих цифр, а остальные цифры вычеркнуть. Если их оставить, они будут только загромождать результат, но истинного улучшения не дадут.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Округлить числа:

$a = 353,803$ до 4-й значащей цифры,

$b = 0,003071$ до 3-й значащей цифры,

$c = 0,000209$ до 2-й значащей цифры,

$d = 251672$ до 3-й значащей цифры,

$e = 353\,803$ до 4-й значащей цифры.

2. Вычислить ab , $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ с относительной погрешностью 10^{-2} .

3. Вычислить cd , $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{c}$ с относительной погрешностью 0,1.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

К главе 1, главе 2

1. По цепочкам функций написать соответствующую сложную функцию и, пользуясь обозначениями, приведенными в § 1.2, указать области задания этой функции:

1) $y = \cos u$, $u = 2x$. 2) $y = e^x$, $u = 3x$.

3) $y = e^u$, $u = x^2$. 4) $y = e^u$, $u = -x$.

5) $y = \sin u$, $u = 3x + 1$.

6) $y = u^2$, $u = 2v^2 + 1$, $v = x - 1$.

7) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 + u$, $u = x^2$.

8) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 - u$, $u = x^2$.

9) $y = \ln u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - t$, $t = x^2$.

2. Как в примерах к § 3.9, следующие функции представить в виде цепочек простейших элементарных функций:

1) $y = e^{2x}$. 2) $y = \sin 4x$. 3) $y = \sin(2x + 1)$.

4) $y = (x^2 + 1)^2$. 5) $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$. 6) $y = \ln^2(1 + x)$.

7) $y = \sin^2 x^2$. 8) $y = e^{2x+2}$. 9) $y = \cos^2 2x$.

10) $y = \sin^2 x^2$. 11) $y = e^{2x+2}$. 12) $y = \cos^2 2x$.

13) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 14) $y = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Убедиться в том, что приведенные выше функции суть элементарные функции, и, пользуясь обозначениями, приведенными в § 1.2, указать множества, на которых эти функции определены.

4. Что такое многочлен, линейная функция, рациональная функция, сложная функция, элементарная функция?

К главе 3

1. Какие из приведенных ниже переменных бесконечно малые или стремятся к пределу (тогда к какому?), или вовсе не имеют предела?

1) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

2) $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$.

3) $\{1, 1.1, 1.01, 1.001, \dots\} = \{1 + 10^{-n}\}$.

- 4) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.
 5) $\{-1, +1, -1, +1, \dots\} = \{(-1)^n\}$.
 6) $\{0,1; 0,11; 0,111; \dots\} = \underbrace{\{0,1\dots1\}}_{n \text{ раз}}.$

2. Какие из приведенных ниже переменных бесконечно большие (стремятся к бесконечности)? Стремятся ли они к $+\infty$ или $-\infty$?

- 1) $\{1, 2, 3, \dots\} = \{n\}$.
 2) $\{1, -2, 3, -4, \dots\} = \{(-1)^{n-1} n\}$.
 3) $\{-1, -2, -3, \dots\} = \{-n\}$.
 4) $\{1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \dots\}$.

3. Приращение функции $y = x^2$ в точке x , соответствующее приращению аргумента Δx , вычисляется по формуле $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$.

При этом здесь x и Δx любые, т.е. $-\infty < x, x + \Delta x < \infty$.

Вычислить приращение Δy в точке x , соответствующее приращению Δx , для следующих функций:

- 1) $y = x^4$. 2) $y = \ln x$. 3) $y = \sin 2x$.
 4) $y = x^3$. 5) $y = \arcsin x$. 6) $y = \operatorname{tg} x$.
 7) $y = (2x + 3)$. 8) $y = e^x$. 9) $y = \frac{1}{x}$.

Указать интервалы, которым могут принадлежать x и Δx .

4. Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывный график на отрезке (интервале), то ее называют непрерывной на этом отрезке (интервале). Как это выражается 1) на языке Δx и Δy и 2) на языке предела функции?

5. Пользуясь формулами 1)–10) § 3.8, написать, чему равны пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$. 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x$. 3) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \arcsin x$.
 4) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x + \cos x)$. 5) $\lim_{x \rightarrow e^2} \ln x$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x + x)$.
 7) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \operatorname{tg} x$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - x^2}$. 9) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

К главе 5

1. Нарисовать график функции $y = \cos x$ на отрезке $(0, 2\pi)$, провести в его точках $x = -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ касательные и вычислить их угловые коэффициенты.

2. Вычислить производные от функций:

- 1) $y = x^3(2x + 1)$. 2) $y = x^2 \sin x$. 3) $y = \frac{x+1}{x-1}$.
 4) $y = x \ln x$. 5) $y = xe^x$. 6) $y = (x^2 - 1) \ln x$.

Учебное издание

НИКОЛЬСКИЙ Сергей Михайлович

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Заведующий редакцией *А. П. Баева*

Редактор *М. М. Горячая*

Художественный редактор *Л. Н. Романенкова*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *И. Я. Кришталь*

ПБ № 32830

Сдано в набор 15.09.88. Подписано к печати 11.04.89. Формат 84×108 1/16
Бумага офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ.
л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 11,1. Тираж 180 000 экз. Заказ
№ 9—258. Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли,
113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано на полиграфкомбинате ЦК ЛКСМ Украины «Молодь» орде-
на Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объ-
единения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия»: 252119, Киев-119, ул. Пар-
хомовско, 38—44.

S. NIKOLSKII

ELEMENTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS

This popular little book «Elements of mathematical analysis», which was issued by publishing House «Nauka» (Moscow 1981) with mass drawing, is sold off. There are its translations on english (1983) and spanish (1984) by Editorial «Mir» (Moscow).

Last time author with his colleagues was intersted to the problems of mathematical school teaching. There are their attempt textbooks in arithmetic and algebra, which now are passing experiments in the soviet schools. «Nauka» has issued «Arithmetics» (1988) by S. Nikolskii, M. Potapov, N. Reshetnikov, A. Ševkin.

Naturally author has made changes in the second edition of «Elements of mathematical analysis», using these experiences. Now every person with education for 8 classes of soviet school can read the book free. The first 8 chapters of the book contain object of algebra for 9—10 classes of soviet school.

To get this aim was introduced the chapter «Trigonometrical functions». The chapter «Exponential functions» was also changed. The definition of this function for any real numbers is a difficult question in school teaching. The author though much before to stop on the defined way of the teaching of this notion.

Style of the account of the mathematical analysis themselves is preserved as in the first edition. Notion of the limits is given on examples, without formal definitions. Generally, the properties of limits and graphics are considered on the intuitive ground. Graphics and motion themselves are serving as the ground for fundamental conclusions. Very shortly are given differential and integral calculus and their application.

The concluding chapters (9—12) are devoted to the elementary account of some additional facts which also are important for the full middle mathematical education—complex numbers, Newton's binom, combinatoric, Taylor's formula.

In the USSR this book finds oneself usefull for adult pupils and of the general and technical schools teachers and even for the students of the faculties with short mathematical programme.

We hope that this book will be usefull accordingly In the foreign countries.



517
11-64

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

517
И-64

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для слушателей подготовительных отделений вузов*



у/5459

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.161

Н 64

УДК 517 (075.4)

Никольский С. М. Элементы математического анализа: Учеб. пособие.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— С. 224.— ISBN 5-02-013957-2.

Математический анализ в этой книге изучается на геометрической и физической основе. Непрерывный график и движение сами по себе служат основой для фундаментальных выводов. Излагаются дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения.

Последняя глава посвящена действительному числу, изучаемому на базе представления его в виде десятичной (вообще бесконечной) дроби.

Первое издание вышло в 1981 г. Для второго издания книга переработана и дополнена.

Для школьников и преподавателей средних школ. Может оказаться полезной учащимся техникумов и для самообразования.

Ил. 122.

Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой член-корреспондент АН СССР С. И. Похажеев);

доктор физико-математических наук профессор Г. Н. Яковлев

Н $\frac{1602070000-069}{053 (02)-89}$ 57-89

ISBN 5-02-013957-2

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, 1981; с изменениями, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	6
Из предисловия к первому изданию	8
Глава 1. Функция	9
§ 1.1. Чем занимается математический анализ?	9
§ 1.2. Обозначение множества чисел	9
§ 1.3. Примеры функций	10
§ 1.4. Определение понятия функции	11
§ 1.5. Задание функции формулой	12
§ 1.6. Задание функции графиком	14
§ 1.7. Задание функции таблицей	16
§ 1.8. Сложная функция	17
§ 1.9. Свойства некоторых функций	18
Глава 2. Тригонометрические функции	24
§ 2.1. Числовая окружность	24
§ 2.2. Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$	28
§ 2.3. Графики функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$	32
§ 2.4. Функции $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$	35
§ 2.5. Ось тангенсов и ось котангенсов	37
§ 2.6. Графики функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$	40
§ 2.7. Арксинус	43
§ 2.8. Арккосинус	46
§ 2.9. Арктангенс и арккотангенс	49
§ 2.10. Обратная функция	52
§ 2.11. Функции $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$	54
§ 2.12. Примеры решений тригонометрических уравнений	57
§ 2.13. Список основных формул тригонометрии	60
Глава 3. Предел	63
§ 3.1. Предел последовательности	63
§ 3.2. Бесконечно большая величина	66
§ 3.3. Действия с пределами	66
§ 3.4. Предел $\frac{\sin x}{x}$	70
§ 3.5. Предел функции	72
§ 3.6. Действия с пределами функций	74
§ 3.7. Непрерывность функции	77
§ 3.8. Элементарные функции	81
§ 3.9. Непрерывность сложной функции	81
§ 3.10. Разрывные функции	82
Глава 4. Показательная, логарифмическая и общая степенная функции	86
§ 4.1. Свойства функции a^x	86

§ 4.2.	a^x для целых и рациональных x	87
§ 4.3.	a^x для действительных x	89
§ 4.4.	Неравенство Бернулли	90
§ 4.5.	Число e	92
§ 4.6.	Логарифмическая функция	96
§ 4.7.	Логарифм с основанием 10	102
§ 4.8.	Степенная функция	104
Глава 5.	Производная	107
§ 5.1.	Мгновенная скорость	107
§ 5.2.	Касательная к кривой и сила тока	109
§ 5.3.	Производная	111
§ 5.4.	Непрерывность функции, имеющей производную	112
§ 5.5.	Формулы дифференцирования	114
§ 5.6.	Производная от показательной функции	116
§ 5.7.	Производная от логарифмической функции	117
§ 5.8.	Производная от произведения и частного	117
§ 5.9.	Производная от $\lg x$ и $\operatorname{ctg} x$	118
§ 5.10.	Задачи	118
§ 5.11.	Производная сложной функции	119
§ 5.12.	Производная обратной функции	121
Глава 6.	Применения производной	124
§ 6.1.	Максимум и минимум функции	124
§ 6.2.	Возрастание и убывание функции	130
§ 6.3.	Выпуклость и вогнутость	131
§ 6.4.	Черчение схематических графиков	134
§ 6.5.	Теоремы о среднем	137
Глава 7.	Интегральное исчисление	141
§ 7.1.	Первообразная	141
§ 7.2.	Неопределенный интеграл	142
§ 7.3.	Замена переменной	144
§ 7.4.	Проблема интегрирования элементарных функций	146
§ 7.5.	Площадь криволинейной фигуры. Определенный интеграл	147
§ 7.6.	Работа. Масса стержня	149
§ 7.7.	Теорема Ньютона—Лейбница	150
§ 7.8.	Доказательство формулы Ньютона—Лейбница	153
§ 7.9.	Свойства определенных интегралов	154
§ 7.10.	Площадь круга	156
§ 7.11.	Длина окружности	157
§ 7.12.	Объем тела вращения	158
§ 7.13.	Объем шара	159
§ 7.14.	Площадь поверхности шара	159
§ 7.15.	Работа электрического заряда	160
§ 7.16.	Давление жидкости на стенку	161
§ 7.17.	Центр тяжести	162
Глава 8.	Дифференциальные уравнения	165
§ 8.1.	Охлаждение тела	165
§ 8.2.	Нахождение закона движения тела по его скорости	166
§ 8.3.	Равномерно ускоренное движение	167
§ 8.4.	Колебание пружины	168

Глава 9. Формула Тейлора	172
§ 9.1. Понятие формулы Тейлора	172
§ 9.2. Примеры	174
Глава 10. Действительное число	176
§ 10.1. Десятичные разложения рациональных чисел . .	176
§ 10.2. Десятичные разложения иррациональных чисел .	179
§ 10.3. Сравнение действительных чисел	181
§ 10.4. Десятичное приближение действительного числа	182
§ 10.5. Числовая прямая	183
§ 10.6. Принцип вложенных отрезков	187
§ 10.7. Арифметические действия. Оценки приближений	187
§ 10.8. Свойства действительных чисел	190
Глава 11. Формула бинома Ньютона. Комбинаторика . . .	192
§ 11.1. Число C_n^k	192
§ 11.2. Формула бинома Ньютона. Метод индукции . . .	193
§ 11.3. Перестановки	195
§ 11.4. Размещения	196
§ 11.5. Сочетания	197
§ 11.6. Связь с биномиальными коэффициентами. Другой вывод формулы бинома Ньютона	199
§ 11.7. Вероятность события	199
Глава 12. Комплексные числа	203
§ 12.1. Понятие комплексного числа	203
§ 12.2. Уравнение $x^2=c$	205
§ 12.3. Применение комплексных чисел в квадратных уравнениях	207
§ 12.4. Геометрическое изображение комплексных чисел	209
§ 12.5. Показательная форма комплексного числа . . .	210
Глава 13. Приближенные вычисления	214
§ 13.1. Понятие приближения	214
§ 13.2. Абсолютная погрешность	215
§ 13.3. Относительная погрешность	216
§ 13.4. Вычисление произведения и частного	217
§ 13.5. Обоснование правила	219
Дополнительные упражнения	221

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Моя книга «Элементы математического анализа», изданная в 1981 г. массовым тиражом, была быстро распродана, и теперь видно, что ее целесообразно выпустить вторым изданием. Для второго издания я решил ее переработать на основании опыта, который приобрел в последние годы, занимаясь школьными учебниками.

Изменения направлены на то, чтобы книгу свободно мог читать всякий, кто знает математику в пределах 8 классов десятилетней школы. Я проследил за тем, чтобы в новом издании был охвачен программный материал 9 и 10 классов. Этот материал исчерпывают первые восемь глав настоящей книги.

Появилась необходимость ввести главу «Тригонометрические функции». Тригонометрию хотя и изучают в 8 классе, но без введения тригонометрических функций, тем более без обратных тригонометрических функций.

Во втором издании читатель также обнаружит некоторые методические изменения в изложении материала о показательной функции. В школе показательную функцию проходят в 10 классе. Определение функции a^x для любых действительных x —трудный вопрос. Автор много размышлял над тем, как лучше преподнести его школьнику, чтобы было и элементарно, и научно.

Изложение понятий собственно анализа—предела, производной, интеграла—осталось прежним, как в первом издании. Понятие предела дается на интуитивной основе, выясняется на примерах, без формальных определений. Без доказательства формулируются основные свойства пределов. Такие факты как существование максимума у непрерывной на отрезке функции или существование и единственность точки пересечения непрерывного монотонного графика с прямой, параллельной оси абсцисс, обнаруживаются из рассмотрения графика. Но и при этом можно изложить вопрос совсем элементарно или провести формальные рассуждения. Последние даны

петитом. Добавлена глава о дифференциальных уравнениях.

Остальные пять глав (9—13) могут быть использованы для дополнительного изучения в школах с физико-математическим уклоном. Комплексные числа, бинам Ньютона, комбинаторика, приближенные вычисления — все это совершенно необходимые темы. Неплохо подвести также итог своих знаний о действительных числах. Кстати, надо сказать, что о них школьник получает довольно-таки разрозненные сведения.

Автор придает значение главе «Формула Тейлора», дающей важную точку зрения на элементарные функции. В настоящем издании вывод этой формулы приведен в более доходчивой форме, чем в первом издании. Я благодарю академика А. Д. Александрова, обратившего мое внимание на то, что в первом издании изложение этого вопроса трудное.

Эта книга будет полезна не только школьникам, но и учащимся ПТУ, техникумов и студентам вузов с очень краткой программой по математике, учителям и вообще для общего образования.

Считаю своим долгом выразить благодарность А. В. Шевкину, который помог мне написать главу «Тригонометрические функции» и перераспределить главу «Функции».

С. М. Никольский

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Я имею опыт преподавания математического анализа на элементарной основе. В тридцатых годах я преподавал в технических вузах Днепропетровска, где слушателями были в основном рабфаковцы. Сейчас я делюсь своим опытом.

Эту книгу порекомендовали мне написать академик И. М. Виноградов, академик К. К. Марджанишвили и член-корреспондент АН СССР Е. Ф. Мищенко. Они ознакомились с написанной рукописью и дали весьма ценные советы. Рукопись была прочитана подробно проф. С. И. Адяном, проф. А. А. Карацубой и официальными рецензентами издательства «Наука» проф. А. В. Ефимовым и проф. М. К. Потаповым. Они дали много ценных советов. Полезные замечания по рукописи я получил также от профессора С. А. Теляковского и Главного управления школ Министерства просвещения СССР, где она изучалась. Наконец, главу «Математический анализ» с дополнением к ней подробно изучил академик Л. С. Понтрягин. Ряд его замечаний я учел, в частности, дополнив рукопись (петитом) формальными доказательствами некоторых положений, объясненных из наглядных соображений.

Всем указанным лицам и Главному управлению школ Министерства просвещения СССР я выражаю глубокую благодарность.

Наконец, я отмечаю, что Комиссия по реформе математического образования в средней школе при Бюро отделения математики Академии наук СССР под председательством академика И. М. Виноградова рекомендовала Министерству просвещения СССР допустить данную книгу как учебное пособие для учащихся средних школ.

Сейчас, когда книга находится в корректуре, стало известно, что она рекомендована в качестве пособия для учителей. Все же я не изменяю начало своего предисловия, потому что убежден, что эта книга вполне доступна школьникам.

§ 1.1. Чем занимается математический анализ?

Название «математический анализ» — сокращенное видоизменение старого названия «анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если бы название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т. е. переменные величины, зависящие от других переменных величин. Функции мы всюду встречаем в практике, функции описывают движения, физические явления. Они встречаются в технике, геометрии, механике, химии, экономике. Изучая функции, мы изучаем конкретные явления, которые они описывают. Одна и та же функция может описывать явления совершенно различной природы и тем самым объединять в себе закономерности, которым эти явления подчиняются.

Математический анализ является средством изучения функций, но тогда и средством изучения окружающих нас явлений. Важными понятиями математического анализа являются предел и непрерывность функции, производная и интеграл. В этой главе читатель получит начальные сведения об этих понятиях, их связи и их приложениях.

§ 1.2. Обозначение некоторых множеств чисел

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными числами* (см. гл. 10).

Пусть a и b — действительные числа (точки числовой прямой), удовлетворяющие неравенству $a < b$.

Отрезком $[a, b]$ называется множество чисел (точек) x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$. *Интервалом* (a, b) называется множество чисел x , удовлетворяющих

неравенствам $a < x < b$. *Интервалом* $(-\infty, +\infty)$ называется множество всех действительных чисел x (точек числовой прямой). Говорят еще, что это есть множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < +\infty$. *Интервалом* $(a, +\infty)$ называется множество чисел x , больших числа a , или, как говорят, множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < +\infty$. *Интервалом* $(-\infty, b)$ называется множество чисел x , меньших числа b , или, как говорят, множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < b$.

Полуинтервалом $[a, b)$ или $(a, b]$ называется множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$ соответственно.

Отрезок, интервал или полуинтервал мы будем называть еще *промежутком*.

Нам встретятся и другие множества (совокупности) чисел, которые не обязательно имеют специальные названия. Их обозначают разными буквами: $E, A, B, \dots$

§ 1.3. Примеры функций

В окружающей нас действительности мы всюду наблюдаем явления, органически связанные между собой. Нередко эти явления сопровождаются связями между теми или иными величинами, заключающимися в том, что одна величина, вообще говоря переменная, зависит в силу определенного закона от другой переменной величины. В таких случаях говорят, что первая величина есть *функция* второй. При этом вторую величину называют *независимой переменной* или *аргументом*, а первую — *зависимой*.

Приведем примеры таких функций.

1. Пусть в начальный момент времени $t=0$ материальная точка находилась в покое, а затем (при $t > 0$) начала падать под воздействием силы тяжести. Тогда путь s , пройденный точкой за время t , выразится формулой

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести. В данном случае мы имеем дело с двумя переменными величинами t и s . Каждому значению времени t в силу закона, выраженного формулой (1), приводится в соответствие определенное значение s . Этим определена функция $s = \frac{gt^2}{2}$ на множестве неотрицательных значений t .

2. Закон Бойля—Мариотта устанавливает связь между давлением и объемом данного количества газа при постоянной температуре

$$p = \frac{c}{v} \quad (v > 0), \quad (2)$$

где c — константа, v — объем, занимаемый данным количеством газа, p — его давление. Здесь p является функцией v и однозначно вычисляется по формуле (2).

3. Площадь круга радиуса r есть величина S , зависящая от r . S вычисляется по формуле

$$S = \pi r^2 \quad (r > 0).$$

Если изменять r , то соответственно будет изменяться S . Поскольку здесь речь идет о площади круга, то данная функция определена на множестве положительных чисел r .

§ 1.4. Определение понятия функции

Пусть E есть множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие одно число y ; тогда говорят, что на E задана функция, которую записывают так:

$$y = f(x).$$

Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле *). Множество E называют областью задания или областью определения функции $f(x)$. Говорят также, что задана независимая переменная x , которая может принимать частные значения x из множества E . Каждому такому значению x в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y , называемой функцией аргумента x .

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество точек x действительной прямой — область определения функции — и закон, в силу которого каждой точке множества E приводится в соответствие число $y = f(x)$. Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводя-

*) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии. П. Г. Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

щем в соответствие каждому числу x из E некоторое число y , то достаточно ее обозначить одной буквой f . Символ $f(x)$ обозначает число y , которое в силу закона f соответствует числу x . Если, например, число 1 принадлежит области E определения функции f , то $f(1)$ есть значение функции f в точке $x=1$. Если 1 не принадлежит E , то говорят, что функция f не определена в точке $x=1$.

Для функций f и φ , имеющих одну и ту же область определения E , определяются сумма $f+\varphi$, разность $f-\varphi$, произведение $f\varphi$, частное f/φ . Это новые функции, значения которых выражаются соответственно формулами

$$f(x) + \varphi(x), \quad f(x) - \varphi(x), \quad f(x)\varphi(x), \\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \quad \text{где } x \in E;$$

здесь в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E .

Для обозначения функции употребляются и любые другие буквы: $F, \Phi, \Psi, \dots$, так же как вместо x, y можно писать $z, u, v, w, \dots$

§ 1.5. Задание функции формулой

Возможны различные способы задания функции. Среди них особенно важное значение имеет задание функции при помощи формулы.

Приведем несколько примеров функций, заданных формулами.

Постоянная функция

$$y=c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Каждому действительному x соответствует одно и то же значение y , равное числу c .

Степенная функция

$$y=x^n \quad (-\infty < x < +\infty, \quad n=1, 2, 3, \dots).$$

При различных значениях n получим $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$ и т. д.

Линейная функция

$$y=kx+b.$$

Линейные функции встречаются в приложениях очень часто. Многие физические законы выражаются, и притом

достаточно точно, линейными функциями. Например, длина l стержня с хорошим приближением рассматривается как линейная функция его температуры t :

$$l = l_0 + \alpha t,$$

где α — коэффициент линейного расширения, l_0 — длина стержня при $t = 0$. Если x — время, а y — путь, пройденный за это время точкой, то линейная функция $y = kx + b$ выражает тот факт, что точка движется равномерно со скоростью k , число же b есть расстояние точки от начала отсчета пути в момент времени $x = 0$. Возможность приближенно считать равномерными различные изменения хотя бы на малых участках и простота линейной функции делают ее очень употребительной.

Частным случаем линейной функции (при $b = 0$) является *прямая пропорциональность*

$$y = kx, \quad k \neq 0.$$

Функция второй степени

$$y = ax^2 + bx + c \quad (-\infty < x < +\infty)$$

тоже встречается в приложениях, например, при описании равномерного ускоренного движения.

Можно рассматривать функции третьей, четвертой и вообще n -й степени. Функция

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

есть пример функции четвертой степени.

Функция n -й степени, или, как ее называют, *многочлен n -й степени*, получается из заданных постоянных и степенной функции $y = x$ при помощи действий сложения, вычитания и умножения, взятых в конечном числе. Если прибавить к этим действиям еще деление, то будем получать так называемые *рациональные функции*. Вот примеры рациональных функций:

$$y = \frac{-6}{x}, \quad y = \frac{1+x}{1-x}, \quad y = \frac{1+x^2}{x^2-5x+6}.$$

Рациональную функцию всегда можно записать в виде дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены. Рациональная функция определена для всех действительных x , которые не обращают знаменатель в нуль

Частным случаем рациональной функции является функция, выражающая обратную пропорциональность

$$y = \frac{k}{x} \quad (x \neq 0).$$

Функция на различных частях ее области определения может быть задана различными формулами. Например, пусть поезд, вышедший из пункта A в момент $t=0$, шел в течение двух часов со скоростью 100 км/ч и, прибыв в пункт B , стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью 80 км/ч. Тогда функция $s=f(t)$, выражающая расстояние (в километрах) поезда от A в момент времени t , очевидно будет определяться следующими тремя формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leq t < 2, \\ 200, & 2 \leq t < 3, \\ 80t - 40, & 3 \leq t \leq 6. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем мы остановимся достаточно подробно на тригонометрических функциях и введем новые функции — показательную и логарифмическую.

§ 1.6. Задание функции графиком

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную (декартову) систему координат xOy (рис. 1), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобра-

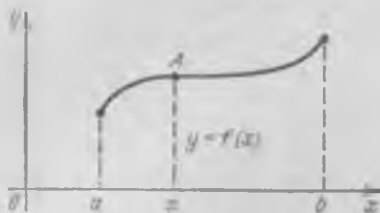


Рис. 1

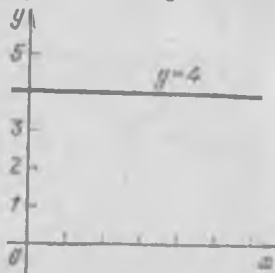


Рис. 2

зим любую кривую Γ , обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка x отрезка, прямая, проходящая через нее параллельно оси y , пересекает кривую Γ в единственной точке A . Такую кривую Γ мы будем называть **графиком**. График определяет функцию $y=f(x)$ на отрез-

ке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a, b]$, то соответствующее значение $y = f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 1). Следовательно, с помощью графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y = f(x)$.

Графиком функции $y = c$ является прямая, параллельная оси x и пересекающая ось y в точке $(0; c)$. На рис. 2 изображен график функции $y = 4$.

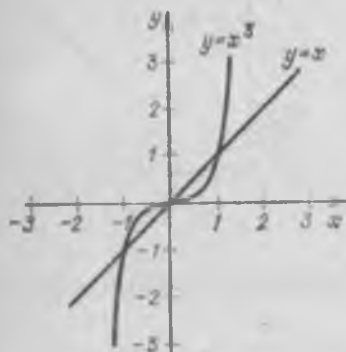


Рис. 3

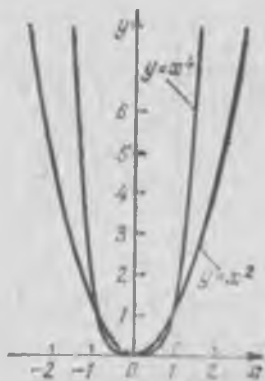


Рис. 4

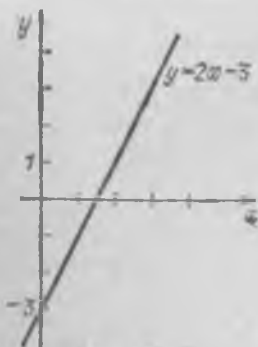


Рис. 5

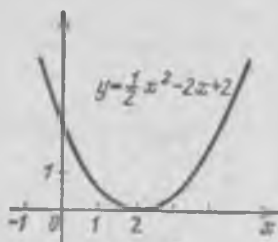


Рис. 6

Графики степенной функции для $n = 1, 2, 3, 4$ изображены на рис. 3 и 4.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая, образующая с положительным направлением оси x угол, тангенс которого равен k , и пересекающая ось y в точке, ордината которой равна b .

Графиком функции второй степени $y = ax^2 + bx + c$ является парабола.

Графиком обратной пропорциональности является гиперболы.

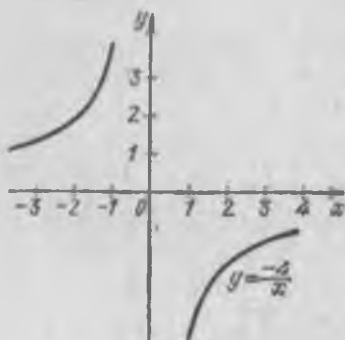


Рис. 7

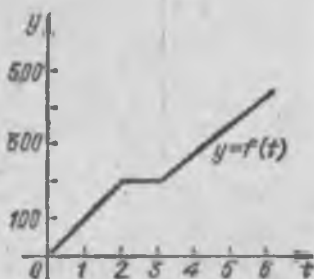


Рис. 8

На рис. 5—7 приведены графики функций $y = 2x - 3$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ и $y = \frac{-6}{x}$.

График функции, заданный формулами (3), изображен на рис. 8.

§ 1.7. Задание функции таблицей

Функция может быть задана с помощью таблицы. Пусть, например, результаты измерения температуры воздуха T в момент времени $t = 0, 1, 2, \dots, 10$ часов занесены в таблицу:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	2	1,5	1	1	0,5	1	1,5	2	3	4	6

Таким образом, мы получили функцию $T = f(t)$, определенную на множестве E целых чисел от 0 до 10, заданную таблицей. График функции $T = f(t)$, состоящий из 12 точек, изображен на рис. 9.

Используя приведенную таблицу и учитывая, что температура T изменялась непрерывно, можно рассмотреть

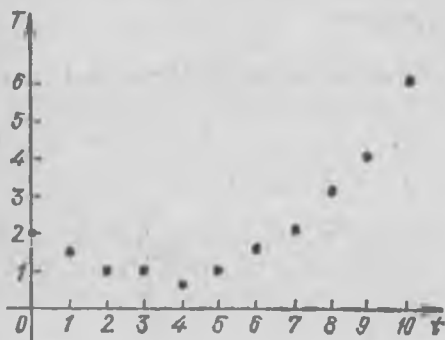


Рис. 9

функцию $T = f(t)$ на множестве $[0, 10]$. Ее график может быть получен из первого лишь приблизительно, плавным соединением его точек.

§ 1.8. Сложная функция

С помощью арифметических действий можно конструировать по данным функциям новые функции. Но существует еще и другое средство конструирования функции по данным функциям. Мы имеем в виду операцию *функции от функции*.

Пусть заданы две функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, где G есть область определения f , а E — область определения φ , и пусть каждому x из E соответствует при помощи функции φ значение u , принадлежащее G . Тогда можно сконструировать сложную функцию $y = f(\varphi(x))$ от x с областью определения E . Ее называют также *функцией от функции*.

Например, функцию

$$y = (x^2 + 1)^3 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

можно рассматривать как сложную функцию

$$y = u^3, \quad u = x^2 + 1 \quad (-\infty < x < +\infty),$$

определенную для всех точек x или, как говорят, определенную на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций:

$$z = F_1(F_2(F_3(\dots(F_n(x))\dots))).$$

Например, функция

$$z = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (4)$$

есть сложная функция, сконструированная из трех функций:

$$z = \sqrt{u}, \quad u = 1 - y, \quad y = x^2.$$

Так как функция $\sqrt{u}$ определена только для $u \geq 0$, то функция (4) определена для таких x , которые удовлетворяют неравенству $1 - x^2 \geq 0$ или, что все равно, неравенствам $-1 \leq x \leq 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое

- 1) функция,
- 2) область задания функции,
- 3) постоянная функция,
- 4) линейная функция,
- 5) степенная функция,
- 6) многочлен второй степени,
- 7) многочлен n -й степени,
- 8) рациональная функция,
- 9) сложная функция?

2. Нарисуйте схематические графики функций x^2 , x^3 ,

$$x^4, \frac{1}{x}.$$

3. Укажите области определения функций

- 1) $\frac{1}{x-1}$, 2) $\sqrt{x}$, 3) $\sqrt[3]{x}$.

4. По цепочкам функций написать соответствующую сложную функцию и указать область ее задания:

- 1) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 + u$, $u = x^2$;
- 2) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 - u$, $u = x^2$;
- 3) $y = \frac{1}{v}$, $v = 1 + \sqrt{u}$, $u = 1 - x$.

§ 1.9. Свойства некоторых функций

Функция $f(x)$ называется *чётной*, если выполняется равенство

$$f(-x) = f(x)$$

для всех значений x из области ее определения.

Например, функция x^2 четная, потому, что $(-x)^2 = x^2$ для всех x . Вообще любая функция вида x^n , где n — четное число, четная. Ведь для четного n выполняется равенство

$$(-x)^n = x^n,$$

каково бы ни было x .

График четной функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси y , потому что при условии $f(-x) = f(x)$ точки графика $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно оси y . На рис. 4 изображены графики четных функций $y = x^2$ и $y = x^4$.

Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x)$$

для всех значений x из области ее определения.

Например, функция x^3 нечетная, потому что $(-x)^3 = -x^3$ для всех x . Вообще функция x^n при нечетном n нечетные, а при четном n — четные.

График нечетной функции $y = f(x)$ симметричен относительно начала координат, потому что при условии $f(-x) = -f(x)$ точки $(x, f(x))$ и $(-x, f(-x))$ симметричны относительно начала координат. На рис. 3 изображены графики нечетных функций $y = x$ и $y = x^3$.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке значений x , если большему значению x из этого промежутка соответствует большее значение y .

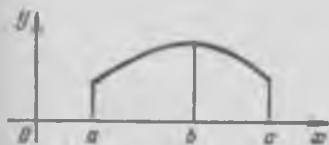


Рис. 10

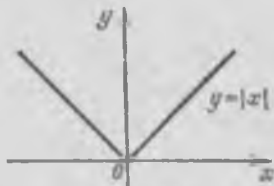


Рис. 11

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если большему значению x из этого промежутка соответствует меньшее значение y .

Следовательно, если точки x_1 и x_2 принадлежат промежутку и $x_1 < x_2$, то в случае возрастающей функции $f(x_1) < f(x_2)$ и в случае убывающей функции $f(x_1) > f(x_2)$.

На рис. 10 изображен график функции, возрастающей на $[a, b]$ и убывающей на $[b, c]$.

Функция $y = x^n$ при нечетном n возрастает на всей действительной оси $(-\infty, \infty)$; при четном же n она возрастает только на $[0, \infty)$ и убывает на $(-\infty, 0]$ (см. рис. 3 и 4).

График функции $|f(x)|$ совпадает с графиком $f(x)$ там, где $f(x) > 0$, и симметричен ему относительно оси x там, где $f(x) < 0$. На рис. 11 изображен график функции $y = |x|$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{для } x > 0, \\ 0 & \text{для } x = 0, \\ -x & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

На рис. 12 приведены графики функций $x^2 - 2x - 3$ и $|x^2 - 2x - 3|$.

График функции $f(x + \alpha)$, где α — заданное число, получается сдвигом графика $f(x)$ влево на величину α . При

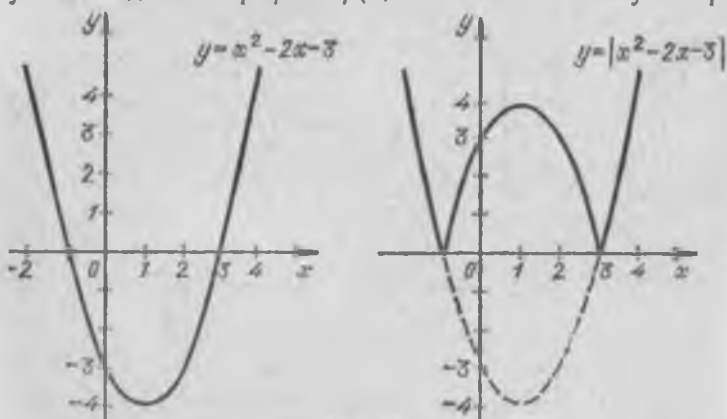


Рис. 12

$\alpha < 0$ на самом деле это есть сдвиг на величину $|\alpha|$ вправо. На рис. 13 изображен график функции $|x - 2|$.

На рис. 14 изображен график функции $y = \frac{-3x - 2}{x + 2}$.
Так как

$$y = \frac{-3(x+2)+4}{x+2} = -3 + \frac{4}{x+2},$$

то график этой функции можно получить следующим образом. В системе координат xOy задан пунктиром график

функции $\frac{4}{x}$. Сдвигая его (мысленно) влево на величину 2, получим график функции $\frac{4}{x+2}$. Опуская последний вниз на величину 3, получим искомый график функции $-3 + \frac{4}{x+2}$.

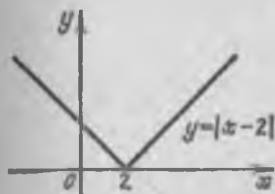


Рис. 13

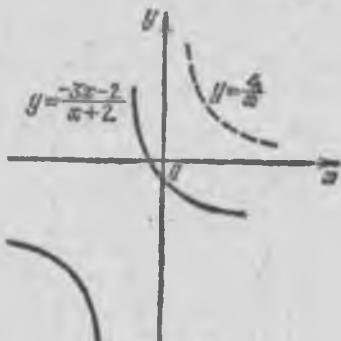


Рис. 14

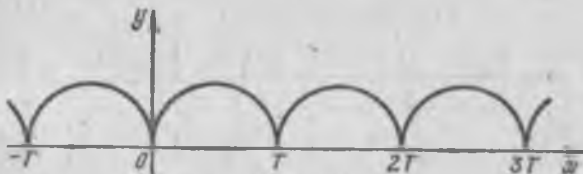


Рис. 15

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T ($T > 0$), если выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x)$$

для всех x . Чтобы изобразить график этой функции, надо нарисовать его для отрезка $[0, T)$, а затем продолжить его периодически на всю действительную ось (рис. 15).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам (см. п. 1.2)

1) $a \leq x < b$; 2) $a < x \leq b$; 3) $-\infty < x \leq b$;

4) $a \leq x < \infty$.

2. Что называется функцией?

3. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Задайте эту функцию графиком. Его точки соедините плавной кривой.

4. Даны функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varphi(x) = x^3 + 3x$. Задайте формулой функцию

- 1) $f(\varphi(x))$; 2) $\varphi(f(x))$; 3) $f(\varphi(f(x)))$.

5. Докажите, что функция

а) $y = -4x^3 + 5$ является четной,

б) $y = 7x^3 - 3x$ является нечетной.

6. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ четные. Докажите, что функции

- 1) $f(x) + \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(\varphi(x))$

являются четными. Нужна ли четность f ?

7. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ нечетные. Какими (четными или нечетными) являются функции

- 1) $f(x) + \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(\varphi(x))$?

Нужна ли нечетность f ?

8. Какие из функций

1) $y = 5x^4 - 4x^3 + 2$; 2) $y = 5x^3 + 3x^5 + x$; 3) $y = x^2 + x^3$

являются нечетными?

9. Какая функция называется а) возрастающей, б) убывающей на данном числовом промежутке?

10. Докажите, что функция $y = x^3$ является

а) возрастающей на $[0, +\infty)$,

б) убывающей на $(-\infty, 0]$.

Является ли функция $y = x^n$ возрастающей на всей своей области определения?

11. Докажите, что функция $y = \frac{k}{x}$ является

а) возрастающей при $k < 0$,

б) убывающей при $k > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

12. Постройте графики функций

1) $y = x - 4$; 2) $y = |x - 4|$; 3) $y = |x - 4| - 2$;

4) $y = ||x - 4| - 2|$; 5) $y = (x - 1)^2$; 6) $y = (|x| - 1)^2$;

7) $y = (|x| - 1)^2 - 1$; 8) $y = ||x| - 1|^2 - 1$;

9) $y = x^2 - 6x + 5$; 10) $y = x^2 - 6|x| + 5$;

11) $y = |x^2 - 6x + 5|$; 12) $y = |x^2 - 6|x| + 5|$;

$$13) y = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{(2x-5)2}{2x-6} = \frac{(2x-6)2+2}{2x-6} = 2 + \frac{1}{x-3};$$

$$14) y = \frac{3x+10}{x+2}; \quad 15) y = |x-2| + |x+2|;$$

$$16) y = \sqrt{x}; \quad 17) y = \sqrt{x+4}; \quad 18) y = \sqrt{-x-4}.$$

13. Найдите область определения функции:

$$1) y = \frac{3}{x-2}; \quad 2) y = \frac{10}{\sqrt{x+3}}; \quad 3) y = \sqrt{x^2-5x};$$

$$4) y = \sqrt{0,5x^2-2,5x+3};$$

$$5) y = \sqrt{x^2-7x+12} + \sqrt{-x^2+8x-15}.$$

14. Постройте график функции

$$1) y = \frac{|x|}{x}; \quad 2) y = \frac{|x-2|}{x-2}; \quad 3) y = \frac{x^2-9}{x+3};$$

$$4) y = |x| - x; \quad 5) y = x - |x|; \quad 6) y = x + 2 - |x+2|.$$

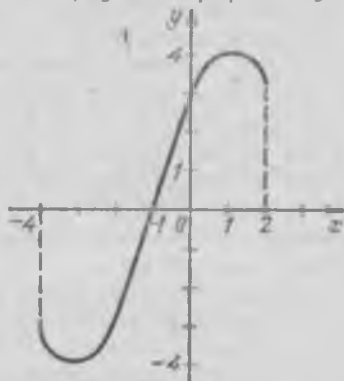


Рис. 16

15. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком на отрезке $[-4, 2]$ (рис. 16). Постройте график функции

$$1) y = -f(x); \quad 2) y = |f(x)|; \quad 3) y = f(|x|);$$

$$4) y = f(x) - |f(x)|; \quad 5) y = |f(x)| - f(x); \quad 6) y = \frac{|f(x)|}{f(x)};$$

$$7) y = f\left(\frac{1}{2}x\right); \quad 8) y = f(-x); \quad 9) y = 2f(x).$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 2.1. Числовая окружность

Величины $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ изучались в 7—8 классах на уроках геометрии и алгебры. Эти величины можно рассматривать как функции от угла α или, отвлекаясь от понятия угла, как функции от числового аргумента α . Их называют *тригонометрическими функциями*. Здесь мы рассматриваем графики этих функций. Чтобы понять как они устроены, напомним определения тригонометрических функций, которые, как мы знаем, даются из геометрических соображений—при помощи единичной числовой окружности. С нее и начнем.

Но прежде всего вспомним понятие радиана. *Радианом* называется величина центрального угла окружности, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу окружности. Это определение не зависит от размеров окружности. Поэтому можно еще сказать, что радиан есть величина центрального угла единичной окружности, опирающегося на дугу длины 1.

Окружность радиуса 1 называют *единичной*. Так как длина единичной окружности равна 2π , то

$$360^\circ = 2\pi \text{ радиана} = 2\pi$$

или

$$1 = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ.$$

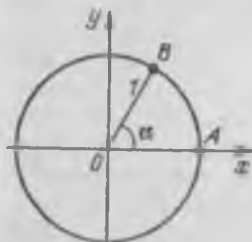


Рис. 17

В прямоугольной системе координат xOy зададим окружность радиуса 1 с центром в начале координат, называемую *числовой окружностью*. Точку A ее пересечения с положительной полуосью x будем называть *начальной точкой числовой окружности* (рис. 17).

Будем поворачивать радиус OA вокруг точки O в положительном направлении (против часовой стрелки) и в отрицательном направлении (по часовой стрелке). В отличие от геометрии тригонометрия рассматривает углы поворота,

которые могут быть больше π , 2π радиан, а также любые отрицательные углы, отложенные в отрицательном направлении.

Каждому действительному числу α поставим в соответствие точку B (рис. 17) числовой окружности, полученную с помощью поворота радиуса OA на угол $|\alpha|$ радиан вокруг точки O в положительном направлении, если $\alpha > 0$, и в отрицательном направлении, если $\alpha < 0$. Точку B , соответствующую числу α , будем называть точкой α . На рис. 18

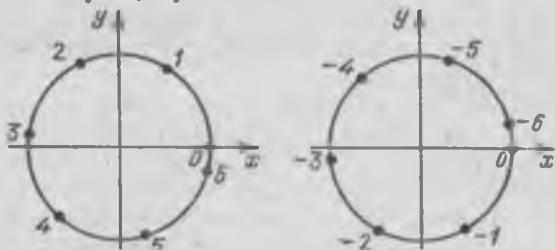


Рис. 18

показаны точки $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4, -5, -6$. Так как числовая окружность имеет радиус 1, то угол $|\alpha|$ радиан равен длине дуги, на которую он опирается.

Поэтому указанное соответствие можно определить и следующим образом: каждому числу α соответствует такая точка B числовой окружности, чтобы дуга $\widehat{AB}$ имела длину $|\alpha|$ и была отложена в положительном направлении, если $\alpha > 0$, и в отрицательном, если $\alpha < 0$. При этом имеются в виду дуги какой угодно длины. То есть числовую окружность можно рассматривать как окружность радиуса 1, на которую «намотана» числовая прямая.

Так как окружность радиуса 1 имеет длину 2π , то в силу сказанного числа

$\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \alpha + 6\pi, \dots, \alpha - 2\pi, \alpha - 4\pi, \alpha - 6\pi, \dots$

изображаются одной и той же точкой числовой окружности. Короче, числа вида $\alpha + 2n\pi$, где n — любое целое число, изображаются одной и той же точкой числовой окружности (рис. 19).

Так как числовая окружность имеет длину 2π , то на пересечении ее с осями координат расположены точки

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

Но эти же точки могут соответствовать также числам

$$2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}$$

или числам

$$-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. В приведенных рассуждениях число α определяет величину угла, выраженную в радианах.

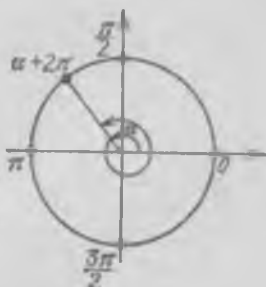


Рис. 19



Рис. 20

Бывает удобно эту величину выразить в градусах:

$$\beta^\circ = \frac{\alpha}{2\pi} 360^\circ \approx \alpha \cdot 57^\circ.$$

Пример 1. Какой четверти принадлежат точки $1\frac{1}{6}\pi$, $7\frac{3}{4}\pi$, $-\frac{\pi}{5}$?

Решение. Так как $\pi < 1\frac{1}{6}\pi < \frac{3\pi}{2}$, то точка $1\frac{1}{6}\pi$ принадлежит III четверти. Так как $7\frac{3}{4}\pi = 6\pi + 1\frac{3}{4}\pi$ и

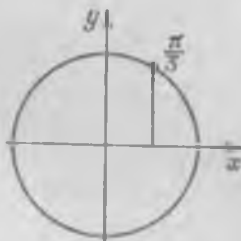


Рис. 21

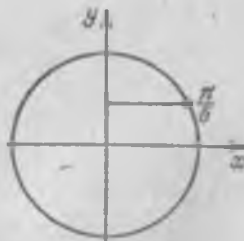


Рис. 22

$\frac{3\pi}{2} < 1\frac{3}{4}\pi < 2\pi$, то точка $7\frac{3}{4}\pi$ (как и точка $1\frac{3}{4}\pi$) принадлежит IV четверти.

Замечание. В дальнейшем нам довольно часто придется на числовой окружности отмечать числа, кратные $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$.

Для построения соответствующих точек следует помнить, что $\frac{\pi}{4}$ — половина $\frac{\pi}{2}$ (рис. 20), $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (рис. 21); $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 22).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое радиан?
2. Как определяется радиан при помощи окружности
а) радиуса 2? б) радиуса 1?
3. Запишите формулу перехода от градусов к радианам.
4. Как определяется точка α на числовой окружности, если α заданное действительное число?
5. Как могут отличаться между собой числа α и β , определяющие одну и ту же геометрическую точку числовой окружности?
6. По какому закону каждому действительному числу приводится в соответствие точка числовой окружности?
7. Точка B числовой окружности соответствует целому числу α . Найдется ли такое целое число (отличное от α), которому соответствует та же точка B ?
8. Запишите все точки α , изображенные на числовой окружности точкой
1) 0; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$.
9. Какой четверти принадлежат точки
1) $\frac{7\pi}{3}$; 2) $\frac{19\pi}{4}$; 3) $\frac{17\pi}{5}$; 4) $-\frac{15\pi}{4}$;
5) $-\frac{27\pi}{5}$; 6) $-\frac{8\pi}{7}$; 7) 20; 8) -100?
10. Запишите три числа, которые изображаются на окружности той же точкой, что и $\frac{17\pi}{3}$.
11. Выразите в градусах 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 3π , $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{9\pi}{2}$ радиан.

12. Выразите в радианах 60° , 150° , 225° , 765° , 390° , -30° , -45° , 240° , -300° .

13. На числовой окружности отмечена точка $\frac{\pi}{4}$. Перенесите рис. 20 в тетрадь и отметьте точки $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{4} = \pi$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$.

14. На числовой окружности отмечена точка $\frac{\pi}{3}$. Перенесите рис. 21 в тетрадь и отметьте точки $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3} = \pi$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

15. На числовой окружности отмечена точка $\frac{\pi}{6}$. Перенесите рис. 22 в тетрадь и отметьте точки $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, π , $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$.

16. Точка M числовой окружности имеет координаты $(0,8; 0,6)$. Определите координаты точек M_1 , M_2 , M_3 , симметричных точке M относительно оси x , оси y , начала координат соответственно.

17. На числовой прямой изобразите числовые промежутки

а) $[0, \pi]$; б) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; в) $(\pi, 2\pi)$;

г) $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$; д) $[-\pi, 0]$; е) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Укажите один промежуток, для всех точек α которого

а) абсцисса точки α положительна; отрицательна;
б) ордината точки α положительна; отрицательна.

19. Точка B соответствует целому числу α ; найдется ли такое рациональное число, отличное от α , которому соответствует та же точка B ?

§ 2.2. Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$

Рассмотрим в системе координат xOy единичную окружность и на ней произвольную точку α (см. рис. 23). *Косинусом* числа α называется абсцисса точки α и обозначается $\cos \alpha$. *Синусом* числа α называется ордината точки α и обозначается $\sin \alpha$.

Формулы $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ определяют функции от α . Так как α — произвольное действительное число, то эти функции определены на интервале $(-\infty, \infty)$. Перечислим некоторые свойства функций $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, которые помогут понять, как выглядят графики этих функций.

1. Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ непрерывны. Ведь из геометрических соображений видно, что при непрерывном изменении числа α в свою очередь непрерывно изменяются x и y .

2. Функции $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ имеют период 2π , т. е. для любого значения α выполняются равенства

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha. \quad (1)$$

Это следует из того, что точки α и $\alpha + 2\pi$ геометрически совпадают, таким образом, совпадают также их абсциссы и ординаты.

3. Функция $\cos \alpha$ четная, т. е. для любого α выполняется равенство

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha. \quad (2)$$

4. Функция $\sin \alpha$ нечетная, т. е. для любого α выполняется равенство

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad (3)$$

Свойства 3 и 4 следуют из того (рис. 24), что для любого α точки α и $-\alpha$ симметричны относительно оси x ,



Рис. 23

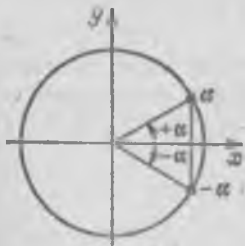


Рис. 24

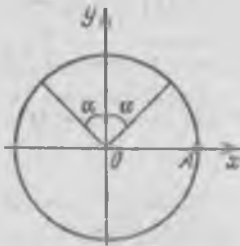


Рис. 25

поэтому их абсциссы равны между собой, а ординаты равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

5. Для любого α выполняются равенства:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad (4)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (5)$$

Это следует из того, что точки $\frac{\pi}{2} + \alpha$ и $\frac{\pi}{2} - \alpha$ симметричны относительно оси y и потому их ординаты равны, а абсциссы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку (рис. 25).

6. Если α непрерывно возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\sin \alpha$ непрерывно возрастает от 0 до 1 ($\sin 0 = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$), а $\cos \alpha$ непрерывно убывает от 1 до 0 ($\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$). Это свойство вытекает из геометрических соображений (см. рис. 13).

Значения $\sin \alpha$ для различных α из отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ можно вычислить с любой степенью точности. Существуют таблицы таких значений, но их можно получить и при помощи микрокалькулятора. Например, чтобы вычислить

$$\sin 10^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot 10\right) = \sin \frac{\pi}{18},$$

надо выполнить такие операции (нажать на указанные кнопки):

$$\boxed{1} \boxed{0} \boxed{\sin} \boxed{=} \approx 0,1736482.$$

Так как $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, то вычисление косинуса от α сводится к вычислению синуса от $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется косинусом и синусом числа α ?
2. На каком интервале определены функции $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$? Какие значения принимают эти функции?
3. Какая функция называется а) периодической с периодом T ; б) четной; в) нечетной?
4. Сформулируйте свойства функций $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

5. Какие из функций

а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$; г) $\sin \alpha + \cos \alpha$ являются четными, нечетными?

6. Отметьте точки α на числовой окружности, определите $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ при

а) $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$;

б) $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$;

в) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$;

г) $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

7. Сравните с нулем

а) $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \sin 5, \sin 6$;

б) $\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5, \cos 6$.

8. Сравните а) $\sin 2$ и 2 ; б) $\sin \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$;

в) $\sin \frac{3\pi}{4}$ и $\cos \frac{3\pi}{4}$.

9. Докажите тождества:

а) $\sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha)$; б) $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$;

в) $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

10. Вычислите а) $\cos 240^\circ$; б) $\sin 390^\circ$; в) $\cos(-150^\circ)$; г) $\sin(-780^\circ)$; д) $\cos 585^\circ$; е) $\cos 235^\circ$.

11. Вычислите а) $\cos \frac{7\pi}{2}$; б) $\sin \frac{17\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$; д) $\sin \frac{23\pi}{3}$; е) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

12. Приведите к вычислению синуса или косинуса наименьшего положительного угла (от 0° до 45° или от 0 до $\frac{\pi}{4}$ радиан):

а) $\sin 173^\circ$; б) $\cos 121^\circ$; в) $\sin(-127^\circ)$;

г) $\cos(-185^\circ)$; д) $\sin 417^\circ$; е) $\cos 284^\circ$;

ж) $\sin \frac{23\pi}{11}$; з) $\sin \frac{3\pi}{7}$; и) $\sin\left(-\frac{12\pi}{13}\right)$;

к) $\cos \frac{45\pi}{11}$; л) $\cos \frac{5\pi}{8}$; м) $\cos\left(-\frac{16\pi}{7}\right)$.

13. Задайте формулой все точки α , отмеченные на числовой окружности (рис. 26).

14. Укажите на числовой окружности точки α , для которых верны следующие равенства:

а) $\sin \alpha = 1$; б) $\cos \alpha = 0$; в) $\sin \alpha = -1$;

г) $\cos \alpha = 1$; д) $\sin \alpha = 0$; е) $\cos \alpha = -1$.

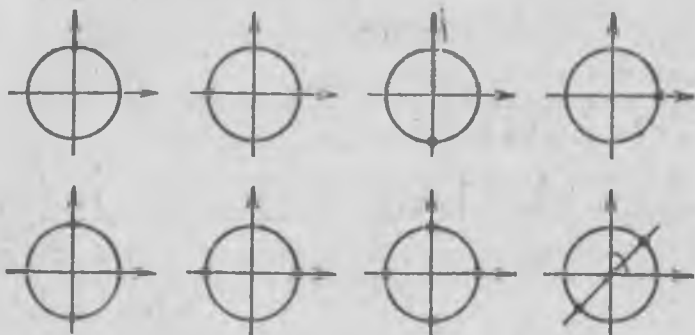


Рис. 26

16. Найдите все α , для которых

а) $\sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha = 0$; б) $\sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha + 2 = 0$;

в) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$; г) $\cos^3 \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0$.

Запишите 3 решения каждого уравнения. Задайте формулой все решения уравнений.

§ 2.3. Графики функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$

График функции $\sin \alpha$ называется *синусоидой*; чтобы его нарисовать в прямоугольной системе координат αOy , составим таблицу значений $y = \sin \alpha$, например, для α , пробегающих значения через $\frac{\pi}{12}$ от 0 до $\frac{\pi}{2}$:

α	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1

Эти данные можно взять из тригонометрических таблиц или вычислить на микрокалькуляторе. Например, пользуясь микрокалькулятором, получим

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15^\circ = \boxed{1} \boxed{5} \boxed{\sin} \boxed{=} 0,2588 \approx 0,26.$$

Нанесем точки $(\alpha, \sin \alpha)$ из таблицы в системе координат αOy и соединим плавной кривой (рис. 27). Получим приближенный график синусоиды, соответствующий отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ изменения α . Для любых других значений α

график синусоиды естественно получить, воспользовавшись свойствами функции $\sin \alpha$, перечисленными в предыдущем пункте.

На основании свойства $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ график синусоиды должен быть симметричен относительно

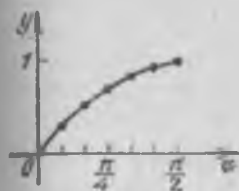


Рис. 27

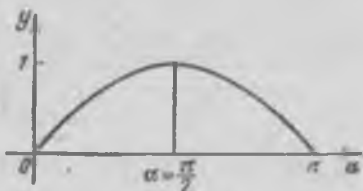


Рис. 28

прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому на отрезке $[0, \pi]$ график синусоиды выглядит так, как показано на рис. 28. На основании же свойства $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ график синусоиды

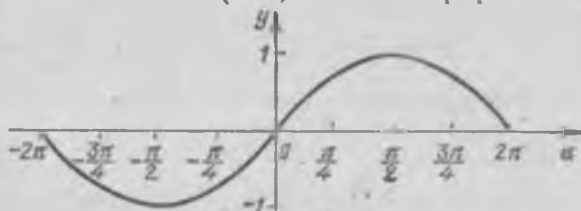


Рис. 29

симметричен относительно начала координат системы αOy . Поэтому на отрезке $[-\pi, \pi]$ график выглядит, как на рис. 29.

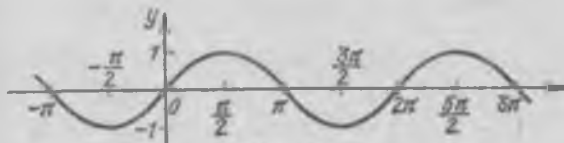


Рис. 30

Наконец на основании свойства $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$, верного для любого α , график синусоиды периодический с периодом 2π . Поэтому он выглядит как на рис. 30.

График функции $\cos \alpha$ называется *косинусоидой*. Косинусоида есть сдвинутая на величину $\frac{\pi}{2}$ влево синусоида

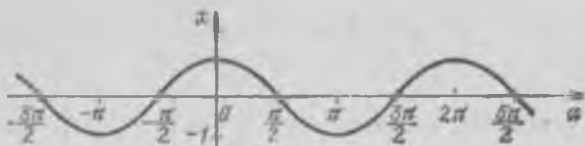


Рис. 31

(рис. 31). Это следует из равенства

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha,$$

верного для любого α . Ведь $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В каких четвертях а) $\sin \alpha > 0$; б) $\sin \alpha < 0$; в) $\cos \alpha > 0$; г) $\cos \alpha < 0$?

2. Укажите все числовые промежутки, для которых а) $\sin \alpha > 0$; б) $\sin \alpha < 0$; в) $\cos \alpha > 0$; г) $\cos \alpha < 0$?

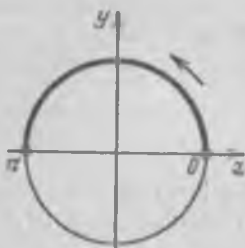


Рис. 32



Рис. 33

Решение. а) $\sin \alpha > 0$, в частности, если α в I или во II четверти, т. е. $0 < \alpha < \pi$ (рис. 32). Вообще, $\sin \alpha > 0$, если $0 + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi$, где k — целое число.

Ответ: $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, где k — любое целое число.

3. В каких четвертях с увеличением α

а) $\sin \alpha$ увеличивается; уменьшается?

б) $\cos \alpha$ увеличивается; уменьшается?

4. Сформулируйте определение функции

а) возрастающей; б) убывающей на отрезке $[a, b]$.

5. На каких отрезках функция $y = \sin \alpha$

а) возрастает; б) убывает?

Решение. а) С увеличением α функция $\sin \alpha$ увеличивается (рис. 33) на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое число.

6. На каких отрезках функция $x = \cos \alpha$

а) возрастает; б) убывает?

7. Постройте

а) синусоиду, б) косинусоиду.

8. Ответьте на вопросы заданий 2, 5, 6 с помощью графика.

9. Постройте графики функций

а) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 4]$; б) $f(2x)$; в) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

10. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 34). Постройте графики функций

а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

11. Постройте схематически графики функций

а) $y = -\sin \alpha$; б) $y = |\sin \alpha|$;

в) $y = \sin |\alpha|$;

г) $y = \sin 2\alpha$; д) $y =$

$= \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$; е) $y = \cos(3\alpha)$.

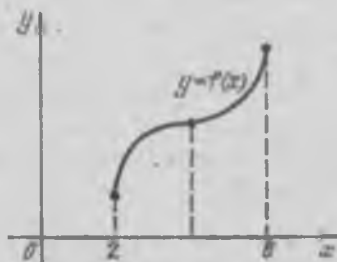


Рис. 34

Все ли эти функции периодические?

Определите наименьший положительный период для периодических функций.

12. Постройте график функции

а) $y = |\sin \alpha| - \sin \alpha$; б) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$.

§ 2.4. Функции $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$

Тангенсом числа α называется отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$, обозначаемое так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

Котангенсом числа α называется отношение $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$, обозначаемое так:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (7)$$

Эти определения обобщают известные определения тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике.

Величина $\operatorname{tg} \alpha$ определена для всех действительных α кроме тех, для которых $\cos \alpha = 0$, т. е. кроме $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число. Этим определена функция $\operatorname{tg} \alpha$.

Величина $\operatorname{ctg} \alpha$ определена для всех действительных α кроме тех, для которых $\sin \alpha = 0$, т. е. кроме $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число. Этим определена функция $\operatorname{ctg} \alpha$.

Из равенств $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ следует, что для всех действительных чисел α выполняются равенства

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad (8)$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (\alpha \neq k\pi), \quad (9)$$

означающие, что $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ — нечетные функции. Докажем равенство (8):

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha;$$

доказательство равенства (9) аналогично. Функции $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ периодические с периодом $T = \pi$, так как верны равенства

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi), \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi). \quad (11)$$

Докажем равенство (10):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

доказательство равенства (11) аналогично.

Верны также равенства

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha \quad (\alpha \neq k\pi).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется а) тангенсом числа α , б) котангенсом числа α ?

2. Для каких значений α не определена функция а) $\operatorname{tg} \alpha$? б) $\operatorname{ctg} \alpha$?

3. Сформулируйте свойства функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

4. Докажите формулы из § 2.13 (с. 60).

5. Вычислите тангенс и котангенс

- а) 30° , 45° , 60° ; б) 120° , 130° , 150° ;
 в) 210° , 225° , 240° ; г) 300° , 315° , 330° ;
 д) -30° , -45° , -60° ; е) 405° , -315° , -495° .

- б. а) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$;
 в) $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; г) $\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{3}$; $\frac{23\pi}{6}$; $-\frac{19\pi}{3}$.

7. Сведите вычисление к наименьшему положительному углу (от 0° до 45° или от 0 до $\frac{\pi}{4}$):

- а) $\operatorname{tg} 228^\circ$; б) $\operatorname{tg} (-250^\circ)$; в) $\operatorname{tg} (-400^\circ)$;
 г) $\operatorname{ctg} 260^\circ$; д) $\operatorname{ctg} (-410^\circ)$; е) $\operatorname{ctg} 525^\circ$;
 ж) $\operatorname{tg} \frac{16\pi}{5}$; з) $\operatorname{ctg} (-\frac{19\pi}{3})$; и) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$.

8. Сравните

- а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{5}$.

9. Задайте формулой все точки α , отмеченные на числовой окружности (рис. 35).

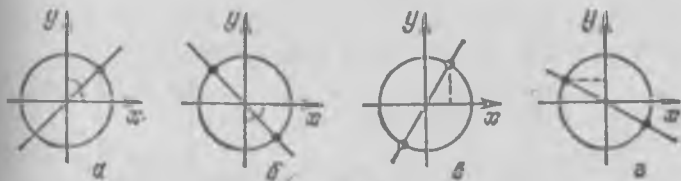


Рис. 35

10. Известно, что для некоторого числа α $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$. Вычислите

- а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$.

§ 2.5. Ось тангенсов и ось котангенсов

В системе координат xOy зададим числовую окружность с начальной точкой A на ней. Проведем касательную к окружности в точке A , которую будем считать числовой осью, направленной вверх. Эта ось называется *линией тангенсов* (рис. 36 и 37).

Каждому действительному числу α соответствует точка B числовой окружности. Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k — любое целое число), то прямая OB пересекает ось тангенсов в точке $D(1; y)$. Докажем, что $y = \operatorname{tg} \alpha$.

1. Если α в I четверти, то $\triangle OB_1C_1 \sim \triangle ODA$ (рис. 36) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{B_1C_1}{OC_1} = \frac{AD}{OA} = \frac{AD}{1} = y.$$

2. Если α во II четверти, то $\triangle OB_2C_2 \sim \triangle ODA$ (рис. 37) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{B_2C_2}{-OC_2} = -\frac{B_2C_2}{OC_2} = -\frac{AD}{OA} = -\frac{AD}{1} = -AD = y.$$

3. Если α в III четверти, то $\triangle OB_3C_3 \sim \triangle ODA$ (рис. 36) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-B_3C_3}{-OC_3} = \frac{B_3C_3}{OC_3} = \frac{AD}{OA} = \frac{AD}{1} = AD = y.$$

4. Если α в IV четверти, то $\triangle OB_4C_4 \sim \triangle ODA$ (рис. 37) и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-B_4C_4}{OC_4} = -\frac{B_4C_4}{OC_4} = -\frac{AD}{OA} = -\frac{AD}{1} = -AD = y.$$

5. Если $\alpha = \pi k$, то точка D совпадает с точкой A , но и в этом случае равенство $y = \operatorname{tg} \alpha$ верно.

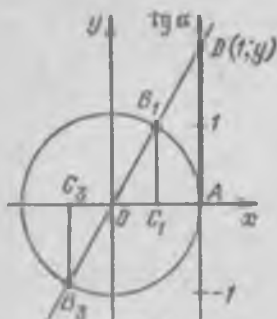


Рис. 36

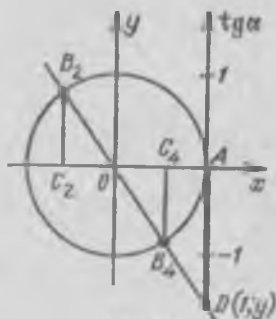


Рис. 37

Таким образом, любому действительному числу α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, k — любое целое число) соответствует единственная точка D оси тангенсов, ордината которой равна $\operatorname{tg} \alpha$:

$$y = \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассмотрим снова в системе координат xOy числовую окружность (рис. 38, 39). Проведем к ней касательную в точке M ее пересечения с положительной полуосью y .

Будем считать эту касательную числовой прямой, направленной вправо. Она называется *осью котангенсов*. Пусть B есть точка α .

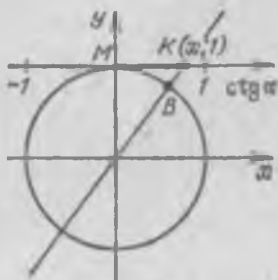


Рис. 38

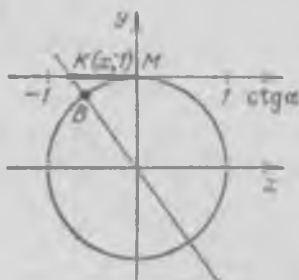


Рис. 39

Так же как и для $\operatorname{tg} \alpha$, можно показать, что если $\alpha \neq k\pi$ (k —любое целое число), то прямая OB пересечет ось котангенсов в точке k , координата которой равна $\operatorname{ctg} \alpha$:

$$x = \operatorname{ctg} \alpha.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называют осью тангенсов и чему равен $\operatorname{tg} \alpha$?
2. Что называют осью котангенсов и чему равен $\operatorname{ctg} \alpha$?
3. Покажите на числовой окружности точки α , для которых
 - а) $\operatorname{tg} \alpha = 1$; б) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 0$;
 - г) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$; д) $\operatorname{ctg} \alpha = -1$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$.
4. Задайте формулой все решения каждого уравнения:
 - а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$;
 - г) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$; д) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 - ж) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$; з) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$.
5. Как изменяется $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ при увеличении α
 - а) от 0 до $\frac{\pi}{2}$? б) от $\frac{\pi}{2}$ до π ?
 - в) от π до $-\frac{\pi}{2}$? г) от $-\frac{\pi}{2}$ до 0?
6. Покажите на числовой окружности все точки α , для которых
 - а) $\operatorname{tg} \alpha = 2$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -3$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{4}$.

7. Решите уравнения

а) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0$; б) $2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0$;

в) $\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 = 0$; г) $\operatorname{tg}^2 \alpha - 4 = 0$.

§ 2.6. Графики функций $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$

Чтобы построить график функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ в прямоугольной системе координат αOy , составим таблицу значений функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, например через интервал $\frac{\pi}{12}$:

α	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	0,27	0,58	1	1,7	3,7

Эти данные можно взять из таблиц или вычислить с помощью микрокалькулятора. Если α непрерывно возрастает от 0, приближаясь к $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки D (рис. 36) непрерывно, неограниченно возрастает, т. е. если $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), то $y \rightarrow +\infty$.

Если учесть еще, что $\operatorname{tg} 0 = 0$, то график функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ представляет собой непрерывную кривую, выходящую из начала координат и такую, что для ее точек (α, y) с возрастанием α от 0 до $\frac{\pi}{2}$ y неограниченно возрастает от 0 до $+\infty$.

По табличным данным построим в системе координат αOy точки $(\alpha, \operatorname{tg} \alpha)$ и соединим их плавной линией. Мы получим график функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ на полуинтервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 40).

Функция $y = \operatorname{tg} \alpha$ нечетная, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. На рис. 41 изображен график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для удобства на рис. 40, 41 проведены прямые $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. К ним неограниченно приближается график

функции $y = \operatorname{tg} \alpha$. При $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$) $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow +\infty$, при $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ($\alpha > -\frac{\pi}{2}$) $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow -\infty$. Такие прямые

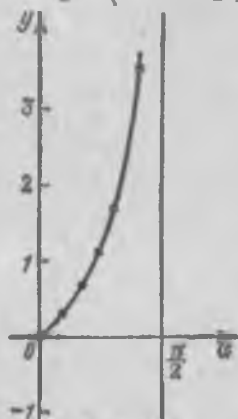


Рис. 40

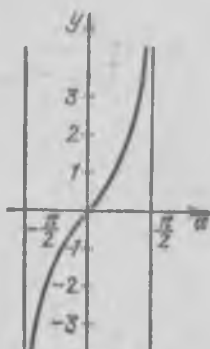


Рис. 41

называются *вертикальными асимптотами* графика. График их не пересекает.

Если учесть, что функция $y = \operatorname{tg} \alpha$ периодическая с периодом π , то представление о ее полном графике можно

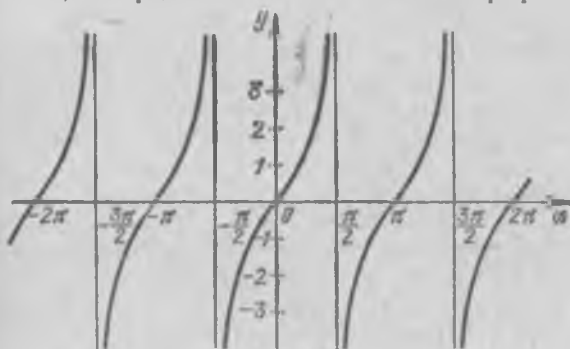


Рис. 42

получить из рис. 42. График функции $y = \operatorname{tg} \alpha$ называется *тангенсоидой*, он состоит из бесконечного числа непрерывных кривых. Для значений α , равных

$$\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

функция $\operatorname{tg} \alpha$ не определена.

Для построения графика функции $x = \operatorname{ctg} \alpha$ воспользуемся равенством

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

Перенесем тангенсоиду на $\frac{\pi}{2}$ вправо и симметрично отразим относительно оси α . Мы получим график функции $x = \operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 43).

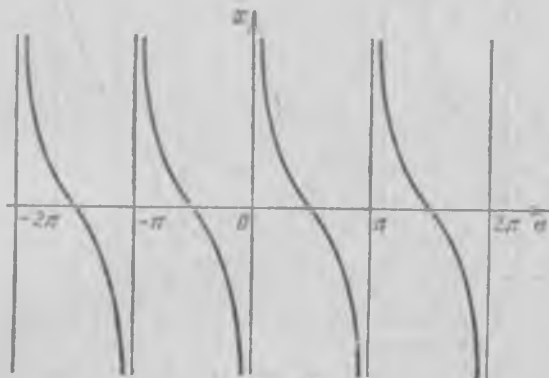


Рис. 43

Замечание. Для выражения тригонометрических функций независимую переменную мы обозначили α . Однако часто мы будем употреблять и другие буквы. Например, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \operatorname{tg} x$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое ось тангенсов и ось котангенсов?
2. Как называется график функции
 - а) $y = \operatorname{tg} \alpha$? б) $x = \operatorname{ctg} \alpha$?
- Нарисуйте эти графики схематически.
3. Как изменяется $\operatorname{tg} \alpha$
 - а) при $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$?
 - б) при $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$?
 - в) при $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, $\alpha < -\frac{\pi}{2}$?
 - г) при $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, $\alpha > -\frac{\pi}{2}$?

д) при $\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, $\alpha < \frac{3\pi}{2}$?

е) при $\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}$, $\alpha > \frac{3\pi}{2}$?

4. Постройте схематически график функции

а) $y = -\operatorname{tg} \alpha$; б) $y = |\operatorname{tg} \alpha|$; в) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$;

г) $\operatorname{tg} 3\alpha$; д) $\operatorname{ctg} 2\alpha$; е) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

5. Постройте график функции

а) $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$; б) $y = \operatorname{tg} |x|$; в) $y = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$;

г) $y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; д) $y = \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

§ 2.7. Арксинус

Зададим число β , удовлетворяющее условию $|\beta| \leq 1$.

Покажем, что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ существует единственное число α , синус которого равен β :

$$\sin \alpha = \beta.$$

Рассмотрим числовую окружность в системе координат xOy . Проведем прямую $y = \beta$. Так как $|\beta| \leq 1$, то эта

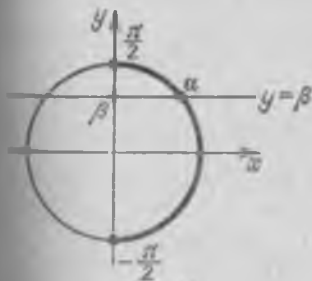


Рис. 44

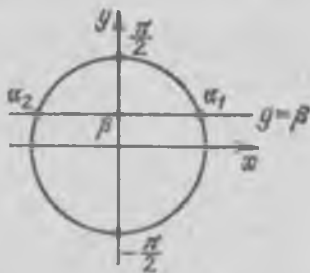


Рис. 45

прямая пересечет правую полуокружность в некоторой точке α с ординатой $y = \beta$, причем эта точка единственна (рис. 44). Это означает, что существует единственное число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен β .

Число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен β , называется *арксинусом* β и обозначается так:

$$\alpha = \arcsin \beta.$$

Например, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$,
 $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Заметим, что $\arcsin \beta$, где $|\beta| > 1$, не имеет смысла, потому что модуль синуса любого числа не превышает 1.

Например, $\arcsin \frac{\pi}{2}$ не имеет смысла, так как $\left|\frac{\pi}{2}\right| > 1$.

Из определения арксинуса следует, что если $-1 \leq \beta \leq 1$, то $\sin(\arcsin \beta) = \beta$.

С помощью арксинуса можно записать все решения уравнения

$$\sin \alpha = \beta. \quad (12)$$

Если $|\beta| > 1$, то уравнение (12) не имеет решений. Если $|\beta| < 1$, то прямая $y = \beta$ пересекает числовую окружность в двух точках $\alpha_1 = \arcsin \beta$, $\alpha_2 = \pi - \arcsin \beta$ (рис. 45). Все решения уравнения (1) можно записать так:

$$\alpha = \arcsin \beta + 2k\pi, \quad (13)_1$$

$$\alpha = \pi - \arcsin \beta + 2k\pi = -\arcsin \beta + (2k + 1)\pi, \quad (13)_2$$

где k — любое целое число. Объединим формулы (13)₁ и (13)₂ в одну:

$$\alpha = (-1)^n \arcsin \beta + n\pi, \quad (13)$$

где n — любое целое число. Очевидно, что при подстановке в (13) вместо n четного числа $n = 2k$ получится формула (13)₁, нечетного $n = 2k + 1$ — формула (13)₂.

Формула (13) дает все решения уравнения $\beta = \sin \alpha$ и в том случае, если $|\beta| = 1$.

Примеры.

1. Решениями уравнения $\sin \alpha = -1$ являются все $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, где n — любое целое (рис. 46, а).

2. Решениями уравнения $\sin 4\alpha = 1$ являются все $4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, где n — любое целое (рис. 46, б).

8. Решениями уравнения $\sin \frac{\alpha}{3} = 0$ являются все $\frac{\alpha}{3} = 0 + n\pi$, т. е. $\alpha = 3n\pi$, где n — любое целое (рис. 46, в).



Рис. 46

4. Решениями уравнения $\sin \alpha = 0,1$ являются все $\alpha = (-1)^n \arcsin 0,1 + n\pi$, где n — любое целое.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется арксинусом числа β ? Для каких β $\arcsin \beta$ определен, для каких нет?

2. Вычислите $\arcsin \beta$, если

а) $\beta = 0$; б) $\beta = 1$; в) $\beta = -1$; г) $\beta = \frac{1}{2}$; д) $\beta = -\frac{1}{2}$;

е) $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Постройте на числовой окружности точки

а) $\arcsin \frac{1}{2}$; б) $\arcsin \frac{1}{4}$; в) $\arcsin \frac{3}{4}$;

г) $\arcsin(-0,5)$; д) $\arcsin(-0,25)$; е) $\arcsin(-0,75)$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin(\arcsin 0,3)$; б) $\sin(\arcsin(-0,9))$;

в) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right)$;

д) $\arcsin(\cos 0)$; е) $\arcsin\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$.

5. Решите уравнение:

а) $\sin \alpha = 0$; б) $\sin \alpha = 1$; в) $\sin \alpha = -1$;

г) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; д) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$; е) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; и) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $\sin \alpha = 0,6$; л) $\sin \alpha = -0,7$; м) $\sin \alpha = -\frac{3}{2}$;

н) $\sin 2\alpha = 0$; о) $\sin \frac{1}{2}\alpha = 1$; п) $\sin \frac{1}{3}\alpha = -1$;

р) $\sin(\alpha - \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; с) $\sin(2\alpha + \pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

т) $\sin(\alpha + 7\pi) = \frac{1}{2}$.

6. При каких x равенство

а) $\sin(\arcsin x) = x$; б) $\arcsin(\sin x) = x$ выполняется, при каких нет? Приведите примеры.

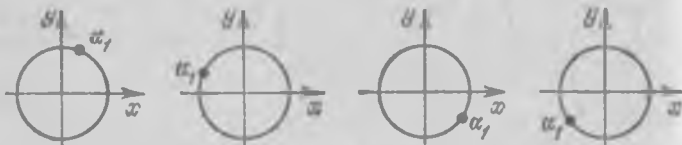


Рис. 47

7. На числовой окружности задана точка α_1 (рис. 47). Укажите на числовой окружности точку $\alpha_2 = \arcsin(\sin \alpha_1)$.

8. Вычислите а) $\sin(\arcsin x)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$.

§ 2.8. Арккосинус

Зададим число β , удовлетворяющее условию $|\beta| \leq 1$. Покажем, что существует единственное число α , удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \alpha \leq \pi$, косинус которого равен β :

$$\cos \alpha = \beta.$$

Рассмотрим числовую окружность в системе координат xOy . Проведем прямую $x = \beta$. Так как $|\beta| \leq 1$, то

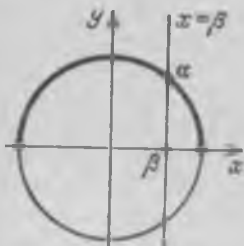


Рис. 48

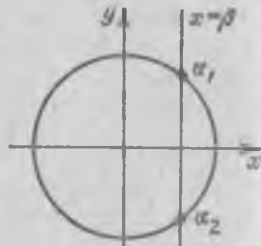


Рис. 49

эта прямая пересечет верхнюю полуокружность в точке с абсциссой $x = \beta$, причем эта точка единственная (рис. 48). Это означает, что существует единственное число α отрезка $[0, \pi]$, косинус которого равен β .

Число α из отрезка $[0, \pi]$, косинус которого равен β , называется *арккосинусом* β и обозначается $\arccos \beta$.

Например, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;
 $\arccos 1 = 0$; $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$; $\arccos(-1) = \pi$.

Заметим, что $\arccos \beta$, где $|\beta| > 1$, не имеет смысла, потому что модуль косинуса любого числа не превышает 1. Например, $\arccos 2$ не имеет смысла.

Из определения арккосинуса следует, что если $-1 \leq \beta \leq 1$, то

$$\cos(\arccos \beta) = \beta.$$

С помощью арккосинуса можно записать все решения уравнения

$$\cos \alpha = \beta, \quad (14)$$

т. е. все α , для которых выполняется равенство (14).

Если $|\beta| > 1$, то уравнение (14) не имеет решений.

Если $|\beta| < 1$, то прямая $x = \beta$ пересекает числовую окружность в двух точках $\alpha_1 = \arccos \beta$ и $\alpha_2 = -\arccos \beta$ (рис. 49) решения уравнения (14) можно записать так:

$$\alpha = \arccos \beta + 2k\pi, \quad (15)_1$$

$$\alpha = -\arccos \beta + 2k\pi, \quad (15)_2$$

где k — любое целое число. Объединим формулы (15)₁ и (15)₂ в одну:

$$\alpha = \pm \arccos \beta + 2k\pi, \quad (15)$$

где k — любое целое число. Формула (15) дает все решения уравнения (14) и при $|\beta| = 1$.

Примеры.

1. Решениями уравнения $\cos \alpha = -1$ являются все $\alpha = \pi + 2k\pi$, где k — любое целое число (рис. 50, а).

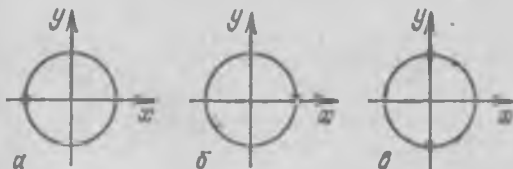


Рис. 50

2. Решениями уравнения $\cos \alpha = 1$ являются все $\alpha = 0 + 2k\pi = 2k\pi$, где k — любое целое число (рис. 50, б).

3. Решениями уравнения $\cos 2\alpha = 0$ являются все $2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, где k — любое целое число (рис. 50, в).

4. Решениями уравнения $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ являются все $\alpha = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется арккосинусом числа β ? Для каких β $\arccos \beta$ определен, для каких нет?

2. Вычислите $\arccos \beta$, если

а) $\beta = 1$; б) $\beta = 0$; в) $\beta = -1$; г) $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\beta = \frac{1}{2}$; ж) $\beta = -\frac{1}{2}$; з) $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. На числовой окружности постройте точки:

а) $\arccos \frac{1}{2}$; б) $\arccos \frac{1}{4}$; в) $\arccos \frac{3}{4}$;

г) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$; д) $\arccos \left(-\frac{1}{4}\right)$; е) $\arccos \left(-\frac{3}{4}\right)$.

4. Упростите выражение:

а) $\cos \left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; б) $\cos (\arccos 0)$;

в) $\arccos \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\arccos \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

д) $\arccos \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$; е) $\arccos (\sin 0)$.

5. Решите уравнение:

а) $\cos \alpha = 0$; б) $\cos \alpha = 1$; в) $\cos \alpha = -1$;

г) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; д) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; е) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; з) $\cos \alpha = -0,1$; и) $\cos = -\frac{2}{3}$;

6. а) $\cos 3\alpha = 0$; б) $\cos \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\cos 0,2\alpha = 1$.

7. При каких x равенство

а) $\cos (\arccos x) = x$; б) $\arccos (\cos x) = x$

выполняется, при каких нет? Приведите примеры.

8. На числовой окружности задана точка α_1 (рис. 51). Укажите на числовой окружности точку $\alpha_2 = \arccos (\cos \alpha_1)$.

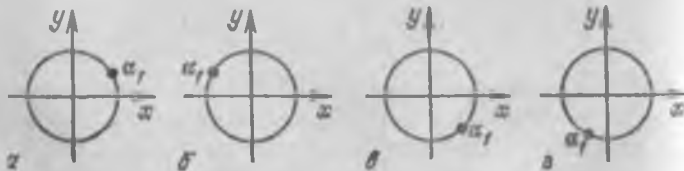


Рис. 51

9. Докажите, что

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$;

в) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$.

§ 2.9. Арктангенс и арккотангенс

На рис. 52 изображена числовая окружность и ось тангенсов. Очевидно, что для любого действительного числа β ($-\infty < \beta < +\infty$) на правой полуокружности найдется единственная точка α такая, что $\operatorname{tg} \alpha = \beta$.



Рис. 52



Рис. 53

Арктангенсом числа β ($-\infty < \beta < +\infty$) называется число α из промежутка $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен β и обозначается

$$\alpha = \operatorname{arctg} \beta.$$

Например, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} (-1) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} (\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (рис. 53).

На рис. 54 изображена числовая окружность и ось котангенсов. Очевидно, что для любого действительного β ($-\infty < \beta < +\infty$) на верхней полуокружности найдется точка α такая, что $\operatorname{ctg} \alpha = \beta$.

Арккотангенсом числа β ($-\infty < \beta < +\infty$) называется число из промежутка $(0, \pi)$, котангенс которого равен β и обозначается

$$\alpha = \operatorname{arcctg} \beta.$$

Например, $\operatorname{arccctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arccctg} (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ (рис. 55).

Арккотангенс и арктангенс используются для записи решений уравнений вида $\operatorname{ctg} \alpha = \beta$ и $\operatorname{tg} \alpha = \beta$. Уравнение

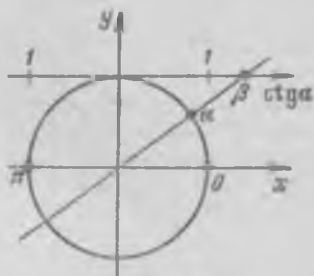


Рис. 54

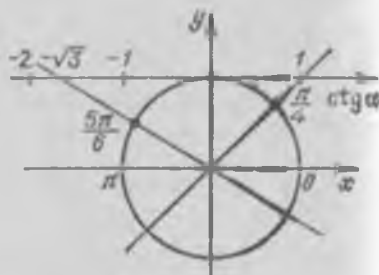


Рис. 55

$\operatorname{ctg} \alpha = \beta$ с учетом периодичности котангенса имеет решение $\alpha = \operatorname{arccctg} \beta + k\pi$, где k — любое целое число.

Уравнение $\operatorname{tg} \alpha = \beta$ с учетом периодичности тангенса имеет решение

$$\alpha = \operatorname{arctg} \beta + k\pi, \text{ где } k \text{ — любое целое.}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется а) $\operatorname{arccctg} \alpha$? б) $\operatorname{arctg} \alpha$?
2. Вычислите $\operatorname{arccctg} \beta$ и $\operatorname{arctg} \beta$, если
 - а) $\beta = 0$; б) $\beta = 1$; в) $\beta = -1$; г) $\beta = \sqrt{3}$;
 - д) $\beta = -\sqrt{3}$; е) $\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Изобразите на числовой окружности точки:
 - а) $\operatorname{arctg} 2$; б) $\operatorname{arccctg} (-1,5)$; в) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{2}\right)$;
 - г) $\operatorname{arccctg} \frac{1}{4}$; д) $\operatorname{arccctg} 2$; е) $\operatorname{arctg} (-1,5)$.
4. Упростите выражение:
 - а) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} 1)$; б) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} (-0,2))$,
 - в) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccctg} \sqrt{3})$; г) $\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arccctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;
 - д) $\operatorname{tg} (\operatorname{arccctg} (-\sqrt{3}))$, е) $\operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

5. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} \alpha = 0$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$; в) $\operatorname{tg} \alpha = 1$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha = 1$; д) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$;

ж) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$; з) $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}$; и) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

к) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; л) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; м) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

6. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} \alpha = 5$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = 3$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -2$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$; д) $\operatorname{tg} \alpha = -0,3$; е) $\operatorname{ctg} \alpha = 1\frac{2}{3}$.

7. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$; б) $\operatorname{ctg} 0,5\alpha = 0$; в) $\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

г) $\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{4}\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; д) $\operatorname{tg} 3\alpha = 7$; е) $\operatorname{ctg} 7\alpha = 3$.

8. При каких x равенства

а) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x) = x$; б) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccctg} x) = x$;

в) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} x) = x$; г) $\operatorname{arccctg} (\operatorname{ctg} x) = x$

выполняются, при каких нет? Приведите примеры.

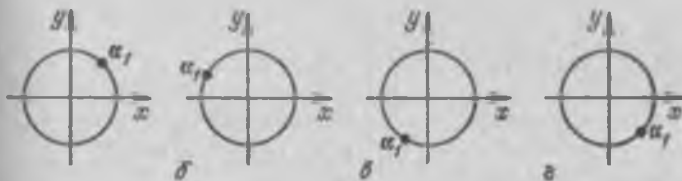


Рис. 56

9. На числовой окружности задана точка α_1 (рис. 56). Укажите на числовой окружности точку

а) $\alpha_2 = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \alpha_1)$; б) $\alpha_2 = \operatorname{arccctg} (\operatorname{ctg} \alpha_1)$.

10. Вычислите

а) $\operatorname{tg} (\operatorname{arctg} x)$; б) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arccctg} x)$;

в) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} x\right)$; г) $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$.

11. Докажите, что

а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg} (\operatorname{arccctg} x) = \frac{1}{x}$; в) $\operatorname{ctg} (\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$.

§ 2.10. Обратная функция

Рассмотрим непрерывную возрастающую на $[a, b]$ функцию

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Ее график изображен на рис. 57. С помощью графика мы можем для каждого значения x из отрезка $[a, b]$ определить соответствующее значение $y = f(x)$. При этом, если x непрерывно возрастает от a до b , то y соответственно непрерывно возрастает от $c = f(a)$ до $d = f(b)$.

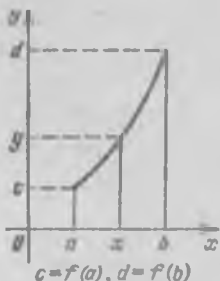


Рис. 57

С другой стороны, мы видим, что и обратно каждое значение y из отрезка $[c, d]$ соответствует одному и только одному значению x из отрезка $[a, b]$. Таким образом, возникает новая функция x от y , определенная на отрезке $[c, d]$, называемая *обратной функцией* к функции $f(x)$. Обозначим ее

$$x = \varphi(y), \quad c \leq y \leq d.$$

Эта функция тоже возрастает и непрерывна на $[c, d]$.

Итак, для каждой непрерывной возрастающей на $[a, b]$ функции $f(x)$ существует обратная ей функция x от y , определяемая следующим образом: каждому y из отрезка $[c, d]$ соответствует единственное значение x на отрезке $[a, b]$, такое что $y = f(x)$, где $c = f(a)$, $d = f(b)$.

Отметим равенства

$$\varphi[f(x)] = x \quad (a \leq x \leq b),$$

$$f[\varphi(y)] = y \quad (c \leq y \leq d).$$

В самом деле,

$$\varphi[f(x)] = \varphi(y) = x \quad (a \leq x \leq b),$$

$$f[\varphi(y)] = f(x) = y \quad (c \leq y \leq d).$$

Отметим еще, что функция $f(x)$ может быть задана на интервале (a, b) , тогда утверждение остается верным, если считать, что $\varphi(y)$ определяется на интервале (c, d) , где

$$c = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad d = \lim_{x \rightarrow b} f(x),$$

т. е. c есть число, к которому стремится $f(x)$, когда x стремится к a , а d — число, к которому стремится $f(x)$, когда x стремится к b . Но может быть $c = -\infty$ или $d = +\infty$.

Функция f может быть задана на полуинтервале $[a, b)$, и тогда функция φ задается на полуинтервале $[c, d)$, где $c = f(a)$, $d = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$.

Аналогично, если f задана на $(a, b]$, то φ задана на $(c, d]$, где $c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $d = f(b)$.

Пример. Функция $y = x^2$ ($0 \leq x < +\infty$) непрерывна и возрастает на полуинтервале $[0, +\infty)$. Поэтому существует обратная к ней функция $x = \varphi(y)$ ($0 \leq y < +\infty$), которую условились обозначать так:

$$x = \sqrt{y} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Здесь $a = 0$, $b = \infty$, $c = 0^2 = 0$, $d = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$.

Замечание 1. Кривая на рис. 57 есть график функции $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$). В то же время она есть также график функции $x = \varphi(y)$ на отрезке $[c, d]$.

Если бы мы захотели получить график функции φ в виде

$$y = \varphi(x) \quad (c \leq x \leq d),$$

то можно рассуждать следующим образом. В системе координат xOy рисуем график функции (рис. 58)

$$x = f(y) \quad (a \leq y \leq b),$$

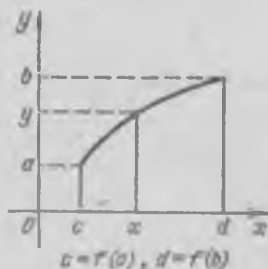


Рис. 58

т. е. значения независимой переменной y откладываем на оси ординат, а значение x откладываем на оси абсцисс. Полученная кривая автоматически будет графиком функции

$$y = \varphi(x) \quad (c \leq x \leq d).$$

Отметим, что графики функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Это свойство упрощает построение графиков обратных функций.

Замечание 2. По аналогии можно получить следующее утверждение. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и убывает на нем (т. е. если x возрастает от a до b , то $f(x)$ убывает от $c = f(a)$ до $d = f(b)$, $c > d$). Тогда существует обратная к функции f функция

$$x = \varphi(y) \quad (d \leq y \leq c),$$

убывающая на отрезке $[d, c]$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что значит, что существует обратная функция к данной непрерывной возрастающей функции $y = f(x)$?

2. Если непрерывная и возрастающая функция $y = f(x)$ задана на

а) отрезке $[a, b]$, б) интервале (a, b) ,

в) полуинтервале $[a, b)$, г) полуинтервале $(a, b]$, то на каком промежутке задана обратная ей функция?

3. Как по данной возрастающей непрерывной функции f построить обратную ей функцию в виде $y = \varphi(x)$?

§ 2.11. Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$

Функция

$$y = \sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

непрерывна и, если x возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то y возрастает от -1 до 1 . Поэтому, как мы знаем, существует обратная к этой функции функция, т. е. каждому y из

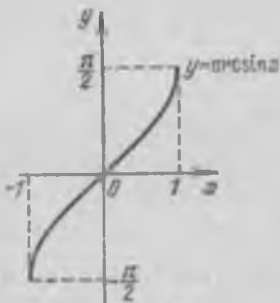


Рис. 59

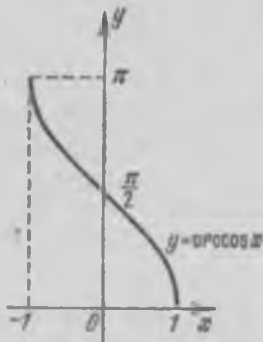


Рис. 60

отрезка $[-1, 1]$ соответствует единственное значение x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, для которого $y = \sin x$. Но тогда

$$x = \arcsin y \quad (-1 \leq y \leq 1).$$

Таким образом, функция $\arcsin y$ есть обратная функция к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Чтобы получить в системе координат xOy график функции

$$y = \arcsin x \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

строим график функции (рис. 59)

$$x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Одновременно он является также графиком функции $y = \arcsin x$ $(-1 \leq x \leq 1)$. Функция

$$y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

непрерывна, и если x возрастает от 0 до π , то y убывает от 1 до -1 . Но тогда, рассуждая как выше, получаем, что существует обратная ей функция, определяемая формулой $x = \arccos y$ $(-1 \leq y \leq 1)$.

График функции

$$y = \arccos x \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

в системе координат xOy совпадает с графиком функции (рис. 60)

$$x = \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi).$$

Функция

$$y = \operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и при этом, если x возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, она возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, существует обратная к ней функция

$$x = \operatorname{arctg} y \quad (-\infty < y < +\infty).$$

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < \infty)$ (см. рис. 61) совпадает с графиком $x = \operatorname{tg} y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ (и симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно биссектрисы первого координатного угла).

Справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad (16)$$

верное для любого a , удовлетворяющего неравенствам $-1 \leq a \leq 1$.

В самом деле, равенство (16) проверяется непосредственно при $a=0, 1, -1$. Если же $0 < a < 1$, то обратимся к числовой окружности (рис. 62), на которой отметим в I четверти точку B , имеющую ординату, равную a .

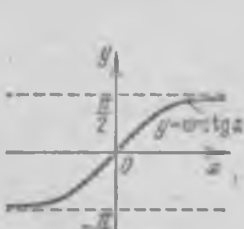


Рис. 61

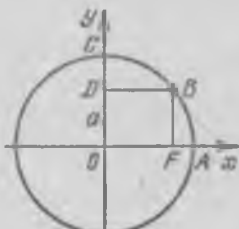


Рис. 62

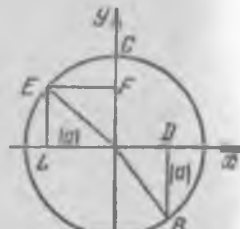


Рис. 63

Опустим из B на оси координат перпендикуляры. Отметим, что $a = BF = OD = \sin \sphericalangle AB = \cos \sphericalangle BC$. Поэтому

$$\sphericalangle AB = \arcsin a, \quad \sphericalangle BC = \arccos a,$$

$$\arcsin a + \arccos a = \sphericalangle AB + \sphericalangle BC = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть теперь $-1 < a < 0$. Отмечаем (рис. 63) на числовой окружности в IV четверти точку B , имеющую ординату, равную $a = -|a|$, и опускаем из B на ось x перпендикуляр BD . Отмечаем также на числовой окружности точку E , имеющую абсциссу, равную $a = -|a|$, и опускаем из E на оси координат перпендикуляры EL и EF . Очевидно, $\sphericalangle EC = \sphericalangle AB$, поэтому $\sphericalangle AE - \sphericalangle AB = \frac{\pi}{2}$. Так как $\arccos a = \sphericalangle AE$, $\arcsin a = -\sphericalangle AB$, то $\arccos a + \arcsin a = \sphericalangle AE - \sphericalangle AB = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое
 - а) $\arcsin x$? б) $\arccos x$? в) $\arctg x$?
2. Какой функции обратна функция
 - а) $\arcsin x$? б) $\arccos x$? в) $\arctg x$?
3. Как можно получить графики этих функций, если воспользоваться соответственно графиками функций $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$?

§ 2.12. Примеры решений тригонометрических уравнений

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin mx - \sin lx = 0 \quad (m-l \neq 0, \quad m+l \neq 0).$$

Решение.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{m-l}{2} x \cos \frac{m+l}{2} x &= 0, \\ \sin \frac{m-l}{2} x &= 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{m+l}{2} x = 0, \\ \frac{m-l}{2} x &= k\pi, \quad x = \frac{2k\pi}{m-l}, \\ \frac{m+l}{2} x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{m+l}, \end{aligned}$$

где k — любое целое число.

Ответ: $x = \frac{2k\pi}{m-l}$ и $x = \frac{(2k+1)\pi}{m+l}$, где k — любое целое число.

Подобным образом решаются уравнения

$$\begin{aligned} \sin mx + \sin lx &= 0, \quad \cos mx - \cos lx = 0, \\ \cos mx + \cos lx &= 0 \end{aligned}$$

с помощью формул для суммы синусов и косинусов углов и разности косинусов.

В некоторых частных случаях уравнения рассмотренного вида можно решить другими способами. Вот пример.

Пример 2. $\sin 2x - \sin x = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x - \sin x &= 0, \quad \sin x (2 \cos x - 1) = 0, \\ \sin x &= 0 \quad \text{или} \quad \cos x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $x = k\pi$ и $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\cos x = a, \quad \sin x = b,$$

где a и b — данные числа.

Решение. Если $a^2 + b^2 \neq 1$, то система не имеет решения, потому что $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ для любого x . Пусть теперь $a^2 + b^2 = 1$. Тогда точка (a, b) находится на число-

вой окружности. Она определяет некоторый угол α_0 , который и является решением задачи.

На оси x отмечаем точку, имеющую координату, равную a , и восстанавливаем из нее перпендикуляр до пересечения с окружностью в положительном направлении, если $b > 0$, или отрицательном, если $b < 0$. Точка пересечения и будет иметь координаты (a, b) .

Общее решение задачи записывается в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi,$$

где k — произвольное целое число.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

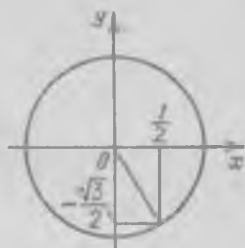


Рис. 64

Решение. Сумма квадратов правых частей системы равна 1. Поэтому точка $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ находится на числовой окружности (рис. 64). Ей соответствует угол (рис. 64) $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где k — произвольное целое число.

Пример 5. Решить уравнение

$$A \cos x + B \sin x = C. \quad (17)$$

Решение. Делим обе части уравнения на $\sqrt{A^2 + B^2}$. Получаем

$$a \cos x + b \sin x = c,$$

где

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как $a^2 + b^2 = 1$, то можно подобрать такой угол α , что $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$. Заданное уравнение тогда можно записать в виде

$$\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x = c$$

или

$$\cos(x - \alpha) = c. \quad (18)$$

Если $|c| > 1$, то уравнение (18), а следовательно и (17), не имеет решений. Если же $|c| \leq 1$, то все решения

записываются формулой

$$x - \alpha = \pm \arccos c + 2k\pi,$$

или

$$x = \alpha \pm \arccos c + 2k\pi,$$

где k — любое целое число.

Пример 6. Решить уравнение

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}.$$

Решение.

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = 1,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos x + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin x = 1,$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

Пример 7. Решить уравнение $7 \sin^2 x - \sin x - 8 = 0$.

Решение. Выполним подстановку $\sin x = a$; решим уравнение $7a^2 - a - 8 = 0$; получим $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{8}{7}$.

Следовательно,

$$\sin x = -1,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k — любое целое число;

$$\sin x = \frac{8}{7},$$

нет решений, так как $\sin x$

не может быть больше 1.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — любое целое число.

Пример 8. Решить уравнение $2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos x = 3$.

Решение.

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \cos x = 3, \quad 2 \cos 2x + \cos x = 3,$$

$$2(2 \cos^2 x - 1) + \cos x = 3, \quad 4 \cos^2 x + \cos x - 5 = 0,$$

$$\cos x = a, \quad 4a^2 + a - 5 = 0, \quad a_1 = -\frac{5}{4}, \quad a_2 = 1;$$

$$\cos x = -\frac{5}{4} \text{ или } \cos x = 1$$

В первом случае нет решений — не может быть $|\cos x| > 1$; во втором случае $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ответ. $2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Другое решение. Заметим, что в уравнении

$$2 \cos 2x + \cos x = 3$$

$2 \cos 2x \leq 2$, $\cos x \leq 1$, следовательно, равенство возможно лишь при одновременном выполнении условий

$$\begin{array}{l|l} 2 \cos 2x = 2 & \text{и} \quad \cos x = 1; \\ \cos 2x = 1, & x = 2k\pi, \\ 2x = 2\pi, & \text{где } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = \pi, & \\ \text{где } n=0, \pm 1, \pm 2, \dots & \end{array}$$

Оба условия выполняются в точках

$$x = 2k\pi, \text{ где } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 0. \quad (19)$$

Решение. Каждое слагаемое в левой части имеет степень 2. Очевидно, что $\cos x \neq 0$, так как в противном случае $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$, но в том и в другом случае равенство (19) неверно. Разделим правую и левую части на $\cos^2 x$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 5 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0, \\ \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = a$:

$$a^2 + 4a - 5 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = -5.$$

Отсюда

$$\begin{array}{l|l} \operatorname{tg} x = 1 & \text{или} \quad \operatorname{tg} x = -5, \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, & x = \operatorname{arctg}(-5) + k\pi, \\ \text{где } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; & \text{где } k=0, \pm 1, \pm 2. \end{array}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + k\pi, \operatorname{arctg}(-5) + k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

§ 2.13. Список основных формул тригонометрии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти все решения уравнения

$$1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.

2. Решить уравнение

$$\sin 2x = \sqrt{3} \sin x.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{4 + \sin x} = -2 \cos x.$$

4. Вычислить $\cos 2x$, если $\sin x = \frac{1}{3}$.

5. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

§ 3.1. Предел последовательности

Метод пределов — это основной метод, с которым оперирует математический анализ.

Чтобы уяснить, что такое предел, начнем с классической задачи. В прямоугольной системе координат задана фигура, ограниченная параболой (рис. 65) $y = x^2$, осью x и прямой $x = 1$. Требуется найти ее площадь. Вот как можно поступить.

Разделим отрезок $[0, 1]$ оси x на n равных частей точками

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$

и построим на каждой из этих частей прямоугольник, левый верхний угол которого достигает параболы. Тогда получим заштрихованные на рис. 11 прямоугольники, сумма площадей которых S_n , очевидно, равна

$$S_n = 0 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \\ = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

*) Мы воспользовались формулой

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

которая может быть введена следующим образом. Сложив левые и правые части равенств $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, соответствующих значениям $k = 1, 2, \dots, n-1$, получим уравнение

$$(n-1)^3 - 1 = 3\sigma_{n-1} + \frac{3(n-1)n}{2} + n-1, \text{ где } \sigma_{n-1} = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2.$$

Из него, получим $\sigma_{n-1} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$

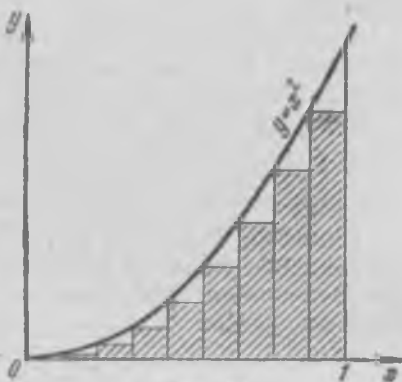


Рис. 65

Представим S_n в виде

$$S_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{3} + \alpha_n. \quad (1)$$

Величина α_n хотя и имеет сложный вид, но обладает замечательным свойством: она стремится к нулю при неограниченном возрастании n . Такие величины называют *бесконечно малыми*.

Бесконечно малой называется переменная величина α_n , зависящая от натурального n , стремящаяся к нулю при неограниченном возрастании n .

Дадим формальное определение бесконечно малой величины.

Величина α_n , зависящая от натурального значения n , называется *бесконечно малой*, если, как бы ни было малое заданное положительное число ε , найдется число $N > 0$ настолько большое, что выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \varepsilon$$

для всех $n > N$.

Сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 65 прямоугольников есть тоже переменная величина, зависящая от натурального n . Мы показали, что она может быть записана следующим образом:

$$S = \frac{1}{3} + \alpha_n,$$

где α_n есть бесконечно малая величина. Но тогда естественно считать, что S_n стремится при неограниченном возрастании n к числу $\frac{1}{3}$, и естественно считать, что $S = \frac{1}{3}$ есть площадь рассматриваемой фигуры. Поставленная задача решена.

В ходе рассуждений мы, во-первых, дали определенные площади рассматриваемой фигуры как числа S , к которому стремится сумма S_n площадей заштрихованных на рис. 65 прямоугольников при неограниченном возрастании n , а во-вторых, нашли это число. Оказалось, что $S = \frac{1}{3}$.

Дадим определение предела. Пусть задана переменная x_n , зависящая от натурального $n = 1, 2, \dots$. Если x_n можно записать в виде суммы

$$x_n = a + \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где a — некоторое постоянное число, α_n — бесконечно малая, то говорят, что x_n имеет своим пределом число a или x_n стремится к a , и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

или

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Приведем примеры переменных величин, зависящих от натурального n

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n}, & y_n &= -\frac{1}{n}, & z_n &= \frac{(-1)^n}{n}, \\ u_n &= q^n, & 0 < q < 1, & & v_n &= \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, \\ w_n &= (-1)^n, & \beta_n &= a. \end{aligned}$$

Переменные x_n , y_n , z_n и u_n — бесконечно малые; x_n и u_n стремятся к нулю, принимая положительные значения, убывая; y_n стремится к нулю, принимая отрицательные значения, возрастая; а z_n стремится к нулю, колеблясь. Величина v_n стремится к 1 ($\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 1$).

Переменная β_n есть на самом деле постоянная, равная для любого n одному и тому же числу a ($\lim \beta_n = a$). Что же касается величины w_n , то она ни к какому пределу не стремится, принимая последовательно значения $+1$ и -1 .

Очевидно, если α_n есть бесконечно малая, то ее предел равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите пределы переменных, представляя их как сумму постоянной и бесконечно малой:

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3}{n^2}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1}$.

§ 3.2. Бесконечно большая величина

Антиподами бесконечно малых величин являются бесконечно большие величины.

Переменная x_n называется *бесконечно большой*, если, как бы ни было велико число $M > 0$, найдется такое N , что $|x_n| > M$ для всех $n > N$.

Если x_n бесконечно большая, то пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Может случиться, что бесконечно большая величина x_n , начиная с некоторого n становится положительной; тогда пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

или отрицательной, тогда пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Вот примеры бесконечно больших величин:

$$x_n = n, \quad y_n = -n, \quad z_n = (-1)^n n, \quad u_n = n^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty.$$

Что же касается величины z_n , то про нее можно написать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

но здесь нельзя символ ∞ заменить ни символом $+\infty$, ни символом $-\infty$. Впрочем, мы часто будем писать ∞ вместо $+\infty$, если нет опасности недоразумений.

§ 3.3. Действия с пределами

Переменные x_n и y_n можно складывать, вычитать, умножать и делить, образуя величины

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n}.$$

В случае частного надо предполагать, что $y_n \neq 0$ для любых $n = 1, 2, 3, \dots$

Справедливые следующие, в сущности очевидные, свойства пределов:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \end{aligned} \quad (2)$$

В частности, если $x_n = c$ постоянная, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right).$$

Эти свойства надо понимать в том смысле, что если существуют пределы, фигурирующие в правых частях равенств (2), то автоматически существуют пределы в левых частях соответствующих равенств и справедливы сами равенства.

Добавим еще, что

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow A \neq 0 \\ y_n \rightarrow \infty}} (x_n y_n) = \infty, \quad \lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n \neq 0}} \frac{1}{x_n} = \infty. \quad (3)$$

Более сложный вопрос возникает при вычислении предела частного $\frac{x_n}{y_n}$, когда и $x_n \rightarrow 0$ и $y_n \rightarrow 0$ или если $x_n \rightarrow \infty$ и $y_n \rightarrow \infty$. В таких случаях заранее невозможно сказать, чему равен предел. В зависимости от индивидуальных свойств переменных x_n и y_n предел может быть любым конечным или бесконечным числом *). Может также случиться, что отношение $\frac{x_n}{y_n}$ не имеет никакого предела, даже бесконечного.

Например, пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$; тогда, очевидно, $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty, \quad \frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Если же $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, то отношение $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ ни к какому пределу не стремится.

Мы рассматривали переменные x_n , зависящие от натурального n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Такие переменные называют *последовательностями*.

*) Символы $+\infty$, $-\infty$, ∞ удобно называть бесконечными числами, хотя это вовсе не числа, и тогда обычные числа называют конечными числами.

Пример 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пояснение. У дроби $\frac{n+3}{n+1}$ как числитель, так и знаменатель стремится к бесконечности, и непосредственно нельзя сказать, к какому пределу она стремится. Однако после деления числителя и знаменателя на n обнаружилось, что числитель стремится к 1 и знаменатель стремится к 1. Это дает возможность воспользоваться формулой о пределе частного.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 100n^3 - 2n^2 + 1) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^4 \left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Пояснение. Сразу неясно, к чему стремится исходное выражение: первый член n^4 стремится к $+\infty$, а член $-100n^3 - 2n^2$ стремится к $-\infty$. Но после вынесения за скобки n^4 все проясняется: множитель $n^4 \rightarrow +\infty$, а $\left(1 - \frac{100}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) \rightarrow 1 \neq 0$. Но тогда произведение стремится к ∞ и даже к $+\infty$ (см. (3)).

Пример 3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n+2})^3 - (\sqrt[3]{n})^3}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt[3]{n+2})^2 + \sqrt[3]{n+2}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} = 0, \end{aligned}$$

потому что знаменатель последней дроби стремится к ∞ .

Нет общего способа вычисления предела разности двух переменных, каждая из которых стремится к $+\infty$. В каждом конкретном случае приходится придумывать свой способ.

Пример 4. Сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q ($q \neq 1$) и первым членом 1

равна

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - q^n \frac{1}{1-q}. \quad (4)$$

Если прогрессия убывающая, т. е. если $|q| < 1$, то второй член правой части (4) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$:

$$-q^n \frac{1}{1-q} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1),$$

который называют *суммой ряда*

$$1 + q + q^2 + \dots \quad (5)$$

(состоящего из бесконечного числа членов!), и при этом пишут

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots,$$

т. е. приписывают выражению (5) число, равное сумме ряда. В этом случае говорят, что *ряд (5) сходится*.

Если $|q| > 1$, то

$$q^n \frac{1}{1-q} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty);$$

при $q = 1$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 1 + \dots + 1 = n \rightarrow \infty.$$

Если же $q = -1$, то

$$S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 1, \dots$$

и S_n не стремится к пределу.

Из сказанного следует, что если условие $|q| < 1$ не выполняется, то S_n не стремится к конечному пределу при $n \rightarrow \infty$. В этом случае говорят, что *ряд (5) расходится*. Ему не приписывают никакого числа.

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на свойства переменных, имеющих предел (конечный и бесконечный), выраженные формулами (2). Надо знать также, что переменная, имеющая предел, равный a , есть сумма $a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая. О самом же понятии бесконечно малой для наших целей достаточно иметь чисто интуитивное представление, выясненное на примерах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Приведите примеры бесконечно малых x_n , зависящих от натурального $n=1, 2, \dots$

2. Что значит, что переменная x_n ($n=1, 2, \dots$) имеет предел, равный числу a ? Приведите примеры.

3. Каким свойством обладает переменная x_n , называемая бесконечно большой? Приведите примеры.

4. Что значит $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$? Приведите примеры.

5. По каким правилам вычисляют пределы суммы, разности, произведения и частного переменных x_n и y_n ?

6. Что называется суммой убывающей геометрической прогрессии?

7. Вычислить пределы:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n^3+1}{n^5-100n-5}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-1}$; 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^3+n}$;

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2-10n^3+2n-1)$; 6) $\lim_{n \rightarrow -\infty} (n^2-10n^3+2n-1)$;

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2-10n^3+1}$.

§ 3.4. Предел $\frac{\sin x}{x}$

Рассмотрим функцию (рис. 66)

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Она определена для всех значений x , за исключением $x=0$. Посмотрим, как изменяется эта функция, когда x

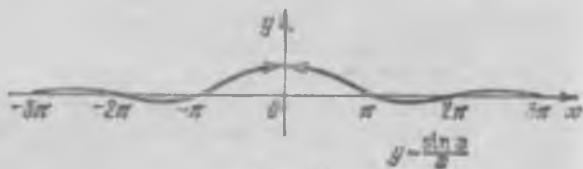


Рис. 66

приближается к нулю все ближе и ближе, оставаясь отличным от нуля. Вот таблица

x	0,50	0,10	0,05
$\frac{\sin x}{x}$	0,9589	0,9983	0,9996

Таблица наводит на мысль, что когда независимая переменная x приближается к 0, оставаясь положительной, функция приближается к 1. Этот факт можно получить из геометрических соображений. На рис. 67 изображена окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Пусть $\angle AOC = \alpha$. Тогда $AB = \sin \alpha$, $AD = \operatorname{tg} \alpha$.

Но тогда, как видно из рисунка (длина дуги окружности больше стягиваемой ею хорды и меньше объемлющей ее ломаной),

$$2AB < 2(\text{дуга } AC) < 2AD.$$

Поэтому

$$2 \sin \alpha < 2\alpha < 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1.$$

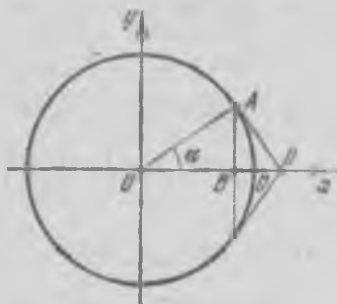


Рис. 67

Если теперь α приближать (стремить) к 0, то функция $\cos \alpha$, как это видно из графика (см. рис. 67), будет приближаться к 1. Но функция $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ находится все время между $\cos \alpha$ и 1. Это показывает, что она стремится к 1, когда α стремится к нулю, оставаясь положительной. Этот факт записывают так:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha > 0}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \quad (6')$$

и говорят, что предел функции $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, когда α стремится к нулю, принимая положительные значения, равен 1.

Но если $\alpha \rightarrow 0$, принимая отрицательные значения, то указанный предел все равно существует и равен 1. Это получается из (6') посредством замены переменной $\alpha = -t$,

в силу которой, если $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha < 0$, то $t \rightarrow 0$, $t > 0$;

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha < 0}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha < 0}} \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad (6'')$$

Равенства (6') и (6'') объединяют в одно:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \quad (6)$$

и говорят, что *предел $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при $\alpha \rightarrow 0$ равен 1*.

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y/2} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(2 \frac{\sin y}{y} \right) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Чтобы свести вычисление этого предела к пределу (6), делаем замену переменной x на y при помощи равенства $y = 2x$. Очевидно, $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{2(x/2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Здесь сделана замена $\frac{x}{2} = y$, где $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$.

2. Повторите вывод формулы (6) и запомните эту формулу.

§ 3.5. Предел функции

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$. Пусть она определена в некоторой *правой окрестности точки a* , за исключением, быть может, самой точки a . Это значит, что она определена для значений x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + \delta$, где δ — некоторое положительное число.

Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет правый предел в точке a , равный A , если из того, что x приближается (стремится) к a , оставаясь в правой окрестности точки a , следует, что $f(x)$ приближается к A . Это записывают так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A.$$

Аналогично, если функция $y=f(x)$ определена в левой окрестности точки a , за исключением, быть может, точки a , т. е. она задана для значений x , удовлетворяющих неравенствам $a-\delta < x < a$ ($\delta > 0$) при некотором $\delta > 0$, то говорят, что она имеет левый предел в точке a , равный числу B , если из того, что x приближается к a , оставаясь в левой окрестности a , следует, что $f(x)$ приближается (стремится) к B . Этот факт записывают так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = B.$$

Если существуют левый и правый пределы функции $y=f(x)$ в точке a и они равны одному и тому же числу A , то говорят, что функция имеет предел в точке a , равный A , и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

В этом случае само собой разумеется, что функция f определена в некоторой полной окрестности $a-\delta < x < a+\delta$ точки a за исключением, быть может, самой точки a .

Функция $y = \frac{\sin x}{x}$, которую мы рассмотрели выше, определена для всех значений x , за исключением $x=0$. Мы уже знаем, что эта функция имеет предел при $x \rightarrow 0$, равный 1.

Формально выражение «при x , стремящемся к a , функция $f(x)$ стремится к A » надо понимать следующим образом: для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

для всех x , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |x - a| < \delta.$$

О функции $f(x)$ говорят, что она *стремится к ∞ при $x \rightarrow a$* , если для значений x , достаточно близких к a , она может сделаться по абсолютной величине больше чем

угодно большого числа $M > 0$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Можно при этом говорить о правом и левом пределе в точке a и заменять символ ∞ на $+\infty$ или $-\infty$, если функция вблизи a положительна или, соответственно, отрицательна.

Например, мы знаем, что

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty \quad (7)$$

и, что точнее (см. рис. 42),

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x > \pi/2}} \operatorname{tg} x = -\infty. \quad (7')$$

Заметим, наконец, что в этих определениях конечное число a (точку числовой прямой) можно заменить на символ ∞ , или $+\infty$, или $-\infty$.

Вспомним, что функция $y = \operatorname{arctg} x$ задана для всех значений x , т. е. на интервале $-\infty < x < \infty$. Для нее справедливы равенства (см. § 2.11 рис. 61)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2.$$

§ 3.6. Действия с пределами функций

Так же как для пределов переменных, пробегающих последовательности, для пределов функций имеют место аналогичные свойства:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x), \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x), \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0). \quad (10)$$

В частности, если $f(x)$ есть постоянная ($f(x) = c$), и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} [c\varphi(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x). \quad (11)$$

Эти свойства снова надо понимать в том смысле, что если существуют конечные пределы в правых частях равенств

(8) — (11), то автоматически существуют пределы в левых частях этих равенств и выполняются сами равенства.

Верны также свойства ($f(x) \neq 0$):

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$;

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

З а м е ч а н и е. В приведенных равенствах a может быть не только конечным, но и бесконечным, т. е. может быть $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow \infty$.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^2 + bx + c) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^2) + \lim_{x \rightarrow x_0} (bx) + \lim_{x \rightarrow x_0} c = \\ &= a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^2 + b \lim_{x \rightarrow x_0} x + c = ax_0^2 + bx_0 + c \end{aligned}$$

при x_0 конечном.

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)} = \frac{4 + 4}{2 + 2} = 2.$$

В этих примерах, чтобы вычислить предел функции при $x \rightarrow a$, достаточно подставить в нее $x = a$. В частности, в примере 2 это можно сделать потому, что как числитель, так и знаменатель стремятся к конечным пределам и при этом предел знаменателя не равен нулю.

Пример 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3} = \infty$.

Здесь нельзя применить свойство (10), выражающее, что предел частного равен частному пределов, потому что предел знаменателя равен нулю. С другой стороны, надо считать очевидным, что если числитель дроби стремится к конечному числу, не равному нулю, а знаменатель стремится к нулю, то дробь стремится к бесконечности.

Пример 4. Требуется вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Решение. В данном случае числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю и соображения, приведенные в примере 3, тоже неприменимы. Но вот как можно поступить. Для любого $x \neq 2$ имеем $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$, а так как при определении предела при $x \rightarrow 2$ совсем не прини-

мается во внимание значение f в точке $x=2$, то

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2).$$

Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $\frac{(x^2-4)}{(x-2)}$, достаточно вычислить предел более простой функции $x+2$. Последний при $x \rightarrow 2$, очевидно, равен 4. Ведь

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 + 2 = 4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ и $\varphi(x) = x+2$ являются разными функциями. Первая из них определена

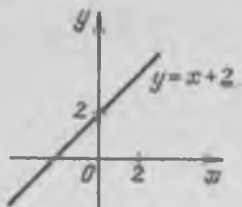


Рис. 68

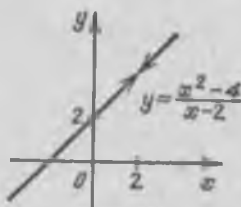


Рис. 69

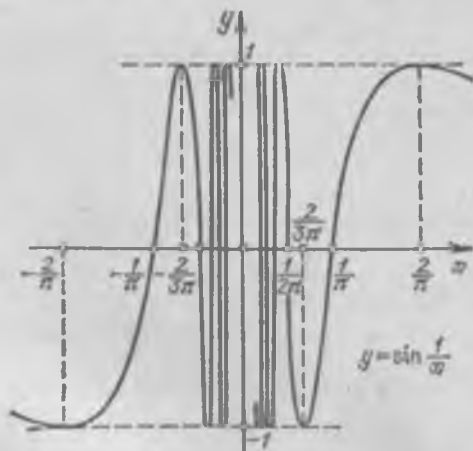


Рис. 70

для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x . Однако при вычислении предела функции при $x \rightarrow 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x=2$, и так как $f(x)=\varphi(x)$ для $x \neq 2$, то (рис. 68 и 69)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

Пример 5. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ (график ее изображен на рис. 70) определена для всех значений $x \neq 0$. Она определена, таким образом, в окрестности точки $x=0$ за исключением самой точки $x=0$. Эта функция не имеет предела при $x \rightarrow 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений $x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) стремится к нулю, и в то же время $f(x_k) = (-1)^k$ не стремится при $k \rightarrow \infty$ ни к какому пределу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте утверждения о пределе суммы, разности, произведения и частного функций.

2. Что значит, что функция стремится

а) к ∞ , б) к $+\infty$, в) к $-\infty$

при $x \rightarrow a$?

3. Вычислить пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \operatorname{ctg} x$; 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{ctg} x$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 20x^2 + 1)$; 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 20x^2 + 1)$;

9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$.

§ 3.7. Непрерывность функции

На рис. 71 изображен график функции $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$). Его естественно назвать *непрерывным* графиком, потому что он может быть нарисован одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) x отрезка $[a, b]$. Близкая к ней другая точка x' отрезка $[a, b]$ может быть записана в виде $x' = x + \Delta x$, где Δx есть число положительное или отрицательное, называемое *приращением x* .

Разность

$$\Delta f = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением функции f* в точке x , соответствующим приращению Δx . На рис. 71 Δy равно длине отрезка BC .

Будем стремить Δx непрерывно к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь график функции $F(x)$, изображенный на рис. 72. Он состоит из двух непрерывных кусков

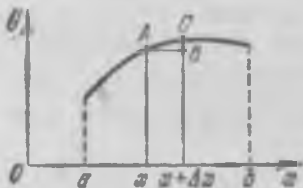


Рис. 71

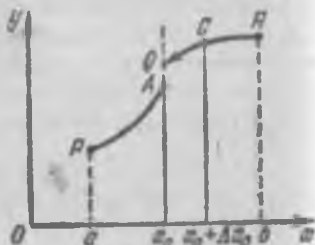


Рис. 72

PA и QR . Однако эти куски не соединены непрерывно, и потому график естественно назвать *разрывным*. В точке x_0 нам надо как-то определить нашу функцию; условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0 ; в знак этого точка A изображена на графике жирно, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция f была бы двужаночной в точке x_0 .

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x_0) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить непрерывно к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0 , стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0 , оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ .

После этих рассмотрений естественно ввести следующее определение. Функция f , заданная на отрезке $[a, b]$, называется *непрерывной в точке x этого отрезка*, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx *), стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю при $\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$. Это свойство (непрерывности в x) записывается в виде соотношения (12) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (13)$$

Запись (13) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его. В частности, Δx может пробегать любую стремящуюся к нулю последовательность, значения которой могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке x этого отрезка, т. е. в этой точке для нее не выполняется свойство (13) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной в точке x* .

Функция, изображенная на рис. 71, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$, функция же, изображенная на рис. 72, очевидно, непрерывна в любой точке x отрезка $[a, b]$ за исключением точки x_0 , потому что для последней соотношение (13) не выполняется, когда $\Delta x_0 \rightarrow 0$, оставаясь положительным.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной на нем*.

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции).

Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s , пройденного телом, от времени t . Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризую-

*) Здесь имеется в виду Δx такое, что $x + \Delta x$ принадлежит $[a, b]$.

щуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды — твердые, жидкие или газообразные, например металлы, воду, воздух. На самом деле всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной, без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности, естественно, играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

Из (12) следует

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0) + (f(x) - f(x_0))] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f(x_0) + 0 = f(x_0),\end{aligned}$$

и мы получили равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (14)$$

которое может служить другим эквивалентным определением непрерывности f в точке x_0 : если функция f непрерывна в точке x_0 , то она должна быть определена в окрестности этой точки, в том числе в самой точке x_0 , должен существовать предел f в точке x_0 и должно выполняться равенство (14).

Равенство (14) можно еще записать так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x). \quad (15)$$

Говорят, что если функция f непрерывна в точке x_0 , то «предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен f от $\lim x$ », или еще говорят, что в этом случае символы f и $\lim$ перестановочны.

§ 3.8. Элементарные функции

Функции x^p , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и функции a^x и $\lg_a x$, которые рассматриваются в следующей главе, называются *простейшими элементарными функциями*. Они непрерывны на областях их определения (интервалах или отрезках). Это надо учитывать при вычислении пределов этих функций. Справедливы, например, равенства:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n \quad (n = 1, 2, \dots, -\infty < x_0 < \infty);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} x^p = x_0^p \quad (p \neq 0, 0 < x_0 < \infty);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad (a > 0, a \neq 1, -\infty < x_0 < \infty);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad (a > 0, a \neq 1, 0 < x_0 < \infty);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \quad \left(x_0 \neq \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi, \right. \\ \left. k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right);$$

$$8) \lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \quad (-1 \leq x_0, x \leq 1);$$

$$9) \lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad (-1 \leq x_0, x \leq 1);$$

$$10) \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0 \quad (-\infty < x_0 < \infty).$$

Если простейшие элементарные функции комбинировать, разрешая применять конечное число раз операции сложения, вычитания, умножения, деления и функции от функции, то будем получать функции, которые называются *элементарными функциями*, например, $2 + x^3$, $\sqrt{1 - x^2}$, $\cos^3 x^2$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\frac{2-x}{x+1}$ — элементарные функции.

§ 3.9. Непрерывность сложной функции

При вычислении пределов функции надо учитывать, что если функция $x = \varphi(u)$ непрерывна в точке u_0 , а функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \varphi(u_0)$, то функция

$$F(u) = f[\varphi(u)]$$

непрерывна в точке u_0 . Ведь

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow u_0} F(u) &= \lim_{u \rightarrow u_0} f[\varphi(u)] = \lim_{x = \varphi(u) \rightarrow x_0} f[\varphi(u)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = F[\varphi(u_0)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Пример 1. Функцию $y = \sin x^2$ можно записать через две непрерывные функции $y = \sin u$, $u = x^2$, поэтому она тоже непрерывна для всех x .

Пример 2. Функцию

$$y = \sqrt{1-x}$$

можно записать в виде цепи функций

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1-v, \quad v = x^2.$$

Первая из этих трех функций непрерывна для $u \geq 0$, вторая непрерывна для всех u , и третья непрерывна для всех x . Это показывает, что исходная функция непрерывна для всех тех x , для которых $1-x^2 \geq 0$, т. е. для x , удовлетворяющих неравенствам $-1 \leq x \leq 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выяснить, для каких x непрерывны функции $\cos^3 x$, $\cos 3x$, $\operatorname{tg} 2x$, $x^2 + 2x - 1$, $\frac{x+3}{x-1}$.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которыми оперирует математический анализ.

§ 3.10. Разрывные функции

Разрывные функции описывают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками.

Пример 1. Упругий шарик двигался прямолинейно и равномерно со скоростью v_0 . В момент времени t_0 он ударился о стенку и после этого стал двигаться в противоположном направлении с той же скоростью v_0 . Зависимость скорости шарика от времени t изображена графиком на рис. 73, разрывным в точке t_0 .

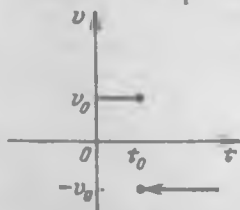


Рис. 73

Практически можно считать, что скорость в момент t_0 изменилась мгновенно: в момент t_0 она еще равнялась v_0 , а при $t > t_0$ стала равной $-v_0$.

График изображает функцию $v(t)$, определяемую следующими равенствами:

$$v(t) = \begin{cases} v_0 & (t \leq t_0), \\ -v_0 & (t > t_0). \end{cases}$$

Она разрывна при $t = t_0$ и непрерывна для остальных $t (t \neq t_0)$.

Пример 2. Зависимость $Q = f(t)$ между температурой t одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий находящегося в ней тепла, когда t изменяется между -10° и $+10^\circ$, если принять условно, что при -10° величина $Q = 0$, выражается следующими формулами:

$$f(t) = \begin{cases} 0,5t + 5, & -10 \leq t < 0, \\ t + 85^*), & 0 < t \leq 10. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t = 0$ эта функция оказывается неопределенной: многозначной; можно для удобства условиться, что при $t = 0$ она принимает вполне определенное значение, например $f(0) = 45$. Функция $Q = f(t)$, очевидно, разрывная при $t = 0$, изображена на рис. 74.



Рис. 74

На рис. 66 изображен график функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Она определена и непрерывна для всех $x \neq 0$. Непрерывность следует из того, что функции $y = \sin x$ и $y = x$ отдельно непрерывны, поэтому их частное тоже есть непрерывная функция для тех x , для которых знаменатель не равен нулю, т. е. для всех x , исключая $x = 0$.

Из графика видно, и мы это подкрепили выше вычислениями, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Положив $f(0) = 1$, мы получим, что функция $f(x)$ будет определена и непрерывна для всех x , в том числе и $x = 0$.

*) Удельная теплота таяния льда при 0°C равна 80 кал. на грамм.

Обратим внимание на график функции $y = \sin \frac{1}{x}$, изображенный на рис. 70. Эта функция не определена при $x=0$, и ее пределы в точке $x=0$ (правый и левый) не существуют. Следовательно, функция $\sin \frac{1}{x}$ будет иметь разрыв в точке $x=0$ при любом доопределении ее в этой точке.

Часто встречаются функции $f(x)$, непрерывные на некотором интервале, за исключением отдельных точек x_0 , где

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Говорят, что в таких точках функция f обращается в бесконечность. Например, функция

$$\frac{x^2 + 1}{(x-2)(x+3)}$$

непрерывна на $(-\infty, \infty)$, за исключением точек $x=2$, $x=-3$, где она обращается в бесконечность:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x+3)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x+3)} = \infty.$$

З а м е ч а н и е. Надо знать два определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 : 1) на языке приращений (если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta y \rightarrow 0$) и 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Надо знать

также, что если функция $f(x)$ непрерывна в любой точке интервала (отрезка), то ее график непрерывен на этом интервале (отрезке), и обратно, непрерывность графика $f(x)$ на интервале (отрезке) влечет непрерывность $f(x)$ во всех его точках. Функция разрывна в точке x_0 , если она не является непрерывной в ней.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Что такое приращение Δy функции $y = f(x)$ в точках x , соответствующее приращению аргумента Δx ?
2. Сформулируйте непрерывность функции $y = f(x)$
 - а) на языке свойств ее графика,
 - б) при помощи Δy и Δx .
3. Если функция f непрерывна в точке x_0 , то как она ведет себя при $x \rightarrow x_0$?
4. Приведите примеры разрывных функций.

5. Перечислите простейшие элементарные функции.

6. Как определяются элементарные функции? Приведите примеры.

7. Приведите примеры функций, обращающихся в точку в бесконечность.

8. В каких точках обращаются в бесконечность функции

$$\frac{1}{x^3}, \quad \frac{x+1}{x^3-3x+2}, \quad \frac{x^2+x+2}{x-3}, \quad \frac{x-2}{x+5}?$$

9. Вычислить пределы

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^3-x-1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^3-x-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg 4x}{x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ И ОБЩАЯ СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Свойства функции a^x

Показательная функция a^x для положительного числа a , не равного 1 ($a > 0$, $a \neq 1$), определялась в школе на различных этапах обучения для x натуральных, целых и рациональных. Ниже она будет определена для произвольных действительных x .

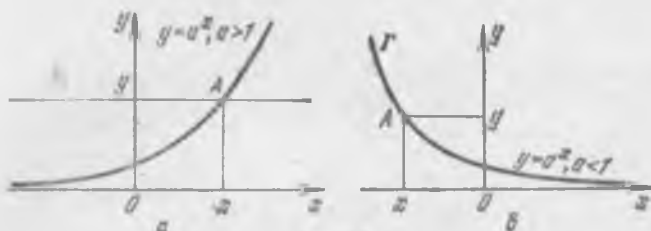


Рис. 75

Имеют место следующие фундаментальные свойства показательной функции:

$$a^0 = 1, \quad (1)$$

$$a^x > 0 \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2)$$

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad (-\infty < x, y < \infty), \quad (3)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (4)$$

и, если $a > 1$ (рис. 75, а), то

$$a^x < a^y \quad (-\infty < x < y < \infty), \quad (5)$$

$$a^x \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

$$a^x \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7)$$

Если же $a < 1$ (рис. 75, б), то в силу равенства

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x},$$

и из (4), (5), (6) следует, что

$$a^x > a^y \quad (-\infty < x < y < \infty), \quad (5')$$

$$a^x \rightarrow 0, \quad \text{если} \quad x \rightarrow +\infty, \quad (6')$$

$$a^x \rightarrow +\infty, \quad \text{если} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (7')$$

Кроме того, справедливо свойство: *показательная функция a^x непрерывна на всей действительной оси.*

На рис. 75 изображены графики a^x при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

§ 4.2. a^x для целых и рациональных x

Если n — натуральное число, то число a^n определяется как произведение $a^n = a \dots a$ из n сомножителей, каждый из которых равен a , а число a^{-n} — при помощи равенства

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

По определению $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Этим функция a^x определена для любых целых n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Свойства (1) — (7) для целых x проверяются легко. Если q — натуральное, то число $a^{1/q}$ определяется как арифметическое значение корня q -й степени из a , т. е. $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ есть такое неотрицательное число, q -я степень которого равна a :

$$(a^{1/q})^q = a.$$

На самом деле это число положительное, потому что q -я степень нуля есть нуль, а в данном случае $a > 0$.

Возникает вопрос о существовании числа $a^{1/q}$, т. е. есть ли на самом деле такое положительное число, q -я степень которого равна a . Да, есть. Убедимся в этом. Функция

$$y = x^q,$$

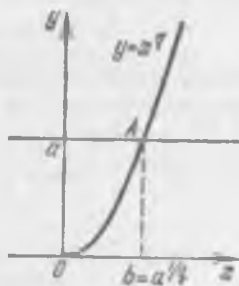


Рис. 76

где q — натуральное число, имеет для значений $x \geq 0$ график Γ вида, как на рис. 76. Ордината y точек Γ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, когда ее абсцисса непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$. Проведем выше оси x прямую, параллельную оси x , на расстоянии, равном a .

Она пересекает Γ в одной-единственной точке A , абсциссу которой обозначим через b :

$$b^q = a.$$

Следовательно,

$$b = a^{1/q}.$$

Мы доказали существование числа $b = a^{1/q}$ графическим методом. Можно доказать это и формально, не обращаясь к графику. Число b —единственное: любое другое число, возведенное в степень q , дает число либо большее, чем a , либо меньшее, чем a .

Из единственности вытекает следующий факт: если A и B —положительные числа и

$$A^q = B^q,$$

то

$$A = B.$$

В самом деле, A и B суть арифметические значения корня q -й степени из одного и того же числа. Но тогда $A = B$, потому что арифметическое значение корня q -й степени из положительного числа единственно.

Пусть теперь p/q есть произвольное положительное рациональное число (p и q —целые, $q > 0$).

По определению

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q} \quad \text{или} \quad a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}. \quad (8)$$

Здесь первое равенство дает определение $a^{p/q}$, второе же можно доказать. В самом деле, если возвести третий член в (8) в q -ю степень, то получим a^p , а если возвести второй член (8) в q -ю степень, то тоже получим a^p :

$$(\sqrt[q]{a})^{pq} = [(\sqrt[q]{a})^q]^p = a^p.$$

Этим функция a^x определена для любых рациональных x . Ее свойства (1)—(7) п. 4.1 для рациональных x , y вытекают из соответствующих свойств корней. Например, если $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$ дроби (q, s —натуральные и p, r —целые), то

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{rq}{sq}} = a^{\frac{ps}{qs}} \sqrt[q]{a^{rq}} = \\ &= \sqrt[q]{a^{\frac{ps}{s} + rq}} = a^{\frac{ps + rq}{qs}} = a^{x+y}. \end{aligned}$$

§ 4.3. a^x для действительных x

Показательной функцией a^x называется непрерывная функция, определенная на действительной оси x , вычисляемая для рациональных значений $x = \frac{p}{q}$ по формуле

$$a^x = \sqrt[q]{a^p}.$$

Из этого определения следует, что если x есть иррациональное число, то для того чтобы вычислить a^x , надо взять любую последовательность рациональных чисел r_k , стремящуюся к x ($r_k \rightarrow x$), и положить a^x равным пределу переменной a^{r_k} , когда $r_k \rightarrow x$, т. е.

$$\lim_{r_k \rightarrow x} a^{r_k} = a^x. \quad (9)$$

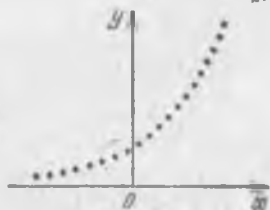


Рис. 77

В системе координат xOy мысленно отметим все точки (x, a^x) для рациональных значений (рис. 77).

График изображен пунктирной линией, чтобы подчеркнуть, что он состоит из точек, соответствующих только рациональным значениям x . Это точки вида $(\frac{p}{q}, \sqrt[q]{a^p})$, где p, q — целые и $q \neq 0$.

Оказывается, этот график можно продолжить для любых иррациональных x единственным образом, так что пунктирная линия превращается в непрерывную линию, в график непрерывной функции a^x .

Доказательство свойств (1)–(7) п. 4.1 для действительных x, y может быть получено на основании того, что эти свойства верны для рациональных x, y , применением метода пределов.

Например, пусть x и y — данные действительные числа; вводим две последовательности рациональных чисел r_k и ρ_k , для которых

$$r_k \rightarrow x, \quad \rho_k \rightarrow y.$$

Тогда

$$a^x a^y = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{r_k} \lim_{k \rightarrow \infty} a^{\rho_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (a^{r_k} a^{\rho_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{r_k + \rho_k} = a^{x+y},$$

и мы получим свойство (3) для действительных x, y .

Замечание. Сформулированное выше определение показательной функции требует обоснования. Именно,

требуется доказать, что существует, и притом единственная, функция, указанная в определении.

Ниже выводится неравенство (неравенство Бернулли), на основе которого возможно провести это доказательство.

§ 4.4. Неравенство Бернулли

Рассмотрим функцию a^x на отрезке $[c, d]$. Положим $M = a^d$. Справедливо неравенство ($a > 1$)

$$|a^y - a^x| \leq 2M(a-1)|x-y|, \quad c \leq x, \quad y \leq d, \quad |x-y| < 1, \quad (10)$$

называемое *неравенством Бернулли*.

Это неравенство показывает, что если приращение $y-x$ аргумента x мало, то соответствующее ему приращение показательной функции $a^y - a^x$ тоже мало, т.е. функция a^x непрерывна.

Пример. Вычислить приближенно $3^{\sqrt{2}}$. Определить абсолютную погрешность.

Решение. На микрокалькуляторе получаем

$$\sqrt{2} \approx 1,4142136,$$

$$3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4142136} = 4,728817 \approx 4,72882.$$

Абсолютная погрешность не превышает ($a=3$, $|x-y| < 10^{-1}$, $\sqrt{2} < 2 = d$, $M < 3^2$):

$$2M(a-1) \cdot 10^{-1} \leq 2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1} = 36 \cdot 10^{-1} < 10^{-0}.$$

Поэтому результат естественно округлить до пятого знака после запятой:

$$3^{\sqrt{2}} \approx 4,72882.$$

Дадим обоснование неравенства (10). Отметим прежде всего неравенство

$$(1+\alpha)^N \geq 1+N\alpha \quad (\alpha > 0, \quad N=1, 2, 3, \dots). \quad (11)$$

При $N=1$ оно тривиально. Допустим теперь, что оно верно при $N-1$:

$$(1+\alpha)^{N-1} \geq 1+(N-1)\alpha.$$

Тогда оно верно и при N :

$$\begin{aligned} (1+\alpha)^N &= (1+\alpha)^{N-1} (1+\alpha) \geq [1+(N-1)\alpha] (1+\alpha) = \\ &= 1+N\alpha+(N-1)\alpha^2 \geq 1+N\alpha. \end{aligned}$$

Мы доказали неравенство (11) по индукции (см. далее § 11.2).

Пусть теперь $a > 1$ и N — натуральное число, тогда $a^{1/N} > 1$ и

$$a^{1/N} = 1 + \alpha \quad (\alpha > 0), \quad a = (1 + \alpha)^N \geq 1 + N\alpha,$$

$$a - 1 \geq N\alpha, \quad \frac{a-1}{N} \geq \alpha.$$

Следовательно, $a^{1/N} - 1 \leq \frac{a-1}{N}$.

Пусть теперь h — произвольное рациональное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < h < 1$. Подберем натуральное N так, чтобы

$$\frac{1}{N+1} \leq h < \frac{1}{N}.$$

Тогда

$$a^h - 1 < a^{1/N} - 1 \leq \frac{a-1}{N} = \frac{a-1}{N+1} \frac{N+1}{N} < 2(a-1)a, \quad (12)$$

потому что

$$\frac{1}{N+1} \leq h, \quad \frac{N+1}{N} = 1 + \frac{1}{N} < 2.$$

Пусть теперь x и y — рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $|x-y| < 1$, $c \leq x$, $y \leq d$ и $M = a^d$; тогда на основании неравенства (12), считая, что $y > x$ и $y-x = h$, получаем

$$|a^x - a^y| = a^y - a^x = a^x (a^{y-x} - 1) < \\ < M \cdot 2(a-1)(y-x) = 2M(a-1)|x-y|.$$

Мы доказали неравенство Бернулли для рациональных чисел x , y ($M = a^d$, $c \leq x$, $y \leq d$, $0 < y-x < 1$):

$$|a^x - a^y| < 2M(a-1)|x-y|.$$

Если x — рациональное число и переменная y_k ($k=1, 2, \dots$), пробегаящая рациональные числа, стремится к x , то имеет место неравенство $|a^x - a^{y_k}| < 2M(a-1)|x-y_k|$. Правая его часть при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю ($x-y_k \rightarrow 0$), следовательно, и левая. Откуда для рациональных x

$$a^x = \lim_{y_k \rightarrow x} a^{y_k}.$$

Если теперь x — произвольное иррациональное число, то для него тоже можно подобрать стремящуюся к нему переменную y_k ($y_k \rightarrow x$) и доказать, что переменная a^{y_k} имеет предел. Естественно его обозначить через a^x . Этим дается определение показательной функции для иррационального x . Доказательство существования предела основано на уже выведенном неравенстве Бернулли для рациональных x , y . При этом приходится обращаться к более развитой теории пределов чем та, которую мы получили в этой книжке. Переход в (10) от рациональных x , y к действительным нетруден.

Пример 1. Вычислить $2^{1/2}$ с помощью микрокалькулятора.

Решение.

$$\boxed{2} \boxed{y^x} \boxed{1} \boxed{,} \boxed{7} \boxed{=} \boxed{3,2490096},$$

результат выписан с точностью до единицы седьмого разряда после запятой, т. е. абсолютная погрешность не превышает 10^{-7} .

Пример 2. Вычислить на микрокалькуляторе $7^{1/11}$.

Решение.

$$\frac{1}{11} \approx \boxed{1} \boxed{\div} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{=} \boxed{0,0909091} \text{ (записываем),}$$

$$\begin{aligned} 7^{\frac{1}{11}} &\approx 7^{0,0909091} = \\ &= \boxed{7} \boxed{y^x} \boxed{0} \boxed{.} \boxed{0} \boxed{9} \boxed{0} \boxed{9} \boxed{0} \boxed{9} \boxed{1} \boxed{=} \boxed{1,19351}. \end{aligned}$$

В оценке Бернулли приближения $7^{1/11} \approx 7^{0,0909091}$ имеем $M = 2^{1/11} \leq 2$, $a = 7$, $|x - y| < 10^{-7}$, следовательно, абсолютная погрешность этого приближения не больше

$$2M(a-1)|x-y| < 2 \cdot 2(7-1) \cdot 10^{-7} = 24 \cdot 10^{-7} \leq 10^{-6}.$$

Поэтому мы оставили только 5 цифр у окончательного результата.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для какого числа a определяется показательная функция a^x ?
2. Определите a^x для x натуральных, целых отрицательных, рациональных.
3. Дайте определение функции a^x для любого действительного числа.
4. Сформулируйте неравенство Бернулли.
5. Вычислите на микрокалькуляторе числа $2^{3,7}$, $2^{3,1}$, $3^{0,33}$, $4^{0,27}$. Оцените погрешность приближения.
6. Вычислить на микрокалькуляторе числа $2^{\sqrt[3]{3}}$, $3^{\sqrt[3]{7}}$, $3^{\sqrt[3]{2}}$, $5^{1/7}$.

§ 4.5. Число e

Рассмотрим переменную x_n , пробегающую последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \dots$

Определение. Переменная x_n ограничена сверху числом M , если выполняются неравенства $x_n \leq M$ для любых $n = 1, 2, \dots$

Определение. Переменная x_n не убывает, если для любого n

$$x_n \leq x_{n+1}.$$

Теорема 1. Если переменная x_n не убывает и ограничена сверху числом M , то она имеет предел, равный некоторому числу a , не превышающему M :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \leq M.$$

Наметим доказательство.

Если на числовой прямой отметить точки $x_1, x_2, x_3, \dots$ и точку M (рис. 78), то каждая последующая точка x_{n+1} будет находиться правее предыдущей x_n или совпадать



Рис. 78

с ней и в то же время все точки x_n будут находиться левее M или, может быть, какая-либо из них совпадает с M (но тогда, очевидно, и все последующие за ней совпадут с M) и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$.

Так как номеров n бесконечное множество, то точки x_n обязательно должны сгущаться около некоторой точки $a \leq M$, которая и будет пределом x_n .

Замечание 1. В теореме 1 можно считать, что переменная x_n ограничена снизу числом m ($m \leq x_n, n = 1, 2, \dots$) и не возрастает ($x_{n+1} \leq x_n$), и тогда тоже существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq m$.

Рассмотрим переменную

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (13)$$

Вот таблица первых ее значений:

$$u_1 = 2; \quad u_2 = 2,25; \quad u_3 \approx 2,37; \quad u_4 \approx 2,44; \quad \dots$$

Мы видим, что для малых n переменная u_n возрастает. Можно установить и в общем случае, разлагая выражение (13) по формуле бинома Ньютона (см. п. 11.2), что (доказательство см. ниже)

$$u_n < u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Кроме того, с помощью разложения по биному Ньютона доказывается, что переменная u_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) огра-

нична сверху числом 3. Но тогда на основании теоремы 1 переменная u_n имеет предел, не превышающий 3.

Этот предел называется *числом e* . Он равен *)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828 \dots \quad (14)$$

Если положить в формуле (14) $\alpha = 1/n$, то получим, что при $n \rightarrow \infty$ будет $\alpha \rightarrow 0$, и, следовательно,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e. \quad (15)$$

Мы установили формулу (15) в предположении, что α стремится к нулю по закону $\alpha = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Но можно доказать, что эта формула (и этим мы будем пользоваться в дальнейшем) верна при любом способе стремления α к нулю.

Докажем приведенные выше утверждения.

Согласно формуле бинома Ньютона для натурального n имеют место равенства

$$\begin{aligned} u(n) &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \\ u(n+1) &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^n}. \end{aligned}$$

Члены суммы $u(n)$ меньше соответствующих членов $u(n+1)$ и, кроме того, $u(n+1)$ имеет на один (последний) положительный член больше чем $u(n)$. Поэтому $u(n) < u(n+1)$ ($n = 1, 2, \dots$) и переменная $u(n)$ возрастает.

Далее

$$\begin{aligned} u(n) &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\ &= 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

*) Читатель, который ознакомится с гл. 9, может вычислить самостоятельно число e с любой точностью.

Это показывает, что переменная $u(n)$ ограничена сверху числом 3.

Таким образом, переменная $u(n)$ возрастает и ограничена сверху числом 3. По теореме 1 она имеет предел, не превышающий 3, который мы называем числом e .

Мы доказали равенство (14), когда n стремится к бесконечности, пробегая натуральные числа. Но равенство (14) верно и тогда, когда n стремится к ∞ любого знака, и притом пробегая любые числовые значения, не обязательно натуральные. Докажем это.

Пусть сначала n стремится к $+\infty$, пробегая какие-либо значения не обязательно целые. Обозначим через $[n]$ целую часть n . Таким образом, например,

$$[7, 3] = 7, \quad [7] = 7.$$

Для любого положительного числа n имеют место очевидные неравенства

$$[n] \leq n < [n] + 1.$$

Но тогда

$$\left(1 + \frac{1}{[n] + 1}\right)^{[n] + 1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^{[n] + 2} < e \left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2.$$

Деля на $1 + \frac{1}{n}$, получим неравенства

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{[n] + 1}\right)^{[n] + 1}}{1 + \frac{1}{n}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \frac{\left(1 + \frac{1}{[n]}\right)^2}{1 + \frac{1}{n}}. \quad (16)$$

Будем n стремиться к $+\infty$. Тогда переменное число $[n] + 1$ будет тоже стремиться к $+\infty$, пробегая натуральные числа. Но тогда числитель в левой части соотношений (16) стремится к e . Что же касается знаменателя, то он стремится к 1. Следовательно, левая и правая части в (16) стремятся к e , но тогда средняя часть, равная $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, тоже стремится к e . Этим доказана верность равенства (14), когда положительное n стремится к $+\infty$ по любому закону.

Пусть теперь $n \rightarrow -\infty$, тогда $m = -n \rightarrow +\infty$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)\right] = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Теперь уже равенство (14) доказано как в случае $n \rightarrow +\infty$, так и в случае $n \rightarrow -\infty$, где числа n не обязательно целые.

Введем теперь новую переменную α при помощи равенства

$\alpha = \frac{1}{n}$. Тогда, очевидно, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, и мы доказали формулу (15), когда α стремится к нулю по любому закону.

Пример 1. Если $0 < q < 1$, то переменная q^n убывает ($q^{n+1} < q^n$) и ограничена снизу числом 0 ($0 < q^n$). Поэтому на основании замечания 1 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = A \geq 0.$$

На самом деле $A = 0$, потому что

$$A = \lim_{n+1 \rightarrow \infty} q^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n \cdot q) = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \cdot q = Aq$$

и $A = Aq$, т. е. $A(1 - q) = 0$, откуда $A = 0$.

Пример 2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 = \\ &= \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^2 = e^2. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить пределы

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad 4) \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + 2\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

2. Сформулируйте теорему о существовании предела ограниченной неубывающей последовательности.

3. Что такое число e ? Дайте несколько определений.

4. Нарисуйте схематические графики функций e^x и e^{-x} .

§ 4.6. Логарифмическая функция

Пусть a есть положительное число, не равное единице ($0 < a$, $a \neq 1$), и y есть произвольное положительное число ($0 < y < \infty$). Логарифмом y при основании a называется такое число $x = \log_a y$, что если возвести a в степень x , то получается y . Таким образом,

$$a^x = y. \quad (17)$$

Поэтому можно еще написать

$$a^{\log_a y} = y, \quad 0 < y < \infty, \quad (18)$$

или еще

$$\log_a a^x = x, \quad -\infty < x < \infty. \quad (19)$$

Примеры

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0,$$

$$\log_2 8 = \log 2^3 = 3,$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{8} \right) = \log_2 2^{-3} = -3, \quad \log_{10} 10^k = k,$$

$$\log_a 1 = 0,$$

$$\log_{10} 10 = 1,$$

$$\log_{10} 100 = 2,$$

$$\log_{10} 1000 = 3,$$

$$\log_{10} 0,1 = -1,$$

$$\log_{10} 0,01 = -2.$$

Возникает вопрос, всегда ли решается относительно x уравнение (17), или, что все равно, существует ли для положительного числа y его логарифм при основании a . Да, существует, и единственный. В этом мы убедимся на основании свойств функции a^x , которые мы сейчас перечислим (будем считать, что $a > 1$):

1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$, т. е. имеет непрерывный график;

2) a^x — возрастающая функция, т. е. $a^x < a^y$, если $x < y$;

3) $a^x \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$;

4) $a^x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

На рис. 75, а изображен график функции a^x ($a > 1$). В силу 1) это непрерывная кривая, распространенная над всей осью x . В силу 2), 3), 4), когда абсцисса x точки графика возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, ее ордината y возрастает от 0 до $+\infty$.

Значение x , удовлетворяющее уравнению (17) для данного $y > 0$, можно получить следующим образом. На оси ординат отложим вверх от начала координат на расстоянии, равном y , точку и через эту точку проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая обязательно пересечет график, и притом в единственной точке A . Абсцисса x точки A и решает, очевидно, уравнение (17) для данного y (см. рис. 75, а).

Мы доказали существование логарифма y ($y > 0$) при основании a , применив графический метод. При этом мы получили новую функцию x , зависящую от y , которая называется *логарифмом y при основании a* и обозначается так: $x = \log_a y$.

Итак,

$$x = \log_a y \quad (0 < y < \infty)$$

есть функция, приводящая в соответствие каждому положительному числу y такое x , что $y = a^x$, т. е. выполняется равенство (18).

Благодаря свойствам (18) и (19) функция $\log_a y$ называется обратной по отношению к функции a^x , а функция a^x называется обратной по отношению к $\log_a y$ (см. § 2.10).

Логарифмическая функция $x = \log_a y$ при $a > 1$ обладает следующими, вытекающими непосредственно из приведенных рассмотрений свойствами:

- 1) $\log_a y$ непрерывна на $(0, \infty)$;
- 2) $\log_a y$ — возрастающая функция, т. е.

$$\log_a y_1 < \log_a y_2 \quad (0 < y_1 < y_2 < \infty)$$

для любых указанных y_1, y_2 ;

$$3) \log_a y \rightarrow \infty \text{ при } y \rightarrow +\infty;$$

$$4) \log_a y \rightarrow -\infty \text{ при } y \rightarrow 0.$$

Если в формуле $x = \log_a y$ ($0 < y < \infty$) поменять местами x и y , то получим запись логарифмической функции в обычном виде:

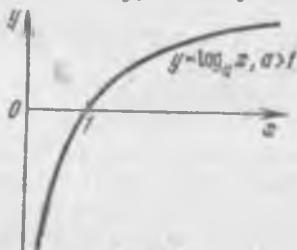


Рис. 79

$$y = \log_a x \quad (0 < x < \infty),$$

где x — аргумент, а y — функция. График функции $y = \log_a x$ в системе координат xOy получим, если в этой системе изобразить график функции

$$x = a^y \quad (-\infty < y < \infty)$$

(рис. 79), т. е. множество точек вида (a^y, y) или, так как

$$x = a^y, \quad y = \log_a x,$$

то множество точек $(x, \log_a x)$.

Таким образом, кривая на рис. 79 есть не только график функции $x = a^y$ ($-\infty < y < \infty$), но и график функции $y = \log_a x$ ($0 < x < \infty$).

Можно еще сказать, что при $a > 1$ функция $\log_a x$ отображает интервал $(0, \infty)$ значений x на интервал $(-\infty, \infty)$ значений y .

Пусть теперь a удовлетворяет неравенствам $0 < a < 1$. Выпишем нужные нам свойства функции $y = a^x$:

- 1) a^x непрерывна на $(-\infty, \infty)$;
- 2) a^x — убывающая функция, т. е. $a^x > a^y$ ($x < y$);
- 3) $a^x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$;
- 4) $a^x \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$.

График a^x при $0 < a < 1$ изображен на рис. 75, б. Мы видим, что функция $y = a^x$ и в случае $0 < a < 1$ отобра-

жает интервал $(-\infty, \infty)$ значений x на интервал $(0, \infty)$ значений y .

Мы, как и выше, можем задать произвольное положительное (т. е. принадлежащее к интервалу $(0, \infty)$) значение y и привести ему в соответствие такое x , что будет выполняться равенство $x = \log_a y$.

Чтобы получить x по данному y , надо взять на оси ординат (см. рис. 75, б) точку, имеющую ординату y , и провести через эту точку прямую, параллельную оси x . Последняя пересечет график Γ в единственной точке A , абсцисса которой и есть искомое значение x , т. е. такое x , для которого $y = a^x$.

Свойства функции $\log_a y$ при $0 < a < 1$ такие же, как в случае $a > 1$; однако есть исключение. Теперь, когда y возрастает от 0 до $+\infty$, соответственно x убывает от $+\infty$ до $-\infty$:

$$\log_a y_1 > \log_a y_2 \quad (0 < y_1 < y_2 < \infty).$$

Выпишем формулы (18) и (19):

$$x = a^{\log_a a^x} \quad (0 < x < \infty), \quad (20)$$

$$\log_a a^x = x \quad (-\infty < x < \infty). \quad (21)$$

Мы заменили в (18) y на x , но это не имеет значения.

Число a может быть здесь любым положительным числом, отличным от 1 ($a \neq 1$). Равенства (20) и (21) называют тождествами на указанных там интервалах, потому что они имеют место для любых x , принадлежащих к указанным интервалам.

Из равенства (20) на основании свойств показательной функции следует для любых $x, y > 0$:

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}. \quad (22)$$

Но тогда

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad (23)$$

$$(0 < x, y < \infty, a > 0, a \neq 1).$$

Из (22) следует (23), потому что если $a^{u_1} = a^{u_2}$, то $u_1 = u_2$. Если бы $u_1 \neq u_2$, то числа a^{u_1} и a^{u_2} были бы различны. Но можно и формально получить (23), взяв логарифм при основании a от левой и правой частей (22), т. е. воспользовавшись формулой (21).

Если в (23) заменить x на $\frac{x}{y}$, то получим

$$\log_a x = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y.$$

или

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (24)$$

$$(0 < x, y < \infty, a > 0, a \neq 1).$$

Далее

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x},$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad (0 < x, y < \infty, a > 0, a \neq 1). \quad (25)$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\log_a b \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$

$$\log_a b \log_b a = 1. \quad (26)$$

Верно также

$$\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b \quad (A > 0), \quad (27)$$

потому что $a^{\log_a A} = A$ и $a^{\log_a b \log_b A} = b^{\log_b A} = A$.

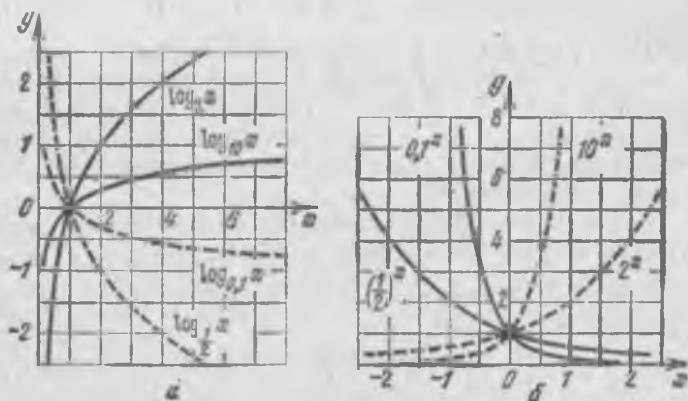


Рис. 80

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\log_e a = \ln a$.

Формулы (20)—(27) являются основными при вычислениях с логарифмами. Их надо усвоить и запомнить.

На рис. 80, а, б приведены графики частных функций a^x , $\log_a x$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для каких оснований рассматриваются логарифмы?
2. Что такое логарифм числа y при основании a ?
3. Для каких чисел y определяется логарифм? Может ли y быть отрицательным?
4. Заполните таблицу

x	1	10	100	1000	10000	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\log_{10} x$									

5. Сравните эти числа с нулями и между собой:
а) $\log_{10} 7$; б) $\log_{10} 17$; в) $\log_{10} 873$;
г) $\log_{10} 10232$; д) $\log_{10} 0,7$; е) $\log_{10} 0,03$;
ж) $\log_{10} 0$; з) $\log_{10} 0,0027$; и) $\log_{10}(-10)$.
6. Покажите с помощью графика функции $y = a^x$, что $\log_a y$ существует.
7. Как называются функции $y = a^x$ и $x = \log_a y$?
8. Как построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ при помощи графика показательной функции?
9. Чем отличаются графики $\log_a x$ с $a > 1$ от графика $\log_a x$ с $a < 1$?
10. Выпишите основные формулы логарифмирования.
11. Решите уравнения:
1) $a^x = b$, 2) $a^x = a^3$, 3) $a^x = a^{-3}$,
4) $a^x = 1$, 5) $10^x = 1000$, 6) $10^x = \frac{1}{1000}$, 7) $10^x = 0$,
8) $2^x = 32$, 9) $2^x = \frac{1}{32}$, 10) $2^x = -3$.

Решение. 1) По определению логарифм от b при основании a есть такое число x , что $a^x = b$, т. е. $x = \log_a b$. Но можно рассуждать так. Прологарифмируем при основании a левую и правую части равенства $a^x = b$. Тогда $\log_a a^x = \log_a b$. Но $\log_a a^x = x$, поэтому $x = \log_a b$.

12. Чему равно число y , если

- 1) $\log_a y = x$, 4) $\log_{10} y = x$,
- 2) $\log_a y = 2$, 5) $\log_{10} y = 2$,
- 3) $\log_a y = -3$, 6) $\log_{10} y = -2$.

Решение. 1) $y = a^{\log_a y} = a^x$.

§ 4.7. Логарифм с основанием 10

Пусть в десятичной системе счисления задано положительное число A .

Значащей цифрой числа A называется первая (слева направо) цифра, не равная нулю, а также любая следующая за ней цифра. Например, все цифры числа 830 200 значащие, у числа 0,00302 цифра 3 и следующие за ней цифры 0 и 2 — значащие.

Положительное число A можно представить в виде

$$A = a \cdot 10^k, \quad (28)$$

где a удовлетворяет неравенствам

$$1 \leq a < 10$$

и k — целое. Говорят, что число A записано в *стандартном виде*

Число a можно получить, переставив в A запятую так, чтобы она оказалась непосредственно после первой значащей цифры. Например, правые части равенств

$$\begin{aligned} 830200 &= 8,302 \cdot 10^5, \\ 0,00302 &= 3,02 \cdot 10^{-3}, \\ 100 &= 1 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

суть записи левых в стандартном виде.

Логарифмируя равенство (28) при основании 10, получим

$$\log_{10} A = k + \log_{10} a.$$

Число k называется *характеристикой*, а число $\log_{10} a$ — *мантиссой десятичного логарифма* A . Характеристика — целое число, а мантисса — неотрицательное число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq \log_{10} a < 1$. Ведь $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 10 = 1$, а функция $y = \log_{10} x$ возрастает.

Существуют подробные таблицы мантисс — таблицы десятичных логарифмов. Ими широко пользовались несколько столетий для вычислений произведения и частного чисел, а также корней из чисел. Однако в настоящее время эта работа выполняется на электронных микрокалькуляторах.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \log_{10} 830\,200 &= \log_{10} (8,302 \cdot 10^5) = 5,9041744, \\ \log_{10} (0,00302) &= \log_{10} (3,02 \cdot 10^{-3}) = \bar{3},4800069, \\ \log_{10} 100 &= \log_{10} (1 \cdot 10^2) = 2. \end{aligned}$$

После запятой выписаны вычисленные на микрокалькуляторе или по таблицам мантиссы соответствующих чисел.

Пример 2.

$$\log_{10} 3,02 = \boxed{3} \boxed{,} \boxed{0} \boxed{2} \boxed{\log_{10}} \boxed{=} = 0,4800069.$$

Перед запятой записывается характеристика. Если она отрицательная, то знак ставится над ее абсолютной величиной ($-3 = \bar{3}$). Таким образом, если характеристика отрицательная, то перед запятой стоит отрицательное число, а после запятой — положительное.

Пример 3. Пусть $\log_{10} x = \bar{3},4800069$, тогда $x = 10^{-3} 10^{0,4800069} = 10^{-3} 3,0199997 = 0,00302$.

Действия умножения и деления больших чисел мы выполняем на микрокалькуляторах. Все же приведем пример вычисления при помощи таблиц десятичных логарифмов. Пусть надо вычислить произведение $A = 830\,200 \times \times 0,0032$. Находим с помощью таблиц логарифмы множителей. Имеем

$$\begin{aligned} \log_{10} A &= \log_{10} 830\,200 + \log_{10} 0,0032 = \\ &= 5,9041744 + 3,4800069 = 3,3841813. \end{aligned}$$

Отсюда

$$A = a \cdot 10^3 = 10^3 \cdot 10^{0,3841813} = 10^3 \cdot 2,4220399 = 2422,0399.$$

В предпоследнем равенстве по мантиссе 0,3841813 находим число a .

Часто обозначают $\log_{10} a = \lg a$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В десятичной системе счисления задано положительное число A .

1) Что такое значащие цифры числа A ?

2) Что такое число, заданное в стандартной форме? Дайте три примера приведения числа к стандартной форме.

3) Как найти характеристику и мантиссу десятичного логарифма числа?

2. С помощью микрокалькулятора вычислите $\lg$ числа

1) 3070, 2) 2003, 3) 0,75, 4) 0,00101, 5) 0,00032.

3. С помощью микрокалькулятора по полученным в предыдущей задаче логарифмам восстановите исходные числа. (Могут получиться не точно исходные числа, потому что вычисления ведутся приближенно.)

§ 4.8. Степенная функция

Функция вида

$$y = x^a \quad (0 < x < \infty),$$

где $a \neq 0$, называется *степенной функцией*. При любом a степенная функция во всяком случае определена для положительных x .

Степенная функция непрерывна, т. е. ее график есть непрерывная кривая.

Если a положительное, то функция $y = x^a$ определена также и при $x = 0$, именно — она равна нулю при $x = 0$, потому что в математике считают, что $0^a = 0$ ($a > 0$).

Попутно скажем, что 0^0 не есть число, не есть также число 0^a , где $a < 0$.

Таким образом, при $a > 0$ функция

$$y = x^a \quad (0 \leq x < \infty)$$

определена не только для положительных x , но и для $x = 0$.

На рис. 81 даны графики степенных функций $y = x^p$ для некоторых значений p . Для $p > 0$ они равны нулю

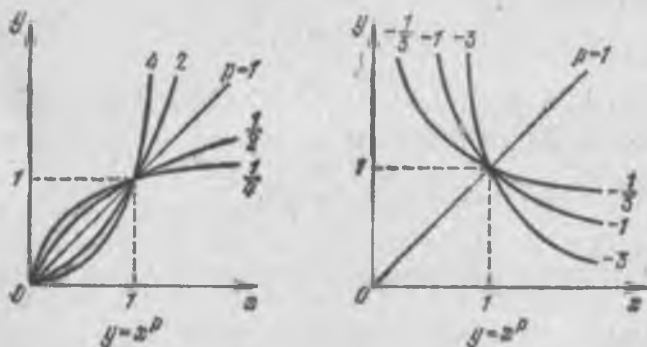


Рис. 81

при $x = 0$, поэтому их графики выходят из начала координат. При возрастании x от 0 до ∞ соответствующие ординаты y всех графиков возрастают тоже от 0 до ∞ . Однако характер возрастания различный. Также очевидно, что

$$\begin{aligned} x^4 &< x^3 < x < x^{1/3} < x^{1/4}, & 0 < x < 1, \\ x^4 &> x^3 > x > x^{1/3} > x^{1/4}, & 1 < x < \infty. \end{aligned}$$

Если $x = 1$, то $y = 1$ для всех графиков.

Функции x и $x^{1/2}$ можно рассматривать и для отрицательных x .

Что же касается функций $x^{1/3}$ и $x^{1/4}$, то они при $x < 0$ не имеют для нас смысла, потому что не существует действительного числа, квадрат или четвертая степень которого равнялись бы отрицательному числу x . Среди комплексных чисел есть такие числа, но мы о них сейчас не говорим.

Выделим в особую группу степенные функции, соответствующие натуральным a ($a = 1, 2, 3, \dots$). Они определены и непрерывны на всей действительной оси x . На

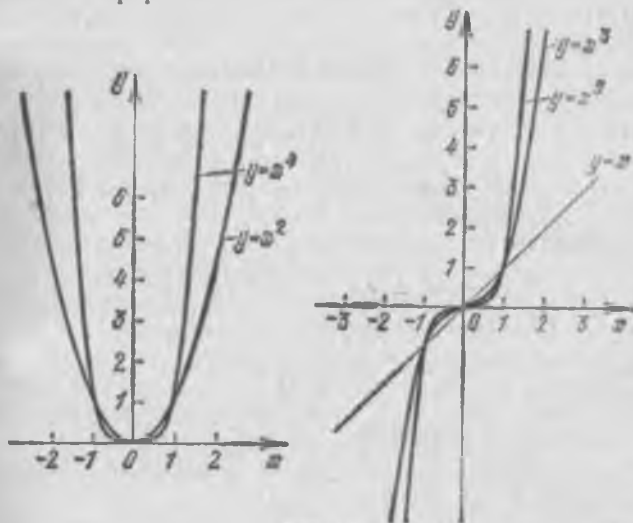


Рис. 82

рис. 82 даны графики функций действительного переменного x^2 , x^4 , x , x^3 , x^5 .

Степенную функцию можно записать в виде

$$y = x^a = b^{\log_b x^a} = b^a \log_b x \quad (29)$$

при любом положительном b ($b > 0$). Часто в качестве b берут неперово число e . Тогда формула (2) примет вид

$$y = x^a = e^{a \ln x}. \quad (29')$$

Степенная функция x^a обладает следующим характерным для нее свойством:

$$(xy)^a = x^a y^a, \quad 0 < x, y < \infty. \quad (30)$$

Действительно,

$$(xy)^a = e^{a \ln(xy)} = e^{a \ln x + a \ln y} = e^{a \ln x} e^{a \ln y} = e^{\ln x^a} e^{\ln y^a} = x^a y^a.$$

Отметим, что степенная функция x^a при иррациональном a как функция действительного переменного для отрицательных x не имеет смысла. Более глубокое изучение показывает, что функция x^a при иррациональном a должна быть комплексной для отрицательных x . Однако на этом вопросе, относящемся к теории функций комплексного переменного, мы здесь останавливаться не можем.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какое из двух чисел больше:

- а) $2^{1/2}$ и 2^a , б) $3^{1/7}$ и $3^{2/3}$, в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}$,
 г) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, д) $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{\sqrt{7}}$, е) 7 и $\sqrt{7}$.

2. Решить уравнения:

- а) $e^{4x} - 5e^{2x} + 6 = 0$,
 б) $\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{1+x}$,
 в) $4^{x-1} = 3^{2x}$ (прологарифмировать по основанию 4).
 г) $\log_3 x + \log_x 3 = 2,5$.

3. Решить неравенства:

- а) $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$, б) $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$,
 в) $\frac{3}{2} \log_3 \sqrt[3]{x} - 2 \log_4 x > 1$.

§ 5.1. Мгновенная скорость

Понятие производной возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение таких задач, как задача о проведении касательной к кривой, о вычислении скорости неравномерного движения. Подобными задачами и задачей о вычислении площади криволинейной фигуры занимались математики с древних времен. В XVII веке в работах Ньютона и Лейбница эта деятельность получила определенное теоретическое завершение. Ньютон и Лейбниц *) создали общие методы дифференцирования и интегрирования функций и доказали важную теорему, носящую их имя, устанавливающую тесную связь между операциями дифференцирования и интегрирования. Надо, однако, иметь в виду, что современное изложение этих вопросов существенно отличается от того, как они излагались во времена Ньютона и Лейбница. В рассуждениях и понятиях, которыми оперировали в то время, с нашей точки зрения, можно найти много неясного; да и сами математики того времени это сознавали, о чем свидетельствуют ожесточенные дискуссии, которые происходили по этим вопросам между ними.

Современный математический анализ базируется на понятии предела, которое выкристаллизовалось в четкую формулировку не так уж давно — в первой половине прошлого столетия. Большая заслуга в этом принадлежит французскому математику Коши **).

Понятие предела существенно используется в определениях понятий непрерывности функции, производной, интеграла.

*) И. Ньютон (1643—1727) — английский физик и математик. Г. В. Лейбниц (1646—1716) — немецкий математик.

**) О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик. В его трудах впервые определены понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл, ...) так, как это принято в современной математике.

Пусть точка движется по прямой и функция $s = f(t)$ выражает зависимость от времени t ($a < t < b$) ее расстояния (с учетом знака) до начальной точки O прямой. В момент времени t точка находится на расстоянии $s = f(t)$ от O . В момент же времени $t + \Delta t$ ($\Delta t \neq 0$) она находится на расстоянии $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ от O . Средняя скорость ее на промежутке времени $(t, t + \Delta t)$ равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Мгновенную, или истинную, скорость v точки в момент времени t естественно определить как предел, к которому стремится $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Пример. Как известно, свободно падающее тело под влиянием силы притяжения Земли движется в безвоздушном пространстве по закону

$$s = g \frac{t^2}{2}$$

в предположении, что отсчет пути происходит с момента времени $t = 0$ и скорость тела в момент $t = 0$ равна нулю.

Мгновенная скорость тела в момент времени t ($t > 0$) равна

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} = \\ &= \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} 2t = gt, \end{aligned}$$

и мы получили известную формулу для скорости равномерно ускоренного движения

$$v = gt.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите мгновенную скорость в момент времени t точки, движущейся по закону:

а) $s = 2t + 4$; б) $s = t^3$.

§ 5.2. Касательная к кривой и сила тока

Рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую Γ в плоскости или пространстве (рис. 83). Пусть A — лежащая на ней точка и A' — другая лежащая на Γ точка. Прямую S , проходящую через A и A' , будем называть *секущей* (кривую Γ). Будем теперь точку A' двигать непрерывно по Γ , неограниченно приближая к A . Тогда секущая S будет вращаться относительно A . Может случиться, что при этом S будет стремиться занять в пределе положение вполне определенной (проходящей, очевидно,

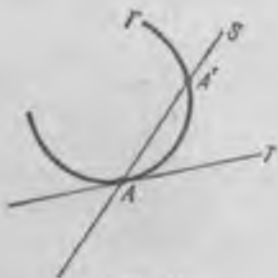


Рис. 83

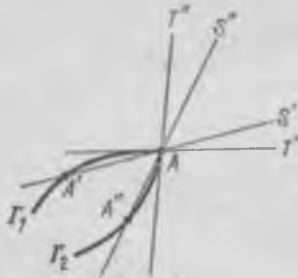


Рис. 84

через A) прямой, которую мы обозначили через T . Если это будет иметь место, то говорят, что кривая Γ имеет в точке A *касательную*. Именно прямую T называют *касательной* к Γ в точке A .

Не всякая непрерывная кривая в любой ее точке имеет касательную. Тривиальным примером этого может служить кривая, изображенная на рис. 84. Она состоит из двух гладких кусков Γ_1 и Γ_2 , соединенных в точке A «под углом». На рисунке отмечены две другие точки A' , A'' , соответственно лежащие на Γ_1 , Γ_2 ; через S' и S'' обозначены проходящие через A' , A'' и A секущие.

Очевидно, что если A' , A'' , двигаясь соответственно по Γ_1 , Γ_2 , будут приближаться к A , то секущие S' , S'' будут стремиться занять в пределе положение двух разных прямых T' и T'' . Поэтому рассматриваемая кривая не имеет касательной в точке A . Впрочем, можно было бы, развивая введенное определение, сказать, что наша кривая имеет в точке A две односторонние касательные, но об этом речь сейчас не идет.

Пусть теперь кривая Γ есть график непрерывной на интервале (a, b) функции $y = f(x)$ (рис. 85, a или b).

Зададим на Γ точку A , имеющую абсциссу x и ординату y , и другую точку C , имеющую абсциссу $x + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) и соответствующую ординату $y + \Delta y$. Секущая S ,

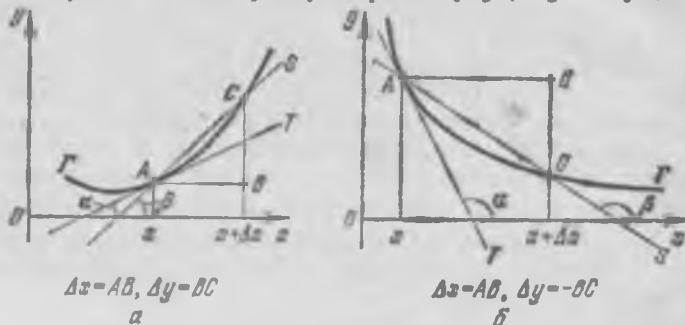


Рис. 85

проходящая через A и C , очевидно, образует с положительным направлением оси x угол β , тангенс которого

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В случае рис. 85, a $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, а в случае рис. 85, $б$ $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Будем Δx стремиться к нулю; тогда, вследствие непрерывности f , будет также Δy стремиться к нулю и точка C , двигаясь по Γ , будет стремиться к точке A . Если окажется (этого может и не быть!), что при этом отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при любом способе стремления Δx к нулю к одному и тому же конечному пределу (числу) k :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow k \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

то тогда и угол β будет стремиться к некоторому отличному от $\pi/2$ углу α . Вместе с β и секущая S , вращаясь около точки A , будет стремиться занять в пределе положение прямой T , проходящей через A под углом α к положительному направлению оси x . Но тогда T есть касательная к Γ в точке A и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

(Для рис. 85, a $0 < \alpha < \pi/2$ и для рис. 85, $б$ $\pi/2 < \alpha < \pi$.) Мы установили, что если отношение $\Delta y/\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$

стремится к конечному пределу, то кривая Γ имеет в точке A касательную, тангенс угла которой с положительным направлением оси x равен этому пределу.

Сила тока. Допустим, что известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение провода за время t . За период от t до $t + \Delta t$ через сечение протекает количество электричества $\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя сила тока при этом равна

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ дает силу тока в момент t :

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Нарисовать в прямоугольной системе координат параболу $y = x^2$ и касательную к ней в точке, имеющей абсциссу $x = 1$. Найти угловой коэффициент этой касательной, т. е. тангенс угла, образованного ею с положительным направлением оси x .

§ 5.3. Производная

Все три рассмотренные задачи, несмотря на то что они относятся к различным областям человеческого знания — механике, геометрии, теории электричества, — привели к одной и той же математической операции, которую нужно произвести над функцией. Надо найти предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Мы могли бы как угодно увеличить число задач, решение которых приводится к подобной операции. К ней приводят задачи о скорости химической реакции, о плотности неравномерно распределенной массы и др.

Естественно, что эта операция получила в математике специальное название. Она называется операцией *дифференцирования функции*. Результат ее называется *производной*.

Итак, *производной от функции f , заданной на некотором интервале (a, b) , в точке x этого интервала называется*

предел, к которому стремится отношение приращения функции f в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производную принято обозначать так:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} *).$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$. Результаты рассмотренных примеров теперь можно сформулировать так:

скорость точки, пройденный путь которой s есть функция $s = f(t)$ от времени t , равна производной от этой функции $s' = f'(t)$;

тангенс угла α между касательной к кривой $y = f(x)$ в точке, имеющей абсциссу x , и положительным направлением оси x равен производной $f'(x)$;

сила тока I в проводе в момент t , если функция $Q = f(t)$ выражает количество электричества, прошедшее за время t через сечение провода, равна производной $I = Q' = f'(t)$.

§ 5.4. Непрерывность функции, имеющей производную

Если функция f имеет в точке x производную, т. е. для нее отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при $\Delta x \rightarrow 0$ к конечному числу $f'(x)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x) \quad (\Delta x \rightarrow 0), \quad (1)$$

то она необходимо непрерывна в этой точке.

В самом деле, из (1) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \quad (2)$$

*) Предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где рассматриваются только $\Delta x > 0$ или только $\Delta x < 0$, называется соответственно *правой* или *левой производной* от f в точке x . Про функцию f , заданную на отрезке $[a, b]$, принято говорить, что она имеет на этом отрезке производную, если она имеет производную в любой точке интервала (a, b) и, кроме того, правую производную в точке a и левую — в точке b .

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$. Но тогда приращение Δy нашей функции можно записать в виде суммы

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

двух слагаемых, каждое из которых стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, т. е. функция f непрерывна в точке x .

Обратное утверждение не всегда верно. Если функция f непрерывна в точке x , то она может и не иметь производной в этой точке. Например, функция

$$y = |x| \quad (-\infty < x < \infty),$$

как видно из ее графика (рис. 86), непрерывна для всех x но в точке $x=0$ не имеет производной. В этой точке не существует касательной к графику. Есть правая касательная и левая, но они не совпадают.

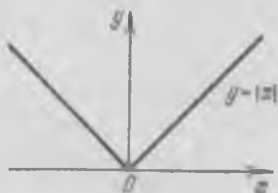


Рис. 86

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла между этой прямой и положительным направлением оси x . Прямые S и T на рис. 85, а образуют острые углы β , α с положительным направлением оси x , а на рис. 85, б — тупые углы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти угловые коэффициенты касательных к кривым (уравнения которых заданы ниже) в заданных точках x_0 :

а) $y = x^2$, $x_0 = 1$;

б) $y = x^3$, $x_0 = 1$;

в) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$.

2. Вычислить $f'(0)$, если $f(x) = \sqrt{1+x}$ или $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$.

3. Вычислить мгновенную скорость точки, движущейся по закону $s = 5t^3$, в моменты времени $t = 1, 2, 3$.

4. В чем заключается геометрический и механический смысл определения производной?

§ 5.5. Формулы дифференцирования

При любом натуральном n справедлива формула

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (3)$$

Убедимся в справедливости этой формулы при $n=2$ и $n=3$. В самом деле, считая $\Delta x = h$, будем иметь

$$(x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^2 + 2xh + h^2 - x^2) = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x,$$

$$(x^3)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3) = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

Доказательство формулы (3) для любого натурального n будет дано в конце § 5.5.

На самом деле формула (3) верна при любом n — положительном и отрицательном — не обязательно натуральном. Это будет доказано ниже.

Справедливы также формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (4)$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (5)$$

Докажем равенство (4) (доказательство (5) предоставляем читателю):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right] = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Мы воспользовались свойством $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ и тем фактом, что функция $\cos x$ непрерывна.

Производная от функции $f(x)$ есть в свою очередь функция $f'(x)$. Если производная от $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* от $f(x)$ и обозначается так: $f''(x)$. Подобным же образом определяются *высшие производные* $f^{(n)}(x)$ от $f(x)$ порядка n , где n — любое натуральное число.

Вторая производная от функции $s = f(t)$, выражающей закон движения точки на прямой, равна, очевидно, ускорению этой точки в момент времени t .

Уже из сказанного видно, что понятие производной имеет громадное значение в прикладных вопросах, но оно является фундаментальным и в самой математике.

Отметим, что *постоянное число* C , рассматриваемое как функция от x , имеет производную, равную нулю тождественно (т. е. равную нулю для всех x). В самом деле,

$$f(x) = C, \quad f(x + \Delta x) = C, \quad C' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (6)$$

Отметим еще, что если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производную и A, B — постоянные числа, то функция

$$f(x) = Au(x) + Bv(x) \quad (7)$$

также имеет производную, равную

$$f'(x) = Au'(x) + Bv'(x). \quad (8)$$

В частности, при $A = B = 1$ получим формулу

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x), \quad (9)$$

выражающую тот факт, что производная от суммы функций равна сумме производных от этих функций. А при $B = 0$ получим формулу

$$(Au)' = Au', \quad (10)$$

выражающую, что постоянную можно вынести за знак производной.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Au(x+h) + Bv(x+h) - [Au(x) + Bv(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(A \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(B \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) = \\ &= A \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + B \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \\ &= Au'(x) + Bv'(x). \end{aligned}$$

Во втором равенстве в этой цепочке равенств мы воспользовались тем фактом, что предел суммы равен сумме пределов, и в третьем — что постоянную законно вынести за знак предела.

По индукции (см. § 11.2, замечание) можно доказать более общее утверждение *):

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j u_j(x) \right)' = \sum_{j=1}^n a_j u_j'(x), \quad (11)$$

где a_j — постоянные числа, а про функции $u_j(x)$ предполагается, что они имеют производные.

В частности, получим производную от многочлена:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

(a_k — постоянные).

Доказательство формулы (3) для любого натурального n . Применяем метод индукции. При $n=2$ формула верна. Допустим, что она верна для некоторого натурального n . Тогда она верна также, если в ней n заменить на $n+1$:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

Но тогда согласно принципу индукции формула (3) верна для любого натурального n .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вывести формулу (5).
2. Вычислить производные от функций

$$x^3 - 3x + 1, \quad x^3 + 6x - x + 7, \quad 2 \cos x - 3 \sin x + x - 2, \\ 5 \sin x + 4 \cos x - x^2 + 7.$$

3. Напишите производные от x^n , $\sin x$, $\cos x$ и запомните их.

§ 5.6. Производная от показательной функции

Производная от a^x вычисляется по формуле

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, \quad a \neq 1). \quad (12)$$

В частности, $(e^x)' = e^x$.

*) Надо иметь в виду обозначение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j = \sum_1^n \alpha_j.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\log_a(1+z)} = \\ &= a^x \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0} \log_a(1+z)^{1/z}} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались подстановкой $a^h - 1 = z \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), откуда $h = \log_a(1+z)$. Надо учесть, что функция $\log_a u$ для $u > 0$, в частности при $u = e$, непрерывна ($\log_a u \rightarrow \log_a e$).

§ 5.7. Производная от логарифмической функции

Производная от $\log_a x$ вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \quad (13)$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (14)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x} \right)^{1/h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a(1+z)^{1/z} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.\end{aligned}$$

§ 5.8. Производная от произведения и частного

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x , то их произведение и частное (при условии, что $v(x) \neq 0$) имеют производные и справедливы равенства

$$(uv)' = uv' + u'v, \quad (15)$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \quad (16)$$

Придадим независимой переменной x приращение Δx . Пусть соответствующие приращения функций u и v будут Δu и Δv . Тогда

$$\begin{aligned}(uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = uv' + vu',\end{aligned}$$

потому что из того, что v имеет производную, следует, что она непрерывна, т. е. что $\Delta v \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

В частности, если C — постоянная, то

$$(Cu)' = Cu' + C'u = Cu',$$

потому что $C' = 0$.

Далее,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

§ 5.9. Производная от $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (\cos x \neq 0), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \quad (\sin x \neq 0). \end{aligned} \quad (18)$$

§ 5.10. Задачи

Задача 1. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots; x \neq 0).$$

Это показывает, что формула (3) верна и при отрицательных целых n . Далее мы увидим, что она верна и для нецелых n .

Задача 2. Вычислить производные от следующих функций:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1}, \quad \frac{x-1}{x+1}, \quad \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+2x-1}{x}, \quad 2 \sin x \cos x, \\ 2e^x + 3 \ln x - 5, \quad \sec x, \quad e^x \sin x, \quad e^x \cos x, \quad xe^x, \\ x^2 e^x, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad x \ln x, \quad x^2 \ln x. \end{aligned}$$

§ 5.11. Производная сложной функции

Пусть $y = f(x) = \varphi(\psi(x))$ есть сложная функция, заданная на некотором интервале. При этом известно, что функции

$$y = \varphi(u), \quad u = \psi(x)$$

имеют производные. Тогда функция $y = f(x)$ тоже имеет производную, вычисляемую по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x, \quad (19)$$

где y'_x есть производная от y по x ($y'_x = f'(x)$), а y'_u есть производная от y по u ($y'_u = \varphi'(u)$) или

$$f'(x) = \varphi'(u) \psi'(x). \quad (19')$$

Чтобы доказать (19), зададим x и придадим ему произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда и $u = \psi(x)$ получит соответствующее приращение Δu , а y ($y = \varphi(u)$) получит в свою очередь определенное приращение Δy .

Имеем при условии, что $\Delta u \neq 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\Delta u \neq 0). \quad (20)$$

Если перейти в этом равенстве к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, то получим

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x,$$

т. е. формулу (19).

Надо учесть, что так как функция $u = \psi(x)$ имеет по условию производную, то $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Замечание. В равенстве (20) мы предполагали, что каждому достаточно малому $\Delta x \neq 0$ соответствует $\Delta u \neq 0$. Если случится, что $\Delta u = 0$ при некотором Δx , то уже делить и умножать на Δu нельзя и надо доказывать формулу (19) другим путем. Это можно сделать, но мы соответствующее доказательство не приводим, тем более что этот случай встречается редко.

Пример 1. Найти производную от функции $y = e^{2x}$.

Решение. Полагаем $y = e^u$, $u = 2x$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (2x)'_x = e^u \cdot 2 = 2e^{2x}.$$

Пример 2. Найти производную от функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Полагаем $y = e^u$, $u = x^2$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (x^2)'_x = e^u \cdot 2x = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = \sin(kx + b)$.

Решение. Полагаем $y = \sin u$, $u = kx + b$; поэтому

$$y'_x = (\sin u)'_u (kx + b)'_x = (\cos u) k = k \cos(kx + b).$$

Пример 4. Найти производную от функции $y = x^a = e^{a \ln x}$ ($x > 0$, $a \neq 0$).

Решение. Полагаем $y = e^u$, $u = a \ln x$; поэтому

$$y'_x = (e^u)'_u (a \ln x)'_x = e^u \frac{a}{x} = \frac{ae^{a \ln x}}{x} = \frac{ax^a}{x} = ax^{a-1}.$$

Мы получили формулу

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

верную при любом $a \neq 0$, не обязательно целом. Таким образом, например,

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ \left(\frac{1}{x^2}\right)' &= (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти производную от функции $y = \sin^3 x^2$.

Решение. Полагаем $y = u^3$, $u = \sin z$, $z = x^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u u'_z = y'_u u'_z z'_x = 3u^2 \cos z \cdot 2x = \\ &= 6x \sin^2 z \cos z = 6x \sin^2 x^2 \cos x^2. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить производные от функций:

1) e^{-x^2} ; 2) e^{-x} ; 3) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

4) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$; 5) $\cos(kx + b)$; 6) $\sin^3 x$;

7) $\sin^2 2x$; 8) $\sqrt{x+1}$; 9) $\sqrt{x^2 + x}$;

10) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$; 11) $\ln(2x - 3)$; 12) $\sqrt[3]{x^3 - 1}$;

13) e^{2x-3} ; 14) $\sqrt{a^2 + x^2}$; 15) $\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

§ 5.12. Производная обратной функции

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную и возрастающую на отрезке $[a, b]$. Последнее означает, что большему значению x из отрезка $[a, b]$ соответствует большее значение y (рис. 87).

Пусть $c=f(a)$, $d=f(b)$. На рис. 87 видно, что каждому значению y из отрезка $[c, d]$ соответствует, и притом одно, значение x из отрезка $[a, b]$ такое, что $y=f(x)$. Этим мы задали на отрезке $[c, d]$ вполне определенную функцию $x=\varphi(y)$, которая называется *обратной функцией* по отношению к функции $y=f(x)$. На рис. 87 видно, что функция $\varphi(y)$ непрерывна (см. § 2.10).

Так как функция $f(x)$ возрастает и непрерывна, то при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$ будет $\Delta y \neq 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x / \Delta y}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x / \Delta y}.$$

Мы получили формулу для производной обратной функции:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (x'_y \neq 0); \quad (21)$$

она верна, если существует производная $x'_y \neq 0$.

Производная $\arcsin x$. Пусть

$$y = \arcsin x \quad (-1 < x < 1). \quad (22)$$

Это непрерывная, строго возрастающая функция на интервале $(-1, +1)$. Обратная к ней функция, тоже непрерывная и строго возрастающая, есть (см. § 2.11)

$$x = \sin y \quad (-\pi/2 < y < \pi/2).$$

В силу формулы (21)

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' = y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned} \quad (23)$$

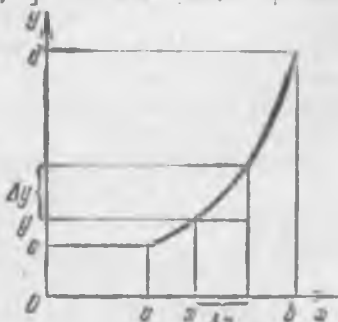


Рис. 87

В данном случае $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos y > 0$ и перед корнем должен быть знак $+$.

При $x = \pm 1$ правая часть (23) обращается в ∞ . Касательная к кривой (22) в этих точках параллельна оси y .

З а м е ч а н и е. Запомните формулы производных суммы, разности, произведения и формулы производных основных элементарных функций: x^n , a^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, а также формулу производной сложной функции. Это даст вам возможность вычислить производную любой элементарной функции. Вся трудность здесь сводится к тому, чтобы уметь свести каждую данную элементарную функцию к цепочке основных (простейших) элементарных функций.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь формулой (21), докажите равенства:

$$1) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$2) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty);$$

$$3) (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\text{учесть, что } (e^x)' = e^x, x > 0).$$

4) Вычислить производные от следующих функций: $\ln(2x)$, $\ln(ax)$, $\operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ($a > 0$), $\arcsin x + \arccos x$, $\arcsin 2x$, $\operatorname{arctg} x^2$.

2. Как определяется мгновенная скорость точки, движущейся по закону $s = f(t)$? Как определяется касательная к кривой в ее точке?

3. Чему равен тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x ?

4. Что называется силой тока?

5. Что называется производной от функции f в точке x ?

6. Как выражается через производную

а) скорость движущейся точки,

б) тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$?

в) сила тока в проводе в момент t ?

7. Что называется угловым коэффициентом прямой? Объясните, почему функция f , имеющая производную в точке x , непрерывна в этой точке?

8. По какой формуле вычисляется производная

а) x^n ?

б) $\sin x$, $\cos x$?

- в) постоянной C ?
- г) суммы и разности?
- д) произведения функций на постоянную?
- е) e^x , a^x , $\ln x$, $\log_a x$?
- ж) логарифмической функции?
- з) произведения?
- и) частного?
- к) $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$?
- л) сложной функции?
- м) обратной функции?
- н) $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$?

9. Что такое вторая производная? Каков ее физический смысл?

10. Определить ускорение точки, движущейся по законам

- а) $s = 3t^2$, б) $s = 5t^3$, в) $s = 2t$

в момент времени $t = 0, 1, 3, 4$.

11. Вычислить угловой коэффициент касательной к кривой

- а) $y = \sin x$, б) $y = \cos x$, в) $y = \operatorname{tg} x$

в точках $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

12. Вычислить производные функций

- а) $y = x + \sqrt[3]{x}$, б) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$,

- в) $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$, г) $y = \ln (\ln (\ln x))$.

§ 6.1. Максимум и минимум функции

На рис. 88 изображена непрерывная функция $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), которую будем предполагать непрерывно дифференцируемой, т. е. имеющей непрерывную производную, на $[a, b]$.

На отрезке $[a, b]$ имеются две замечательные точки x_0 и b . Именно ордината $f(x_0)$, соответствующая точке x_0 , является наибольшей среди ординат $f(x)$, соответствующих любым точкам x отрезка $[a, b]$, а ордината $f[b]$ является наименьшей среди указанных $f(x)$.

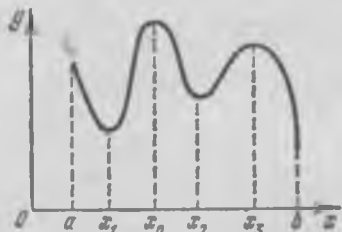


Рис. 88

Введем определения. Точка x_0 отрезка $[a, b]$ называется *точкой максимума функции f на этом отрезке*, если $f(x_0)$ есть наибольшее среди значений

$f(x)$, соответствующих любым x из $[a, b]$:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

(см. рис. 88). Точка x_1 отрезка $[a, b]$ называется *точкой минимума функции f на этом отрезке*, если $f(x_1)$ есть наименьшее среди значений $f(x)$, соответствующих любым x из $[a, b]$:

$$f(x_1) \leq f(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

Точка максимума или минимума f на отрезке $[a, b]$ называется *точкой экстремума* (extremum) на $[a, b]$.

Аналогично определяются точки экстремума на интервале (a, b) , т. е. на совокупности точек x оси x , для которых $a < x < b$ (см. ниже замечание 2).

Введем определения.

Окрестностью точки x_0 (оси x) называется любой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (оси x) с центром в этой точке ($\delta > 0$).

Левой окрестностью точки x_0 называется множество точек x , удовлетворяющих условиям $x_0 - \delta < x \leq x_0$.

Правой окрестностью точки x_0 называется множество точек x , удовлетворяющих условиям $x_0 \leq x < x_0 + \delta$.

На рис. 88 кроме точки x_0 отмечены еще три замечательные точки x_1, x_2, x_3 . Точка x_2 не является точкой максимума на $[a, b]$. Однако можно указать ее окрестность $(x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ настолько малую, что на ней x_2 есть точка максимума. Такую точку называют точкой *локального максимума* функции f .

Итак, точку x_0 отрезка $[a, b]$ называют *точкой локального максимума* f , если существует ее окрестность, принадлежащая отрезку $[a, b]$, на которой x_0 есть точка максимума.

Соответственно точку x_0 отрезка $[a, b]$ называют *точкой локального минимума* f , если существует ее окрестность, принадлежащая отрезку $[a, b]$, на которой x_0 есть точка минимума.

Мы видим (см. рис. 88), что x_1 и x_2 суть точки локального минимума f , а x_0, x_3 — точки локального максимума f . При этом x_0 , кроме того, есть точка максимума на отрезке $[a, b]$.

Точки локального максимума и минимума f называют *точками локального экстремума* f .

В точках локального экстремума f , очевидно, производная от f равна нулю*). В случае рис. 88

$$f'(x_0) = 0, \quad f'(x_1) = 0, \quad f'(x_2) = 0, \quad f'(x_3) = 0.$$

Все же надо иметь в виду, что обратное утверждение не всегда верно. Если производная от f в некоторой точке x_0 равна нулю ($f'(x_0) = 0$), то x_0 может не быть точкой локального экстремума f (см. ниже пример 1).

Дадим формальное доказательство того факта, что если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , являющейся точкой локального экстремума f , то производная от f в этой точке равна нулю.

В самом деле, пусть для определенности f имеет в x_0 локальный максимум. Тогда выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ для точек x , достаточно близких к x_0 , независимо от того, будет ли x

*) Можно было бы сказать, что функция f имеет правый локальный максимум в точке x_0 , если $f(x) \leq f(x_0)$ для всех x , принадлежащих к некоторой правой окрестности x_0 ($x_0 \leq x < x_0 + \delta$), как это, например, имеет место для графика на рис. 88 при $x_0 = a$. Но производная $f'(x_0)$ в такой точке не обязательно равна нулю.

больше или меньше x_0 . Следовательно, для точек x , достаточно близких к x_0 ,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ если } x - x_0 > 0, \quad (1)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ если } x - x_0 < 0. \quad (2)$$

По условию функция f имеет производную в точке x_0 , и потому существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Но этот предел должен быть одним и тем же числом, будет ли разность $x - x_0$ стремиться к нулю, оставаясь положительной или отрицательной. Из (1) следует, что $f'(x_0) \leq 0$, а из (2) следует, что $f'(x_0) \geq 0$. Но это возможно, лишь если $f'(x_0) = 0$.

Пример 1. Функция (рис. 89) $y = f(x) = x^3$ ($-1 \leq x \leq 1$) не имеет локальных экстремумов на отрезке $[-1, +1]$, но ее производная $f'(x) = 3x^2$ в точке $x = 0$ равна нулю ($f'(0) = 0$).

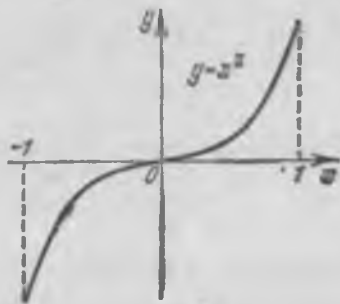


Рис. 89

Сказанное поможет нам указать путь, следуя которому можно находить максимум и минимум (экстремумы) функции на отрезке.

Пусть надо найти экстремумы функции f на отрезке $[a, b]$, где она непрерывна и имеет непрерывную производную. Находим производную $f'(x)$; приравниваем ее

нулю: $f'(x) = 0$, находим все корни полученного уравнения, принадлежащие (a, b) , считая, что их конечное число:

$$x_1, x_2, \dots, x_N;$$

вычисляем числа

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N), f(b) \quad (3)$$

и выбираем среди них наибольшее и наименьшее, которые обозначим соответственно через M и m .

Та из точек $a, x_1, x_2, \dots, x_N, b$, для которой значения (3) достигают максимума, и есть точка максимума f на $[a, b]$, обозначим ее через x_0 . Та же точка, для которой значения (3) достигают минимума, есть точка мини-

мама f на $[a, b]$, обозначим ее через x_0 . Итак,

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_0) = M, \quad \min_{a \leq x \leq b} f(x) = f(x_0) = m.$$

Замечание 1. Если на отрезке $[a, b]$ нет вовсе корней уравнения $f'(x) = 0$, то M есть максимальное, а m — минимальное среди чисел $f(a)$ и $f(b)$.

Замечание 2. Бывает, что надо искать экстремум на интервале (a, b) , где может оказаться, что $a = -\infty$, а $b = +\infty$. Тогда роль чисел $f(a)$ и $f(b)$ будут играть пределы

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)$$

и M может оказаться не $\max_{a \leq x \leq b} f(x)$, а наименьшим числом большим $f(x)$ на (a, b) .

Пример 2. Дан квадратный лист жести со стороной a . Из него в его углах вырезают одинаковые квадраты (рис. 90) и, загибая лист по пунктирным линиям, делают прямоугольную коробку. При каких размерах квадратов объем коробки будет наибольшим?

Длину стороны каждого из вырезанных квадратов обозначим через x . Тогда объем коробки V есть функция от x , выражаемая формулой

$$V(x) = x(a - 2x)^2 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{a}{2}\right).$$

Надо найти максимум этой функции на $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Имеем

$$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4(a - 2x)x = (a - 2x)(a - 6x).$$

Приравнивая нулю $V'(x)$, получим два корня: $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{6}$, оба принадлежащие отрезку $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

Наибольшее из следующих трех чисел

$$V(0) = 0, \quad V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}, \quad V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

и есть максимальный объем коробки, соответствующий

$$x = \frac{a}{6}.$$

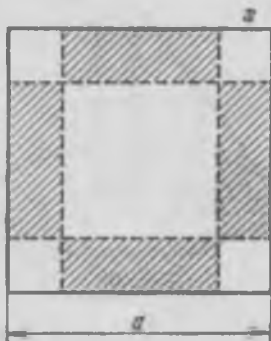


Рис. 90

Пример 3. В центре круговой конькобежной дорожки радиуса r на высоте h подвешен фонарь. Освещенность дорожки можно выразить числом T , которое вычисляется по формуле

$$T = \frac{k \sin \alpha}{h^2 + r^2},$$

где k — число, определяемое мощностью фонаря, а $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{r}$ (рис. 91). Найти высоту h столба, при которой дорожка будет освещена максимально.

Решение. Выразим T через α , исключив h :

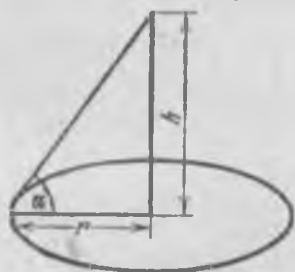


Рис. 91

$$T = \frac{k}{r^2} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{k}{r^2} \sin \alpha \cos^3 \alpha \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Надо найти максимум функции $T = T(\alpha)$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. среди значений α , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Решаем уравнение

$$T'(\alpha) = \frac{k}{r^2} (\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) = 0.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$\cos \alpha = 0,$$

$$\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Первое уравнение на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет корень $\alpha = \frac{\pi}{2}$; второе же имеет единственное решение

$$\alpha_0 = \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 35^\circ 15',$$

$$T(\alpha_0) = \frac{k}{r^2} \frac{\sin \alpha_0}{3/2} = \frac{2}{3} \frac{k}{r^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{k}{r^2},$$

$$T(0) = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Наибольшее среди этих чисел есть $T(\alpha_0)$. Ему соответствует высота столба

$$h = r \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Конечно, скорее всего, у администрации катка нет такого высокого столба. Придется поставить какой есть. Пусть в распоряжении администрации имеется столб высотой $H < \frac{r}{\sqrt{2}}$. Ему соответствует угол

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{H}{r} < \alpha_0.$$

Производная $T'(\alpha)$ не обращается в нуль (не имеет корней) на интервале $(0, \alpha_1)$. Тогда максимум $T(\alpha)$ на $(0, \alpha_1)$ есть наибольшее среди чисел $T(0)=0$ и $T(\alpha_1)$, т. е. число $T(\alpha_1)$, которому соответствует высота H .

Таким образом, уменьшать имеющийся столб (его длина $H < \frac{r}{\sqrt{2}}$) во всяком случае не нужно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Число 12 разложить на два слагаемых, чтобы их сумма квадратов была наименьшей.

2. Число 12 разложить на два сомножителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R .

4. Корабль стоит в 9 км от ближайшей точки прямолинейного берега; с него нужно послать курьера в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь находится на берегу). В каком пункте берега курьер должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время, если он идет пешком со скоростью 5 км/ч, а на веслах со скоростью 4 км/ч?

5. Из круглого бревна диаметра d надо вырезать балку прямоугольного сечения с основанием a и высотой h (рис. 92). При каких значениях a и h прочность

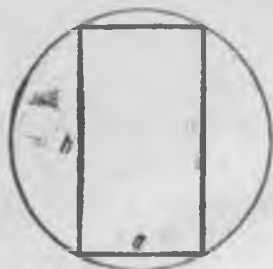


Рис. 92

балки будет наибольшей, если известно, что прочность балки пропорциональна ah^3 ?

6. Найти наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R .

7. Что такое точка максимума (минимума) функции $f(x)$ на отрезке?

8. Что такое точка локального максимума (минимума) функции $f(x)$?

9. Что такое точка экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и точка ее локального экстремума?

10. Может ли точка локального экстремума функции $f(x)$ быть концевой точкой отрезка $[a, b]$, где задана эта функция?

11. Чему равна производная от функции в точке ее локального экстремума?

12. Приведите два примера функций, которые имеют в некоторой точке x_0 производную, равную нулю ($f'(x_0)=0$), и чтобы при этом x_0 не была бы точкой локального экстремума функции f .

13. В чем состоит метод нахождения экстремумов функции на отрезке?

§ 6.2. Возрастание и убывание функции

На рис. 93, а (соответственно на рис. 93, б) изображен график непрерывной возрастающей (убывающей) на $[a, b]$ функции.

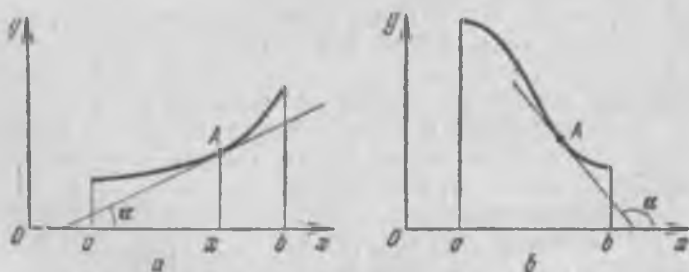


Рис. 93

Если функция f не только непрерывна на отрезке $[a, b]$, но и имеет на нем непрерывную производную $f'(x)$, то по знаку производной можно заключать, возрастает или убывает f на $[a, b]$. Именно, имеют место утверждения:

- 1) Если $f'(x) > 0$ на (a, b) , то f возрастает на $[a, b]$.
 2) Если $f'(x) < 0$ на (a, b) , то f убывает на $[a, b]$.
 В самом деле,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α есть угол между касательной к графику в точке x^* и положительным направлением оси x . Но если $f'(x) > 0$ на (a, b) , то всюду на $(a, b)^{**})$ угол α острый, и из графика видно, что в этом случае функция должна возрастать на $[a, b]$.

Подчеркнем, что при этом первая производная в концевых точках $[a, b]$ может быть равна нулю.

Если же $f'(x) < 0$ на (a, b) , то всюду на (a, b) угол α тупой, что, очевидно, может быть, лишь если f убывает на $[a, b]^{***})$.

Пример 1. Функция $y = e^x$ ($-\infty < x < \infty$) возрастает на всей действительной оси, потому что $y' = e^x > 0$ ($-\infty < x < \infty$).

Пример 2. Функция

$$y = x^2 + 2x + 1 \quad (4)$$

имеет производную $y' = 2x + 2$. Неравенство $2x + 2 > 0$ имеет место для $x > -1$, а неравенство $2x + 2 < 0$ имеет место для $x < -1$. Следовательно, функция (4) убывает для $x \leq -1$ и возрастает для $x \geq -1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

- а) $x^2 - 4x + 2$; б) $-x^2 + 2x + 1$; в) $\cos x$; г) $(x-1)^2 + 2$; д) $(x+2)^4$.

§ 6.3. Выпуклость и вогнутость

Рассмотрим функцию

$$y = f(x) \quad (a < x < b).$$

Предположим, что она имеет вторую непрерывную производную $f''(x)$.

^{*}) То есть в точке графика, имеющей абсциссу x .

^{**}) То есть для всех значений x из интервала (a, b) .

^{***}) Формальное обоснование утверждений 1), 2) см. далее в § 6.5.

Вторая производная от $f(x)$ есть первая производная от $f'(x)$:

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Это показывает, что если вторая производная от f на интервале (a, b) положительна:

$$f''(x) > 0 \quad (a < x < b),$$

то первая производная f' возрастает на этом интервале, а если вторая производная от f на (a, b) отрицательна:

$$f''(x) < 0 \quad (a < x < b),$$

то первая производная f' убывает на (a, b) .

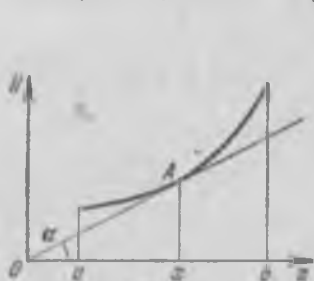


Рис. 94

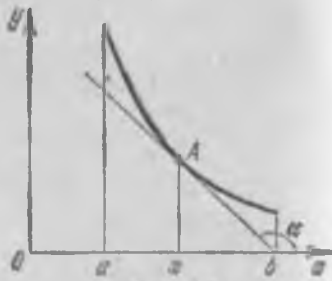


Рис. 95

На рис. 94, 95, 96 изображены графики функций, соответствующие первому случаю ($f''(x) > 0$, $a < x < b$; на концах $[a, b]$ вторая производная может равняться нулю!).

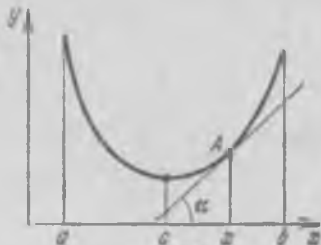


Рис. 96

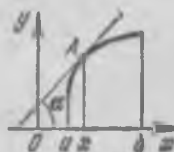


Рис. 97

У всех трех графиков тангенс угла α наклона касательной к оси x ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) возрастает вместе с x . На рис. 94 угол α острый для всех значений x из отрезка $[a, b]$. На рис. 95 он тупой; с возрастанием x угол становится все более и более тупым, а его тангенс (отрица-

тельный) увеличивается. Наконец, на рис. 96 величина $\operatorname{tg} \alpha$ растет сначала, принимая отрицательные значения (на (a, c)), обращается в нуль при $c=0$, а затем растет, принимая положительные значения (на (c, b)).

Рост $\operatorname{tg} \alpha$ вызван тем, что вторая производная от f положительна на $[a, b]$.

Мы видим, что во всех трех случаях график расположен выше касательной, проведенной в любой его точке.

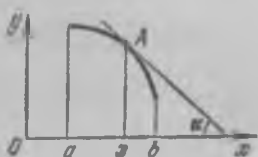


Рис. 98

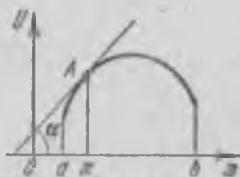


Рис. 99

График функции f называется *выпуклым книзу (кверху)* на интервале (a, b) , если в любой точке (a, b) он расположен выше (ниже) касательной, проведенной к нему.

Рис. 97, 98, 99 дают примеры выпуклых кверху функций.

Справедливо утверждение:

Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a, b) вторую производную $f''(x)$ положительную (отрицательную), то ее график *выпуклый книзу (кверху)* на (a, b) .

В случае, когда $f''(x) > 0$, ($a < x < b$), это утверждение уже разъяснено, а в случае, когда $f''(x) < 0$ ($a < x < b$), оно следует из рассмотрения графиков на рис. 97, 98, 99.

Выпуклые кверху (книзу) кривые называют еще *вогнутыми книзу (кверху)*.

Отметим важное утверждение:

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную. Если

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0) < 0,$$

то f имеет в точке x_0 локальный максимум. Если же

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0) > 0,$$

то f имеет в x_0 локальный минимум.

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из рассмотрения рис. 100 и 101*). Надо учесть,

* Формальное обоснование этого утверждения см. далее в п. 6.5.

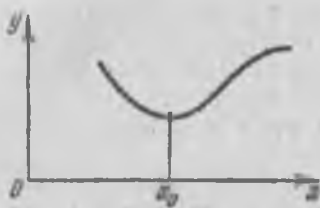


Рис. 100

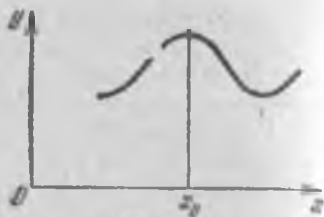


Рис. 101

что из того, что вторая производная отрицательна (положительна) в точке x_0 , следует в силу ее непрерывности, что она отрицательна (положительна) и в некоторой окрестности этой точки.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что называется функцией а) возрастающей, б) убывающей на отрезке $[a, b]$?

2. Как по знаку производной можно узнать, возрастает или убывает функция f на отрезке $[a, b]$?

3. Что называется графиком функции а) выпуклым кверху, б) выпуклым книзу на интервале (a, b) ?

4. Как по знаку второй производной узнать, что кривая $y=f(x)$ на интервале (a, b) выпукла а) кверху, б) книзу?

5. Сформулируйте на языке производных достаточное условие существования у функции f в точке x , локального а) максимума, б) минимума.

6. Определите интервалы выпуклости кверху и книзу у кривых; определить по знаку 2-й производной их точки локального максимума, минимума:

1) $y=x^3$; 2) $y=3x^2$; 3) $y=-2x^2$, $y=\frac{1}{x}$;

4) $y=2x^2-3x+1$; 5) $y=2-x-x^2$; 6) $y=2x^2-x^4$;

7) $y=e^x \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$); 8) $y=\sin x + 0,5 \sin 2x$.

§ 6.4. Черчение схематических графиков

Чтобы получить схематический график функции $y=f(x)$, надо прежде всего отдать себе отчет в том, какова ее область определения. Обычно это есть вся ось x , либо ось с выколотыми точками, либо множество, состоящее из нескольких интервалов или отрезков. Полезно вычисле-

нием определить одну или несколько точек, через которые проходит график функции. Если область определения функции не ограничена, то надо вычислить пределы функции при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, чтобы представить себе, как говорят, поведение функции на бесконечности.

Важно вычислить первую и вторую производные ($f'(x)$ и $f''(x)$) и найти корни уравнений

$$f'(x) = 0 \quad \text{и} \quad f''(x) = 0.$$

Для каждого значения x_0 , где первая производная равна нулю, следует проверить, не будет ли для него локального максимума или минимума функции. Надо также вычислить для x_0 и соответствующее значение функции $f(x_0)$. Мы, таким образом, будем знать важные точки $(x_0, f(x_0))$, через которые проходит график функции. Знание этих точек поможет найти интервалы возрастания и убывания функции.

Наконец, если удастся найти корни уравнения $f''(x) = 0$, то последние помогут указать интервалы выпуклости функции кверху и книзу. На основе этих данных уже нетрудно представить себе схематический вид графика исследуемой функции.

Но обратимся к примерам.

Пример 1. Надо нарисовать схематический график функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 1.$$

Эта функция определена и непрерывна на всей оси x .

Чтобы узнать, как она ведет себя на бесконечности, возьмем пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] = -\infty.$$

Имеем также

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5),$$

$$f''(x) = 2x - 6,$$

откуда

$$f'(1) = f'(5) = 0,$$

$$f''(3) = 0, \quad f''(x) > 0 \quad (x > 3), \quad f''(x) < 0 \quad (x < 3).$$

Выпишем точки x , где $f'(x)=0$ и $f''(x)=0$, и точку $x=0$ и вычислим соответствующие этим точкам значения функции

x	0	1	3	5
$f(x)$	1	$10/3$	-2	$-22/3$

На основании этих данных нарисуем схематический график исследуемой функции (рис. 102).

На интервале $(-\infty, 1)$ (где $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$) функция f возрастает от $-\infty$ до $y = \frac{10}{3}$, график обращен выпуклостью кверху. В точке $x=1$ функция f достигает локального максимума. На интервале $(1, 5)$ функция f убывает, достигая при $x=5$ локального минимума, равного $y = -\frac{22}{3}$, а затем

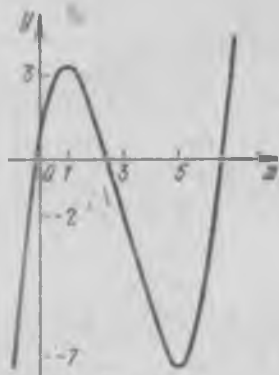


Рис. 102

на интервале $(5, \infty)$ она возрастает, стремясь к $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. При этом на интервале $(1, 3)$ (где $f''(x) < 0$) график продолжает иметь выпуклость кверху, а на интервале $(3, \infty)$ (где $f''(x) > 0$) он обращен выпуклостью книзу.

Точка графика *) с абсциссой $x=3$ замечательная. При переходе x через эту точку выпуклость графика кверху заменяется на выпуклость книзу. Такая точка называется *точкой перегиба графика*. В точке перегиба вторая производная от f равна нулю. В данном случае $f''(3)=0$.

Пример 2. Нарисовать схематический график функции

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}.$$

*) То есть точка графика, имеющая абсциссу $x=3$.

Имеем

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} > 0 \quad (-\infty < x < 1, \quad 1 < x < +\infty), \\ f''(x) &= \frac{4}{(1-x)^4} \begin{cases} > 0 & (x < 1), \\ < 0 & (x > 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Рассматриваемая функция не определена при $x=1$ и

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

На рис. 103 на основании этих данных построен схематический график функции f .

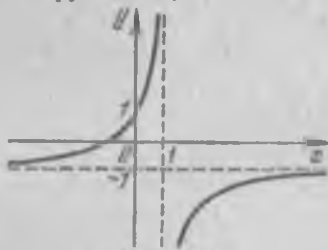


Рис. 103

Пример 3. Нарисовать схематические графики функций:

- 1) $x^3 + x + 1$; 2) $x^3 - 5x + 6$; 3) $-x^3 + x + 2$;
- 4) $\frac{x-1}{x+1}$; 5) $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 2$.

§ 6.5. Теоремы о среднем

Ниже мы доказываем теоремы, имеющие большое значение в анализе — теорему Ролля и теорему Лагранжа. Их называют теоремами о среднем. С помощью этих теорем дается формальное обоснование утверждений, доказанных в п. 6.2 и п. 6.3.

Теорема 1 (Ролля). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$ ($f(a) = f(b)$). Тогда на интервале (a, b) всегда найдется такая точка c , что в ней производная от f равна нулю:

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b.$$

На рис. 104 и 105 изображены графики функций f , удовлетворяющих условию теоремы Ролля. У первой функции имеется одна точка из интервала (a, b) , в которой ее производная равна нулю ($f'(c)=0$), у второй — имеются две такие точки c_1 и c_2 ($f'(c_1) = -f'(c_2)=0$).

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 суть точки, в которых f достигает на отрезке $[a, b]$ соответственно минимума и максимума.

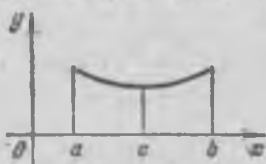


Рис. 104

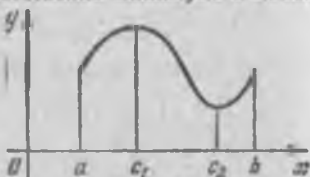


Рис. 105

Если $f(x_1) < f(a)$, то точка x_1 принадлежит очевидно интервалу (a, b) и в ней функция f достигает локального минимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_1)=0$ и можно считать, что $c=x_1$.

Если $f(x_2) > f(a)$, то точка x_2 принадлежит интервалу (a, b) и в ней функция f достигает локального максимума. Но тогда, как мы знаем, $f'(x_2)=0$ и можно считать, что $c=x_2$.

Остается еще случай, когда $f(x_1)=f(x_2)$. Но тогда, очевидно, для всех x из отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ равна одной и той же константе $C=f(a)$. В этом случае в качестве c можно взять любую точку интервала (a, b) — в ней $f'(c)=0$.

Теорема 2 (Лагранжа). Пусть функция f имеет производную на отрезке $[a, b]$. Тогда на интервале (a, b) найдется точка c такая, что в ней производная от f удовлетворяет равенству

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a < c < b). \quad (5)$$

или, что то же самое, равенству

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \quad (a < c < b). \quad (6)$$

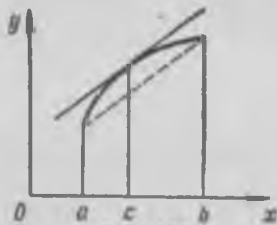


Рис. 106

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис. 106). Левая часть равенства (5) есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y=f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой точке c , принадлежащей к (a, b) . Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая есть график функции, имеющей производную на $[a, b]$, то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе c ($a < c < b$) такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = [f(b)-f(a)]x - (b-a)f(x).$$

Она имеет производную на $[a, b]$, равную

$$F'(x) = [f(b)-f(a)] - (b-a)f'(x).$$

Кроме того,

$$F(b) = -f(a)b + af(b), \quad F(a) = af(b) - f(a)b,$$

и, следовательно, $F(a) = F(b)$. Но тогда по теореме Ролля должна существовать на интервале (a, b) точка c , для которой $F'(c) = 0$, т. е.

$$[f(b) - f(a)] - (b - a)f'(c) = 0 \quad (a < c < b),$$

откуда следует (4).

Пример 1. Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а производную имеет только на полуинтервале $(0, 1]$. К ней применима теорема Лагранжа, потому что для ее выполнения производная от f должна существовать на интервале $(0; 1)$.

Докажем теперь теорему, которая дает обоснование утверждениям 1) и 2) § 6.2.

Теорема 3. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция имеет положительную (отрицательную) производную на интервале (a, b) , то она возрастает (убывает) на $[a, b]$. Если же производная равна тождественно нулю на $[a, b]$, то $f(x) = C$, где C — постоянная.

Подчеркнем, что в точках $x = a$ и $x = b$ производная может не существовать или быть равной нулю.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — произвольные точки, удовлетворяющие неравенствам $a < x_1 < x_2 < b$. По теореме Лагранжа, примененной к отрезку $[x_1, x_2]$, найдется на (x_1, x_2) такая точка c , что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, потому что по условию $f'(c) > 0$. Но тогда $f(x_1) < f(x_2)$, что доказывает, что f возрастает на $[a, b]$. В случае же, когда $f'(x) < 0$ на (a, b) , получим $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0$, т. е. $f(x_2) < f(x_1)$, а это доказывает, что f убывает на $[a, b]$.

Если же $f'(x) = 0$ на (a, b) , то $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ и $f(x_1) = f(x_2)$ для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$. Зафиксируем x_1 и будем считать $x_2 = x$ переменной; тогда $f(x) = C$, где $C = f(x_1)$.

Наконец, докажем теорему, которая дает обоснование последнему утверждению § 6.3.

Теорема 4. Если функция f имеет на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ положительную (отрицательную) производную f'' второго порядка и в точке x_0 первую производную, равную нулю ($f'(x_0) = 0$), то в этой точке f достигает локального минимума (максимума).

Доказательство. Пусть $f''(x) > 0$ на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и $f'(x_0) = 0$. Так как вторая производная есть первая производная от первой производной: $f''(x) = (f'(x))'$, то на основании теоремы 3 функция $f'(x)$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ возрастает. Но $f'(x_0) = 0$. Поэтому

$$f'(x) < 0 \quad \text{на} \quad [x_0 - \delta, x_0]$$

и

$$f'(x) > 0 \quad \text{на} \quad (x_0, x_0 + \delta].$$

Применяем теперь теорему 3 к f . Так как функция f непрерывна на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$ и имеет отрицательную производную на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, то она убывает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$. Так как, далее, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$ и имеет положительную производную на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$, то она возрастает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$. Но это показывает, что функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0 . Подобным образом доказывается теорема в случае $f''(x) < 0$, приводящем к максимуму в x_0 .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте теорему а) Ролля, б) Лагранжа.
2. Объясните эти теоремы на графиках.
3. Покажите с помощью теоремы Лагранжа, что если функция имеет на отрезке $[a, b]$ производную, тождественно равную нулю, то она есть постоянная ($f'(x) = c$).
4. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = (x-1)(x-2)$ на $[1, 2]$.
5. Многочлен $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ имеет корень $x=1$. Доказать, что многочлен $p''(x)$ имеет действительный корень на интервале $(0, 1)$.
6. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = 1 + x + x^2$.
7. Доказать неравенство $e^x > 1 + x$, $x \in (0, \infty)$.
8. Определить промежутки монотонности (возрастания, убывания) функции
 - а) $y = 3 + x - x^2$, б) $y = 4x - x^2$.
9. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
 - а) $y = 2^x$ на $[0, 5]$, б) $y = x + \frac{1}{x}$ на $\left[\frac{1}{2}, 10\right]$.
10. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции
 - а) $y = 3x^3 - x^2$, б) $y = e^{-x^2}$.
11. Доказать неравенство $e^x \geq 1 + x$ для любого x (выяснить знак производной функции $\varphi(x) = e^x - 1 - x$, учесть, что $\varphi(0) = 0$).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 7.1. Первообразная

Мы знаем, что постоянное число C , рассматриваемое как функция от x , имеет производную, равную нулю тождественно (т. е. равную нулю для всех x).

Обратное утверждение также верно: *если про функцию известно, что ее производная равна нулю тождественно, $f'(x) = 0$, то она есть постоянная.*

Из механических соображений это простое утверждение совершенно очевидно*). В самом деле, пусть функция $s = f(t)$ выражает закон движения точки по прямой, причем ее скорость тождественно равна нулю: $v = f'(t) = 0$. Тогда точка стоит на месте и расстояние s ее до начальной точки 0 равно постоянной при любом t . Тот факт, что в этом рассуждении мы x заменили на t , не имеет значения: время тоже можно обозначить через x .

Рассмотрим произвольную непрерывную функцию f , заданную на интервале (a, b) , т. е. на множестве значений x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

Функция F называется *первообразной* для f на интервале (a, b) **), если на нем производная от F равна f :

$$F'(x) = f(x).$$

Очевидно, что если функция F есть первообразная для f на (a, b) , а C — постоянная, то функция $F(x) + C$ есть также первообразная для f , потому что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x).$$

*) Формальное доказательство: см. теорему 3 § 6.5.

**) Аналогично определяется первообразная для f на отрезке $[a, b]$, т. е. множестве значений x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$. Нужно только под производной в точке a понимать правую производную, а в точке b — левую производную:

$$F'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}, \quad F'(b) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{F(b+h) - F(b)}{h}.$$

Обратно, если F и F_1 — первообразные для $f(x)$ на (a, b) , то они necessarily отличаются друг от друга на всем интервале (a, b) на некоторую постоянную C

$$F_1(x) = F(x) + C. \quad (1)$$

В самом деле, $(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Но тогда, как отмечалось выше, существует такое (постоянное) число C , что $F_1(x) - F(x) = C$ на (a, b) , откуда следует (1).

Итак, пользуясь механическими соображениями, мы установили важный факт: если F есть какая-либо первообразная от f на интервале (a, b) , то всевозможные первообразные от f на этом интервале выражаются формулой $F(x) + C$, где вместо C можно подставить любое число.

§ 7.2. Неопределенный интеграл

Дадим теперь следующее определение:

Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале (a, b) функции f называется произвольная ее первообразная функция. Неопределенный интеграл обозначается так:

$$\int f(x) dx.$$

Из сказанного следует, что если F есть некоторая определенная первообразная функция для f на интервале (a, b) , то неопределенный интеграл от f на этом интервале равен

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (2)$$

где C — постоянная.

Если f_1, f_2 — непрерывные на интервале (a, b) функции и A_1, A_2 — постоянные, то имеет место следующее равенство, выражающее основное свойство неопределенного интеграла:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)) dx = A_1 \int f_1(x) dx + A_2 \int f_2(x) dx + C, \quad (3)$$

где C есть некоторая постоянная.

В самом деле, по определению неопределенного интеграла слева в (3) стоит какая-то одна из первообразных функций

от $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$. С другой стороны, имеет место равенство

$$\begin{aligned} (A_1 \int f_1(x) dx + A_2 \int f_2(x) dx)' &= \\ &= A_1 \left(\int f_1(x) dx \right)' + A_2 \left(\int f_2(x) dx \right)' = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x), \end{aligned}$$

потому что интегралы $\int f_1 dx$, $\int f_2 dx$ обозначают соответственно некоторые первообразные функции от f_1 и f_2 . Поэтому правая часть (3) без последнего члена C есть также первообразная для $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$, но тогда она отличается от левой части (3) на некоторую постоянную.

Свойство (3) по индукции распространяется на любое конечное число непрерывных на (a, b) функций $f_1, \dots, f_n$ и постоянных $A_1, \dots, A_n$:

$$\int \left(\sum_{j=1}^n A_j f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^n A_j \int f_j(x) dx + C. \quad (4)$$

Как следствие при $A_1 = 1$, $A_2 = \pm 1$, $n = 2$ получаем равенство

$$\int (f_1 \pm f_2) dx = \int f_1 dx \pm \int f_2 dx + C,$$

а при $A_1 = A$ и $A_2 = 0$, $f_1 = f$ — равенство

$$\int A f dx = A \int f dx + C.$$

Примеры.

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C, \quad a \neq 0,$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^n}{n} \right)' &= \frac{1}{n} (x^n)' = x^{n-1}, \\ \left(\frac{\sin ax}{a} \right)' &= \frac{1}{a} (\sin ax)' = \frac{1}{a} a \cos ax = \cos ax, \\ \left(-\frac{\cos ax}{a} \right)' &= -\frac{1}{a} (\cos ax)' = \sin ax. \end{aligned}$$

Из (4) следует, что неопределенный интеграл от многочлена $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ степени n (a_k — постоянные) равен

$$\int P_n(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Приведем основную таблицу неопределенных интегралов, составленную непосредственно из формул производных от элементарных функций (см. § 5.5—5.12):

$$\begin{aligned}
 \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C & \int \cos x dx &= \sin x + C, \\
 &(a \neq -1), & \int \sec^2 x dx &= \operatorname{tg} x + C, \\
 \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C^*), & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C = \\
 \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C & &= -\arccos x + \\
 &(a \neq 1, a > 0), & &+ C_1 (C_1 - C = \frac{\pi}{2}), \\
 \int e^x dx &= e^x + C, & \int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x + C. \\
 \int \sin x dx &= -\cos x + C,
 \end{aligned}$$

В каждом из этих равенств производная от правой части равна подынтегральной функции в левой.

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить интегралы **)

1. $\int \sqrt{x} dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
3. $\int \frac{dx}{x^2}$.
4. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$.
5. $\int \frac{dx}{x^2+4}$.
6. $\int (2 \sin x - 3 \cos x) dx$.
7. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.
8. $\int 2^x dx$.
9. $\int \frac{x e^x - x}{x} dx$.
10. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx$.

§ 7.3. Замена переменной

При вычислении неопределенных интегралов нередко пользуются *методом подстановки* или *замены переменной*. Он сводится к формуле

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du + C, \quad (5)$$

где $f(u)$ — непрерывная функция, а $u = \varphi(x)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

*) Для $x > 0$ имеем $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, а для $x < 0$ $(\ln |x|)' = (\ln (-x))' = -\frac{1}{(-x)} = \frac{1}{x}$.

**) Решение задач 5, 10 можно отложить до § 7.3.

Это надо понимать так. Если подынтегральное выражение интеграла удалось представить в виде

$$F(x) dx = f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx,$$

то можно в этом интеграле чисто формально произвести замену $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x) dx$, проинтегрировать полученное выражение $f(u) du$ по переменной u , а затем заменить u на $\varphi(x)$. Выражение $du = \varphi'(x) dx$ называется *дифференциалом функции* $\varphi(x)$. Оно имеет в анализе самостоятельное значение, но мы в этой книге пользуемся им только как обозначением.

Поясним формулу (5) на примере

$$\int \cos(kx) k dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin kx + C.$$

Мы сделали подстановку $u = kx$, $du = (kx)' dx = k dx$, в силу которой наш интеграл превратился в табличный.

Чтобы доказать формулу (5), надо убедиться в том, что производная по x от ее левой части равна производной по x от правой части. В самом деле,

$$\begin{aligned} \left(\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \right)'_x &= f[\varphi(x)] \varphi'(x), \\ \left(\int f(u) du \right)'_x &= \left(\int f(u) du \right)'_u u'_x = f(u) \varphi'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x). \end{aligned}$$

Приведем несколько примеров на применение метода подстановки:

$$\int e^{kx} dx = \int e^t \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \int e^t dt = \frac{1}{k} e^t + C = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

(подстановка $kx = t$, откуда $k dx = dt$);

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \int dt = -t + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

(подстановка $t = \sqrt{a^2 - x^2}$, откуда $dt = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$);

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} a \cos u du = \\ &= a^2 \int \cos^2 u du = a^2 \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \frac{a^2}{2} \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} (u + \sin u \cos u) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C \end{aligned}$$

(подстановка $x = a \sin u$);

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \int \cos kx k dx = \frac{1}{k} \int \cos u du = \\ = \frac{1}{k} \sin u + C = \frac{1}{k} \sin kx + C.$$

$$\int \sqrt{1+x^2} x dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \\ = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} + C$$

(подстановка $u = 1 + x^2$, $du = 2x dx$);

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \\ = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

(подстановка $u = 1 + x^2$, $du = 2x dx$).

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx$. 2. $\int (x^2+1)^2 x dx$. 3. $\int \lg x dx$.
4. $\int e^{x^2} x dx$. 5. $\int e^{x^2} x^3 dx$. 6. $\int \cos^3 x dx$. 7. $\int e^{2x} dx$.
8. $\int \cos 3x dx$. 9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$. 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
11. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 12. $\int e^{x^2-1} x dx$.

§ 7.4. Проблема интегрирования элементарных функций

Как видно из примеров, метод замены переменных значительно расширяет класс тех элементарных функций, которые мы теперь можем проинтегрировать, т. е. получить для них первообразные, являющиеся снова элементарными функциями. Однако надо иметь в виду, что с вычислительной точки зрения с интегрированием обстоит дело, вообще говоря, гораздо хуже, чем с дифференцированием.

Из гл. 5 известно, что производная от любой элементарной функции есть снова элементарная функция, которую можно получить совершенно эффективно, воспользовавшись правилами дифференцирования. Но обратное

утверждение, вообще говоря, неверно, так как существуют такие элементарные функции, неопределенные интегралы от которых не являются в свою очередь элементарными функциями. Например, такими функциями являются e^{-x^2} ,

$\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$ и др. Для получения интегралов от них приходится пользоваться приближенными методами и вводить в обиход новые функции, не сводимые к элементарным. Мы не имеем возможности задерживаться на этом вопросе, заметим только, что уже в элементарной математике можно найти много примеров, когда прямая операция выполняема в некотором классе чисел, в то время как обратная ей операция в этом же классе не выполняется; так, квадрат любого рационального числа есть снова рациональное число, но корень квадратный из рационального числа далеко не всегда является рациональным числом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое первообразная функция для данной функции?

2. Что такое неопределенный интеграл от функции?

3. Запомните формулы (3) и (5), выражающие основные свойства неопределенного интеграла, и основную таблицу неопределенных интегралов (см. § 7.2).

4. Приведите три примера применения метода замены переменных в неопределенном интеграле.

§ 7.5. Площадь криволинейной фигуры.

Определенный интеграл

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изображен на рис. 107. Поставим задачу разумно определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x , прямыми $x = a$ и $x = b$, и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad (6)$$

выберем на каждом из частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (7)$$

по произвольной точке ξ_j , определим значения $f(\xi_j)$ функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \quad (8)$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников (рис. 107).

Будем теперь стремиться все Δx_j к нулю, и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S , не зависящему от

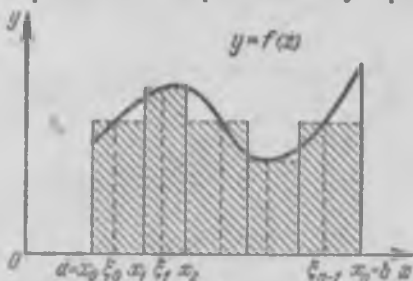


Рис. 107

способа разбиения (6) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то величину S называют *площадью данной криволинейной фигуры*. Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j. \quad (9)$$

Итак, мы дали определение площади криволинейной фигуры. Возникает вопрос: имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n , когда $\max \Delta x_j \rightarrow 0$? Этот вопрос решается положительно: *каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле указанного определения, выражаемую зависящим от этой фигуры числом S .*

Другой возникающий здесь вопрос — насколько естественно данное определение площади, — как всегда в таких случаях решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение.

Но обратим внимание на выражение (9). Отвлекаясь от задачи нахождения площади, мы можем на него смотреть как на некоторую операцию, при помощи которой по данной функции f , заданной на $[a, b]$, определяется число S . Она называется *операцией интегрирования* функции f на (конечном) отрезке $[a, b]$, а результат ее, если

он существует, называется *определенным интегралом* от f на $[a, b]$ и записывается так:

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x) dx. \quad (10)$$

В этом определении функция $f(x)$ не обязательно положительная на $[a, b]$. Она может быть отрицательной или менять знак на $[a, b]$.

Итак, *определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы (10), когда максимальный частичный отрезок разбиения (6) стремится к нулю.*

В теории определенного интеграла доказывается, что *всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем, т. е. для нее предел (10) существует.* Отсюда и следует упомянутый факт, что всякая фигура рассмотренного выше типа (см. рис. 107) имеет площадь.

Пример. Площадь S , ограниченная параболой $y = x^2$, осью x , прямой $x = 1$, как доказано в § 3.1, равна

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Тот факт, что сумма $\sum_0^{n-1} (x_j)^2 \Delta x_j$, соответствующая произвольному разбиению $[0, 1]$ и произвольному выбору точек ξ_j , принадлежащих отрезкам $[x_j, x_{j+1}]$, стремится к $\frac{1}{3}$, когда $\max \Delta x_j \rightarrow 0$, непосредственно доказать элементарными методами не так уж просто. Это, однако, следует из упомянутого утверждения, что определенный интеграл от непрерывной на (конечном) отрезке функции всегда существует.

§ 7.6. Работа. Масса стержня

Приведем другие примеры практических задач, решение которых сводится к вычислению определенных интегралов.

Работа. Пусть к движущейся по прямой точке приложена направленная вдоль этой прямой переменная сила $F = f(x)$, где $f(x)$ есть непрерывная функция от x — абсциссы движущейся точки. Работа силы F при передви-

жении точки от a до b равна

$$W = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x) dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$. В самом деле, в силу непрерывности f произведение $f(x_j) \Delta x_j$ близко к истинной работе на $[x_j, x_{j+1}]$, а сумма таких произведений близка к истинной работе на $[a, b]$, и притом тем ближе, чем меньше $\max \Delta x_j$.

Масса стержня переменной плотности. Будем считать, что отрезок $[a, b]$ оси x имеет массу с переменной линейной плотностью $\rho(x) \geq 0$, где $\rho(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Общая масса этого отрезка

$$M = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \rho(x_j) \Delta x_j = \int_a^b \rho(x) dx,$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

§ 7.7. Теорема Ньютона — Лейбница

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (10) связано с трудностями: интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую нелегко преобразовывать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решили задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц, указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного интеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Теорема Ньютона — Лейбница. Пусть задана непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ и пусть $F(x)$ есть ее

первообразная. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (11)$$

Формула (11) показывает, что если для функции f известна ее первообразная F , то вычисление определенного интеграла от f на $[a, b]$ сводится к простой подстановке чисел a и b в F . Дадим простое механическое толкование этой теоремы. Будем считать, что x есть время, а функция $y = F(x)$ выражает закон движения точки по прямой, т. е. y есть расстояние с соответствующим знаком в момент x движущейся точки до закрепленной нулевой точки.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени $a \leq x \leq b$, очевидно, равен *)

$$\Delta = F(b) - F(a). \quad (12)$$

С другой стороны, он может быть вычислен интегрированием скорости $f(x) = F'(x)$ точки:

$$\Delta = \lim_{\max \Delta x_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x) dx. \quad (13)$$

Мы разделили промежуток времени $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. В силу непрерывности функции f скорость точки на отрезке времени $[x_j, x_{j+1}]$ можно считать приближенно постоянной, равной числу $f(x_j)$. Тогда путь, пройденный точкой на этом отрезке времени, будет приближенно равен $f(x_j) \Delta x_j$, а весь путь будет приближенно равен сумме $\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \Delta x_j$. Если $\max \Delta x_j \rightarrow 0$, то эта сумма стремится к числу, равному истинной величине пути, пройденного точкой за промежуток времени $[a, b]$. В то же время это число есть, очевидно, определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b . Но тогда из (12) и (13) следует (11).

Обычно пишут, что $F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

*) Впрочем, термин «путь, пройденный точкой», не совсем точно выражает данное явление. Если, например, закон движения таков, что точка сначала продвинулась вправо, пройдя путь Δ_1 , а затем влево, пройдя путь Δ_2 , то $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$.

Примеры.

$$\int_a^b x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} \Big|_a^b = \frac{1}{n} (b^n - a^n), \quad n \neq 0,$$

$$\int_a^b \cos \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \Big|_a^b = \frac{1}{\alpha} (\sin \alpha b - \sin \alpha a), \quad \alpha \neq 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на $[0, \pi]$ и осью x .

2. Определите площадь, ограниченную параболой $y = 4x - x^2$ и осью x .

3. Вычислите интеграл $\int_0^{2\pi} \sin x dx$.

4. Вычислите площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$ и осью x .

5. Вычислите путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за первые T секунд движения, если известно, что скорость свободного падения в пустоте $v = v_0 + gt$, где t — время, g — ускорение силы тяжести, v_0 — начальная скорость.

6. При растяжении пружины в пределах ее упругости сила сопротивления, возникающая в ней, равна $F = kx$, где x — удлинение пружины, а k — коэффициент, характеризующий свойства пружины. Вычислите работу, которую надо затратить, чтобы в результате получилось удлинение l .

7. Вычислите интегралы $\int_{-1}^1 x^2 dx$ и $\int_{-1}^1 x^3 dx$, нарисуйте графики функций x^2 и x^3 и объясните результаты.

8. Что такое определенный интеграл от функции $f(x)$?

9. Как вычисляется определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ через первообразную от $f(x)$?

10. В чем заключается связь между определенным интегралом и площадью соответствующей фигуры?

11. Как вычисляется работа силы при помощи определенного интеграла?

12. Сформулируйте теорему Ньютона — Лейбница.

§ 7.8. Доказательство формулы Ньютона — Лейбница

Пусть $f(x)$ есть непрерывная положительная функция на отрезке $[a, b]$ и пусть u есть произвольная точка интервала (a, b) (рис. 108).

Определенный интеграл

$$\Phi(u) = \int_a^u f(x) dx$$

от функции $f(x)$ на отрезке $[0, u]$ есть площадь затушенной (одной штриховкой) фигуры. Если верхний предел интеграла есть переменная величина u , то интеграл $\Phi(u)$ есть функция верхнего предела.

Приращение Φ в точке u , соответствующее приращению h ($h > 0$) аргумента u , есть площадь фигуры, затушенной двойной штриховкой:

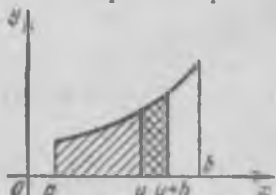


Рис. 108

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) = \int_a^{u+h} f(x) dx - \int_a^u f(x) dx = \int_u^{u+h} f(x) dx.$$

Обозначим через m минимальную ординату, а через M — максимальную ординату графика $y=f(x)$ на отрезке $[u, u+h]$. Очевидно,

$$mh \leq \Phi(u+h) - \Phi(u) \leq Mh$$

или

$$m \leq \frac{\Phi(u+h) - \Phi(u)}{h} \leq M.$$

Если h стремиться к нулю, то $m \rightarrow f(u)$, $M \rightarrow f(u)$, следовательно, существует производная

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(u+h) - \Phi(u)}{h} = \Phi'(u) = f(u).$$

Мы доказали, что производная интеграла как функции верхнего предела равна подынтегральной функции:

$$\frac{d}{du} \int_a^u f(x) dx = f(u).$$

Таким образом, $\Phi(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$. Любая другая первообразная $F(x)$ отличается

от нее на постоянную:

$$F(x) = \Phi(x) + C.$$

Но

$$\Phi(a) = \int_a^a f(x) dx = 0$$

и

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + c) - \\ - (F(a) + c) = F(b) - F(a), \end{aligned}$$

и мы доказали формулу Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

§ 7.9. Свойства определенных интегралов

Основные свойства определенного интеграла выражаются формулами

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (14)$$

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx, \text{ где } A \text{ — постоянная,} \quad (15)$$

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (16)$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_c^d f(u) du, \text{ где } c = \varphi(a), \quad d = \varphi(b). \quad (17)$$

Свойство (14) (для случая $a < c < b$) видно из рис. 109: площадь криволинейной трапеции над $[a, b]$ равна площади над $[a, c]$ плюс площадь над $[c, b]$.

Свойство (15) выражает, что площадь криволинейной трапеции, определяемой функцией $f(x)$, увеличивается в A раз для функции $Af(x)$.

Свойство же (16) выражает, что площадь криволинейной трапеции, определяемой суммой $f(x) + \varphi(x)$, равна сумме площадей, соответствующих слагаемым $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Конечно, в этих пояснениях мы неявно предполагали, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, так же как и число A , неотрицательные. Ведь если, например, $f(x) < 0$ на $[a, b]$, то интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ равен площади соответ-

ствующей криволинейной трапеции, взятой со знаком минус. Но и в этом и вообще в других случаях свойства (14) — (17) верны.

Из (15) следует

$$\int_a^b [-f(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

$$\begin{aligned} \int_a^b [Af(x) + B\varphi(x)] dx &= \int_a^b Af(x) dx + \int_a^b B\varphi(x) dx = \\ &= A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

где A и B — постоянные.

Последнее равенство легко по индукции распространить на любое конечное число слагаемых. Например,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 - 2x + 1) dx &= \int_0^1 x^3 dx - 2 \int_0^1 x dx + \int_0^1 1 dx = \\ &= \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 - 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \left. x \right|_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}, \\ \int_0^{\pi/2} (2 \cos x + 3 \sin x) dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos x dx + 3 \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \\ &= 2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 3 \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

В формуле (17) $\varphi(x)$ есть непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, для которой $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$. Если $F(u)$ — первообразная для $f(u)$, то

$$(F[\varphi(x)])'_x = f[\varphi(x)] \varphi'(x),$$

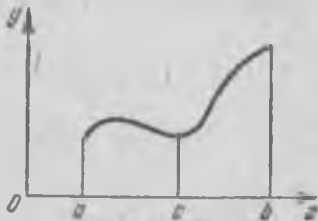


Рис. 109

поэтому

$$\int_a^b f(u) du = F(b) - F(a) = F[\varphi(b)] - F[\varphi(a)] = \int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx.$$

Пример.

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u du = \frac{1}{2} (-\cos u) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

(подстановка $u = 2\theta$; $\theta = 0$, $u = 0$; $\theta = \pi/2$, $u = \pi$).

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить интегралы:

1. $\int_1^3 (x^3 - 3x + 2) dx$. 2. $\int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$.

3. $\int_0^{\pi/2} (\cos 2x - \sin 3x) dx$. 4. $\int_0^1 (e^{x^2} x + e^{-x}) dx$.

5. $\int_0^{2\pi} (\cos 3x + \sin 2x) dx$. 6. $\int_0^1 e^{x^3} x dx$. 7. $\int_0^1 e^{3x} dx$.

8. $\int_0^{\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$. 9. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx$.

10. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$. 11. $\int_0^1 (x^2 + 1)^3 x dx$. 12. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$.

§ 7.10. Площадь круга

Уравнение окружности (рис. 110) радиуса R с центром в начале координат x , y имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Следовательно, уравнение ее части, расположенной выше оси x , записывается в виде

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leq x \leq R).$$

Но тогда площадь круга радиуса R равна (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \theta} R \cos \theta d\theta = \\
 &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \\
 &= 2R^2 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2.
 \end{aligned}$$

Во втором равенстве этой цепи сделана замена переменной

$$x = R \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

и использована формула (17), но примененная в обратном порядке. При возрастании переменной θ от $-\pi/2$ до $\pi/2$



Рис. 110



Рис. 111

переменная x возрастает от $-R$ до R . При этом

$$dx = R \cos \theta d\theta.$$

§ 7.11. Длина окружности

Площадь круга есть функция $S = \pi R^2$ от R . Придадим R приращение $\Delta R > 0$. Тогда соответствующее приращение

$$\Delta S = S(R + \Delta R) - S(R)$$

будет представлять собою площадь заштрихованного кольца на рис. 111. Длина окружности $L(R)$ есть тоже функ-

ция от R . Очевидно,

$$L(R) \Delta R < \Delta S < L(R + \Delta R) \Delta R,$$

поэтому

$$L(R) < \frac{\Delta S}{\Delta R} < L(R + \Delta R).$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $\Delta R \rightarrow 0$, учитывая, что функция $L(R)$ непрерывна, получаем

$$\lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta R} = L(R),$$

т. е.

$$L(R) = S'(R) = (\pi R^2)' = 2\pi R,$$

и мы получили формулу длины окружности.

§ 7.12. Объем тела вращения

Пусть Γ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$). Вычислим объем V тела вращения, ограниченного по-

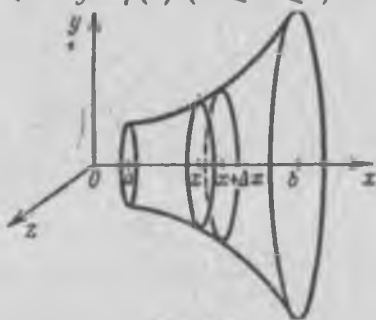


Рис. 112

верхностью вращения кривой Γ вокруг оси x и плоскостями, проходящими через точки $x = a$, $x = b$ перпендикулярно оси x (см. рис. 112).

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и будем считать, что элемент объема ΔV_k тела вращения, ограничен-

ный плоскостями, проходящими через точки x_k и x_{k+1} перпендикулярно оси x , приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \approx \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k.$$

Но тогда объем V может быть записан при помощи приближенного равенства $V \approx \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k$. Чтобы получить точное равенство, надо взять предел

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \Delta x_k = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

и мы получаем формулу для объема тела вращения

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (18)$$

§ 7.13. Объем шара

Объем V шара радиуса R равен

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

В самом деле, круг радиуса R в плоскости xOy имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а верхняя полуокружность Γ имеет уравнение

$$y = +\sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leq x \leq R).$$

Если вращать Γ вокруг оси x , то получим поверхность нашего шара. Но тогда согласно формуле (18)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (V \sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned} \quad (19)$$

§ 7.14. Площадь поверхности шара

Объем шара радиуса R

$$V(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

есть функция от R .

Площадь $S(R)$ поверхности этого шара можно получить как производную:

$$S(R) = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{V(R + \Delta R) - V(R)}{\Delta R} = \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)' = 4\pi R^2.$$

Поясним эти выкладки. Приращение объема шара, соответствующее приращению ΔR ,

$$\Delta V = V(R + \Delta R) - V(R),$$

очевидно, равно объему слоя, ограниченного изнутри шаровой поверхностью радиуса R и извне шаровой поверх-

ностью радиуса $R + \Delta R$. Если $S(R)$ есть площадь поверхности шара радиуса R , то, очевидно,

$$S(R) \Delta R < \Delta V < S(R + \Delta R) \Delta R$$

или

$$S(R) < \frac{\Delta V}{\Delta R} < S(R + \Delta R).$$

Поэтому, учитывая непрерывность $S(R)$, получим

$$S(R) = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta R} = V'(R).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить объем кругового цилиндра высоты H и радиуса основания R .

2. Вычислить объем тела вращения, ограниченного плоскостью, проходящей через точку $x=1$ оси x перпендикулярно к ней, и поверхностью вращения около оси x кривой:

- 1) $y = x^2$ (рис. 113); 2) $y = x^3$;
3) $y = \sqrt{x}$.

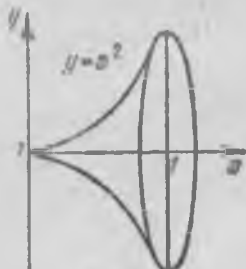


Рис. 113

§ 7.15. Работа электрического заряда

Пусть c и c' — два заряда, находящиеся на прямой на расстоянии r друг от друга. Сила взаимодействия F

между ними направлена вдоль этой прямой и равна $F = \frac{a}{r^2}$ ($a = kcc'$, где k — постоянная). Работу W этой силы, когда заряд c неподвижен, а заряд c' передвигается по отрезку $[R_1, R_2]$, можно подсчитать, разбивая отрезок $[R_1, R_2]$ на части длины Δr_i . На каждой из них приближенно считаем силу постоянной, тогда работа на таком участке равна $\frac{a}{r_i^2} \Delta r_i$. Делая частицы разбиения все более мелкими, убеждаемся, что работа W равна интегралу

$$W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum \frac{a}{r^2} \Delta r = \int_{R_1}^{R_2} \frac{a}{r^2} dr \quad (0 < R_1 < R_2).$$

Этот интеграл мы сразу находим, принимая во внимание, что

$$\frac{a}{r^2} = \left(-\frac{a}{r} \right)';$$

отсюда

$$W = -\frac{a}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} = a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

В частности, работа, выполненная силой F' при передвижении заряда c' , находившегося сначала на расстоянии R_1 от заряда c , на бесконечность, равна

$$W = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} a \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{a}{R_1} \quad (0 < R_1).$$

При $c' = 1$ мы получили потенциал заряда c как функцию от R .

§ 7.16. Давление жидкости на стенку

Бассейн высоты H наполнен водой. Вычислить давление воды на прямоугольную стенку бассейна, с основанием прямоугольника, равным a .

Делим высоту на равные малые части Δh . Стенка разделяется на «элементы» (один из них заштрихован, рис. 114). Так как кубометр воды весит тонну, то давление столба жидкости высоты h_i м, имеющего сечение 1 м^2 , равно h_i тоннам. Давление же воды на элемент, находящийся на глубине h_i , равно произведению h_i на площадь элемента: $h_i a \Delta h$. Величина давления на стену приближенно равна

$$P \approx \sum_{i=1}^n a h_i \Delta h = a \sum_{i=1}^n h_i \Delta h,$$

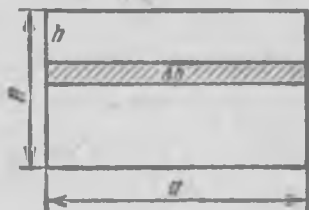


Рис. 114

где сумма распространена на все Δh . Точное же ее выражение равно интегралу

$$P = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} a \sum_{i=1}^n h_i \Delta h = a \int_0^H h \, dh = a \frac{h^2}{2} \Big|_0^H = \frac{aH^2}{2}.$$

§ 7.17. Центр тяжести

Центр тяжести системы материальных точек

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$

с массами $m_1, m_2, \dots, m_N$ соответственно имеет координаты

$$x_0 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j x_j}{\sum_{j=1}^N m_j}, \quad y_0 = \frac{\sum_{j=1}^N m_j y_j}{\sum_{j=1}^N m_j}.$$

Эти формулы распространяются на непрерывно распределенные по площади массы. Роль конечных сумм играют тогда интегралы.

Найдем центр тяжести сегмента параболы $y = 1 - x^2$ с

равномерно распределенной по нему массой, ограниченного снизу осью x (рис. 115). Для этого отрезок $[-1, 1]$ оси x разделим на n равных частей длины Δx . Одна такая часть заштрихована на рис. 115. Ввиду малости Δx можно считать, что масса заштрихованного элемента сегмента равна

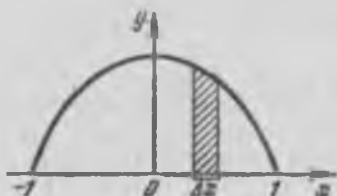


Рис. 115

$$\rho f(x_i) \Delta x = \rho y_i \Delta x$$

и она сконцентрирована в точке $(x_i, \frac{y_i}{2})$. Здесь ρ — плотность распределения массы.

Ввиду симметрии сегмента абсцисса его центра тяжести равна $x_0 = 0$. Ординату же можно приближенно записать в виде

$$y_0 \approx \frac{\rho \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{2} y_i \Delta x}{\rho \sum_{i=1}^n y_i \Delta x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta x}{\sum_{i=1}^n y_i \Delta x},$$

где сумма распространена на все частичные отрезки деления $[-1, 1]$.

Точное выражение для ординаты центра тяжести нашей фигуры получим, перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$y_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta x}{\sum_{i=1}^n y_i \Delta x} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}, \quad (20)$$

где в данном случае $a = -1$, $b = 1$. Таким образом,

$$y_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2) dx} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Выражение (20) можно рассматривать как общую формулу для ординаты центра тяжести фигуры, изображенной на рис. 116, с равномерно распределенной по ней массой. Соответствующая формула для x_0 имеет вид

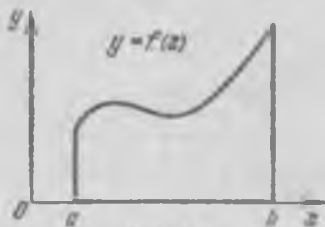


Рис. 116

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. В бассейн с водой опущена полукруглая пластина радиуса R так, что ее диаметр находится на уровне воды (рис. 117). Определить давление воды на одну из сторон пластины.

2. Найти координаты центра тяжести верхнего полукруга $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

3. Найти координаты центра тяжести сегмента параболы $y = 1 - x^2$, ограниченного сверху прямой $y = 1$.



Рис. 117

4. Сила тока в проводнике есть функция времени $y = 1 + t^2$. Какое количество электричества проходит через сечение проводника за промежуток времени $0 \leq t \leq 3$?

5. Чему равна производная определенного интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу?

6. Сформулируйте и запишите основные свойства определенных интегралов.

7. Чему равны а) площадь круга, б) длина окружности, в) объем шара, г) площадь поверхности шара.

8. Запишите формулу для объема вращения. Объясните ее.

9. Запишите формулу

а) для центра тяжести системы материальных точек;

б) для координат центра тяжести системы материальных точек;

в) для координат центра тяжести, выраженных через интегралы.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8.1. Охлаждение тела

Тело, имеющее температуру θ_0 , помещено в среду с температурой 0° ($\theta_0 > 0$). Требуется найти закон $\theta(t)$ изменения его температуры в зависимости от времени t .

Из курса физики известно, что скорость охлаждения тела $\frac{d\theta}{dt}$ пропорциональна разности температуры тела и окружающей среды. Учитывая, что функция $\theta(t)$ убывающая, получаем равенство

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta, \quad (1)$$

где A — коэффициент пропорциональности. Мы получили уравнение относительно неизвестной функции $\theta = \theta(t)$. Оно называется *дифференциальным уравнением*, потому что в него входит неизвестная под знаком производной.

Этому уравнению удовлетворяет функция

$$\theta = Ae^{-kt}, \quad (2)$$

где A может быть любой постоянной. В самом деле,

$$\frac{d\theta}{dt} = -kAe^{-kt}. \quad (3)$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим тождество, т. е. равенство, верное для любого t . Формула (2) дает бесконечно много решений поставленной задачи, соответствующих разным значениям постоянной A . Для нашей задачи $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, откуда $A = \theta(0) = \theta_0$ и решение данной задачи имеет вид

$$\theta = \theta_0 e^{-kt}.$$

Из полученной формулы видно, что $\theta = \theta_0$ при $t = 0$, затем с увеличением t температура θ тела весьма быстро

уменьшается. При $t \rightarrow +\infty$ она стремится к нулю ($\theta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Замечание 1. Дифференциальное уравнение (1) можно рассматривать как уравнение радиоактивного распада. В этом случае $\theta = \theta(t)$ есть масса вещества, подвергающегося распаду, а θ_0 — его масса в момент времени $t = 0$.

Задача. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, обращающееся в $y = y_0$ при $t = 0$:

$$a) \frac{dy}{dt} = -2y, \quad б) \frac{dy}{dt} = -y, \quad в) \frac{dy}{dt} = 3y.$$

§ 8.2. Нахождение закона движения тела по его скорости

Точка движется по оси x . Ее скорость — заданная функция времени $v = f(t)$. Надо найти закон движения точки, т. е. зависимость ее координаты x от t , или, как говорят, зависимость пути от времени.

Решение. Пусть искомый закон движения определяется формулой $x = F(t)$. Производная от x по t равна $v = f(t)$, т. е.

$$F'(t) = f(t). \quad (4)$$

Мы получили дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $F(t)$. Его решить нетрудно: оно показывает, что $F(t)$ есть первообразная от f . Следовательно,

$$F(t) = \int f(t) dt + C, \quad (5)$$

где C — произвольная постоянная. Чтобы найти C для конкретного закона, надо знать дополнительно, где находилась точка в некоторый момент времени t , например при $t = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка движется по оси x со скоростью

а) $v = 3$, б) $v = a$, в) $v = 2t$, г) $v = at$, $v = \cos t$, д) $v = \cos t$,
е) $v = e^t$.

Найти возможные законы ее движения. Определить среди этих законов тот, для которого $x = 0$ при $t = 0$, а также тот, для которого $x = 1$ при $t = 1$.

Решение, а) $x = \int 3dt + C = 3t + C$. При условии $t = 0$, $x = 0$, получим $C = 0$; следовательно, в этом случае закон движения имеет вид $x = 3t$. При условии $t = 1$, $x = 1$, получим $1 = 3 + C$, т. е. $C = -2$. Закон имеет вид $x = 3t - 2$.

§ 8.3. Равномерно ускоренное движение

Точка движется по оси x равномерно ускоренно с ускорением, равным a . Найти закон ее движения.

Решение. Пусть искомый закон движения определяется функцией $x = F(t)$. По условию вторая ее производная равна a :

$$F''(t) = a.$$

Но первая производная есть первообразная от второй, поэтому

$$F'(t) = \int a dt + b = at + b,$$

где b — произвольная постоянная. Искомая же функция $F(t)$ есть первообразная от $F'(t)$, поэтому

$$F(t) = \int (at + b) dt + C = \frac{at^2}{2} + bt + C.$$

Итак, общий закон движения выражается формулой

$$x = F(t) = \frac{at^2}{2} + bt + C, \quad (6)$$

где b и C — произвольные постоянные. Таким образом, имеется бесконечно много законов движения, решающих задачу — каждой паре чисел b и c соответствует свой конкретный закон. Чтобы найти закон, соответствующий данному движению, надо, например, знать, где находилась точка в некоторый момент времени t_0 и какова была скорость v_0 ее в этот момент.

Задача. Из винтовки выстрелили вверх. Напишите закон движения пули, считая, что ускорение земного притяжения 10 м/с, скорость вылета пули из винтовки 800 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Ось x направим вертикально вверх, ее начало считаем точкой вылета пули, за единицу длины примем метр. Ускорение силы тяжести направлено вниз вместе с силой тяжести. Поэтому в наших расчетах надо считать ускорение равным отрицательному числу -10 .

На основании формулы (6) закон движения выражается функцией $x = -5t^2 + at + C$. Так как пуля в момент $t = 0$ имела координату $x = 0$, то $0 = 0 + 0 + C$ или $C = 0$, поэтому

$$x = -5t^2 + at.$$

Чтобы определить a , возьмем производную от x по t :

$$\frac{dx}{dt} = -10t + a.$$

При $t = 0$ производная равна скорости вылета пули 800 м/с. Поэтому $a = 800$, и закон движения имеет вид

$$x = -5t^2 + 800t.$$

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Нарисуйте график функции $x = -5t^2 + 800t$ и определите наибольшую высоту достижения пули, момент ее достижения, момент падения на землю и скорость в момент падения.

2. Материальная точка падает с высоты 1000 м. Через сколько времени она упадет на землю и с какой скоростью? Сопротивлением воздуха пренебречь и за ускорение земного притяжения принять 10 м/с.

3. На высоте 2000 м от земли выстрелили из винтовки вверх. Скорость вылета пули 800 м/с. Написать закон движения пули, нарисовать его график. Какой наибольшей высоты достигнет пуля и через сколько времени? Через какое время пуля упадет на землю и с какой скоростью? Сопротивлением воздуха пренебречь и за ускорение земного притяжения принять 10 м/с.

4. В предыдущей задаче считать, что выстрел направлен вниз. Через какое время пуля достигнет земли и с какой скоростью упадет на землю?

§ 8.4. Колебание пружины

Внизу к висящей пружине прикреплен груз m . Ось x направлена вдоль пружины вниз (рис. 118). В неподвижном состоянии груз находится в начале оси x . Выведем пружину из равновесия, сжав или растянув ее, и представим самой себе с момента времени $t = 0$. Груз будет колебаться в вертикальном направлении. Пусть $x = x(t)$ — координата груза в момент t . Чтобы найти функцию $x(t)$, напомним ее дифференциальное уравнение.

По закону Ньютона в любой момент времени произведение массы груза на его ускорение m равно силе, действующей на груз в этот момент. Это сила упругости, равная по закону Гука произведению некоторого постоянного коэффициента a на величину отклонения груза от положения равновесия. Сила эта, таким образом, равна $-ax$. Знак минус возникает из следующих соображений.

Если $x > 0$, то пружина (рис. 118) находится в растянутом состоянии и сила упругости действует на груз снизу вверх, т. е. она отрицательна; если же $x < 0$, то пружина сжата и сила упругости положительна.

Итак, $mx'' = -ax$ или

$$x'' + k^2 x = 0 \quad \left(k^2 = \frac{a}{m}\right). \quad (7)$$

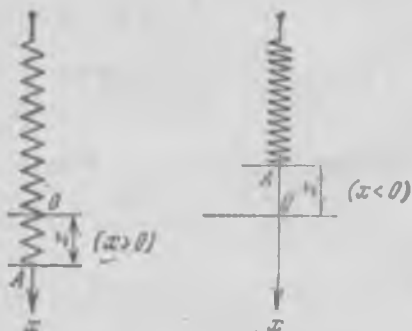


Рис. 118

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, потому что неизвестная функция в нем находится под знаком второй производной. Функции $\sin kt$ и $\cos kt$ являются решениями уравнения (7), потому что, например,

$$(\sin kt)'' + k^2 \sin kt = -k^2 \sin kt + k^2 \sin kt = 0.$$

Но тогда функция вида

$$x(t) = A \sin kt + B \cos kt, \quad (8)$$

где A и B — любые произвольные постоянные, есть тоже решение уравнения (7). Ведь если y — решение, то Ay есть тоже решение:

$$(Ay)'' + k^2 Ay = A(y'' + k^2 y) = A \cdot 0 = 0,$$

а также, если y и z — решения, то и $y + z$ есть решение:

$$(y + z)'' + k^2 (y + z) = (y'' + k^2 y) + (z'' + k^2 z) = 0 + 0 = 0.$$

Выходит, что дифференциальное уравнение (7) имеет бесконечно много решений, соответствующих произвольным парам чисел A и B . Каждое конкретное движение находится заданием двух начальных условий. Обычно в ка-

честве этих начальных условий задают два числа x_0 и x'_0 , где x_0 — отклонение груза в момент времени $t=0$, а x'_0 — скорость, сообщенная грузу в момент $t=0$.

Например, пусть $x'_0=0$ и $x_0 \neq 0$ при $t=0$. Тогда из формулы (8) следует, что $x_0=B$, $x'(t)=kA \cos kt - x_0 k \sin kt$ и $0=kA$ или $A=0$. Поэтому груз колеблется по закону

$$x(t) = x_0 \cos kt.$$

Мы знаем, что формулу (8) можно записать в виде

$$x = C \cos(kt - \alpha) \quad (C > 0). \quad (8')$$

Число C называется *амплитудой* колебания. Отклонение груза $x(t)$ от точки 0 удовлетворяет неравенствам $-C \leq x(t) \leq C$, и при этом существуют значения t , для которых $x=C$ и $x=-C$. Число k называется *частотой* колебания. Функция (8) имеет период, равный $\frac{2\pi}{k}$. За единицу времени происходит $1 : \frac{2\pi}{k} = \frac{k}{2\pi}$ колебаний. Наконец, число α называется *фазой* колебания.

З а м е ч а н и е. Формула (8') моделирует процесс колебания пружины неточно и пригодна только для достаточно малого отрезка времени $[0, t_0]$, при ее выводе не учтены трения, возникающие при колебании пружины, и сопротивление воздуха.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Написать уравнение описанного выше движения груза при условии, что начальное (при $t=0$) его отклонение x_0 и начальная скорость x'_0 равняются

а) $x_0=0,01$, $x'_0=0$; б) $x_0=0$, $x'_0=0,01$.

2. Напишите дифференциальное уравнение для температуры охлаждающегося тела. Напишите общую формулу решения этого уравнения. Много ли решений имеет это уравнение? Как можно выделить частное решение? Почему это уравнение называется уравнением первого порядка?

3. Напишите дифференциальное уравнение, выражающее связь между законом движения тела и скоростью движения. Каков порядок этого уравнения? Напишите общую формулу решения этого уравнения.

4. Напишите дифференциальное уравнение для закона равномерного ускоренного движения. Каков его порядок?

Напишите общую формулу решения этого уравнения. От скольких произвольных постоянных это решение зависит? Что надо знать, чтобы определить конкретные значения этих постоянных для данного частного решения?

5. Напишите дифференциальное уравнение колебания точки пружины. Объясните его. Каков его порядок? Каково его общее решение? От скольких произвольных постоянных оно зависит? Как их находят на практике?

6. Для дифференциального уравнения

$$x'' + 4x = 0$$

найти

а) общее решение;

б) частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

$$t = 0, \quad x = 2, \quad x' = 3;$$

$$t = 0, \quad x = 2, \quad x' = 0;$$

$$t = 0, \quad x = 0, \quad x' = 3.$$

§ 9.1. Понятие формулы Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[0, a]$. Тогда для любого ее значения выполняется формула Лагранжа (см. § 6.5):

$$f(x) - f(0) = xf'(c),$$

где c — некоторое число, для которого выполняются неравенства $0 < c < x$. Эту формулу можно записать так:

$$f(x) = f(0) + xf'(c) \quad (0 < c < x). \quad (1)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0, a]$ не только первую, но и вторую производную. Тогда для нее верна формула, которую называют *формулой Тейлора*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{x^2}{2!} f''(c) \quad (0 < c < x), \quad (2)$$

для любого значения x из отрезка $[0, a]$.

Вообще, если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0, a]$ производные до порядка n включительно, то для любого x из отрезка $[0, a]$ выполняется равенство

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n, \quad (3)$$

где

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(c) \quad (0 < c < x) \quad (4)$$

и c — некоторое число, зависящее от x и n .

Это равенство называется *формулой Тейлора* с остатком n -й степени. Величину R_n называют *остатком* или *остаточным числом формулы Тейлора* *).

*) Может быть $a < 0$, и тогда символ $[0, a]$ на самом деле обозначает $[a, 0]$ и формулы (1) — (4) остаются верными при $a < x < c < 0$.

Мы не знаем точно, чему равен остаток, потому что про число s только известно, что оно находится где-то между 0 и x . Но и этой информации бывает достаточно, чтобы формула Тейлора имела практическое значение. Практический смысл формулы Тейлора заключается в том, что в ряде случаев удастся заключить, что ее остаток мал настолько, что им можно пренебречь, и тогда получим приближенное равенство

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1},$$

которое дает возможность вычислить $f(x)$, если можно вычислить числа $f(0)$, $f'(0)$, $\dots$, $f^{(n-1)}(0)$.

Для примера выведем формулу Тейлора с остатком второй степени, т. е. формулу (2).

Зададим x из отрезка $[0, a]$. Найдем такое P , чтобы выполнялось равенство

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x^2 P. \quad (5)$$

Можно было бы решить это уравнение относительно P . Но нас интересует другое — мы хотим неизвестное P выразить через вторую производную от функции $f(x)$. Для этого будем рассуждать следующим образом.

Каждое заданное значение x определяет при помощи равенства (5) число P . Введем функцию от переменной u , заданную на отрезке $[0, x]$:

$$F(u) = f(u) + (x-u)f'(u) + (x-u)^2 P \quad (6)$$

Будем помнить, что здесь x и P — фиксированы и это выражение есть функция от переменной u . Функция $F(u)$ имеет на отрезке $[0, x]$ производную, потому что по условию $f(u)$ имеет вторую производную и, следовательно, можно взять производную не только от $f(u)$, но и от $f'(u)$. Кроме того, функция $F(u)$ имеет равные значения на концах отрезка $[0, x]$. Ведь

$$F(0) = f(0) + xf'(0) + x^2 P = f(x)$$

(см. (5)) и $F(x) = f(x)$. Поэтому согласно теореме Ролля существует точка c , удовлетворяющая неравенствам $0 < c < x$, в которой производная от функции F равна нулю:

$$F'(c) = 0.$$

Нам остается лишь, пользуясь формулой (6), вычислить производную $F'(u)$ и положить в ней $u = c$:

$$F'(u) = f'(u) - f'(u) + (x-u)f''(u) - 2(x-u)P,$$

$$(x-c)f''(c) - 2(x-c)P = 0, \quad f''(c) - 2P = 0, \quad P = \frac{f''(c)}{2}.$$

Подставляя это значение для P в равенство (5), получим искомую формулу Тейлора (2).

§ 9.2. Примеры

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Напишем для нее формулу Тейлора при $n = 5$. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x, & f''(x) &= -\sin x, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f^{IV}(x) &= \sin x, & f^V(x) &= \cos x, \\ f(0) &= 0, & f'(0) &= 1, & f''(0) &= 0, \\ f'''(0) &= -1, & f^{IV}(0) &= 0, & f^V(0) &= \cos 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6!} + R_5(x), \quad R_5(x) = \frac{\cos \xi}{6!} x^6 = \frac{\cos \xi}{120} x^6.$$

Для значений x , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$,

$$|R_5(x)| \leq \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{4} \right)^6 < \frac{1}{400}.$$

Следовательно, имеет место приближенное равенство

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6!} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

с точностью до $1/400$.

Если в разложении $\sin x$ по формуле Тейлора взять больше членов, то получим многочлен более высокой степени, приближающий $\sin x$ еще точнее.

Замечание 1. При оценках остаточных членов следует учесть, что $|\cos \xi| \leq 1$ при любом ξ ,

$$\begin{aligned} e^c &< e^x & \text{при} & \quad 0 < c < x; \\ e^c &\leq 1 & \text{при} & \quad x < c < 0; \\ \frac{1}{1+c} &< 1 & \text{при} & \quad 0 < c < x. \end{aligned}$$

Для отрицательных x неизвестное число c тоже отрицательно и последняя оценка не проходит. На случай отрицательных x для функций $(1+x)^m$ и $\ln(1+x)$ имеются другие формулы остатков, позволяющие сделать нужные оценки.

Замечание 2. Вычисления, связанные с формулой (3), в настоящее время производят на микрокалькуляторах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что формулы Тейлора для функций $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ при $n=5$ имеют вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x),$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_5(x),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} x^4 + R_5(x).$$

2. Для функции $\cos x$ оценить $R_4(x)$ для $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

3. Для функции e^x оценить остаток $R_4(x)$ для $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

4. Написать рассмотренные в задаче 1 формулы при $n=5$.

5. Вычислить числа e , $e^{1/2}$, $\cos \frac{1}{100}$, $\sin \frac{1}{10}$ с точностью до 10^{-4} . Углы взяты в радианах.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

§ 10.1. Десятичные разложения рациональных чисел

Пусть задано положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ ($p > 0$, $q > 0$). Требуется превратить его в десятичную дробь.

Начнем с самого простого случая, когда q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5. Вот примеры:

$$\frac{7}{2^3 \cdot 5^4} = \frac{7 \cdot 2^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{28}{10^4} = 0,0028,$$

$$\frac{3}{2^4 \cdot 5^3} = \frac{3 \cdot 125}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{375}{10^4} = 0,00375.$$

Мы видим, что произвольное положительное рациональное число $\frac{p}{q}$, где q не имеет других делителей, кроме 2 и 5, разлагается в конечную десятичную дробь:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m \quad (1)$$

Здесь α_0 — целое неотрицательное число, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — цифры, каждая из них может принимать одно из значений 0, 1, 2, ..., 9.

Но и обратное утверждение верно, произвольная конечная дробь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m$ есть рациональное число:

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_m}{10^m}.$$

Здесь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m$ — целое число, состоящее из α_m единиц, α_{m-1} десятков, α_{m-2} сотен, ...

Мы доказали, что для того чтобы положительное рациональное число, выраженное несократимой дробью $\frac{p}{q}$, разлагалось в конечную десятичную дробь, необходимо и достаточно, чтобы знаменатель ее q не имел других простых делителей, кроме 2 и 5.

Остальные дроби $\frac{p}{q}$ могут иметь только бесконечные десятичные разложения $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots$, т. е. такие, что для любого натурального k найдется натуральное $l > k$ такое, что $\alpha_l > 0$.

Произвольную конечную десятичную дробь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m$ ($\alpha_m > 0$) мы будем записывать еще в виде

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m 000 \dots$$

или в виде бесконечной десятичной дроби

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{m-1} (\alpha_m - 1) 999 \dots \quad (2)$$

Например, будем писать

$$0,2365 = 0,2365000\dots = 0,2364999\dots$$

Читатель сам проверит, деля числитель на знаменатель «уголком», следующие бесконечные десятичные разложения:

$$\frac{5}{9} = 0,555\dots = 0, (5),$$

$$\frac{7}{9} = 0,777\dots = 0, (7),$$

$$\frac{23}{99} = 0,2323\dots = 0, (23),$$

$$\frac{71}{99} = 0,7171\dots = 0, (71),$$

$$\frac{7}{999} = 0,007007\dots = 0, (007).$$

Все это — периодические разложения. Например $\frac{5}{9}$ есть, как говорят, нуль целых и 5 в периоде, а $\frac{71}{99}$ — нуль целых и 71 в периоде.

Вообще, имеет место равенство

$$\underbrace{\frac{\alpha_1 \dots \alpha_m}{9 \dots 9}}_{m \text{ раз}} = 0, (\alpha_1 \dots \alpha_m).$$

Выясним его справедливость на примере дроби $\frac{17}{99}$. Будем делить 17 на 99 по известному правилу; однако припишем к числу 17 сразу два нуля. Имеем

$$1700 = 17(99 + 1) = 17 \cdot 99 + 17.$$

Следовательно, после второго этапа деления 17 на 99 получим такую картину:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 99 \\ 1700 & 0,17 \\ \hline 17 & \end{array},$$

т. е. в частном получается 17 и в остатке 17. Теперь снова к остатку припишем два нуля и после деления получим снова в частном 17 и в остатке 17. Так наш процесс будет продолжаться периодически без конца:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 99 \\ & 0,1717\dots \end{array}$$

Следовательно, $\frac{17}{99} = 0,1717\dots$

Ниже приводятся примеры десятичных периодических дробей более сложного вида:

$$1,21353535\dots = 1,21(35) = \frac{121}{100} + 0,00(35) = \frac{121}{100} + \frac{35}{99} \cdot \frac{1}{100}.$$

$$0,2(371) = \frac{2, (371)}{10} = \frac{2}{10} + \frac{371}{9990}.$$

$$3,13(4) = \frac{313, (4)}{100} = \frac{313}{100} + \frac{4}{900}.$$

Мы видим, что произвольную десятичную периодическую дробь $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m (\beta_1 \dots \beta_n)$ можно рассматривать как десятичное разложение некоторого рационального числа:

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m (\beta_1 \dots \beta_n). \quad (3)$$

Но и обратно, десятичное разложение произвольного положительного рационального числа $\frac{p}{q}$ необходимо периодическое.

В самом деле, будем делить p на q обычным способом:

$$\begin{array}{r|l} p & q \\ \beta_1 & \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_s \alpha_{s+1} \\ \hline \dots & \\ \beta_s & \\ \hline \beta_{s+1} & \\ \hline \dots & \end{array} \quad (4)$$

Пусть на s -м этапе этого процесса получился остаток β_s , и все цифры числа p оказались уже снесенными. Рассмотрим остатки $\beta_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_{s+q-1}$. Количество их q , и каждый из них меньше q . Но тогда какие-то два из них обязательно должны быть равны. Пусть равны β_m и β_n ($\beta_m = \beta_n$; $m < n$). Это показывает, что процесс (4), начиная с m -го этапа, становится периодическим ($\alpha_{m+1} = \alpha_{n+1}$, $\alpha_{m+2} = \alpha_{n+2}, \dots$).

Итак, каждому положительному рациональному числу $\frac{p}{q}$ соответствует его бесконечное десятичное периодическое разложение вида (3). Это разложение получается при помощи процесса (4), дополняемого в случае (1) процессом (2).

С другой стороны, произвольное бесконечное периодическое разложение (вида (3)) соответствует, таким образом, единственному положительному рациональному числу.

Отрицательному рациональному числу $-\frac{p}{q}$ приводят в соответствие бесконечное десятичное разложение числа $\frac{p}{q}$, взятое со знаком «-».

Числу нуль (оно тоже рациональное) естественно привести в соответствие разложение $0 = +0,000 \dots = -0,00 \dots = 0,00 \dots$.

§ 10.2. Десятичные разложения иррациональных чисел

Кроме периодических десятичных дробей существуют непериодические, например:

$$0,1010010001\dots; \quad 0,121122111222\dots$$

Вот еще пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим непериодическую бесконечную десятичную дробь: $\sqrt{2} = 1,41\dots$. Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k k -го разряда числа $\sqrt{2}$, однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Если наш читатель не знает это правило, то он может, чтобы получить десятичное разложение числа $\sqrt{2}$, рассуждать так. Сначала находим наибольшее целое число, квадрат которого меньше 2. Это, очевидно, число 1. Затем находим наибольшее число вида $1, \alpha_1$, квадрат которого меньше 2. Это есть число 1,4. Затем находим наибольшее число вида $1,4 \alpha_2$, квадрат которого меньше

2. Это есть число 1,41. И рассуждая так можно получить однозначно любое число цифр после запятой десятичного разложения числа $\sqrt{2}$.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π с любой наперед заданной точностью. Это приводит к определенному бесконечному десятичному разложению π , которое, как оказывается, не является периодическим.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом* называется произвольная бесконечная непериодическая дробь *)

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots, \quad (5)$$

где α_0 — целое неотрицательное число, α_k ($k=1, 2, \dots$) — цифры, знак же равенства выражает, что мы обозначили правую часть (5) через a . Впрочем, удобно говорить, что правая часть (5) есть десятичное разложение числа a .

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными* (или *вещественными*) *числами*.

Из сказанного следует, что всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби (5). Если оно рационально, то его десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае, согласно нашему определению, выражение (5) само определяет иррациональное число.

Десятичная не равная нулю дробь может быть конечной. В силу соглашения, выраженного равенством (2), она может быть заменена равной ей бесконечной периодической дробью.

Число a , где не все α_k равны нулю, называется *положительным* или *отрицательным* в зависимости от того, будет ли в (5) фигурировать «+» или «—»; при этом, как обычно, «+» будем опускать.

Действительные числа определены пока формально, надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие «>» и проверить, что эти операции и понятие «>» согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием «>» для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

*) Конечно, знаку «+» соответствует одно число (положительное), а знаку «—» другое (отрицательное).

§ 10.3. Сравнение действительных чисел

По определению два числа

$$a = \pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \quad b = \pm \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots,$$

разложенные оба в бесконечные, но не имеющие периода 9, или конечные десятичные дроби, равны между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Для тех же положительных чисел a и b по определению $a < b$, если $\alpha_0 < \beta_0$ или если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l , что

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k=0, 1, \dots, l) \quad \text{и} \quad \alpha_{l+1} < \beta_{l+1}. \quad (7)$$

Это определение годится для конечных и бесконечных разложений, не имеющих периода 9. Чтобы применить это определение к десятичным дробям с периодом 9, надо превратить их в конечные десятичные дроби. Впрочем, удобно писать

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_m 99 \dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{m-1} (\alpha_m + 1),$$

хотя промежуточный член в этой цепи не обязателен.

Между двумя действительными числами a и b ($a < b$) имеется рациональное число r ($a < r < b$), разлагающееся в конечную десятичную дробь. Если $a < 0$, $b > 0$, то можно считать $r = 0$.

Пусть $0 < a < b$ и

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots$$

— бесконечные десятичные дроби. Если $\alpha_0 < \beta_0$, то

$$a \leq \alpha_0, 99 \dots = \alpha_0 + 1 \leq \beta_0 < \beta_0, \beta_1 \dots \beta_k < \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots = b,$$

где k такое, что $\beta_k > 0$. Это показывает, что в данном случае можно положить $r = \beta_0, \beta_1 \dots \beta_k$.

Если же $\alpha_0 = \beta_0$, то при некотором l

$$\alpha_s = \beta_s \quad (s=0, 1, \dots, l-1), \quad \alpha_l < \beta_l;$$

поэтому

$$\begin{aligned} a \leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_l 99 \dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{l-1} (\alpha_l + 1) &\leq \\ &\leq \beta_0, \beta_1 \dots \beta_{l-1} \beta_l < \beta_0, \beta_1 \dots \beta_l \beta_{l+1} \dots \beta_k < \\ &< \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots = b \quad (\beta_k > 0), \end{aligned}$$

и, следовательно, можно считать $r = \beta_0, \beta_1 \dots \beta_k$.

Случай $a < b < 0$ сводится к предыдущему.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Между числами

0,(78) и 0,935050050005 ...

найти: 1) рациональное число, 2) иррациональное число, 3) рациональное и иррациональное число, 4) два рациональных числа, 5) два иррациональных числа.

§ 10.4. Десятичное приближение действительного числа

Зададим произвольное положительное число

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

в виде десятичной дроби. Число

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

будем называть *n*-м десятичным приближением числа *a* с недостатком.

Справедливы неравенства

$$a^{(n)} \leq a \leq a^{(n)} + 10^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \leq \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \leq \\ &\leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n 99\dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + 10^{-n} = \\ &= a^{(n)} + 10^{-n}. \end{aligned}$$

Число $a^{(n)} + 10^{-n}$ называют *n*-м приближением числа *a* с избытком.

Справедливы неравенства

$$a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq a^{(3)} \leq \dots,$$

т. е. $a^{(n)} \leq a^{(n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots)$.

В самом деле,

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} = a^{(n+1)}.$$

Имеют также место неравенства

$$a^{(1)} + 10^{-1} \geq a^{(2)} + 10^{-2} \geq a^{(3)} + 10^{-3} \geq \dots,$$

т. е.

$$a^{(n)} + 10^{-n} \geq a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В самом деле,

$$a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)} = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} 999 \leq \\ \leq \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n 99 \dots = \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + 10^{-n} = a^{(n)} + 10^{-n}.$$

Мы видим, что числа $a^{(n)}$ не убывают при возрастании n , оставаясь все время не большими числа a . Числа же $a^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастают, оставаясь не меньшими числа a . Кроме того, разность

$$(a^{(n)} + 10^{-n}) - a^{(n)} = 10^{-n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е. стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Числа $a^{(n)}$ и $a^{(n)} + 10^{-n}$ — рациональные, к тому же они разлагаются в конечные десятичные дроби. Современные счетные машины приспособлены к вычислениям с десятичными дробями*).

В практических вычислениях точные значения чисел заменяют приближенными, в частности приближениями $a^{(n)}$ и $a^{(n)} + 10^{-n}$.

§ 10.5. Числовая прямая

Зададим отрезок, который будем считать единичным — имеющим длину 1. Мы хотим определить понятие длины произвольного отрезка AB относительно выбранной единицы (единичного отрезка).

Отрезок AB называется *соизмеримым* с единицей (с единичным отрезком), если существуют натуральные числа p и q такие, что если q -ю часть единичного отрезка отложить p раз от A в направлении к B , то приходим в точности в точку B . Про такой отрезок говорят, что он имеет длину $\frac{p}{q}$.

Примером отрезка, не соизмеримого с единицей, является гипотенуза прямоугольного треугольника, имеющего единичные катеты. Длина этого отрезка равна $\sqrt{2}$.

Не соизмеримых с единицей отрезков имеется бесконечное множество. Дадим общий метод измерения отрезков. Нас интересует чисто теоретическая сторона вопроса. Мы отдаем себе отчет, что длину отрезка (соизмеримого или не соизмеримого с единицей) практически можно получить только приближенно, но мы хотим

*) Впрочем, на самом деле широко применяется так называемое двоичное исчисление.

представить себе, как это можно сделать теоретически точно.

Зададим прямую L , для которой выберем положительное направление (указано стрелкой, рис. 119), единичный отрезок и начальную точку O . Такую прямую называют *числовой*



Рис. 119

прямой потому, что ее точки можно рассматривать как иллюстрации действительных чисел. Каждому положительному рациональному числу $\frac{p}{q}$ приведем в соответствие точку прямой L , называемую точкой $\frac{p}{q}$, лежащую справа от O на расстоянии $\frac{p}{q}$ от O . Каждому же отрицательному рациональному числу $-\frac{p}{q}$ приведем в соответствие на L точку (точку $-\frac{p}{q}$), симметричную точке $\frac{p}{q}$ относительно O . Числу 0 пусть соответствует точка O .

Будем называть A на L *рациональной* или *иррациональной точкой* в зависимости от того, будет ли отрезок OA , соединяющий ее с точкой O , соизмерим или не соизмерим с единицей.

Мы указали способ, в силу которого устанавливается взаимно однозначное соответствие между рациональными числами и рациональными точками прямой. Будем пользоваться этим соответствием, чтобы решить более сложную задачу об измерении отрезка OA , где A — любая точка прямой L .

Зададим на положительном луче L_+ прямой L произвольную точку A (рациональную или иррациональную). Чтобы определить длину $|OA|$ отрезка OA , рассуждаем следующим образом. Подберем целое неотрицательное число α_0 , приближающее длину $|OA|$ с точностью до единицы с недостатком (снизу). Это значит, что точка α_0 луча L_+ либо совпадает с A , либо находится левее A , однако точка $\alpha_0 + 1$ находится на L_+ правее A .

Отрезок $[\alpha_0, \alpha_0 + 1]$, соединяющий точки α_0 и $\alpha_0 + 1$, обозначим через $\sigma_0 = [\alpha_0, \alpha_0 + 1]$. Он обладает следующими свойствами:

а) точка A принадлежит σ_0 ($A \in \sigma_0$), но не является правым концом σ_0 :

б) длина σ_0 равна единице: $|\sigma_0| = 1$.

Приближим теперь длину $|OA|$ снизу с точностью до одной десятой. Это значит, что мы подбираем цифру α_1 (т. е. одно из чисел $0, 1, \dots, 9$) так, чтобы точка α_0, α_1 луча L_+ либо совпала с A , либо была левее A , но при этом чтобы точка $\alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}$ была правее A . Введем отрезок

$$\sigma_1 = [\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}],$$

который, очевидно, обладает следующими свойствами:

а) точка A принадлежит σ_1 , но не является правым концом σ_1 ;

б) длина σ_1 равна $|\sigma_1| = 10^{-1}$.

Приближаем далее длину $|OA|$ снизу с точностью до одной сотой, т. е. находим цифру α_2 такую, что отрезок $\sigma_2 = [\alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + 10^{-2}]$ будет содержать в себе A , правый его конец не совпадает с A . Длина $|\sigma_2| = 10^{-2}$. Очевидно, σ_2 принадлежит σ_1 . Этот процесс продолжим неограниченно. В результате получим последовательность чисел

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где α_0 — неотрицательное целое число, а α_j ($j = 1, 2, \dots, k$) — цифры. При этом для любого натурального k отрезок

$$\sigma_k = [\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k}]$$

содержит в себе точку A , правый его конец не совпадает с A , длина $|\sigma_k| = 10^{-k}$ ($k = 1, 2, \dots$), и σ_k принадлежит σ_{k-1} .

Итак, точка A принадлежит всем отрезкам σ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) и длины их при неограниченном возрастании k , очевидно, стремятся к нулю: $|\sigma_k| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Определим теперь число a при помощи десятичного разложения

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ — найденные выше числа. Число a удовлетворяет неравенствам

$$\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k \leq a < \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k} \quad (9)$$

при любом $k = 0, 1, 2, \dots$, а точка A при любом указанном k лежит на L_+ между точками $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k$ и $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k}$. Это показывает, что именно число a есть длина $|OA|$ отрезка OA : $a = |OA|$.

Итак, каждой точке A луча L_+ при помощи рассмотренного процесса (1) приводится в соответствие положи-

тельное число $a = |OA|$. При этом, если какая-либо другая точка B луча L_+ находится правее A , то ей соответствует большее число ($b > a$). Число a называется координатой точки A на прямой L .

Надо учесть, что раз точка A находится на L_+ , т. е. лежит на L правее точки O , то в процессе (9) при достаточно большом n окажется, что $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n > 0$, откуда $a > 0$.

Далее, если точка B лежит на L_+ правее точки A , то при достаточно большом n окажется, что $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n + 10^{-n} < \beta_0, \beta_1 \dots \beta_n$, откуда $a < b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots$.

Поставим обратную задачу. Задано положительное число

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots *)$$

Спрашивается, существует ли на L_+ точка A такая, что $a = |OA|$? На основании сказанного этот вопрос можно выразить еще так: существует ли на L_+ точка A , одновременно принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_k = [\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k; \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_k + 10^{-k}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots)? \quad (10)$$

Решение этого вопроса относится к геометрии. Геометрия решает его положительно, т. е. она утверждает, что существует на L_+ единственная точка A , принадлежащая всем σ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Это утверждение обычно предлагается в виде одной из аксиом геометрии (принципа вложенных отрезков, см. 10.6), либо оно есть следствие других исходных аксиом.

Заметим, что если

$$a = \frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

есть рациональное положительное число, то ему соответствует на L_+ рациональная точка p/q . Эта точка принадлежит всем отрезкам σ_k луча L_+ (см. (9)). Ее как раз мы и получили, применяя рассмотренный выше процесс. Ведь существует только одна точка, принадлежащая всем σ_k .

Точке O приписывается в качестве ее координаты число 0, а произвольной точке A' отрицательного луча L_- приписываем число $-a$, где a — координата точки A , симметричной A' относительно O .

*) Мы считаем, что это десятичное разложение не имеет периода 9.

На основании сказанного между действительными числами и точками прямой L имеет место взаимно однозначное соответствие. При этом рациональные числа $\pm \frac{p}{q}$ переходят в рациональные точки $\pm \frac{p}{q}$ и обратно. Далее, если точка B находится на L правее точки A , то соответствующие им числа b и a находятся в соотношении $a < b$, и обратно.

§ 10.6. Принцип вложенных отрезков

Пусть по некоторому закону задана последовательность отрезков $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$, лежащих на прямой L и обладающих свойствами:

- а) отрезки σ_n вложены; это значит, что при любом n отрезок σ_{n+1} принадлежит к σ_n ($\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$, $n = 1, 2, \dots$);
- б) при неограниченном возрастании n длина $|\sigma_n|$ стремится к нулю ($|\sigma_n| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$).

Тогда на L существует, и притом единственная, точка A , принадлежащая всем отрезкам σ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Отрезки σ_n , о которых шла речь в § 10.5, как раз являются вложенными, и для них $|\sigma_n| = 10^{-n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Принцип вложенных отрезков утверждает существование точки A , принадлежащей всем σ_n , и ее единственность.

§ 10.7. Арифметические действия. Оценки приближений

Зададим два положительных числа

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots,$$

определенных конечными или бесконечными десятичными дробями.

Читатель хорошо знает, как складываются конечные десятичные дроби. Он легко догадается, как это сделать в случае сложения конечной десятичной дроби и бесконечной. Если же оба слагаемых имеют бесконечные десятичные разложения, то возникают затруднения. Эти затруднения можно преодолеть—можно указать правило сложения дробей с бесконечными хвостами. Впрочем, это правило носит чисто теоретический характер—оно практически неосуществимо до конца, потому что представляет собой некоторый бесконечный процесс.

На практике приходится числа a и b заменять их приближениями

$$\bar{a} \approx a, \quad \bar{b} \approx b,$$

обычно конечными десятичными дробями $\bar{a}$, $\bar{b}$. Сумму $\bar{a} + \bar{b}$ считают приближением теоретической суммы $a + b$:

$$\bar{a} + \bar{b} \approx a + b.$$

Но тогда возникает вопрос об оценке погрешности приближения. Однако и для теории, и для практики важно отдать себе отчет в том, что сумма произвольных действительных чисел a и b может быть определена пусть теоретически, но точно. Тогда только имеет смысл говорить о приближении какого-либо числа, в данном случае числа $a + b$, когда мы уверены в том, что оно существует,

Сказанное можно распространить и на разность, и произведение, и частное чисел.

Ниже мы даем представление о том, как можно чисто теоретически определить арифметические действия над числами. Однако эти соображения полезны и для практики вычислений, потому что они показывают, как соответствующие действия надо производить приближенно и какие в этих случаях возникают оценки погрешности.

Положим

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= \alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n, \\ b^{(n)} &= \beta_0, \beta_1 \dots \beta_n \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

При неограниченном возрастании n числа $a^{(n)}$ стремятся к a , не убывая:

$$a^{(0)} \leq a^{(1)} \leq a^{(2)} \leq \dots \leq a, \quad (11)$$

а числа $a^{(n)} + 10^{-n}$ — не возрастают:

$$a^{(1)} + 10^{-1} > a^{(2)} + 10^{-2} > \dots > a. \quad (12)$$

Сумма $a + b$ определяется как число, для которого удовлетворяются неравенства

$$a^{(n)} + b^{(n)} \leq a + b < (a^{(n)} + 10^{-n}) + (b^{(n)} + 10^{-n}) \quad (13)$$

для всех $n=1, 2, \dots$ или, выражаясь геометрическим языком, $a + b$ есть число, которому на числовой прямой соответствует точка, принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)} + b^{(n)}, a^{(n)} + b^{(n)} + 2 \cdot 10^{-n}].$$

Такая точка есть, и притом единственная, потому что левые концы σ_n не убывают, правые же не возрастают и, следовательно, отрезки σ_n вложены ($\sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \dots$). Кроме того, $|\sigma_n| = 2 \cdot 10^{-n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

На самом деле, если бы надо было сложить a и b практически, мы бы сложили $a^{(n)}$ и $b^{(n)}$ при достаточно больших n и считали бы, что число $a^{(n)} + b^{(n)}$ есть приближение $a + b$. Погрешность μ_n , которую мы при этом допускаем, не превышает $2 \cdot 10^{-n}$:

$$\mu_n \leq 2 \cdot 10^{-n}.$$

Подобным образом разность $a - b$ ($a > b$) определяется как число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) < a - b < (a^{(n)} + 10^{-n}) - b^{(n)}. \quad (14)$$

Этому числу соответствует точка на числовой прямой, принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}), a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}] \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Такая точка существует, и единственная, потому что $|\sigma_n| = 2 \cdot 10^{-n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, а отрезки σ_n вкладываются. Надо учесть, что $a^{(n)}$ не убывает, а $b^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает, следовательно, $a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})$ не убывает. Далее, $a^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает, а $b^{(n)}$ не убывает, откуда $a^{(n)} + 10^{-n} - b^{(n)}$ не возрастает.

Если взять в качестве приближения $a - b$ число $a^{(n)} - b^{(n)}$, то погрешность не превысит $2 \cdot 10^{-n}$, потому что точка $a^{(n)} - b^{(n)}$ принадлежит σ_n .

Естественно далее определить произведение ab как число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{(n)}b^{(n)} \leq ab < (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n}) \quad (15)$$

для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ или как число, которому соответствует точка на числовой прямой, принадлежащая всем отрезкам

$$\sigma_n = [a^{(n)}b^{(n)}, (a^{(n)} + 10^{-n})(b^{(n)} + 10^{-n})] \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Это определение корректно, потому что отрезки σ_n вложены и

$$|\sigma_n| = a^{(n)}10^{-n} + b^{(n)}10^{-n} + 10^{-2n} < \\ < (\alpha_0 + 1)10^{-n} + (\beta_0 + 1)10^{-n} + 10^{-2n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В данном случае оценка приближения зависит не только от n , но и от α_0 и β_0 .

Наконец, частное $\frac{a}{b}$ ($a > 0$, $b > 0$) определяется как число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} < \frac{a}{b} < \frac{a^{(n)} + 10^{-n}}{b^{(n)}} \quad (n \geq l). \quad (16)$$

Это определение тоже корректно, потому что отрезки

$$\sigma_n = \left[\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}, \frac{a^{(n)} + 10^{-n}}{b^{(n)}} \right] \quad (n \geq l)$$

вложены и

$$\begin{aligned} |\sigma_n| &= \frac{a^{(n)} + 10^{-n}}{b^{(n)}} - \frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} = \frac{a^{(n)}10^{-n} + b^{(n)}10^{-n} + 10^{-2n}}{b^{(n)}(b^{(n)} + 10^{-n})} < \\ &< \frac{(\alpha_0 + 1)10^{-n} + (\beta_0 + 1)10^{-n} + 10^{-2n}}{(\beta_l)^2 10^{-2l}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (n \geq l). \end{aligned} \quad (17)$$

Число l есть наименьшее целое неотрицательное, для которого $\beta_l > 0$. Таким образом, либо $\beta_0 > 0$, либо $\beta_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, l-1$) и $\beta_l > 0$.

Мы видим, что в качестве приближения $\frac{a}{b}$ можно взять число $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$, принадлежащее, очевидно, к σ_n , с оценкой приближения, указанной в (17). Но на практике $\frac{a}{b}$ (также как ab) приближаются выражениями $\frac{a^{(n)}}{b^{(m)}}$, $(a^{(n)}b^{(m)})$, где n и m определяются структурой a , b .

На арифметических действиях с числами любого знака мы специально не останавливаемся. Как читатель знает, они сводятся к надлежащим действиям над положительными числами. Например, чтобы сложить два числа a и b разных знаков, где $|a| \geq |b|$, надо положить $a + b = \mp(|a| - |b|)$, где выбирается знак, одинаковый со знаком a .

§ 10.8. Свойства действительных чисел

Перечислим свойства действительных чисел, которые могут быть обоснованы методами, применявшимися выше. Эти свойства разделены на 5 групп (I—V).

К группам I, II, III относятся обычные элементарные свойства, с которыми нам всегда приходится иметь дело при вычислениях и при сравнении чисел.

Группа IV состоит из одного свойства (архимедова).

Группа V тоже состоит из одного свойства (непрерывности множества действительных чисел).

Мы привыкли к тому, что рациональные числа удовлетворяют свойствам I, II, III, IV. Сейчас утверждается, что свойствам I—IV удовлетворяют не только рациональные числа, но и вообще все действительные числа.

Что касается свойства V, то множество одних только рациональных чисел ему не удовлетворяет—оно недостаточно полно.

I. Свойства порядка

I₁. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a=b, \quad a>b, \quad a<b.$$

I₂. Из $a<b$ и $b<c$ следует $a<c$.

I₃. Если $a<b$, то найдется такое рациональное число c , что $a<c<b$.

II. Свойства действий сложения и вычитания

$$II_1. \quad a+b=b+a.$$

$$II_2. \quad (a+b)+c=a+(b+c).$$

$$II_3. \quad a+0=a.$$

$$II_4. \quad a+(b-a)=b.$$

II₅. Из $a<b$ следует, что $a+c<b+c$ для любого c .

III. Свойства действий умножения и деления

$$III_1. \quad ab=ba.$$

$$III_2. \quad (ab)c=a(bc).$$

$$III_3. \quad a \cdot 1=a.$$

$$III_4. \quad a \cdot \frac{b}{a}=b, \quad a \neq 0.$$

$$III_5. \quad (a+b)c=ac+bc.$$

III₆. Из $a<b$, $c>0$ следует $ac<bc$.

IV. Архимедово свойство

Каково бы ни было число $c>0$, существует натуральное $n>c$.

V. Свойство непрерывности множества действительных чисел

Пусть задана последовательность вложенных отрезков (множеств чисел x , для которых $a_n \leq x \leq b_n$)

$$\sigma_n = [a_n, b_n] \quad (n=1, 2, \dots),$$

т. е. таких, что $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ ($n=1, 2, \dots$), с длинами, стремящимися к нулю:

$$d_n = b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тогда существует, и притом единственное, число, принадлежащее всем σ_n .

С геометрическим аналогом свойства V мы познакомились в § 10.6. Там было сказано, что это свойство для натуральных отрезков σ_n на прямой в геометрии приходится постулировать. Здесь под отрезками понимаются соответствующие множества чисел, и в этом случае свойство проверяется (доказывается) на десятичных разложениях чисел, так же как все остальные свойства I—IV.

ФОРМУЛА БИНОМА НЬЮТОНА. КОМБИНАТОРИКА

§ 11.1. Число C_n^k

Произведение натуральных чисел от 1 до n называют n -факториалом и обозначают так:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

В частности,

$$1! = 1.$$

По определению считают, что

$$0! = 1,$$

хотя сам по себе символ $0!$ не имеет никакого смысла.

Зададим натуральное число n , и пусть k есть одно из чисел $k=0, 1, 2, \dots, n$. По определению

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (1)$$

В частности,

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1 \quad (2)$$

(при $k=0$ вторым равенством в (1) пользоваться нельзя).

Из первого равенства (1) непосредственно следует формула

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Справедлива также формула

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (k=0, 1, \dots, n-1). \quad (4)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k+1} \right] = \frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{k+1+n-k}{(n-k)(k+1)} = \\ &= \frac{n! (n+1)}{(k+1)! (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! [(n+1)-(k+1)]!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

Вот примеры чисел C_n^k :

$$\begin{aligned} n=2: & 1, 2, 1; \\ n=3: & 1, 3, 3, 1; \\ n=4: & 1, 4, 6, 4, 1; \\ n=5: & 1, 5, 10, 10, 5, 1; \\ & \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Мы видим здесь закономерность. В каждом ряду (5) числа C_n^k расположены симметрично относительно середины ряда—это следует из формулы (3), а по краям стоят единицы—это следует из (2). В каждом ряду числа C_n^k возрастают до середины ряда, затем убывают (см. в конце параграфа задачи 2, 4).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать числа C_n^k для $n=6, 7, 8$.

§ 11.2. Формула бинома Ньютона.

Метод индукции

Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \dots \\ \dots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Слагаемые суммы в правой части называются *членами разложения бинома Ньютона*. Член a^n называют *нулевым членом разложения формулы Ньютона*, дальше идут первый, второй и т. д. члены до n -го включительно (равного x^n); k -й член бинома Ньютона имеет вид

$$C_n^k a^{n-k} x^k \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (7)$$

Формула (7) в силу свойства (2) годится и для $k=0$, и $k=n$. Формулу (6) можно записать еще так:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k. \quad (6')$$

Правая часть (6') читается так: *сумма слагаемых $C_n^k a^{n-k} x^k$, распространенная на целые k от 0 до n* . Числа C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Докажем формулу (6). При $n=1$ она верна: $a+x = a+x$. При $n=2$ тоже она верна:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Она также верна при $n=3$:

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

(см. табл. (5)).

Для доказательства формулы (6) в общем виде (при любом натуральном n) будет использован тот факт, что она верна при $n=2$. Будем рассуждать так. Допустим, что формула (6) верна при некотором натуральном n ; докажем, что она тогда необходимо верна и при $n+1$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(a+x)^{n+1} &= (a+x)(a+x)^n = \\ &= a^{n+1} + C_n^1 a^n x + C_n^2 a^{n-1} x^2 + \dots + C_n^n a x^n + \\ &\quad + C_n^0 a^n x + C_n^1 a^{n-1} x^2 + \dots + C_n^{n-1} a x^n + x^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n x + C_{n+1}^2 a^{n-1} x^2 + \dots + C_{n+1}^n a x^n + x^{n+1}.\end{aligned}$$

Мы нарочно во втором равенстве справа второй ряд сдвинули так, чтобы в столбцах стояли подобные члены с одинаковыми произведениями $a^{n-k}x^{k+1}$. Сумма коэффициентов при них вычисляется по формуле (4).

Замечание. Мы применили при выводе формулы (6) *метод полной математической индукции*. Этот метод заключается в следующем. Пусть надо доказать некоторое утверждение для любого натурального числа n . Например, надо доказать формулу бинома Ньютона для произвольного натурального n . Допустим, что мы убедились, что это утверждение верно при $n=1$, и, кроме того, убедились в том, что утверждение верно при натуральном $n+1$, если предположить, что оно верно для n . Тогда надо считать наше утверждение доказанным для *любого* натурального n .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать разложения по формуле бинома Ньютона

$$(a+x)^0, \quad (a+x)^0, \quad (a+x)^2.$$

2. Доказать, что

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n-k}{k+1} \quad (k=0, 1, \dots, n). \quad (8)$$

3. Сравнив дробь (8) с 1, доказать, что при n четном $1 = C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^{n/2} > C_n^{(n+1)/2} > \dots > C_n^n = 1$

и при n нечетном

$$1 = C_n^0 < C_n^1 < \dots < C_n^{(n-1)/2} = C_n^{(n+1)/2} > \dots > C_n^n = 1.$$

4. Повторить вывод формул (3), (4), (6). Запомнишь формулы (1) и (6) и уметь применять их для частных значений n и k . Повторить метод индукции.

§ 11.3. Перестановки

Два элемента (две вещи) x_1 и x_2 могут быть расположены (записаны) двумя способами:

$$x_1, x_2, \quad (9)$$

$$x_2, x_1. \quad (10)$$

Будем говорить, что расположения (9) и (10) являются различными *перестановками* из двух элементов (x_1 и x_2). Таким образом, из двух элементов можно составить две (различные) перестановки.

Из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить шесть перестановок:

$$\begin{array}{ccc} x_1, & x_2, & x_3, \\ x_1, & x_3, & x_2, \\ x_2, & x_1, & x_3, \\ x_2, & x_3, & x_1, \\ x_3, & x_1, & x_2, \\ x_3, & x_2, & x_1. \end{array}$$

Других перестановок нет.

Рассмотрим теперь n элементов

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Они расположены в порядке возрастания номеров и этим образуют определенную перестановку. При другом расположении, например, когда номера убывают:

$$x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 \quad (n \geq 2),$$

они образуют уже другую перестановку.

Перестановка из n элементов — это определенное расположение их (в ряд). Таким образом, *различные перестановки из n элементов соответствуют различным расположениям (в ряд) n элементов*. Количество возможных перестановок из n элементов обозначают символом P_n : перестановка по-французски — permutation.

Покажем, что

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n! \quad (11)$$

В самом деле, при $n=1$ формула (11) очевидна: из одного элемента можно составить только одну перестановку. Теперь, рассуждая по индукции, допустим, что формула (11) верна для P_n ; докажем ее верность для P_{n+1} . Чтобы получить всевозможные перестановки из элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, поставим на первое место элемент x_j , а за ним остальные n элементов, расположенных любым образом. Количество таких расположений (перестановок из n элементов) равно $P_n = n!$. Так как количество элементов x_j ($j=1, 2, \dots, n+1$) равно $n+1$, то количество всех перестановок из $n+1$ элементов равно, очевидно,

$$P_{n+1} = (n+1)n! = (n+1)!$$

Этим формула (11) доказана для любого натурального n .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выписать все перестановки из элементов a_1, a_2, a_3, a_4 .
2. Сколькими способами можно рассадить 10 человек на 10 стульях?

§ 11.4. Размещения

Пусть n и k — натуральные числа и $k \leq n$. *Размещением из данных n элементов по k называется какая-либо группа из k элементов, взятых из данных n элементов, определенным образом расположенная (в ряд).*

Например, пусть дано три ($n=3$) элемента x_1, x_2, x_3 .

Ниже переписаны возможные размещения данных трех элементов по два:

$x_1,$	$x_2,$
$x_2,$	$x_1,$
$x_1,$	$x_3,$
$x_3,$	$x_1,$
$x_1,$	$x_3,$
$x_3,$	$x_2,$

Других размещений нет. Мы видим, что два размещения отличаются либо хотя бы одним элементом, либо расположением входящих в них элементов.

Количество возможных размещений из данных n элементов по k ($k \leq n$) обозначается символом A_n^k : размещение по-французски — *arrangement*.

Справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (12)$$

В самом деле, при $k=1$ она очевидна:

$$A_n^1 = n.$$

Рассуждая по индукции, будем считать, что формула (12) для k верна. Докажем, что она верна для $k+1$.

Произвольное размещение из данных n элементов по $k+1$ может быть получено следующим образом. На первом месте размещения ставим элемент x_j , а за ним располагаем всевозможные размещения из оставшихся $n-1$ элементов $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ по k ; количество их равно A_{n-1}^k .

Итак, количество возможных размещений из данных n элементов по $k+1$, имеющих на первом месте элемент x_j , равно A_{n-1}^k . Но так как j может принимать значения $j=1, 2, \dots, n$, то количество всех размещений из данных n элементов по $k+1$ равно

$$\begin{aligned} A_n^{k+1} &= n A_{n-1}^k = n(n-1)(n-2) \dots ((n-1)-k+1) = \\ &= n(n-1) \dots (n-(k+1)+1). \end{aligned}$$

Этим формула (12) доказана для любого $k \geq 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выпишите все размещения из элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по 2.
2. Сколькими возможными способами можно присудить семи лицам три премии разного значения (первую, вторую и третью)?
3. Сколькими возможными способами можно распределить между шестью лицами две разные путевки в санаторий?

§ 11.5. Сочетания

Сочетанием из данных n элементов по k называется какая-либо группа, состоящая из k этих элементов ($k \leq n$).

Например, из трех элементов x_1, x_2, x_3 можно составить следующие сочетания по два:

$$\begin{array}{cc} x_1, & x_2, \\ x_1, & x_3, \\ x_2, & x_3. \end{array}$$

Других сочетаний из рассматриваемых трех элементов по два нет. Вот еще сочетания по три из четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{array}{ccc} x_2, & x_3, & x_4, \\ x_1, & x_3, & x_4, \\ x_1, & x_2, & x_4, \\ x_1, & x_2, & x_3. \end{array}$$

Подчеркнем, что понятие сочетания не связано с расположением (порядком) элементов. Если в данном сочетании переставить каким-либо образом его элементы, то оно (как сочетание) не изменится.

Количество сочетаний из n элементов по k ($k \leq n$) обозначается символом C_n^k ; сочетание по-французски — combinaison.

Справедлива формула

$$C_n^k = \frac{A_n}{P_k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (13)$$

В самом деле, в каждом сочетании из n элементов по k можно произвести всевозможные перестановки. Количество их равно $P_k = k!$, а количество всех сочетаний равно C_n^k . Очевидно,

$$A_n^k = C_n^k P_k,$$

потому что перебирая все сочетания и сделав в каждом из них P_k перестановок, получим всевозможные размещения из n элементов по k . Этим формула (13) доказана.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Выпишите все сочетания из элементов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по два.
2. Сколькими возможными способами можно присудить семи лицам одинаковые премии?
3. Сколькими возможными способами можно распределить между шестью лицами две одинаковые путевки в санаторий?

§ 11.6. Связь с биномиальными коэффициентами.

Другой вывод формулы бинома Ньютона

Числа C_n^k мы назвали в п. 11.2 биномиальными коэффициентами, потому что они входят в разложение бинома Ньютона

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^k \quad (14)$$

как коэффициенты при $a^{n-k} x^k$.

Конечно, формулу (14) можно вывести комбинаторным путем. Для этого представим ее левую часть в следующем виде:

$$(a+x_1)(a+x_2) \dots (a+x_n), \quad (15)$$

где отдельным x , входящим в произведение, приписан отдельный номер, несмотря на то что все они равны $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$.

Раскроем в (15) скобки

$$\begin{aligned} (a+x)^n &= (a+x_1) \dots (a+x_n) = \\ &= a^n + a^{n-1}(x_1+x_2+\dots+x_n) + \\ &+ a^{n-2}(x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n) + \\ &+ a^{n-3}(x_1x_2x_3+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n) + \dots + x_1 \dots x_n. \end{aligned} \quad (16)$$

Заменив все x_m на x , получим

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \dots + C_n^n x^n,$$

т. е. формулу (14).

В самом деле, количество слагаемых в первых скобках (правой части (16)) равно n (каждое слагаемое равно x). Слагаемые во вторых скобках суть всевозможные сочетания из n элементов $x_1, \dots, x_n$ по два, количество их равно C_n^2 (каждое из них равно x^2). Слагаемые в третьих скобках суть всевозможные сочетания из указанных n элементов по три (каждое из них равно x^3) и т. д.

§ 11.7. Вероятность события

Приведем примеры, на которых мы выясним понятие вероятности.

Пример 1. Из ящика, где было 2 черных и 5 белых шаров, вынут наугад один шар. Ниже мы вводим число, которое называется вероятностью того, что вынут черный шар.

Для удобства рассуждения представим себе, что шары в ящике перенумерованы. Возможны 7 различных случаев: мы могли вынуть первый шар, либо второй, либо третий и т. д., либо, наконец, седьмой шар. Все эти случаи равновозможны, и один из них должен произойти. Поэтому говорят, что они равновозможны и единственно возможны.

С другой стороны, только 2 из 7 указанных (равно-возможных и единственно возможных) случаев благоприятствуют событию, заключающемуся в том, что вынут черный шар. Отношение 2 к 7 и называется *вероятностью указанного события*.

Таким образом, вероятность того, что при указанных обстоятельствах вынут черный шар, равна $P = \frac{2}{7}$.

Пример 2. Из ящика, где было 3 черных и 5 белых шаров, вынута наугад два шара. Какова вероятность, что оба шара черные?

Решение. Снова для удобства будем считать, что шары в ящике перенумерованы. Количество всевозможных способов выемки из ящика двух шаров равно числу сочетаний из 8 элементов по 2:

$$n = C_2^8 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

Указанные способы равновозможны и единственно возможны.

Только $m = C_2^3 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ из указанных способов благоприятствуют событию, заключающемуся в том, что вынуты на самом деле два черных шара. Например, если считать, что черные шары имеют номера 1, 2, 3, то это способы, соответствующие сочетаниям (1, 2), (1, 3), (2, 3).

Число $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{28}$ и называется вероятностью того, что при указанных обстоятельствах вынута 2 черных шара.

Пример 3. В первом ряду театра сидят 3 женщины и 27 мужчин. Какова вероятность, что все три женщины сидят рядом?

Решение. Возможны $n = 30!$ различных расположений (перестановок) указанных лиц в ряду. Эти перестановки будем считать равновозможными. С другой стороны, 3 женщины могут занимать места с номерами 1, 2, 3 либо с номерами 2, 3, 4 и т. д., либо, наконец, с номерами 28, 29, 30. Всего таких случаев 28. Но в каждом из этих случаев возможны $3!$ перестановок, характеризующих

расположение женщин по отношению друг к другу. Каждой такой перестановке соответствует $27!$ перестановок мужчин на занимаемых ими местах. Следовательно, количество перестановок (из 30 лиц!), *благоприятных для события*, заключающегося в том, что 3 женщины сидят рядом, равно

$$m = 28 \cdot 3127! = 3128!$$

Отсюда следует, что вероятность указанного события

$$P = \frac{m}{n} = \frac{3128!}{30!} = \frac{6}{29 \cdot 30} = \frac{1}{145}.$$

Замечание. С точки зрения теории вероятностей в данном примере рассмотрено *случайное событие* A , заключающееся в том, что в первом ряду театра все три женщины оказались сидящими вместе. Это событие может произойти и не произойти *в различных возможных случаях, которые предположены равновероятными и единственно возможными*. В данном примере отдельным возможным случаем является перестановка из 30 лиц. Количество таких равновероятных случаев равно n . Некоторые из этих случаев, как говорят, *благоприятны событию* A : если произойдет один из них, то будет иметь место событие A . Пусть m — количество таких случаев.

В данном примере случаями, благоприятными событию A , являются те перестановки (расположения) из 30 указанных лиц, при которых все три женщины сидят вместе.

По определению *вероятностью* P события A называется число

$$P = \frac{m}{n},$$

где n — количество единственно возможных, равновероятных случаев, а m — количество этих случаев, благоприятствующих событию A .

Пример 4. Из урны, где находятся 10 белых и 10 черных шаров, вынимают наугад 3 шара. Какая вероятность того, что будет вынуто а) 3 белых шара? б) 1 белый и 2 черных шара?

Решение. Равновероятными случаями здесь будут сочетания из 20 шаров по 3. Количество их равно

$$n = C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}.$$

Среди этих сочетаний благоприятных событию а) будет

$$m = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!},$$

откуда

$$P = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{2}{19}.$$

Благоприятных же событию б) сочетаний будет

$$m = 10 \cdot C_{10}^1 = 10 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 450,$$

откуда

$$P = \frac{m}{n} = \frac{450 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{15}{38}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Чему равна вероятность того, что случайная перестановка из цифр 0, 1, 2, 3 образует четырехзначное число (т. е. не начинается с цифры 0)?

2. В группе 32 ученика. Двое из них выбраны совсем случайно и посажены на первую скамью. Какова вероятность того, что оба они значатся в списке группы среди первых десяти учеников?

3. Положение плоскости в пространстве определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Сколько различных плоскостей можно провести через каждые три точки, принадлежащие к заданной системе из 1) 4 точек, 2) 7 точек, 3) 10 точек, если никакие три точки не лежат на одной прямой и никакие 4 точки не лежат на одной плоскости?

4. Запомните определения перестановок, размещений и сочетаний и формулы их количеств.

Усвоить понятие вероятности события на приведенных примерах.

§ 12.1. Понятие комплексного числа

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2x + 4 = 0. \quad (1)$$

Применив к нему известное правило нахождения корней квадратного уравнения, получим формально выражения

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3}, \quad (2)$$

которые еще записывают следующим образом:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (2')$$

Но мы не получили действительного решения, ведь $\sqrt{-3}$ не есть действительное число. Не существует действительного числа, квадрат которого равен -3 . Однако выражения вида (2) оказались полезными в математике, хотя они и не являются действительными числами. Их называют *комплексными числами*.

По определению *комплексным числом называется выражение*

$$a + bi, \quad (3)$$

где a и b — действительные числа, а i — специальный знак, при этом надо учесть следующие соглашения:

$$1) \quad i^2 = -1, \quad (4)$$

$$2) \quad a + 0i = a, \quad (5)$$

$$3) \quad 0 + bi = bi, \quad (6)$$

4) равенство $a + bi = c + di$, где a, b, c, d — действительные числа, имеет место тогда и только тогда, когда

$$a = c \quad \text{и} \quad b = d,$$

5) с выражениями (3) можно производить арифметические операции по правилам, которые приняты для буквенных выражений в алгебре.

Число $0 + bi = bi$ называется *мнимым* или *чисто мнимым*.

Из сказанного следует, что любое действительное число a есть частный случай комплексного числа. Ведь на основании 2) его можно записать в виде $a = a + 0i$. В частности, $0 = 0 + 0i$, но тогда, если $a + bi = 0$, то $a + bi = 0 + 0i$, следовательно,

$$a = b = 0.$$

Таким образом, комплексное число $a + bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$.

Из соглашения 5) следует, что при арифметических действиях над комплексными числами законно делать следующие преобразования:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi - bd = (ac - bd) + (bc + ad)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}i, \quad c + di \neq 0.$$

Мы видим, что сумма, разность, произведение и частное (где делитель не равен нулю) комплексных чисел есть, в свою очередь, комплексное число.

Пример.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{(1-1)+2i}{2} = i.$$

Заметим еще, что из (4) следует:

$$i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = i^3 i = 1,$$

$$i^5 = i^4 i = i, \quad i^6 = i^5 i = -1, \dots$$

Комплексные числа нередко обозначают одной буквой. Пишут

$$z = a + bi$$

и говорят: задано комплексное число z .

Число a называют *действительной частью* z и обозначают так:

$$\operatorname{Re} z = a,$$

число же b называют *мнимой частью* z и обозначают так:

$$\operatorname{Im} z = b;$$

real — по-французски реальный, действительный, imaginaire — мнимый, воображаемый.

Как видите, надо различать термины мнимая часть комплексного числа и мнимое число. Мнимая часть комплексного числа $a+bi$ есть действительное число b .

По определению, если $z=a+bi$ есть комплексное число (a, b — действительные), то $a-bi$ называют *ему сопряженным числом* и пишут $\bar{z}=a-bi$.

Конечно, если $b=0$, т. е. если на самом деле z есть действительное число, то $z=\bar{z}$.

Числа z и $\bar{z}$ взаимно сопряжены друг с другом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Привести к виду $a+bi$, где a и b — действительные, следующие комплексные числа:

1) $\frac{1}{i}$, 2) $\frac{1}{-i}$, 3) $\frac{1}{1+i}$, 4) $\frac{1}{1-i}$,

5) i^3-2i^3+i-1 , 6) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$,

7) $i^7+i^{32}+i^3+i^1+i^5+i^{30}$.

2. Убедиться в том, что

а) числа $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ удовлетворяют уравнению $x^3+x+1=0$; б) числа $1 \pm i$ удовлетворяют уравнению $x^3-2x+2=0$.

3. Вычислить выражения

$$(x+i)(x-i), (1-i)^4.$$

4. Показать, что $\overline{u+v}=\bar{u}+\bar{v}$, $\overline{u-v}=\bar{u}-\bar{v}$, где u и v — произвольные комплексные числа.

§ 12.2. Уравнение $x^2=c$

Поставим задачу. Задано уравнение

$$x^2=c, \quad (7)$$

где c — действительное число. Требуется решить его в комплексных числах, т. е. найти все комплексные $x=\alpha+\beta i$, которые удовлетворяют уравнению (7).

Будем рассуждать, как обычно. Допустим, что существует комплексное число $x=\alpha+\beta i$ (α и β — действительные), удовлетворяющее уравнению (7). Подставим его в (7) и будем делать законные для комплексных чисел

преобразования:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta i)^2 &= c, \\ \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i &= c.\end{aligned}$$

Так как c — действительное число, то

$$\alpha^2 - \beta^2 = c, \quad 2\alpha\beta = 0. \quad (8)$$

Из второго равенства в (8) следует, что по крайней мере одно из чисел α , β равно нулю.

Пусть $c = 0$, тогда $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ и $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, т. е. $\alpha = \beta = 0$.

Пусть $c > 0$. Так как из второго уравнения (2) следует, что одно из чисел α , β равно нулю, то из первого следует, что $\beta = 0$, и мы получим уравнение $\alpha^2 = c$, где надо искать действительные числа α . Это уравнение имеет два решения (корня):

$$\alpha = \pm \sqrt{c},$$

где $\sqrt{c}$ — арифметическое значение квадратного корня из c . Мы получили $x = \pm \sqrt{c}$.

Если теперь $c < 0$, то придется заключить, что $\alpha = 0$, а $\beta \neq 0$, и тогда $-\beta^2 = c$ или $\beta^2 = -c > 0$, откуда

$$\beta = \pm \sqrt{-c}$$

и, следовательно, $x = \pm \sqrt{-c}i$.

Мы решили поставленную задачу: если $c > 0$, то уравнение (7) имеет два действительных решения $\pm \sqrt{c}$ и комплексных решений не имеет, если же $c < 0$, то уравнение (7) имеет два чисто мнимых решения $\pm \sqrt{-c}i$, а действительных решений не имеет; при $c = 0$ имеется только одно решение: $x = 0$.

Замечание. Любое комплексное число x , удовлетворяющее уравнению (7), называют корнем квадратным из числа c и обозначают символом $\sqrt{c}$. Мы доказали, что

$$\sqrt{c} = \begin{cases} 0 & \text{при } c = 0, \\ \pm \sqrt{c} & \text{при } c > 0, \\ \pm \sqrt{-c}i & \text{при } c < 0, \end{cases}$$

где справа знак $\sqrt{}$ понимается в смысле арифметического значения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить в комплексных числах уравнения:

- 1) $x^2 = 1$, 2) $x^2 = -1$, 3) $x^2 = 9$, 4) $x^2 = -9$,
5) $x^2 = 10$, 6) $x^2 = -10$.

§ 12.3. Применение комплексных чисел в квадратных уравнениях

Рассмотрим квадратное уравнение в общем виде

$$x^2 + px + q = 0, \quad (9)$$

где p и q — заданные действительные числа.

Будем искать комплексные решения этого уравнения. Пусть комплексное число $x = a + bi$ является решением (или корнем) уравнения (9).

Имеем

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

где справа стоит любое комплексное число, квадрат которого равен $\frac{p^2}{4} - q$.

Отсюда (см. замечание в конце п. 12.2)

$$\left. \begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} && \text{при } \frac{p^2}{4} - q \geq 0, \\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i && \text{при } \frac{p^2}{4} - q < 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Мы получили формулы решения квадратного уравнения.

Итак, квадратное уравнение (9) в случае, когда $\frac{p^2}{4} - q > 0$, имеет два действительных решения, а в случае, когда $\frac{p^2}{4} - q < 0$, — два комплексных решения. В случае же $\frac{p^2}{4} - q = 0$ оно имеет одно решение, равное $-p/2$, но считают, что и в этом случае решений два, но они совпадают и называют решение (корень) уравнения (9) *кратным*.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (9). Покажем, что для любого действительного x

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q. \quad (11)$$

Это тождество, т. е. равенство, верное для всех x в случае, когда x_1 и x_2 — действительные корни, читатель, надо полагать, знает. Его называют *равенством* (или *теоремой*) *Виета*. Повторим его доказательство:

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) &= \\&= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \\&= x^2 + px + q.\end{aligned}$$

Докажем теперь (11), когда x_1 и x_2 комплексные. В этом случае

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i \quad \left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(x-x_1)(x-x_2) &= \\&= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i\right) \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} i\right) = \\&= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = x^2 + px + q.\end{aligned}$$

Мы доказали тождество (11), где p и q — произвольные действительные числа, а x_1 и x_2 — корни уравнения (1).

Интересно, что равенство (11) может быть обобщено на многочлены любой степени: всякий многочлен

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

степени n может быть представлен в виде произведения

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — числа, вообще говоря, комплексные — корни многочлена ($P_n(x_j) = 0$; $j = 1, \dots, n$). Если коэффициенты a_j действительные, то комплексные корни x_j обязательно попарно сопряжены.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить в комплексных числах квадратные уравнения:

1) $x^2 + x + 1 = 0$, 2) $x^2 + 3x + \frac{25}{4} = 0$,

3) $x^2 - 5x + 6 = 0$, 4) $x^2 - 2x + 5 = 0$.

§ 12.4. Геометрическое изображение комплексных чисел

Зададим в плоскости прямоугольную систему координат (x, y) . Комплексное число $z = x + yi$ удобно изображать на плоскости точкой, с координатами (x, y) . Эту точку называют точкой z .

Мы видим, что имеет место взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и комплексными числами, т. е. каждому комплексному числу соответствует (указанным путем) точка плоскости; двум разным комплексным числам соответствуют разные точки, и каждая точка соответствует (указанным путем) некоторому комплексному числу.

В силу этого соответствия координатную плоскость называют еще *комплексной плоскостью*.

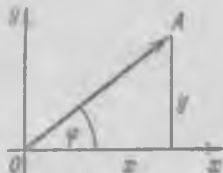


Рис. 120

На рис. 120 отмечена точка $z = x + iy$. Введем вектор с началом в нулевой точке O и концом в A . Длина его

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется *модулем комплексного числа z* . Угол φ , образуемый вектором $\overrightarrow{OA}$ с положительной полуосью x (отсчитываемый против часовой стрелки), называется *аргументом числа z* .

Таким образом, каждое комплексное число z имеет свой модуль, который записывают так:

$$\rho = |z|,$$

и аргумент φ , записываемый так:

$$\varphi = \text{Arg } z.$$

Но аргумент определяется неоднозначно. Если φ есть аргумент z , то $\varphi + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ есть тоже аргумент z . Чтобы внести четкость в этот вопрос, можно искать аргумент z , удовлетворяющий неравенству $0 \leq \varphi < 2\pi$. Его обозначают $\arg z$ и называют *главным значением аргумента z* или *аргументом z в приведенном виде*; $\arg z$ однозначно определяется числом z .

Любое значение аргумента z обозначается через $\text{Arg } z$. Оно определяется по формуле

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Очевидно,

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (12)$$

В связи с равенством (12) говорят, что *комплексное число записано в тригонометрической форме*.

§ 12.5. Показательная форма комплексного числа

Выражение в скобках в формуле (12) § 12.4 обозначают следующим образом:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

и тогда его можно записать в более компактной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad (13)$$

называемой *показательной формой комплексного числа*.

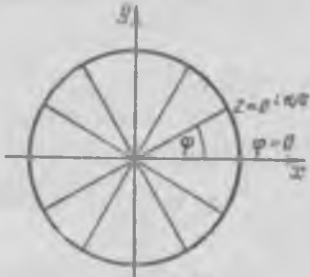
Отметим важные свойства величины $e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} |e^{i\varphi}| &= |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \end{aligned}$$

при любом φ .

Это показывает, что точка $z = e^{i\varphi}$ комплексной плоскости находится на окружности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

На рис. 121 единичная окружность разделена на 12 частей. При этом точка, соответствующая $\varphi = 0$, входит в число точек деления. Ниже приведена таблица комплексных чисел, соответствующих этим точкам.



φ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	...
$e^{i\varphi}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	i	...

Если φ непрерывно возрастает от 0 до 2π , то комплексная точка $e^{i\varphi}$ непрерывно описывает нашу окружность.

а при дальнейшем возрастании φ точка будет продолжать движение по окружности. Имеем

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

для любых φ .

Мы доказали формулу

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2},$$

верную для любых φ_1 и φ_2 . Но тогда

$$e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2)} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} e^{i\varphi_2}.$$

Поэтому

$$e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$$

для любых φ_1 и φ_2 .

Зададим теперь два комплексных числа, которые записаны в форме

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} \quad (\rho_1, \rho_2 \geq 0).$$

Произведение их равно

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Так как $\rho_1 \rho_2 \geq 0$, то мы получили тригонометрическое представление числа $z_1 z_2$; при этом

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2 = |z_1| |z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Утверждается, что сумма $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ отличается от $\operatorname{Arg}(z_1 + z_2)$ на величину вида $2k\pi$, где k — некоторое целое число.

Подобным образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\rho_2 > 0).$$

Поэтому

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi,$$

где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Мы доказали: модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей плюс, быть может, число, равное $2k\pi$, где k — одно из чисел $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Мы доказали также: модуль частного комплексных чисел z_1 и z_2 равен частному модулей этих чисел, а аргумент частного равен с точностью до $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) разности аргументов z_1 и z_2 ($z_2 \neq 0$).

Сумма комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$

равна

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

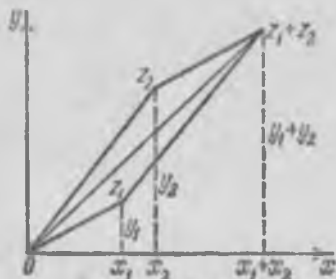


Рис. 122

Из рис. 122 видно, что радиус-вектор точки $z_1 + z_2$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на радиус-векторах точек z_1 и z_2 . Длина диагонали равна $|z_1 + z_2|$, а длины его сторон равны $|z_1|$ и $|z_2|$, но тогда

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

т. е. модуль суммы комплексных чисел не превышает суммы их модулей.

Отсюда, как следствие, вытекает, что модуль разности z_1 и z_2 не меньше разности модулей z_1 и z_2 :

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

Пример 1. Привести комплексное число

$$z = \sqrt{3} + i$$

к тригонометрической форме.

Решение. Находим

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Следовательно,

$$z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right).$$

При этом среди углов α , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, существует, и притом единственный, такой,

что

$$\sqrt{3}/2 = \cos \alpha, \quad 1/2 = \sin \alpha.$$

Очевидно, $\alpha = \pi/6$ и

$$z = 2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)) = 2e^{i\pi/6}.$$

Пример 2. Привести число

$$z = 3 + 4i$$

к тригонометрической форме.

Решение. Находим

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

и

$$z = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 5e^{i\alpha},$$

где α — угол, для которого

$$\cos \alpha = 3/5, \quad \sin \alpha = 4/5. \quad (14)$$

Будем искать α среди удовлетворяющих неравенству $0 \leq \alpha < 2\pi$. Так как в данном случае $\cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$, то α находится в первой четверти. Из (14) следует: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, т. е. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

Пример 3. Привести число

$$z = -3(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

к тригонометрической форме.

Решение. Если бы перед скобкой стояло положительное число, то данное выражение и было бы тригонометрической формой комплексного числа.

Имеем

$$-\cos \alpha = \cos(\pi + \alpha), \quad -\sin \alpha = \sin(\pi + \alpha),$$

поэтому

$$-3(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 3(\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)) = 3e^{i(\pi + \alpha)},$$

и мы получили тригонометрическую форму.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Представить в тригонометрической форме числа

а) $5 - 4i$, б) $1 + 2i$, в) 4 , г) $6i$, д) $-2e^{-\frac{\pi}{3}}$

2. Решить в комплексных числах уравнения:

а) $x^3 - 1 = 0$, б) $x^3 + 1 = 0$, в) $x^2 + 3x + 3 = 0$.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 13.1. Понятие приближения

Пусть задано число a и мало отличающееся от него число $\bar{a}$, которое будем называть *приближением числа a* . Будем при этом писать приближенное равенство

$$a \approx \bar{a} \quad (1)$$

и читать его так: *число a приближенно равно числу $\bar{a}$* . Символ $\approx$ есть знак приближенного равенства. Будем еще писать

$$\bar{a} - a = \Delta a$$

и величину

$$|\Delta a| = |\bar{a} - a|$$

называть *абсолютной погрешностью приближения (1)*.

Не всегда известно точное значение абсолютной погрешности a , но нередко известно число δ , ее превышающее,

$$\delta > |\Delta a| = |\bar{a} - a|, \quad (2)$$

называемое *погрешностью приближения (1)*. Неравенство (2) эквивалентно двум неравенствам

$$\bar{a} - \delta < a < \bar{a} + \delta,$$

так что если известны δ и $\bar{a}$, то можно сказать, что a есть некоторое число, принадлежащее к интервалу $(\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta)$.

Если известно, что $\bar{a} \leq a$, то говорят, что $\bar{a}$ *приближает a с недостатком (снизу)*, а если $\bar{a} \geq a$, то говорят, что $\bar{a}$ *приближает a с избытком (сверху)*.

Если известно неравенство (2), то будем говорить, что приближенное равенство (1) *имеет место с точностью до δ* .

Пример. При измерении температуры большого менник ртути термометра оказался между отметками $38,6^\circ$ и $38,7^\circ$. Таким образом, температура T удовлетворяет неравенствам

$$38,6^\circ < T < 38,7^\circ.$$

Хотя точное значение T неизвестно, все же можно написать приближенные равенства

$$T \approx 38,6^\circ, \quad T \approx 38,7^\circ,$$

сказав, что они имеют место с точностью до 0,1; можно еще добавить, что $38,6^\circ$ есть приближение снизу, а $38,7^\circ$ — приближение сверху числа T .

Впрочем, на практике вместо $\approx$ пишут знак $=$, т. е. в данном случае пишут

$$T = 38,7^\circ \quad \text{или} \quad T = 38,7^\circ,$$

считая само собой разумеющимся, что эти равенства приближенные и при том взятые с точностью до 0,1, т. е. с точностью до последнего знака числа T .

Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots$ и для любого натурального n

$$a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\dots\alpha_n.$$

Тогда (см. § 10.4)

$$a^{(n)} \leq a < a^{(n)} + 10^{-n}$$

и можно считать, что имеет место приближенное равенство

$$a \approx a^{(n)}$$

с точностью до 10^{-n} , при этом $a^{(n)}$ есть приближение a снизу.

Можно еще приближать десятичную дробь a с точностью до n -го знака с округлением. Такое приближение дает погрешность $\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$.

Пример 1. Следующие приближения

$$0,(\overline{73}) = 0,7373\dots \approx 0,7, \quad (3)$$

$$0,(\overline{73}) \approx 0,74, \quad (4)$$

$$0,73651 \approx 0,737 \quad (5)$$

взятые с округлением: если первая отброшенная цифра ≥ 5 , то последняя оставшаяся цифра увеличена на 1, если же первая отброшенная цифра < 5 , то оставленные цифры не изменены.

Приближения (3), (4), (5) имеют место соответственно с погрешностями $\frac{1}{2} \cdot 0,1$, $\frac{1}{2} \cdot 0,01$, $\frac{1}{2} \cdot 0,001$.

§ 13.2. Абсолютная погрешность

Теорема 1. Абсолютная погрешность приближений суммы и разности чисел не превышает сумму абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

Доказательство. Даны приближения $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$. Тогда приближение

$$a \pm b \approx \bar{a} \pm \bar{b}$$

имеет абсолютную погрешность

$$|\Delta(a \pm b)| = |(\bar{a} \pm \bar{b}) - (a \pm b)| = |\Delta a \pm \Delta b| \leq |\Delta a| + |\Delta b|,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Даны приближения $a \approx 3,728$, $b \approx -0,103$, $c \approx 2,107$ все три с точностями до 0,001. Тогда приближение

$$a + b + c \approx 3,728 - 0,103 + 2,107$$

имеет погрешность

$$\delta \leq 0,001 + 0,001 + 0,001 = 0,003.$$

§ 13.3. Относительная погрешность

Относительной погрешностью приближения $a \approx \bar{a}$ называется величина

$$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| \quad \text{или} \quad \left| \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right|. \quad (6)$$

Конечно, два эти числа разные. Но мы считаем, что эти числа настолько мало отличаются друг от друга, что можно одно из них заменить другим. Можно еще сказать, что мы рассматриваем относительные погрешности настолько малые, что их произведениями можно пренебречь. Это видно из следующих соотношений:

$$\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{\bar{a}} = \frac{\bar{a} - a}{a\bar{a}} \Delta a = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta a}{\bar{a}}, \quad (7)$$

$$\left| \left| \frac{\Delta a}{a} \right| - \left| \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right| \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \cdot \left| \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right|. \quad (8)$$

Теорема 2. Относительная погрешность приближения произведения или частного чисел не превышает сумму относительных погрешностей приближений этих чисел:

$$\left| \frac{\Delta(ab)}{ab} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|, \quad (9)$$

$$\left| \frac{\Delta(a/b)}{a/b} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$. Тогда считаем $ab \approx \bar{a}\bar{b}$, $\frac{a}{b} \approx \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$. Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(ab)}{ab} &= \frac{(a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab}{ab} = \frac{b\Delta a + a\Delta b + \Delta a \Delta b}{ab} = \\ &= \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}. \end{aligned}$$

Последнее равенство написано с точностью до произведения

$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| \cdot \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$. Следовательно,

$$\left| \frac{\Delta(ab)}{ab} \right| \leq \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$$

и мы доказали (9). Далее,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(a/b)}{a/b} &= \frac{\frac{a+\Delta a}{b+\Delta b} - \frac{a}{b}}{a/b} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{a(b+\Delta b)} = \frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} \\ &= \frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b}. \end{aligned}$$

Здесь четвертое равенство записано с погрешностью, оцениваемой величинами, которыми мы условились пренебречь — произведениями относительных погрешностей чисел a , b . Ведь

$$\begin{aligned} \frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} - \frac{b\Delta a - a\Delta b}{ab} &= \frac{b\Delta a - a\Delta b}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b} \right) = \\ &= \frac{b\Delta a - a\Delta b}{a} \frac{\Delta b}{bb} = \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{\Delta b}{b}. \quad (11) \end{aligned}$$

§ 13.4. Вычисление произведения и частного

В § 10.7 отмечалось, что при практическом умножении и делении двух десятичных дробей

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\dots, \quad \beta = \beta_0, \beta_1\beta_2\dots \quad (12)$$

в качестве их приближений берут конечные десятичные дроби

$$\alpha^{(m)} = \alpha_0, \alpha_1\dots, \alpha_m, \quad \beta^{(n)} = \beta_0, \beta_1\dots, \beta_n.$$

Но чтобы получить достаточно хорошие приближения

$$ab \approx \alpha^{(m)}\beta^{(n)}, \quad \frac{a}{b} \approx \frac{\alpha^{(m)}}{\beta^{(n)}}, \quad (13)$$

не загромождая вычисления излишними выкладками, надо умело подобрать натуральные m и n в зависимости от структуры данных чисел a , b .

Надо знать, какие цифры следует оставить при приближении, чтобы получить оптимальный (наилучший) результат, т. е. такой, чтобы приближение было по возможности точнее и вычисления были экономичнее. Точность вычисления находится в противоречии с простотой вычисления. Большая точность связана с употреблением большего количества цифр, меньшая требует употребления меньшего количества цифр, если вычисление производится правильно.

Чтобы правильно приближенно умножать и делить числа, надо правильно округлять их.

Ниже формулируется правило приближенного вычисления умножения и деления чисел, заданных десятичными дробями. В нем употребляется понятие значащей цифры, которое было введено в § 4.7. Повторим определение этого понятия.

Значащими цифрами в десятичной дроби называются ее первая отличная от нуля цифра и следующие за ней цифры.

Например, в числе 33 000 все цифры значащие, в числе 0,3001 все цифры после запятой значащие, в числе же 0,000302 цифры, начиная с 3, значащие.

Округлить число с точностью до k -й значащей цифры — это значит округлить его с точностью до того знака, где находится k -я

значащая цифра. Например, следующие приближения взяты с точностью до 3-й значащей цифры:

$$235678 \approx 236000, \quad 2,70315 \approx 2,70, \quad 0,002031 \approx 0,00203.$$

Правило. Чтобы вычислить приближенно произведение или частное положительных чисел с точностью до k -й значащей цифры, надо округлить эти числа с указанной точностью, перемножить или разделить полученные приближения и результат округлить с точностью до k -й значащей цифры.

Полученные приближения $ab \approx \bar{a}\bar{b}$, $\frac{a}{b} \approx \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ имеют гарантированную относительную погрешность 10^{k-1} .

Пример. Пусть $a = 135,78$, $b = 0,0068751$. Вычислить приближенно ab , $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ с точностью до третьей значащей цифры.

Каковы абсолютные погрешности этих приближений?

Решение. С помощью калькулятора вычислим

$$ab \approx 136 \cdot 0,00688 = 0,93568 \approx 0,936;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0,00688} = 19767,4 \dots \approx 19800;$$

$$\frac{b}{a} \approx \frac{0,00688}{136} = 0,00005058 \dots \approx 0,0000506.$$

Ответ. $ab \approx 0,936$, $\frac{a}{b} \approx 19800$, $\frac{b}{a} \approx 0,0000506$ с относительными погрешностями 0,01.

В следующем параграфе будет обосновано, что, округляя числа a , b с точностью до третьей значащей цифры, мы получим приближения $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$ с относительными погрешностями $\frac{1}{2} \cdot 0,01$. Но тогда приближения

$$ab \approx \bar{a}\bar{b}, \quad \frac{a}{b} \approx \frac{\bar{a}}{\bar{b}}, \quad \frac{b}{a} \approx \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

будут с гарантированной относительной погрешностью $\frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,01$.

Абсолютные погрешности этих приближений оцениваются следующим образом:

$$|\Delta(ab)| \leq 0,01 \cdot |ab| \leq 0,01 \cdot 1 = 0,01;$$

$$\left| \Delta \frac{a}{b} \right| \leq 0,01 \cdot 20000 = 200;$$

$$\left| \Delta \frac{b}{a} \right| \leq 0,01 \cdot 0,0001 = 10^{-6}$$

$$(0,0000506 < 0,0001).$$

*) Последняя цифра 8 нам нужна для округления; чтобы ее получить, надо на калькуляторе разделить 688:135 и передвинуть запятую.

§ 13.5. Обоснование правила

Лемма. Пусть $a > 0$ — десятичная дробь и $\bar{a}$ — ее округление с точностью до k -й значащей цифры. Тогда приближение $a \approx \bar{a}$ имеет относительную погрешность, равную $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(k-1)}$;

$$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| = \left| \frac{\bar{a} - a}{a} \right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-(k-1)}.$$

Примеры. Следующие округления чисел взяты с точностью до их четвертой значащей цифры:

$$356\,273 \approx 356\,300, \quad 37,205 \approx 37,21, \quad 0,0020136 \approx 0,002014.$$

Согласно лемме относительная погрешность каждого из этих приближений равна $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

Доказательство леммы. Дана десятичная дробь a . Пусть α_s — ее первая значащая цифра. Приведем a к стандартному виду (§ 4.7). Для этого надо в дроби a перенести запятую так, чтобы она оказалась непосредственно после α_s :

$$a = 10^l \cdot \alpha_s, \alpha_{s+1} \alpha_{s+2} \dots$$

Здесь 10^l — возникающий при переносе запятой множитель.

Округлив a с точностью до k -й значащей цифры, получим $\bar{a} = 10^l \cdot \alpha_s, \alpha_{s+1} \dots \alpha_{s+k-1}$.

Относительная погрешность приближения $a \approx \bar{a}$ оценивается следующим образом (пояснения ниже):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta a}{a} \right| &= \left| \frac{a - \bar{a}}{a} \right| = \left| \frac{10^l \cdot 0,0\dots \alpha_{s+k} \alpha_{s+k+1} \dots}{10^l \cdot \alpha_s, \alpha_{s+1} \alpha_{s+2} \dots} \right| < \\ &< \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}}{1} = \frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}. \end{aligned}$$

Мы сократили дробь на 10^l ; числитель не превышает $\frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}$.

Далее, $\alpha_s, \alpha_{s+1} \alpha_{s+2} \dots \geq 1$, потому что $\alpha_s \geq 1$ есть первая значащая цифра дроби a .

Лемма доказана.

Переходим к обоснованию правила. Пусть $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}$ — округления соответственно a и b с точностью до k -й значащей цифры. Тогда по лемме

$$\left| \frac{\Delta a}{a} \right| < \frac{1}{2} 10^{-(k-1)}, \quad \left| \frac{\Delta b}{b} \right| < \frac{1}{2} 10^{-(k-1)}$$

и по теореме 2

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta ab}{ab} \right| &< \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| < 10^{-(k-1)}, \\ \left| \frac{\Delta (a/b)}{a/b} \right| &< \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| < 10^{-(k-1)}, \end{aligned}$$

Остается заметить, что у полученных при помощи микрокалькулятора дробей, выражающих приближенно $\overline{ab}$ и $\overline{\frac{a}{b}}$, надо оставить k значащих цифр, а остальные цифры вычеркнуть. Если их оставить, они будут только загромождать результат, но истинного улучшения не дадут.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Округлить числа:

$a = 353,803$ до 4-й значащей цифры,

$b = 0,003071$ до 3-й значащей цифры,

$c = 0,000209$ до 2-й значащей цифры,

$d = 251672$ до 3-й значащей цифры,

$e = 353\,803$ до 4-й значащей цифры.

2. Вычислить ab , $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ с относительной погрешностью 10^{-2} .

3. Вычислить cd , $\frac{c}{d}$, $\frac{d}{c}$ с относительной погрешностью 0,1.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

К главе 1, главе 2

1. По цепочкам функций написать соответствующую сложную функцию и, пользуясь обозначениями, приведенными в § 1.2, указать области задания этой функции:

1) $y = \cos u$, $u = 2x$. 2) $y = e^x$, $u = 3x$.

3) $y = e^u$, $u = x^2$. 4) $y = e^u$, $u = -x$.

5) $y = \sin u$, $u = 3x + 1$.

6) $y = u^2$, $u = 2v^2 + 1$, $v = x - 1$.

7) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 + u$, $u = x^2$.

8) $y = \sqrt{v}$, $v = 1 - u$, $u = x^2$.

9) $y = \ln u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - t$, $t = x^2$.

2. Как в примерах к § 3.9, следующие функции представить в виде цепочек простейших элементарных функций:

1) $y = e^{2x}$. 2) $y = \sin 4x$. 3) $y = \sin(2x + 1)$.

4) $y = (x^2 + 1)^2$. 5) $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$. 6) $y = \ln^2(1 + x)$.

7) $y = \sin^2 x^2$. 8) $y = e^{2x+3}$. 9) $y = \cos^2 2x$.

10) $y = \sin^2 x^2$. 11) $y = e^{2x+3}$. 12) $y = \cos^2 2x$.

13) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 14) $y = \frac{1}{1+x^2}$.

3. Убедиться в том, что приведенные выше функции суть элементарные функции, и, пользуясь обозначениями, приведенными в § 1.2, указать множества, на которых эти функции определены.

4. Что такое многочлен, линейная функция, рациональная функция, сложная функция, элементарная функция?

К главе 3

1. Какие из приведенных ниже переменных бесконечно малые или стремятся к пределу (тогда к какому?), или вовсе не имеют предела?

1) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

2) $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$.

3) $\{1, 1; 1, 01; 1, 001, \dots\} = \{1 + 10^{-n}\}$.

- 4) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.
 5) $\{-1, +1, -1, +1, \dots\} = \{(-1)^n\}$.
 6) $\{0,1; 0,11; 0,111; \dots\} = \underbrace{\{0,1\dots 1\}}_{n \text{ раз}}$.

2. Какие из приведенных ниже переменных бесконечно большие (стремятся к бесконечности)? Стремятся ли они к $+\infty$ или $-\infty$?

- 1) $\{1, 2, 3, \dots\} = \{n\}$.
 2) $\{1, -2, 3, -4, \dots\} = \{(-1)^{n-1}n\}$.
 3) $\{-1, -2, -3, \dots\} = \{-n\}$.
 4) $\{1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \dots\}$.

3. Приращение функции $y=x^2$ в точке x , соответствующее приращению аргумента Δx , вычисляется по формуле $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$.

При этом здесь x и Δx любые, т.е. $-\infty < x, x + \Delta x < \infty$.

Вычислить приращение Δy в точке x , соответствующее приращению Δx , для следующих функций:

- 1) $y=x^4$. 2) $y=\ln x$. 3) $y=\sin 2x$.
 4) $y=x^2$. 5) $y=\arcsin x$. 6) $y=\lg x$.
 7) $y=(2x+3)$. 8) $y=e^x$. 9) $y=\frac{1}{x}$.

Указать интервалы, которым могут принадлежать x и Δx .

4. Если функция $y=f(x)$ имеет непрерывный график на отрезке (интервале), то ее называют непрерывной на этом отрезке (интервале). Как это выражается 1) на языке Δx и Δy и 2) на языке предела функции?

5. Пользуясь формулами 1)–10) § 3.8, написать, чему равны пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$. 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x$. 3) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \arcsin x$.
 4) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\sin x + \cos x)$. 5) $\lim_{x \rightarrow e^2} \ln x$. 6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x + x)$.
 7) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \operatorname{tg} x$. 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x^2}$. 9) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

К главе 5

1. Нарисовать график функции $y=\cos x$ на отрезке $(0, 2\pi)$, провести в его точках $x = -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ касательные и вычислить их угловые коэффициенты.

2. Вычислить производные от функций:

- 1) $y=x^2(2x+1)$. 2) $y=x^2 \sin x$. 3) $y=\frac{x+1}{x-1}$.
 4) $y=x \ln x$. 5) $y=xe^x$. 6) $y=(x^2-1) \ln x$.

Учебное издание

НИКОЛЬСКИЙ Сергей Михайлович

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Заведующий редакцией *А. П. Басова*

Редактор *М. М. Горячая*

Художественный редактор *Л. Н. Романенкова*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректор *Н. Я. Кришталъ*

ИБ № 32830

Сдано в набор 15.09.88. Подписано к печати 11.04.89. Формат 84×108 1/32.
Бумага офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ.
л. 11,76. Усл. кр.-отт. 11,97. Уч.-изд. л. 11,1. Тираж 180 000 экз. Заказ
№ 9-258. Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
МПО «Первая Образцовая типография»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.
113054, Москва, Валовая, 28

Отпечатано на полиграфкомбинате ЦК ЛКСМ Украины «Молодь» орде-
на Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объ-
единения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия»: 252119, Киев-119, ул. Пар-
хизинско, 28-31.

S. NIKOLSKII

ELEMENTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS

This popular little book «Elements of mathematical analysis», which was issued by publishing House «Nauka» (Moscow 1981) with mass drawing, is sold off. There are its translations on english (1983) and spanish (1984) by Editorial «Mir» (Moscow).

Last time author with his colleagues was intersted to the problems of mathematical school teaching. There are their attempt textbooks in arithmetic and algebra, which now are passing experiments In the soviet schools. «Nauka» has issued «Arithmetics» (1988) by S. Nikolskii, M. Potapov, N. Reshetnikov, A. Shevkin.

Naturally author has made changes in the second edition of «Elements of mathematical analysis», using these experiences. Now every person with education for 8 classes of soviet school can read the book free. The first 8 chapters of the book contain object of algebra for 9—10 classes of soviet school.

To get this aim was introduced the chapter «Trigonometrical functions». The chapter «Exponential functions» was also changed. The definition of this function for any real numbers is a difficult question in school teaching. The author though much before to stop on the defined way of the teaching of this notion.

Style of the account of the mathematical analysis themselves is preserved as in the first edition. Notion of the limits is given on examples, without formal definitions. Generally, the properties of limits and graphics are considered on the intuitive ground. Graphics and motion themselves are serving as the ground for fundamental conclusions. Very shortly are given differential and integral calculus and their application.

The concluding chapters (9—12) are devoted to the elementary account of some additional facts which also are important for the full middle mathematical education—complex numbers, Newton's binom, combinatoric, Taylor's formula.

In the USSR this book finds oneself usefull for adult pupils and of the general and technical schools teachers and even for the students of the faculties with short mathematical programme.

We hope that this book will be usefull accordingly in the foreign countries.

