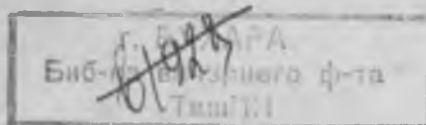
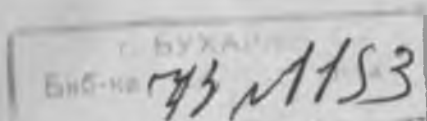


**СПЕЦИАЛЬНЫЙ
КУРС МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ВТУЗОВ**

В. Ф. ЖЕВЕРЖЕЕВ, Л. А. КАЛЫНИЦКИЙ, Н. А. САПОНОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ВТУЗОВ

Рекомендовано к изданию Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для втузов



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА» МОСКВА 1970

А Н Н О Т А Ц И Я

Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А.
Специальный курс высшей математики для вузов. «Выс-
шая школа», 1970.

В книге излагаются следующие специальные главы: теория функции комплексного переменного, ряды и интеграл Фурье, операционное исчисление, элементы линейной алгебры, теория вероятностей, математическая статистика.

В каждой главе приведены задачи и примеры с подробными решениями и иллюстрациями, а также подобрано достаточное количество примеров и задач для упражнений.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов вузов, изучающих математику по расширенной программе. Она может быть использована инженерами, желающими повысить свою математическую квалификацию.

Избранная авторами методика изложения делает пособие вполне пригодным для самостоятельного овладения предметом.

В книге 102 рисунка, 12 таблиц.

**Жевержеев Всеволод Федорович,
 Кальницкий Леонид Александрович,
 Сапогов Николай Александрович**

**СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
 ДЛЯ ВТУЗОВ**

Редактор *Г. И. Кручкович*
 Редактор издательства *Ф. А. Тальский*
 Переплет художника *А. И. Шеварда*
 Художественный редактор *В. И. Пономаренко*
 Технический редактор *Н. А. Битюкова*
 Корректор *В. И. Мишанина*

Сдано в набор 21 XI 1967 г.	Подписано к печати 15/XII 1969 г.
Формат 60×90 ^{1/16}	Объем 26 печ. л. Уч.-изд. л. 22,94
	Тираж 50 000 экз. Цена 74 коп.
	БЗ—34,14 от 15/V-69 г.
	Москва, К-51. Неглинная ул., д. 29/14,
	Издательство «Высшая школа»

Типография им. Анохина
 Управления по печати при Совете Министров Карельской АССР
 г. Петрозаводск, ул. «Правды», 4.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы во вузах нашей страны значительно увеличен курс математики. Наряду с традиционными разделами геометрии и анализа стали излагаться специальные главы математических дисциплин, необходимые современному инженеру. Особое значение приобрело изучение теории функций комплексного переменного, алгебры, теории вероятностей и математической статистики.

Студенты должны усвоить обширный и разнообразный комплекс математических идей, понятий и методов в ограниченное время. В отечественной литературе имеется много превосходных руководств по указанным разделам математики, но не всегда доступных студентам вузов.

Авторы предлагаемой книги ставили перед собой задачу написать руководство по некоторым разделам высшей математики, доступное для студентов вузов.

Включая в книгу значительное число подробно разобранных задач и упражнений, авторы стремились сделать книгу пригодной для самостоятельного изучения.

Книга может быть использована инженерно-техническими работниками с целью повышения своей математической квалификации. Предполагается, что читатель знаком с общим курсом высшей математики в объеме известных учебников для вузов А. Ф. Берманта или Н. С. Пискунова.

В книге ряд теорем приводится без доказательства, обращается внимание на детальное истолкование их смысла и практического значения.

Авторы несут совместную ответственность за все изложение, несмотря на то, что главы I—III написаны Л. А. Кальницким, глава IV — В. Ф. Жевержевым, а главы V и VI — И. А. Сапоговым.

Авторы выражают благодарность проф. А. А. Яблонскому, чьи советы и пожелания во многом помогли появлению настоящей книги, и всем кто оказывал содействия по усовершенствованию рукописи.

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Комплексные числа. Комплексными числами называются числа вида $z = x + yi$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

При $y=0$ комплексное число $z = x + 0 \cdot i$ совпадает с действительным числом x ; если же $x=0$, то имеем комплексное число $z = 0 + yi = yi$, называемое *чисто мнимым*.

Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат XOY и будем трактовать x и y как координаты точек этой плоскости (рис. 1.1). Тогда каждому комплексному числу $z = x + yi$ будет отвечать определенная точка $z(x, y)$ плоскости и, наоборот, каждой точке $z(x, y)$ плоскости будет отвечать определенное комплексное число $z = x + yi$. Таким образом, между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости XOY существует взаимно однозначное соответствие.

Каждая точка $z(x, y)$ плоскости XOY определит на этой плоскости вектор z с началом в начале координат и концом в этой точке; проекции этого вектора на оси координат будут равны соответственно x и y . Векторы $z(x, y)$ будем считать свободными векторами; это значит, что начало любого из этих векторов можно совместить с любой точкой плоскости XOY , перенеся соответствующим образом этот вектор параллельно самому себе. Наоборот, каждому вектору z плоскости

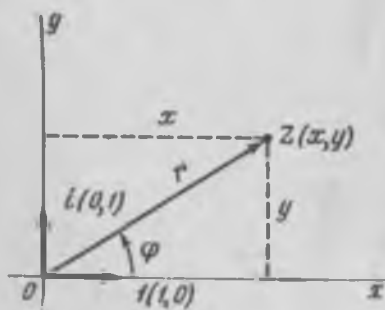


Рис. 1.1

$ХОУ$ отвечает определенная точка плоскости — конец этого вектора, при условии, что начало вектора z совмещено с началом координат.

Отсюда следует, что комплексные числа $z = x + yi$ можно геометрически представлять точками $z(x, y)$ плоскости $ХОУ$ или же свободными векторами $z\{x, y\}$ этой плоскости. Имея в виду геометрическую наглядность, мы часто будем вместо термина „комплексное число $z = x + yi$ “ употреблять термины „точка $z(x, y)$ “ или „вектор $z\{x, y\}$ “.

Плоскость $ХОУ$ называется плоскостью комплексных чисел или плоскостью z . Действительные числа $z = x$ будут изображаться на этой плоскости точками $(x, 0)$ оси $ОХ$ или векторами, параллельными этой оси. Ось $ОХ$ называется действительной осью. Число $z = 1$ является единичным вектором этой оси. Чисто мнимые числа $z = yi$ будут изображаться точками $(0, y)$ оси $ОУ$ или векторами, параллельными этой оси. Ось $ОУ$ называется мнимой осью. Число $z = i$ изображается точкой $(0, 1)$ мнимой оси и является единичным вектором этой оси (рис. 1.1).

Будем говорить, что комплексные числа $z_1 = x_1 + y_1i$ и $z_2 = x_2 + y_2i$ равны друг другу ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Отсюда следует, что если $z_1 = z_2$, то любой из векторов z_1 и z_2 может быть совмещен с другим с помощью параллельного переноса (т. е. векторы z_1 и z_2 равны).

Два комплексных числа $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ называются взаимно сопряженными. Точки $z(x, y)$ и $\bar{z}(x, -y)$ симметричны относительно действительной оси $ОХ$.

Введем в рассмотрение длину r вектора z и угол φ , образованный вектором z с положительным направлением оси $ОХ$ (рис. 1.1). Величины r и φ называются соответственно модулем и аргументом комплексного числа z и обозначаются символами

$$r = |z|; \varphi = \text{Arg } z.$$

Очевидно,

$$z = x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Мы получили так называемую тригонометрическую форму комплексного числа. Модуль комплексного числа определяется однозначно формулой

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.1)$$

в то время как аргумент при $z \neq 0$ бесконечнозначен и все его значения отличаются друг от друга на слагаемые, крат-

ные 2π . Все значения аргумента φ удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (1.2)$$

Условие равенства комплексных чисел состоит еще и в том, что их модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на слагаемое кратное 2π .

При $z=0$ функция $\operatorname{Arg} z$ не определена. Из множества значений $\operatorname{Arg} z (z \neq 0)$ выделим одно, лежащее в интервале $(-\pi, \pi)$, которое мы обозначим символом $\arg z$ и будем называть главным значением аргумента:

$$-\pi < \arg z \leq \pi. \quad (1.3)$$

В силу формулы (1.2) и определения (1.3) находим, что

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для точек } z \text{ из первого и четвертого квадрантов,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для точек } z \text{ из второго квадранта,} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для точек } z \text{ из третьего квадранта.} \end{cases}$$

Очевидно, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Числа $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$ являются полярными координатами точки z . Условия равенства двух комплексных чисел z_1 и z_2 в полярных координатах будут

$$|z_1| = |z_2|; \arg z_1 = \arg z_2,$$

а условия сопряженности

$$|z| = |\bar{z}|, \arg \bar{z} = -\arg z \quad (\arg z \neq \pi).$$

Примеры 1—5. Представить в тригонометрической форме следующие числа: $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = -2$, $z_5 = -2i$ (рис. 1.2), взяв для аргумента главное значение.

1) Для числа $z_1 = 1$ имеем $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ и по (1.1) $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1$; из условия (1.3) следует, что для всех действительных положительных чисел $\arg z = 0$, следовательно, и $\varphi_1 = \arg z_1 = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = \\ &= 1(\cos 0 + i \sin 0). \end{aligned}$$

2) Для числа $z_2 = i$ имеем $x_2 = 0$, $y_2 = 1$, $r_2 = 1$. Для всех чисто мнимых чисел с положитель-

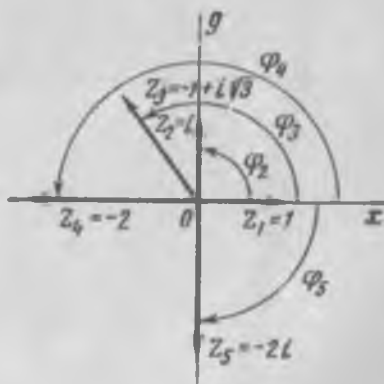


Рис 1.2

ной мнимой частью $\arg z = \frac{\pi}{2}$, следовательно, и $\varphi_2 = \arg z_2 = \frac{\pi}{2}$.
Таким образом,

$$z_2 = i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

3) Для числа $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $x_3 = -1$, $y_3 = \sqrt{3}$, $r_3 = 2$, а так как точка z_3 принадлежит второму квадранту, то для нее $\varphi_3 = \arg z_3 = \arccos \frac{y_3}{x_3} + \pi = \arccos(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Таким образом,

$$z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

4) Для числа $z_4 = -2$ имеем $x_4 = -2$, $y_4 = 0$, $r_4 = 2$. Из условия (1.3) следует, что для всех действительных отрицательных чисел $\arg z = \pi$, следовательно, и $\varphi_4 = \arg z_4 = \pi$. Таким образом,

$$z_4 = -2 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

5) Для числа $z_5 = -2i$ будет $x_5 = 0$, $y_5 = -2$, $r_5 = 2$.

Для всех чисто мнимых чисел с отрицательной мнимой частью $\arg z = -\frac{\pi}{2}$, а потому и $\varphi_5 = \arg z_5 = -\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$z_5 = -2i = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right].$$

С помощью комплексных чисел можно задавать различные множества точек плоскости z . Рассмотрим несколько примеров.

Примеры 6—10. Какие множества точек плоскости задаются условиями: 1) $\operatorname{Re} z = a$; 2) $a < \operatorname{Re} z < \beta$; 3) $\operatorname{Im} z = \gamma$; 4) $\operatorname{Im} z > \delta$; 5) $a < \operatorname{Re} z < \beta$, $\gamma < \operatorname{Im} z < \delta$, где a, β, γ, δ — действительные числа?

1) Условие $\operatorname{Re} z = a$ эквивалентно уравнению $x = a$ и задает прямую, параллельную мнимой оси OY .

2) Условие $a < \operatorname{Re} z < \beta$ или $a < x < \beta$ задает бесконечную вертикальную полосу между прямыми $x = a$ и $x = \beta$, включая и правую прямую $x = \beta$ (рис. 1.3).

3) Условие $\operatorname{Im} z = \gamma$ эквивалентно уравнению $y = \gamma$ и задает прямую, параллельную действительной оси OX .

4) Условие $\operatorname{Im} z > \delta$ или $y > \delta$ задает полуплоскость, расположенную выше прямой $y = \delta$, включая и саму эту прямую (рис. 1.4).

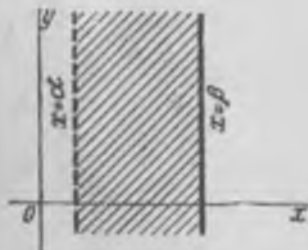


Рис. 1.3

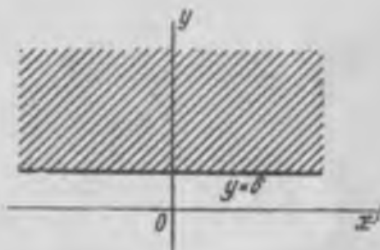


Рис. 1.4

5) Условия $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$, $\gamma < \operatorname{Im} z < \delta$ задают прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \alpha$, $x = \beta$, $y = \gamma$, $y = \delta$, причем первая и четвертая стороны включаются в этот прямоугольник (рис. 1.5).

Примеры 11—14. Какие множества точек плоскости задаются условиями: 1) $|z| = r$; 2) $r < |z| < R$; 3) $\arg z = \alpha$; 4) $\alpha < \arg z < \beta$, где α, β, r, R — действительные числа, причем $r > 0$ и $R > 0$?

1) Точки z , модуль которых равен r , лежат на окружности радиуса r с центром в начале координат; из условия $|z| = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$ следует уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ упомянутой окружности.

2) Условие $r < |z| < R$ задает кольцо между concentрическими окружностями радиусов r и R с центрами в начале координат, включая внешнюю окружность (рис. 1.6).

3) Точки z , аргумент которых равен α , лежат на луче, выходящем из начала координат под углом α к действительной оси, а потому условие $\arg z = \alpha$ задает этот луч.

4) Условие $\alpha < \arg z < \beta$ задает бесконечный сектор, заключенный между лучами $\arg z = \alpha$ и $\arg z = \beta$, причем сами эти лучи исключаются (рис. 1.7).

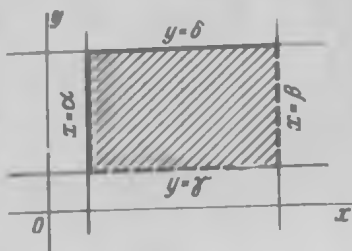


Рис. 1.5

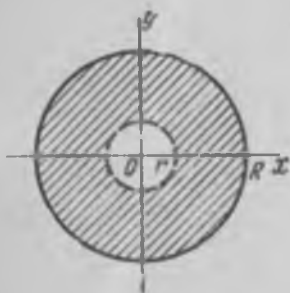


Рис. 1.6



Рис. 1.7

1.2. Сложение и вычитание. Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Из этого определения видим, что проекции вектора $z_1 + z_2$ на оси координат равны суммам соответствующих проекций слагаемых векторов z_1 и z_2 . Следовательно, вектор $z_1 + z_2$ равен сумме векторов z_1 и z_2 и является диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах (рис. 1.8).

Из определения непосредственно вытекают законы сложения:

а) переместительный: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

б) сочетательный: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

Сложение допускает обратную операцию: для любых двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ можно найти такое число z , что $z_2 + z = z_1$. Число z называется разностью чисел z_1 и z_2 и обозначается символом $z_1 - z_2$. Очевидно,

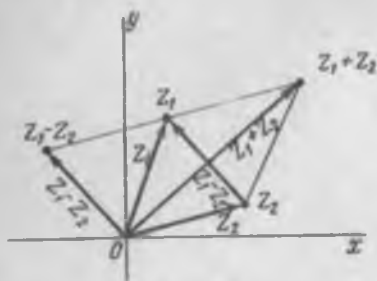


Рис. 1.8

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Отсюда следует, что вектор $z_1 - z_2$ равен разности векторов z_1 и z_2 и направлен из конца вычитаемого вектора z_2 в конец уменьшаемого вектора z_1 (рис. 1.8); иначе говоря, вектор

$z_1 - z_2$ имеет начало в точке z_2 и конец — в точке z_1 .

Пользуясь рис. 1.8 и учитывая, что $|z|$ есть длина вектора z , а также то, что длина стороны треугольника меньше суммы и больше разности длин двух других сторон, устанавливаем следующие соотношения для модуля суммы и разности комплексных чисел:

$$\left. \begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|; \\ |z_1 - z_2| &\geq |z_1| - |z_2|. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Эти неравенства обращаются в равенство, если $\arg z_1 = \arg z_2$, т. е. если точки z_1 и z_2 лежат на одном луче, выходящем из начала координат.

Примеры 1—4. Какие множества точек плоскости z задаются условиями: 1) $|z - a| = r$; 2) $|z - a| < r$; 3) $|z - a| > r$; 4) $r < |z - a| < R$, где a — комплексное число, r и R — положительные (действительные) числа?

1) Вектор $z - a$ имеет начало в точке a и конец в точке z , а потому $|z - a|$, как длина этого вектора, есть расстояние между точками z и a . Поэтому условие $|z - a| = r$ определяет точки z , удаленные от точки a на расстояние r . Все такие точки z заполняют окружность с центром в точке a

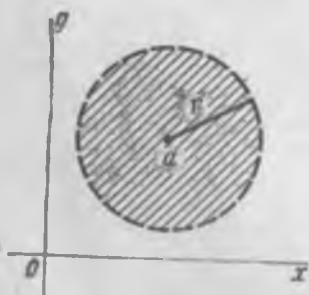


Рис. 1.9

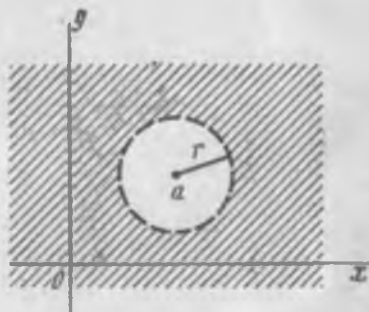


Рис. 1.10

и радиуса r . Итак, условие $|z - a| = r$ определяет окружность с центром в точке a и радиуса r .

2) Условие $|z - a| < r$ определяет множество точек z , удаленных от точки a на расстояние, меньшее r . Все такие точки z заполняют круг с центром в точке a и радиуса r (рис. 1.9); ограничивающая круг окружность исключается. Такое множество точек называют **внутренностью** окружности $|z - a| = r$.

3) Условие $|z - a| > r$ определяет множество точек z , удаленных от точки a на расстояние большее r . Все такие точки z лежат вне окружности с центром в точке a и радиуса r (рис. 1.10). Это множество точек называется **внешностью** окружности $|z - a| = r$.

4) Условие $r < |z - a| < R$ определяет кольцо между концентрическими окружностями радиусов r и R с центрами в точке a ; при этом внутренняя окружность исключается из рассматриваемого множества точек, а внешняя включается в него (рис. 1.11).

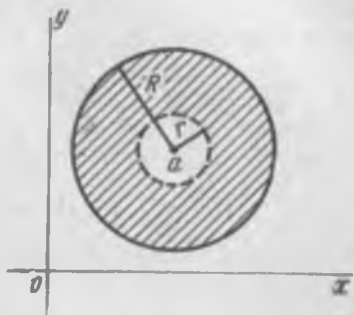


Рис. 1.11

1.3. Умножение и деление. Произведение $z_1 z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ определяется равенством

$$z = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i. \quad (1.5)$$

Из этого определения следуют законы умножения:

- а) переместительный: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- б) сочетательный: $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;
- в) распределительный (относительно сложения):

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

В частности, при $z_1 = i$ и $z_2 = i$ ($x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = y_2 = 1$) из определения (1.5) получаем

$$i \cdot i = -1.$$

Если же $z_1 = z = x + y i$, а $z_2 = \bar{z} = x - y i$, то определение (1.5) дает

$$z \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

т. е. произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел равно квадрату их модуля (действительному числу). Легко заметить, что формула (1.5) получается при перемножении $x_1 + y_1 i$ и $x_2 + y_2 i$ по обычным правилам алгебры с заменой произведения $i i$ на -1 .

Перейдя в формуле (1.5) от декартовых координат к полярным, с помощью формул

$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1; \quad y_1 = r_1 \sin \varphi_1;$$

$$x_2 = r_2 \cos \varphi_2; \quad y_2 = r_2 \sin \varphi_2$$

получим

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg} (z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2. \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что при умножении числа z_1 на число z_2 вектор z_1 растягивается (сжимается) в $r_2 = |z_2|$ раз и поворачивается на угол $\varphi_2 = \text{Arg} z_2$ против часовой стрелки (рис. 1.12). Число i имеет модуль, равный 1, и аргумент $\frac{\pi}{2}$, поэтому умножение числа z на i сводится только к повороту вектора z на прямой угол против часовой стрелки.

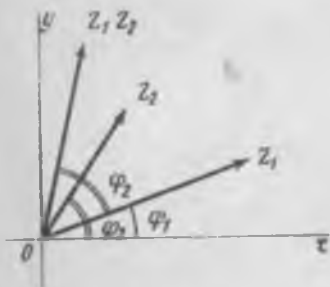


Рис. 1.12

Умножение допускает обратную операцию. Число $z = x + yi$ называется частным чисел z_1 и z_2

$$(z = \frac{z_1}{z_2}), \text{ если}$$

$$z_2 z = z_1.$$

При $z_2 \neq 0$ частное z всегда существует. Действительно, умножив последнее равенство почленно на $\bar{z}_2$, получим

$$|z_2|^2 z = z_1 \bar{z}_2,$$

откуда

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \quad (1.7)$$

Примеры.

$$1. \quad \frac{1}{i} = \frac{1(-i)}{|i|^2} = -i.$$

$$2. \quad \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{|1+i|^2} = -i.$$

Перейдя в формуле (1.7) к полярным координатам, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)];$$

таким образом, при делении комплексных чисел модуль числителя делится на модуль знаменателя и из аргумента числителя вычитается аргумент знаменателя:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \quad (1.8)$$

1.4. Возвышение в степень и извлечение корня. Натуральная степень n комплексного числа z определяется равенством

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \dots z}_{n \text{ раз}}$$

Для $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, используя формулы (1.6), получим

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.9)$$

Пользуясь определением деления, можно проверить, что эта формула остается справедливой и при целом отрицательном n .

Пример 1. При $z = i$ получим

$$i^2 = i \cdot i = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = i^3 \cdot i = 1$$

и т. д. Вообще

$$i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i,$$

где k — произвольное целое число.

Пример 2. Вычислить $(1 + i)^{10}$. Так как $z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, то $(1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4} \right) = 32i$.

Пример 3. При $r = 1$ формула (1.9) дает так называемую формулу Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Отделяя в этом равенстве действительные и мнимые части получим, например, при $n = 2$:

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi;$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Обратная операция — извлечение корня определяется так: число w называется корнем натуральной степени n из числа z (обозначается символом $\sqrt[n]{z}$, причем для $n = 2$ пишут $\sqrt{z}$), если $w^n = z$.

Положив $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, будем в силу формулы (1.7) иметь

$$\rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

откуда, сравнивая модули и аргументы, найдем

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

где k — произвольное целое число. Так как r и ρ — положительные числа, то первое из этих равенств определяет единственное значение ρ :

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad (1.10)$$

где берется арифметическое (положительное) значение корня. Из второго равенства получаем бесконечное множество значений θ :

$$\theta = \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \quad (1.11)$$

Таким образом, получаем

$$\sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (1.12)$$

Формула (1.10) показывает, что модули всех значений корня одинаковы, а формула (1.11) — что их аргументы отличаются на слагаемое, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что корень



Рис. 1.13

n -ой степени из любого числа $z \neq 0$ имеет n различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (рис. 1.13, где $n = 6$). Все эти n различных значений корня можно получить из формулы (1.12), полагая, например, в ее правой части последовательно $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

При $z = 0$ все значения корня равны между собой и равны нулю.

Пример 4. Вычислить все значения $\sqrt[3]{1}$. Для числа $z = 1$ имеем $r = 1$, $\varphi = 0$, следовательно, по формуле (1.10)

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}.$$

Полагая здесь последовательно $k = 0, 1, 2$, получим

$$\sqrt[3]{1}_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$\sqrt[3]{1}_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\sqrt[3]{1}_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

1.5. Сфера комплексных чисел. Рассмотрим еще один способ геометрического представления комплексных чисел. Построим сферу S , касающуюся плоскости z комплексных чисел в точке $z = 0$ (рис. 1.14) и отметим точку N сферы, диаметрально противоположную точке касания сферы с плоскостью z . Из точки N сферы проведем луч в любую точку z плоскости z и отметим на сфере точку, в которой этот луч пересечет сферу. Эту точку сферы будем считать новым геометрическим представлением числа z и, как и соответствующую точку плоскости, будем называть точкой z . Если исключить из рассмотрения точку N сферы, то в результате описанного построения между точками сферы S и точками плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие, называемое стереографической проекцией.

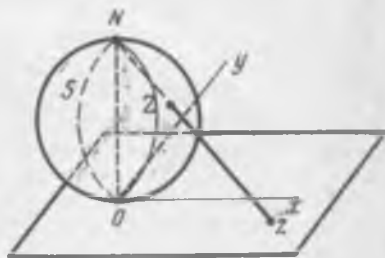


Рис. 1.14

Северному полюсу N сферы не соответствует пока никакое комплексное число. Однако точкам z сферы, достаточно близким к N , соответствуют точки z плоскости, сколь угодно далеко отстоящие от начала координат, т. е. точки z сколь угодно большого модуля.

Введем в рассмотрение новое комплексное „число“ $z = \infty$, называемое бесконечно удаленной точкой, и будем считать, что на сфере S оно изображается точкой N . Плоскость z , пополненную числом $z = \infty$, будем называть расширенной плоскостью z . Расширенной плоскости z при стереографической проекции соответствует полная сфера S (включая и бесконечно удаленную точку N), которую будем называть сферой z .

В отличие от бесконечно удаленной точки $z = \infty$ все другие точки расширенной плоскости z (или, иначе говоря, точки плоскости z) будем называть конечными точками.

Итак везде ниже термином „плоскость z^* “ будем обозначать множество всех конечных точек z , а термином „расширенная плоскость z^* “ — множество, состоящее из всех конечных точек и точки $z = \infty$.

Различным множествам точек расширенной плоскости z отвечают определенные множества точек сферы z . В частности, можно доказать (геометрически это достаточно очевидно), что окружностям и прямым расширенной плоскости z соответствуют окружности сферы z , причем прямым отвечают окружности сферы z , проходящие через точку N .

Любым двум не параллельным прямым расширенной плоскости z при стереографической проекции соответствует таким образом две окружности сферы z , пересекающиеся в двух точках (из коих одна бесконечно удаленная). Параллельным прямым соответствуют окружности, касающиеся друг друга в бесконечно удаленной точке.

Тот факт, что сферические изображения прямых и окружностей расширенной плоскости z не отличаются друг от друга, позволяет не различать прямые и окружности на расширенной плоскости z .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать в комплексной форме уравнения следующих линий (t — действительный параметр): а) $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$; б) $x = 2t$, $y = t^2 - 1$; в) $y = 2x$; г) $2x + 3y = 1$; д) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Указание. Параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ линии в плоскости z можно, записав одним комплексно-параметрическим уравнением $z = x(t) + iy(t) = z(t)$, представить в комплексной форме.

2. Какие линии заданы комплексным уравнением (t — действительный параметр): а) $z = (1 + i)t$; б) $z = t^2 + it + 4$; в) $z = \cos t + i \sin t$; г) $z = t + \frac{t}{t}$; д) $z = t(it^2 + 1)$?

§ 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.6. Области и их границы. Окрестности. Пусть нам дано некоторое множество E точек плоскости z или расширенной плоскости z . Точку z будем называть внутренней точкой множества E , если все точки достаточно малого круга с центром в z принадлежат множеству E . При этом под кругом с центром в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ будем понимать внешность любой окружности $|z| = R$ с центром в точке $z = 0$ (этому множеству точек при стереографической

проекции действительно соответствует некоторый круг сферы z с центром в бесконечно удаленной точке N ; чем больше R , тем меньше будет этот круг). Точку z , принадлежащую или не принадлежащую E , будем называть граничной точкой множества E , если любой круг с центром в z содержит как точки, принадлежащие E , так и точки, не принадлежащие E . Множество всех граничных точек множества E называется границей множества E . Точку z будем называть внешней точкой множества E , если вместе с этой точкой множество E не принадлежит и некоторый круг с центром в z .

Примеры. Круг $|z| < 1$ состоит только из внутренних точек. Любая точка окружности $|z| = 1$ является граничной точкой этого круга, так что окружность $|z| = 1$ является границей круга $|z| < 1$.

Круг $|z| > 1$ с центром в точке $z = \infty$ тоже состоит только из внутренних точек. Если его рассматривать на расширенной плоскости z , то его границей является окружность $|z| = 1$. Если же этот круг рассматривать на плоскости z (т. е. исключить точку $z = \infty$ из рассмотрения), то для него точка $z = \infty$ будет граничной точкой, ибо любой круг с центром в этой точке будет содержать как точки, принадлежащие кругу $|z| > 1$, так и точки, ему не принадлежащие (хотя бы саму точку $z = \infty$). В этом случае граница множества точек $|z| > 1$ состоит из окружности $|z| = 1$ и точки $z = \infty$.

Кольцо $1 < |z - i| < 2$ состоит как из внутренних, так и из граничных точек.

Множество всех значений $\sqrt[n]{z}$ состоит только из граничных точек.

В дальнейшем нам будут преимущественно встречаться множества точек, называемые областями. Областью называется множество D точек плоскости z или расширенной плоскости z , обладающее следующими свойствами:

а) D состоит из одних внутренних точек (свойство открытости); б) любые две точки, принадлежащие D , можно соединить непрерывной линией, целиком состоящей из точек D (свойство связности).

Множество точек, состоящее из области D и ее границы, называется замкнутой областью и обозначается $\bar{D}$.

Примеры.

1. Множества точек $|z| < 1$ и $|z| > 1$ расширенной плоскости z являются областями, для которых окружность $|z| = 1$ служит общей границей.

Если же заданные множества рассматривать на плоскости z , а не на расширенной плоскости, то второе из них является областью, граница которой состоит из окружности $|z| = 1$ и точки $z = \infty$.

2. Кольцо $1 < |z - i| < 2$ не является областью, так как точки окружности $|z - i| = 2$ не обладают свойством открытости.

3. Множество точек, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z > 0$ тоже не является областью. Действительно, точки z , для которых $\operatorname{Im} z > 0$ заполняют первый и третий квадранты плоскости z , исключая оси координат. Это множество не обладает свойством связности, ибо, например, точки z_1 и z_2 этого множества (рис. 1.15) нельзя соединить непрерывной линией, целиком состоящей из точек множества (начало координат 0 ему не принадлежит).

4. Плоскость z является областью, границей которой служит бесконечно удаленная точка $z = \infty$ (при стереографической проекции плоскость z переходит в сферу z с выброшенной бесконечно удаленной точкой N). Расширенная плоскость z является единственным примером области, не имеющей границы.

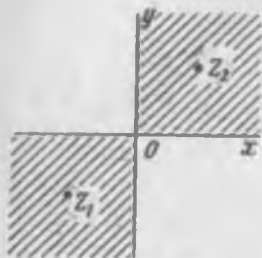


Рис. 1.15

Часть плоскости, содержащаяся внутри непрерывной замкнутой линии (рис. 1.16, а), доставляет нам простейший пример области, граница которой состоит из одной только линии l . Граница области может состоять и из нескольких замкнутых линий. На рис. 1.16, б приведен пример области, граница которой состоит из двух замкнутых линий l_1 и l_2 . Внутренняя кривая l_2 может вырождаться в точку или в двойную линию (так называемый разрез).

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что границы рассматриваемых нами областей состоят из конечного числа замкнутых кривых, разрезов и точек. Так граница области, представленной на рис. 1.17, состоит из трех замкнутых линий l_0, l_1, l_2 , двух разрезов γ_1 и γ_2 и одной точки a . Линии и разрезы, входящие в состав границы, мы всегда будем предполагать кусочно-гладкими, т. е. составленными из конечного числа гладких дуг (дуг с непрерывно изменяющейся касательной).

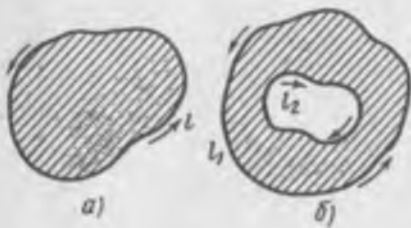


Рис. 1.16



Рис. 1.17

Число не связанных друг с другом частей, из которых состоит вся граница области D , называется порядком связности этой области. Так область, представленная на рис. 1.16, а (внутренность замкнутой линии l), — односвязна, ибо ее граница состоит из одной только линии l . Границу односвязной области можно, непрерывно деформируя, стянуть в точку, не выходя за пределы рассматриваемой области. Область на рис. 1.16, б — двусвязна, так как ее граница состоит из двух не связанных друг с другом частей — линий

I_1 и I_2 . Область, представленная на рис. 1.17, — четырехсвязна; ее граница распадается на четыре не связанные друг с другом части: 1) I_0, γ_1, γ_2 , 2) I_1 , 3) I_2 и 4) a .

Плоскость z является односвязной областью, граница которой состоит из одной изолированной точки — бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Расширенную плоскость z будем тоже относить к односвязным областям, хотя эта область вообще не имеет границы.

Для области, являющейся множеством точек, лежащих вне замкнутой линии I , не пересекающей саму себя (т. е. для внешности линии I), порядок связности зависит от того, рассматривается ли эта область на плоскости z или на расширенной плоскости z . Так внешность линии I на рис. 1.16, a является односвязной областью, если она рассматривается на расширенной плоскости, и двусвязной — если она рассматривается на плоскости z . Действительно, в первом случае граница области состоит из одной только линии I , в то время как во втором — из линии I и точки $z = \infty$.

Положительным направлением обхода границы области условимся считать такое направление, при котором область остается все время слева. На рис. 1.16 и 1.17 это направление указано стрелками.

В заключение введем понятие окрестности. Под окрестностью точки z_0 на плоскости или на расширенной плоскости будем понимать произвольную область, содержащую точку z_0 . Часто в дальнейшем нам придется рассматривать стандартные окрестности, называемые ε -окрестностями. Под ε -окрестностью конечной точки z_0 будем понимать круг

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

радиуса ε с центром в точке z_0 . Под ε -окрестностью точки $z_0 = \infty$ будем понимать круг

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$

с центром в точке $z_0 = \infty$. Оба эти круга тем меньше, чем меньше ε .

1.7. Функции комплексного переменного. Возьмем два экземпляра плоскости комплексных чисел: расширенную плоскость (или плоскость) z и расширенную плоскость (или плоскость) w (их можно представлять себе и совмещенными друг с другом). Пусть на первой из них задано произвольное множество точек E (оно может содержать и точку $z = \infty$).

Определение. Говорят, что на множестве E задана функция

$$w = f(z), \quad (1.13)$$

если каждой точке z из E поставлено в соответствие одна или несколько точек w (в первом случае функция называется однозначной, а во втором — многозначной).

E называется множеством определения функции $f(z)$, а множество K всех значений w , которые $f(z)$ принимает на E — множеством изменения функции. В дальнейшем наиболее важную роль будет играть тот случай, когда множества E и K являются областями (см. ниже п^о 1.10, теорема 2), мы будем их тогда обозначать соответственно D и Δ .

Положив $z = x + yi$ и $w = u + vi$, получим

$$u + vi = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i,$$

откуда

$$u = \operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad v = \operatorname{Im} f(z) = v(x, y). \quad (1.14)$$

Таким образом, задание функции (1.13) комплексного переменного равносильно заданию двух функций (1.14) двух действительных переменных.

Пример 1. Для функции $w = z^2$, положив $z = x + yi$, $w = u + vi$, получим $u + vi = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, откуда вытекает

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Значения z , как было указано выше, будем откладывать на одной комплексной плоскости, а значения w — на другой (рис. 1.18). Точку или точки w , соответствующие данной точке z из E , будем называть образом точки z ; о функции $w = f(z)$ будем говорить, что она отображает множество E точек расширенной плоскости (или плоскости) z на множество K точек расширенной плоскости (или плоскости) w . Функцию (1.13), рассматриваемую с точки

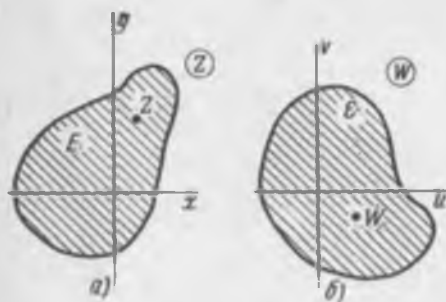


Рис. 1.18

зрения осуществляемого ею отображения, будем называть просто отображением. Отображение $w = f(z)$ будем называть взаимно однозначным или однолистным на множестве E , если функция $w = f(z)$ однозначна на E и любым двум различным точкам из E всегда соответствуют две различные точки из K (т. е. при таком отображении образы никаких двух точек из E не «склеиваются» между собой).

Если функция $w = f(z)$ отображает множество E на множество K , то каждой точке w из K будет отвечать одна или несколько точек z из E (последнее имеет место, если функ-

ция $w = f(z)$ склеивает образы нескольких точек из E . Таким образом, на K будет определена функция

$$z = \varphi(w),$$

называемая обратной по отношению к функции (1.13) и отображающая K на E . Отображение $w = f(z)$ будет однолиственным тогда и только тогда, когда обе функции f и φ однозначны.

Пример 2. Рассмотрим снова функцию

$$w = z^2. \quad (1.15)$$

В тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

и (1.15) запишется в виде

$$w = z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

откуда

$$|w| = r^2 = |z|^2, \quad \text{Arg } w = 2\text{Arg } z. \quad (1.16)$$

Второе уравнение (1.16) показывает, что отображение $w = z^2$ удваивает аргументы, в силу чего все точки, лежащие в плоскости z на луче $\arg z = \varphi_0$, перейдут в плоскости w в точки, лежащие на луче $\arg w = 2\varphi_0$ (рис. 1.19, а). Первое уравнение (1.16) показывает, что при отображении $w = z^2$ модули возводятся в квадрат, откуда следует, что точки, лежащие в плоскости z на окружности $|z| = r_0$, перейдут в плоскости w в точки, лежащие на окружности $|w| = r_0^2$. Отсюда следует, что функция (1.15) отобразит верхнюю полуплоскость $0 < \arg z < \pi$ плоскости z на всю плоскость w с выброшенным лучом $\arg w = 0$ (с разрезом вдоль положительной части действительной оси) (рис. 1.19, б). Функция $w = z^2$ однозначна, кроме того, двум различным точкам из области $0 < \arg z < \pi$ соответствуют две различные точки из области $0 < \arg w < 2\pi$; следовательно, отображение $w = z^2$ однолистно в области $0 < \arg z < \pi$. Если считать, что у разреза в плоскости w два «берега» (верхний и нижний), то отображение $w = z^2$ будет однолистно и в замкнутой области $0 < \arg z \leq \pi$; при этом точки луча $\arg z = 0$ отображаются на верхний берег $\arg w = 0$, а точки луча $\arg z = \pi$ на нижний берег $\arg w = 2\pi$ разреза.

Рассмотрим теперь область $0 < \arg z < \pi + \alpha$, $\alpha > 0$. Точки $w = z^2$, соответствующие точкам этой области, заполняют всю плоскость w . Отображение $w = z^2$ не будет однолистным в этой области, так как образы точек z_1 и $z_2 = -z_1$ (рис. 1.19, в) при этом отображении склеятся — перейдут в одну точку $w_1 = z_1^2 = z_2^2$.

Пусть функция $w = f(z)$ отображает множество E на множество K , а функция $\omega = g(w)$ отображает множество K на множество P . Функция

$$\omega = \psi(z) = g[f(z)], \quad (1.17)$$

отображающая E на P , называется сложной функцией, а осуществляемое ею отображение E на P называется наложением или суперпозицией отображений g и f .

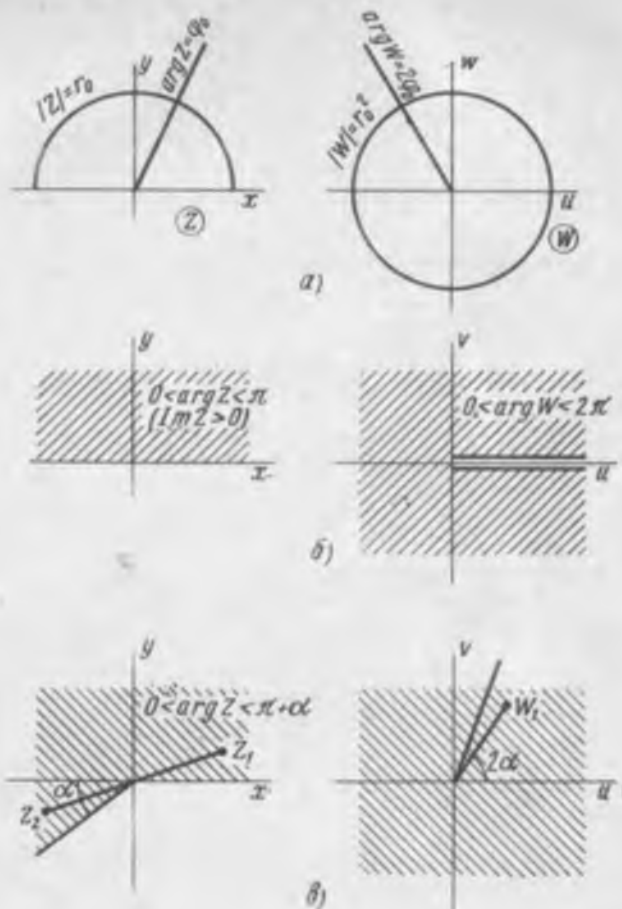


Рис. 1.19

1.8. Предел последовательности. Рассмотрим последовательность конечных точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, которую коротко будем обозначать символом $\{z_n\}$.

Определения. 1. Конечная точка $z_0 = x_0 + y_0 i$ называется **пределом последовательности** $\{z_n\} = \{x_n + y_n i\}$, если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел стремятся соответственно к пределам x_0 и y_0 .

2. Бесконечно удаленная точка $z_0 = \infty$ называется **пределом последовательности** $\{z_n\} = \{x_n + y_n i\}$, если последовательность действительных чисел $\{|z_n|\}$ стремится к $+\infty$.

В обоих случаях пишут

$$\lim z_n = z_0 \text{ или } z_n \rightarrow z_0.$$

Из этих определений следует, что если $z_n \rightarrow z_0$, то любая ε — окрестность точки z_0 содержит все члены последовательности $\{z_n\}$, начиная с члена некоторого номера N , зависящего от ε . Это значит, что если z_0 — конечная точка, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное N , что для всех $n > N$ будет

$$|z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Если же $z_0 = \infty$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ можно будет указать такое натуральное N , что для всех $n > N$ будет

$$|z_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если все точки этой последовательности принадлежат некоторому конечному кругу с центром в начале координат, т. е. если существует такое положительное число m , что для всех n будет

$$|z_n| \leq m.$$

Из определений предела последовательности и ограниченной последовательности следует, что всякая последовательность конечных точек, стремящаяся к конечному пределу, ограничена.

Отметим, что все теоремы о конечных пределах последовательностей действительных чисел без существенных изменений оказываются справедливыми и для последовательностей комплексных чисел. В частности, в комплексной области остаются в силе теоремы о пределе алгебраической суммы, произведения и частного последовательностей.

1.9. Предел функции. Пусть функция $w = f(z)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0 , исключая может быть саму точку z_0 .

Определение. Конечная точка $w_0 = u_0 + v_0 i$ называется пределом функции $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ при $z \rightarrow z_0 = x_0 + y_0 i$, если действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ двух переменных x и y стремятся соответственно к пределам u_0 и v_0 при $z \rightarrow z_0$ (или при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$).

В этом случае пишут $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ или $f(z) \rightarrow w_0$ при $z \rightarrow z_0$.

В приведенном определении z_0 и w_0 — конечные точки. Если же одна из них или обе они являются бесконечно удаленными точками, то определение следует изменить. Так, например, при $w_0 = \infty$ и z_0 — конечном определении предела будет выглядеть так: точка $w_0 = \infty$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если действительная функция

$|f(z)|$ двух переменных x и y стремится к $+\infty$ при $z \rightarrow z_0$ (или при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$). Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать определения предела функции в других возможных случаях.

Из этих определений следует, что если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (1.18)$$

где z_0 и w_0 — конечные или бесконечно удаленные точки, то для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех точек z , принадлежащих δ -окрестности точки z_0 (за исключением может быть самой точки z_0), соответствующие значения функции $w = f(z)$ будут принадлежать ε -окрестности точки w_0 . Это означает, что для конечных z_0 и w_0 (1.18) имеет место, если из неравенства

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad (1.19)$$

следует неравенство

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \quad (1.20)$$

Если же $w_0 = \infty$, а z_0 — конечно, то (1.18) имеет место, если из неравенства

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если множество определения E функции $f(z)$ является замкнутой областью $\bar{D}$ и точка z_0 принадлежит ее границе или E является некоторой линией l , то любая окрестность точки z_0 содержит как точки, принадлежащие E , так и точки, не принадлежащие E . Определения предела функции сохраняют силу и в этих случаях, если принимать во внимание только точки z , принадлежащие E .

Так как существование конечного предела функции комплексного переменного эквивалентно существованию конечных пределов двух действительных функций, то все теоремы о конечных пределах из действительного анализа остаются в силе для функций комплексного переменного. Мы не будем останавливаться здесь на формулировках этих теорем.

В заключение настоящего пункта подчеркнем еще раз, что везде ниже, где речь идет о пределе некоторой функции, предполагается ее однозначность.

1.10. Непрерывность функций. Пусть теперь функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности конечной точки z_0 , включая и саму эту точку.

Определение 1. Функция $f(z)$ называется непрерывной в конечной точке z_0 , если предел $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ конечен и равен $f(z_0)$:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \neq \infty. \quad (1.21)$$

Равенство (1.21) имеет место, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$|z - z_0| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Как и в действительном анализе назовем $z - z_0 = \Delta z$ приращением аргумента, а $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ приращением функции. Тогда (1.21) будет эквивалентно равенству

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0. \quad (1.22)$$

Сохраняя обычную терминологию, назовем функцию $\varphi(z)$ бесконечно малой в окрестности точки z_0 , если $\varphi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow z_0$. Тогда равенство (1.22) можно прочитать так: функция $w = f(z)$ называется непрерывной в конечной точке z_0 , если бесконечно малому приращению Δz аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение Δw функции.

Из определений предела и непрерывности функции в конечной точке с очевидностью вытекает следующая

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + + v(x, y)i$ была непрерывна в конечной точке $z_0 = x_0 + y_0i$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывны в точке (x_0, y_0) .

Отсюда сразу же следует, что известные из действительного анализа теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций будут справедливы и для функций комплексного переменного.

Понятие непрерывности распространим и на бесконечно удаленную точку с помощью следующего определения:

Определение 2. Функция $f(z)$ называется непрерывной в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$,

где w_0 — конечное число; число w_0 будем принимать за значение функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$.

Определение 3. Функция $f(z)$ называется непрерывной на некотором множестве E точек z (и, в частности, в области D , в замкнутой области $\bar{D}$, на линии l), если эта функция непрерывна в каждой точке множества E .

Отметим без доказательства, что для функций непрерывных в замкнутых областях, на замкнутых линиях, а также на отрезках линий, содержащих свои концы, справедливы известные из действительного анализа свойства функций, непрерывных на замкнутых интервалах. Так, если функция $f(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\bar{E}$, то:

1) $f(z)$ ограничена на $\bar{E}$, т. е. существует такое число $m > 0$, что для всех z из $\bar{E}$ будет $|f(z)| < m$.

2) $f(z)$ достигает на $\bar{E}$ своего наибольшего и наименьшего по модулю значения.

Приведем без доказательства еще следующую важную теорему:

Теорема 2. Если функция $w = f(z)$ однолистка и непрерывна в области D , то множество Δ , на которое эта функция отображает область D , тоже является областью и обратная функция $z = \varphi(w)$ непрерывна в Δ .

Теорема эта носит название принципа сохранения области.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулировать с помощью неравенства следующие утверждения (z_0 и w_0 — конечны): а) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$,

б) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, в) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$.

г) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

2. Являются ли следующие множества точек z областями:

а) $|z| > 3$, б) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$, в) $2 < |z - 1| < 3$,

г) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$, $|z| < 1$, д) $0 < \operatorname{Im} z < 1$, е) $|z - 1| < |z + 1|$.

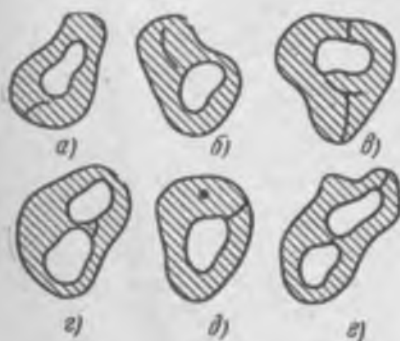


Рис. 1.20

3. Установить порядок связности областей, изображенных на рис. 1.20 и указать положительное направление обхода границы этих областей.

4. Функция $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ отображает данную кривую $F(x, y) = 0$ плоскости z в некоторую кривую $\Phi(u, v) = 0$ плоскости w . Для того чтобы найти уравнение этой последней кривой, достаточно, очевидно, исключить x и y из уравнений:

$$F(x, y) = 0;$$

$$u = u(x, y);$$

$$v = v(x, y).$$

Если кривая в плоскости z задана комплексным уравнением $z = x(t) + y(t)i = z(t)$, то уравнение ее образа в плоскости w в комплексной форме будет $w = f[z(t)]$.

Найти уравнение линий плоскости z , на которые функция $w = z^2$ отображает следующие линии плоскости z : а) прямую $x = 2$, б) прямую $y = 1$, в) гиперболу $xy = 1$, г) окружность $x^2 + y^2 = 4$.

5. Найти уравнения линий плоскости w , на которые функция $w = \frac{1}{z}$ отображает следующие линии плоскости z : а) $y = x$, б) $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$), в) $y = 4$.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

1.11. Показательная функция e^z для любого комплексного $z = x + yi$ определяется формулой

$$w = e^z = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1.23)$$

Положив здесь $y = 0$, установим, что для действительных $z = x$ это определение совпадает с обычным. Для показательной функции справедливы соотношения:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}. \quad (1.24)$$

Действительно, из формулы (1.23) следует, что модуль выражения $e^z = e^{x+yi}$ равен e^x , а его аргумент равен y ; в силу этого и правила умножения комплексных чисел будем иметь

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = \\ &= e^{(x_1+x_2) + (y_1+y_2)i} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и вторая из формул (1.24).

Функция e^z является периодической с чисто мнимым периодом $2\pi i$; действительно, для любого целого k имеем

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z,$$

ибо по формуле (1.23)

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

Положив в формуле (1.23) $x = 0$, $y = \varphi$, получим формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

С помощью этой формулы комплексное число в полярных координатах можно записать в компактной показательной форме

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Примеры.

$$1. 1 = \cos 0 + i \sin 0 = e^{i0};$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i \frac{\pi}{2}};$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

$$2. e^{2+3i} = e^2 (\cos 3 + i \sin 3);$$

$$e^{-2i} = \cos 2 - i \sin 2.$$

1.12. Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется логарифмом числа $z \neq 0$ (обозначение $w = \operatorname{Ln} z$), если $e^w = z$.

Положив $z = r e^{i\varphi}$, $w = u + vi$, получим

$$e^u e^{iv} = r e^{i\varphi},$$

откуда вытекают два равенства

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi.$$

Из первого равенства находим $u = \ln r$ — обычный натуральный логарифм положительного числа r . Следовательно,

$$\begin{aligned} w = \operatorname{Ln} z &= \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) = \\ &= \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Эта формула показывает, что логарифмическая функция комплексного аргумента имеет бесконечное множество значений. При $k=0$ будем иметь так называемое главное значение логарифма, которое обозначается символом $\ln z$; итак,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Если z — действительное положительное число, то $\arg z = 0$ и $\ln z = \ln |z|$. Следовательно, главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Примеры.

1. Для числа $z = -1$ имеем $|z| = 1$, $\arg z = \pi$, следовательно,

$$\operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad \ln(-1) = \pi i.$$

2. Для числа $z = i$ имеем $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\operatorname{Ln} i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad \ln i = \frac{\pi}{2}i.$$

Из формулы (1.25) следует, что логарифмическая функция комплексного аргумента обладает известными свойствами логарифма действительного аргумента:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z;$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

Действительно, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) &= \ln |z_1 \cdot z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \\ &= \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \\ &= (\ln |z_1| + i \operatorname{Arg} z_1) + (\ln |z_2| + i \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2. \end{aligned}$$

Аналогично проверяются и другие из написанных выше формул.

1.13. Тригонометрические функции комплексного аргумента определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Для действительных z эти определения дают тригонометрические функции действительного аргумента. Действительно, при $z = x$ ($y = 0$), например, первое определение нам дает

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i} [(\cos x + i \sin x) - \\ &\quad - (\cos x - i \sin x)] = \sin x. \end{aligned}$$

Функции (1.26) сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного аргумента. Так, например, из периодичности функции e^z с периодом $2\pi i$ следует, что функции $\sin z$ и $\cos z$ имеют период 2π , функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ — период π . Действительно, например,

$$\begin{aligned} \sin(z + 2\pi) &= \frac{1}{2i} [e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}] = \\ &= \frac{1}{2i} [e^{iz+2\pi i} - e^{-iz-2\pi i}] = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z. \end{aligned}$$

Все известные тригонометрические тождества остаются в силе и для тригонометрических функций (1.26). Так, например,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = 1.$$

В отличие от тригонометрических функций действительного аргумента модули функций $\sin z$ и $\cos z$ могут быть больше 1 (даже сколь угодно большими). Так например,

$$\cos i = \frac{1}{2} (e^{-1} + e) \approx 1,543; \text{ а } \sin i = \frac{1}{2i} (e^{-1} - e) \approx 1,174i.$$

1.14. Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к тригонометрическим. Число w называется арксинусом числа z (обозначение $w = \operatorname{Arcsin} z$), если $z = \sin w$. Используя первую формулу (1.26), получим

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

или

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решая это квадратное относительно e^{iw} уравнение, найдем

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

откуда

$$iw = \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2})$$

и

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}). \quad (1.27)$$

Многозначность этой функции определяется двузначностью корня и бесконечнозначностью логарифма.

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции, формулы для которых выводятся подобно формуле (1.27) и имеют следующий вид:

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}); \quad (1.28)$$

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \quad (1.29)$$

* Мы не пишем перед корнем двойной знак, так как символом $\sqrt[n]{z}$ обозначаем все значения корня.

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}. \quad (1.30)$$

Примеры

1. Вычислить $\operatorname{Arcsin} i$.
С помощью формул (1.27) и (1.25) находим

$$\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln} (\pm \sqrt{2} - 1).$$

Если перед корнем в скобке взят положительный знак, то

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} i &= -i \operatorname{Ln} (\sqrt{2} - 1) = -i \{ \ln (\sqrt{2} - 1) + \\ &+ i(0 + 2k\pi) \} = 2k\pi - i \ln (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Если же перед корнем взят отрицательный знак, то

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} i &= -i \operatorname{Ln} (-\sqrt{2} - 1) = -i \{ \ln (\sqrt{2} + 1) + \\ &+ i(\pi + 2k\pi) \} = (2k + 1)\pi - i \ln (\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Объединяя оба эти результата, окончательно получаем

$$\operatorname{Arcsin} i = k\pi - i \ln [\sqrt{2} - (-1)^k].$$

2. Вычислить $\operatorname{Arctg} 2i$. Применяя формулы (1.29) и (1.25), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg} 2i &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{i}{2} \left\{ \ln \frac{1}{3} + i(\pi + 2k\pi) \right\} = \\ &= \frac{2k+1}{2} \pi + \frac{i \ln 3}{2}. \end{aligned}$$

1.15. Гиперболические функции в комплексной области определяются равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Непосредственно из этих определений следует, что функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$, а функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi . Опираясь на формулы (1.26) и (1.31), легко получить следующие формулы, выражающие гиперболические функции через тригонометрические:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz; \\ \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Полагая в первой паре этих формул $iz = z'$, получим

$$\sin z' = i \operatorname{sh} z, \quad \cos z' = \operatorname{ch} z,$$

откуда вытекает правило: любое соотношение между тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$

переходит в соответствующее соотношение между гиперболическими функциями $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ в результате замены в исходном соотношении $i \sin z$ и $\cos z$ соответственно на $i \operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$.

Пример. Совершив указанную замену в соотношениях

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= 1, \\ \sin 2z &= 2 \sin z \cos z,\end{aligned}$$

получим соответствующие соотношения между гиперболическими функциями

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1; \\ \operatorname{sh} 2z &= 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z.\end{aligned}$$

1.16. Функции обратные гиперболическим обозначаются соответственно $w = \operatorname{Arsh} z$ (ареасинус), $w = \operatorname{Arch} z$ (ареакосинус), $w = \operatorname{Arth} z$ (ареатангенс), $w = \operatorname{Arcth} z$ (ареакотангенс). Тем же методом, что и для обратных тригонометрических функций, для них можно получить выражения:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 + 1}); \\ \operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \operatorname{Arth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}; \\ \operatorname{Arcth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Все эти функции бесконечнозначны.

Пример. $\operatorname{Arsh} i = \operatorname{Ln} i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$.

1.17. Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \alpha + \beta i$ — произвольное комплексное число, определяется равенством

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.\tag{1.34}$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$), тогда

$$w = e^{a [\ln r + (\varphi + 2k\pi)i]} = e^{\alpha \ln r - \beta (\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i [\beta \ln r + \alpha (\varphi + 2k\pi)]}\tag{1.35}$$

где k — целое число.

Пусть $\beta = 0$, тогда $a = \alpha$ — действительное число. Если α — целое, то функция z^a однозначна и непрерывна для всех конечных z (кроме точки $z = 0$ при $\alpha < 0$); действительно (1.35) в этом случае дает

$$w = e^{\alpha (\ln r + i\varphi)} \text{ (так как } e^{2k\pi i} = 1 \text{ при } \alpha \text{ — целом).}$$

Если $\alpha = \frac{m}{n}$ — рациональное число (дробь $\frac{m}{n}$ предполагается несократимой), то модули всех значений функции z^a одинаковы и равны $e^{\alpha \ln r}$, аргументы же этих значений образуют арифметическую прогрессию $\theta_k = \alpha\varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1.18. Производная. Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности конечной точки z . Выберем в этой окрестности точку $z + \Delta z$ и пусть Δw будет приращение функции $f(z)$ при переходе от точки z к точке $z + \Delta z$:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Определение. Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$, то:

- 1) функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z ;
- 2) этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается символом

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (1.37)$$

Пусть

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y,$$

тогда

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + i v(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + i v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v,$$

где, как обычно, обозначено

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y);$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y).$$

Формулу (1.37) теперь можно переписать так:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (1.38)$$

Отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$ может стремиться к конечному пределу только при условии, что и $\Delta w \rightarrow 0$; но это есть условие непрерывности функции $f(z)$ в точке z (п^о 1.10). Итак, из дифференцируемости функции в некоторой точке вытекает и непрерывность функции в этой точке. Обратное утверждение, как и в действительном анализе, не имеет места.

1.19. Условия Коши — Римана. Выясним теперь, при каких условиях функция будет дифференцируемой в данной точке. Здесь имеет место следующая

Теорема. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы

1) действительные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке z и

2) в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.39)$$

(условия Коши — Римана).

Доказательство необходимости. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z . Тогда предел (1.38) существует и конечен при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z любым образом (т. е. этот предел не зависит от закона стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю). Пусть сначала точка $z + \Delta z$ приближается к z по прямой, параллельной действительной оси, т. е. пусть $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$. В этом случае формула (1.38) дает:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.40)$$

Если же точка $z + \Delta z$ приближается к точке z по прямой, параллельной мнимой оси, то $\Delta z = i\Delta y \rightarrow 0$ и формула (1.38) дает

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. * \quad (1.41)$$

Но, как мы уже говорили, в рассматриваемом случае предел (1.38) не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, а потому выражения (1.40) и (1.41) должны быть равны друг другу:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда и вытекают равенства (1.39).

Доказательство достаточности. Пусть теперь условия (1.39) выполняются. Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $z = x + iy$, то, как известно из действительного анализа, полные приращения этих функций можно представить в форме

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha |\Delta z|, \\ \Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta |\Delta z|, \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

* Так как $f'(z)$ по условию существует, то из (1.40) и (1.41) следует существование частных производных от функций u и v .

где $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ (т. е. при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$). Приращения функции $w = f(z)$, используя формулы (1.42) и (1.39), представим в виде

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \\ &+ i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\right) + \gamma |\Delta z| = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \Delta y + \gamma |\Delta z| = A \Delta z + \gamma |\Delta z|,\end{aligned}$$

где обозначено $\gamma = \alpha + i\beta$, $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$; при этом $\gamma \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$, а A от Δz не зависит. Поделив последнее соотношение на Δz , найдем, что в рассматриваемом случае $\frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow A$ при $\Delta z \rightarrow 0$, что и требовалось доказать.

Для функций комплексного переменного сохраняются все известные из действительного анализа правила дифференцирования:

- 1) $[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z)$;
- 2) $[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
- 3) $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$;
- 4) $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- 5) $f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$.

В последней из этих формул f и φ — взаимно обратные функции, осуществляющие однолистные отображения окрестностей точек z и w .

Действительно, выводы этих правил основаны только на свойствах алгебраических действий и предельного перехода, которые сохраняются в комплексной области.

1.20. Аналитические функции. Дифференциал. Введем теперь фундаментальное для изучаемой теории понятие аналитической функции.

Определение 1. Функция $f(z)$ однозначная и дифференцируемая в каждой точке области D называется аналитической (иначе, регулярной или голоморфной) в этой области.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется аналитической в конечной точке z , если она является аналитической в некоторой окрестности точки z .

Из этих определений видим, что понятие аналитичности и дифференцируемости в области совпадают, в то время, как условие аналитичности в точке является более жестким, чем условие дифференцируемости в точке; действительно, условие аналитичности в точке требует, чтобы функция была дифференцируема не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности.

Определение 3. Точки плоскости z , в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются правильными точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются особыми точками этой функции.

Пример 1. Рассмотрим функцию $w = z^2$. Для нее

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Условия Коши-Римана выполняются для функции $w = z^2$ во всех точках плоскости z , в силу чего она дифференцируема, а значит, и аналитична во всех точках этой плоскости. Этот же результат можно получить непосредственно воспользовавшись определением (1.37) производной. Действительно, для функции $w = z^2$ в любой конечной точке z будет

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = 2z + \Delta z,$$

откуда

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = w' = 2z, \quad (z^2)' = 2z.$$

На этом пути мы фактически вычислили производную рассматриваемой функции. Впрочем, убедившись с помощью условий Коши-Римана в аналитичности функции $w = z^2$ во всей плоскости z , мы могли бы вычислить производную от нее, воспользовавшись любой из формул (1.40) и (1.41). Так, например, с помощью формул (1.40) снова находим

$$(z^2)' = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2) + i \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Аналогично, с помощью определения (1.37), можно убедиться в аналитичности функции $w = z^n$ (n — натуральное) во всей плоскости z и вычислить ее производную $w' = nz^{n-1}$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Для нее $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

Следовательно, условия Коши-Римана для функции $w = e^z$ выполняются во всех точках плоскости z , в силу чего она дифференцируема, а значит, и аналитична во всей плоскости z . Воспользовавшись формулой (1.40), найдем $(e^z)' = e^z$.

Функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ являются линейными комбинациями* показательных функций e^z и e^{-z} , а потому они тоже аналитичны во всей плоскости z . Функции $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cth} z$, $\operatorname{th} z$ аналитичны во всех тех точках, в которых соответственно первые четыре функции не обращаются в нуль. Формулы дифференцирования всех этих функций, как легко проверить, не отличаются от соответствующих формул действительного анализа.

Пример 3. Для функции $w = z \operatorname{Re} z = (x + iy)x$ имеем $u = x^2$, $v = xy$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Следовательно, условия Коши—Римана выполняются для этой функции только при $x = 0$, $y = 0$. Таким образом, функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема в единственной точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Пример 4. Для функции $w = \bar{z} = x - yi$ будет $u = x$, $v = -y$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$$

следовательно, здесь первое условие Коши—Римана не выполняется, в силу чего функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке.

Дифференциалом $df(z)$ аналитической функции $w = f(z)$ в конечной точке z называется главная линейная по отношению к Δz часть приращения Δw этой функции. Имеем

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z),$$

откуда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(z, \Delta z),$$

где $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0$. Или

$$\Delta w = f'(z) \Delta z + \alpha \Delta z.$$

Здесь первое слагаемое $f'(z) \Delta z$ является при $\Delta z \rightarrow 0$ бесконечно малой того же порядка, что Δz , если $f'(z) \neq 0$, а второе слагаемое $\alpha \Delta z$ есть бесконечно малое более высокого порядка, чем Δz . Отсюда следует, что $f'(z) \Delta z$ и есть дифференциал функции $f(z)$; итак,

$$df(z) = f'(z) \Delta z = f'(z) dz$$

(ибо при $f(z) = z$ будет $dz = z' \Delta z = \Delta z$).

В заключение еще раз подчеркнем, что все введенные в настоящем параграфе понятия относятся к однозначным функциям, рассматриваемым в точках плоскости z (точка $z = \infty$ исключается из рассмотрения).

* Под линейной комбинацией нескольких функций понимают сумму произведений этих функций на числовые коэффициенты.

1.21. Связь аналитических функций с гармоническими. Выясним теперь, любая ли функция двух переменных x и y может служить действительной или мнимой частью некоторой аналитической функции. Пусть нам дана функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

аналитическая в некоторой области D . Тогда во всех точках D функции u и v удовлетворяют условиям Коши — Римана (1.39).

Дифференцируя первое из этих равенств по x , а второе — по y и почленно складывая, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0^*.$$

Дифференцируя первое из тождеств (1.39) по y , а второе по x и вычитая почленно из первого второе, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Видим, что функции u и v должны удовлетворять одному и тому же дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка, называемому уравнением Лапласа. Функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются гармоническими функциями. Таким образом, u и v должны быть гармоническими функциями. Однако гармонические функции u и v должны еще удовлетворять условиям Коши — Римана (1.39); такие две гармонические функции называются взаимно сопряженными. Итак, действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряженными гармоническими функциями.

Основываясь на этом, мы всегда можем построить аналитическую функцию, для которой данная гармоническая функция является действительной или мнимой частью. Пусть, например, данная гармоническая функция $u(x, y)$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$; гармоническую функцию $v(x, y)$, сопряженную с функцией $u(x, y)$, найдем из условий (1.39), которые определяют нам две частные производные $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ неизвестной функции v (или, что тоже самое, полный дифференциал неизвестной функции v). Таким образом, задача отыскания гармонической функции, сопряженной с данной гармонической функцией, есть известная из действительного анализа задача интегрирования полного дифференциала функции двух переменных.

* Существование непрерывных вторых частных производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ будет доказано в п° 1.43.

Пример. Построить аналитическую функцию, для которой данная функция $u = x^2 - y^2 + 2x$ является действительной частью (в том, что данная функция u является гармонической функцией легко убедиться проверкой).

В силу условий Коши — Римана находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Интегрируя первое из этих соотношений по x , получим

$$v = \int 2y \, dx = 2xy + \varphi(y).$$

Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем последнее равенство по y и подставляем во второе соотношение (1.43):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = 2x + 2,$$

откуда

$$\varphi'(y) = 2 \text{ и } \varphi(y) = 2y + C$$

(C — произвольная постоянная). Итак, гармоническая функция, сопряженная с данной, будет

$$v = 2xy + 2y + C.$$

Находим теперь искомую аналитическую функцию

$$\begin{aligned}w &= u + iv = x^2 - y^2 + 2x + (2xy + 2y + C)i = \\ &= (x^2 + 2xyi - y^2) + (2x + 2yi) + Ci = \\ &= (x + yi)^2 + 2(x + yi) + Ci = z^2 + 2z + Ci.\end{aligned}$$

1.22. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области D , а z_0 — некоторая точка этой области, в которой $f'(z_0) \neq 0$. Функция $w = f(z)$ отображит точку z_0 плоскости z в точку $w_0 = f(z_0)$ плоскости w (рис. 1.21). Через точку z_0 проведем

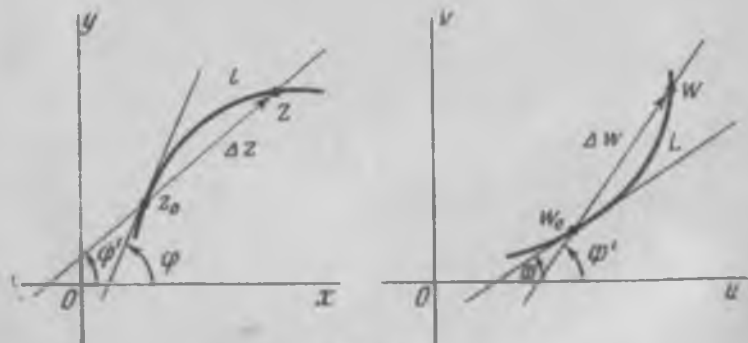


Рис. 1.21

какую-нибудь кривую l , которую функция $w = f(z)$ отобразит в кривую L плоскости w , проходящую через w_0 . На кривой l возьмем произвольную точку $Z = z_0 + \Delta z$, которая отобразится в точку $W = w_0 + \Delta w$ кривой L .

По определению производной

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{Z \rightarrow z_0} \frac{W - w_0}{Z - z_0} = f'(z_0). \quad (1.44)$$

Из (1.44) следует, что

$$|f'(z_0)| = \lim_{Z \rightarrow z_0} \left| \frac{W - w_0}{Z - z_0} \right| = \lim_{Z \rightarrow z_0} \frac{|W - w_0|}{|Z - z_0|}. \quad (1.45)$$

Видим, что $|f'(z_0)|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками w_0 и W к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками z_0 и Z . В силу аналитичности $f(z)$ в точке z_0 предел (1.44), а значит и предел (1.45), не зависит от характера приближения точки Z к точке z_0 , т. е. от выбора кривой l , проходящей через z_0 ; следовательно, предел (1.45) один и тот же во всех направлениях, выходящих из точки z_0 . По этой причине величину $|f'(z_0)|$ можно рассматривать геометрически как коэффициент растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. При этом если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояние между точками при отображении $w = f(z)$ увеличивается и происходит собственно растяжение плоскости; если же $|f'(z_0)| < 1$, то отображение приводит к сжатию.

Далее из (1.44) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} f'(z_0) &= \lim_{Z \rightarrow z_0} \operatorname{Arg} \frac{W - w_0}{Z - z_0} = \\ &= \lim_{Z \rightarrow z_0} [\operatorname{Arg} (W - w_0) - \operatorname{Arg} (Z - z_0)].^* \end{aligned} \quad (1.46)$$

$\operatorname{Arg} (W - w_0)$ и $\operatorname{Arg} (Z - z_0)$ — это соответственно углы Φ' и φ' , которые векторы $\Delta w = W - w_0$ и $\Delta z = Z - z_0$ составляют с действительной осью (рис. 1.21). Пусть φ и Φ будут углы, составляемые касательными к кривым l и L соответственно в точках z_0 и w_0 с действительной осью. Тогда $\varphi' \rightarrow \varphi$, $\Phi' \rightarrow \Phi$ при $Z \rightarrow z_0$, а потому из (1.46) получаем

$$\operatorname{Arg} f'(z_0) = \Phi - \varphi$$

или

$$\Phi = \varphi + \operatorname{Arg} f'(z_0). \quad (1.47)$$

* Здесь использовано требование $f'(z_0) \neq 0$, ибо в противном случае $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ не имел бы смысла.

Таким образом, $\text{Arg } f'(z_0)$ — это угол, на который нужно повернуть касательную к кривой l в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке w_0 .

В силу аналитичности $f(z)$ в точке z_0 угол $\text{Arg } f'(z_0)$ один и тот же для всех кривых l , проходящих через z_0 , поэтому $\text{Arg } f'(z_0)$ называют вращением при отображении $w = f(z)$ в точке z_0 .

Итак, касательные ко всем кривым, проходящим через точку z_0 , в этой точке при аналитическом отображении $w = f(z)$ и условии $f'(z_0) \neq 0$ поворачиваются на один и тот же угол $\text{Arg } f'(z_0)$. Отсюда следует, что в точке z_0 функция $w = f(z)$ при условии $f'(z_0) \neq 0$ отображает две произвольные линии, пересекающиеся в точке z_0 так, что угол между первоначальными и отображенными линиями будет один и тот же как по величине, так и по направлению. Итак, аналитическое отображение $w = f(z)$ обладает свойством консерватизма (сохраняемости) углов во всех точках, где $f'(z) \neq 0$.

1.23. Конформные отображения. Мы установили, что всякое аналитическое отображение $w = f(z)$ обладает в каждой точке z_0 , где $f'(z_0) \neq 0$, постоянством растяжений и консерватизмом углов. Но тогда всякая бесконечно малая фигура плоскости z , одна из вершин которой лежит в точке z_0 , при аналитическом отображении $w = f(z)$ перейдет в плоскости w в фигуру с точностью до бесконечно малых подобную исходной (рис. 1.22). Действительно, в силу свойства консерватизма углов соответственные углы обеих фигур будут одинаковы; отношения же длин соответственных сторон, с точностью до бесконечно малых, будут равны одному и тому же числу $|f'(z_0)|$.

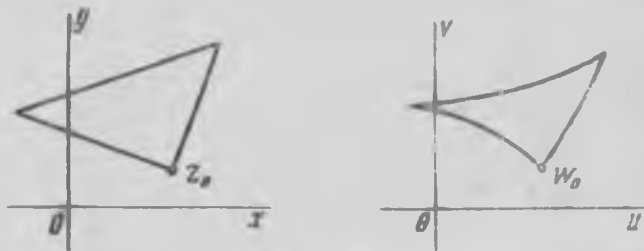


Рис. 1.22

Итак, в достаточно малой окрестности каждой точки, где $f'(z) \neq 0$, аналитическое отображение оказывается отображением подобия.

Отображения, обладающие свойством консерватизма углов и свойством постоянства растяжений, называют поэтому кон-

формным отображением 1-го рода или просто конформным отображением (т. е. отображением, сохраняющим форму). Таким образом, на основании результатов двух последних пунктов мы приходим к следующей теореме.

Теорема. Аналитическое отображение $w = f(z)$ конформно в каждой точке, где $f'(z) \neq 0$.

Отображение $w = f(z)$ называется конформным в области D , если оно конформно в каждой точке этой области. Следовательно, если функция $w = f(z)$ аналитична в области D , причем во всех точках этой области $f'(z) \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ конформно в D .

Можно доказать и обратную теорему: если отображение $w = f(z)$ конформно в области D , то функция $w = f(z)$ аналитична в D и во всех точках этой области $f'(z) \neq 0$.

Пример 1. Отображение $w = 5z$ конформно во всех точках плоскости z , так как $w' = 5 \neq 0$, $|w'| = 5$, а потому коэффициент растяжения в любой точке плоскости z при отображении $w = 5z$ равен 5; $\arg w' = 0$, в силу чего направление при отображении не изменяется.

Пример 2. Отображение $w = z^2$ конформно во всех точках плоскости z , кроме точки $z = 0$. Действительно, $w' = 2z$, откуда следует, что $w' = 0$ только в точке $z = 0$. Поэтому в начале координат отображение $w = z^2$ не сохраняет, а удваивает углы (в и 1.7 мы видели, что при отображении $w = z^2$ точки луча $\arg z = \varphi$ переходят в точки луча $\arg w = 2\varphi$, рис. 1.19, а).

Пример 3. Отображение $w = \bar{z}$ не является аналитическим, а значит и конформным ни в одной точке (п. 1.20, пример 4). При этом отображении всякая точка z переходит в точку $\bar{z}$ симметричную относительно действительной оси. Следовательно, всякие два направления, выходящие из точки z и образующие между собой угол α , перейдут в два направления симметричных с первыми, угол между которыми будет $-\alpha$ (рис. 1.23); таким образом, при отображении $w = \bar{z}$ не происходит изменения масштаба, а все углы сохраняются по абсолютной величине, в то время как направление их отсчета меняется на противоположное.

Отображение, обладающее свойством постоянства растяжений и при котором углы сохраняются по абсолютной величине в то время, как направление их отсчета меняется на противоположное, называется конформным отображением 2-го рода. Как мы видели в последнем примере, $w = \bar{z}$ является конформным отображением 2-го рода. Вообще, если отображение $w = f(z)$ конформно, то отображение $w = \overline{f(\bar{z})}$ будет конформным 2-го рода. Действительно, последнее отображение можно представить как суперпозицию двух отображений $\omega = f(z)$ и $w = \bar{\omega}$. При первом отображении углы сохраняются как по величине, так и по направлению

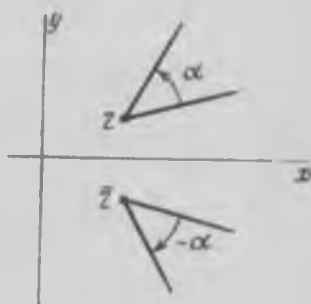


Рис. 1.23

отсчета; при втором же — направление отсчета углов меняется на противоположное. Следовательно, в результате обоих отображений углы сохраняются по абсолютной величине, а направление их отсчета изменится на противоположное. Кроме того, отображение $w = \overline{f(z)}$ обладает свойством постоянства растяжений, так как им обладают оба составляющих отображения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить выполнение условий Коши—Римана для функций: а) $w = z^3$; б) $w = \frac{1}{z}$; в) $w = \sin z$; г) $w = \cos z$; д) $w = \operatorname{Arcsin} z$.

2. Показать, что условия Коши—Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial v}{\partial r},$$

и проверить выполнение этих условий для функций: а) $w = \ln z$; б) $w = \ln^2 z$.

3. Найти аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой равна: а) $x^3 - 3xy^2$; б) $x^2 - y^2 + 2x$; в) $\frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$, при условии $f(1) = 0$.

4. Найти аналитическую функцию $f(z)$, мнимая часть которой равна: а) $x^2 - y^2 - 1$, при условии $f(-1) = 0$; б) $x^3 - 3xy^2$, при условии $f(i) = i$; в) $e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y$.

5. Найти угол поворота и коэффициент растяжения при отображении с помощью аналитической функции $w = 2z^2 + z$ в точках: а) $z = 1$; б) $z = -\frac{1}{4} + i$; в) $z = -\frac{1}{4}$.

6. Какая часть плоскости z сжимается и какая растягивается, при отображении: а) $w = z^2$; б) $w = 3z^3$; в) $w = 2z^2 - 8z - 1$; г) $w = \frac{1}{z}$; д) $w = e^z$.

§ 5. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1.24. Общие принципы. В настоящем параграфе мы изучим отображения, осуществляемые некоторыми основными элементарными функциями, что доставит нам ряд примеров однолистного и конформного отображения одной области в другую (см. принцип сохранения области, п° 1.10). Вместе с тем мы рассмотрим и ряд частных задач, принадлежащих к так называемой основной задаче конформного отображения, которая в общей постановке формулируется так: требуется найти функцию $w = f(z)$, однолистно и конформно отображающую одну данную область D на другую данную область Δ .

Эта задача не всегда имеет решение. Например, можно доказать, что многосвязную область D нельзя однолистно и конформно отобразить на односвязную область Δ . Иначе

обстоит дело с односвязными областями, для которых имеет место следующая теорема.

Теорема существования. Если D и Δ — произвольные односвязные области, отличные от расширенной плоскости z и от расширенной плоскости с любой одной выброшенной точкой (в частности, от плоскости z), то всегда существует однолистное и конформное отображение $w = f(z)$ области D на Δ .

Более того, можно доказать, что таких отображений существует бесконечное множество и для того, чтобы из этого множества отображений выделить одно нужно, как говорят, это отображение нормировать, т. е. задать некоторые дополнительные условия. Так можно задать образы одной внутренней и одной граничной точки области D или трех граничных точек D . Для нормирования отображения можно также в любой точке z_0 области D задать значения

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \theta_0,$$

что геометрически сводится к заданию образа одной внутренней точки z_0 области D и угла, на который при этом отображении поворачивается бесконечно малая окрестность точки z_0 . Ниже мы покажем на конкретных примерах, каким образом производится нормирование отображений.

Для того чтобы отобразить односвязную область D на односвязную область Δ , достаточно уметь отобразить каждую из этих областей на какую-нибудь „стандартную“ область, например на верхнюю полуплоскость или на единичный круг. Действительно, пусть, например, функции $w = f(z)$ и $\omega = g(w)$ однолистно и конформно отображают области D и Δ на круг $|\omega| < 1$ и $w = h(\omega)$ — отображение обратное $\omega = g(w)$. Тогда суперпозиция

$$w = h(\omega) = h[f(z)]$$

и будет однолистным и конформным отображением D на Δ .

Ниже (п° 1.28, пример 3) мы найдем функцию, отображающую единичный круг на себя и содержащую три произвольных действительных параметра. С помощью этой функции мы можем, определив одно отображение $w = f(z)$ области D на единичный круг, найти все такие отображения. Распорядившись соответствующим образом произвольными параметрами, входящими в упомянутую функцию, можно будет удовлетворить любым условиям нормирования.

Очень большое практическое значение имеет следующий:

Принцип соответствия границ. Пусть односвязные области D и Δ ограничены соответственно кривыми l и i , причем положительному направлению обхода кривой l

соответствует положительное направление обхода кривой γ ; пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в замкнутой области $\bar{D}$, однолистно отображает $\bar{D}$ на $\bar{\Delta}$. Тогда $w = f(z)$ будет однолистным и конформным отображением области D на область Δ .

Отсюда следует, что для того, чтобы определить область Δ , на которую аналитическая функция $w = f(z)$ отображает заданную область D , достаточно найти контур, на который эта функция отображает границу области D и установить направление обхода этого контура.

Доказательство сформулированных в настоящем пункте утверждений выходит за рамки нашей книги.

1.25. Линейная функция комплексного переменного определяется соотношением

$$w = az + b, \quad (1.48)$$

где $a = ke^{i\alpha} \neq 0$ и b — постоянные. Это отображение однолистно на плоскости z , а приняв, что $w = \infty$ при $z = \infty$, сделаем его, однолистным и на расширенной плоскости z . Линейное отображение конформно в плоскости z , так как во всех ее точках $w' = a \neq 0$.

Будет ли это отображение конформным и в точке $z = \infty$?

Для решения этого вопроса нужно ввести понятие угла между двумя линиями в бесконечно удаленной точке, причем достаточно ограничиться углом между двумя прямыми (ибо за угол между двумя кривыми в точке их пересечения принимается угол между касательными к кривым в этой точке).

За угол между двумя непараллельными прямыми в бесконечно удаленной точке по определению примем угол между ними в конечной точке их пересечения, взятый с противоположным знаком. (Напомним (см. п^о 1.5), что любым двум непараллельным прямым расширенной плоскости z при стереографической проекции соответствуют две окружности сферы z , пересекающиеся в двух точках, из коих одна — бесконечно удаленная).

Угол между двумя параллельными прямыми в бесконечно удаленной точке примем равным нулю (параллельным прямым соответствуют окружности сферы z касающиеся друг друга в бесконечно удаленной точке).

При таком определении угла между двумя прямыми в бесконечно удаленной точке линейное отображение будет обладать свойством консерватизма углов и в точке $z = \infty$, т. е. будет конформным на расширенной плоскости z . Действительно, при этом отображении две прямые, пересекающиеся в точках z_1 и $z = \infty$, перейдут в две прямые расширенной плоскости w , пересекающиеся соответственно в точках w_1 и $w = \infty$. Угол

между прямыми в точке $w = \infty$ равен углу между ними в точке w , с противоположным знаком, т. е. равен углу между прямыми в точке z , с противоположным знаком (в силу конформности линейного отображения в любой конечной точке) и равен углу между прямыми в точке $z = \infty$. Если же две прямые сферы z параллельны, то при линейном отображении (1.48) они перейдут в две параллельные прямые расширенной плоскости w (доказать этот факт предоставим читателю), в силу чего и в этом случае угол между прямыми в точке $z = \infty$ сохранится.

Функцию (1.48) можно рассматривать как суперпозицию трех функций:

$$1) \omega = kz, (k = |a| > 0);$$

$$2) \Omega = e^{ia}\omega;$$

$$3) w = \Omega + b.$$

Вспоминая геометрический смысл умножения (п^о 1.3), заключаем, что отображение 1) сводится к подобному растяжению (или при $k < 1$ сжатию) плоскости z с коэффициентом подобия k , а отображение 2) сводится к повороту плоскости ω на угол α около начала координат. Сложение комплексных чисел сводится к сложению векторов (п^о 1.2), в силу чего при отображении 3) всякая точка Ω отображается в соответствующую точку w , смещаясь на вектор b . Таким образом, отображение 3) означает сдвиг всей плоскости Ω на постоянный вектор b .

Итак, линейное отображение (1.48) сводится к последовательному применению трех операций: к подобному растяжению (или сжатию), к повороту вокруг начала координат и к параллельному переносу. Ясно, что при таком отображении прямые переходят в прямые (причем углы между двумя прямыми сохраняются), окружности переходят в окружности, а любая фигура — в подобную ей фигуру. Таким образом, линейное отображение есть отображение подобия.

Про отображение $w = f(z)$, при котором окружности расширенной плоскости z переходят в окружности расширенной плоскости w (на расширенной плоскости можно не различать прямые и окружности, см. п^о 1.5), будем говорить, что оно обладает круговым свойством. Таким образом, линейное отображение (1.48) обладает круговым свойством.

Пример. Найти отображение $w = f(z)$ прямоугольника $-7 < \operatorname{Re} z < -3$, $2 < \operatorname{Im} z < 4$ на прямоугольник $-4 < \operatorname{Re} w < 0$, $-8 < \operatorname{Im} w < 0$ (рис. 1.24).

Прямоугольники подобны, в силу чего отображение может быть осуществлено линейной функцией. Отображение $w = z + AO = z + 3 - 2i$,

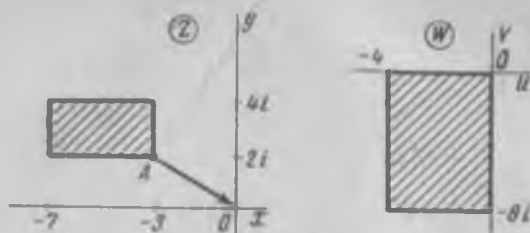


Рис. 1.24

осуществив параллельный сдвиг плоскости z на вектор $\overline{AO} = 3 - 2i$, сместит точку A в начало координат. Далее с помощью отображения $\omega_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \omega = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = i\omega$ поворачиваем плоскость ω на угол $\frac{\pi}{2}$ около начала координат. Наконец, с помощью преобразования подобия $w = 2\omega_1$ (коэффициент подобия $k=2$) приходим к требуемому прямоугольнику. Окончательно функция, решающая поставленную задачу, будет

$$w = 2\omega_1 = 2i\omega = 2i(z + 3 - 2i)$$

или

$$w = 2iz + 6i + 4.$$

1.26. Инверсия. Рассмотрим окружность $|z - a| = R$ с центром в точке a и радиуса R (рис. 1.25). Две точки z_1 и z_2 будем называть симметричными относительно этой окружности, если:

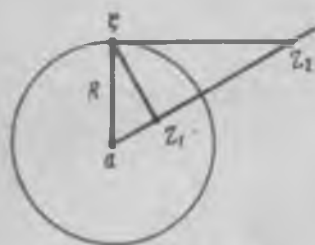


Рис. 1.25

1) они лежат на одном луче, выходящем из центра a окружности,

2) произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса окружности, т. е.

$$|z_1 - a| |z_2 - a| = R^2. \quad (1.49)$$

В дополнение к этому точкой, симметричной центру окружности $z_1 = a$, считается бесконечно удаленная точка $z_2 = \infty$. Если рассматривать окружность на расширенной плоскости z , то она может пройти через бесконечно удаленную точку, т. е. может оказаться прямой. Симметрию точек z_1 и z_2 относительно прямой будем ниже понимать в обычном смысле.

Построение точек, симметричных относительно данной окружности, может быть просто осуществлено. Пусть данная точка лежит внутри окружности (точка z_1 на рис. 1.25). Про-

водим луч az_1 , и к этому лучу в точке z_1 восстанавливаем перпендикуляр до встречи с окружностью в точке ζ ; в точке ζ проводим касательную к окружности до встречи с лучом az_1 в точке z_2 — которая и будет искомой точкой, симметричной с z_1 относительно данной окружности. Если данная точка лежит вне окружности (точка z_2), то построение производится в обратном порядке. Построенные таким образом точки z_1 и z_2 действительно симметричны относительно данной окружности, так как, во-первых, эти точки лежат на одном луче, выходящем из центра окружности, а во-вторых, из подобия прямоугольных треугольников $a\zeta z_1$ и $az_2\zeta$ следует

$$\frac{R}{|z_1 - a|} = \frac{|z_2 - a|}{R},$$

что равносильно (1.49).

Отображение, переводящее каждую точку z в точку, симметричную с данной относительно некоторой окружности, называется инверсией относительно этой окружности.

Пример. Найти точку, симметричную с данной точкой z относительно единичной окружности $|z|=1$.

Строим точку ω , симметричную с z относительно окружности $|z|=1$ (рис. 1.26, способ построения указан выше). В силу условия симметрии имеем

$$\arg \omega = \arg z, |z| \cdot |\omega| = 1$$

(здесь $a = 0$, $R = 1$).

Но тогда $\arg \omega = \arg z = -\arg \bar{z} =$

$$= \arg \frac{1}{\bar{z}}; |\omega| = \frac{1}{|z|} = \left| \frac{1}{\bar{z}} \right|,$$

откуда, следует, что $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$. Итак, точка $\frac{1}{\bar{z}}$ симметрична с данной точкой z относительно окружности $|z|=1$ и, следовательно, отображение $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$ является инверсией относительно этой окружности.

Средствами элементарной геометрии можно доказать следующие теоремы, выражающие свойства симметричных точек и инверсии:

Теорема 1. Для того чтобы точки z_1 и z_2 были симметричны относительно некоторой окружности l расширенной плоскости $\mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы любая окружность, проходящая через точки z_1 и z_2 , была ортогональна к l (рис. 1.27).

Теорема 2. Инверсия отображает любую окружность расширенной плоскости $\mathbb{C}$ в окружность (круговое свойство инверсии).

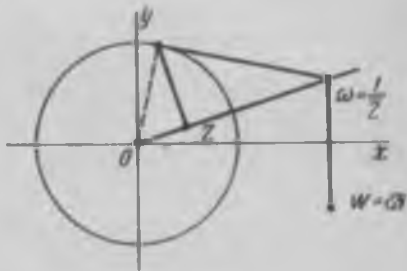


Рис. 1.26

Теорема 3. *Инверсия отображает любую пару точек z_1 и z_2 , симметричных относительно окружности l расширенной плоскости z , в пару точек w_1 и w_2 , симметричных относительно окружности λ — образа окружности l на расширенной плоскости w (свойство сохранения симметричных точек).*

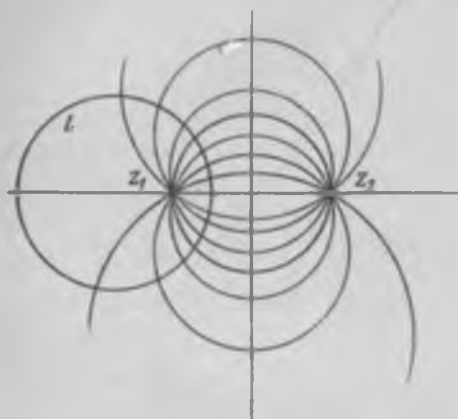


Рис. 1.27

1.27. Функция $w = \frac{1}{z}$

будет однолистной на расширенной плоскости z , если принять, что $w = \infty$ при $z = 0$ и $w = 0$ при $z = \infty$.

Отображение $w = \frac{1}{z}$ можно представить как суперпозицию двух отображений:

$$1) w = \frac{1}{\bar{z}}; \quad 2) w = \bar{w}$$

(рис. 1.26, где плоскости z , w и $\bar{w}$ совмещены). Первое

отображение есть инверсия относительно окружности $|z| = 1$ (п° 1.26, пример), а второе отображение — инверсия относительно действительной оси (точки w и $\bar{w}$ симметричны относительно этой оси). Следовательно, отображение $w = \frac{1}{z}$ есть суперпозиция этих двух инверсий.

При отображении $w = \frac{1}{z}$ круг $|z| < 1$ переходит в круг $|w| > 1$ с центром в бесконечно удаленной точке, круг $|z| > 1$ переходит в круг $|w| < 1$, окружность $|z| = 1$ отобразится сама на себя, луч $\arg z = \varphi$ отобразится в луч $\arg w = -\varphi$, симметричный с исходным лучом относительно действительной оси. Поскольку инверсия обладает круговым свойством (п° 1.26, теорема 2), то и отображение $w = \frac{1}{z}$, являясь суперпозицией двух инверсий, тоже обладает этим свойством. При этом отображении окружности, проходящие через начало координат $z = 0$, переходят в окружности, проходящие через точку $w = \infty$ (т. е. в прямые), а окружности, проходящие через $z = \infty$ (прямые), переходят в окружности, проходящие через начало координат $w = 0$.

Производная от функции $w = \frac{1}{z}$ существует и конечна всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$, и равна $w' = -\frac{1}{z^2} \neq 0$.

Следовательно, отображение $w = \frac{1}{z}$ конформно на расширенной плоскости z , кроме двух упомянутых точек.

Однако если принять введенное в п^о 1.25 определение угла между двумя прямыми в бесконечно удаленной точке, то отображение $w = \frac{1}{z}$ будет конформным и в этих исключенных точках, т. е. будет конформным на всей расширенной плоскости z . Действительно, из точки $z = 0$ проведем два луча I и II, образующие угол α .

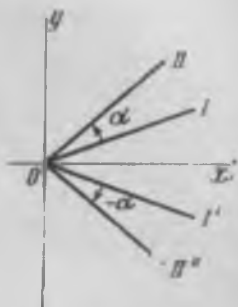


Рис. 1.28

При отображении $w = \frac{1}{z}$ эти лучи перейдут соответственно в лучи I' и II', симметричные с исходными лучами относительно действительной оси и составляющие угол $-\alpha$ (рис. 1.28, где плоскости z и w совмещены). Точка $z = 0$ переходит в точку $w = \infty$, в которой угол между образами лучей I и II равен углу между лучами I' и II' с противоположным знаком, т. е. равен $-(-\alpha) = \alpha$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается равенство углов в точках $z = \infty$ и $w = 0$.

1.28. Дробно-линейная функция комплексного переменного z определяется на расширенной плоскости равенством

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0)^*, \quad (1.50)$$

где a, b, c, d — комплексные постоянные; кроме того, принимается, что $w = \infty$ при $z = -\frac{d}{c}$ и $w = \frac{a}{c}$ при $z = \infty$. Преобразуем формулу (1.50):

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + bc}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} = \\ &= \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что дробно-линейное отображение является суперпозицией трех отображений:

- 1) $\omega = cz + d$,
- 2) $\Omega = \frac{1}{\omega}$,
- 3) $w = \frac{bc - ad}{c} \Omega + \frac{a}{c}$.

* При $ad - bc = 0$ будет $a = \lambda c$, $b = \lambda d$ ($\lambda = \text{const}$) и функция (1.50) превращается в постоянную $w = \lambda$; при $c = 0$ (1.50) превращается в линейную функцию.

Отображения 1) и 3) линейны, а отображение 2) нами изучено в п° 1.27. Отсюда следует, что всякое свойство, справедливое при линейном отображении и отображении $w = \frac{1}{z}$, будет справедливым и при отображении (1.50).

Линейное отображение и отображение $w = \frac{1}{z}$ однолиственны и конформны на расширенной плоскости. Следовательно, дробно-линейная функция тоже однолиственна и конформно отображает расширенную плоскость z на расширенную плоскость w .

Линейное отображение обладает круговым свойством, и, как отображение подобия, свойством сохранения симметричных точек, т. е. теми же свойствами, которыми обладает инверсия (п° 1.26, теоремы 2 и 3). Отображение $w = \frac{1}{z}$, как суперпозиция двух инверсий, тоже обладает этими свойствами. Следовательно, этими же свойствами обладает и отображение (1.50), так что:

1) Дробно-линейное отображение переводит любую окружность расширенной плоскости z в окружность расширенной плоскости w (круговое свойство).

2) Дробно-линейное отображение преобразует любую пару точек z_1 и z_2 , симметричных относительно окружности l расширенной плоскости z в пару точек w_1 и w_2 , симметричных относительно окружности λ , являющейся образом окружности l на расширенной плоскости w (свойство сохранения симметричных точек).

Дробно-линейная функция (1.50) содержит четыре параметра a, b, c, d , из которых по крайней мере один отличен от нуля. Пусть, например, $a \neq 0$. Деля на этот коэффициент числитель и знаменатель дроби (1.50), приведем ее к виду

$$w = \frac{z + b_1}{c_1 z + d_1},$$

откуда следует, что дробно-линейное отображение зависит фактически от трех комплексных или шести действительных параметров. Следовательно, это отображение будет вполне определено, если будут заданы три комплексных параметра b_1, c_1, d_1 или условия, их определяющие. Простейший вид таких условий состоит в задании в плоскостях z и w произвольных троек точек z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 , соответствующих друг другу при рассматриваемом отображении. Параметры b_1, c_1, d_1 найдутся в этом случае как решения системы уравнений

$$w_1 = \frac{z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}; \quad w_2 = \frac{z_2 + b_1}{c_1 z_2 + d_1}; \quad w_3 = \frac{z_3 + b_1}{c_1 z_3 + d_1}.$$

Можно показать, что эта система имеет единственное решение и что искомое отображение в неявной форме задается равенством

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \quad (1.51)$$

Решив это уравнение относительно w , можем убедиться в том, что w есть дробно-линейная функция от z , а непосредственная проверка убеждает нас в том, что отображение (1.51) действительно преобразует точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3 .

Формула (1.51) сохраняет смысл также в том случае, когда одна из точек z_k или w_k есть бесконечно удаленная, если только в этой формуле заменить единицами все разности, содержащие эту точку.

Пример 1. Найти функцию, отображающую точки $z_1 = i, z_2 = 1, z_3 = \infty$ соответственно в точки $w_1 = 0, w_2 = \infty, w_3 = 1 - i$.

В силу (1.51), заменив в этом равенстве разности, содержащие z_3 и w_3 единицами, будем иметь

$$\frac{w - 0}{w - 1 + i} \cdot \frac{1}{1} = \frac{z - i}{1} \cdot \frac{1}{1 - i},$$

откуда находим искомую функцию

$$w = \frac{(1 - i)z - 1 - i}{z - 1}$$

Поскольку три различные точки расширенной плоскости определяют на ней единственную окружность, то приходим к следующему свойству дробно-линейного отображения:

3) Существует единственное дробно-линейное отображение, преобразующее заданную окружность расширенной плоскости z в заданную окружность расширенной плоскости w так, что при этом три данные точки первой окружности отображаются соответственно в три данные точки второй.

Пусть на расширенной плоскости z задан круг D , ограниченный окружностью l , и дробно-линейная функция отображает окружность l в окружность λ расширенной плоскости w (рис. 1.29). Тогда в силу принципа соответствия границ (п. 1.24) эта функция отобразит круг D на одну из двух областей расширенной плоскости w , ограниченных окружностью λ (т. е. либо на внутренность, либо на внешность окружности λ). Чтобы определить, какая из этих двух областей соответствует кругу D , возьмем на границе l круга D три точки z_1, z_2, z_3 , занумерованные в порядке положительного обхода окружности l . Точки z_k при рассматриваемом

отображении перейдут в три точки w_1, w_2, w_3 окружности λ ; образом Δ круга D будет служить та из двух областей, ограниченных окружностью λ , для которой обход окружности λ в направлении возрастания номеров точек w_k будет положительным. Можно также взять произвольную точку z_0 круга D и найти ее образ w_0 ; образом Δ круга D будет служить та из двух областей, ограниченных окружностью λ , которая содержит точку w_0 .

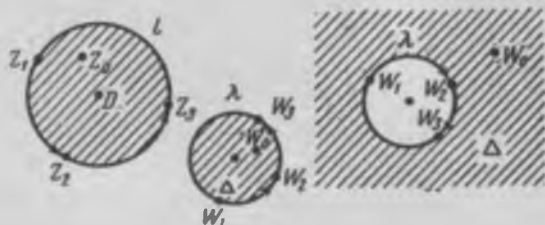


Рис. 1.29

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 2. На какую область расширенной плоскости w функция $w = i \frac{1-z}{1+z}$ отобразит верхний полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ расширенной плоскости z (рис. 1.30)?

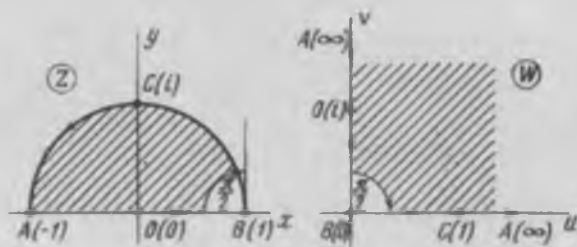


Рис. 1.30

При $z = 1$ и $z = -1$ соответственно будет $w = 0$ и $w = \infty$, откуда в силу кругового свойства дробно-линейного отображения заключаем, что дуга BCA и диаметр BA перейдут в два луча плоскости w , выходящие из начала координат. При $z = 0$ и $z = i$ соответственно будет $w = i$ и $w = 1$, следовательно, диаметр BA перейдет в луч $\arg w = \frac{\pi}{2}$, а дуга BCA в луч $\arg w = 0$.

Итак, рассматриваемый полукруг расширенной плоскости z перейдет в один из двух бесконечных секторов расширенной плоскости w , ограниченных лучами $\arg w = 0$ и $\arg w = \frac{\pi}{2}$ (т. е. или в первый квадрант, или в расширенную плоскость за вычетом этого квадранта). Для того чтобы решить, какой из этих двух секторов является образом исходного полу-

круга, обратимся к принципу соответствия границ. При обходе границы полукруга в положительном направлении $AOBCA$ (при этом направлении обхода полукруг остается слева) линия, составленная из лучей $\arg w = \frac{\pi}{2}$ и $\arg w = 0$ обходится в направлении $AOBCA$; при этом направлении обхода слева остается сектор $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, рассматриваемая функция отобразит полукруг $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ на сектор $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$. Это же можно показать, установив, что какая-нибудь точка исходного полукруга переходит в какую-нибудь точку сектора $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$. Так, например, точка $z = \frac{i}{2}$ переходит в точку $w = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$. Наконец, к этому же результату можно прийти, основываясь на том, что при конформном отображении углы сохраняются как по величине, так и по направлению. Угол между дугой BCA и диаметром BA в точке B , отсчитываемый от диаметра к дуге, равен $\frac{\pi}{2}$, следовательно, $\frac{\pi}{2}$ должен быть равен и угол, отсчитываемый от луча $\arg w = \frac{\pi}{2}$ к лучу $\arg w = 0$.

Пример 3. Найти отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$.

Зададимся точкой a верхней полуплоскости, переходящей в центр круга $w = 0$ (рис. 1.31). По свойству сохранения симметричных точек, точка a , симметричная с точкой a относительно действительной оси, должна перейти в точку $w = \infty$, симметричную с точкой $w = 0$ относительно окружности $|w| = 1$. Поэтому искомое дробно-линейное отображение должно иметь вид

$$w = k \frac{z - a}{z - \bar{a}},$$

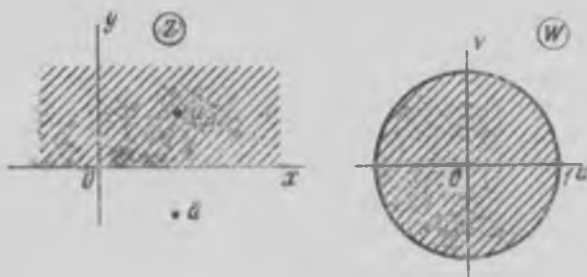


Рис. 1.31

где k — комплексная постоянная. При любом k эта функция отобразит полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на некоторый круг с центром в точке $w = 0$, ибо точка $w = \infty$ должна быть симметрична с точкой $w = 0$ относительно окружности этого круга. Подберем теперь k таким образом, чтобы этот круг был единичным, т. е. чтобы действительная ось Ox отобразилась в окружность $|w| = 1$. Итак, потребуем, чтобы при действительном z было $|w| = 1$. При $z = \text{действительном}$ $|z - a| = |z - \bar{a}|$, так что в этом случае будет

$$|w| = \left| k \frac{z - a}{z - \bar{a}} \right| = |k| \cdot \frac{|z - a|}{|z - \bar{a}|} = |k| = 1.$$

Итак, можно положить $k = e^{i\varphi}$, где φ — любое действительное число и искомое отображение будет

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{z-\bar{a}}. \quad (1.52)$$

Таким образом, существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих требуемое отображение. Для того, чтобы из этого множества функций выделить одну, нужно нормировать отображение (см. п. 1.24), т. е. задать условия, позволяющие определить три действительных параметра (параметра φ и двух действительных параметров, определяющих комплексное число a). Приведенные в п. 1.24 условия нормирования как раз приводят к трем действительным уравнениям, определяющим три действительных параметра (ибо точка внутри области определяется двумя действительными параметрами, а точка на границе области — одним).

Пример 4. Найти отображение единичного круга $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$.

Зададимся точкой a круга $|z| < 1$, переходящей в центр $w = 0$ круга $|w| = 1$ (рис. 1.32). Точка $\omega = \frac{1}{\bar{a}}$, симметричная с a относительно окружности $|z| = 1$ (п. 1.26, пример), должна переходить при дробно-линей-

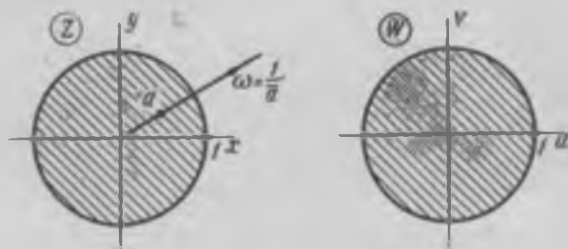


Рис. 1.32

ном отображении в точку $w = \infty$, симметричную с точкой $w = 0$, относительно окружности $|w| = 1$, в силу чего искомое отображение имеет вид

$$w = k \frac{z-a}{z-\frac{1}{\bar{a}}} = k\bar{a} \frac{z-a}{az-1} = b \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

где $b = -ka$ — комплексная постоянная. Эту постоянную найдем, потребовав, чтобы точки $z = e^{i\alpha}$ окружности $|z| = 1$ отображались в точки окружности $|w| = 1$:

$$|w| = |b| \left| \frac{e^{i\alpha} - a}{1 - \bar{a}e^{i\alpha}} \right| = |b| \cdot |e^{i\alpha}| \cdot \frac{|1 - ae^{-i\alpha}|}{|1 - \bar{a}e^{i\alpha}|} = 1.$$

Но $|e^{i\alpha}| = 1$, а $|1 - ae^{-i\alpha}| = |1 - \bar{a}e^{i\alpha}|$ как модули двух взаимно сопряженных чисел, следовательно, находим $|b| = 1$ или $b = e^{i\varphi}$. Итак, искомое отображение будет

$$w = e^{i\varphi} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \quad (1.53)$$

Эта функция, как и функция (1.52), тоже зависит от трех действительных параметров, определить которые можно по заданным условиям нормирования.

1.29. Степенная функция. Рассмотрим сначала функцию $w = z^2$, с которой мы уже встречались выше (см. п^о п^о 1.7, 1.20 и 1.23). Эта функция определена и однозначна в плоскости z , а приняв дополнительно $w = \infty$ при $z = \infty$, сделаем ее определенной и на расширенной плоскости z .

Так как отображение $w = z^2$ однозначно на расширенной плоскости z , то оно будет однолиственным в каждой области, образы двух любых различных точек которой не склеиваются при этом отображении. Из равенства $z_1^2 = z_2^2$ (при условии $z_1 \neq z_2$) вытекает $z_1 = -z_2$, откуда следует, что отображение $w = z^2$ будет однолиственным только в такой области, которая не содержит точек, связанных соотношением $z_1 = -z_2$, т. е. симметричных относительно начала координат. В частности, этому условию удовлетворяет верхняя полуплоскость $\text{Im } z > 0$, которая при отображении $w = z^2$ переходит на полную сферу w с разрезом вдоль положительной части действительной оси от точки $w = 0$ до точки $w = \infty$ (рис. 1.19, 6). Нижняя полуплоскость $\text{Im } z < 0$ снова отображается на расширенную плоскость w с тем же разрезом.

Отображение $w = z^2$ конформно во всех точках расширенной плоскости z , исключая точки $z = 0$ и $z = \infty$. В точке $z = 0$ производная $w' = 2z$ обращается в нуль; углы в этой точке не сохраняются, а удваиваются. В точке же $z = \infty$ производная не имеет конечного значения.

Обратимся теперь к степенной функции $w = z^n$ ($n > 2$). Доопределив ее условием $w = \infty$ при $z = \infty$, будем иметь однозначную функцию на расширенной плоскости z . Производная $w' = nz^{n-1}$ отлична от нуля везде, кроме начала координат $z = 0$. Следовательно, отображение $w = z^n$ будет конформным на расширенной плоскости z , исключая точки $z = 0$ и $z = \infty$. Для того чтобы исследовать поведение функции в точке $z = 0$, введем в плоскостях z и w полярные координаты: $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\psi}$. Функция $w = z^n$ тогда запишется в виде

$$\rho e^{i\psi} = r^n e^{in\varphi},$$

откуда следует два действительных равенства

$$\rho = r^n, \quad \psi = n\varphi.$$

Первое из этих равенств показывает, что при отображении $w = z^n$ окружности плоскости z переходят тоже в окружности плоскости w (так как при $r = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$). Второе же равенство показывает, что при этом отображении аргументы увеличиваются в n раз, в силу чего лежащий в плоскости z

луч $\arg z = \varphi_0$ перейдет в плоскости w в луч $\arg w = n\varphi_0$. Таким образом, в точке $z = 0$ углы не сохраняются, а увеличиваются в n раз, т. е. конформность отображения $w = z^n$ действительно нарушается в точке $z = 0$.

Отображение $w = z^n$ будет однолиственным в любой области, не содержащей двух точек с одинаковыми модулями и с аргументами, отличающимися на величину, кратную $\frac{2\pi}{n}$, ибо образы только таких точек склеиваются при этом отображении. Следовательно, любая область однолистности функции $w = z^n$ не должна содержать никаких двух различных вершин правильного n -угольника с центром в точке $z = 0$. Этому условию удовлетворяет, в частности, сектор $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ с углом раствора $\frac{2\pi}{n}$, который при отображении $w = z^n$ перейдет на всю расширенную плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси от точки $w = 0$ до точки $w = \infty$ (рис. 1.33). Точно так же

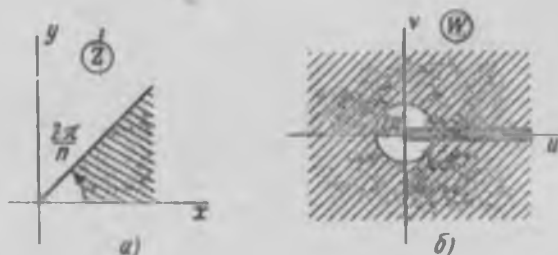


Рис. 1.33

отображение $w = z^n$ будет однолиственным в секторе $\frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{4\pi}{n}$ и в секторе $\frac{4\pi}{n} < \arg z < \frac{6\pi}{n}$ и вообще в любом секторе

$$k \cdot \frac{2\pi}{n} < \arg z < (k+1) \frac{2\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

каждый из которых отображается на расширенную плоскость w с упомянутым разрезом (рис. 1.33, б). Эти секторы (или области однолистности функции $w = z^n$), не налегая друг на друга, заполняют всю расширенную плоскость w (рис. 1.34, где $n = 6$).

Пример. Найти однолистное и конформное отображение сектора $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$ на единичный круг $|w| < 1$ (рис. 1.35, а и в).

Задача будет решена, если мы найдем отображение данного сектора на верхнюю полуплоскость, так как отображение этой последней на единич-

ный круг нам уже известно (п^о 1.28, формула (1.52). Функция $w = z^n$ отобразит сектор $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 1.35, б); отображение же этой полуплоскости на круг $|w| < 1$ будет

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - a}{\bar{z} - \bar{a}} = e^{i\varphi} \frac{z^n - a^n}{\bar{z}^n - \bar{a}^n},$$

где a — точка полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, переходящая в центр $w = 0$ круга. Эта функция при любых φ и a решает нашу задачу. Постоянные φ и a находятся из дополнительных условий нормирования. Потребуем,

например, чтобы точки $z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$ и $z_2 = 0$ исходного сектора отобразились соответственно в точки $w_1 = 0$ и $w_2 = i$ круга (мы задали образы одной внутренней и одной граничной

точки сектора (см. п^о 1.24). Точка $z_1 = e^{i\frac{\pi}{12}}$

переходит в точку $w_1 = z_1^n = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, следовательно, $a = i$, а $w = i$ при $z = 0$, что даст нам

$$i = e^{i\varphi} \frac{0 - i}{0 + i}, \text{ откуда } e^{i\varphi} = -i.$$

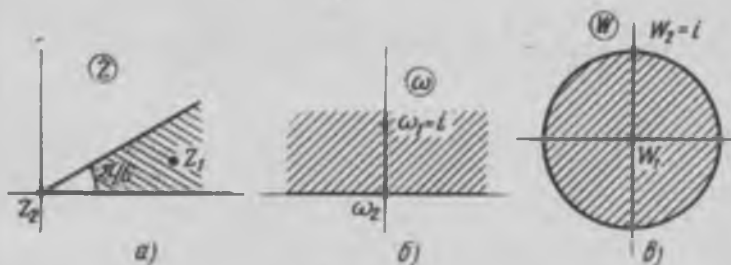


Рис. 1.35

Итак, искомое отображение с учетом заданных условий нормирования будет

$$w = -i \frac{z^n - i}{z^n + i} = - \frac{iz^n + 1}{z^n + i}.$$

1.30. Радикал. Рассмотрим функцию $w = \sqrt[n]{z}$, обратную степенной функции $z = w^n$, причем примем, что $w = \infty$ при $z = \infty$. Во всех точках расширенной плоскости z , кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$ (где эта функция соответственно равна $w = 0$ и $w = \infty$), эта функция n -значна и все ее n различных значений для каждого фиксированного $z = re^{i\varphi}$ ($\neq 0, \infty$) дает формула (1.12):

$$w = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Через w_k обозначим множество всех точек w , соответствующих данному фиксированному значению k . В результате получим n функций w_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), называемых ветвями многозначной функции

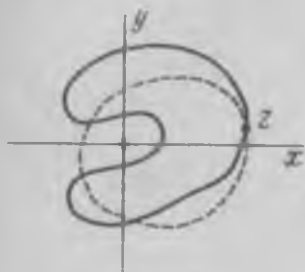


Рис. 1.36

$$w = \sqrt[n]{z}. \text{ Очевидно, } w_{k+1} = w_k e^{i \frac{2\pi}{n}}.$$

Рассмотрим какую-нибудь ветвь w_k радикала $w = \sqrt[n]{z}$ и заставим точку z описать в плоскости какую-нибудь замкнутую кривую l (рис. 1.36). Если эта кривая не содержит внутри себя точку $z = 0$ (сплошная кривая на рисунке), то непрерывно изменяющийся аргумент точки z вернется к прежнему значению с возвращением точки z в исходное положение*. В силу этого и ветвь w_k радикала останется прежней (т. е. мы вернемся к прежнему значению корня в исходной точке). Картина изменится, если кривая l будет содержать внутри себя точку $z = 0$ (пунктирная кривая). В этом случае после полного обхода кривой l аргумент точки z в исходном положении увеличится на $\pm 2\pi$ (в зависимости от того, совершается ли обход кривой против или по часовой стрелки), в силу чего мы от значения w_k корня в исходной точке перейдем либо к значению $w_k e^{i \frac{2\pi}{n}} = w_{k+1}$, либо к значению $w_k e^{-i \frac{2\pi}{n}} = w_{k-1}$. Повторяя обход вокруг начала координат в том или ином направлении достаточное количество раз, мы можем перейти от исходной ветви w_k радикала к любой другой ветви. Очевидно, что после n обходов начала координат в одном направлении мы возвращаемся к исходной ветви радикала.

Точка, обладающая тем свойством, что обход вокруг нее переводит от одной ветви многозначной функции к другой ветви, называется точкой разветвления этой функции. Таким образом, точка $z = 0$ будет точкой разветвления функции $w = \sqrt[n]{z}$. Из сказанного следует, что мы можем выделить n однозначных ветвей w_k функции $w = \sqrt[n]{z}$ только в такой области D , которая не содержит ни одной замкнутой кривой, заключающей внутри себя точку $z = 0$.

* Непрерывно изменяющееся значение аргумента точки z определяется однозначно, если фиксировать кривую l , исходную точку на ней и какое-нибудь значение аргумента в этой точке.

Расширенная плоскость z с любым разрезом от точки $z=0$ до точки $z=\infty$ и, в частности, с разрезом вдоль положительной части действительной оси (рис. 1.37) не содержит ни одной замкнутой кривой, обходящей точку $z=0$. На ней можно выделить n однозначных ветвей w_k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) радикала, принимающих каждая одно из значений $\sqrt[n]{z}$. Эти ветви будут однолистно отображать расширенную плоскость z с разрезом вдоль положительной части действительной оси на секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \arg w < (k+1) \frac{2\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.54)$$

расширенной плоскости w (рис. 1.38, где $n=6$). Эти отображения обратны рассмотренному выше отображению $w=z^n$ и непрерывны (п° 1.10, теорема 2). Для того чтобы фиксировать какую-либо из ветвей w_k радикала, достаточно лишь указать, в каком из секторов (1.54) должно изменяться w .

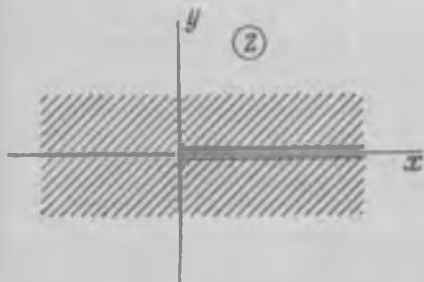


Рис. 1.37

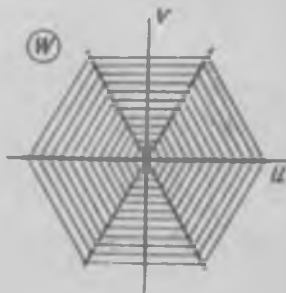


Рис. 1.38

Поскольку каждая ветвь w_k радикала $w = \sqrt[n]{z}$ однолистна на расширенной плоскости z с любым разрезом от точки $z=0$ до точки $z=\infty$, то в каждой точке этой расширенной плоскости применима теорема о производной обратной функции (п° 1.19), в силу которой

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{z^{n-1}}}.$$

Эта производная конечна и отлична от нуля во всех точках расширенной плоскости, исключая точки $z=0$ и $z=\infty$, в силу чего отображение с помощью любой ветви функции $w = \sqrt[n]{z}$ конформно на расширенной плоскости z с любым разрезом от точки $z=0$ до точки $z=\infty$. В точке $z=0$ эти отображения уменьшают углы в n раз.

Пример 1. Найти однолиственное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом по отрезку от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1$ (рис. 1.39, а) на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (устранить разрез).

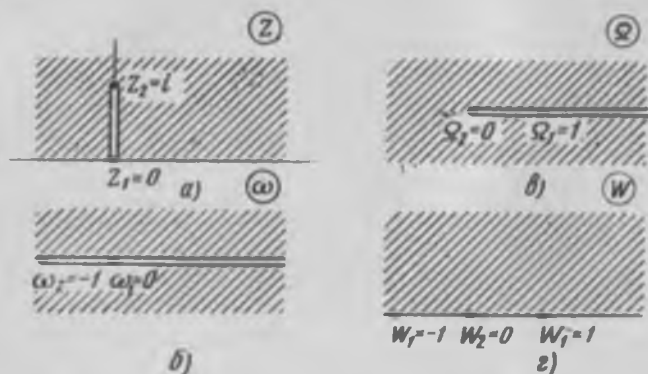


Рис. 1.39

С помощью отображения $\omega = z^2$ удвоим углы в начале координат, в результате чего отрезок $z_1 z_2$ перейдет в отрезок $\omega_1 \omega_2$ расширенной плоскости ω от точки $\omega_1 = z_1^2 = 0$ до точки $\omega_2 = z_2^2 = -1$, а луч $\arg z = \pi$ (отрицательная действительная полуось) — в луч $\arg \omega = 2\pi$. В результате исходная область отобразится на расширенную плоскость ω с разрезом по действительной оси от точки $\omega_1 = -1$ до точки $\omega = \infty$ (рис. 1.39, б). С помощью функции $\Omega = \omega + 1$ сдвинем начало разреза в начало координат и перенесем к расширенной плоскости Ω с разрезом вдоль действительной оси от точки $\Omega_1 = 0$ до точки $\Omega = \infty$ (рис. 1.39, в). В полученной области можно выделить однозначную ветвь функции $w = \sqrt{\Omega}$, уменьшающую вдвое углы в начале координат и отображающую последнюю область на полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (рис. 1.39, г). Итак, рассматриваемую задачу решает функция

$$w = \sqrt{\Omega} = \sqrt{\omega + 1} = \sqrt{z^2 + 1}.$$

1.31. Показательная функция. Рассмотрим отображение

$$w = e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} \quad (1.55)$$

(см. п⁰ п⁰ 1.11 и 1.20), причем дополнительно примем, что $w = \infty$ при $z = \infty$. Так как $w' = e^z \neq 0$ во всей плоскости z , то отображение (1.55) конформно во всей этой плоскости. Функция $w = e^z$ однозначна на плоскости z , в силу чего отображение (1.55) будет однолиственным во всякой области, не содержащей таких двух различных точек z_1 и z_2 , для которых $e^{z_1} = e^{z_2}$. Но при $z_1 \neq z_2$ последнее соотношение возможно лишь в случае, когда z_1 и z_2 отличаются друг от друга на величину, кратную периоду $2\pi i$ показательной функции. Следовательно, областью однолиственности отображения (1.55) будет любая область, не содержащая никакой пары точек, удовлетворяющих соотношению

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i,$$

где k — любое целое число. Этому условию удовлетворяет, в частности, любая горизонтальная полоса плоскости z ширины 2π , например полосы

$$2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.56)$$

(рис. 1.40). Для того чтобы лучше представить себе характер отображения $w = e^z$, введем на плоскости w полярные координаты: $w = \rho e^{i\theta}$; тогда (1.55) примет вид

$$\rho e^{i\theta} = e^x e^{iy},$$

откуда получаем

$$\rho = e^x, \quad \theta = y.$$

Из этих соотношений следует, что при отображении (1.55) прямые $x = \text{const}$, параллельные оси Oy плоскости z , переходят в окружности $\rho = \text{const}$ плоскости w , а прямые $y = \text{const}$, параллельные оси Ox , — в лучи $\theta = \text{const}$ (рис. 1.41). Если x изменяется в промежутке $-\infty < x < +\infty$, а y — в любом промежутке $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$, где k — любое целое число, то ρ будет изменяться

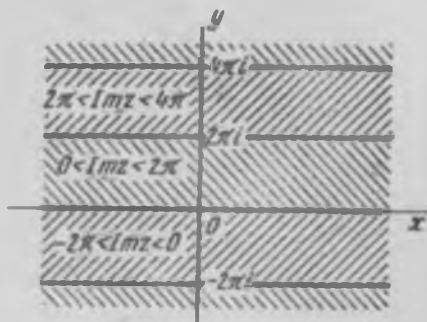


Рис. 1.40

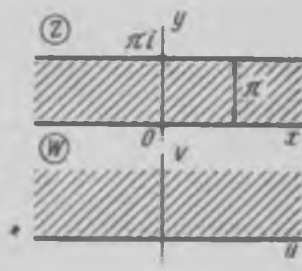
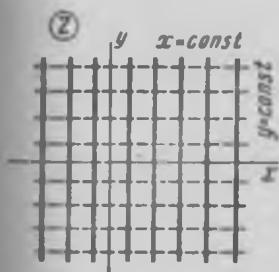


Рис. 1.41

Рис. 1.42

в промежутке $0 < \rho < +\infty$, а θ — в промежутке $2k\pi < \theta < 2(k+1)\pi$. Отсюда следует, что функция $w = e^z$ отобразит каждую из полос (1.56) ширины 2π на всю плоскость w с разрезом вдоль положительной части действительной оси от точки $w = 0$ до точки $w = \infty$. При этом нижняя граница каждой полосы (1.56) перейдет в верхний берег $\arg w = 0$ разреза, а верхняя граница полосы в нижний берег $\arg w = 2\pi$ разреза.

Любую горизонтальную полосу ширины π отображение $w = e^z$ переведет в полуплоскость и, в частности, полосу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ ($-\infty < x < +\infty$; $0 < y < \pi$) — в полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 1.42). Отрицательная половина этой полосы ($-\infty < x < 0$; $0 < y < \pi$) отобразится на единичный полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$ ($0 < \rho < 1$; $0 < \theta < \pi$, рис. 1.43).

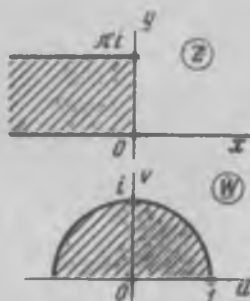


Рис. 1. 43

Пример. Найти однолистное и конформное отображение вертикальной полосы $1 < \operatorname{Re} z < 2$ (рис. 1.44, а) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

С помощью функции $\zeta = z - 1$ совместим левую границу полосы с мнимой

осью (рис. 1.44, б). Функция $\omega = e^{\frac{\pi}{2}\zeta} = e^{\frac{\pi}{2}(z-1)}$ повернет полосу на прямой угол против часовой стрелки (рис. 1.44, в). Отображение $\Omega = \pi\omega$ увеличит ширину полосы $0 < \operatorname{Im} \omega < 1$ в π раз (рис. 1.44, г). Наконец, функция $w = e^{\Omega}$ отобразит полосу $0 < \operatorname{Im} \Omega < \pi$ на верхнюю полуплоскость (рис. 1.44, д). Итак, искомое отображение будет

$$w = e^{\Omega} = e^{\pi\omega} = e^{\pi i \zeta} = e^{\pi i (z-1)}.$$

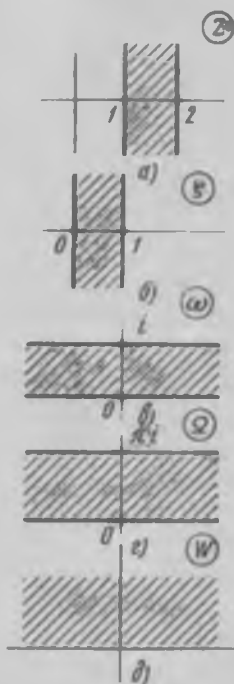


Рис. 1.44

1.32. Логарифмическая функция обратна показательной, бесконечнозначна, причем все ее значения даются формулой (см п° 1.12).

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln r + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i (\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Дополнительно примем, что $w = \infty$ при $z = 0$ и $w = \infty$ при $z = \infty$. Обозначив через w_k множество всех точек w , соответствующих данному фиксированному значению k , получим бесконечное множество функций, которые называются ветвями многозначной функции $w = \operatorname{Ln} z$. При $k = 0$ будем иметь главную ветвь логарифма $w = \ln z$.

Фиксируя какую-нибудь ветвь w_k логарифма, заставим точку плоскости z описать замкнутую кривую, исходной и конечной точками которой будет z . Рассуждая как в п^о 1.30, придем к заключению, что точка $z = 0$ будет точкой разветвления многозначной функции $w = \text{Ln } z$. Совершив достаточное число оборотов около точки $z = 0$ в должном направлении, можно перейти от одной ветви логарифма в фиксированной точке $z (\neq 0, \infty)$ к любой другой ветви. Следовательно, в любой области, не содержащей замкнутых кривых, обходящих точку $z = 0$, можно выделить бесконечное множество однозначных и непрерывных ветвей многозначной функции $w = \text{Ln } z$, значения которых в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемыми $2k\pi i$. Расширенная плоскость z с разрезом вдоль положительной части действительной оси от точки $z = 0$ до точки $z = \infty$ не содержит указанных кривых, в силу чего на ней можно выделить бесконечное множество ветвей логарифмической функции. Каждая такая ветвь будет однолистно отображать расширенную плоскость z с указанным разрезом (рис. 1.37) на соответствующую горизонтальную полосу

$$2k\pi < \text{Im } w < 2(k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ширины 2π (рис. 1.45). В частности, главная ветвь $w = \text{Ln } z$ логарифма однолистно отображает расширенную плоскость z с упомянутым разрезом на полосу $0 < \text{Im } w < 2\pi$, а полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на полосу $0 < \text{Im } w < \pi$ ширины π .

Каждая ветвь логарифма однолистка на расширенной плоскости z с любым разрезом от точки $z = 0$ до точки $z = \infty$, в силу чего в каждой точке этой плоскости применима теорема о производной обратной функции, используя которую находим для любой ветви

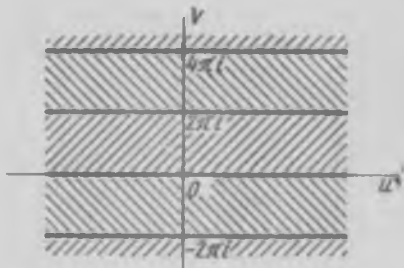


Рис. 1.45

$$(\text{Ln } z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Эта производная конечна и отлична от нуля во всех точках расширенной плоскости z , кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$, в силу чего отображение с помощью любой ветви логарифма будет конформным на расширенной плоскости z , исключая точки $z = 0$ и $z = \infty$.

Пример. Найти однолистное и конформное отображение полосы $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом $-\infty < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}$ (рис. 1.46, а) на полосу $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ (устранить разрез).

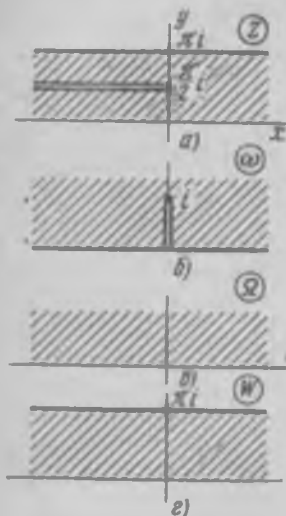


Рис. 1.46

Функция $\omega = e^z$ отобразит исходную полосу ширины π на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$, причем разрез перейдет в разрез $0 < |\omega| < 1$.

Функция $\omega = e^z$ отобразит исходную полосу ширины π на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \omega > 0$, причем разрез перейдет в разрез $0 < |\omega| < 1$.

Функция $\Omega = \sqrt{\omega^2 + 1}$ отображит последнюю область на полуплоскость $\operatorname{Im} \Omega > 0$ (рис. 1.46, б) (см. пример из п° 1.30). Главная ветвь $w = \ln \Omega$ логарифма отображит верхнюю полуплоскость на полосу $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ (рис. 1.46, в). Итак, искомым отображением будет

$$w = \ln \Omega = \ln \sqrt{\omega^2 + 1} = \ln \sqrt{e^{2z} + 1} = \frac{1}{2} \ln (e^{2z} + 1).$$

1.33. Функция Жуковского. Так называют функцию

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1.57)$$

Ее производная $w' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$ конечна

и отлична от нуля во всех точках плоскости z , кроме точек $z = 0, +1, -1$, в силу чего отображение (1.57) конформно в плоскости z , исключая три упомянутые точки.

Установим условие однолистности отображения (1.57). Пусть $z_1 \neq z_2$, но $\frac{1}{2} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) = \frac{1}{2} \left(z_2 + \frac{1}{z_2} \right)$; переписав последнее равенство в виде

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0,$$

найдем из него, что $z_1 z_2 = 1$. Следовательно, отображение (1.57) будет однолистным в любой области, не содержащей никаких двух точек, связанных равенством $z_1 z_2 = 1$. Этому условию удовлетворяют, в частности, круги $|z| < 1$ и $|z| > 1$ (см. п° 1.27).

Для того чтобы лучше представить себе рассматриваемое отображение, положим $z = r e^{i\varphi}$, $w = u + vi$. Подставив это в (1.57) и отделив действительные и мнимые части, получим два действительных равенства

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (1.58)$$

Рассмотрим две упомянутые выше области $|z| < 1$ и $|z| > 1$.

В области $|z| < 1$ возьмем окружность $|z| = r < 1$. Из (1.58) следует, что эта окружность при отображении (1.57) перейдет в эллипс с полуосями

$$a_r = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right)$$

и полуфокусным расстоянием $c_r = \sqrt{a_r^2 - b_r^2} = 1$, не зависящим от радиуса r окружности $|z| = r$. Таким образом, окружности $|z| = r$ ($0 < r < 1$) при отображении (1.57) перейдут в софокусные эллипсы с полуосями a_r и b_r , фокусы которых находятся в точках $(\pm 1, 0)$ (рис. 1.47). Так как $r - \frac{1}{r} < 0$ при

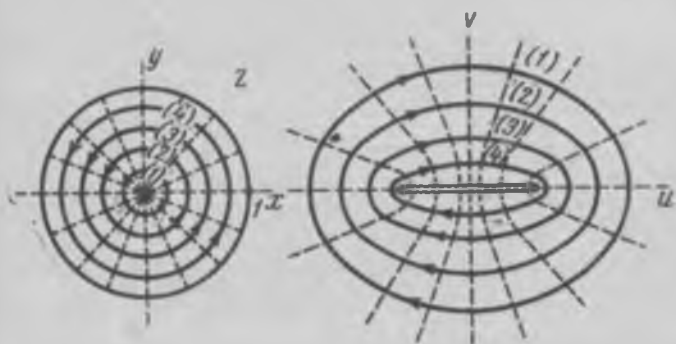


Рис. 1.47

$r < 1$, то из (1.58) следует, что при положительном направлении обхода окружностей $|z| = r$ соответствующие эллипсы обходятся в отрицательном направлении. При $r \rightarrow 0$ будет a_r и $b_r \rightarrow \infty$, причем $a_r - b_r = r \rightarrow 0$. Следовательно, при $r \rightarrow 0$ эллипсы, постепенно округляясь, увеличиваются и заполняют всю плоскость w . При $r \rightarrow 1 - 0$ будет $a_r \rightarrow 1$, $b_r \rightarrow 0$ и эллипсы постепенно вырождаются в разрез вдоль интервала $[-1, 1]$ действительной оси плоскости w .

Исключив r из уравнений (1.58), получим

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1$$

уравнение гиперболы с полуфокусным расстоянием 1. Следовательно, отображение (1.57) переводит радиусы $\arg z = \varphi$ в семейство гипербол с теми же фокусами $(\pm 1, 0)$, что и у семейства эллипсов.

Итак, функция (1.57) однолистно и конформно отображает круг $|z| < 1$ на всю плоскость w с разрезом вдоль действительной оси от точки $w = -1$ до точки $w = 1$. При этом верхняя полуокружность переходит в нижний берег разреза, а нижняя полуокружность — в верхний берег разреза. Верхний единичный полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ функция (1.57) отображает на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$, а нижний полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$ — на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Рассмотрим теперь в области $|z| > 1$ окружности $|z| = r$ ($1 < r < +\infty$). Проведя точно такой же анализ, как и в предыдущем случае, легко доказать, что функция (1.57) отображает эти окружности на те же самые эллипсы, что и в предыдущем случае, но проходимые в положительном направлении. При $r = 1 + 0$ эти эллипсы вырождаются в разрез $[-1, 1]$ действительной оси u , а при $r \rightarrow +\infty$ эллипсы, округляясь, увеличиваются и заполняют всю плоскость w . Таким образом, функция (1.57) однолистно и конформно отображает круг $|z| > 1$ на всю плоскость w с разрезом вдоль действительной оси от точки $w = -1$ до точки $w = 1$. При этом верхний полукруг отображается на верхнюю полуплоскость, а нижний полукруг — на нижнюю полуплоскость.

Обратная к (1.57) функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (1.59)$$

двузначна, что обусловлено двузначностью квадратного корня. Каждую точку z она отображает в две точки w_1 и w_2 , связанные условием $w_1 w_2 = 1$. Легко показать, что точки $z = -1$ и $z = 1$ будут точками разветвления этой функции. Таким образом, в любой области, не содержащей замкнутых кривых, обходящих лишь одну из этих точек, можно выделить две однозначные ветви функции (1.59). Этому условию, в частности, удовлетворяет вся плоскость z с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси. Ветви функции (1.59) однолистно отображают плоскость z с указанным разрезом либо на круг $|w| < 1$, либо на круг $|w| > 1$ и по теореме о производной обратной функции аналитичны.

Пример 1. Найти образ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении (1.57).

Полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ не содержит точек, связанных соотношением $z_1 z_2 = 1$ (точки z_1 и $z_2 = \frac{1}{z_1}$ расположены одна в верхней, а другая в нижней полуплоскости; см. 1.27), в силу чего отображение (1.57) однолистно на верхней полуплоскости. Разобьем полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на два полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ и $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$. Функция (1.57) отображает первый

полукруг на нижнюю полуплоскость $\text{Im } w < 0$, причем диаметр AB (рис. 1.48) перейдет в промежутки $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси; второй же полукруг отобразится на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$, причем промежутки $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси в этом случае отобразятся сами на себя. Таким образом, мы получаем всю плоскость w , промежутки $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси которой будут образами как промежутка $[-1, 1]$ оси Ox , так и образами оставшейся части этой оси. Следовательно, образом верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ при отображении (1.57) будет вся плоская с разрезами по промежуткам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ действительной оси. Аналогично нетрудно убедиться в том, что плоскость w с теми же разрезами служит образом и нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$ при отображении (1.57).

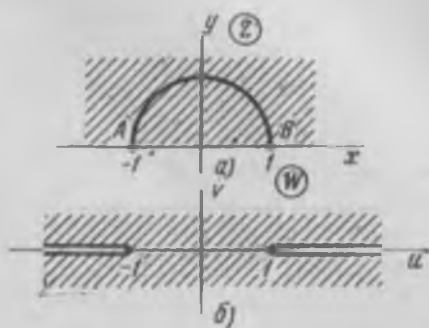


Рис. 1.48

Пример 2. Найти конформное отображение расширенной плоскости z с разрезом вдоль дуги AB окружности, концы которой лежат в точках $\pm a$ действительной оси (внешность дуги AB) на внешность окружности C расширенной плоскости w , проходящей через те же точки (рис. 1.49).

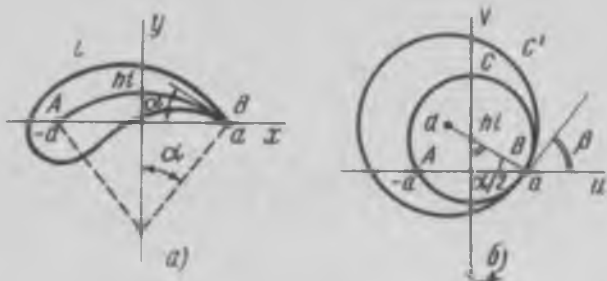


Рис. 1.49

С помощью дробно-линейной функции

$$\omega = \frac{z - a}{z + a} \quad (1.60)$$

отобразим расширенную плоскость z на расширенную плоскость ω , причем дуга AB перейдет при этом в луч от точки $\omega = 0$ до точки $\omega = \infty$; таким образом, функция (1.60) отобразит внешность дуги AB расширенной плоскости z на внешность луча расширенной плоскости ω . Так как $\frac{d\omega}{dz}\bigg|_{z=a} > 0$, то этот луч будет наклонен к отрицательной оси плоскости ω под углом $\alpha = 2 \arctg \frac{a}{a}$. Далее найдем отображение на внешность полученного луча расширенной плоскости ω внешности окружности C расширенной плоскости w . С этой целью снова воспользуемся дробно-линейной функцией.

$$w = \frac{\omega - a}{\omega + a}$$

При этом окружность C перейдет в прямую, которая в силу того, что $\frac{d\Omega}{dw}|_{w=a} > 0$ образует с положительной осью угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{h}{a}$, а внешность круга C — в полуплоскость, ограниченную этой прямой. Отображение

$$\omega = \Omega^2 = \left(\frac{w-a}{w+a} \right)^2 \quad (1.61)$$

переведет эту полуплоскость на внешность луча, образующего с положительной осью угол $2\beta = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{a} = \pi - \alpha$; таким образом, этот луч совпадает с ранее полученным лучом на расширенной плоскости ω . Исключив ω из уравнений (1.60) и (1.61), получим искомое отображение

$$\left(\frac{w-a}{w+a} \right)^2 = \frac{z-a}{z+a}.$$

Из этого уравнения находим

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{a^2}{w} \right), \quad w = z \pm \sqrt{z^2 - a^2}. \quad (1.62)$$

Таким образом, искомое отображение осуществляет функция Жуковского. В настоящем параграфе мы изучили частный случай этой функции при $a=1$. Читатель без труда сообразит, в чем состоит несущественное отличие отображения (1.62) от отображения (1.59). При отображении (1.62) внешность любой окружности C , касающейся окружности C в точке $w=a$, перейдет во внешности некоторого замкнутого контура l расширенной плоскости z , охватывающего дугу AB и имеющего с этой дугой в точке $z=a$ общую касательную (точка $z=a$ является точкой возврата контура l). Контур l напоминает сечение крыла самолета; изменяя значения параметров a , h и d , можно получить различные по форме сечения крыльев, называемые профилями Жуковского. Знаменитый русский ученый Н. Е. Жуковский (1847—1921) первый применил методы теории функций комплексного переменного к задачам гидромеханики и аэродинамики, и, в частности, к задаче об обтекании крыла самолета потоком воздуха, положив тем самым начало науке о теоретических основах авиации.

1.34. Тригонометрические функции (см. п^о п^о 1.13 и 1.20). Рассмотрим функцию

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.63)$$

ее производная $w' = -\sin z$ отлична от нуля и конечна во всех точках плоскости z , кроме точек $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) в силу чего отображение (1.63) конформно в плоскости z , за исключением упомянутых точек. Для того чтобы установить области однолиственности отображения (1.63), представим его как суперпозицию трех уже изученных нами отображений:

- 1) $\omega = iz$;
- 2) $\Omega = e^\omega$;
- 3) $w = \frac{1}{2} \left(\Omega + \frac{1}{\Omega} \right)$.

Пусть область D при этих отображениях последовательно переходит в области Δ_1 , Δ_2 и Δ . Отображение 1) однолистно во всей плоскости z . Для однолистности 2) необходимо и достаточно, чтобы область Δ_1 не содержала никаких двух точек, для которых $\omega_1 - \omega_2 = 2k\pi i$ (п° 1.31), что будет иметь место, если область D не будет содержать точек, связанных соотношением

$$z_1 - z_2 = 2k\pi. \quad (1.64)$$

Для однолистности 3) необходимо и достаточно, чтобы область Δ_2 не содержала точек, для которых $\Omega_1 \Omega_2 = 1$ (см. п° 1.33), или чтобы в Δ_1 не было точек, для которых $e^{\omega_1} e^{\omega_2} = e^{\omega_1 + \omega_2} = 1$, или чтобы в D не было точек, для которых $e^{i(z_1 + z_2)} = 1$, т. е. таких, что

$$z_1 + z_2 = 2k\pi. \quad (1.65)$$

Итак, отображение (1.63) будет однолистным во всякой области, не содержащей никаких двух точек, удовлетворяющих с одной стороны условию (1.64) и с другой — условию (1.65). Нетрудно убедиться в том, что этому условию удовлетворяет, например, любая полоса ширины π , параллельная мнимой оси, и в частности, полосы

$$k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi \\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.66)$$

(рис. 1.50). Рассмотрим полосу $0 < \operatorname{Re} z < \pi$. Функция 1) повернет эту полосу на прямой угол против часовой стрелки и отобразит ее на полосу $0 < \operatorname{Im} \omega < \pi$. Функция 2) отобразит последнюю полосу на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \Omega > 0$ (п° 1.31). Функция 3) отобразит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \Omega > 0$ на всю плоскость w с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вдоль действительной оси (рис. 1.48, б, см. п° 1.33, пример 1). Итак, функция $w = \cos z$ отображает полосу $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ на плоскость w с разрезами $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ вдоль действительной оси. Легко убедиться в том, что плоскость w с теми же разрезами является образом и всех других полос (1.66) при отображении $w = \cos z$.

Так как $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$, то отображение $w = \sin z$ отличается от рассматриваемого лишь дополнительным сдвигом плоскости z на вектор $-\frac{\pi}{2}$. Отображения $w = \operatorname{tg} z$ и $w = \operatorname{ctg} z$ изучаются аналогичными методами.

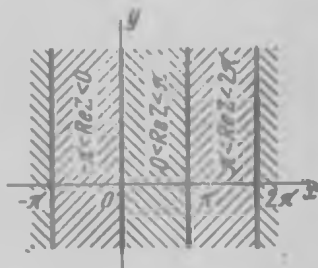


Рис. 1.50

Пример. Найти образ полосы $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$ (рис. 1.51, а) при отображении $w = \operatorname{tg} z$.

Отображение $w = \operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$ (п^о 1.13) представим как суперпозицию четырех отображений:

$$1) \zeta = 2iz; 2) \omega = e^{\zeta}; 3) \Omega = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}; 4) w = \frac{1}{i} \Omega = -i\Omega.$$

Отображение 1) расширит исходную полосу вдвое и повернет ее на прямой угол против часовой стрелки, в результате чего она перей-

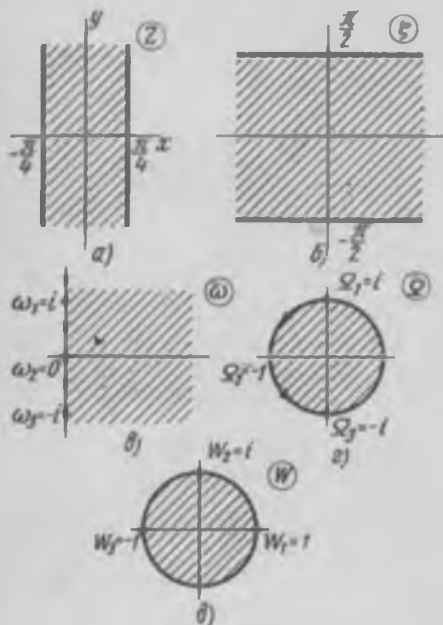


Рис. 1.51

дет в полосу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} \zeta < \frac{\pi}{2}$

(рис. 1.51, б). Функция 2) отобра-

зит эту полосу на правую полу-

плоскость $\operatorname{Re} \omega > 0$ (рис. 1.51, в).

Точки $\omega_1 = i$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = -i$

мнимой оси $\operatorname{Re} \omega = 0$ при дробно-

линейном отображении 3) перей-

дут в точки $\Omega_1 = i$, $\Omega_2 = -1$,

$\Omega_3 = -i$, лежащие на единичной

окружности $|\Omega| = 1$, откуда в си-

лу кругового свойства дробно-

линейного отображения и прин-

ципа соответствия границ (п. 1.24)

заключаем, что функция 3) ото-

бражает полуплоскость $\operatorname{Re} \omega > 0$

на единичный круг $|\Omega| < 1$

(рис. 1.51, г). Отображение 4) лишь

повернет круг $|\Omega| < 1$ около

начала координат на прямой угол

по часовой стрелке (рис. 1.51, д).

Итак, при отображении $w = \operatorname{tg} z$

полоса $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$ пере-

ходит в единичный круг $|w| < 1$.

Обратные тригономет-

рические функции много-

значны (п^о 1.14). Способы выделения их однозначных анали-

тических ветвей не отличаются от способов, рассмотренных

выше в настоящем параграфе.

1.35. Аналитические продолжения. Принцип симметрии. В настоящем пункте мы отметим некоторые важные свойства аналитических функций. Доказательства излагаемых теорем выходят за рамки настоящей книги.

Пусть функция $f_1(z)$ аналитична в области D_1 . Положим, что мы построили новую область D_2 , имеющую с D_1 общую часть D_{12} (рис. 1.52), и определили в D_2 аналитическую функцию $f_2(z)$, значения которой в области D_{12} совпадают со значениями $f_1(z)$. Функция $f_2(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ из области D_1 в область D_2 через D_{12} (или $f_1(z)$ называется аналитическим продолжением $f_2(z)$ из D_2 в D_1 через D_{12}). Доказывается, что если существует такое аналитическое

продолжение, то оно является единственным, т. е. не может существовать двух различных аналитических продолжений функции $f_1(z)$ из D_1 в D_2 через D_{12} . В предельном случае новая область D_2 может не налегать на D_1 , а лишь соприкасаться с ней по некоторой дуге C . В силу полной однозначности определенности каждой из функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ через другую нет, вообще говоря, никаких оснований рассматривать эти функции, как различные; их можно рассматривать как элементы одной и той же функции

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{в } D_1, \\ f_2(z) & \text{в } D_2. \end{cases}$$

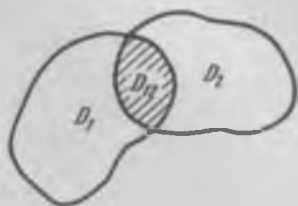


Рис. 1.52

аналитической в области D , составленной из областей D_1 и D_2 : $D = D_1 + D_2$.

Итак, если две функции, аналитические в некоторой области, равны между собой в части этой области (или на кривой, лежащей в этой области), то они равны и во всей рассматриваемой области. Таким образом, функция, аналитическая в некоторой области, полностью определяется своими значениями на любой части этой области или на любой кривой, принадлежащей этой области (теорема единственности). В частном случае, когда дуга C , по которой соприкасаются друг с другом D_1 и D_2 , есть дуга окружности (или отрезок прямой), имеет место следующая теорема, называемая принципом симметрии:

Пусть граница области D_1 содержит дугу окружности C и пусть функция $w = f_1(z)$ конформно отображает D_1 на область Δ_1 так, что C переходит в участок γ границы Δ_1 , который также является дугой окружности (рис. 1.53). Тогда функцию $w = f_1(z)$ можно аналитически продолжить в область D_2 , симметричную с D_1 относительно C (п. 1.26). Аналитическое продолжение $w = f_2(z)$ конформно отображает D_2 на область Δ_2 , симметричную с Δ_1 относительно γ , а функция

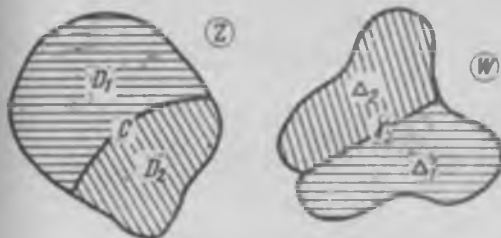


Рис. 1.53

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{в } D_1, \\ f_2(z) & \text{в } D_2. \end{cases}$$

конформно отображает область $D_1 + C + D_2$ на область $\Delta_1 + \gamma + \Delta_2$ (причем однолистно, при условии, что области D_1 и D_2 , а также Δ_1 и Δ_2 не пересекаются).

Принцип симметрии оказывается полезным во многих случаях в практике построения конформных отображений.

Пример. Найти конформное отображение расширенной плоскости z с Т-образным разрезом (внешность буквы Т на рис. 1.54, а) на верхнюю полуплоскость.

Проведем вспомогательный разрез z_3, z_4, z_5 (от точки $z_5 = 0$ по мнимой оси, причем в точку $z_4 = \infty$ в точку $z_1 = -2i$) и рассмотрим правую половину исходной области, т. е. правую полуплоскость z с разрезом $[0,1]$ вдоль

действительной оси (рис. 1.54, б). Отобразим эту область на полуплоскость, что осуществляет следующая суперпозиция отображений

$$\zeta = z^2, \omega = \zeta - 1, \Omega = \sqrt{\omega} = \sqrt{z^2 - 1}$$

(рис. 1.54, в, г, д). При этом правая половина z_1, z_2, z_3 буквы „Т“ перейдет в отрезок $\Omega_4\Omega_1\Omega_2$ минимой оси расширенной плоскости Ω . Прямолинейный

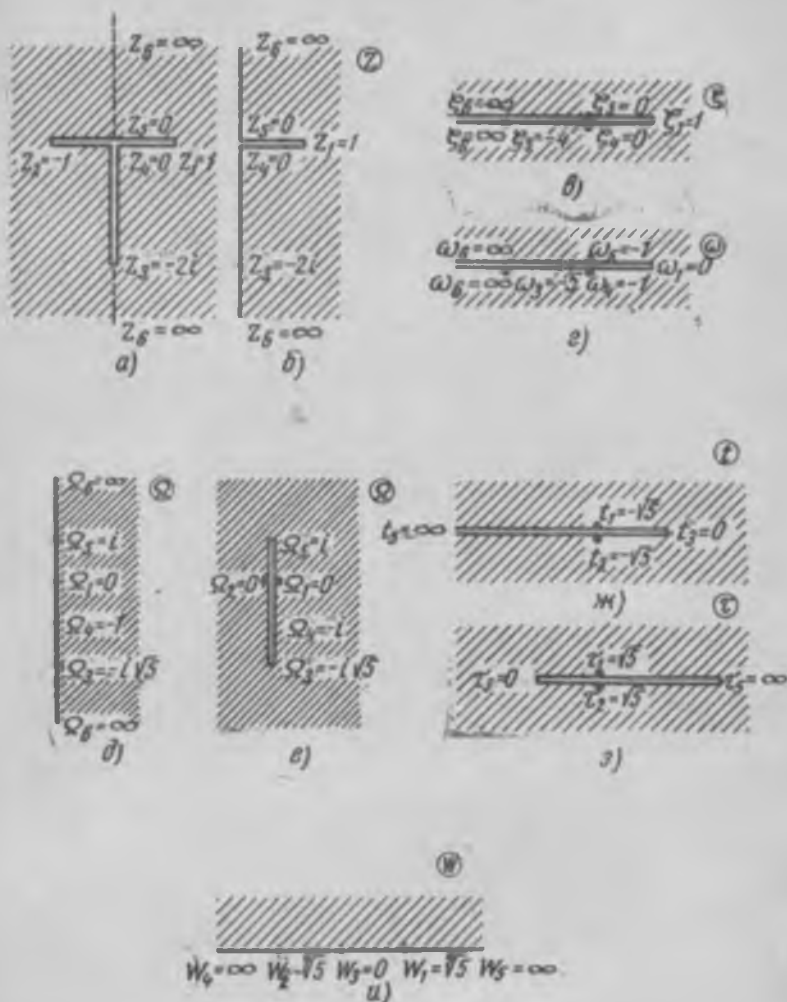


Рис. 1.54

участок z_1, z_2, z_3 границы переходит в прямолинейный же отрезок $\Omega_4\Omega_1\Omega_2$. Поэтому к функции $\Omega = \sqrt{z^2 - 1}$ применим принцип симметрии, согласно которому аналитическое продолжение функции $\Omega = \sqrt{z^2 - 1}$ через отрезок z_1, z_2, z_3 отображает левую полуплоскость z с разрезом $[-1, 0]$ вдоль действительной оси на левую полуплоскость Ω ; при этом точки левой половины буквы „Т“ перейдут в точки отрезка $\Omega_3\Omega_1\Omega_4\Omega_2$. Таким образом,

функция $\Omega = \sqrt{z^2 - 1}$ вместе с ее аналитическим продолжением (которое будем обозначать так же, как и исходную функцию) отображает внешность буквы „Т“ на расширенную плоскость Ω с разрезом $[-\sqrt{5}i, i]$ вдоль мнимой оси (рис. 1.54, е). Остается отобразить эту последнюю область на верхнюю

полуплоскость. Отображение $t = \frac{\Omega + \sqrt{5}i}{\Omega - i}$ переводит внешность отрезка $[-\sqrt{5}i, i]$ расширенной плоскости Ω в расширенную плоскость t с разрезом вдоль отрицательной части мнимой оси (рис. 1.54, ж). Функция $\tau = -t$ отобразит ее на расширенную плоскость τ с разрезом вдоль положительной части действительной оси (рис. 1.54, з) и, наконец, функция $w = \sqrt{\tau}$ переводит эту последнюю область в полуплоскость $\text{Im } w > 0$ (рис. 1.54, и). Итак, задачу решает функция

$$w = \sqrt{\tau} = \sqrt{-t} = \sqrt{\frac{\Omega + i\sqrt{5}}{i - \Omega}} = i \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 - 1} + i\sqrt{5}}{i - \sqrt{z^2 - 1}}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти линейное отображение с неподвижной точкой $1 + 2i$ (эта точка отображается сама на себя), переводящее точку i в точку $-i$.
2. Найти функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках $0, 1, i$ на подобный ему треугольник с вершинами, $0, 2, 1 + i$.

3. Найти отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < R$ такое, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий с действительной осью угол α .

4. Найти точки, симметричные с точкой $2 + i$ относительно окружностей: а) $|z| = 1$; б) $|z - i| = 3$.

5. Найти образы данных областей при заданном дробно-линейном отображении: а) Квадрант $\text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0$; $w = \frac{z - i}{z + i}$. б) Полукруг $|z| < 1, \text{Im } z > 0$; $w = \frac{2z - 1}{iz}$.

в) Угол $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$; $w = \frac{z}{z - 1}$. г) Полоса $0 < \text{Re } z < 1$; $w = \frac{z - 1}{z}$.

6. Найти дробно-линейную функцию, переводящую: а) точки $-1, i, 1 + i$ соответственно в точки $0, 2i, 1 - i$; б) точки $-1, \infty, i$ в точки $\infty, i, 1$.

7. Найти общий вид дробно-линейной функции, отображающей: а) верхнюю полуплоскость на себя; б) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость; в) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

8. Найти отображение на верхнюю полуплоскость следующих областей: а) полукруга $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ при условиях $w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = \infty$; б) сектора $|z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$; в) круговой луночки $|z| < 1, |z - i| > 1$.

9. Найти отображения на верхнюю полуплоскость следующих областей: а) круговой луночки $|z| < 1, |z - i| < 1$; б) внешности единичного верхнего полукруга; в) плоскости с разрезом по интервалу $[-1, 1]$; г) круга $|z| < 1$ с разрезом $[0, 1]$ по радиусу.

10. Найти образы следующих множеств точек при отображении $w = e^z$: а) прямоугольной сетки $x = C, y = C$; б) прямых $y = kx + b$; в) полосы $\alpha < \text{Im } z < \beta$ ($0 < \alpha < \beta < 2\pi$); г) полуполосы $\text{Re } z < 0, 0 < \text{Im } z < \alpha < 2\pi$; д) прямоугольника $0 < \text{Re } z < 1, 0 < \text{Im } z < 2\pi$.

11. Найти отображение на верхнюю полуплоскость следующих областей: а) полосы, ограниченной прямыми $y = x, y = x + h$; б) круговой луночки,

ограниченной окружностями $|z| = 2$, $|z - 1| = 1$; в) плоскости с выкинутыми областями $|z| < 2$, $|z - 3| < 1$.

12. Найти образы следующих областей при отображении Жуковского:
а) круга $|z| < R < 1$; б) круга $|z| > R > 1$; в) полукольца $\operatorname{Im} z > 0$, $1 < |z| < R$; г) угла $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$.

13. Найти отображение на верхнюю полуплоскость следующих областей:

а) круга $|z| < 1$ с разрезом по интервалу $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$; б) круга $|z| < 1$ с разрезами по интервалам $[-1, 0]$ и $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

14. Найти образы следующих областей при отображении $w = \cos z$:

а) полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z < 0$; б) полуполосы $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0$; в) прямоугольника $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $-h < \operatorname{Im} z < h$ ($h > 0$).

15. Найти отображение на верхнюю полуплоскость следующих областей:

а) полосы $0 < \operatorname{Re} z < 1$ с разрезом $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ вдоль действительной оси;

б) полуполосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом вдоль отрезка $x = \frac{\pi}{2}$, $y < 1$.

16. Найти образ данной области при заданном отображении $w = f(z)$:

а) полосы $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $w = \operatorname{ch} z$; б) полуполосы $\operatorname{Re} z > 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $w = \operatorname{ch} z$; в) полосы $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $w = \operatorname{tg} z$; г) полосы $0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$, $w = \operatorname{tg} z$.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.36. Интеграл от функции комплексного переменного. Пусть в области D плоскости $z = x + iy$ задана непрерывная функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

и пусть l — кусочно-гладкая линия (и⁰ 1.6) с началом в точке z_0

и концом в точке Z , лежащая в области D . Задание начала и конца линии l ориентирует эту линию, т. е. устанавливает на ней положительное направление. Линия l может быть как незамкнутой, так и замкнутой (в последнем случае $Z = z_0$). Любым образом разобьем линию l на n «элементарных» дуг в направлении от z_0 к Z точками

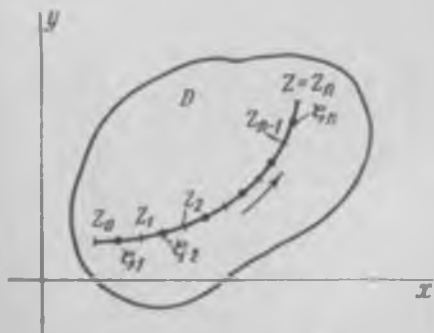


Рис. 1.55

$z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ ($z_k = x_k + iy_k$), причем примем $Z = z_n$ (рис. 1.55). Обозначим

$$z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i \Delta y_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$. (Δz_k — вектор, идущий из точки z_{k-1} в точку z_k , а $|\Delta z_k|$ — длина этого вектора, т. е. длина хорды, стягивающей k -ую элементарную дугу). В произвольном месте каждой элементарной дуги (z_{k-1}, z_k) возьмем соответственно по точке $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ и составим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - \\ &\quad - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &\quad + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Через $\max |\Delta z_k|$ обозначим наибольшую из величин $|\Delta z_k|$. В курсах анализа доказывается, что при условии $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ (в этом случае $n \rightarrow \infty$) обе суммы в правой части (1.67) для непрерывных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (непрерывность этих функций следует из непрерывности $f(z)$, см. п° 1.10) и кусочно-гладкой l стремятся к конечным пределам, не зависящим ни от способа разбиения l на элементарные дуги, ни от выбора точек ζ_k . Эти пределы являются соответственно криволинейными интегралами

$$\int u(x, y) dx - v(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Следовательно (п° 1.9), при $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ и сумма в левой части (1.67) тоже стремится к конечному пределу, не зависящему ни от выбора точек z_k , ни от выбора точек ζ_k . Предел этот называется контурным интегралом от функции $f(z)$ вдоль линии l и обозначается символом

$$\begin{aligned} \int_l f(z) dz &= \lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \int_l u dx - v dy + \\ &\quad + i \int_l v dx + u dy. \end{aligned} \quad (1.68)$$

В частном случае, когда $f(z) \equiv 1$, сумма (1.67) будет равна

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Delta z_k &= \Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_n = \\ &= (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int dz = Z - z_0. \quad (1.69)$$

Из формулы (1.68) следует, что контурные интегралы обладают следующими обычными свойствами криволинейных интегралов:

- 1) $\int [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int f_1(z) dz + \int f_2(z) dz$;
- 2) $\int af(z) dz = a \int f(z) dz$, где a — комплексная постоянная;
- 3) $\int_l f(z) dz = - \int_{l'} f(z) dz$, где l' — линия совпадающая с l , но проходимая в противоположном направлении;
- 4) $\int_{l_1+l_2} f(z) dz = \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz$, где через $l_1 + l_2$ обозначена линия, составленная из линий l_1 и l_2 .

Докажем еще одно свойство контурного интеграла, так называемую теорему об оценке:

$$5) \left| \int_l f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| |dz| \leq M\lambda, \quad (1.70)$$

где M — наибольшее значение модуля $f(z)$ на l , а λ — длина l . Действительно,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(z_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|,$$

где $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$ — длина ломаной $z_0 z_1 \dots z_n$, вписанной в кривую l ; в пределе при условии $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ последнее неравенство и переходит в (1.70).

1.37. Вычисление контурных интегралов. Контурные интегралы можно вычислять сводя их с помощью формулы (1.68) к двум действительным криволинейным интегралам. Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (1.71)$$

будут параметрические уравнения линии l , а началу и концу этой линии соответствуют значения параметра $t = t_0$ и $t = T$. Пользуясь уравнениями (1.71), сводим криволинейные интегралы, входящие в (1.68), к определенным интегралам:

$$\begin{aligned} \int_l f(z) dz &= \int_{t_0}^T \{ u[x(t), y(t)] x'(t) - v[x(t), y(t)] y'(t) \} dt + \\ &+ i \int_{t_0}^T \{ v[x(t), y(t)] x'(t) + u[x(t), y(t)] y'(t) \} dt = \\ &= \int_{t_0}^T \{ u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)] \} [x'(t) + iy'(t)] dt. \end{aligned}$$

Если вместо двух действительных параметрических уравнений линии l ввести одно эквивалентное им комплексно-параметрическое уравнение этой линии

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

(см. упражнения 1 и 2 к § 1), то последний результат можно переписать так

$$\int_l f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt. \quad (1.72)$$

Эта формула удобна для вычисления контурных интегралов.

Пример. Вычислить $\int_l |z| dz$, где l — прямолинейный отрезок, направленный из точки 0 в точку $2 + i$.

Параметрические уравнения отрезка прямой, соединяющей точки 0 и $2 + i$, будут $x = 2t$, $y = t$, а в комплексной форме $z = x + iy = (2 + i)t$, где параметр t изменяется от 0 до 1. Пользуясь формулой (1.72), находим

$$\begin{aligned} \int_l |z| dz &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^2} (2 + i) dt = \sqrt{5} (2 + i) \int_0^1 t dt = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5} (2 + i). \end{aligned}$$

1.38. Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области D^* , то интеграл от этой функции по контуру l , ограничивающему область D , равен нулю**

$$\oint_l f(z) dz = 0. \quad (1.73)$$

Показательство теоремы проведем в дополнительном предположении о непрерывности производной $f'(z)$ в D , входящем в определение аналитической функции (п° 1.20), что значительно упростит рассуждения (теорему можно доказать и без этого предположения). В силу (1.69) доказательство формулы (1.73) сводится к доказательству равенства нулю двух действительных криволинейных интегралов

$$\oint_l u dx - v dy \text{ и } \oint_l v dx + u dy. \quad (1.74)$$

* Функция называется аналитической в замкнутой области D , если она аналитична в некоторой области, содержащей внутри себя область D и ее границу l .

** Кружок в интеграле (1.73) означает замкнутость кривой l .

Из курса математического анализа известно, что для равенства нулю криволинейного интеграла

$$\oint P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

взятого по любому замкнутому контуру l , ограничивающему односвязную область, достаточно выполнения условия $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$ при непрерывности производных, в него входящих. Для интегралов (1.74) это условие сводится к условиям Коши—Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

(п° 1.19) выполненным в силу аналитичности $f(z)$; непрерывность же частных производных функций u и v сразу же вытекает из непрерывности $f'(z)$ (см. формулы 1.40, 1.41 и п° 1.10). Итак, каждый из двух интегралов (1.74) равен нулю и теорема Коши доказана.



Рис. 1.56

Распространим теперь теорему Коши на случай многосвязной области. Для определенности рассмотрим трехсвязную область D (рис. 1.56), граница которой состоит из внешнего контура l и двух внутренних контуров l_1 и l_2 , и будем предполагать, что функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$. Проведем два разреза γ_1 и γ_2 ; обозначим через Γ сложенный замкнутый контур, состоящий из контуров l, l_1, l_2 , и разрез γ_1 и γ_2 (причем у каждого из этих разрезов следует различать два берега). Область, ограниченная контуром Γ , будет односвязной, и в силу теоремы Коши для односвязной области будем иметь

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

причем контур Γ будем обходить в таком направлении, при котором область остается слева (положительное направление обхода). При этом обходе каждый из разрезов γ_1 и γ_2 будет проходиться дважды в противоположных направлениях (один раз по одному берегу, а другой — по противоположному),

в силу чего интегралы по каждому из разрезов взаимно уничтожаются (п^о 1,36, свойство 3) и мы получим

$$\oint_{l_1} f(z) dz + \oint_{l_2} f(z) dz + \oint_{l_3} f(z) dz = 0.$$

Здесь внешний контур l обходится против, а внутренние — по часовой стрелке. Получаем следующую формулировку теоремы Коши для многосвязной области: *если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной области $\bar{D}$, то интеграл от этой функции по границе области D , проходимой в положительном направлении, равен нулю.*

Изменив направление обхода внутренних контуров l_1 и l_2 , будем иметь

$$\oint_l f(z) dz = \oint_{l_1} f(z) dz + \oint_{l_2} f(z) dz, \quad (1.75)$$

где все контуры, как внутренние, так и внешние, обходятся против часовой стрелки. Очевидно, формула (1.75) сохранит свою силу и в случае, если все контуры будут обходиться по часовой стрелке.

Приходим к другой формулировке теоремы Коши для многосвязной области: *если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной области $\bar{D}$, то интеграл от этой функции по внешнему контуру, ограничивающему область D , равен сумме интегралов по всем внутренним контурам, ограничивающим D (при этом все контуры, как внешний, так и внутренний, обходят либо по часовой стрелке, либо против).*

В частности, если $f(z)$ аналитична в кольце между двумя замкнутыми контурами l_1 и l_2 (рис. 1.57) и на самих этих контурах, то



Рис. 1.57.

$$\oint_{l_1} f(z) dz = \oint_{l_2} f(z) dz. \quad (1.76)$$

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \oint \frac{dz}{(z-a)^n}$$

по замкнутому контуру l , где n — целое число. Если $n \leq 0$, то подынтегральная функция $\frac{1}{(z-a)^n} = (z-a)^m$ ($m = -n \geq 0$) аналитична во всей плоскости z и в силу теоремы Коши $I = 0$.

Очевидно, по той же причине $I = 0$ и в случае, когда $n > 0$, но точка a лежит вне области D , ограниченной контуром l . Пусть теперь $n > 0$, причем точка a принадлежит упомянутой области. Проведем какую-нибудь окружность C радиуса R , не пересекающую контур l . Уравнение этой окружности в комплексной форме будет $z - a = Re^{it}$. Функция $\frac{1}{(z-a)^n}$ ($n > 0$) аналитична в кольце между C и l , а потому в силу формул (1.76) и (1.72) обходя C и l однократно в положительном направлении, будем иметь

$$I = \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it} dt}{R^n e^{int}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt.$$

Отсюда при $n = 1$ получаем $I = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$; если же $n > 1$ ($n = 2, 3, \dots$), то

$$I = \frac{i}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)t} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

так как $e^{2\pi i(1-n)} = e^{2\pi i} = 1$. Итак, если контур l однократно обходит точку a в положительном направлении, то при любом целом n

$$\oint_l \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 1, \\ 2\pi i & \text{при } n = 1. \end{cases} \quad (1.77)$$

1.39. Независимость контурного интеграла от пути интегрирования. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D . Выберем в этой области произвольный замкнутый контур l . Разобьем контур l на два контура l_1 и l_2 с общими началом и концом (рис. 1.58). В силу теоремы Коши и свойств контурных интегралов будем иметь



Рис. 1.58

откуда

$$\begin{aligned} \oint_l f(z) dz &= \int_{l_1} f(z) dz + \int_{l_2} f(z) dz = \\ &= \int_{l_1} f(z) dz - \int_{l_1} f(z) dz = 0, \end{aligned}$$

$$\int_{l_1} f(z) dz = \int_{l_2} f(z) dz.$$

Таким образом, из теоремы Коши следует, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области D , то для

любой дуги l (незамкнутой), принадлежащей D , интеграл от $f(z)$ по l зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки z дуги l (но не от l). По этой причине для этого интеграла пользуются обозначением

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

где во избежание путаницы переменная интегрирования обозначена буквой ζ (вместо z).

Если зафиксировать точку z_0 , а точку z изменять в области D , то последний интеграл будет функцией от z ; обозначим эту функцию $F(z)$ и докажем следующую теорему.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то и функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

тоже аналитична в D , причем $F'(z) = f(z)$.

Доказательство. $F(z)$ — однозначная функция; действительно, как мы видели, рассмотренный интеграл не зависит от пути интегрирования и при фиксированном z_0 имеет всегда одно и то же значение при данном z . Остается показать, что $F'(z)$ существует и равна $f(z)$. По определению производной и свойствам контурных интегралов имеем

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right\} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Функция $f(z)$ непрерывна в точке z (что следует из ее аналитичности), в силу чего будет $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta)$, где $\alpha(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow z$. Поэтому

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} \alpha(\zeta) d\zeta. \quad (1.78)$$

Так как $f(z)$ — постоянная величина, то на основании формулы (1.69) получаем

$$\int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta = f(z) \int_z^{z + \Delta z} d\zeta = f(z) \Delta z.$$

Ввиду независимости рассматриваемого интеграла от пути будем считать путь интегрирования от точки z до точки $z + \Delta z$ прямолинейным, тогда длина этого пути будет $|\Delta z|$. Применяя теорему (1.70) об оценке интеграла, будем иметь

$$\left| \int_z^{z+\Delta z} \alpha(\tau) d\tau \right| \leq \max |\alpha(\tau)| \cdot |\Delta z|.$$

Отсюда следует, что первый предел в (1.78) равен $f(z)$, а второй — нулю. Итак, $F'(z) = f(z)$ и теорема доказана.

1.40. Неопределенный интеграл. Функция $F(z)$ называется первообразной для функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$. Очевидно, что если $F_1(z)$ будет первообразной для $f(z)$, то и $F_1(z) + C$, где C — постоянная, будет тоже первообразной для $f(z)$. Обратно, любые две различные первообразные $F_1(z)$ и $F_2(z)$ для одной и той же функции $f(z)$ отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Действительно, обозначив

$$g(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

будем в силу формул (1.40) и (1.41) иметь

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= F'_1(z) - F'_2(z) = f(z) - f(z) \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

следовательно, $u(x, y)$ и $v(x, y)$ постоянны. Но тогда и функция $g(z) = F_1(z) - F_2(z)$ тоже постоянна, что равносильно высказанному утверждению.

Из сказанного выше следует, что если $F(z)$ есть некоторая первообразная для $f(z)$, то функция $F(z) + C$, где C — произвольная постоянная, является множеством всех первообразных для $f(z)$. Это множество называется неопределенным интегралом от функции $f(z)$ и обозначается символом

$$\int f(z) dz = F(z) + C,$$

где $F'(z) = f(z)$.

Техника разыскания неопределенных интегралов в комплексном анализе в основном та же, что и в действительном; таблица основных интегралов в обоих случаях одинакова

(поскольку одинакова таблица производных). Так, например, имеют место формулы:

$$1) \int e^z dz = e^z + C;$$

$$2) \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1, \text{ целое});$$

$$3) \int \frac{dz}{z} = \ln z + C;$$

$$4) \int \sin z dz = -\cos z + C \text{ и т. д.,}$$

справедливость которых следует соответственно из соотношений:

$$(e^z)' = e^z, \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right)' = z^n, (\ln z)' = \frac{1}{z}, (-\cos z)' = \sin z \text{ и т. д.}$$

Первообразная является аналитической функцией, что налагает определенные условия на области, в которых справедливы написанные равенства. Так, если первая и последняя формулы справедливы во всей плоскости z и тоже самое вторая формула при $n \geq 0$, то вторая формула при $n < 0$ справедлива в любой области, не содержащей точку $z = 0$, третья же формула справедлива в любой области, не содержащей какого-нибудь луча, выходящего из точки $z = 0$ (п° 1.32). Вместо $\ln z$ в третьей формуле можно брать любую ветвь логарифма, так как эти ветви отличаются друг от друга на постоянные слагаемые.

1.41. Формула Ньютона — Лейбница. Пусть $F(z)$ будет какая-нибудь первообразная для аналитической в некоторой односвязной области функции $f(z)$. Согласно теореме из п° 1.39, функция $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ тоже является первообразной для $f(z)$. Но тогда в силу предыдущего пункта

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) + C.$$

При $z = z_0$ контур, по которому вычисляется интеграл в левой части замкнется и этот интеграл в силу теоремы Коши обратится в нуль. Таким образом, при $z = z_0$ предыдущее равенство примет вид $0 = F(z_0) + C$, откуда $C = -F(z_0)$. Следовательно,

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0), \quad (1.79)$$

т. е. контурный интеграл от аналитической функции в односвязной области равен прира-

шению первообразной этой функции на пути интегрирования. Формула (1.79) называется формулой Ньютона — Лейбница.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{1+i} z^2 dz$.

Поскольку функция z^2 аналитична во всей плоскости z , то, применяя формулу (1.79), находим

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3} (1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^i ze^z dz$.

Функция ze^z аналитична во всей плоскости z . Пронтегрировав $\int ze^z dz$ по частям, получим с помощью формулы (1.79):

$$\begin{aligned} \int_0^i ze^z dz &= (ze^z - e^z) \Big|_0^i = (1 - \cos 1 - \sin 1) + \\ &+ i(\cos 1 - \sin 1) \approx -0,381 - 0,301 i. \end{aligned}$$

1.42. Формула Коши. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$ (односвязной или многосвязной) и l — граница области D . Оказывается, что тогда значения функции $f(z)$ в любой точке z области D можно вычислить, зная только значения $f(z)$ на границе l этой области по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad (1.80)$$

где граница l обходится в положительном направлении (т. е. так, что область D остается все время слева).

Интеграл в правой части (1.80) называется интегралом Коши для функции $f(z)$, а сама эта формула носит название интегральной формулы Коши.

Для вычисления интеграла Коши нужно знать только значения $f(\tau)$ функции $f(z)$ на границе l , откуда и следует, что аналитическая в замкнутой области $\bar{D}$ функция полностью определяется своими значениями на границе области D .

Для вывода формулы (1.80) исключим из области D кружок, ограниченный окружностью C радиуса r с центром в точке z , взяв r настолько малым, чтобы C не пересекала l . Получим область D^* , порядок связности которой на одну единицу выше, чем у области D . Числитель и знаменатель

подынтегральной функции интеграла Коши аналитичны относительно ζ в D^* , причем знаменатель не обращается в нуль; следовательно, подынтегральная функция аналитична в замкнутой области $\bar{D}^*$, в силу чего по теореме Коши для многосвязной области (п⁰ 1.38) будем иметь

$$\int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1.81)$$

где l — обходится в положительном направлении, а C — против часовой стрелки. Используя пример из п⁰ 1.38, будем иметь

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z). \quad (1.82)$$

Оценим теперь разность

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

[мы воспользовались равенствами (1.81) и (1.82)]. Так как на окружности C имеем $|\zeta - z| = r$, а r можно взять настолько малым, чтобы $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$, где ϵ — любое число (последнее следует из непрерывности $f(z)$ в точке z), то, применяя теорему (1.70) об оценке интеграла, будем иметь

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \\ < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon}{r} \cdot 2\pi r = \epsilon.$$

Так как ϵ может быть выбрано сколь угодно малым, а левая часть последнего неравенства не зависит от ϵ , то она равна нулю, откуда и вытекает (1.80).

С помощью формулы Коши можно вычислять некоторые контурные интегральные по замкнутым контурам.

Пример 1. Вычислить $\int_C \frac{e^z dz}{z(z-3)}$, где C — окружность радиуса $\frac{3}{2}$

с центром в точке 2.

Функция $f(z) = \frac{e^z}{z}$ аналитична в круге, ограниченном C , поэтому, применяя формулу Коши (1.80), находим

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-3)} = \int_C \frac{f(z) dz}{z-3} = 2\pi i f(3) = 2\pi i \frac{e^3}{3} = \frac{2}{3} \pi e^3 i.$$

Пример 2. Вычислить $\int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$, где C — окружность радиуса 1 с центром в точке l .

Функция $f(z) = \frac{1}{z + l}$ аналитична в круге, ограниченном C , поэтому в силу (1.80) имеем

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_C \frac{dz}{(z + l)(z - l)} = \int_C \frac{f(z) dz}{z - l} = 2\pi i f(l) = 2\pi i \frac{1}{l + l} = \pi.$$

1.43. Производные высших порядков от аналитической функции. Применим формулу Коши для доказательства важнейшего факта, выражаемого следующей теоремой.

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\bar{D}$, то в каждой точке области D она дифференцируема сколько угодно раз, причем n -ая производная представляется формулой

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad (1.83)$$

где l — граница области D обходится в положительном направлении.

Доказательство. Пусть z — произвольная точка области D , а Δz — произвольное число настолько малое по модулю, что точка $z + \Delta z$ тоже принадлежит D . В силу определения производной и применяя формулу Коши для точек $z + \Delta z$ и z , будем иметь

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_l f(\zeta) \left\{ \frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right\} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_l \frac{\zeta - z - \Delta z + \Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2} \times \\ &\quad \times f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Мы докажем формулу (1.83) при $n = 1$, если покажем, что предел в правой части (1.84) равен нулю. Для этого достаточно показать, что интеграл под знаком предела в правой части (1.84) ограничен. В силу непрерывности $f(z)$ в $\bar{D}$ она ограничена, т. е. можно указать такое число $M > 0$, что $|f(z)| < M$ в $\bar{D}$.

Пусть теперь 2δ будет кратчайшее расстояние от точки z до контура l (рис. 1.59). Можем считать, что $|\Delta z| < \delta$; тогда будет: $|c - z| > 2\delta$ и $|c - z - \Delta z| > |c - z| - |\Delta z| > 2\delta - \delta = \delta$ и применяя теорему об оценке интеграла (1.70), найдем

$$\left| \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(c - z - \Delta z)(c - z)^2} \right| \leq \frac{M}{\delta(2\delta)^2} \cdot \lambda,$$

где λ — длина l ; ограниченность рассматриваемого интеграла показана. Итак, формула (1.83) доказана для $n = 1$. Предполагая ее верной для какого-либо $n - 1$, можно с помощью аналогичных рассуждений доказать ее справедливость для n и тем самым полностью доказать справедливость формулы (1.83) для любого n .



Рис. 1.59.

Следует отметить, что формула (1.83) получается из формулы Коши (1.80) в результате последовательного дифференцирования n раз по z под знаком интеграла.

Итак, из аналитичности функции $f(z)$ в некоторой точке z , т. е. из дифференцируемости $f(z)$ в окрестности этой точки, следует, что $f(z)$ дифференцируема в точке z сколь угодно раз и, следовательно, все производные $f'(z)$, $f''(z)$, ... аналитичны в точке z .

Формула (1.83), как и формула (1.80), может служить для вычисления некоторых контурных интегралов.

Пример. Вычислить $\int \frac{e^z dz}{(z - i)^3}$, где l — произвольный замкнутый контур, однократно обходящий точку i в положительном направлении.

Функция $f(z) = e^z$ аналитична в области, ограниченной контуром l , в силу чего, пользуясь формулой (1.83), находим

$$\int \frac{e^z dz}{(z - i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \frac{2\pi i}{2!} e^i = \pi(i \cos 1 - \sin 1).$$

1.44. Теорема о среднем и некоторые ее следствия.

Пусть функция $f(z)$ аналитична на окружности C радиуса R с центром в точке $z = a$ и в круге, ограниченном этой окружностью. Уравнение окружности C в комплексной форме будет $z - a = Re^{it}$ ($0 \leq t < 2\pi$); применяя формулу Коши (1.80), найдем

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{it}) Rie^{it} dt}{Re^{it}}$$

или

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{it}) dt. \quad (1.85)$$

Правая часть этой формулы представляет собой среднее арифметическое из значений функции $f(z)$ на окружности C . Таким образом, приходим к следующей теореме о среднем: *значение аналитической функции в центре круга равно среднему арифметическому из ее значений на окружности этого круга.*

С помощью теоремы о среднем можно доказать так называемый принцип максимума модуля аналитической функции.

Теорема. *Если функция $f(z)$, не равная тождественной постоянной, аналитична в замкнутой области $\bar{D}$, то модуль этой функции достигает наибольшего значения на границе области D и только на ней.*

Доказательство этой теоремы опускаем. Применив принцип максимума модуля к функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, сразу же можно показать, что при условиях предыдущей теоремы и дополнительном условии $f(z) \neq 0$ в $\bar{D}$, модуль функции достигает и своего наименьшего значения тоже на границе и только на ней.

Формула (1.83) и принцип максимума модуля позволяют получить важную оценку модуля n -ой производной. Пусть функция $f(z)$ аналитична на окружности C радиуса R с центром в точке a и в круге D , ограниченном этой окружностью. Пусть M будет наибольшее значение $|f(z)|$ в круге $\bar{D}$, достигаемое на окружности C . Так как на C будет $|z - a| = R$, то, применяя (1.83), в силу теоремы об оценке интеграла (1.70), находим

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R$$

или

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M}{R^n}. \quad (1.86)$$

Это и есть искомая оценка. Как следствие отсюда получается следующая

Теорема Лиувилля. *Если функция $f(z)$ аналитична и ограничена на всей плоскости z , то она постоянна.*

Доказательство. Если $|f(z)| < M$ на всей плоскости z , то в силу (1.86) при $n = 1$ будет

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

При $R \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю, а левая от R не зависит, откуда следует, что $|f'(z)| = 0$ или $f'(z) = 0$. Но тогда $f(z) = \text{const}$ (п° 1.40).

УПРАЖНЕНИЯ

1. С помощью формулы (1.72) вычислить интеграл $\int \text{Re } z dz$: а) l — радиус-вектор точки $2 + i$; б) l — полуокружность $|z| = 1, 0 < \arg z < \pi$ (начало пути в точке $z = 1$); в) l — окружность $|z - a| = R$.

2. Вычислить $\int z dz$, где: а) l — отрезок прямой от точки 0 до точки $1 + i$; б) l — ломаная с вершинами в точках 0, 1, $1 + i$.

3. Основываясь на теореме Коши и формуле (1.77), вычислить $I = \int_l \frac{z dz}{(z-1)(z-2)}$, где l — любой замкнутый контур, не проходящий через точки $z = 1$ и $z = 2$.

В следующих ниже задачах надлежит пользоваться теоремой Коши и формулами (1.80) и (1.83); контур l в этих задачах однократно обходится в положительном направлении.

4. Вычислить $\int \frac{z dz}{z - i}$, где: а) l — окружность с центром в точке 1 радиуса 1; б) l — окружность с центром в точке $2i$ радиуса 2.

5. Вычислить $\int \frac{\cos z dz}{z + 2i}$, где l — окружность радиуса 2 с центром в точке $-i$.

6. Вычислить $\int \frac{z dz}{z^2 - 1}$, где l — окружность радиуса 2 с центром в точке 2.

7. Вычислить $\int \frac{z^4 dz}{(z^2 + 1)^2}$, где l — окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

8. Вычислить $\frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{ze^{z^2} dz}{(z-i)^2}$, где l — произвольный замкнутый контур, содержащий внутри себя точку i .

9. Вычислить $I = \int_l \frac{e^z dz}{z(1-z)^2}$, где l — произвольный замкнутый контур, не проходящий через точки 0 и 1.

§ 7. РЯДЫ

1.45. Числовые ряды. Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{z_n\} = \{x_n + y_n i\}$ и из ее членов образуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1.87)$$

Число $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ будем называть n -ой частичной суммой этого ряда.

Определение. Ряд (1.87) называется *сходящимся*, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм стремится к конечному пределу, т. е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, где S — конечное число, называемое *суммой ряда*. В этом случае пишут $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = S$.

Если же последовательность $\{S_n\}$ стремится к бесконечно удаленной точке или не стремится ни к какому пределу, то ряд (1.87) называется *расходящимся*.

Остатком (точнее n -ым остатком) ряда (1.87) называют разность

$$R_n = S - S_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots$$

Последовательность $\{R_n\}$ остатков всякого сходящегося ряда стремится к нулю; действительно, если ряд (1.87) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - S = 0.$$

Составим два ряда соответственно из действительных и мнимых частей членов ряда (1.87):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \quad (1.88)$$

Вопрос о сходимости рядов с комплексными членами сводится к изучению сходимости рядов с действительными членами на основе следующей теоремы.

Теорема 1. Для сходимости ряда (1.87) с комплексными членами необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда (1.88) с действительными членами.

Доказательство. Пусть $\sigma_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ и $\tau_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ будут частичные суммы рядов (1.88); тогда $S_n = \sigma_n + \tau_n i$. Для того чтобы последовательность $\{S_n\}$ стремилась к конечному пределу $S = \sigma + \tau i$, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\tau_n\}$ стремились соответственно к конечным пределам σ и τ (см. п^о 1.8), откуда и следует справедливость теоремы.

Как следствие отсюда получаем необходимый признак сходимости рядов с комплексными членами: *если ряд (1.87) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$* . Действительно, если ряд (1.87) сходится, то сходятся и два ряда (1.88), в силу чего $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, откуда и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n i) = 0$.

Так же, как в действительном анализе, имеет место
Теорема 2. *Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots \quad (1.89)$$

составленный из модулей членов ряда (1.87), то сходится и этот последний ряд, называемый в этом случае абсолютно сходящимся.

Доказательство. Пусть ряд (1.89) сходится, тогда из неравенств

$$\left| \begin{matrix} x_n \\ y_n \end{matrix} \right| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$$

в силу признака сравнения вытекает сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|,$$

откуда следует сходимость рядов (1.88), а значит, и ряда (1.87).

Из неравенств

$$\left| \begin{matrix} x_n \\ y_n \end{matrix} \right| \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|$$

и признака сравнения вытекает, что для абсолютной сходимости ряда (1.87) с комплексными членами необходима и достаточна абсолютная сходимость двух рядов (1.88) с действительными членами.

Как следствия из свойств абсолютно сходящихся рядов с действительными членами получают следующие утверждения:

1) *Если ряд (1.87) абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов сохраняются абсолютная сходимость ряда и величина его суммы.*

2) *В абсолютно сходящихся рядах с комплексными членами допускается любая группировка членов.*

3) *Абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами можно почленно перемножить.*

Ниже нам придется главным образом встречаться с абсолютно сходящимися рядами и исследовать сходимость ряда (1.89) с действительными членами. Для этого применимы все известные из действительного анализа признаки сходимости знакоположительных рядов и, в частности, признак Далам-

бера: если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд (1.89)

сходится, а при $p > 1$ — расходится (при $p > 1$ расходится не только ряд (1.89), но и ряд (1.87)).

1.46. Функциональные ряды. Пусть теперь мы имеем последовательность функций

$$\{f_n(z)\} \equiv f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

комплексного переменного z , заданных в некоторой области D . Образуем функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (1.90)$$

Его частичная сумма

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

будет функцией от z . Если в каждой точке z_0 области D ряд (1.90) обращается в сходящийся числовой ряд, то говорят, что ряд (1.90) сходится в области D . Сумма $S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$ ряда (1.90) определится в этом случае в области D как некоторая функция от z .

Если ряд (1.90) сходится в области D , то в каждой точке этой области последовательность остатков $\{R_n(z)\} = \{S(z) - S_n(z)\}$ ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0;$$

это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное N , что для всех $n > N$ будет

$$|R_n(z)| < \varepsilon. \quad (1.91)$$

Грань N , определяющая номер n , начиная с которого выполняется последнее неравенство, в общем случае зависит как от ε , так и от выбора точки z в области D : $N = N(\varepsilon, z)$. Однако существует важный класс функциональных рядов, для которых неравенство (1.91) наступает одновременно для всех z из D как только номер n превысит грань N , зависящую только от выбора ε . Дадим следующее

Определение. Ряд (1.90), сходящийся в области D , называется *равномерно сходящимся в этой области*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное $N = N(\varepsilon)$, зависящее только от ε , что для всех $n > N$ будет

$$|R_n(z)| < \varepsilon$$

одновременно для всех z из области D .

В этом определении вместо области D можно рассматривать замкнутую область $\bar{D}$, линию l либо любое другое бесконечное точечное множество — определение воспроизводится для этих случаев без существенных изменений.

Условие равномерной сходимости ряда функций комплексного переменного в некоторой области гарантирует непрерывность суммы ряда, а также возможность интегрирования и дифференцирования суммы ряда путем почленного интегрирования и дифференцирования этого ряда. Приведем без доказательства соответствующие теоремы. Пусть:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = S(z). \quad (1.92)$$

1) Если члены ряда (1.92) непрерывны в области D и ряд сходится в этой области равномерно, то сумма $S(z)$ ряда тоже непрерывна в D .

2) Если члены ряда (1.92) непрерывны в области D и ряд сходится в этой области равномерно, то

$$\begin{aligned} \int_l S(z) dz &= \int_l f_1(z) dz + \int_l f_2(z) dz + \dots + \int_l f_n(z) dz + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(z) dz, \end{aligned}$$

где l — любой контур, принадлежащий D .

3) Если члены ряда (1.92) аналитичны в области D и ряд сходится в этой области равномерно, то сумма $S(z)$ ряда тоже аналитична в D и

$$\begin{aligned} S'(z) &= f_1'(z) + f_2'(z) + \dots + f_n'(z) + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z), \end{aligned}$$

причем ряд производных тоже равномерно сходится в D (теорема Вейерштрасса).

В заключение этого пункта напомним практически удобный достаточный признак равномерной сходимости ряда.

Признак Вейерштрасса. Если в каждой точке z области D модули членов ряда (1.90) не превосходят соответствующих членов какого-нибудь сходящегося числового знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (1.93)$$

то ряд (1.90) равномерно сходится в D .

Доказательство. Пусть r_n будет остаток ряда (1.93). Так как этот ряд сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такую грань $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будет

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \varepsilon;$$

но тогда для остатка ряда (1.90) будем иметь

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots| \leq \\ &< |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \dots < a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \varepsilon, \end{aligned}$$

как только будет $n > N(\varepsilon)$ и для всех z из D , откуда и следует равномерная сходимость ряда (1.90) в D .

1.47. Степенные ряды. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (1.94)$$

где c_i — комплексные постоянные (коэффициенты ряда), называется степенным. Докажем имеющую фундаментальное значение в теории степенных рядов теорему.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (1.94) сходится в некоторой точке $z_0 \neq 0$, то она абсолютно сходится в круге $|z| < |z_0|$. Во всяком замкнутом круге меньшего радиуса $|z| = q < |z_0|$ ряд (1.94) сходится равномерно.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ по условию сходится, то $c_n z_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а так как всякая последовательность конечных точек, стремящаяся к конечному пределу, ограничена (п^о 1.8), то существует такое число $m > 0$, что для всех n

$$|c_n z_0^n| \leq m.$$

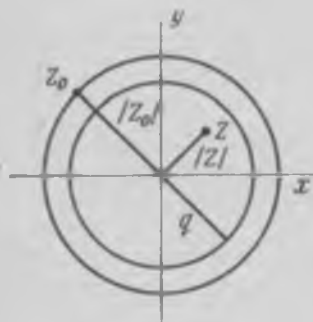


Рис. 1.60.

Для любой точки z круга $|z| = q$ (рис. 1.60) будем тогда иметь

$$\begin{aligned} |c_n z^n| &= \left| c_n z^n \frac{z_0^n}{z_0^n} \right| = \\ &= |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq m \left(\frac{q}{|z_0|} \right)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, в круге $|z| \leq q$ модули членов ряда (1.94) не превосходят соответствующих членов сходящейся числовой геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{q}{|z_0|} < 1$. Отсюда и следует абсолютная и равномерная (в силу признака Вейерштрасса) сходимость ряда (1.94)

в замкнутом круге $|z| \leq q$. Число q можно выбирать сколь угодно близким к $|z_0|$, а потому ряд (1.94) абсолютно сходится в любой точке круга $|z| < |z_0|$.

Следствие. Если ряд (1.94) расходится в некоторой точке z_0 , то он расходится и во всех точках области $|z| > |z_0|$.

Действительно, если бы ряд сходиллся в какой-нибудь точке области $|z| > |z_0|$, то по теореме Абеля он сходиллся бы и в точке z_0 , что противоречит условию.

Проведем теперь из начала координат произвольный луч. Возможны три случая:

1) Ряд (1.94) сходится во всех точках этого луча. В силу теоремы Абеля можем тогда заключить, что ряд абсолютно и равномерно сходится в круге сколь угодно большого радиуса, т. е. во всей плоскости z .

2) Ряд расходится во всех точках луча, кроме точки $z = 0$ (где, очевидно, ряд (1.94) сходится всегда, ибо при $z = 0$ все члены этого ряда, кроме первого, обращаются в нуль). В этом случае на основании следствия из теоремы Абеля заключаем, что ряд расходится в области $|z| > \epsilon$, где ϵ — сколь угодно малое положительное число, т. е. расходится во всей плоскости z , исключая точку $z = 0$.

3) На луче имеются как точки сходимости ряда (1.94), отличные от $z = 0$, так и точки расходимости ряда. Поскольку из теоремы Абеля и следствия из нее можно заключить, что всякая точка сходимости ряда (1.94) лежит ближе к точке $z = 0$, чем всякая точка расходимости ряда, то в этом случае на луче найдется точка z^* , отделяющая точки луча, в которых ряд сходится, от точек луча, в которых ряд расходится. В самой точке z^* ряд может как сходиться, так и расходиться. Величина $|z^*| = r$ называется радиусом сходимости ряда (1.94), а круг $|z| < r$ кругом сходимости ряда. В круге $|z| < r$ ряд (1.94) сходится, вне этого круга — расходится; на окружности $|z| = r$ могут располагаться как точки сходимости, так и точки расходимости ряда. В рассмотренных выше случаях 1) и 2) будем считать соответственно, что $r = \infty$ и $r = 0$.

Радиус сходимости r ряда (1.94) можно определить, пользуясь признаком Даламбера. Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|.$$

Тогда ряд (1.94) сходится (по 1.45), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = |z| \cdot L < 1,$$

т. е. при $|z| < \frac{1}{L}$, и расходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = |z| \cdot L > 1,$$

т. е. при $|z| > \frac{1}{L}$. Отсюда следует, что радиус сходимости ряда (1.94) равен

$$r = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad (1.95)$$

Следующий, более общий чем (1.94) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1 (z-a) + \dots + c_n (z-a)^n + \dots, \quad (1.96)$$

где a — любое комплексное число, тоже называется степенным. Подстановкой $z-a=t$ он сводится к ряду (1.94). Кругом сходимости ряда (1.96) будет круг $|t| < r$ или $|z-a| < r$. Таким образом, круг сходимости ряда (1.96) имеет центр в точке a . Радиус r этого круга можно вычислять по формуле (1.95), поскольку коэффициенты рядов (1.96) и (1.94) одинаковы.

Пример 1. Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Ее радиус сходимости находим по формуле (1.95):

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 1 \text{ (так как } c_n = 1 \text{)}.$$

Следовательно, кругом сходимости прогрессии будет круг радиуса $r=1$ с центром в начале координат, т. е. круг $|z| < 1$. Внутри этого круга прогрессия сходится абсолютно, а во всяком замкнутом круге $|z| < q < 1$ — равномерно. Как и в действительном анализе читатель без труда установит, что сумма прогрессии внутри ее круга сходимости равна $\frac{1}{1-z}$, так что

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1). \quad (1.97)$$

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = 1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots$$

Его радиус сходимости в силу (1.95) будет

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, кругом сходимости данного ряда будет круг радиуса $r = \infty$ с центром в точке $z = 1$, т. е. вся плоскость z .

1.48. Ряд Тейлора. Во всяком замкнутом круге $|z - a| \leq r' < r$ степенной ряд (1.96) в силу теоремы Абеля сходится равномерно и имеет своей суммой некоторую функцию $f(z)$:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (1.98)$$

причем на основании теоремы Вейерштрасса (п^о 1.46) функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - a| < r$ сходимости ряда. Так как члены ряда (1.98) аналитичны во всей плоскости z , то в силу той же теоремы этот ряд можно почленно дифференцировать, причем ряд

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + \dots + nc_n(z-a)^{n-1} + \dots \quad (1.99)$$

тоже равномерно сходится во всяком круге $|z - a| \leq r' < r$. Применяя то же самое рассуждение к степенному ряду (1.99) и к рядам, получающимся в результате его почленного дифференцирования, придем к выводу, что степенной ряд (1.98) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз. Радиусы сходимости всех получающихся таким образом рядов будут те же самые, что и для ряда (1.98), т. е. равны r . Действительно, радиус сходимости ряда (1.99) не может быть меньше r (ибо он сходится в каждой точке круга $|z - a| \leq r' < r$), но в то же время он не может быть и больше r ; так как тогда радиус сходимости ряда (1.98), получаемого почленным интегрированием ряда (1.99), тоже был бы больше r .

Дифференцируя (1.99) почленно дальше, найдем, что для любой точки z из круга сходимости ряда (1.98) будет

$$\begin{aligned} f''(z) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(z-a) + \dots + n(n-1)c_n(z-a)^{n-2} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(z) = n! c_n + (n+1)! c_{n+1}(z-a) + \dots$$

Полагая в ряде (1.98) и во всех рядах, получающихся в результате его почленного дифференцирования, $z = a$, получим

$$c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \dots$$

в силу чего ряд (1.98) записывается в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z-a) + \\ + \frac{f''(a)}{2!} (z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n + \dots \quad (1.100)$$

Степенной ряд (1.100) называется рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки $z=a$. Таким образом, сумма $f(z)$ степенного ряда (1.98) является аналитической функцией в круге сходимости ряда, причем этот ряд является рядом Тейлора своей суммы $f(z)$.

Естественно возникает вопрос: всякую ли аналитическую в некотором круге функцию $f(z)$ можно разложить в этом круге в ряд Тейлора? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Всякая функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-a| < r$, может быть в этом круге единственным образом разложена в степенной ряд Тейлора.*



Рис. 1.61.

Доказательство. Возьмем какую-нибудь точку z из круга $|z-a| < r$ и построим круг $|z-a| < r_1 < r$, concentрический с первым и тоже содержащий точку z (рис. 1.61). Через l обозначим окружность $|z-a| = r_1$. Поскольку $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z-a| \leq r_1$, то по формуле Коши (1.80) будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} d\zeta = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta, \quad (1.101)$$

где l обходится в положительном направлении. Так как точка ζ лежит на l , то

$$\left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| = \frac{|z-a|}{|\zeta-a|} = \frac{|z-a|}{r_1} < 1,$$

в силу чего прогрессия

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{c-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{c-a} \right)^n$$

равномерно сходится по z на окружности l (см. пример 1, п^о 1.47). Подставив последнее разложение в (1.101) и интегрируя почленно полученный ряд (что законно в силу его равномерной сходимости на l), получим на основании (1.83)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили разложение $f(z)$ в ряд Тейлора в круге $|z-a| < r$. Единственность этого разложения есть следствие доказанного выше утверждения, что любой степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы, ибо отсюда следует, что найденное любым способом разложение аналитической функции $f(z)$ в степенной ряд является рядом Тейлора этой функции.

Можно доказать, что наибольший радиус r круга с центром в точке $z=a$, в котором функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора (1.100), равен расстоянию от точки $z=a$ до ближайшей к ней особой точки функции $f(z)$ (напомним, что особыми точками называют точки, в которых эта функция не является аналитической, п^о 1.20).

Пример 1. Для функций $f_1(z) = e^z$, $f_2(z) = \sin z$, $f_3(z) = \cos z$ имеем $f_1^{(n)}(z) = e^z$, $f_2^{(n)}(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + z\right)$, $f_3^{(n)}(z) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + z\right)$. Отсюда получаем разложения этих функций в ряд Тейлора ($a=0$):

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Так как все три рассматриваемые функции аналитичны во всей плоскости z , то полученные разложения справедливы во всей этой плоскости.

Пример 2. Для главной ветви логарифма $f(z) = \ln z$ имеем $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n}$ и получаем следующий ряд Тейлора ($a = 1$)

$$\ln z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots$$

Точка $z = 0$ есть ближайшая к точке $a = 1$ особая точка функции $\ln z$; расстояние от точки $a = 1$ до точки $z = 0$ равно 1. Следовательно, полученное разложение справедливо в круге $|z - 1| < 1$.

Пример 3. $f(z) = (1+z)^m$. Если m — число целое, то $f(z)$ однозначна. При $m > 0$ приходим к конечной формуле бинома Ньютона (ибо все производные $f(z)$ порядка выше m -го будут в этом случае равны нулю). Если $m < 0$, то, используя выражение $f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$, получим биномиальный ряд:

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n + \dots$$

Точка $z = -1$ является особой для $f(z)$, в силу чего это разложение имеет место в круге $|z| < 1$. Если $m = a$ — не целое число, то функция $f(z) = (1+z)^m = e^{m \ln(1+z)}$ многозначна (п° 1.17). Взяв главную ветвь логарифма, найдем

$$f'(z) = e^{m \ln(1+z)} \cdot \frac{m}{1+z} = m e^{(m-1) \ln(1+z)} = m (1+z)^{m-1},$$

$$f''(z) = m(m-1) e^{(m-2) \ln(1+z)} = m(m-1) (1+z)^{m-2}$$

и т. д.

Так как $\ln 1 = 0$ (для прочих ветвей $\ln 1 = 2k\pi i$), то снова приходим к биномиальному ряду для функции $(1+z)^m$. Точка $z = -1$ является и в этом случае особой для $f(z)$, а потому и в случае m не целом биномиальное разложение справедливо в круге $|z| < 1$. Сходимость ряда на окружности этого круга зависит от m .

Вообще, так как ряд Тейлора и формулы дифференцирования в комплексном анализе имеют тот же вид, что и в действительном, то ряды Тейлора для функций комплексного переменного не отличаются по виду от рядов Тейлора для тех же функций действительного переменного.

1.49. Ряд Лорана. Рядами Тейлора представляются функции аналитические в круговых областях. Однако часто приходится рассматривать функции, аналитичные всюду в некоторой окрестности точки a , исключая саму точку a , т. е. аналитичные в кольце вида $0 < |z - a| < R$. Такие функции представляются двусторонними рядами, содержащими как целые положительные, так и целые отрицательные степени $z - a$ вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \quad (1.102)$$

Первый ряд справа — обычный степенной ряд, сходящийся в некотором круге $|z - a| < R$. Второй ряд подстановкой $\frac{1}{z-a} = \zeta$ преобразуется в степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n,$$

сходящийся в некотором круге $|\zeta| < R_1$. Тогда второй ряд (1.102) будет сходиться в области $|z - a| > \frac{1}{R_1} = r$ и если $r < R$, то общей областью сходимости обоих рядов (1.102) будет кольцо $r < |z - a| < R$.

Так как двусторонний ряд (1.102) представляется в виде суммы степенного ряда и ряда, приводящегося к степенному, то, используя теоремы Абеля и Вейерштрасса (п^о п^о 1.47 и 1.46), легко установить, что этот ряд в любой замкнутой области внутри кольца $r < |z - a| < R$ сходится абсолютно и равномерно и что сумма его в упомянутой области есть аналитическая функция $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (1.103)$$

Так как на любой окружности l : $|z - a| = \rho$ ($r < \rho < R$) ряд (1.103) сходится равномерно и его равномерная сходимость не нарушается после умножения на $(z - a)^{-n-1}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (этот множитель ограничен на l), то, интегрируя почленно разложение

$$\frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^{k-n-1}$$

по окружности l и пользуясь соотношением (1.77), найдем значения коэффициентов

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z) dz}{(z - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.104)$$

Ряд (1.103), коэффициенты которого определяются формулой (1.104), называется рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a . Таким образом, сумма $f(z)$ двустороннего ряда (1.103) является аналитической функцией в кольце его сходимости, причем этот ряд является рядом Лорана своей суммы.

Спрашивается теперь, всякую ли функцию $f(z)$, аналитическую в некотором круговом кольце, можно разложить в этом кольце в ряд Лорана? Ответ на этот вопрос дает

Теорема. *Всякая функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $r < |z - a| < R$, может быть в этом кольце единственным образом разложена в ряд Лорана.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь точку z , принадлежащую кольцу $r < |z - a| < R$ (рис. 1.62), и построим concentрическое с ним меньшее кольцо $r_1 < |z - a| < R_1$ ($r < r_1 < R_1 < R$), тоже содержащее точку z . Так как $f(z)$ аналитична в замкнутом кольце $r_1 \leq |z - a| \leq R_1$, то по формуле Коши (1.80) будем иметь



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1.105)$$

Рис. 1.62.

где обе окружности $l_2: |z - a| = R_1$ и $l_1: |z - a| = r_1$ обходятся против часовой стрелки. В точности повторив все рассуждения и выкладки, проведенные нами при доказательстве теоремы из предыдущего пункта, разложим первый из этих интегралов в степенной ряд

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad (1.106)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.107)$$

с той только разницей, что теперь последний интеграл нельзя в силу формулы (1.83) заменить на $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, так как $f(z)$, вообще говоря, не аналитична в точке a . Для второго интеграла (1.105) имеем

$$\begin{aligned} f_2(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{f(\zeta)}{(z - a) - (\zeta - a)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - a} \int_{l_2} f(\zeta) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Так как точка ζ лежит на l_2 , то

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{|\zeta - a|}{|z - a|} = \frac{r_1}{|z - a|} < 1,$$

в силу чего на l_1 равномерно сходится прогрессия

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{z-a} \right)^n.$$

Подставив это разложение в (1.108) и интегрируя полученный ряд почленно, найдем

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z-a} \int_{l_1} f(\zeta) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-a}{z-a} \right)^n \right\} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{l_1} f(\zeta) \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^n} \int_{l_1} f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \quad (1.109) \end{aligned}$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} f(\zeta) (\zeta-a)^{n-1} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.110)$$

Подставив разложения (1.106) и (1.109) в формулу (1.105), получим

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (1.111) \end{aligned}$$

Подынтегральные функции в формулах (1.107) и (1.110) для коэффициентов c_n и c_{-n} аналитичны внутри кольца $r < |z-a| < R$, в силу чего в этих формулах вместо различных контуров l_1 и l_2 можно взять общий контур (п° 1.38). Объединяя вместе формулы (1.107) и (1.110) и выбирая в качестве пути интегрирования любую окружность l , принадлежащую рассматриваемому кольцу, будем иметь

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.112)$$

Итак, мы получили разложение $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $r < |z-a| < R$. Единственность полученного разложения

следует из доказанного выше утверждения, что любой двусторонний ряд (1.103) есть ряд Лорана своей суммы, ибо отсюда следует, что найденное любым способом разложение аналитической в круговом кольце функции $f(z)$ в ряд (1.111) является рядом Лорана этой функции. Теорема доказана.

Ряд (1.106) называется правильной частью ряда Лорана, а ряд (1.109) — главной частью ряда Лорана. Правильная часть ряда Лорана есть степенной ряд, сходящийся в круге $|z - a| < R$, в то время, как главная часть ряда Лорана сходится в области $|z - a| > r$. Если $r < R$, то как правильная, так и главная часть равномерно сходятся в любом кольце, принадлежащем кольцу $r < |z - a| < R$, и их суммы там аналитичны.

Можно доказать, что каждая из окружностей $|z - a| = r$ и $|z - a| = R$, ограничивающих кольцо $r < |z - a| < R$ наибольшей ширины, внутри которого функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана, содержит, по крайней мере, одну особую точку функции $f(z)$.

Пусть теперь функция $f(z)$ аналитична не только в кольце $0 < |z - a| < R$, как мы предполагали в начале этого пункта, но и в точке $z = a$ (т. е. $f(z)$ аналитична в круге $|z - a| < R$). Тогда при всех n подынтегральная функция в интеграле (1.110) не имеет особых точек внутри I_1 , в силу чего по теореме Коши (п⁰ 1.38) все $c_{-n} = 0$ и главная часть ряда Лорана (1.111) исчезает. Формулу (1.107) для коэффициентов правильной части ряда Лорана, в этом случае в силу

(1.83) дает $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Следовательно, в этом случае ряд Лорана превращается в ряд Тейлора, который таким образом является частным случаем ряда Лорана, а именно, рядом Лорана для функции $f(z)$, аналитической в «кольце» $0 \leq |z - a| < R$.



Рис. 1.61.

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \text{ выбрав } a = 0.$$

Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z = 0$ и $z = 1$, в силу чего имеются два круговых «кольца» с центром в точке $a = 0$, в которых функция аналитична — это кольца I: $0 < |z| < 1$ и II: $|z| > 1$ (рис. 1.63). В каждом из этих «колец» легко получить разложение функции в ряд Лорана, не пользуясь общими формулами для вычисления коэффициентов ряда. Данную функцию разложим на сумму простейших дробей

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

В «кольце» I: $|z| < 1$ можем рассматривать вторую дробь как сумму геометрической прогрессии; тогда получим

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Главная часть полученного ряда Лорана состоит из одного члена. В «кошельке» II: $|z| > 1$ или $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, а потому преобразование ведем так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z^n} + \dots \right) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots \end{aligned}$$

В этом разложении отсутствует правильная часть.

1.50. Нули аналитической функции. Нулем функции $f(z)$ называют любую точку a , в которой $f(z)$ обращается в нуль: $f(a) = 0$.

Если аналитическая в своем нуле a функция $f(z)$ не равна тождественно 0 в окрестности точка a , то разложение этой функции в ряд Тейлора (1.100) в окрестности a имеет вид

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \dots, \quad (1.113)$$

где $c_m \neq 0$ ($m \geq 1$). Номер m младшего, отличного от нуля коэффициента этого разложения называется порядком нуля a . Если $m=1$, то нуль называется простым.

Из формулы $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ ($k=1, 2, 3, \dots$) следует, что если a является нулем порядка m функции $f(z)$, то $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$, но $f^{(m)}(a) \neq 0$, т. е. порядок нуля a есть порядок младшей, отличной от нуля производной $f^{(m)}(a)$.

Теорема. Для того, чтобы точка $z=a$ была нулем m -го порядка аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела вид

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z), \quad (1.114)$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке $z=a$ и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство необходимости. Пусть $z=a$ есть нуль m -го порядка функции $f(z)$. Тогда ряд Тейлора для $f(z)$ в окрестности точки a имеет вид (1.113). Этот ряд представим в форме

$$f(z) = (z-a)^m [c_m + c_{m+1} (z-a) + \dots],$$

где функция $\varphi(z) = c_m + c_{m+1} (z-a) + \dots$ являясь суммой степенного ряда, аналитична в точке a , причем $\varphi(a) = c_m \neq 0$.

Доказательство достаточности. Пусть функция $f(z)$ имеет вид (1.114), где m — натуральное число, а $\varphi(z)$

аналитична в точке a , причем $\varphi(a) \neq 0$. Разложив $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a :

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z-a) + \dots,$$

где $b_0 = \varphi(a) \neq 0$, и подставив этот ряд в (1.114), получим

$$f(z) = b_0(z-a)^m + b_1(z-a)^{m+1} + \dots$$

откуда и следует, что $z=a$ есть нуль m -го порядка функции $f(z)$.

В силу непрерывности $\varphi(z)$, входящей в (1.114), можно утверждать, что она отлична от нуля и всюду в некоторой окрестности точки a . Но тогда существует такая окрестность точки a , в которой $f(z)$ не имеет других нулей, кроме a . Этот результат коротко формулируют так: если $f(z)$ аналитична в своих нулях, то эти нули — точки, изолированные друг от друга.

Пример. Показать, что точка $z=0$ является нулем второго порядка функции $f(z) = 1 - \cos z$.

Имеем $1 - \cos z = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots$, откуда и следует высказанное утверждение.

1.51. Особые точки. В особых точках функции $f(z)$ нарушается ее аналитичность (п^о 1.20). Здесь мы изучим поведение аналитических функций в окрестности особых точек простейшего типа — изолированных особых точек. Точку $z=a$ будем называть изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует такая окрестность точки $z=a$, в которой она является единственной особой точкой $f(z)$. Если $z=a$ изолированная особая точка $f(z)$, то существует такое достаточно малое кольцо $r < |z-a| < R$, в котором $f(z)$ аналитична и в котором, следовательно, $f(z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \quad (1.115)$$

При этом могут представиться три случая.

1. Разложение (1.115) не содержит главной части и, следовательно, имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (1.116)$$

Этот ряд является степенным рядом и его сумма есть аналитическая функция в круге $|z-a| < R$ (включая и его

центр $z = a$). Во всех точках этого круга, кроме точки $z = a$, ряд (1.116) сходится к функции $f(z)$, а в точке $z = a$ (где $f(z)$ не является аналитической) — к числу c_0 . Особая точка $z = a$ называется в этом случае устранимой особой точкой функции $f(z)$. Если принять, что $f(a) = c_0$, то разложение (1.116) станет справедливым во всем круге $|z - a| < R$ (включая и его центр $z = a$), обратившись в ряд Тейлора для $f(z)$ в окрестности точки $z = a$, а $f(z)$ станет, следовательно, аналитичной в точке a . Очевидно, в достаточно малой окрестности устранимой особой точки $f(z)$ ограничена.

Пример 1. Показать, что $z = 0$ есть устранимая особая точка функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Имеем

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

В получившемся разложении отсутствует главная часть, откуда и следует высказанное утверждение. В точке $z = 0$ функция $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ теряет смысл. Если принять $f(0) = 1$, то функция $f(z)$ станет аналитической в точке $z = 0$.

II. Разложение (1.115) содержит в своей главной части лишь конечное число членов и, следовательно, имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \quad (1.117)$$

где $c_{-m} \neq 0$. В этом случае точка $z = a$ называется полюсом m -го порядка функции $f(z)$. Если $m = 1$, то полюс называется простым.

Покажем, что в достаточно малой окрестности полюса функция $f(z)$ бесконечно велика. Для этого представим последнее равенство в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + \dots] = \frac{1}{(z-a)^m} g(z),$$

где $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a) = c_{-m} \neq 0$. Отсюда и следует, что $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow a$.

Из предыдущего равенства имеем

$$f(z)(z-a)^m = g(z),$$

откуда получаем удобный критерий наличия у функции $f(z)$ в точке $z=a$ полюса m -го порядка:

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)(z-a)^m| = c_{-m} \neq 0 \text{ и } \infty. \quad (1.117')$$

Пример 2. Показать, что $z=0$ есть полюс второго порядка функции $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^4}$.

Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) \right\} = \frac{1}{2! z^2} - \frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \dots$$

Главная часть этого разложения состоит из одного члена $\frac{1}{2! z^2}$, откуда и следует, что $z=0$ есть полюс второго порядка для $f(z)$. Из этого же разложения видно, что $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$, как это и должно быть для полюса.

III. Разложение (1.115) содержит в своей главной части бесконечное множество членов. Точка $z=a$ называется в этом случае существенно особой точкой функции $f(z)$. Относительно поведения функции в окрестности существенно особой точки имеет место приводимая нами без доказательства

Теорема Ю. В. Сохоцкого. Если $z=a$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для любого числа A (конечного и бесконечного) существует такая последовательность $\{z_n\}$ значений аргумента, стремящаяся к пределу a , для которой последовательность $\{f(z_n)\}$ соответствующих значений функции $f(z)$ стремится к A .

Коротко будем говорить, что в существенно особой точке функция неопределенна.

Пример 3. Показать, что $z=0$ является существенно особой точкой функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Функция e^t аналитична во всей плоскости t , т. е. при $|t| < \infty$ и представима на этой плоскости рядом

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Положив $t = \frac{1}{z}$, найдем, что функция $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ аналитична при $|z| > 0$, т. е. на всей плоскости z , исключая точку $z=0$, и представляется там рядом

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1! z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots$$

Этот ряд в своей главной части содержит бесконечное множество членов, откуда и следует, что $z = 0$ есть существенно особая точка функции $f(z)$. Покажем теперь для этой функции справедливость теоремы Сохоцкого. При $z = x \rightarrow 0$ (z — действительное) $f(z) \rightarrow 0$ или ∞ в зависимости от того, стремится ли z к нулю вдоль отрицательной или положительной полуоси x . Пусть теперь $A = re^{i\varphi}$ — любое комплексное число, отличное от 0 и ∞ . Из равенства $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = A$ находим

$$z = \frac{1}{\operatorname{Ln} A} = \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2n\pi i} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Полагая $n = 0, 1, 2, \dots$, получим последовательность точек $\{z_n\}$, стремящуюся к нулю, во всех точках которой $f(z) = A$ и, следовательно, вдоль которой $f(z)$ стремится к A .

Итак, если $z = a$ есть изолированная особая точка функции $f(z)$, то в зависимости от того, является ли эта точка устранимой, полюсом или существенно особой, функция $f(z)$ в достаточно малой окрестности точки $z = a$ будет соответственно ограниченной, бесконечно большой или неопределенной. Справедливы и обратные утверждения: если $z = a$ есть изолированная особая точка функции $f(z)$, то она будет устранимой, полюсом или существенно особой в зависимости от того, будет ли предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ конечным, бесконечным или несуществующим.

1.52. Связь между нулями и полюсами. Часто удается выяснить характер особых точек функции, пользуясь следующей теоремой:

Для того, чтобы точка $z = a$ была нулем m -го порядка аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы для функции $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ эта точка была полюсом m -го порядка.

Доказательство необходимости. Пусть $z = a$ есть нуль m -го порядка для $f(z)$; тогда в соответствии с (1.114) эта функция имеет вид

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке a , причем $\varphi(a) \neq 0$, откуда

$$F(z) (z - a)^m = \frac{1}{\varphi(z)}$$

и

$$\lim_{z \rightarrow a} \{F(z) (z - a)^m\} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0 \text{ и } \infty.$$

На основании критерия (1.117') отсюда заключаем, что для функции $F(z)$ точка $z = a$ является полюсом m -го порядка.

Доказательство достаточности. Пусть $z = a$ есть полюс m -го порядка функции $F(z)$. Тогда разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки a будет

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} =$$

$$= \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^m} g(z),$$

где $g(z)$, являясь суммой степенного ряда, аналитична в точке a , причем $g(a) = c_{-m} \neq 0$. Но тогда функция $\frac{1}{g(z)} = \varphi(z)$ тоже аналитична и отлична от 0 в точке $z = a$, и мы будем иметь

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m \varphi(z)},$$

откуда $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, а это в силу (1.114) и означает, что функция $f(z)$ имеет точку $z = a$ нулем m -го порядка.

Примеры. Найти все особые точки функции $f(z)$ на плоскости z :

1) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+3)}$. Эта функция аналитична в плоскости z , исключая точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -3$. В силу (1.114) эти точки являются нулями соответственно 2-го и 4-го порядков для функции $\frac{1}{f(z)}$, а потому для $f(z)$ эти точки будут полюсами соответственно 2-го и 4-го порядков.

2) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$. При $z = 0$ знаменатели обеих дробей обращаются в нуль; в силу периодичности e^z знаменатель первой дроби обращается в нуль в бесконечном множестве точек $z = 2k\pi i$, где k — любое целое. Итак, особыми точками $f(z)$ будут точки $z = 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), во всех других точках плоскости z функция $f(z)$ аналитична. Исследуем характер точки $z = 0$. Имеем

$$f(z) = \frac{1+z-e^z}{z(e^z-1)} = \frac{1+z-\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\dots\right)}{z\left[\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\dots\right)-1\right]} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2!}-\frac{z}{3!}-\dots}{1+\frac{z}{2!}+\dots} \rightarrow -\frac{1}{2} \text{ при } z \rightarrow 0,$$

откуда следует, что $z = 0$ есть устранимая особая точка для $f(z)$ (п^о 1.51). В точках $z = 2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) функция $\frac{1}{z}$ аналитична, а для $\frac{1}{e^z - 1}$

это будут полюсы (так как $\frac{1}{e^z - 1} \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 2k\pi i$). Порядок этих полюсов равен порядку нулей знаменателя $g(z) = e^z - 1$. Воспользуемся тем, что порядок нуля функции равен порядку ее младшей, отличной от нуля производной (п° 1.50). Имеем $g'(z) = e^z$ и $g'(2k\pi i) = 1$. Отсюда следует, что точки $z = 2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) являются простыми нулями функции $g(z)$ и, значит, простыми полюсами функции $f(z)$.

1.53. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности $|z| > \frac{1}{\epsilon}$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$

(п° 1.6), исключая саму эту точку. Отображение $z = \frac{1}{\zeta}$ переводит окрестность точки $z = \infty$ в окрестность точки $\zeta = 0$ расширенной плоскости ζ и тем самым сводит изучение поведения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ к изучению поведения функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = 0$.

Если $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = \infty$, то $\varphi(\zeta)$ будет аналитична в окрестности точки $\zeta = 0$ и ее можно будет разложить в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\zeta^n}. \quad (1.118)$$

Положив здесь $\zeta = \frac{1}{z}$, получим разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n. \quad (1.119)$$

При такой замене правильная часть ряда заменяется главной и обратно. Отсюда видим, что функция $f(z)$ будет иметь точку $z = \infty$ устранимой особой точкой, если ряд (1.118) не будет содержать отрицательных степеней ζ , а ряд (1.119) — положительных степеней z , т. е. будет иметь вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

Если в этом случае положить $\varphi(0) = c_0$, то $\varphi(\zeta)$ станет аналитической в точке $\zeta = 0$. Поэтому, если $f(z)$ имеет точку $z = \infty$ устранимой особой точкой, то обычно говорят, что $f(z)$ аналитична в точке

$z = \infty$, полагая при этом $f(\infty) = c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ (см. непрерывность при $z = \infty$, п^о 1.10). Если

$$f(z) = \frac{c_m}{z^m} + \frac{c_{m+1}}{z^{m+1}} + \dots \quad (c_m \neq 0), \quad (1.120)$$

то $z = \infty$ называют нулем m -го порядка функции $f(z)$.

Точка $z = \infty$ называется полюсом соответствующего порядка функции $f(z)$, если разложение (1.118) содержит лишь конечное число членов с отрицательными степенями z , а разложение (1.119), следовательно, содержит конечное число членов с положительными степенями z . И, наконец, точка $z = \infty$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если ряд (1.118) содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z , а ряд (1.119) — бесконечное множество членов с положительными степенями z .

Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \varphi(\zeta)$, то отсюда ясно, что, для того чтобы особая точка $z = \infty$ была устранимой, полюсом или существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ был соответственно конечным, бесконечным или не существовал.

В точке $z = \infty$, очевидно, остается в силе теорема о связи нулей и полюсов (п^о 1.52).

Примеры. Найти все особые точки функции $f(z)$ на расширенной плоскости z :

1) $f(z) = \frac{1}{z-i}$. Во всех конечных точках, кроме $z = -i$, $f(z)$ аналитична. Точка $z = -i$ является простым нулем функции $z+i$ и, следовательно, простым полюсом для $f(z)$. При $z \rightarrow \infty$ функция $f(z) \rightarrow 0$, следовательно, $z = \infty$ будет правильной точкой для $f(z)$. В этом же можно убедиться, разложив $f(z)$ в ряд Лорана в круге $|z| > 1$. В этом круге $\left| -\frac{i}{z} \right| = \frac{1}{|z|} < 1$, так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - \left(-\frac{i}{z}\right)} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{i}{z} + \frac{i^2}{z^2} - \dots\right) = \\ &= \frac{1}{z} - \frac{i}{z^2} + \frac{i^2}{z^3} - \dots \end{aligned}$$

Полученный ряд имеет вид (1.120) при $m=1$, откуда следует, что точка $z = \infty$ является простым нулем для $f(z)$.

2) $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Эта функция аналитична во всех конечных точках z как линейная комбинация степенных функций (п^о 1.20). Задание функции можно рассматривать как ее ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$. Поскольку этот ряд содержит конечное число

членов с положительными степенями z , то $z = \infty$ является полюсом n -го порядка для $f(z)$.

$$3) f(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0),$$

причем дробь несократима. Дробная рациональная функция аналитична во всех точках плоскости z , кроме точек, в которых обращается в нуль знаменатель. Корни знаменателя являются полюсами для $f(z)$ и порядок этих полюсов совпадает с порядком соответствующих им нулей знаменателя. Далее имеем

$$f(z) = z^{n-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}{\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{b_m}{z^0}} = z^{n-m} \varphi(z),$$

где $\varphi(z) \rightarrow \frac{a_0}{b_0}$ при $z \rightarrow \infty$. Отсюда видим, что если $n > m$, то $f(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$ и точка $z = \infty$ является полюсом $f(z)$; нетрудно показать, что порядок этого полюса будет $n - m$. Если же $n < m$, то $f(z) \rightarrow 0$ или $\frac{a_0}{b_0}$ при $z \rightarrow \infty$ и точка $z = \infty$ будет правильной точкой функции (при $n < m$ точка $z = \infty$ будет нулем порядка $m - n$).

4) $f(z) = \sin z$. Эта функция аналитична во всей плоскости z . Ряд $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ имеет смысл для всех z , в том числе и для $|z|$ сколь угодно больших. Следовательно, это разложение можно рассматривать как ряд Лорана для $\sin z$ в окрестности точки $z = \infty$. Поскольку это разложение имеет бесконечное множество членов с положительными степенями z , то $z = \infty$ будет существенно особой точкой функции $\sin z$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

если: а) $z_n = \frac{n}{2^n}$; б) $z_n = \frac{n!}{n^n}$; в) $z_n = e^{in}$; г) $z_n = \frac{e^{in}}{n}$; д) $z_n = \frac{e^{in\pi}}{n}$;

е) $z_n = \frac{e^{in}}{n^2}$; ж) $z_n = \frac{1}{n} e^{\frac{in}{n}}$.

2. Определить радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$, если:

а) $c_n = \frac{1}{n}$; б) $c_n = n^n$; в) $c_n = \frac{1}{n!}$; г) $c_n = \frac{n}{2^n}$; д) $c_n = \cos in$.

3. Функцию $f(z)$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ и определить радиус сходимости полученного ряда: а) $f(z) = \operatorname{ch} z$;

б) $f(z) = \sin^2 z$; в) $f(z) = \frac{1}{az + b}$ ($b \neq 0$); г) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$; д) $f(z) =$

$= \arcsin z$, где $\arcsin z$ — та ветвь $\operatorname{Arcsin} z$, называемая главной

ветвью, для которой $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$, а $(\operatorname{Arcsin} z)' \Big|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \Big|_{z=0} = +1$.

4. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ и найти радиус сходимости:

а) $f(z) = \frac{z}{z+2}$ в окрестности точки $z=1$; б) $f(z) = \sqrt[3]{z}$ в окрестности точки $z=1$ (имеется в виду та ветвь корня, для которой $\sqrt[3]{1} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$); в) $f(z) = \ln z$ в окрестности точки $z=2$.

5. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ либо в указанном кольце, либо в окрестности указанной точки, определив в последнем случае область,

в которой разложение имеет место: а) $f(z) = \frac{1}{z-2}$ в окрестности точки

$z=0$; б) $f(z) = \frac{1}{z-2}$ в окрестности точки $z=\infty$; в) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$

в окрестности точки $z=1$; г) $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2 + 1)}$ в кольце $1 < |z| < 2$;

д) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ в окрестности точки $z=\infty$; е) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$ в окрестности

точки $z=1$; ж) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

6. Для функции $f(z)$ найти особые точки, выяснить их характер и исследовать поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки:

а) $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$; б) $f(z) = \frac{z^4}{1 + z^4}$; в) $f(z) = \frac{z^5}{(1 - z)^3}$; г) $f(z) = \frac{1 + z^2}{z^2}$;

д) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$; е) $f(z) = \frac{\sin z}{4z + 3}$.

§ 8. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИИ

1.54. Вычет функции в конечной изолированной особой точке.

Определение. *Вычетом функции $f(z)$ в конечной изолированной особой точке $z=a$ (обозначение: $\text{Res } f(a)$) называется коэффициент c_{-1} при члене $\frac{1}{z-a}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a .*

Напишем ряд Лорана для $f(z)$ в окрестности точки a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \quad (1.121)$$

и проинтегрируем этот ряд почленно по любому замкнутому контуру l , принадлежащему кольцу, в котором справедливо написанное разложение, обходя l против часовой стрелки. Используя результат (1.77), найдем, что все интегралы в правильной части ряда будут равны нулю; все интегралы главной части тоже будут равны нулю, кроме единственного интеграла

от первого члена главной части (где $n = 1$). Таким образом, в результате указанного интегрирования получим

$$\int_1 f(z) dz = c_{-1} \cdot 2\pi i,$$

откуда

$$\text{Res } f(a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_1 f(z) dz. \quad (1.122)$$

Из определения вычета следует, что если $z = a$ есть правильная или устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\text{Res } f(a) = 0$ (ибо в этих случаях в разложении (1.121) отсутствует главная часть, так что все $c_{-n} = 0$).

Теорема (основная теорема о вычетах). Если функция $f(z)$ аналитична в области D и на замкнутом контуре l ее ограничивающем всюду, за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$ (лежащих внутри l), то интеграл от $f(z)$ вдоль l в положительном направлении равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов $f(z)$ во всех точках a_k , т. е.

$$\int_1 f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(a_k). \quad (1.123)$$

Доказательство. Окружим точки a_k окружностями C_k настолько малыми, чтобы они лежали внутри l и не пересекались друг друга. Так как в многосвязной области, ограниченной контурами l и C_k и на самих этих контурах $f(z)$ аналитична, то в силу теоремы Коши будет

$$\int_1 f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz,$$

где все контуры l и C_k обходятся против часовой стрелки. Поделив и умножив правую часть последнего равенства на $2\pi i$ и принимая во внимание (1.122), мы и приходим к (1.123).

Формула (1.123) позволяет вычислять интегралы от $f(z)$ по замкнутым контурам, если известны вычеты этой функции относительно всех особых точек, находящихся внутри контура.

1.55. Вычет функции в конечном полюсе. Если для вычисления вычета функции $f(z)$ в конечной существенно особой точке обычно непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, то для вычисления вычета $f(z)$ в конечном полюсе можно указать более простой прием.

Пусть конечная точка $z = a$ является полюсом m -го порядка функции $f(z)$; тогда, умножив (1.117) почленно на $(z - a)^m$, будем иметь

$$(z - a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \dots + c_{-1}(z - a)^{m-1} + \\ + c_0(z - a)^m + c_1(z - a)^{m+1} + \dots$$

Дифференцируя последнее соотношение $(m - 1)$ раз, получим

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a)^m f(z)] = (m - 1)! c_{-1} + \\ + m(m - 1) \dots 2c_0(z - a) + \dots,$$

перейдя здесь к пределу при $z \rightarrow a$, найдем

$$\text{Res } f(a) = c_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - a)^m f(z)]. \quad (1.124)$$

В частности, для вычета функции в простом полюсе ($m = 1$), отсюда получаем

$$\text{Res } f(a) = \lim_{z \rightarrow a} [(z - a) f(z)]. \quad (1.125)$$

Пусть функция $f(z)$ является частным двух функций, аналитических в окрестности точки a :

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)},$$

причем $\varphi(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$. Тогда точка $z = a$ будет простым полюсом для $f(z)$ (п⁰ 1.52). Применяя формулу (1.125), найдем

$$\text{Res } f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \varphi(a) \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\frac{g(z) - g(a)}{z - a}} = \frac{\varphi(a)}{g'(a)}. \quad (1.126)$$

Эта формула удобна для нахождения вычетов в простых полюсах.

Пример 1—4. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее особых точках плоскости z .

1) $f(z) = \frac{2}{z - i}$ аналитична во всех точках плоскости z , кроме точки $z = i$, которая является простым полюсом функции; пользуясь формулой (1.126), находим

$$\text{Res } f(i) = \frac{\varphi(i)}{g'(i)} = \frac{2}{1} = 2.$$

2) $f(z) = \frac{z^5}{z^2 - 1}$; точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ являются простыми полюсами функции — других особых точек на плоскости z нет. По формуле (1.126) находим

$$\operatorname{Res} f(1) = \frac{1^5}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{Res} f(-1) = \frac{(-1)^5}{2(-1)} = \frac{1}{2}.$$

3) $f(z) = \frac{z^5}{(z-1)^4}$ аналитична на плоскости z везде, кроме полюса 4-го порядка $z = 1$. По формуле (1.124) находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(1) &= \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^3}{dz^3} \{(z-1)^4 f(z)\} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^3}{dz^3} z^5 = \\ &= \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot z^3) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20. \end{aligned}$$

4) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ имеет на плоскости z единственную особую точку $z = 0$, которая является существенно особой. Выше (п^о 1.51, пример 3) мы получили разложение $f(z)$ в ряд при $|z| > 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1! z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots,$$

откуда сразу находим $\operatorname{Res} f(0) = 1$.

Пример 5. Вычислить $\int_l \frac{\operatorname{ctg} z}{4z - \pi} dz$, где l — окружность $|z| = 1$, проходимая против часовой стрелки.

Знаменатель функции $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{4z - \pi} = \frac{\cos z}{(4z - \pi) \sin z}$ обращается в нуль

в точках $z_1 = \frac{\pi}{4}$, $z_2 = 0$, $z_k = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), а потому для $f(z)$ эти точки являются полюсами, причем все эти полюсы будут простыми (ибо $\sin k\pi = 0$, но $(\sin z)'|_{z=k\pi} = \cos k\pi \neq 0$). Внутрь окружности $|z| = 1$ попадают только два первых полюса. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\operatorname{ctg} z}{(4z - \pi)} \Big|_{z = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{Res} f(0) &= \frac{\cos z}{(\sin z)'} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{\pi}; \end{aligned}$$

В силу основной теоремы о вычетах (1.123), находим

$$\int_l \frac{\operatorname{ctg} z}{4z - \pi} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right).$$

Пример 6. Вычислить $\int_l \frac{dz}{z^3 - 1}$, где l — окружность $|z - 1 - i| = 1$, проходимая против часовой стрелки.

Решив уравнение $z^3 + 1 = 0$, находим простые нули знаменателя $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$, $z_3 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, которые будут простыми полюсами функции $f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$. Только третий полюс лежит внутри окружности l . Находим

$$\operatorname{Res} f(z_3) = \frac{1}{(z^3 + 1)'} \Big|_{z=z_3} = \frac{1}{3z_3^2} = \frac{z_3}{3z_3^3} = \frac{z_3}{-3} = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{6}.$$

Следовательно, в силу (1.123)

$$\int_l \frac{dz}{z^3 + 1} = 2\pi i \left(-\frac{1 + \sqrt{3}i}{6} \right) = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} - i).$$

1.56. Вычет функции в бесконечно удаленной точке. В некоторых вопросах может оказаться полезным понятие вычета в бесконечно удаленной точке. Пусть $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z = \infty$, исключая может быть саму эту точку.

Определение. Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z = \infty$ (обозначение: $\operatorname{Res} f(\infty)$) называется коэффициент при члене $\frac{1}{z}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$, взятый с обратным знаком, т. е. $\operatorname{Res} f(\infty) = -c_1$.

Написав ряд Лорана (1.119) для $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$$

и интегрируя этот ряд почленно по любому замкнутому контуру l , принадлежащему упомянутой окрестности и окружающему начало координат, обходя l по часовой стрелке, получим

$$\int f(z) dz = c_1 (-2\pi i),$$

откуда

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(z) dz. \quad (1.127)$$

Вычет функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ может быть отличным от нуля и в случае если эта точка является правильной точкой функции (ибо член $\frac{1}{z}$ принадлежит не главной, а правильной части ряда (1.119)).

Теорема. Если функция $f(z)$ аналитична на расширенной плоскости z , за исключением конечного числа особых точек, то сумма всех ее вычетов (включая и вычет в точке $z = \infty$) равна нулю.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — конечные особые точки $f(z)$, а C — окружность с центром в начале координат настолько большого радиуса, что все точки a_k лежат внутри ее. Окружим точки a_k окружностями C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) настолько малыми, чтобы они лежали внутри C и не пересекались друг друга. В многосвязной области, ограниченной окруж-

ностями C и C_k , и на самих этих окружностях, функция $f(z)$ аналитична, так что в силу теоремы Коши (п^о 1.38) будем иметь

$$\int_{C^-} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0,$$

где C^- — окружность C , проходимая в отрицательном направлении, т. е. по часовой стрелке. Поделив это равенство почленно на $2\pi i$ и принимая во внимание формулы (1.122) и (1.127), получим

$$\operatorname{Res} f(\infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k) = 0, \quad (1.128)$$

что и требовалось доказать.

Следствием формул (1.128) и (1.123) является такое утверждение: если функция $f(z)$ аналитична на расширенной плоскости z за исключением нескольких изолированных особых точек, причем все конечные особые точки лежат внутри замкнутого контура Γ , то

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty). \quad (1.129)$$

Примеры 1—4. Найти вычеты во всех особых точках расширенной плоскости z (включая и точку $z = \infty$) для функций из примеров 1—4 предыдущего пункта:

1) $f(z) = \frac{2}{z-1}$ аналитична во всех точках расширенной плоскости z , кроме простого полюса $z = 1$ ($z = \infty$ — правильная точка функции). Выше мы нашли $\operatorname{Res} f(1) = 2$; в силу (1.128)

$$\operatorname{Res} f(\infty) + \operatorname{Res} f(1) = 0,$$

откуда $\operatorname{Res} f(\infty) = -\operatorname{Res} f(1) = -2$.

2) $f(z) = \frac{z^3}{z^2-1}$ имеет на расширенной плоскости z три особые точки: простые полюсы $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ и полюс 3-го порядка $z_3 = \infty$. Выше мы нашли, что $\operatorname{Res} f(1) = \operatorname{Res} f(-1) = \frac{1}{2}$, а используя (1.128), сразу получаем $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$. Последний результат можно получить, разложив $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$; так, например, в круге $|z| > 1$ имеем

$$\frac{z^3}{z^2-1} = z^3 \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = z^3 \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) = z^3 + z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \dots,$$

а так как $\operatorname{Res} f(\infty)$ есть коэффициент при $\frac{1}{z}$ с противоположным знаком, то отсюда опять находим $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$.

3) $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^2}$ аналитична на расширенной плоскости везде, кроме полюса четвертого порядка $z_1 = 1$ и полюса второго порядка $z_2 = \infty$. Выше мы нашли $\operatorname{Res} f(1) = 20$, но тогда в силу (1.128) сразу находим, что $\operatorname{Res} f(\infty) = -20$. Предлагаем читателю еще раз получить последний результат, разложив $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

4) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ аналитична везде на расширенной плоскости z , исключая существенно особую точку $z = 0$ ($z = \infty$ — правильная точка функции). Разложение $f(z)$ в ряд при $|z| > 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

справедливо при сколь угодно большом $|z|$, в силу чего оно будет рядом Лорана для $f(z)$ и в окрестности точки $z = 0$ и в окрестности точки $z = \infty$. Отсюда сразу получаем $\text{Res } f(0) = 1$, $\text{Res } f(\infty) = -1$.

Пример 5. Вычислить $\int \frac{z^{2l} dz}{(2z^3 + 1)^2 (z^4 - 1)^3}$, где l — окружность $|z| = 2$,

проходимая против часовой стрелки.

Полюсы подынтегральной функции $f(z)$ найдем, решив уравнение $(2z^3 + 1)^2 \cdot (z^4 - 1)^3 = 0$, откуда видим, что все они лежат внутри l . Вычисление вычетов $f(z)$ во всех этих полюсах является трудоемкой работой, поэтому для вычисления интеграла применим формулу (1.129). Разлагаем $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{2l}}{4z^6 \left(1 + \frac{1}{2z^3}\right)^2 \cdot z^{12} \left(1 - \frac{1}{z^4}\right)^3} = \frac{z^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2z^3}\right)^{-2} \left(1 - \frac{1}{z^4}\right)^{-3} = \\ &= \frac{z^2}{4} \left(1 - \frac{1}{z^3} + \dots\right) \left(1 + \frac{3}{z^4} + \dots\right) = \frac{z^2}{4} - \frac{1}{4z} + \frac{3}{4z^2} - \dots \end{aligned}$$

откуда

$$\text{Res } f(\infty) = \frac{1}{4}$$

и в силу (1.129)

$$\int_l \frac{z^{2l}}{(2z^3 + 1)^2 (z^4 - 1)^3} dz = -2\pi i \text{Res } f(\infty) = -\frac{\pi i}{2}.$$

1.57. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов. Некоторые определенные интегралы от функций действительного переменного удастся преобразовать в интеграл по замкнутому контуру от функции комплексного переменного, что позволяет применить для вычисления этих интегралов основную теорему о вычетах (1.123). Рассмотрим, например, интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x},$$

где действительное число $a > 1$. Положим $e^{ix} = z$; при изменении x от 0 до 2π точка z опишет в положительном направлении окружность $l: |z| = 1$. Так как $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} =$

$$= \frac{z^2 + 1}{2z} \quad \text{и}$$

$$dz = ie^{ix} dx = iz dx,$$

$$I = \int \frac{dz}{iz \left(\frac{z^2 + 1}{2z} + a \right)} = \frac{2}{i} \int \frac{dz}{z^2 + 2az - 1}$$

Полюсы подынтегральной функции $f(z)$ последнего интеграла являются корнями уравнения $z^2 + 2az + 1 = 0$, решая которое находим $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ и $z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$, причем только первый из них лежит внутри l . Пользуясь (1.126), легко находим

$$\text{Res } f(z_1) = \frac{1}{2z_1 + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}},$$

так что в силу (1.123)

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \text{Res } f(z_1) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Теорию вычетов можно применить также для вычисления некоторых типов несобственных интегралов. Приведем по этому поводу три теоремы, доказательства которых читатель может найти в более подробных курсах.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ удовлетворяет трем требованиям: 1) $f(z)$ имеет точку $z = \infty$ своим нулем порядка не ниже второго, т. е. ряд Лорана для этой функции в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots$$

(случай $c_2 = 0$ не исключается, см. п. 1.53), 2) $f(z)$ аналитична на действительной оси, 3) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, исключая конечное число особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(a_k). \quad (1.130)$$

Пример 1. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)}{(x^2+1)^2} dx$. Функция $f(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)^2}$

имеет точку $z = \infty$ нулем третьего порядка, а точки $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ — полюсами второго порядка; других особых точек эта функция не имеет. В верхней полуплоскости расположен единственный полюс $z_1 = i$ функции $f(z)$. По формуле (1.124) находим

$$\begin{aligned} \text{Res } f(i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \{(z-i)^2 f(z)\} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{z-1}{(z+i)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2+i-z}{(z+i)^3} = \frac{i}{4}, \end{aligned}$$

так что в силу (1.130)

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} f(i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ иногда может быть вычислен и в том случае, когда точка $z = \infty$ не является нулем порядка не ниже второго для $f(z)$. Имеет место

Теорема 2. Если функция $f(z)$ удовлетворяет трем требованиям: 1) $f(z) = e^{iaz}g(z)$, где $a > 0$ и $g(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ и при условии $\operatorname{Im} z \geq 0$ (т. е. $z \rightarrow \infty$, оставаясь в верхней полуплоскости или на действительной оси), 2) $f(z)$ аналитична на действительной оси, 3) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, исключая конечное число особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k). \quad (1.131)$$

Пример 2. Вычислить $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx$. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 4}$; она удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы ($a = 1$, $g(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$). Особыми точками $f(z)$ будут два простых полюса $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$, причем в верхней полуплоскости лежит первый из них. По формуле (1.126)

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{z_1 e^{iz_1}}{2z_1} = \frac{1}{2e^2},$$

следовательно, по формуле (1.131), применяя формулу Эйлера,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 4} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2e^2} = \frac{\pi i}{e^2}.$$

Отделяя действительные и мнимые части, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 4} dx = 0, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{e^2}.$$

правда, первый из этих результатов очевиден, так как здесь подынтегральная функция нечетная.

Обе приведенные выше теоремы требовали, чтобы $f(z)$ не имела особых точек на действительной оси; если бы это было не так, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ мог бы и не существовать.

Однако если $f(z)$ имеет на действительной оси конечное число простых полюсов, то предел

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N f(x) dx$$

существует, а про интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ в этом случае говорят, что он существует в смысле главного значения. Относительно вычисления интеграла в этом случае имеет место

Теорема 3. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) предыдущей теоремы и на действительной оси имеет конечное число простых полюсов $x_1, x_2, \dots, x_m$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(a_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(x_k) \right\}. \quad (1.132)$$

Пример 3. Вычислить $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$. Функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$

удовлетворяет всем условиям последней теоремы. В верхней полуплоскости она имеет простой полюс $z_1 = i$, а на действительной оси — простой полюс $z_2 = 0$. Применяя (1.126), находим

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{\frac{e^{iz_1}}{z_1}}{2z_1} = -\frac{1}{2e},$$

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \frac{\frac{e^{iz_2}}{z_2+1}}{1} = 1 \text{ и далее в силу (1.132)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+1)} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = 2\pi i \left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} \right),$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = 2I = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{ и } I = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках и в точке $z = \infty$ (если она не является предельной для особых точек):

а) $f(z) = \frac{1}{z^2 - z^3}$; б) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$; в) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z + 1)^2}$; г) $f(z) = \operatorname{tg} z$;

д) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$.

2. Вычислить интегралы: а) $\int_l \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$, где l — окружность $|z-2| = \frac{1}{2}$; б) $\int_l \frac{dz}{z^4+1}$, где l — окружность $|z-1| = 1$;
 в) $\int_l \frac{dz}{(z-3)(z^2-1)}$, где l — окружность $|z| = 2$; г) $\int_l \frac{z^{1/2} dz}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$,
 где l — окружность $|z| = 4$; д) $\int_l \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$, где l — окружность $|z| = 1$;
 е) $\int_l \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, где l — окружность $|z| = 1$; ж) $\int_l \sin^2 \frac{1}{z} dz$, где l — окружность $|z| = r$.

3. Вычислить определенные интегралы:

- а) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos^2 x)^2}$ ($a > 0, b > 0$); в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2}$;
 г) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$ ($a > 0$); д) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n — натуральное); е) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^3-2x+10}$;
 ж) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^3+4x+20}$; з) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4}$; и) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx$ ($a > 0, b > 0$).

4. Вычислить главные значения интегралов:

- а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-5x+6} dx$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)}$;
 г) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ ($a > 0$).

ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ
И РЯД ФУРЬЕ

2.1. Периодические функции. В настоящей главе рассматриваются функции действительного аргумента t , как действительные (принимające действительные значения), так и комплексные (принимające комплексные значения). В дальнейшем будем особо оговаривать, какая из двух указанных функций действительного аргумента имеется в виду. Аргумент t в прикладных задачах может являться временем или пространственной координатой; в последнем случае его обозначают чаще буквой x .

Пусть $f(t)$ — действительная функция действительного аргумента t . Эту функцию будем предполагать периодической с периодом T , т. е. такой, что для всех t справедливо тождество

$$f(t+T) = f(t). \quad (2.1)$$

Это соотношение показывает, что полное представление о функции $f(t)$ получим, изучив ее на любом интервале длины T . За такой интервал обычно принимают один из двух интервалов $[0, T]$ или $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Из интерпретации определенного интеграла как площади следует, что интегралы от $f(t)$ по любым двум интервалам длины T равны друг другу (рис. 2.1) т. е. что

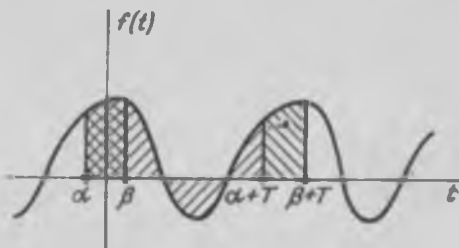


Рис. 2.1

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt = \int_{\beta}^{\beta+T} f(t) dt \quad (2.2)$$

для всех значений α и β (этот же факт легко доказать аналитически).

Нами будет рассмотрена задача о приближенном представлении периодической функции $f(t)$ периода T посредством косинусов и синусов — простейших периодических функций. С этой целью мы введем в рассмотрение следующую бесконечную систему тригонометрических функций

$$1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin n\omega t, \dots \quad (1 \equiv \cos 0\omega t), \quad (2.3)$$

где положено

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.4)$$

Функции $\cos \omega t = \cos \frac{2\pi t}{T}$ и $\sin \omega t = \sin \frac{2\pi t}{T}$ имеют период T . Действительно, например,

$$\cos \frac{2\pi(t+T)}{T} = \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + 2\pi \right) = \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Точно так же нетрудно убедиться в том, что функции $\cos 2\omega t$ и $\sin 2\omega t$ имеют период $\frac{T}{2}$ и вообще функции $\cos n\omega t$ и $\sin n\omega t$ имеют период $\frac{T}{n}$. Но тогда T и подавно будет периодом всех этих функций. Так как постоянную функцию, очевидно, можно считать периодической функцией любого периода, то общим периодом всех функций (2.3) будет T .

2.2. Тригонометрические многочлены. Образует линейную комбинацию первых $(2n+1)$ функций из (2.3) (т. е. сумму произведений этих функций на постоянные коэффициенты)

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \\ &+ b_2 \sin 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Функция $f_n(t)$ называется тригонометрическим многочленом n -го порядка. Ясно, что $f_n(t)$ является периодической функцией периода T .

Ниже мы увидим, что если подобрать коэффициенты a_k и b_k тригонометрического многочлена $f_n(t)$ некоторым специальным образом и взять порядок n многочлена достаточно высоким, то тригонометрический многочлен $f_n(t)$ будет в некотором смысле сколь угодно мало отличаться от произвольной

периодической с периодом T функции $f(t)$ из достаточно обширного класса функций. Таким образом, задача приближенного представления периодической функции посредством косинусов и синусов будет решена.

Для дальнейшего многочлен $f_n(t)$ удобнее представить в более компактной комплексной форме. С этой целью, воспользовавшись формулами (1.26), напомним

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t});$$

$$\sin k\omega t = \frac{1}{2i} (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}).$$

С помощью этих формул представим (2.5) в виде

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} (a_k - ib_k) e^{ik\omega t} + \frac{1}{2} (a_k + ib_k) e^{-ik\omega t} \right\}.$$

Введя комплексные коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k); \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k) = \bar{c}_k, \quad (2.6)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t}) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k e^{ik\omega t} + \sum_{k=-1}^{-n} c_k e^{ik\omega t}. \end{aligned}$$

Приняв

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad (2.7)$$

представим тригонометрический многочлен в комплексной форме

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где комплексные коэффициенты c_k выражаются через действительные коэффициенты a_k и b_k по формулам (2.6) и (2.7).

2.3. Формулы Эйлера-Фурье. Выразим коэффициенты c_k тригонометрического многочлена $f_n(t)$ через саму эту функцию. Для этого возьмем любое число ν из множества чисел $-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$, умножим (2.8) почленно на $e^{-i\nu\omega t} dt$ и проинтегрируем полученное равенство по интервалу $[0, T]$

$$\begin{aligned} \int_0^T f_n(t) e^{-i\nu\omega t} dt &= \int_0^T \sum_{k=-n}^n c_k e^{i(k-\nu)\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k \int_0^T e^{i(k-\nu)\omega t} dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если $k = \nu$, то $\int_0^T e^{i(k-\nu)\omega t} dt = \int_0^T dt = T$,

если же $k \neq \nu$, то, обозначив $k - \nu = m$, будем иметь

$$\int_0^T e^{i(k-\nu)\omega t} dt = \int_0^T e^{im\omega t} dt = \frac{e^{im\omega T} - 1}{im\omega} = 0,$$

так как $e^{im\omega T} = e^{2m\pi i} = 1$ (см. п^о 1.11). Следовательно, из всех $(2n+1)$ интегралов в правой части (2.9) отличным от нуля будет лишь один интеграл, для которого $k = \nu$, и этот интеграл равен T . Итак, получаем

$$\int_0^T f_n(t) e^{-i\nu\omega t} dt = c_\nu T,$$

откуда, заменив индекс ν на k , находим

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n). \quad (2.10)$$

Это и есть искомое выражение коэффициентов c_k через функцию $f_n(t)$. Если, например, тригонометрический многочлен $f_n(t)$ задан не аналитически, а графиком или таблицей, то с помощью формулы (2.10), применяя какой-нибудь метод численного интегрирования, можем вычислить коэффициенты c_k с необходимой точностью и записать многочлен в аналитической форме (2.8). Формула (2.10) называется комплексной формулой Эйлера-Фурье.

Зная комплексные коэффициенты c_k , легко получить выражения и для действительных коэффициентов a_k и b_k . Действительно, первая формула (2.6) дает

$$a_k = 2 \operatorname{Re} c_k, \quad b_k = -2 \operatorname{Im} c_k, \quad (2.11)$$

в силу чего, воспользовавшись формулой Эйлера $e^{-ik\omega t} = \cos k\omega t - i \sin k\omega t$ (п. 1.11) и отделив действительную и мнимую части в (2.10), найдем

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f_n(t) \cos k\omega t \, dt \quad (k=0, 1, 2, \dots, n); \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f_n(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Мы получили действительные формулы Эйлера-Фурье.

2.4. Ряд Фурье. Теорема Дирихле. Пусть теперь нам дана периодическая с периодом T функция $f(t)$, которая, вообще говоря, не является тригонометрическим многочленом. С помощью формулы (2.10) вычислим для этой функции бесконечную последовательность комплексных коэффициентов

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} \, dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.13)$$

или же с помощью формул (2.12) — две бесконечные последовательности действительных коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt \quad (k=0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt \quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

С помощью этих коэффициентов построим «тригонометрический многочлен порядка $n = \infty$ » или тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \quad (2.15)$$

Коэффициенты c_k и a_k, b_k , определяемые формулами (2.13) и (2.14), называются коэффициентами Фурье для функции $f(t)$ (c_k — комплексные, a_k, b_k — действительные коэффициенты Фурье) и связаны друг с другом соотношениями (2.11). Ряд (2.15), коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье для $f(t)$, называется рядом Фурье для функции $f(t)$.

После того как мы формально построили ряд Фурье (2.15) для функции $f(t)$, естественно возникает вопрос: при каких

условиях ряд Фурье, порожденный функцией $f(t)$, сходится к $f(t)$? Прежде, чем ответить на этот вопрос, введем некоторые дополнительные понятия. Напомним, что точка разрыва t_0 называется точкой разрыва 1-го рода функции $f(t)$, если левый и правый пределы $f(t_0 - 0)$ и $f(t_0 + 0)$ функции в этой точке конечны (рис. 2.2).

Определение. Будем говорить, что функция $f(t)$ удовлетворяет на замкнутом интервале $[a, b]$ условиям Дирихле, если:

а) $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$ либо имеет на этом интервале конечное число точек разрыва 1-го рода,

б) $f(t)$ монотонна на $[a, b]$ либо имеет на этом интервале конечное число экстремумов.

Таким образом, если функция $f(t)$ удовлетворяет на интервале $[a, b]$ условиям Дирихле, то этот интервал можно разбить на конечное число таких интервалов, в каждом из

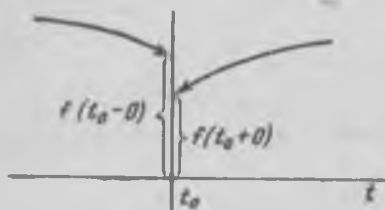


Рис. 2.2.

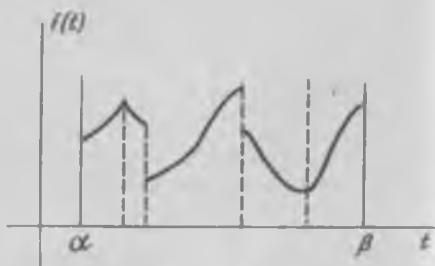


Рис. 2.3.

которых $f(t)$ непрерывна и монотонна (рис. 2.3). Подавляющее большинство практически встречающихся конечных функций этому условию удовлетворяет.

Сформулируем теперь фундаментальную в теории рядов Фурье теорему, дающую достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье и отвечающую тем самым на поставленный выше вопрос.

Теорема Дирихле. Если периодическая с периодом T функция $f(t)$ на каком-либо замкнутом интервале длины T удовлетворяет условиям Дирихле, то:

1) ряд Фурье (2.15) для этой функции сходится на всей оси t ;

2) сумма ряда Фурье равна $f(t)$ во всех точках непрерывности этой функции;

3) в точках разрыва 1-го рода $f(t)$ сумма ряда Фурье равна полусумме левого и правого пределов функции в этих точках.

Здесь мы ограничимся только формулировкой этой теоремы, отсылая читателя, интересующегося ее доказательством, к более подробным курсам.

Как указано выше, теорема Дирихле дает лишь достаточные, но необходимые условия разложимости функции в ряд Фурье. Это значит, что существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, однако разложимые в ряд Фурье. Так, например, функция $\ln \left| 2 \cos \frac{t}{2} \right|$ не удовлетворяет условиям Дирихле (она терпит бесконечный разрыв в точках $t = (2m - 1)\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), однако разлагается в ряд Фурье

$$\cos t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{3} \cos 3t - \frac{1}{4} \cos 4t + \dots$$

на всей оси t , исключая точки $t = (2m - 1)\pi$.

Задачу разложения функции в ряд Фурье называют гармоническим анализом этой функции.

2.5. Ряд Фурье для функции, заданной на интервале длины T . В приложениях часто возникает задача о разложении в тригонометрический ряд функции $f(t)$, заданной лишь на некотором интервале $[\alpha, \alpha + T]$ длины T и удовлетворяющей на этом интервале условиям Дирихле. О периодичности $f(t)$ здесь, следовательно, не может быть и речи.

Периодически продолжив $f(t)$ с интервала $[\alpha, \alpha + T]$ на всю ось t , получим периодическую функцию $\varphi(t)$ периода T , совпадающую с $f(t)$ на интервале $[\alpha, \alpha + T]$ (рис. 2.4).

По формулам (2.14) вычислим коэффициенты Фурье для функции $\varphi(t)$

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} \varphi(t) \cos k\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos k\omega t \, dt \\ (k &= 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} \varphi(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin k\omega t \, dt \\ (k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

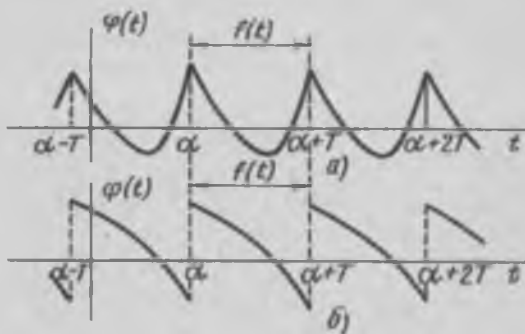


Рис. 2.4.

(В этих формулах вместо интервала интегрирования $[0, T]$ взят интервал $[\alpha, \alpha + T]$ на том основании, что функции $\varphi(t) \cos k\omega t$ и $\varphi(t) \sin k\omega t$ периодичны с периодом T , в силу чего интегралы от них по любым двум интервалам длины T равны между собой (п° 2.1); функцию $\varphi(t)$ мы затем заменили на $f(t)$, так как на интервале интегрирования $[\alpha, \alpha + T]$ эти функции совпадают). Затем пишем ряд Фурье (2.14) для функции $\varphi(t)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (2.17)$$

Этот ряд сходится на всей оси t к функции $\varphi(t)$ в смысле теоремы Дирихле, а значит, на интервале $[\alpha, \alpha + T]$ к функции $f(t)$. Следовательно, во всех внутренних точках интервала $[\alpha, \alpha + T]$, в которых $f(t)$ непрерывна, сумма этого ряда равна $f(t)$. В точках t разрыва $f(t)$ сумма ряда равна $\frac{1}{2} \times \{f(t-0) + f(t+0)\}$. Посмотрим теперь, чему равна сумма ряда (2.17) на концах $[\alpha, \alpha + T]$. Здесь могут представиться два случая. Если на концах интервала $[\alpha, \alpha + T]$ значения $f(t)$ одинаковы, т. е. если $f(\alpha) = f(\alpha + T)$ (рис. 2.4, а), то точки $t = \alpha + mT$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) будут точками непрерывности функции $\varphi(t)$, а потому в силу теоремы Дирихле сумма ряда (2.17) в этих точках будет равна $f(\alpha)$ (или $f(\alpha + T)$). Если же $f(\alpha) \neq f(\alpha + T)$ (рис. 2.4, б), то точки $t = \alpha + mT$ окажутся точками разрыва 1-го рода функции $\varphi(t)$. В этом случае сумма ряда (2.17) в этих точках будет равна $\frac{1}{2} \{f(\alpha) + f(\alpha + T)\}$.

Итак, ряд (2.17) с коэффициентами (2.16) имеет на интервале $[\alpha, \alpha + T]$ своей суммой (в смысле теоремы Дирихле) функцию $f(t)$, что и требуется. На концах интервала $[\alpha, \alpha + T]$ сумма этого ряда во всех случаях равна $\frac{1}{2} \{f(\alpha) + f(\alpha + T)\}$

(если $f(\alpha) = f(\alpha + T)$, то последнее выражение обращается в $f(\alpha)$). Вне интервала $[\alpha, \alpha + T]$ этот ряд дает периодическое продолжение функции $f(t)$ с интервала $[\alpha, \alpha + T]$ на всю ось t .

Коэффициенты a_k и b_k , определяемые формулами (2.16), будем называть коэффициентами Фурье для функции $f(t)$, заданной на интервале $[\alpha, \alpha + T]$.

Из изложенного следует, что ряд Фурье для функции $f(t)$, заданной на интервале $[\alpha, \alpha + T]$, — это ряд Фурье для функции, получающейся из $f(t)$ периодическим продолжением ее с интервала задания на всю ось t .

2.6. Ряды Фурье для четной и нечетной функций. Пусть $f(t)$ задана на всей оси t или же на некотором интервале,

симметричном относительно начала координат. Эта функция называется четной, если для каждого t

$$f(-t) = f(t),$$

и нечетной, если

$$f(-t) = -f(t).$$

Из этих определений следует, что график четной функции (рис. 2.5, а) симметричен относительно оси ординат, а нечетной (рис. 2.5, б) — относительно начала координат.

Ясно, что произведение двух четных, как и двух нечетных функций, является функцией четной; произведение же четной функции на нечетную будет нечетной функцией.

Из интерпретации определенного интеграла как площади следует, что (рис. 2.5)

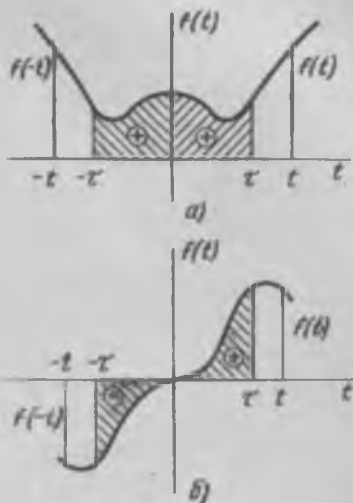


Рис. 2.5.

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^{\tau} f(t) dt, & \text{если } f(t) \text{ — четная,} \\ 0, & \text{если } f(t) \text{ — нечетная,} \end{cases} \quad (2.18)$$

где τ — любое число из области определения $f(t)$.

Пусть теперь $f(t)$ — четная периодическая функция периода T либо четная функция, заданная на интервале $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

длины T . Так как $\cos k\omega t$ ($k=0, 1, 2, \dots$) является четной функцией, а $\sin k\omega t$ ($k=1, 2, 3, \dots$) — нечетной, то $f(t) \cos k\omega t$ будет четной, а $f(t) \sin k\omega t$ — нечетной функцией. Вычисляя коэффициенты Фурье для четной функции $f(t)$ по формулам (2.16) при $\alpha = -\frac{T}{2}$ и учитывая (2.18), найдем

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt \\ &\quad (k=0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt = 0 \\ &\quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Следовательно, для четной функции ряд Фурье (2.17) примет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t. \quad (2.20)$$

(Знак равенства между функцией и ее рядом Фурье здесь и ниже надлежит понимать в смысле теоремы Дирихле).

Итак, ряд Фурье для четной функции состоит только из свободного члена и косинусоидальной части.

Если $f(t)$ — нечетная периодическая функция периода T либо нечетная функция, заданная на интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ длины T , то $f(t) \cos k\omega t$ будет нечетной, а $f(t) \sin k\omega t$ — четной функцией. Для коэффициентов Фурье нечетной функции $f(t)$ найдем следующие выражения

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t \, dt = 0 \\ (k &= 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt \\ (k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Следовательно, ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t \quad (2.22)$$

и состоит таким образом только из синусоидальной части.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. $f(t) = A\left(1 - \frac{t}{T}\right)$ на интервале $[0, T]$. Поскольку функция задана на интервале, не симметричном относительно начала координат, то говорить о ее четности или нечетности не имеет смысла. График $f(t)$ и ее периодическое продолжение $\varphi(t)$ (так называемая «пилообразная функция») представлены на рис. 2.6, а, откуда видно, что $f(t)$ на $[0, T]$ удовлетворяет условиям Дирихле. По формулам (2.16) вычисляем коэффициенты Фурье для $f(t)$ ($\alpha = 0$):

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T A \left(1 - \frac{t}{T}\right) \, dt = A,$$

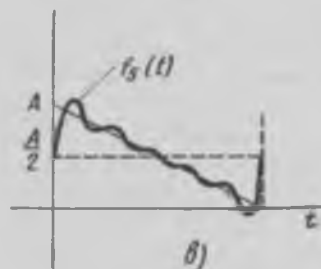
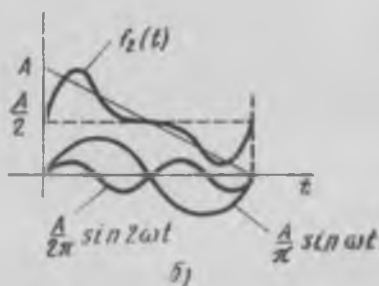
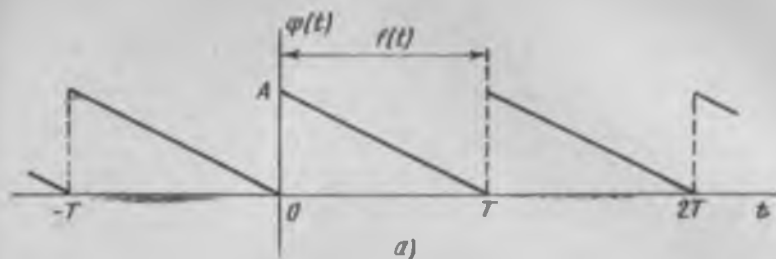


Рис. 2.6

далее, применяя интегрирование по частям и учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\sin 2k\pi = 0$, $\cos 2k\pi = 1$, находим

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T A \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos k\omega t dt = \\
 &= \frac{2A}{kT\omega} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) d \sin k\omega t = \frac{A}{k\pi} \left\{ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sin k\omega t \Big|_0^T + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{T} \int_0^T \sin k\omega t dt \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T A \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sin k\omega t dt = \\
 &= -\frac{2A}{kT\omega} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) d \cos k\omega t = -\frac{A}{k\pi} \left\{ \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos k\omega t \Big|_0^T + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{T} \int_0^T \cos k\omega t dt \right\} = \frac{A}{k\pi}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье (2.17) для данной функции будет

$$f(t) = A \left(1 - \frac{t}{T}\right) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k} \quad (0 < t < T). \quad (2.23)$$

На интервале $[0, T]$ функция $f(t)$ непрерывна, в силу чего во всех внутренних точках этого интервала сумма ряда (2.23) равна $f(t)$. В граничных точках $[0, T]$, т. е. в точках $t=0$ и $t=T$ сумма этого ряда должна быть равна $\frac{1}{2}[f(0) + f(T)] = \frac{A}{2}$, что и имеет место (так как $\sin 0 = 0$ и $\sin k\omega T = \sin 2\pi k = 0$). Вне интервала $[0, T]$ ряд (2.23) дает периодическое продолжение $\varphi(t)$ функции $f(t)$ с интервала $[0, T]$ на всю ось t . Во всех точках $t \neq mT$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функция $\varphi(t)$ непрерывна, а потому в этих точках сумма (2.23) равна $\varphi(t)$. В точках $t=mT$ (точки разрыва 1-го рода $\varphi(t)$) сумма ряда равна полусумме левого и правого предела $\varphi(t)$ в этих точках, т. е. равна $\frac{A}{2}$. На рис. 2.6, б, в изображены приближения функции $f(t)$ тригонометрическими многочленами

$$f_2(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sin \omega t + \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega t \text{ и}$$

$$f_6(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sin \omega t + \dots + \frac{A}{5\pi} \sin 5\omega t \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right),$$

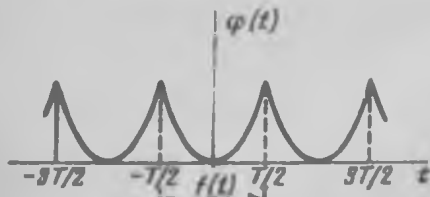


Рис. 2.7

являющимися соответственно суммами трех и шести первых членов ряда (2.23).

Пример 2. $f(t) = t^2$ на интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Функция $f(t)$ — четная; график $f(t)$ и ее периодическое продолжение $\varphi(t)$ представлены на рис. 2.7. $f(t)$

на интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ удовлетворяет условиям Дирихле. В силу четности $f(t)$ ее коэффициенты Фурье вычисляем по формуле (2.19)

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t^2 dt = \frac{1}{6} T^2,$$

далее, дважды применяя интегрирование по частям и учитывая, что $\sin k\pi = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k$, найдем

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t^2 \cos k\omega t dt = (-1)^k \frac{T^3}{k^2 \pi^2}.$$

Ряд Фурье (2.20) для данной функции будет

$$f(t) = t^2 = \frac{T^2}{12} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\omega t}{k^2} \left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}\right). \quad (2.24)$$

Функция $f(t) = t^2$ непрерывна на $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, в силу чего во всех внутренних точках этого интервала сумма ряда (2.24) равна t^2 . Так как $f\left(-\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2}\right)$, то и на концах интервала $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ сумма этого ряда равна t^2 , т. е. равна $\frac{T^2}{4}$. Функция $\varphi(t)$ везде непрерывна, а потому сумма ряда (2.24) равна $\varphi(t)$ на всей оси t .

Пример 3. $f(x) = -A$ при $-\pi < x < 0$ и A при $0 < x < \pi$. График $f(x)$ и ее периодическое продолжение $\varphi(x)$ представлены на рис. 2.8, из которого видно, что $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле. Функция $f(x)$ нечетная, а потому ее коэффициенты Фурье вычисляем по формулам (2.21), заменив в них t на x и положив $T = 2\pi$.

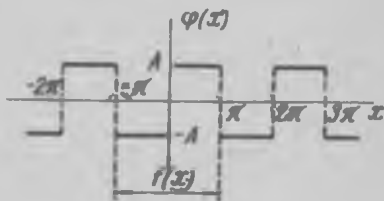


Рис. 2.8

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2A}{k\pi} [1 - (-1)^k].$$

Ряд Фурье (2.22) для данной функции будет

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin kx = \frac{4A}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) =$$

$$= \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)x}{2k-1} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Внутри интервала $[-\pi, \pi]$, исключая точку $x = 0$, $f(x)$ непрерывна и сумма полученного ряда в этих точках равна $f(x)$. В точке $x = 0$ сумма ряда равна $\frac{1}{2} \{f(0-0) + f(0+0)\} = \frac{1}{2} \{-A + A\} = 0$. На концах интервала $[-\pi, \pi]$ сумма ряда равна $\frac{1}{2} \{f(-\pi) + f(\pi)\} = 0$. Вне $[-\pi, \pi]$ в точках $x \neq m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функция $\varphi(x)$ непрерывна и сумма ряда равна $\varphi(x)$. В точках $x = m\pi$ (точки разрыва $\varphi(x)$) сумма ряда равна

$$\frac{1}{2} \{\varphi(m\pi - 0) + \varphi(m\pi + 0)\} = 0.$$

2.7. Ряды Фурье для функции, заданной на интервале $[0, \frac{T}{2}]$. Пусть функция $f(t)$ задана на интервале $[0, \frac{T}{2}]$ и удовлетворяет на этом интервале условиям Дирихле. С помощью какой-нибудь функции $g(t)$, не нарушающей условий Дирихле, продолжим $f(t)$ в отрицательный интервал $[-\frac{T}{2}, 0]$. В результате получим функцию

$$F(t) = \begin{cases} g(t) & \text{при } -\frac{T}{2} \leq t < 0, \\ f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \end{cases} \quad (2.25)$$

заданную на интервале $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ длины T и удовлетворяющую на этом интервале условиям Дирихле. По формулам (2.16) (при $\alpha = -\frac{T}{2}$) вычислим коэффициенты Фурье для $F(t)$

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \cos k\omega t dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} F(t) \sin k\omega t dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

и затем построим ряд Фурье для этой функции

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\right). \quad (2.27)$$

В силу (2.25) этот ряд на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ будет сходиться к функции $f(t)$, что и требуется; на интервале же $\left[-\frac{T}{2}, 0\right]$ этот ряд будет давать выбранное нами продолжение $g(t)$ заданной функции.

Поскольку существует бесконечное множество продолжений $g(t)$ заданной функции $f(t)$ в отрицательный интервал $\left[-\frac{T}{2}, 0\right]$, не нарушающих условий Дирихле, то и рядов Фурье для функции $f(t)$, заданной на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, можно получить бесконечное множество.

В частности, при четном продолжении $g(t)$ в отрицательный интервал $\left[-\frac{T}{2}, 0\right]$ формулы (2.26) примут вид

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} F(t) \cos k\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t \, dt \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.27')$$

и мы получим разложение $f(t)$ в ряд по косинусам

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t \quad \left(0 \leq t < \frac{T}{2}\right); \quad (2.28)$$

при нечетном же продолжении $g(t)$ в интервал $\left[-\frac{T}{2}, 0\right]$ формулы (2.26) обратятся в

$$\left. \begin{aligned} a_k &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} F(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt \\ &\quad (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

и мы получим разложение $f(t)$ в ряд по синусам

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t \quad \left(0 \leq t < \frac{T}{2}\right). \quad (2.30)$$

Пример. Функцию $f(t) = t^2$ на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ разложить в ряд Фурье по синусам. Коэффициенты Фурье для $f(t)$ вычислим по формулам (2.29). Дважды интегрируя по частям, легко найдем

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t^2 \sin k\omega t \, dt = \\ &= (-1)^{k+1} \frac{T^2}{2k\pi} - \frac{T^2}{k^3\pi^3} [1 - (-1)^k], \end{aligned}$$

так что искомое разложение (2.30) будет

$$\begin{aligned} t^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^{k+1} \frac{T^2}{2k\pi} - \frac{T^2}{k^3\pi^3} [1 - (-1)^k] \right\} \sin k\omega t = \\ &= \frac{T^2}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k\omega t}{k} - \frac{2T^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)\omega t}{(2k-1)^3} \quad (2.31) \\ &\quad \left(0 < t < \frac{T}{2} \right). \end{aligned}$$

Выше мы получили ряд (2.24), также дающий на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ функцию t^2 . Разница между рядами (2.24) и (2.31) состоит в том, что первый из них продолжает функцию t^2 из интервала $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ в интервал $\left[-\frac{T}{2}, 0\right]$ четным образом, в то



Рис. 2.9

время как второй — нечетным. На рис. 2.9 представлены функция $f(t) = t^2$ на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, нечетная функция $F(t)$, полученная путем нечетного продолжения $f(t)$ из интервала $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ в интервал $\left[-\frac{T}{2}, 0\right]$, и периодическое продолжение $\varphi(t)$

функции $F(t)$ с интервала $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ на всю ось t . Функция $\varphi(t)$ непрерывна всюду, за исключением точек $t = (2m-1) \frac{T}{2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), следовательно, везде на оси t , кроме этих точек, сумма ряда (2.31) равна $\varphi(t)$. В точках же $t = (2m-1) \frac{T}{2}$ сумма этого ряда равна 0.

2.8. Практический гармонический анализ. На практике функция $f(t)$, которую требуется разложить в ряд Фурье, часто оказывается заданной не аналитически, а графиком

или таблицей. Задачу разложения в ряд Фурье такой функции называют практическим гармоническим анализом.

В практическом гармоническом анализе обычно полагают, что разлагаемая в ряд Фурье функция задана на интервале $[0, 2\pi]$, чем максимально сокращают объем вычислительной работы. Это предположение не ограничивает общности, так как если функция $f(t)$ задана на интервале $[\alpha, \alpha + T]$, то заменой аргумента по формуле $t = \alpha + \frac{\theta}{\omega}$ получим функцию $\Psi(\theta)$, заданную уже на интервале $[0, 2\pi]$.

Итак, пусть функция $f(t)$ задана на интервале $[0, 2\pi]$ графиком или таблицей. Коэффициенты Фурье для этой функции вычисляем по формулам (2.16), в которых надлежит принять $\alpha = 0$, $T = 2\pi$:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Так как в рассматриваемом случае $f(t)$ задана не аналитически, то интегралы (2.32) точно не могут быть вычислены. Эти интегралы в рассматриваемом случае вычисляются приближенно с помощью одной из формул численного интегрирования, например с помощью формулы прямоугольников

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt &\approx \frac{\beta - \alpha}{m} \{g(t_0) + g(t_1) + \dots + g(t_{m-1})\} = \\ &= \frac{\beta - \alpha}{m} \sum_{v=0}^{m-1} g(t_v), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где точки

$$t_v = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{m} v \quad (v = 0, 1, 2, \dots, m)$$

делят

интервал интегрирования $[\alpha, \beta]$ на m равных частей.

Для того чтобы применить эту формулу, разделим интервал $[0, 2\pi]$ на m равных частей точками

$$t_0 = 0, \quad t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m = 2\pi,$$

где $t_v = \frac{2\pi}{m} v$ ($v = 0, 1, 2, \dots, m$), и обозначим через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$ значения $f(t)$ в этих точках (числа y , снимаются прямо с чертежа, если $f(t)$ задана графиком, или берутся из таблицы, если $f(t)$ задана таблицей). Вычисляя интегралы (2.32) по формуле (2.33), получим приближенные выражения для коэффициентов Фурье функции $f(t)$

$$\left. \begin{aligned} a_k &\approx \frac{2}{m} \sum_{v=0}^{m-1} y_v \cos kt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \\ b_k &\approx \frac{2}{m} \sum_{v=0}^{m-1} y_v \sin kt, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

По этим формулам вычисляют n первых коэффициентов Фурье, после чего пишут приближенное выражение функции $f(t)$ в виде тригонометрического многочлена n -го порядка

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (2.35)$$

Принимая во внимание особенности множителей $\cos kt$, и $\sin kt$, число m берут обычно равным одному из чисел 12, 20, 24, 48, причем m следует брать тем большим, чем точнее должны быть вычислены коэффициенты a_k и b_k и чем выше должен быть порядок n тригонометрического многочлена (2.35).

Изложим здесь одну из схем вычислений по формулам (2.34) при $m = 12$. В этом случае числа t_v в градусах будут: $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 360^\circ$ и, как легко сообразить, все множители, на которые умножаются значения y_v функции $f(t)$ в формулах (2.34), сводятся к следующим:

$$\cos 0^\circ = \sin 90^\circ = 1; \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = 0,866;$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = 0,500; \cos 90^\circ = \sin 0^\circ = 0,$$

взятым с положительным или отрицательным знаком. Развернув суммы (2.34), получим

$$\begin{aligned} 6a_0 &\approx y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}; \\ 6a_1 &\approx (y_0 - y_6) + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \cdot 0,866 + (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \cdot 0,500; \\ 6a_2 &\approx (y_0 + y_6 - y_3 - y_9) + (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \cdot 0,500; \\ 6a_3 &\approx y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10}; \\ 6b_1 &\approx (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \cdot 0,500 + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \cdot 0,866 + (y_3 - y_9); \\ 6b_2 &\approx (y_1 + y_3 + y_7 + y_9 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \cdot 0,866; \\ 6b_3 &\approx y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}; \end{aligned} \quad (2.36)$$

и т. д.

Для упрощения выкладок их выгодно производить по следующей схеме. В указанном ниже порядке выписываем числа y_i и над каждой парой этих чисел, подписанных одна под другой, производим сложение и вычитание:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7		
суммы	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
разности	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	

Затем над числами u_i и v_i производят операции сложения и вычитания по схемам:

	u_0	u_1	u_2	u_3		v_1	v_2	v_3
	u_6	u_5	u_4			v_5	v_4	
суммы	s_0	s_1	s_2	s_3	суммы	σ_1	σ_2	σ_3
разности	λ_0	λ_1	λ_2		разности	ϑ_1	ϑ_2	

Нетрудно проверить, что, пользуясь полученными величинами формулы (2.36), можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned}
 6a_0 &\approx s_0 + s_1 + s_2 + s_3; \\
 6a_1 &\approx \lambda_0 + 0,866\lambda_1 + 0,5\lambda_2; \\
 6a_2 &\approx s_0 - s_3 + 0,5(s_1 - s_2); \\
 6a_3 &\approx \lambda_0 - \lambda_2; \\
 6b_1 &\approx 0,5a_1 + 0,866a_2 + a_3; \\
 6b_2 &\approx 0,866(\vartheta_1 - \vartheta_2); \\
 6b_3 &\approx \sigma_1 - \sigma_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Пример. Представить тригонометрическим многочленом 3-го порядка функцию $f(t)$, заданную таблицей:

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(t) = y$	11	30	48	61	64	61	58	51	38	22	8	2	14
		11	30	48	61	64	61	58	51	38	22	8	2
			2	8	22	38	51						
u_i		11	32	56	83	102	112	58					
v_i			28	40	39	26	10	58					
v		0	1	2	3	4	5	6					

	11	32	56	83
	58	112	102	
μ_v	69	144	158	83
λ_v	-47	-80	-46	
v	0	1	2	3

	28	40	39
	10	26	
σ_v	38	66	39
η_v	18	14	
v	1	2	3

Применяя формулы (2.37), находим

$$a_0 \approx \frac{1}{6} \{69 + 144 + 158 + 83\} = 75,6;$$

$$a_1 \approx \frac{1}{6} \{-47 - 0,866 \cdot 80 - 0,5 \cdot 46\} = -12,8;$$

$$a_2 \approx \frac{1}{6} \{69 - 83 + 0,5(144 - 158)\} = -3,5;$$

$$a_3 \approx \frac{1}{6} \{-47 + 46\} = -0,2;$$

$$b_1 \approx \frac{1}{6} \{0,5 \cdot 38 + 0,866 \cdot 66 + 39\} = 19,2;$$

$$b_2 \approx \frac{1}{6} 0,866(18 + 14) = 4,6;$$

$$b_3 \approx \frac{1}{6} (38 - 39) = -0,2.$$

Таким образом, искомое представление данной функции будет

$$f(t) \approx 37,8 - 12,8 \cos t + 19,2 \sin t - 3,5 \cos 2t + 4,6 \sin 2t - \\ - 0,2 \cos 3t - 0,2 \sin 3t.$$

2.9. Связь между рядом Фурье и рядом Лорана. Зададим единичную окружность $|z|=1$ плоскости комплексного переменного z уравнением $z = e^{i\omega t}$, $0 < t \leq \frac{2\pi}{\omega}$ и предположим, что функция $\varphi(z)$ комплексного переменного z аналитична (п^о 1.20) в сколь угодно узком кольце $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$, содержащем окружность $|z|=1$. Тогда в этом кольце $\varphi(z)$ разлагается в ряд Лорана (п^о 1.49)

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

коэффициенты которого равны

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\varphi(z) dz}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\omega t}) e^{-ik\omega t} dt.$$

В частности, для точек $z = e^{i\omega t}$ ($0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$) единичной окружности $|z| = 1$ мы получим

$$f(t) = \varphi(e^{i\omega t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (2.38)$$

где

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad (2.39)$$

(в соответствии с (2.4) положено $\frac{2\pi}{\omega} = T$). Коэффициенты c_k , определяемые последней формулой, являются комплексными коэффициентами Фурье на интервале $[0, T]$ (п⁰п⁰ 2.4 и 2.5) для функции $f(t) = \varphi(e^{i\omega t})$ действительного аргумента t , а ряд (2.38), таким образом, является рядом Фурье для этой функции.

Следовательно, на единичной окружности ряд Лорана, рассматриваемый как функция действительного аргумента t , является рядом Фурье функции $f(t) = \varphi(e^{i\omega t})$.

Как мы знаем, рядом Фурье (2.38) можно представить любую действительную функцию, удовлетворяющую на интервале $[0, T]$ условиям Дирихле. Отсюда следует, что любая комплексная функция $f(t) = u(t) + iv(t)$ действительного аргумента t , где действительные функции $u(t)$ и $v(t)$ на интервале $[0, T]$ упомянутым условиям удовлетворяют, также может быть представлена в виде ряда Фурье (2.38). Все формулы гармонического анализа, полученные нами для действительных функций $f(t)$, остаются в силе и для комплексных функций $f(t)$, за одним исключением: для комплексных функций $c_{-k} \neq \bar{c}_k$ (см. формулы (2.6)).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Разложить в ряд Фурье данные ниже функции и построить графики сумм полученных рядов на всей оси t (или x):

а) $f(t) = t, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2};$

б) $f(t) = t, \quad 0 < t < T,$

в) $f(t) = t^2, \quad 0 < t < T;$

г) $f(t) = \begin{cases} a, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ b, & 0 < t < \frac{T}{2}, \end{cases}$

$$д) f(t) = at + b, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2};$$

$$е) f(t) = a|t| + b, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2};$$

$$ж) f(t) = \begin{cases} at - b, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ at + b, & 0 < t < \frac{T}{2}; \end{cases}$$

$$з) f(x) = \frac{b-a}{2}|x| + \frac{b+a}{2}x, \quad -l < x < l;$$

и) периодическая функция $f(t) = |\sin \omega t|$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

$$к) f(t) = \begin{cases} \cos \omega t, & 0 < t < \frac{T}{4} \\ 0, & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}, \end{cases} \text{ где } \frac{2\pi}{T} = \omega \text{ разложить в ряд по косинусам;}$$

$$л) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{l}{2} \\ l - x, & \frac{l}{2} < x < l \end{cases} \quad \text{разложить в ряд по синусам.}$$

2. Применяя схему вычислений, приведенную в п⁰ 2.8, представить в виде тригонометрического многочлена 2-го порядка функцию $f(t)$, заданную таблицей

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t_v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(t_v)$	44	46	76	88	86	63	24	20	26	40	58	65	70

§ 2. РЯДЫ ФУРЬЕ УСИЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ

2.10. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Пусть действительная периодическая с периодом T функция $f(t)$ на любом интервале длины T удовлетворяет вместе со всеми рассматриваемыми своими последовательными производными условиям Дирихле.

Для простоты рассуждений предположим, что на любом интервале длины T функция $f(t)$ и ее последовательные производные имеют не более одной точки разрыва. Эту единст-

венную возможную точку разрыва функции или ее производных поместим, из соображений простоты изложения, в точки $0, \pm T, \pm 2T, \dots$ (рис. 2.10). Рассмотрим комплексные коэффициенты Фурье для функции $f(t)$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2.40)$$

Положив $f(t) = u$, $e^{-ik\omega t} dt = dv$ и применяя формулу интегрирования по частям (что возможно, так как $f(t)$ и $f'(t)$ непрерывны внутри интервала интегрирования), приведем (2.40) к виду:

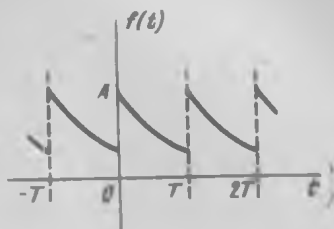


Рис. 2.10.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi k i} \left\{ -f(t) e^{-ik\omega t} \Big|_0^T + \int_0^T f'(t) e^{-ik\omega t} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi k i} \left\{ f(0+0) - f(T-0) + \int_0^T f'(t) e^{-ik\omega t} dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Используя последнее выражение и применяя оценку (1.70), находим

$$\begin{aligned} |c_k| &= \frac{1}{k} \left| \frac{f(0+0) - f(T-0) + \int_0^T f'(t) e^{-ik\omega t} dt}{2\pi i} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{k} \frac{|f(0+0) - f(T-0)| + \left| \int_0^T f'(t) e^{-ik\omega t} dt \right|}{2\pi} \leq \\ &\leq \frac{1}{k} \frac{|f(0+0) - f(T-0)| + \int_0^T |f'(t) e^{-ik\omega t}| dt}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{k} \frac{|f(0+0) - f(T-0)| + \int_0^T |f'(t)| dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\frac{|f(0+0) - f(T-0)| + \int_0^T |f'(t)| dt}{2\pi} = S_1,$$

где s_1 — число не зависящее от k , найдем, что при любом k имеет место оценка

$$|c_k| \leq \frac{s_1}{k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.42)$$

Отсюда следует, что $|c_k| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, причем порядок убывания модулей комплексных коэффициентов Фурье рассматриваемой функции $f(t)$ не ниже чем $\frac{1}{k}$.*

Если функция $f(t)$ разрывна, т. е. если $f(0+0) \neq f(T-0)$, то можно показать, что $|c_k| \rightarrow 0$ и не быстрее чем $\frac{1}{k}$, т. е.

выражение $\frac{|c_k|}{1/k} = |c_k| \cdot k$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $f(t)$ непрерывна, т. е. $f(0+0) = f(T-0)$. Тогда, положив $f'(t) = u$, $e^{-ik\omega t} dt = dv$ и интегрируя по частям, получим из (2.41)

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{1}{2k^2\pi\omega} \left\{ -f'(t) e^{-ik\omega t} \Big|_0^T + \int_0^T f''(t) e^{-ik\omega t} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{k^2} \frac{f'(0+0) - f'(T-0) + \int_0^T f''(t) e^{-ik\omega t} dt}{-2\pi\omega}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

откуда, произведя оценку, аналогичную предыдущей, найдем, что

$$|c_k| \leq \frac{s_2}{k^2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где s_2 — число, не зависящее от k .

Таким образом, если функция $f(t)$ непрерывна, то порядок убывания модуля ее комплексных коэффициентов Фурье не ниже чем $\frac{1}{k^2}$. И здесь можно доказать, что если производная $f'(t)$ разрывна, т. е. если $f'(0+0) \neq f'(T-0)$, то порядок убывания $|c_k|$ не только не ниже, но и не выше чем $\frac{1}{k^2}$.

Продолжая эти рассуждения, можно доказать следующую общую теорему.

Теорема. Если периодическая функция $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными до $(m-1)$ -го порядка, а ее

* Первая часть утверждения вытекает из необходимого признака сходности рядов. Здесь важен порядок убывания $|c_k|$.

производная m -го порядка удовлетворяет условиям Дирихле, то порядок убывания $|c_k|$ не ниже чем $\frac{1}{k^{m+1}}$, т. е. существует такая постоянная s , что для всех значений k

$$|c_k| \leq \frac{s}{k^{m+1}}.$$

Если же при этом производная m -го порядка разрывна, то порядок убывания $|c_k|$ и не выше чем $\frac{1}{k^{m+1}}$, т. е. выражение $\frac{|c_k|}{1/k^{m+1}} = |c_k| k^{m+1}$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Мы предположили, что на любом интервале длины T функция $f(t)$ и ее производные могут иметь не более одной точки разрыва, и поместили эту единственную точку разрыва в точки $0, \pm T, \pm 2T, \dots$. Если бы таких точек разрыва на интервале $[0, T]$ было несколько, то разбив этот интервал на части так, чтобы точки разрыва были точками деления, мы заменили бы интеграл (2.40) суммой интегралов по этим частичным интервалам. Применив к каждому из интегралов формулу интегрирования по частям, мы пришли бы к тому же самому результату.

Пример. Пусть функция $f(t)$ получается с помощью периодического распространения функции $\psi(t) = Ae^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$) с интервала $[0, T]$ на всю ось t (рис. 2.10).

Комплексные коэффициенты Фурье функции $f(t)$ будут

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{A}{T} \int_0^T e^{-(\lambda + ik\omega)t} dt = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda + ik\omega}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $f(t)$ разрывна, то в соответствии с установленным правилом $|c_k|$ должны иметь порядок убывания не выше чем $\frac{1}{k}$, что и имеет место, так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_k|}{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kA}{T} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2\omega^2}} = \frac{A}{T} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\omega} \neq 0.$$

По формулам (2.11) найдем действительные коэффициенты Фурье данной функции

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \operatorname{Re} c_k = \frac{2A}{T} \cdot \frac{\lambda (1 - e^{-\lambda T})}{\lambda^2 + k^2\omega^2}; \\ b_k &= -2 \operatorname{Im} c_k = \frac{2A}{T} \cdot \frac{k\omega (1 - e^{-\lambda T})}{\lambda^2 + k^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Видим, что коэффициент b_k убывает в соответствии с установленным правилом, в то время как a_k имеет более высокий порядок убывания (он убывает как $\frac{1}{k^2}$).

Таким образом, не всегда оба действительных коэффициента Фурье a_k и b_k убывают в соответствии с установленным правилом — один из этих коэффициентов может иметь порядок убывания более высокий.

2.11. О важности быстроты сходимости рядов Фурье. В приложениях наиболее удобны ряды Фурье с быстро убывающими коэффициентами, так как в этом случае несколько первых членов ряда достаточно точно определяют его сумму. При этом чем быстрее убывают коэффициенты, тем меньше членов ряда нужно удержать для отыскания его суммы с требуемой степенью точности.

Кроме этого, в конкретных задачах часто возникает необходимость в почленном дифференцировании ряда Фурье, а каждое такое дифференцирование понижает порядок убывания коэффициентов Фурье на одну единицу. Действительно, если

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

то

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-k\omega a_k \sin k\omega t + k\omega b_k \cos k\omega t),$$

так что если a_k и b_k убывают как $\frac{1}{k^p}$, т. е. $k^p a_k \rightarrow A \neq 0$ и $k^p b_k \rightarrow B \neq 0$, то коэффициенты $k\omega a_k$ и $k\omega b_k$ продифференцированного ряда будут убывать уже только как $\frac{1}{k^{p-1}}$.

В частности, если функция $f(t)$ разрывна, значит, ее коэффициенты Фурье убывают не быстрее, чем $\frac{1}{k}$, то после дифференцирования ряда Фурье такой функции получится расходящийся ряд (его коэффициенты не будут стремиться к нулю). Мы здесь не будем заниматься вопросом о законности дифференцирования ряда Фурье, отсылая интересующихся к более подробным руководствам. Заметим, что условия, при которых возможно почленное дифференцирование ряда Фурье, могут быть, в частности, получены и из общих теорем о возможности почленного дифференцирования функционального ряда с действительными членами, рассматриваемых в курсе анализа.

Отметим еще также без доказательства, что почленное интегрирование ряда Фурье всегда допустимо, при этом получается ряд, коэффициенты которого имеют порядок убывания

на одну единицу более высокий, чем порядок убывания коэффициентов исходного ряда (этот факт делает высказанное утверждение об интегрировании ряда Фурье достаточно очевидным). Итак, дифференцирование ухудшает, а интегрирование улучшает сходимость ряда Фурье.

Из предыдущего пункта следует, что быстрота убывания коэффициентов Фурье периодической функции $f(t)$ определяется дифференциальными свойствами этой функции. А именно, если $f(t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до $(m-1)$ -го порядка включительно, то коэффициенты Фурье функции $f(t)$ имеют порядок убывания не ниже чем $\frac{1}{k^{m+1}}$

(при этом, как обычно, сама функция считается производной нулевого порядка). Следовательно, для того чтобы иметь быстро сходящийся ряд Фурье для функции $f(t)$, нужно добиться непрерывности как функции $f(t)$, так и ее первых производных.

2.12. Разложение функций в быстро сходящийся ряд Фурье (метод А. С. Малиева). Будем предполагать, что функция $f(t)$ задана на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ и имеет в нем непрерывные производные до $(m-1)$ -го порядка и m -ую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле. Такой выбор интервала задания функции не ограничивает общности, так как если $f(t)$ задана на любом интервале $[\alpha, \beta]$, то, совершив замену аргумента t на θ по формуле $t = \frac{2(\beta - \alpha)}{T} \cdot \theta + \alpha$, придем к функции $\psi(\theta)$, заданной уже на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.

Как мы видели в п^о 2.7, для того чтобы разложить в ряд Фурье функцию $f(t)$, заданную на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, нужно эту функцию с помощью некоторой функции $g(t)$ продолжить в отрицательный интервал $\left[-\frac{T}{2}, 0\right]$, в результате чего получится функция

$$F(t) = \begin{cases} g(t), & -\frac{T}{2} \leq t < 0, \\ f(t), & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \end{cases}$$

заданная на интервале $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Если мы не заинтересованы в каком-нибудь специальном характере ряда Фурье, с помощью которого хотим представить $f(t)$ (нам может, например, встретиться необходимость разложить $f(t)$ в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам, что пред-

полагает соответственно четное или нечетное продолжение $g(t)$ функции $f(t)$), то можем продолжить ее на интервал $[-\frac{T}{2}, 0]$ с помощью любой функции $g(t)$.

Выберем функцию $g(t)$ такой, чтобы она на интервале $[-\frac{T}{2}, 0]$ имела непрерывные производные до $(m-1)$ -го порядка и m -ую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле. Однако теперь, несмотря на то, что функции $f(t)$ и $g(t)$ обладают каждая в своем интервале задания «хорошими» дифференциальными свойствами, периодическая функция $\varphi(t)$, получающаяся при периодическом продолжении $F(t)$ с интервала $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ на всю ось t , может такими свойствами не обладать. В точках $t = \nu \frac{T}{2}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функция $\varphi(t)$ может иметь разрывы; если $\varphi(t)$ непрерывна

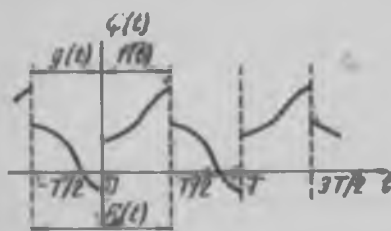


Рис. 2.11

в этих точках, то в них могут иметь разрывы производные $\varphi(t)$ порядка ниже, чем $(m-1)$ (рис. 2.11), что не позволит получить для $\varphi(t)$ достаточно быстро сходящийся ряд Фурье.

Потребуем теперь дополнительно, во-первых, чтобы $g(t)$ и $f(t)$ и их производные до $(m-1)$ -го порядка имели одинаковые значения в точке $t=0$ и, во-вторых, чтобы $g(t)$ и $f(t)$ и их производные до $(m-1)$ -го порядка имели одинаковые значения соответственно в точках $t = -\frac{T}{2}$ и $t = +\frac{T}{2}$, т. е. потребуем выполнения $2m$ условий:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) & g\left(-\frac{T}{2}\right) &= f\left(\frac{T}{2}\right); \\ g'(0) &= f'(0) & g'\left(-\frac{T}{2}\right) &= f'\left(\frac{T}{2}\right); \\ g''(0) &= f''(0) & g''\left(-\frac{T}{2}\right) &= f''\left(\frac{T}{2}\right); \\ &\dots & & \\ g^{(m-1)}(0) &= f^{(m-1)}(0) & g^{(m-1)}\left(-\frac{T}{2}\right) &= f^{(m-1)}\left(\frac{T}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

При выполнении этих условий периодическая функция $\varphi(t)$ будет иметь непрерывные производные до $(m-1)$ -го порядка и m -ую производную, удовлетворяющую условиям Дирихле.

Коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$ будут иметь тогда порядок убывания не ниже, чем $\frac{1}{k^{m+1}}$, а так как ряд Фурье $\varphi(t)$ в интервале $[0, \frac{T}{2}]$ сходится к функции $f(t)$, то для последней получаем ряд Фурье усиленной сходимости.

Из изложенного следует, что «улучшающая» функция $g(t)$, ограниченная поставленными выше условиями, остается достаточно произвольной в отношении своего вида. В частности, независимо от вида $f(t)$, можно брать в качестве $g(t)$ алгебраический многочлен. Удовлетворение $2m$ условиям (2.44) требует лишь, чтобы многочлен $g(t)$ содержал $2m$ подлежащих определению коэффициентов, т. е. был бы $(2m-1)$ -ой степени

$$g(t) = A_0 t^{2m-1} + A_1 t^{2m-2} + \dots + A_{2m-1} t + A_{2m}.$$

Пример. Разложить функцию $f(t) = t^2$, $0 < t < \frac{T}{2}$ в ряде Фурье, коэффициенты которого убывают как $\frac{1}{k^4}$.

Здесь $m=3$, так что улучшающий многочлен $g(t)$ нужно взять степени $2m-1=5$:

$$g(t) = A_0 t^5 + A_1 t^4 + A_2 t^3 + A_3 t^2 + A_4 t + A_5.$$

Удовлетворяя условиям (2.44), приходим к системе шести уравнений для определения шести неизвестных коэффициентов A_i :

$$A_5 = 0;$$

$$A_4 = 0;$$

$$2A_3 = 2;$$

$$-A_0 \frac{T^5}{32} + A_1 \frac{T^4}{16} - A_2 \frac{T^3}{8} + A_3 \frac{T^2}{4} - A_4 \frac{T}{2} + A_5 = \frac{T^2}{4};$$

$$5A_0 \frac{T^4}{16} - 4A_1 \frac{T^3}{8} + 3A_2 \frac{T^2}{4} - 2A_3 \frac{T}{2} + A_4 = 2 \cdot \frac{T}{2};$$

$$-20A_0 \frac{T^3}{8} + 12A_1 \frac{T^2}{4} - 6A_2 \frac{T}{2} + 2A_3 = 2,$$

откуда находим

$$A_0 = -\frac{96}{T^3}, \quad A_1 = -\frac{112}{T^2}, \quad A_2 = -\frac{32}{T}, \quad A_3 = 1, \quad A_4 = A_5 = 0.$$

Таким образом, будем раскладывать в ряд Фурье функцию

$$F(t) = \begin{cases} -\frac{96}{T^3} t^5 - \frac{112}{T^2} t^4 - \frac{32}{T} t^3 + t^2, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ t^2, & 0 < t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Вычислив коэффициенты Фурье этой функции по формулам (2.26), найдем

$$a_0 = \frac{4}{15} T^2;$$

$$a_k = \left(\frac{30 T^2}{\pi^4 k^4} - \frac{360 T^2}{\pi^6 k^6} \right) [1 - (-1)^k] - \frac{6 T^2}{\pi^4 k^4} [1 + (-1)^k];$$

$$b_k = \frac{48}{\pi^5 k^5} [1 - (-1)^k] + \frac{720}{\pi^7 k^7} [1 + (-1)^k].$$

Найденные коэффициенты имеют порядок малости не ниже чем $\frac{1}{k^4}$, что и требовалось. Искомый ряд после некоторых преобразований запишется в виде

$$\begin{aligned} t^2 = & \frac{2}{15} T^2 + \frac{60 T^2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\omega t}{(2k-1)^4} - \\ & - \frac{720 T^2}{\pi^6} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\omega t}{(2k-1)^6} - \frac{12 T^2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega t}{(2k)^4} + \\ & + \frac{96}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega t}{(2k-1)^5} + \frac{1440}{\pi^7} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\omega t}{(2k)^5} \quad \left(0 \leq t < \frac{T}{2} \right). \end{aligned}$$

Найденные выше ряды (2.24) и (2.31) тоже дают на интервале $\left[0, \frac{T}{2} \right]$ функцию t^2 , причем первый из этих рядов получается при четном, а второй — при нечетном продолжении $f(t) = t^2$ в интервал $\left[-\frac{T}{2}, 0 \right]$. В первом случае периодическая функция $\varphi(t)$ непрерывна (рис. 2.7), а ее первая производная терпит разрыв в точках $t = (2\nu - 1) \frac{T}{2}$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), в силу чего в соответствии с установленным в п. 2.10 правилом коэффициенты ряда (2.24) убывают, как $\frac{1}{k^3}$. Во втором же случае сама периодическая функция терпит разрыв в упомянутых точках (рис. 2.9) и поэтому коэффициенты ряда (2.31) убывают как $\frac{1}{k^4}$.

2.13. Усиление сходимости рядов Фурье (метод А. Н. Крылова). Часто, решая какую-нибудь техническую задачу или задачу математической физики, получают представление искомой функции $f(t)$ рядом Фурье. Выражение самой функции $f(t)$ в замкнутой форме в этом случае неизвестно. Если полученный ряд Фурье сходится недостаточно быстро, то возникает вопрос, нельзя ли усилить его сходимость? Оказывается, что во многих случаях это можно сделать. Применяемый при этом метод заключается в следующем. Медленно сходящийся ряд стараются представить в виде суммы медленно и быстро

сходящихся рядов Фурье. Медленно сходящийся ряд будет, очевидно, являться носителем особенностей (разрывов) функции $f(t)$ и ее первых производных. Если удастся просуммировать этот медленно сходящийся ряд, то функция $f(t)$ представится в виде суммы некоторой функции, заданной в замкнутой форме, и быстро сходящегося ряда Фурье. Таким образом, задача усиления сходимости исходного ряда Фурье будет решена.

Будем исходить из разложения в ряд Фурье функции

$$\psi_0(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{T} \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$\psi_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k} \quad (0 < t < T). \quad (2.45)$$

(Это разложение можно, в частности, получить из разложения (2.23) при $A = \frac{T}{2}$.) Периодически продолжив $\psi_0(t)$ с интервала $[0, T]$ на всю ось t , получим периодическую функцию $\alpha_0(t)$ (рис. 2.12), имеющую разрывы в точках $t = \nu T$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); таким образом,

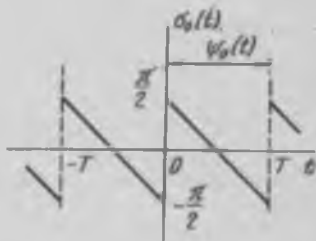


Рис. 2.12

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k} = \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{T} & \text{при } -T < t < 0, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{T} & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t = -T, 0, T. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Функция того же вида, но имеющая разрыв не в точке $t = 0$, а в некоторой точке $t = t_0$ ($0 < t_0 < T$), очевидно, будет

$$\begin{aligned} \alpha_0(t - t_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega(t - t_0)}{k} = \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T}(t - t_0), & (0 \leq t < t_0), \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T}(t - t_0), & (t_0 < t \leq T), \\ 0, & (t = t_0). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.47)$$

В силу периодичности $a_0(t)$ будем еще иметь соотношение

$$a_0(t + T) = a_0[t - (T - t_0)]. \quad (2.48)$$

Для того чтобы получить простого вида непрерывную функцию, имеющую разрыв первой производной, проинтегрируем почленно (2.45), умножив интегралы на $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\begin{aligned} \omega \int_0^t \psi_0(t) dt &= -\frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} - t \right)^2 + \frac{\pi^2}{4} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{\cos k\omega t}{k^2} \right]_0^t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega t}{k^2} \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned}$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ оказывается свободным членом ряда Фурье по косинусам функции, стоящей в левой части, то по формулам (2.19) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left\{ \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} - t \right)^2 \right\} dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \omega \int_0^t \psi_0(t) dt - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} - t \right)^2 = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega t}{k^2} \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Периодически продолжив $\psi_1(t)$ с интервала $[0, T]$ на всю ось t , получим непрерывную периодическую функцию $a_1(t)$ (рис. 2.13), первая производная которой терпит разрыв в точках $t = \nu T$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\begin{aligned} a_1(t) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega t}{k^2} = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} + t \right)^2, & -T \leq t \leq 0, \\ \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} - t \right)^2, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Как и раньше,

$$\begin{aligned} a_1(t-t_0) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega(t-t_0)}{k^2} = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} + t - t_0 \right)^2, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} - t + t_0 \right)^2, & t_0 \leq t \leq T, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.51)$$

функция, первая производная которой терпит разрыв не в точке $t=0$, а в точке $t=t_0$ ($0 < t_0 < T$), причем

$$a_1(t+t_0) = a_1[t - (T-t_0)]. \quad (2.52)$$

Для получения функции, терпящей разрыв во второй производной, интегрируем почленно (2.49), умножая все интегралы на ω :

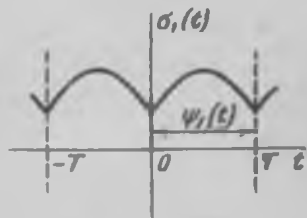


Рис. 2.13

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &= \omega \int_0^t \psi_1(t) dt = \\ &= \omega \int_0^t \left\{ \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{T^2} \left(\frac{T}{2} - t \right)^2 \right\} dt = -\frac{\pi^2}{3T} t + \frac{\pi^2}{T^2} t^2 - \frac{2\pi^3}{3T^3} t^3 = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k^3} \quad (0 \leq t < T). \end{aligned}$$

Периодически продолжив $\psi_2(t)$ с интервала $[0, T]$ на всю ось t , получим периодическую функцию $a_2(t)$, вторая производная которой терпит разрыв в точках $t = \pm T$:

$$\begin{aligned} a_2(t) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k^3} = \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3T} t - \frac{\pi^2}{T^2} t^2 - \frac{2\pi^3}{3T^3} t^3, & -T \leq t \leq 0, \\ -\frac{\pi^2}{3T} t + \frac{\pi^2}{T^2} t^2 - \frac{2\pi^3}{3T^3} t^3, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Как и выше введем функцию, вторая производная которой терпит разрыв в точке $t=t_0$:

$$a_2(t-t_0) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega(t-t_0)}{k^3} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi^3}{3T}(t-t_0) - \frac{\pi^3}{T^2}(t-t_0)^2 - \frac{2\pi^3}{3T^3}(t-t_0)^3, & 0 \leq t \leq t_0, \\ -\frac{\pi^3}{3T}(t-t_0) + \frac{\pi^3}{T^2}(t-t_0)^2 - \frac{2\pi^3}{3T^3}(t-t_0)^3, & t_0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\text{причем } \sigma_2(t+t_0) = \sigma_2[t-(T-t_0)]. \quad (2.55)$$

Продолжая эти построения дальше, можем получить функции $\sigma_s(t)$, терпящие разрыв в производных s -го порядка ($s \geq 3$). Функции $\sigma_s(t)$ можно применить для суммирования некоторых медленно сходящихся рядов Фурье.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k\omega t}{k} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right),$$

коэффициенты которого убывают как $\frac{1}{k}$.

Используя соотношения $\cos k\pi = (-1)^k$, $\sin k\pi = 0$, преобразуем данный ряд:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi \sin k\omega t}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi \sin k\omega t - \sin k\pi \cos k\omega t}{k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega \left(t - \frac{T}{2} \right)}{k}. \end{aligned}$$

В силу (2.47) получаем

$$f(t) = s_0\left(t - \frac{T}{2}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2}\right) = -\frac{\pi t}{T}, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2}\right) = \pi - \frac{\pi t}{T}, & \frac{T}{2} < t < T. \\ 0, & \text{при } t = \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае примененный способ дал возможность просуммировать ряд до конца

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2k)^2}$$

Здесь $\omega = 1$ и $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$. Преобразуем ряд

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{2} \cdot \frac{\cos kx}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos k\pi}{2} \cdot \frac{\cos kx}{k^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi \cdot \cos kx + \sin k\pi \cdot \sin kx}{k^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(x - \pi)}{k^2}. \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями (2.50) и (2.51), находим

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2} [\tau_1(x) + \tau_1(x - \pi)] = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} (\pi - x)^2 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} (\pi + x - \pi)^2 \right], & 0 < x < \pi \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} (\pi - x)^2 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} (\pi - x + \pi)^2 \right], & \pi < x < 2\pi \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{4}, & 0 < x < \pi, \\ \frac{13\pi^2}{24} - \frac{3\pi x}{4} + \frac{x^2}{4}, & \pi < x < 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, и здесь мы просуммировали ряд до конца.

Пример 3. Рассмотрим ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega x}{k^2 + 1} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{T} \right),$$

коэффициенты которого убывают как $\frac{1}{k^2}$.

Очевидно,

$$\frac{1}{k^2 + 1} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} - \dots \right);$$

прогрессия в скобках сходится, так как $\frac{1}{k^2} < 1$. Оборвав эту прогрессию на первом члене и суммируя остаток, получим

$$\frac{1}{k^2 + 1} - \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{1}{k^2 + 1} \right) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + k^2},$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega x}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega x}{k^4 + k^2}.$$

В силу (2.50) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega x}{k^2} = -\sigma_1(x) = \frac{\pi^2}{4l^2}(l-x)^2 - \frac{\pi^2}{12} \quad (0 < x < 2l),$$

так что

$$f(x) = \frac{\pi^2}{4l^2}(l-x)^2 - \frac{\pi^2}{12} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega x}{k^4 + k^2} \quad (0 < x < 2l).$$

Коэффициенты полученного ряда убывают уже как $\frac{1}{k^4}$.

Пример 4.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k}{(2k)^2 - 1} \sin 2k\omega t = \\ &= -\frac{4}{T} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \cos \frac{k\pi}{2}}{k^2 - 1} \sin k\omega t \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{k}{k^2 - 1} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4 - k^2}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^5 - k^3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2} \sin k\omega t}{k} = \\ &= -\frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2} \sin k\omega t}{k^3} - \frac{4}{T} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2}}{k^5 - k^3} \sin k\omega t. \end{aligned}$$

Первые два ряда справа можем просуммировать. Суммируем первый из них:

$$S_1(t) = -\frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2} \sin k\omega t}{k} =$$

$$= -\frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega \left(t + \frac{T}{4}\right) + \sin k\omega \left(t - \frac{T}{4}\right)}{k};$$

на основании формул (2.47) и (2.48) легко находим

$$\begin{aligned} S_1(t) &= -\frac{2}{T} \left[\sigma_0 \left(t + \frac{T}{4}\right) + \sigma_0 \left(t - \frac{T}{4}\right) \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{4\pi t}{T^2}, & 0 < t < \frac{T}{4}, \\ \frac{4\pi t}{T^2} - \frac{2\pi}{T}, & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & t = \frac{T}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

Точно так же с помощью формул (2.54) и (2.55) получаем

$$\begin{aligned} S_2(t) &= -\frac{4}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2} \cdot \sin k\omega t}{k^3} = \\ &= -\frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega \left(t + \frac{T}{4}\right) + \sin k\omega \left(t - \frac{T}{4}\right)}{k^3} = \\ &= \frac{2}{T} \left[\sigma_2 \left(t + \frac{T}{4}\right) + \sigma_2 \left(t - \frac{T}{4}\right) \right] = \\ &= \begin{cases} -\frac{8\pi^3}{3T^4} t^3 + \frac{\pi^3}{6T^2} t, & 0 < t < \frac{T}{4}, \\ -\frac{8\pi^3}{3T^4} t^3 + \frac{4\pi^3}{T^2} t^2 - \frac{11\pi^3}{6T^2} t + \frac{\pi^3}{4T}, & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} f(t) &= S_1(t) + S_2(t) - \frac{4}{T} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{k\pi}{2}}{k^3 - k^2} \sin k\omega t \\ &\quad \left(0 < t < \frac{T}{2}\right). \end{aligned}$$

В исходном ряде коэффициенты убывают как $\frac{1}{k}$, в то время как в последнем — порядок убывания коэффициентов $\frac{1}{k^5}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Функцию $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ ($0 < x < \pi$) разложить в ряд Фурье, коэффициенты которого убывают не медленнее, чем $\frac{1}{k^4}$.

2. Функцию $f(t) = t^2$ ($0 < t < \frac{T}{2}$) разложить в ряд Фурье, коэффициенты которого убывают не медленнее, чем $\frac{1}{k^3}$.

3. Найти сумму ряда Фурье:

$$a) f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right);$$

$$б) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos kx}{k^2};$$

$$в) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k-1)\omega x}{(2k-1)^2} \quad \left(\omega = \frac{\pi}{l}\right);$$

$$г) f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\omega t}{(2k)^4} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right).$$

4. Усилить сходимость ряда таким образом, чтобы его коэффициенты убывали не медленнее, чем $\frac{1}{k^4}$:

$$a) f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 - k^2 + 1}{k^6 + k^2} \cos k\omega t \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right);$$

$$б) f(t) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k^4}{k^5 - 1} \sin kt;$$

$$в) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7 + k^5 + k^4 + k^2 + 1}{k^6 + k^2} \sin k\omega x \quad \left(\omega = \frac{\pi}{l}\right).$$

§ 3. СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2.14. Комплексное представление гармонического колебания. Из теоретической механики известно, что каждое из уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= A \cos(\omega t + \varphi), \\ x_2(t) &= A \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

определяет так называемое гармоническое колебание с амплитудой A , частотой ω (или периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$) и начальной фазой φ . Колебания (2.56) сдвинуты одно по отношению к другому во времени на величину $\frac{T}{4}$ (на четверть периода).

При различных исследованиях бывает удобнее вместо двух действительных функций (2.56) рассматривать одну комплексную функцию времени t

$$x(t) = x_1(t) + i x_2(t) = A \{ \cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) \} = A e^{i(\omega t + \varphi)},$$

которую окончательно представим так

$$x(t) = c e^{i\omega t}, \text{ где } c = A e^{i\varphi}. \quad (2.57)$$

Эта функция называется комплексным гармоническим колебанием. Величина c называется комплексной амплитудой; она определяется амплитудой A и фазой φ колебания. Наоборот, если известна комплексная амплитуда c , то амплитуда и фаза колебания определяются соотношениями:

$$A = |c|, \quad \varphi = \text{Arg } c. \quad (2.58)$$

Действительные гармонические колебания (2.56) являются соответственно действительной и мнимой частями комплексного колебания (2.57), так что

$$x_1(t) = \text{Re } x(t), \quad x_2(t) = \text{Im } x(t).$$

Комплексное гармоническое колебание (2.57) часто геометрически изображают вектором постоянной длины A , вращающимся с угловой скоростью ω . При фиксированной частоте ω комплексное колебание иногда условно изображают постоянным вектором с модулем A и аргументом φ . При сложении и вычитании большого числа гармонических колебаний одной частоты их можно, следовательно, заменить комплексными амплитудами и производить далее все действия над этими амплитудами (графически или аналитически), как над комплексными числами. Определив модуль и аргумент результата, получают амплитуду и фазу суммарного колебания.

2.15. Амплитудный и фазовый спектры периодической функции. Рассмотрим периодическую функцию $f(t)$ периода T , которая, вообще говоря, не является гармоническим коле-

банием. Разложим эту функцию в ряд Фурье (2.15), который, если принять обозначение

$$k\omega = \frac{2k\pi}{T} = \omega_k, \quad (2.59)$$

запишется в виде

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.60)$$

где

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad (2.61)$$

Каждый член ряда (2.60) является комплексным гармоническим колебанием (2.57) с комплексной амплитудой c_k и частотой ω_k . Таким образом, разлагая периодическую функцию в ряд Фурье, мы тем самым представляем ее в виде суммы бесконечного множества комплексных гармонических колебаний, частоты ω_k которых образуют бесконечную арифметическую прогрессию с разностью

$$\omega_k - \omega_{k-1} = \frac{2k\pi}{T} - \frac{2(k-1)\pi}{T} = \frac{2\pi}{T} = \omega.$$

Амплитуды и фазы гармонических колебаний, отвечающих этим комплексным колебаниям, в соответствии с (2.58) определяются формулами

$$A_k = |c_k|; \quad \varphi_k = \text{Arg } c_k. \quad (2.62)$$

Так как аргумент комплексного числа есть функция многозначная (см. п. 1.1), то для вычисления фаз φ_k нужно предварительно договориться о выборе значений $\text{Arg } c_k$. Можно, например, условиться брать главное значение аргумента, т. е. значения, удовлетворяющие условию $-\pi < \varphi_k \leq \pi$.

Амплитуды A_k и фазы φ_k гармонических колебаний, в виде суммы которых представляется периодическая функция $f(t)$, играют большую роль в различных прикладных вопросах. Для наглядного представления этих амплитуд и фаз делают следующие построения. Возьмем ось частот ω и на этой оси отложим частоты ω_k (рис. 2.14). Против каждой частоты ω_k перпендикулярно к оси ω будем откладывать соответствующую амплитуду $A_k = |c_k|$. Построенная таким образом диаграмма носит название амплитудного спектра периодической функции $f(t)$. Так как $c_{-k} = \bar{c}_k$ (формула (2.6)), то $|c_{-k}| = |c_k|$ или $A_{-k} = A_k$, т. е. амплитудный спектр симмет-

ричен относительно прямой $\omega = 0$; а так как $|c_k| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (п. 2.10), то ординаты амплитудного спектра стремятся к нулю по мере удаления от прямой $\omega = 0$ (причем порядок убывания этих ординат не ниже чем $\frac{1}{k}$).

Аналогично строится фазовый спектр функции $f(t)$. Для этого против точек ω_k оси частот откладываются отрезки длины φ_k (вверх при $\varphi_k > 0$ и вниз при $\varphi_k < 0$). Так как $\varphi_k = \text{Arg } c_k$

и $c_{-k} = c_k$, то $\varphi_{-k} = -\varphi_k$, т. е. фазовый спектр симметричен относительно точки $\omega = 0$.

2.16. Равенство Парсеваля. Возьмем два тригонометрических многочлена n -го порядка в комплексной форме (2.8)

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} \text{ и } \psi_n(t) = \sum_{v=-n}^n s_v e^{iv\omega t}.$$

Вычислим среднее по периоду T от произведения этих многочленов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) \psi_n(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-n}^n \sum_{v=-n}^n c_k s_v e^{i(k+v)\omega t} dt = \\ &= \sum_{k=-n}^n \sum_{v=-n}^n c_k s_v \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(k+v)\omega t} dt. \end{aligned}$$

Подобно тому, как мы это сделали в п^о 2.3, находим

$$\int_0^T e^{i(k+v)\omega t} dt = \begin{cases} 0, & \text{если } k+v \neq 0, \\ T, & \text{если } k+v = 0. \end{cases}$$

Поскольку этот интеграл отличен от нуля только в случае $v = -k$, то получаем

$$\frac{1}{T} \int_0^T f_n(t) \psi_n(t) dt = \sum_{k=-n}^n c_k s_{-k} = \sum_{k=-n}^n c_k \bar{s}_k.$$

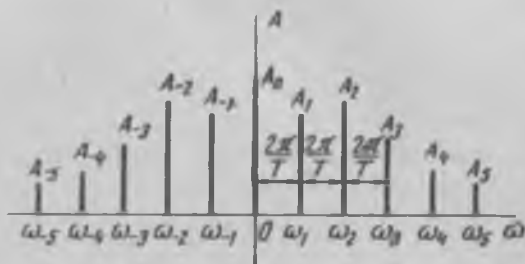


Рис. 2.14

Можно доказать, что полученный результат справедлив не только для тригонометрических многочленов, но и для рядов Фурье, т. е. если $f(t)$ и $\psi(t)$ — две периодические функции периода T , а c_k и s_k — соответственно их комплексные коэффициенты Фурье, то

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \psi(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{s}_k. \quad (2.63)$$

Мы получили так называемое равенство Парсеваля. Для приложений особенно важен частный случай этого равенства при $\psi(t) \equiv f(t)$. В этом случае будем иметь

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (2.64)$$

Так как $|c_{-k}| = |c_k|$, то последнее соотношение можно еще записать так

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt &= |c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \\ &= A_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где $A_k = |c_k|$ — амплитуда k -го из гармонических колебаний, в виде суммы которых представлена функция $f(t)$ (или, короче, амплитуда k -ой гармоники ряда Фурье функции $f(t)$). Итак, среднее по периоду от квадрата периодической функции $f(t)$ равно сумме ряда, составленного из амплитуд гармонических колебаний в виде суммы которых представлена $f(t)$ при ее гармоническом анализе.

2.17. Высокочастотное колебание. В качестве примера гармонического анализа комплексной функции действительного аргумента рассмотрим так называемое высокочастотное колебание. Пусть $\chi(t)$ будет действительная периодическая с периодом T (и частотой $\omega = \frac{2\pi}{T}$) функция, а N — достаточно большое натуральное число. Введем в рассмотрение комплексную функцию $f(t)$ действительного аргумента t :

$$f(t) = \chi(t) e^{i\omega_0 t} \quad (\omega_0 = N \cdot \omega). \quad (2.66)$$

Эта функция называется высокочастотным колебанием; действительная функция $\chi(t)$ называется огибающей

высокочастотного колебания $f(t)$. Комплексное высокочастотное колебание (2.66) распадается на два действительных высокочастотных колебания, являющихся действительной и мнимой частями функции (2.66):

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \operatorname{Re} f(t) = \chi(t) \cos \omega_0 t; \\ f_2(t) &= \operatorname{Im} f(t) = \chi(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

На рис. 2.15 представлен график второй из этих функций (для случая $N=5$). Этот график поясняет смысл термина «огibaющая».

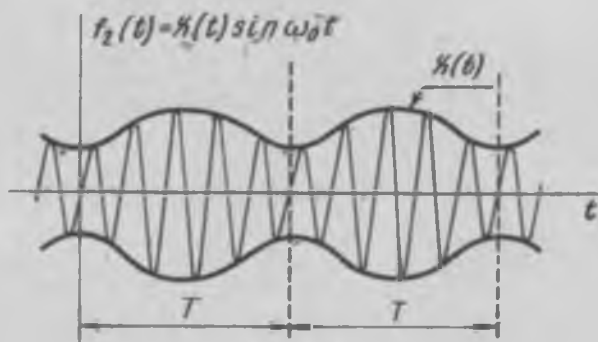


Рис. 2.15

Установим связь между спектрами высокочастотного колебания $f(t)$ и его огибающей $\chi(t)$, для чего разложим эти функции в ряды Фурье:

$$f(t) = \chi(t) e^{i\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikh\omega t}, \quad (2.68)$$

$$\chi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k e^{ikh\omega t}. \quad (2.69)$$

Выше (п° 2.9) мы уже отмечали, что формулы гармонического анализа, известные для действительных функций, остаются в силе и для комплексных функций, за тем лишь исключением, что для комплексной функции $f(t)$, вообще говоря, не имеет место соотношение $c_{-k} = \bar{c}_k$. Для коэффициентов Фурье s_k и c_k имеем выражения ($\omega_0 = N \cdot \omega$):

$$s_k = \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t) e^{-ikh\omega t} dt,$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t) e^{i\omega_0 t} e^{-ikh\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t) e^{-i(k-N)h\omega t} dt = s_{k-N}.$$

Видим, что комплексный коэффициент Фурье высокочастотного колебания $f(t)$ равен коэффициенту Фурье его огибающей $\chi(t)$ с индексом на N единиц меньше. Отсюда следует, что амплитудный и фазовый спектры высокочастотного колебания просто сдвинуты по отношению к соответствующим спектрам его огибающей на величину $N\omega = \frac{2N\pi}{T}$ вправо. Следовательно, высокочастотное колебание разлагается в ряд Фурье следующим образом

$$f(t) = \chi(t) e^{iN\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{k-N} e^{ik\omega t}, \quad (2.70)$$

где s_k — коэффициенты Фурье его огибающей $\chi(t)$.

Отсюда нетрудно получить ряды Фурье косинусоидального и синусоидального высокочастотных колебаний (2.67). Заменяя в (2.70) число N на $-N$, получим

$$\chi(t) e^{-iN\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{k+N} e^{ik\omega t}. \quad (2.71)$$

Сложив почленно (2.70) и (2.71), а затем вычитая из первого равенства второе, найдем

$$\left. \begin{aligned} \chi(t) \cos \omega_0 t &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-N} + s_{k+N}) e^{ik\omega t}; \\ \chi(t) \sin \omega_0 t &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-N} - s_{k+N}) e^{ik\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

Пример. Пусть функция $\chi(t)$ является периодическим продолжением функции $\psi(t) = h \left(1 - \frac{t}{T}\right)$ с интервала $[0, T]$ на всю ось t . Получить ряды Фурье высокочастотных колебаний $f_1(t) = \chi(t) \cos 6\omega t$ и $f_2(t) = \chi(t) \sin 6\omega t$ ($\omega = \frac{2\pi}{T}$, рис. 2.16, а и б).

Вычисляем коэффициенты Фурье огибающей

$$s_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t) dt = \frac{h}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \frac{h}{2};$$

$$s_k = \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{h}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-ik\omega t} dt = -\frac{hl}{2k\pi} \quad (k \neq 0).$$

Таким образом $A_0 = \frac{h}{2}$, $A_1 = \frac{h}{2\pi}$, $A_2 = \frac{h}{4\pi}$, ...

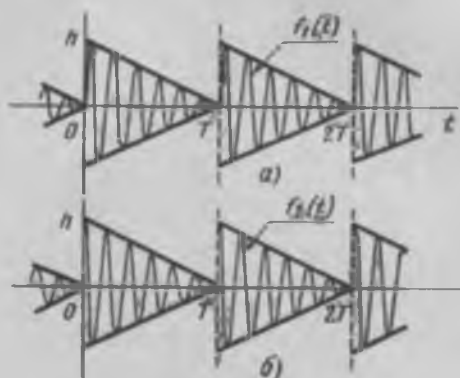


Рис. 2.16

$A_k = \frac{h}{2k\pi}$, ... ($A_k = |c_k|$). По формулам (2.72) находим

$$f_1(t) = \chi(t) \cos 6\omega t = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-6} + s_{k+6}) e^{ik\omega t},$$

$$f_2(t) = \chi(t) \sin 6\omega t =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-6} - s_{k+6}) e^{ik\omega t}.$$

На рис. 2.17 представлен амплитудный спектр огибающей. Сдвинув его на величину 6ω вправо, получим амплитудный спектр высокочастотного колебания $f(t) = \chi(t) e^{i6\omega t}$.

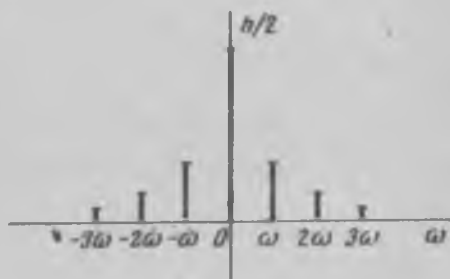


Рис. 2.17

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить амплитудный и фазовый спектры периодической функции $f(t)$, принимая для фаз главные значения:

а) $f(t)$ получается при периодическом продолжении функции $\phi(t) = -\frac{T}{2} - t, -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{4}$; $t, -\frac{T}{4} < t < \frac{T}{4}$; $\frac{T}{2} - t, \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$ с интервала $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ на всю ось t ,

б) $f(t) = |\cos \omega t|$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

2. Вычислив коэффициенты Фурье огибающей $\chi(t)$, написать ряды Фурье высокочастотных колебаний

$$f(t) = \chi(t) e^{i\omega t}, f_1(t) = \chi(t) \cos \omega_1 t \text{ и } f_2(t) = \chi(t) \sin \omega_1 t$$

($\omega_1 = N\omega = \frac{2N\pi}{T}$). Начертить также амплитудный и фазовый спектры огибающей и комплексного высокочастотного колебания: а) $\chi(t)$ получается при периодическом продолжении функции $\psi(t) = h$, $0 < t < \frac{T}{2}$; $0, \frac{T}{2} < t < T$ с интервала $[0, T]$ на всю ось t ($N=5$); б) $\chi(t) = h |\sin \omega t|$ ($h > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $N=6$).

§ 4. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

2.18. Интегральная теорема Фурье. Выше мы получили ряды Фурье для периодической функции, а также для функции, заданной на некотором конечном интервале оси t ; в этом последнем случае ряд Фурье совпадает с рядом Фурье для функции, получающейся при периодическом продолжении рассматриваемой функции с интервала ее задания на всю ось t .

В настоящем параграфе рассмотрим задачу о представлении непериодической функции, заданной на всей оси t .

Пусть непериодическая действительная функция $f(t)$ задана на всей оси t и на любом конечном интервале $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ этой оси удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда на любом таком интервале эта функция может быть представлена рядом Фурье

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} \quad (\omega_k = k\omega = \frac{2k\pi}{T}), \quad (2.73)$$

где

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\theta) e^{-i\omega_k \theta} d\theta. \quad (2.74)$$

В последней формуле мы изменили обозначения переменной интегрирования, так как в дальнейшем нам нужно отличать эту переменную от аргумента t . Подставив (2.74) в (2.73), получим

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\theta) e^{i\omega_k (t-\theta)} d\theta.$$

Положим теперь

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{2k\pi}{T} - \frac{2(k-1)\pi}{T} = \frac{2\pi}{T},$$

тогда последнее равенство переписывается так

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\theta) e^{i\omega_k(t-\theta)} d\theta \right\} \Delta\omega_k \quad (2.75)$$

Для того чтобы получить представление функции $f(t)$, заданной на всей оси t , естественно в последнем равенстве перейти к пределу при условии $T \rightarrow +\infty$. При этом условии $\Delta\omega_k = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, а так как сумма в правой части (2.75) напоминает интегральную сумму для функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{i\omega(t-\theta)} d\theta$$

аргумента ω , составленную для промежутка $-\infty < \omega < +\infty$, то можно ожидать, что в пределе при $T \rightarrow +\infty$ равенство (2.75) перейдет в следующее равенство:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{i\omega(t-\theta)} d\theta \right\} d\omega. \quad (2.76)$$

Трудности строгого доказательства законности описанного предельного перехода заключаются в обосновании перехода от суммы к интегралу и в предельном переходе под знаком суммы. Мы не будем останавливаться на строгом доказательстве формулы (2.76), а ниже сформулируем только достаточные условия представимости функции $f(t)$ выражением (2.76).

Равенство (2.76) называется интегральной формулой Фурье, а его правая часть — интегралом Фурье для функции $f(t)$.

Сформулируем теперь так называемую интегральную теорему Фурье, дающую достаточные условия представимости функции интегралом Фурье:

Теорема. Если функция $f(t)$:

- а) задана на всей оси t ;
- б) на любом конечном интервале этой оси удовлетворяет условиям Дирихле;

в) абсолютно интегрируема на всей оси t , т. е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt,$$

то для всех t функция $f(t)$ представима своим интегралом Фурье, причем:

1) интеграл Фурье равен $f(t)$ во всех точках непрерывности этой функции;

2) в точках разрыва $f(t)$ интеграл Фурье равен $\frac{1}{2} \{f(t-0) + f(t+0)\}$, т. е. равен полусумме левого и правого пределов $f(t)$ в этих точках.

При использовании формулы (2.76) следует иметь в виду, что первое интегрирование в ней следует производить по θ , а второе — по ω ; перестановка порядка интегрирования, вообще говоря, незаконна.

Интегралом Фурье представимы не только действительные, но и комплексные функции $f(t)$ действительного аргумента t . В этом втором случае действительная $f_1(t)$ и мнимая $f_2(t)$ части комплексной функции $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ должны удовлетворять условиям интегральной теоремы Фурье.

2.19. Аналогия с рядами Фурье. Перепишем интегральную формулу Фурье (2.76) следующим образом:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.77)$$

где

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta. \quad (2.78)$$

Интеграл Фурье в форме (2.77) обнаруживает сходство с рядом Фурье (2.73), в котором суммирование по индексу k (связанному с дискретно изменяющейся частотой ω_k) заменяется интегрированием по непрерывно изменяющейся частоте ω . Функция $c(\omega)$, зависящая от непрерывно изменяющейся частоты ω и определяемая формулой (2.78), походит на коэффициент Фурье c_k , определяемый формулой (2.74) и зависящий от дискретно изменяющейся частоты ω_k . Таким образом, если ряд Фурье (2.73) дает разложение периодической функции $f(t)$ на сумму бесконечно большого числа гармоник $c_k e^{i\omega_k t}$, частоты ω_k которых образуют дискретную последовательность, то интеграл Фурье (2.77) дает разложение непериодической функции на непрерывную „сумму“ гармоник $c(\omega) e^{i\omega t}$, частоты

которых также изменяются непрерывно. По этой причине представление непериодической функции интегралом Фурье как и представление периодической функции рядом Фурье называют гармоническим анализом этой функции.

Функцию $c(\omega)$, играющую в теории интеграла Фурье роль коэффициентов Фурье, называют спектральной функцией для функции $f(t)$. Из формулы (2.78) следует соотношение

$$c(-\omega) = \overline{c(\omega)}, \quad (2.79)$$

справедливое для непериодических действительных функций $f(t)$, и аналогичное соотношению $c_{-k} = \overline{c_k}$, имеющему место для периодических действительных функций (для комплексных функций $f(t)$ соотношение (2.79), вообще говоря, не имеет место). Величины

$$A(\omega) = |c(\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \text{Arg } c(\omega) \quad (2.80)$$

дают соответственно амплитуду и фазу гармонического колебания $c(\omega)e^{i\omega t}$, соответствующие данной частоте ω .

Как и для периодических функций, мы можем эти амплитуды и фазы для непериодических функций графически изобразить с помощью амплитудного и фазового спектров.

Возьмем систему координат $A\omega$ (рис. 2.18); на оси абсцисс будем откладывать значения частот ω , а на оси ординат — соответствующие значения амплитуд $A = A(\omega) = |c(\omega)|$. Поскольку для непериодической функции $f(t)$ частота ω изменяется непрерывно в промежутке $-\infty < \omega < +\infty$, то для такой функции

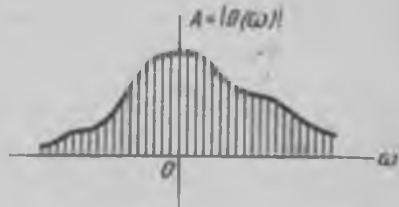


Рис. 2.18.

амплитуды A будут ординатами непрерывной кривой $A = A(\omega)$. Итак, для непериодической функции мы получаем сплошной амплитудный спектр в отличие от дискретного линейчатого амплитудного спектра периодической функции (см. рис. 2.14). Аналогично строится и фазовый спектр непериодической функции, как множество ординат кривой $\varphi = \varphi(\omega) = \text{Arg } c(\omega)$ (надлежит только условиться о выборе значений многозначной функции $\text{Arg } c(\omega)$). И этот спектр тоже будет сплошным. В силу соотношений (2.79) и (2.80) функции $A = A(\omega)$ и $\varphi = \varphi(\omega)$ для действительных функций $f(t)$ будут соответственно четной и нечетной. Ниже (п^о 2.21) мы покажем, что $c(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, откуда следует, что кривая $A = A(\omega)$ имеет ось ω своей асимптотой.

2.20. Действительная форма интеграла Фурье. Интеграл Фурье, как и ряд Фурье, можно для действительных функций $f(t)$ представить в действительной форме. Пусть $f(t)$ — действительная функция. Воспользовавшись формулой Эйлера

$$e^{i\omega(t-\theta)} = \cos \omega(t-\theta) + i \sin \omega(t-\theta),$$

перепишем интегральную формулу Фурье (2.76) в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \cos \omega(t-\theta) d\theta \right\} d\omega + \\ + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \sin \omega(t-\theta) d\theta \right\} d\omega.$$

Выражение в фигурной скобке в первом слагаемом справа является четной функцией от ω , в то время как выражение в фигурной скобке во втором слагаемом — нечетной функцией от ω . Применяв формулу (2.18) (которую нетрудно обобщить и на случай $\pi = \infty$), получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \cos \omega(t-\theta) d\theta \right\} d\omega. \quad (2.81)$$

Это и есть действительная форма записи интеграла Фурье. Последнее равенство можно еще переписать так:

$$f(t) = \int_0^{\infty} \{ a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t \} d\omega, \quad (2.82)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \cos \omega \theta d\theta, \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \sin \omega \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

В равенстве (2.82) нетрудно усмотреть сходство с действительной формой записи ряда Фурье, а в величинах (2.83) — с действительными коэффициентами Фурье.

Рассмотрим еще случаи четной и нечетной функций. Если $f(t)$ — четная функция, то, пользуясь соотношениями (2.18), находим

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\theta) \cos \omega \theta d\theta, \quad b(\omega) = 0,$$

в силу чего интегральная формула Фурье (2.82) примет в этом случае вид

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(\theta) \cos \omega \theta d\theta \right\} \cos \omega t d\omega. \quad (2.84)$$

Если же $f(t)$ — функция нечетная, то

$$a(\omega) = 0, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\theta) \sin \omega \theta d\theta$$

и формула (2.82) примет вид

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} f(\theta) \sin \omega \theta d\theta \right\} \sin \omega t d\omega. \quad (2.85)$$

Сформулированная в п^о 2.18 интегральная теорема Фурье предполагает задание функции $f(t)$ на всей оси t . Если же $f(t)$ задана только на положительной части $[0, +\infty)$ этой оси, то функцию $f(t)$ можно по желанию представить либо формулой (2.84), либо формулой (2.85). В первом случае интеграл Фурье будет давать четное, а во втором — нечетное продолжение функции $f(t)$ из промежутка $[0, +\infty)$ в промежуток $(-\infty, 0]$.

Пример 1. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ h & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Функция $f(t)$ очевидно удовлетворяет всем условиям интегральной теоремы Фурье. Вычисляем спектральную функцию (2.78):

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} h e^{-i\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2i\omega\tau} (1 - e^{-i\omega\tau}).$$

Следовательно, искомое представление (2.77) будет

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} (1 - e^{-i\omega\tau}) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отделив здесь действительную и мнимую части и пользуясь соотношениями (2.18), можем записать полученный результат в действительной форме

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2} \cdot \cos \omega \left(\frac{\tau}{2} - t \right)}{\omega} d\omega.$$

Этот же результат легко получить непосредственно, пользуясь формулами (2.82) и (2.83). В силу интегральной теоремы Фурье будем, таким образом, иметь

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2} \cdot \cos \omega \left(\frac{\tau}{2} - t \right)}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{h}{2} & \text{при } t = 0, \\ h & \text{при } 0 < t < \tau, \\ \frac{h}{2} & \text{при } t = \tau, \\ 0 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Приняв, в частности, $\tau = 1$, $h = 1$, найдем отсюда при $t = 0$ интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}, \quad (2.86)$$

который иначе можно вычислить с помощью теории вычетов (п^о 1.56).

Пример 2. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(t) = e^{-\alpha |t|} \quad (\alpha > 0).$$

И эта функция, как нетрудно убедиться, удовлетворяет всем условиям интегральной теоремы Фурье. Имеем

$$\begin{aligned} c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\theta} e^{-i\omega\theta} d\theta + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\theta} e^{-i\omega\theta} d\theta \right) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (2.77) будет

$$f(t) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Так как рассматриваемая функция $f(t)$ — четная, то этот же результат можно получить, пользуясь формулой (2.84).

Пример 3. Пусть действительная непериодическая функция $\chi(t)$ является огибающей колебания $f(t) = \chi(t) e^{i\omega_0 t}$ (в п. 2.17 мы рассмотрели случай периодической огибающей). Спектральная функция огибающей

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta;$$

тогда для спектральной функции колебания $f(t)$ находим

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\theta) e^{-i(\omega - \omega_0)\theta} d\theta = s(\omega - \omega_0).$$

Для спектральной функции сопряженного колебания $\overline{f(t)} = \chi(t) e^{-i\omega_0 t}$ точно так же найдем

$$c_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\theta) e^{-i(\omega + \omega_0)\theta} d\theta = s(\omega + \omega_0).$$

Складывая и вычитая почленно последние два равенства, найдем для спектральных функций косинусоидального и синусоидального колебаний $f_1(t) = \chi(t) \cos \omega_0 t$ и $f_2(t) = \chi(t) \sin \omega_0 t$ с огибающей $\chi(t)$ соответственно выражения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\theta) \cos \omega_0 \theta e^{-i\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2} \{s(\omega - \omega_0) + s(\omega + \omega_0)\},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\theta) \sin \omega_0 \theta e^{-i\omega\theta} d\theta = \frac{1}{2i} \{s(\omega - \omega_0) - s(\omega + \omega_0)\}.$$

2.21. Порядок убывания спектральной функции. Будем предполагать, что функция $f(t)$ и все рассматриваемые ее первые производные на любом конечном интервале оси t удовлетворяют условиям Дирихле. Рассмотрим спектральную функцию

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta. \quad (2.87)$$

Разбивая ось t на части так, чтобы точки разрыва функции $f(t)$ и ее производных были точками деления, заменяя интеграл (2.87) суммой интегралов по этим частичным интервалам и применяя к каждому из этих интервалов формулу интегрирования по частям, мы, как и в п^о 2.10, найдем, что $|c(\omega)| \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, причем порядок убывания $|c(\omega)|$ не ниже чем $\frac{1}{\omega}$.

Если функция $f(t)$ разрывна, то $|c(\omega)| \rightarrow 0$ и не быстрее чем $\frac{1}{\omega}$, т. е. выражение $\left| \frac{c(\omega)}{\frac{1}{\omega}} \right| = |\omega \cdot c(\omega)|$ не стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

Если функция $f(t)$ непрерывна, то порядок убывания $|c(\omega)|$ не ниже, чем $\frac{1}{\omega^2}$; если же при этом производная $f'(t)$ разрывна, то порядок убывания $|c(\omega)|$ и не выше чем $\frac{1}{\omega^2}$, т. е. выражение $|\omega^2 c(\omega)|$ не стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

И вообще, если $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными до $(m-1)$ -го порядка, а $f^{(m)}(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале оси t , то порядок убывания $|c(\omega)|$ не ниже чем $\frac{1}{\omega^{m+1}}$, т. е. существует такая постоянная s , что

$$|c(\omega)| \leq \frac{s}{|\omega^{m+1}|} \quad (-\infty < \omega < +\infty).$$

Если же при этом $f^{(m)}(t)$ разрывна, то порядок убывания $|c(\omega)|$ и не выше чем $\frac{1}{\omega^{m+1}}$, т. е. выражение $|\omega^{m+1} c(\omega)|$ не стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$.

Примеры. Обратимся еще раз к примерам предыдущего пункта. Функция $f(t)$, рассмотренная в первом примере, терпит разрыв в точках $t=0$ и $t=\tau$. Для спектральной функции в этом примере мы получили выражение

$$c(\omega) = \frac{1}{2\omega\pi i} (1 - e^{-i\omega\tau}),$$

откуда

$$\begin{aligned} |c(\omega)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{\omega} (1 - e^{-i\omega\tau}) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega\tau + i \sin \omega\tau) \right| = \frac{1}{2\pi |\omega|} \sqrt{(1 - \cos \omega\tau)^2 + \sin^2 \omega\tau} = \\ &= \frac{1}{2\pi |\omega|} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}} = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \right|. \end{aligned}$$

Видим, что в этом случае $|c(\omega)|$ убывает как $\frac{1}{\omega}$, что находится в соответствии со сформулированным правилом.

Во втором из упомянутых примеров функция $f(t) = e^{-\alpha|t|}$ ($\alpha > 0$) непрерывна, но ее производная $f'(t)$ терпит разрыв в точке $t=0$. В этом случае

$$|c(\omega)| = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)},$$

откуда следует, что $|c(\omega)|$ убывает как $\frac{1}{\omega^2}$ в соответствии с тем же правилом.

2.22. Равенство Парсеваля для непериодических функций. Пусть $f(t)$ и $\psi(t)$ — две комплексные непериодические функции, действительные и мнимые части которых удовлетворяют условиям интегральной теоремы Фурье. Представим эти функции интегралами Фурье (2.77):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda,$$

где $c(\omega)$ и $s(\omega)$ — спектральные функции соответственно для $f(t)$ и $\psi(t)$ (в целях удобства дальнейших выкладок во втором из этих интегралов переменная интегрирования ω заменена на λ). Выбрав некоторое $\tau > 0$, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \overline{\psi(t)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} \overline{s(\lambda)} e^{-i\lambda t} dt d\omega d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \overline{s(\lambda)} \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} e^{i(\omega - \lambda)t} dt \right\} d\omega d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s(\lambda)} \frac{\sin(\omega - \lambda)\tau}{\omega - \lambda} d\lambda \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Законность произведенного нами изменения порядка интегрирования может быть строго обоснована. Перейдя во внутреннем интеграле от переменной интегрирования λ к переменной Ω по формуле $(\omega - \lambda)\tau = \Omega$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) \overline{\psi(t)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s\left(\omega - \frac{\Omega}{\tau}\right)} \frac{\sin \Omega}{\Omega} d\Omega \right\} d\omega.$$

При $\tau \rightarrow +\infty$ подынтегральная функция внутреннего интеграла стремится к $\overline{s(\omega)} \frac{\sin \Omega}{\Omega}$. Можно строго доказать, что при $\tau \rightarrow +\infty$ последнее равенство в пределе перейдет в следующее

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(t)} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{s(\omega)} \frac{\sin \Omega}{\Omega} d\Omega \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \overline{s(\omega)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega}{\Omega} d\Omega \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая значение интеграла (2.86), окончательно получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \overline{s(\omega)} d\omega. \quad (2.88)$$

Мы получили равенство Парсеваля для непериодических функций, аналогичное равенству (2.63) для периодических функций. В частном случае, когда $\psi(t) \equiv f(t)$, равенство (2.88) дает

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 d\omega, \quad (2.89)$$

т. е. деленный на 2π интеграл по всей оси t от квадрата модуля функции $f(t)$ равен интегралу по оси t от квадрата модуля ее спектральной функции $c(\omega)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Представить интегралом Фурье следующие функции:

$$a) f(t) = \begin{cases} h & \text{при } |t| < \tau \\ 0 & \text{при } |t| > \tau \end{cases}; \quad б) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

$$\text{где } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ +1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad в) f(t) = \operatorname{sgn}(t - \alpha) - \operatorname{sgn}(t - \beta) \quad (\beta > \alpha);$$

$$г) f(t) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right) & \text{при } |t| < \tau, \\ 0 & \text{при } |t| > \tau; \end{cases}$$

$$д) f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } |t| < \pi, \\ 0 & \text{при } |t| > \pi. \end{cases}$$

2. Функцию $f(t) = e^{-t}$ ($0 < t < +\infty$) представить интегралом Фурье, продолжая ее: а) четным образом; б) нечетным образом.

3. Используя результаты примера 3 из п 2.20, представить интегралом Фурье колебания $f_1(t) = \chi(t) \cos \omega_0 t$ и $f_2(t) = \chi(t) \sin \omega_0 t$, если: а) $\chi(t) = e^{-\alpha|t|}$ ($\alpha > 0$);

$$б) \chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{-\alpha t} & (\alpha > 0) \text{ при } t > 0; \end{cases}$$

$$в) \chi(t) = \begin{cases} h & \text{при } |t| < \frac{2n\pi}{\omega_0}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{2n\pi}{\omega_0} \end{cases} \quad (n - \text{натуральное число}).$$

4. Проверить справедливость равенства (2.89) для функций:

$$a) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{-\alpha t} & (\alpha > 0) \text{ при } t > 0; \end{cases} \quad б) f(t) = e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha > 0).$$

§ 1. ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ

3.1. Оригиналы и изображения. Пусть $f(t)$ — действительная функция действительного аргумента t , который будем интерпретировать как время или как пространственную координату (в последнем случае аргумент чаще обозначают буквой x).

Определение. Будем называть функцию $f(t)$ *оригиналом*, если она удовлетворяет трем требованиям:

а) $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ на любом конечном интервале оси t имеют не более конечного числа точек разрыва 1-го рода,

б) $f(t) = 0$, при $t < 0$,

в) существуют такие постоянные $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для всех t .

Условие а) означает, что оригинал $f(t)$ является кусочно-гладкой функцией времени t (или пространственной координаты); это значит, что любой конечный интервал оси t можно разбить на конечное число таких интервалов, в каждом из которых $f(t)$ и $f'(t)$ непрерывны и в концах этих интервалов имеют конечные левые и правые пределы. Большинство практически встречающихся функций этому условию удовлетворяет. Условие б) оправдано тем, что для физики и техники совершенно безразлично, как ведут себя рассматриваемые функции до некоторого начального момента времени, который, разумеется, всегда можно принять за момент $t = 0$. Условие в) накладывает ограничение на характер роста оригинала $f(t)$, а именно требует, чтобы $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ возрастала не быстрее показательной функции. Большинство функций, встречающихся на практике, удовлетворяет и этому условию. Число s_0 из условия в) будем называть показателем роста $f(t)$.

В силу условия б) мы в дальнейшем под значением $f(0)$ оригинала $f(t)$ в точке $t = 0$ будем понимать правый предел

$$f(0+0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать и комплексные функции $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ действительного аргумента t . Комплексную функцию $f(t)$ будем называть оригиналом в случае, если ее действительная и мнимая части $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами.

Каждому оригиналу $f(t)$ (комплексному или действительному) поставим в соответствие функцию $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\omega$, определенную как интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (3.1)$$

Правая часть этого равенства называется интегралом Лапласа для функции $f(t)$. Функцию $F(p)$ будем называть изображением Лапласа (или короче — изображением) оригинала $f(t)$. Тот факт, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, будем записывать так

$$F(p) \leftarrow f(t),$$

или

$$f(t) \leftarrow F(p)$$

(стрелка направлена всегда от изображения к оригиналу). При этом условимся обозначать оригиналы малыми буквами, а изображения — соответствующими прописными буквами.

Пример 1. Найти изображение единичной функции Хевисайда, которая обозначается и определяется в соответствии с равенством:

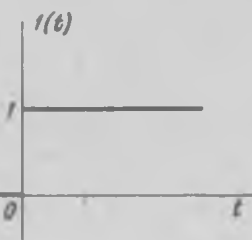


Рис. 3.1

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

(рис. 3.1). Пользуясь определением (3.1), находим при $s = \operatorname{Re} p > 0$

$$\begin{aligned} 1(t) &\leftarrow \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Итак,

$$1(t) \leftarrow \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (3.3)$$

Пример 2. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{at} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

где a — комплексное число. Имеем

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a}$$

если $\operatorname{Re}(p - a) > 0$ или $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ (т. е. правее прямой $p = \operatorname{Re} a$).
Итак,

$$1(t) e^{at} \leftarrow \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a). \quad (3.4)$$

Роль множителя $1(t)$ в левой части (3.4) состоит в том, что он «гасит» (обращает в нуль) функцию при $t < 0$.

Вообще, если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям а) и в), накладываемым на оригинал, но не удовлетворяет условию б), то функция $1(t) f(t)$, погашенная при $t < 0$, уже будет оригиналом. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые нами функции снабжены множителем $1(t)$, хотя сам этот множитель в написании часто будем опускать. Так, например, мы можем писать t^n , $e^{at} \sin \omega t$ и т. д., подразумеваемая при этом соответственно $1(t) \cdot t^n$, $1(t) e^{at}$, $1(t) \sin \omega t$ и т. д.

В заключение настоящего пункта отметим, что изображение $F(p)$ обладает свойством линейности, т. е.

1) если $C = \text{const}$ и $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$Cf(t) \leftarrow CF(p), \quad (3.5)$$

2) если $f_1(t) \leftarrow F_1(p)$ и $f_2(t) \leftarrow F_2(p)$, то

$$f_1(t) + f_2(t) \leftarrow F_1(p) + F_2(p). \quad (3.6)$$

Таким образом, изображение произведения оригинала на число равно произведению изображения оригинала на это число; изображение суммы двух оригиналов равно сумме изображений этих оригиналов. Эти свойства сразу же вытекают из формулы (3.1).

Следствием двух последних соотношений является общая формула

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) \leftarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p) + \dots + c_n F_n(p).$$

3.2. Существование изображений.

Естественно теперь спросить — для всякого-ли оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 — показатель роста функции $f(t)$. причем функция $F(p)$ аналитична в упомянутой полуплоскости (рис. 3.2).

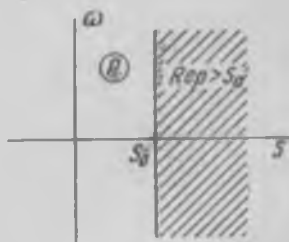


Рис. 3.2

Доказательство первой части теоремы просто. Пусть $p = s + i\omega$, любая точка полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ ($s > s_0$), тогда, применяя условие в) из определения оригинала, найдем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| &\leq \int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt < \\ < M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} |e^{-pt}| dt = M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

так как $s - s_0 > 0$; отсюда в силу признака сравнения сразу же вытекает сходимость интеграла (3.1), т. е. факт существования и однозначности изображения $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$.

Вторая часть теоремы доказывается сложнее. Чтобы доказать аналитичность $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, достаточно показать существование производной $F'(p)$ в любой точке этой полуплоскости (п. 1.20). Пусть опять $p = s + i\omega$, любая точка полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F(p)}{\Delta p} &= \frac{1}{\Delta p} \{F(p + \Delta p) - F(p)\} = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \frac{1}{\Delta p} \{e^{-(p+\Delta p)t} - e^{-pt}\} dt = \int_0^{\infty} f(t) \frac{e^{-pt}}{\Delta p} \{e^{-t\Delta p} - \\ &- 1\} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \frac{1}{\Delta p} \left\{ -t\Delta p + \frac{(t\Delta p)^2}{2!} - \frac{(t\Delta p)^3}{3!} + \dots \right\} dt = \\ &= - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} \left\{ 1 - \frac{t\Delta p}{2!} + \frac{(t\Delta p)^2}{3!} - \dots \right\} dt = \\ &= - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt + \eta(\Delta p), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\eta(\Delta p) = \Delta p \cdot \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} \left(\frac{1}{2!} - \frac{t\Delta p}{3!} + \dots \right) dt.$$

Так как первое слагаемое в (3.8) от Δp не зависит, то для доказательства существования производной $F'(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta F(p)}{\Delta p}$ достаточно показать, что $\eta(\Delta p) \rightarrow 0$ при $\Delta p \rightarrow 0$. Имеем

$$|\eta(\Delta p)| = |\Delta p| \cdot \left| \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{t\Delta p}{3!} + \dots \right) dt \right| <$$

$$\begin{aligned}
&< |\Delta p| \cdot \int_0^{\infty} t^2 |f(t)| \cdot |e^{-pt}| \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{t|\Delta p|}{3!} + \dots \right) dt < \\
&< |\Delta p| \cdot \int_0^{\infty} t^2 M e^{-(s-s_0)t} \left(1 + \frac{t|\Delta p|}{1!} + \frac{(t|\Delta p|)^2}{2!} + \dots \right) dt = \\
&= M |\Delta p| \int_0^{\infty} t^2 e^{-(s-s_0)t} e^{t|\Delta p|} dt = \\
&= M |\Delta p| \int_0^{\infty} t^2 e^{-(s-s_0-|\Delta p|)t} dt.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, легко найдем

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-at} dt = \frac{2}{a^3} \quad (a > 0).$$

Используя этот результат, получим

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-(s-s_0-|\Delta p|)t} dt = \frac{2}{(s-s_0-|\Delta p|)^3}$$

при $s-s_0-|\Delta p| > 0$ или при $\operatorname{Re} p > s_0 + |\Delta p|$.

Итак,

$$|\eta(\Delta p)| < \frac{2M|\Delta p|}{(s-s_0-|\Delta p|)^3}.$$

откуда и следует, что $\eta(\Delta p) \rightarrow 0$ при $\Delta p \rightarrow 0$. Из (3.8) тогда сразу же находим

$$F'(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt. \quad (3.9)$$

Таким образом, доказано существование производной $F'(p)$ или аналитичность $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0 + |\Delta p|$, а так как $|\Delta p|$ можно взять сколь угодно малым, то и в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Заметим, что правая часть формулы (3.9) получается из правой части формулы (3.1) дифференцированием последней по p под знаком интеграла.

Теорема, которую можно назвать теоремой существования изображений полностью доказана.

Следствие. Если точка $p \rightarrow \infty$ так, что $\operatorname{Re} p = s \rightarrow +\infty$, то изображение $F(p) \rightarrow 0$.

Справедливость этого утверждения сразу же следует из неравенства (3.7).

Из доказанной теоремы и ее следствия вытекает, что не всякая функция $F(p)$ комплексного переменного p может

служить изображением некоторого оригинала $f(t)$. Из аналитичности $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ следует, что все особые точки функции $F(p)$ должны лежать левее прямой $s = s_0$ (или на самой этой прямой). По этой причине функция $\operatorname{tg} p$ не является изображением: она имеет бесконечное множество полюсов $p_k = \frac{2k-1}{2} \pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), распределенных по всей оси s . Функция же p^a не является изображением, так как она не стремится к нулю при $s \rightarrow +\infty$.

Отметим, с другой стороны, что изображения $F(p)$ могут существовать не только для функций, которые являются оригиналами. Так, например, нетрудно показать, что для функции $\frac{1}{\sqrt{t}}$ (и, вообще, для функции t^a , $-1 < a < 0$) интеграл Лапласа (3.1) сходится и, следовательно, для нее существует изображение, хотя эта функция и не является оригиналом (п. 3.17). Таким образом, условия а), б) и в), которым удовлетворяют оригиналы, являются достаточными, но не необходимыми условиями существования изображения функции.

Сформулируем еще **теорему единственности оригинала**: если $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех тех точках, в которых они непрерывны (доказательство этого утверждения см. ниже в п. 3.19).

3.3. Примеры вычислений изображений. Дифференцирование и интегрирование изображений.

Найдем изображение постоянной функции $f(t) = C = \text{const}$ (более точная запись этой функции $f(t) = C \cdot 1(t)$; напомним, что множитель $1(t)$ у оригиналов мы часто будем подразумевать, но не писать). Используя формулы (3.3) и (3.5), сразу находим:

$$C \longleftrightarrow \frac{C}{p}. \quad (3.10)$$

Используя формулы (1.26), (3.6), (3.5) и (3.4), получим

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \longleftrightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \\ \cos \omega t &= \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sin \omega t \longleftrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \longleftrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (3.11)$$

Точно так же в силу (1.31) находим

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} \omega t &= \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \leftarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \\ \operatorname{ch} \omega t &= \frac{1}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \leftarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\operatorname{sh} \omega t \leftarrow \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \leftarrow \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (3.12)$$

Получим важную формулу, связанную с дифференцированием изображений. В предыдущем пункте мы показали, что изображение $F(p)$ есть аналитическая функция комплексного переменного p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, причем, как это видно из формулы (3.9), производная $F'(p)$ изображения получается дифференцированием интеграла (3.1) по параметру p . Но тогда (п. 1.43) функция $F(p)$ дифференцируема в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ сколько угодно раз и, следовательно, все производные $F'(p)$, $F''(p)$, ... аналитичны в области $\operatorname{Re} p > s_0$. Эти производные получаются путем дифференцирования интеграла (3.1) по параметру p соответственно один, два и т. д. раз.

Последовательно дифференцируя (3.1), находим

$$\begin{aligned}F'(p) &= - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt; \\ F''(p) &= \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt; \\ F'''(p) &= - \int_0^{\infty} t^3 f(t) e^{-pt} dt\end{aligned}$$

и вообще

$$(-1)^n F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} t^n f(t) e^{-pt} dt.$$

Так как интеграл в правой части этого равенства есть изображение оригинала $t^n f(t)$, то приходим к следующему результату: если

$$f(t) \leftarrow F(p),$$

то

$$t^n f(t) \leftarrow (-1)^n F^{(n)}(p). \quad (3.13)$$

В частности, положив в этой формуле $f(t) = 1(t)$ и используя (3.3), найдем изображение степенной функции

$$t^n \leftarrow (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (3.14)$$

Приняв $f(t) = e^{at}$, получим в силу (3.4):

$$t^n e^{at} \longleftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \frac{1}{p-a} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}. \quad (3.15)$$

Еще одна важная формула связана с интегрированием изображений. Пусть $f(t) \longleftrightarrow F(p)$; предположив, что $\frac{f(t)}{t}$ — оригинал, положим

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \Phi(p).$$

Отсюда по правилу дифференцирования изображений следует, что $-\Phi'(p) \longleftrightarrow f(t)$. Следовательно,

$$-\Phi'(p) = F(p).$$

Интегрируем последнее равенство в пределах от p до q :

$$\Phi(p) - \Phi(q) = \int_p^q F(p) dp.$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty$ и принимая во внимание, что при этом условии $\Phi(q) \rightarrow 0$ (следствие из теоремы п 3.2), получим

$$\Phi(p) = \int_p^\infty F(p) dp \longleftrightarrow \frac{f(t)}{t}. \quad (3.16)$$

Итак, интегрирование изображения $F(p)$ по промежутку $[p, \infty)$ приводит к делению оригинала $f(t)$ на t (при условии, что $\frac{f(t)}{t}$ — оригинал).

Пример 1. Найти изображение оригинала $f(t) = 4 - 5e^{2t}$.
В силу (3.10), (3.4) и свойств линейности (3.5) и (3.6), находим

$$F(p) = \frac{4}{p} - \frac{5}{p-2} = \frac{8+p}{2p-p^2}.$$

Пример 2. Найти изображение оригинала $f(t) = 3t^2 e^{-t} + 2t^2 - 1$.
Применяя (3.15), (3.14), (3.10) и свойства линейности получаем

$$F(p) = 3 \frac{2!}{(p+1)^3} + 2 \frac{2!}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{18}{(p+1)^3} + \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p}.$$

Пример 3. Найти изображение оригинала $f(t) = 2 \sin 2t + 3 \operatorname{sh} 2t$.
В силу (3.11) и (3.12), находим

$$F(p) = 2 \frac{2}{p^2+4} + 3 \frac{2}{p^2-4} = \frac{10p^2+8}{p^4-16}.$$

Пример 4. Найти изображения оригиналов $\frac{\sin t}{t}$ и $\frac{\operatorname{sh} t}{t}$. Так как $\sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}$ и $\operatorname{sh} t \leftarrow \frac{1}{p^2 - 1}$, то, применяя формулу (3.16), находим

$$\frac{\sin t}{t} \leftarrow \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} p = \operatorname{arccotg} p,$$

$$\frac{\operatorname{sh} t}{t} \leftarrow \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}.$$

Пример 5. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{2p^2 - 4p + 8}{(p-2)^2(p^2+4)}$

Разложив рациональную дробь $F(p)$ на простейшие и применяя затем формулы (3.15) и (3.11), найдем

$$\begin{aligned} \frac{2p^2 - 4p + 8}{(p-2)^2(p^2+4)} &= \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p^2+4} = \\ &= \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2+4} \rightarrow te^{2t} + \frac{1}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти изображения следующих оригиналов:

- а) $4t^2 - 2t + 3$; б) $\frac{1}{3}t^3 + 4 \cos 2t$; в) $\frac{1}{3} \sin 3t - 5$;
 г) $t^2 e^t + 2te^{-t} + 4 \operatorname{ch} 2t$; д) $t \sin \omega t$; е) $t \cos \omega t$; ж) $\cos^2 \omega t$; з) $\cos 2t \cdot \sin 3t$;
 и) $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$.

2. Найти оригинал по заданному его изображению:

- а) $\frac{3-2p^2}{p^4}$; б) $\frac{1}{(p^2+1)p^2}$; в) $\frac{4-p}{(p-2)^3}$; г) $\frac{p+2}{p^2-1}$;
 д) $\frac{5p^3+5p^2-11p+3}{(p+3)p^3}$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

ИЗОБРАЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРИГИНАЛОВ

3.4. Теорема подобия. Выясним, каким образом влияет на изображение $F(p)$ изменение масштаба оси t , на который определен оригинал $f(t)$? Отвечает на этот вопрос следующая

Теорема. Если a — положительное число и $f(t) \leftarrow F(p)$,

$$f(at) \leftarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Доказательство. Положив $at = \theta$, имеем в силу (3.1):

$$\begin{aligned} f(at) &\leftarrow \int_0^{\infty} f(at) e^{-pt} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-\frac{p}{a}\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{p}{a}t} dt = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, умножение аргумента оригинала на положительное число a приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

3.5. Теорема запаздывания. Рассмотрим оригинал $f(t)$, $t \geq 0$. Тогда функция

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ f(t - \tau) & \text{при } t \geq \tau, \end{cases}$$

где τ — положительное число имеет график, который получается из графика $f(t)$ сдвигом последнего на величину τ вдоль оси t (рис. 3.3). Таким образом, если функция $f(t)$ определяет течение во времени некоторого процесса, то функция $g(t)$ определяет тот же процесс, но начавшийся с опозданием τ . С помощью единичной функции Хевисайда запаздывающую функцию $g(t)$ можно записать так

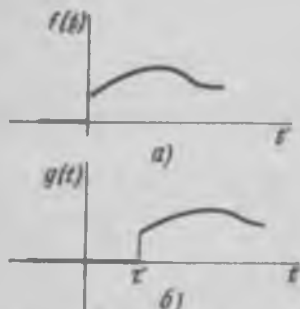


Рис. 3.3

$$g(t) = 1(t - \tau) \cdot f(t - \tau),$$

ибо $1(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$ (в этом случае аргумент отрицателен) и 1 при $t \geq \tau$.

Спрашивается, как, зная изображение некоторого оригинала, найти изображение этого оригинала в случае, когда его аргумент запаздывает на τ ? Для ответа рассмотрим теорему.

Теорема. Если τ — положительное число и $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$1(t - \tau) \cdot f(t - \tau) \leftarrow e^{-p\tau} F(p). \quad (3.17)$$

Доказательство. Положив $t - \tau = \theta$, находим

$$\begin{aligned} 1(t - \tau) \cdot f(t - \tau) &\leftarrow \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-p(\tau + \theta)} d\theta = \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

Таким образом, запаздывание аргумента оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$.

Пример 1. Найти изображение оригинала $f(t) = (t-1)^2 \cdot 1(t-1)$.

Здесь $f(t)$ есть функция t^2 , но «включаемая» с запаздыванием $\tau = 1$.

Так как $t^2 \leftrightarrow \frac{2}{p^3}$ (формула (3.14)), то по теореме запаздывания (3.17) имеем

$$(t-1)^2 \cdot 1(t-1) \leftrightarrow \frac{2}{p^3} e^{-p}.$$

Если бы мы в записи функции $f(t)$ опустили множитель $1(t-1)$, то получили бы функцию $(t-1)^2$; но, как мы условились в п. 3.1, такая функция означает оригинал $(t-1)^2 \cdot 1(t)$ без запаздывания. Изображение этого оригинала будет

$$(t-1)^2 \cdot 1(t) = (t^2 - 2t + 1) \cdot 1(t) \leftrightarrow \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Таким образом, недопустимо опускать множители вида $1(t-\tau)$ в записи функций, ибо это может привести к недоразумениям.

Пример 2. Найти изображения функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, представленных соответственно на рис. 3. 4, а и б.

Первая функция есть импульс величины 3, «включаемый» в момент $t=0$ и «погашаемый» в момент $\tau=2$; следовательно,

$$f_1(t) = 3 - 3 \cdot 1(t-2).$$

Точно так же $f_2(t) = 2 + 2 \cdot 1(t-1) - 3 \cdot 1(t-2) - 1 \cdot 1(t-3)$. Применяя формулы (3.10) и (3.17), находим

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{3}{p} - \frac{3}{p} e^{-2p} = \\ &= \frac{3}{p} (1 - e^{-2p}), \\ F_2(p) &= \frac{2}{p} + \frac{2}{p} e^{-p} - \\ &- \frac{3}{p} e^{-2p} - \frac{1}{p} e^{-3p}. \end{aligned}$$

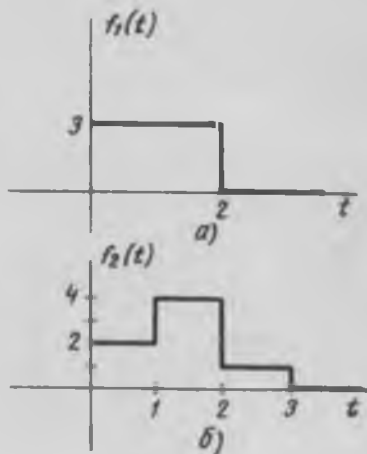


Рис. 3.4

Пример 3. Найти изображение периодического с периодом T прямоугольного импульса $f(t)$ величины A и продолжительности τ (рис. 3.5).

Поступая как в предыдущем примере, найдем

$$\begin{aligned} f(t) &= A - A \cdot 1(t-\tau) + A \cdot 1(t-T) - A \cdot 1(t-T-\tau) + \\ &+ A \cdot 1(t-2T) - A \cdot 1(t-2T-\tau) + \dots \end{aligned}$$

Свойство линейности изображений (п^о 3.1) мы ввели для конечного числа слагаемых. Полагая, что это свойство верно и для случая бесконечно большого числа слагаемых, найдем

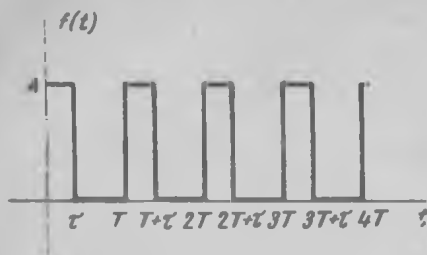


Рис. 3.5

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{A}{p} - \frac{A}{p} e^{-p\tau} + \\ &+ \frac{A}{p} e^{-pT} - \frac{A}{p} e^{-p(T+\tau)} + \\ &+ \frac{A}{p} e^{-p2T} - \frac{A}{p} e^{-p(2T+\tau)} + \dots = \\ &= \frac{A}{p} (1 - e^{-p\tau}) [1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots]. \end{aligned}$$

Так как $|e^{-pT}| = |e^{-(s+i\omega)T}| = e^{-sT} < 1$, то, суммируя прогрессию, находящуюся в фигурной скобке, окончательно получим

$$F(p) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 - e^{-pT}}.$$

правда, в силу сделанного выше замечания этот результат, вообще говоря, требует дополнительной проверки, что мы и сможем сделать ниже (п^о 3.8).

Пример 4. Построить график функции $f(t) = (t^2 - 6t + 11) \cdot 1(t-2)$ и найти ее изображение.

Функция $f(t)$ описывает некоторый процесс, «включаемый» с запаздыванием $\tau = 2$; для того чтобы решить, какой это процесс, нужно заданную функцию представить в форме $f(t) = \varphi(t-2) \cdot 1(t-2)$. Сделаем это:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2 - 6t + 11) \cdot 1(t-2) = [(t-2)^2 + 4t - 4 - 6t + 11] \cdot 1(t-2) = \\ &= [(t-2)^2 - 2t + 7] \cdot 1(t-2) = [(t-2)^2 - 2(t-2) + 3] \cdot 1(t-2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(t)$ есть процесс $\varphi(t) = t^2 - 2t + 3$, «включаемый» с запаздыванием $\tau = 2$. На рис. 3.6 представлены графики функций $\varphi(t)$ и $f(t)$. Так как

$$\varphi(t) = t^2 - 2t + 3 \leftarrow \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p},$$

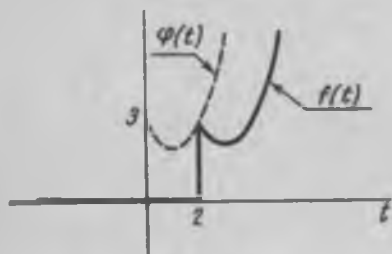


Рис. 3.6

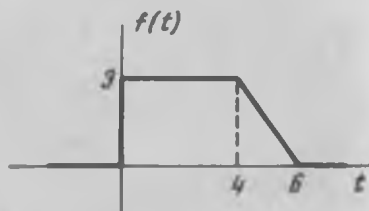


Рис. 3.7

то, применяя теорему (3.17), находим

$$f(t) = \varphi(t-2) \cdot 1(t-2) \leftarrow \left(\frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p} \right) e^{-2p}.$$

Пример 5. На рис. 3.7 представлен график функции

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 3 & \text{при } 0 \leq t < 4, \\ 9 - \frac{3}{2}t & \text{при } 4 \leq t < 6, \\ 0 & \text{при } t \geq 6. \end{cases}$$

С помощью единичной функции Хевисайда записать $f(t)$ одним аналитическим выражением и найти изображение этой функции.

$f(t) = 0$ при $t < 0$; в момент $t = 0$ «включается» функция, равная 3; в момент $t = 4$ она «гасится» и «включается» функция $9 - \frac{3}{2}t$; в момент $t = 6$ «гасится» и эта функция. Всю эту последовательность действий можно записать так:

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 \cdot 1(t) - 3 \cdot 1(t-4) + \left(9 - \frac{3}{2}t\right) \cdot 1(t-4) - \\ &- \left(9 - \frac{3}{2}t\right) \cdot 1(t-6) = 3 \cdot 1(t) + \left(6 - \frac{3}{2}t\right) \cdot 1(t-4) - \\ &- \left(9 - \frac{3}{2}t\right) \cdot 1(t-6). \end{aligned}$$

Для того чтобы найти изображение этой функции, нужно, рассуждая как и в предыдущем примере, представить ее в форме

$$f(t) = 3 \cdot 1(t) + \varphi_1(t-4) \cdot 1(t-4) + \varphi_2(t-6) \cdot 1(t-6).$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= 3 \cdot 1(t) + \left[6 - \frac{3}{2}(t-4) - 6\right] \cdot 1(t-4) - \\ &- \left[9 - \frac{3}{2}(t-6) - 9\right] \cdot 1(t-6) = 3 \cdot 1(t) - \frac{3}{2}(t-4) \cdot 1(t-4) + \\ &+ \frac{3}{2}(t-6) \cdot 1(t-6). \end{aligned}$$

Так как

$$\varphi_1(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2},$$

$$\varphi_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{3}{2},$$

то, применяя теорему (3.17), находим

$$f(t) \longleftrightarrow \frac{3}{p} - \frac{3}{2p^2} e^{-4p} + \frac{3}{2p^2} e^{-6p}.$$

Пример 6. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p^2} e^{-2p}$.

Применив формулы (3.14) и (3.17), находим

$$\frac{1}{p^2} - 3 \frac{1}{p^2} e^{-2p} \longrightarrow t - 3(t-2) \cdot 1(t-2).$$

3.6. Теорема смещения. На практике часто приходится иметь дело с затухающими функциями, затухание которых происходит по экспоненте (показательному закону). Спрашивается, можно ли найти изображение функции с таким затуханием, если известно изображение функции без затухания? Ответ на этот и некоторые другие вопросы дает

Теорема. Если p_0 — любое комплексное число и $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$e^{p_0 t} f(t) \leftrightarrow F(p - p_0). \quad (3.18)$$

Доказательство. В силу (3.1) имеем

$$e^{p_0 t} f(t) \leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{p_0 t} f(t) e^{-p t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p - p_0).$$

При этом, если изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, то изображение $F(p - p_0)$ определено при $\operatorname{Re}(p - p_0) > s_0$, т. е. в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re} p_0$.

Пример 1. Найти изображения затухающих колебаний

$$e^{-\alpha t} \sin \omega t \text{ и } e^{-\alpha t} \cos \omega t (\alpha > 0).$$

Используя формулы (3.11) и теорему (3.18), находим (положив $p_0 = -\alpha$)

$$e^{-\alpha t} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad e^{-\alpha t} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (3.19)$$

Пример 2. Найти изображение оригинала $\operatorname{ch} t \cdot \sin t$.

Применяя теорему (3.18), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} t \cdot \sin t &= \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \sin t = \frac{1}{2} e^t \sin t + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-t} \sin t \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{(p-1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p+1)^2 + 1} = \frac{p^2 + 2}{p^4 + 4}. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{3p-1}{p^2-4p+7}.$$

На основании (3.19) получаем

$$\begin{aligned} \frac{3p-1}{p^2-4p+7} &= \frac{3(p-2)+5}{(p-2)^2+3} = 3 \frac{p-2}{(p-2)^2+3} + \\ &+ 5 \cdot \frac{1}{p^2-4p+7} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+3} \leftrightarrow 3e^{2t} \cos(t\sqrt{3}) + \frac{5}{\sqrt{3}} e^{2t} \sin(t\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Теорема (3.18) может рассматриваться и как одна из обратных теорем, позволяющих находить оригиналы по заданным их изображениям. А именно, если известен оригинал $f(t)$

для изображения $F(p)$, то формула (3.18) позволяет сразу же найти оригинал для изображения $F(p - p_0)$, «смещенного» на p_0 .

Пример 4. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{p^2 + 2p}$. В силу первой формулы (3.12) и теоремы (3.18), находим

$$\frac{1}{p^2 + 2p} = \frac{1}{(p + 1)^2 - 1} \rightarrow e^{-t} \sinh t.$$

3.7. Теорема умножения. Формулируемую ниже теорему тоже можно отнести к числу обратных теорем. Она позволяет находить оригинал, соответствующий произведению двух изображений $F_1(p)$ и $F_2(p)$, если известны оригиналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ сомножителей.

Теорема. Если $F_1(p) \rightarrow f_1(t)$ и $F_2(p) \rightarrow f_2(t)$, то

$$F_1(p) F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\theta) \cdot f_2(t - \theta) d\theta. \quad (3.20)$$

Доказательство. Обозначим

$$f(t) = \int_0^t f_1(\theta) \cdot f_2(t - \theta) d\theta. \quad (3.21)$$

Можно показать, что функция $f(t)$ является оригиналом и пусть $f(t) \leftarrow F(p)$; для доказательства (3.20) нужно показать, что $F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p)$. В силу (3.1) имеем

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t f_1(\theta) \cdot f_2(t - \theta) d\theta \right\} e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t e^{-pt} f_1(\theta) f_2(t - \theta) d\theta \right\} dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь следующей формулой перемены порядка интегрирования в двойном интеграле

$$\begin{aligned} \int_0^a \left\{ \int_0^x \varphi(x, y) dy \right\} dx &= \\ &= \int_0^a \left\{ \int_y^a \varphi(x, y) dx \right\} dy, \end{aligned}$$

имеющей место в случае, когда область интегрирования есть изображенный на рис. 3.8 треугольник. В нашем случае $x = t$, $y = \theta$, $\varphi(x, y) = e^{-pt} f_1(\theta) f_2(t - \theta)$.

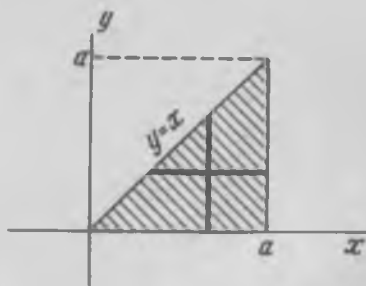


Рис. 3.8

Приняв $a = +\infty$, законность чего можно доказать для нашего случая, будем в силу последней формулы иметь

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(\theta) f_2(t-\theta) dt \right\} d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\theta) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-pt} f_2(t-\theta) dt \right\} d\theta. \end{aligned}$$

Совершив во внутреннем интеграле замену переменной по формуле $t - \theta = \tau$, получим

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f_1(\theta) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-p(\theta+\tau)} f_2(\tau) d\tau \right\} d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\theta) e^{-p\theta} \left\{ \int_0^{\infty} f_2(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right\} d\theta = F_2(p) \int_0^{\infty} f_1(\theta) e^{-p\theta} d\theta = \\ &= F_2(p) F_1(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Функция $f(t)$, определяемая формулой (3.21), называется сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Операция получения свертки двух функций называется свертыванием этих функций. Введя в интеграле (3.21) новую переменную по формуле $t - \theta = \tau$, получим

$$f(t) = - \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\theta) f_2(\theta) d\theta;$$

это значит, что свертывание обладает свойством переместительности.

Итак, оригинал, соответствующий произведению двух изображений, равен свертке оригиналов сомножителей.

Пример 1. Найти оригинал по его изображению $\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$
Имеем

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \text{ причем } \frac{1}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{\omega} \sin \omega t,$$

следовательно, по теореме умножения (3.20):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} &\xrightarrow{\cdot} \int_0^t \frac{1}{\omega} \sin \omega \theta \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{2\omega^2} \int_0^t (\cos \omega(2\theta - t) - \cos \omega t) d\theta = \frac{1}{2\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t). \end{aligned}$$

Пример 2. Найти оригинал по его изображению $\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$

$$= \frac{1}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2 + \omega^2} \rightarrow \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \frac{p}{p^2 + \omega^2} \rightarrow \cos \omega t,$$

то по теореме умножения

$$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} \rightarrow \int_0^t \frac{1}{\omega} \sin \omega \theta \cdot \cos \omega (t - \theta) d\theta = \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Итак, мы получили две важные формулы:

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \rightarrow \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t); \quad (3.22)$$

$$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} \rightarrow \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t. \quad (3.23)$$

С помощью этих формул, применяя теорему умножения еще раз, найдем

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^3} \rightarrow \frac{1}{4\omega^4} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right) \frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{3}{2} t \cos \omega t \right], \quad (3.24)$$

$$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^3} \rightarrow \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{1}{\omega} t \sin \omega t - t^2 \cos \omega t \right). \quad (3.25)$$

Продолжая этот процесс, можем найти оригиналы, соответствующие изображениям $1/(p^2 + \omega^2)^k$ и $p/(p^2 + \omega^2)^k$ ($k = 4, 5, \dots$), правда, получающиеся при этом формулы весьма громоздки.

Пример 3. Найти оригинал по его изображению $\frac{1}{(p+1)^{10}(p-2)}$.

Так как

$$\frac{1}{(p+1)^{10}} \rightarrow \frac{1}{9!} t^9 e^{-t}, \quad \frac{1}{p-2} \rightarrow e^{2t},$$

то по теореме умножения

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+1)^{10}(p-2)} &\rightarrow \int_0^t \frac{1}{9!} \theta^9 e^{-\theta} e^{2(t-\theta)} d\theta = \frac{1}{9!} e^{2t} \int_0^t \theta^9 e^{-3\theta} d\theta = \\ &= -e^{-t} \left(\frac{t^9}{9!3} + \frac{t^8}{8!3^2} + \dots + \frac{t}{1!3^9} + \frac{1}{3^{10}} \right) + \frac{1}{3^{10}} e^{2t}. \end{aligned}$$

*) Интеграл сразу же вычисляется, если применить обобщенную формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int u v^{(n)} dx &= u v^{(n-1)} - u' v^{(n-2)} + u'' v^{(n-3)} - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v dx. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти оригинал по его изображению $\frac{4p-3}{(p^2+2p+10)^2}$.

Применяя формулы (3.23) и (3.22) и теорему смещения (3.18) при $p_0 = -1$, находим

$$\begin{aligned} \frac{4p-3}{(p^2+2p+10)^2} &= \frac{4(p+1)-7}{[(p+1)^2+9]^2} = \\ &= 4 \frac{p+1}{[(p+1)^2+9]^2} - 7 \frac{1}{[(p+1)^2+9]^2} \rightarrow \\ &\rightarrow 4e^{-t} \frac{1}{6} t \sin 3t - \frac{7}{54} e^{-t} (\sin 3t - 3t \cos 3t) = \\ &= e^{-t} \left\{ \left(\frac{2}{3} t - \frac{7}{54} \right) \sin 3t + \frac{7}{18} t \cos 3t \right\}. \end{aligned}$$

3.8. Изображения периодических оригиналов. Пусть $f(t)$ — периодический оригинал с периодом T , т. е. $f(t+T) = f(t)$ для всех $t > 0$.

Теорема. Изображение периодического с периодом T оригинала $f(t)$ определяется формулой

$$F(p) = \frac{\Psi(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (3.26)$$

где

$$\Psi(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt. \quad (3.27)$$

Доказательство. Разбив промежуток интегрирования $[0, +\infty)$ на два промежутка $[0, T]$ и $[T, +\infty)$ и положив во втором из следующих ниже интегралов $t = \theta + T$, получаем

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt + \int_T^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \Psi(p) + \int_0^{\infty} f(\theta + T) e^{-p(\theta+T)} d\theta = \Psi(p) + \\ &+ e^{-pT} \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-p\theta} d\theta = \Psi(p) + e^{-pT} F(p), \end{aligned}$$

откуда и получаем (3.26).

Пример 1. Опять рассмотрим периодическую функцию $f(t)$, представленную на рис. 3.5 (п⁰ 3.5, пример 3). Для этой функции по формуле (3.27) находим

$$\Psi(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt = \int_0^T A e^{-pt} dt = \frac{A}{p} (1 - e^{-pT}),$$

так что формула (3.26) дает для изображения $f(t)$:

$$F(p) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1 - e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}.$$

Мы снова пришли к ранее уже полученному результату.

Пример 2. Найти изображение периодического оригинала $f(t) = A|\sin \omega t|$ (выпрямленная синусоида, рис. 3.9).

Функция $f(t)$ имеет период $T = \frac{\pi}{\omega}$; по формуле (3.27), дважды интегрируя по частям, находим

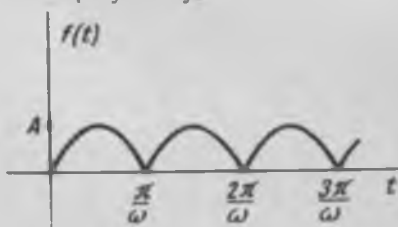


Рис. 3.9

$$\Psi(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt =$$

$$= A \int_0^{\pi/\omega} e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right).$$

Формула (3.26) дает тогда для искомого изображения

$$F(p) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}}} = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2} \operatorname{cth} \frac{p\pi}{2\omega}$$

(см. формулы (1.31)).

Функция $\Psi(p)$, определяемая формулой (3.27), является изображением оригинала

$$\psi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Можно доказать и обратную теорему: оригинал $f(t)$, изображение которого имеет вид (3.26), является периодической функцией периода T , получающейся при периодическом продолжении функции $\psi(t)$ с интервала $[0, T]$ на всю положительную часть оси t .

Пример 3. Найти оригинал по заданному его изображению

$$F(p) = \frac{\frac{1}{p^2} - \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{-\frac{pT}{2}}}{1 - e^{-pT}}.$$

Так как заданное изображение имеет вид (3.26), где

$$\Psi(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{-\frac{pT}{2}},$$

то искомый оригинал $f(t)$ есть периодическая функция периода T . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi(p) &= \frac{1}{p^2} - \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) e^{-\frac{pT}{2}} \rightarrow t - \left[\frac{T}{2} + \left(t - \frac{T}{2} \right) \right] \times \\ &\times 1 \left(t - \frac{T}{2} \right) = t - t \cdot 1 \left(t - \frac{T}{2} \right) = \begin{cases} t, & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{при } t > \frac{T}{2} \end{cases} = \psi(t). \end{aligned}$$

На рис. 3.10 представлены графики функции $\psi(t)$ на интервале $[0, T]$ и искомого оригинала $f(t)$, получающегося при периодическом продолжении функции $\psi(t)$ с интервала $[0, T]$ на всю положительную часть оси t .

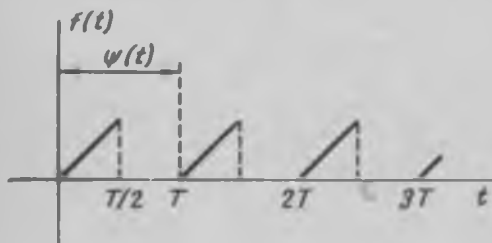


Рис. 3.10

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить график функции $f(t)$; с помощью единичной функции Хевисайда записать ее одним аналитическим выражением и найти ее изображение:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 1, \\ 1 & \text{при } 1 < t < 2, \\ -2 & \text{при } 2 < t < 3, \\ 0 & \text{при } 3 < t < 4, \\ 2 & \text{при } 4 < t < 5, \\ 0 & \text{при } t > 5; \end{cases} \quad \text{б) } f(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } 1 < t < 3, \\ 0 & \text{при } t > 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(t) = \begin{cases} 2t & \text{при } 0 < t < 1, \\ 4 - 2t & \text{при } 1 < t < 2, \\ 0 & \text{при } t > 2; \end{cases} \quad \text{г) } f(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } 1 < t < 2, \\ 2 - \frac{t}{2} & \text{при } 2 < t < 4, \\ 0 & \text{при } t > 4; \end{cases}$$

$$\text{д) } f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } 1 < t < 2, \\ 4 - t & \text{при } 2 < t < 4, \\ 0 & \text{при } t > 4. \end{cases}$$

2. Построить график функции $f(t)$ и найти ее изображение:

$$\text{а) } f(t) = t - (t-3) \cdot 1(t-1); \quad \text{б) } f(t) = 5 - 2t \cdot 1(t-2) + 1(t-3);$$

$$\text{в) } f(t) = 1 + e^{-t} \cdot 1(t-1); \quad \text{г) } f(t) = \sin t \cdot \{1(t-2\pi) - 1(t-3\pi)\};$$

$$д) f(t) = 2 \left\{ 1 - 1 \left(t - \frac{1}{2} \right) - 1 \left(t - \frac{3}{2} \right) \right\} + \left\{ 1 \left(t - \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - 1 \left(t - \frac{3}{2} \right) \right\} \sin 2\pi t;$$

$$е) f(t) = 1 - t - (t^2 - 5t + 4) \cdot 1(t-1) + (t^2 - 3t) \cdot 1(t-3).$$

3. Найти изображения оригиналов: а) $te^{-at} \sin \omega t$; б) $te^{-at} \cos \omega t$ (воспользоваться формулами (3.19) и (3.13)).

4. Найти изображение периодического оригинала $f(t)$, являющегося периодическим продолжением функции $\psi(t)$ с интервала $[0, T]$ на всю положительную ось t ; начертить график $f(t)$:

$$а) \psi(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \text{при } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}; \quad б) \psi(t) = A \left(1 - \frac{t}{T} \right) \text{ при } 0 < t < T;$$

$$в) \psi(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T} t & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 2A \left(1 - \frac{t}{T} \right) & \text{при } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases};$$

$$г) \psi(t) = \begin{cases} A \sin \frac{2\pi t}{T} & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{при } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

5. Найти оригинал по заданному его изображению:

$$а) \frac{1}{p^2 - 2p + 5}; \quad б) \frac{p + 3}{p^2 + 6p + 11}; \quad в) \frac{3p^4 - 12p^3 + 16p^2 - 6p + 8}{p^5 - 4p^4 + 5p^3};$$

$$г) \frac{3p + 2}{(p^2 - 4p + 6)^2}; \quad д) \frac{1}{p} (2 - 3e^{-p} + e^{-3p}); \quad е) \frac{1}{p^4} + \frac{1}{(p + 3)^4} e^{-2p};$$

$$ж) \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}; \quad з) \frac{2 - pT - (2 + pT) e^{-pT}}{(1 - e^{-pT})p^3}.$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛОВ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

3.9. Дифференцирование оригиналов. Задача нахождения изображения производной оригинала по изображению этого оригинала решается на основании теоремы:

Теорема. Если $f(t) \longleftrightarrow F(p)$ и $f'(t)$ является оригиналом, то

$$f'(t) \longleftrightarrow pF(p) - f(0). \quad (3.28)$$

Доказательство. В силу (3.1) и интегрируя по частям, находим

$$f'(t) \leftrightarrow \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + \\ + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0),$$

так как в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$

$$|e^{-pt} f(t)| < Me^{-(s-s_0)t} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

В частном случае, когда $f(0) = 0$, формула (3.28) дает

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p). \quad (3.29)$$

Таким образом, если начальное значение оригинала $f(t)$ равно нулю, то дифференцирование оригинала приводит к умножению его изображения на p .

Применив формулу (3.28) ко второй производной $f''(t)$, получим

$$f''(t) \leftrightarrow p \{pF(p) - f(0)\} - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Точно так же

$$f'''(t) \leftrightarrow p \{p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)\} - f''(0) = \\ = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

Применив формулу (3.28) $n-1$ раз, получим общую формулу

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \\ - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (3.30)$$

В п⁰ 3.2 мы установили, что изображение всякого оригинала стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ (так, что $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$). Следовательно, если $f^{(n)}(t)$ является оригиналом, то в силу последней формулы будем иметь

$$f^{(n-1)}(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \{p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0)\}$$

и, в частности, при $n=1$ будет

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Пользуясь этим предельным соотношением, можно найти начальное значение оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$, не вычисляя самого оригинала.

Пример. $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$. Тогда

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2}{p^2 + 1} = 1.$$

Заданная функция является изображением оригинала $f(t) = \cos t$, откуда видим, что действительно $f(0) = 1$.

3.10. Интегрирование оригиналов. Изображение интеграла находится на основании теоремы:

Теорема. Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}. \quad (3.31)$$

Доказательство. Легко убедиться, что функция $\int_0^t f(t) dt = \varphi(t)$ является оригиналом. Пусть $\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(p)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то по формуле (3.29)

$$\varphi'(t) = f(t) \leftrightarrow p\Phi(p) = F(p),$$

откуда и получаем

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p} \leftrightarrow \varphi(t) = \int_0^t f(t) dt.$$

Формулы (3.28) и (3.31), определяющие изображения производной и интеграла, играют важнейшую роль в операционном исчислении. Из них следует, что действиям анализа — дифференцированию и интегрированию оригиналов соответствуют алгебраические действия соответственно умножения и деления изображений на p . Величину p можно, таким образом, рассматривать как оператор дифференцирования, а величину $\frac{1}{p}$ — как оператор интегрирования по интервалу $[0, t]$.

3.11. Интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t), \quad (3.32)$$

где a_k — действительные числа. Будем предполагать, что искомая функция $x(t)$, все ее рассматриваемые производные, а также функция $f(t)$ являются оригиналами. Требуется найти решение дифференциального уравнения (3.32), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}, \quad (3.33)$$

где $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Пусть $x(t) \leftarrow \div X(p)$ и $f(t) \leftarrow \div F(p)$ (в дальнейшем будем употреблять более короткую запись X и F). В силу формулы (3.30) и условий (3.33) будем иметь

$$\begin{aligned}x'(t) &\leftarrow \div pX - x_0; \\x''(t) &\leftarrow \div p^2X - px_0 - x'_0; \\&\dots \dots \dots \\x^{(n-1)}(t) &\leftarrow \div p^{n-1}X - p^{n-2}x_0 - \dots - x_0^{(n-2)}; \\x^{(n)}(t) &\leftarrow \div p^nX - p^{n-1}x_0 - \dots - x_0^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Пользуясь свойством линейности изображений, перейдем в уравнении (3.32) к изображениям

$$p^n X - p_0^{n-1} x_0 - \dots - x_0^{(n-1)} + a_1 (p^{n-1} X - p^{n-2} x_0 - \dots - x_0^{(n-2)}) + \dots + a_{n-1} (pX - x_0) + a_n X = F.$$

Полученное уравнение будем называть уравнением в изображениях, соответствующим уравнению (3.32). Перепишем последнее уравнение так

$$Q_n(p) \cdot X = F + R_{n-1}(p),$$

где $Q_n(p)$ и $R_{n-1}(p)$ — алгебраические многочлены от p соответственно степеней n и $n-1$, причем

$$Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

Из последнего уравнения находим

$$X(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \quad (3.34)$$

Мы получили так называемое операторное решение дифференциального уравнения (3.32). Оригинал $x(t)$, для которого функция (3.34) является изображением, и будет искомым решением уравнения (3.32), удовлетворяющим условиям (3.33).

Пример 1. Найти решение уравнения $x'''(t) + 4x'(t) = 1$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Переходим к уравнению в изображениях

$$p^3 X(p) + 4pX(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$\begin{aligned}X(p) &= \frac{1}{p(p^3 + 4p)} = \frac{1}{p^2(p^2 + 4)} = \\&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p^2 + 4} = \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t\end{aligned}$$

(применены формулы (3.14) и (3.11)). Итак, искомое решение

$$x(t) = \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t.$$

Пример 2. Найти решение уравнения $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0$, удовлетворяющее условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
Уравнение в изображениях:

$$p^2 X(p) - 1 - 4pX(p) + 5X(p) = 0,$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p^2 - 4p + 5} = \frac{1}{(p-2)^2 + 1} \rightarrow e^{2t} \sin t.$$

Искомое решение $x(t) = e^{2t} \sin t$.

Преимущество операционного метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений перед классическими методами состоит в том, что мы сразу получаем решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, минуя получение общего интеграла этого уравнения. Если же требуется найти общий интеграл дифференциального уравнения, то и это можно сделать операционным методом.

Пример 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 2e^{-t} \cos 3t.$$

Для получения общего интеграла уравнения возьмем произвольные начальные условия

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2;$$

тогда уравнение в изображениях будет

$$p^2 X(p) - c_1 p - c_2 + 2pX(p) - 2c_1 + 10X(p) = 2 \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9},$$

откуда

$$X(p) = c_1 \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9} + (c_1 + c_2) \frac{1}{(p+1)^2 + 9} + 2 \frac{p+1}{[(p+1)^2 + 9]^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow c_1 e^{-t} \cos 3t + \frac{1}{3} (c_1 + c_2) e^{-t} \sin 3t + 2e^{-t} \frac{1}{6} t \sin 3t$$

к последней дроби применена формула (3.23) и теорема смещения (3.18)).
Итак, искомое решение

$$x(t) = e^{-t} \left\{ c_1 \cos 3t + \frac{1}{3} (t + c_2) \sin 3t \right\},$$

где $c_2' = c_1 + c_2$ — новая произвольная постоянная.

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения $x''(t) + 3x'(t) = 4 \cdot 1(t) - (t+2) \cdot 1(t-3)$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Уравнение в изображениях:

$$p^2 X(p) + 3pX(p) = \frac{4}{p} - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{5}{p} \right) e^{-3p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{4}{p^2(p+3)} - \frac{5}{p^2(p+3)} e^{-3p} - \frac{1}{p^3(p+3)} e^{-3p}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^3(p+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p+3} \rightarrow \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} e^{-3t},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2(p+3)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{p+3} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{t^2}{6} - \frac{t}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{27} e^{-3t}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} X(p) &\rightarrow \frac{4}{3} t - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} e^{-3t} - 5 \left\{ \frac{t-3}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} e^{-3(t-3)} \right\} \times \\ &\times 1(t-3) - \left\{ \frac{(t-3)^2}{6} - \frac{t-3}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{27} e^{-3(t-3)} \right\} \cdot 1(t-3) \end{aligned}$$

и окончательно

$$x(t) = \frac{4}{3} t - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} e^{-3t} - \left\{ \frac{t^2}{6} + \frac{5}{9} t - \frac{59}{27} + \frac{14}{27} e^{-3(t-3)} \right\} \cdot 1(t-3).$$

Правая часть рассмотренного в последнем примере дифференциального уравнения является разрывной функцией, которую в классическом анализе обычно записывают с помощью нескольких различных аналитических выражений. Преимущество операционного метода решения таких уравнений по сравнению с методами классического анализа очевидно.

3.12. Интегрирование систем линейных уравнений. Метод интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений по существу не отличается от метода интегрирования одного уравнения. Перейдем сразу к примеру.

Пример. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} x' - \alpha x - \beta y &= \beta e^{\alpha t}; \\ y' + \beta x - \alpha y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

при начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Переход к уравнениям в изображениях дает

$$\left. \begin{aligned} pX - \alpha X - \beta Y &= \frac{\beta}{p - \alpha}; \\ pY + \beta X - \alpha Y &= 1, \end{aligned} \right\}$$

где $X = X(p) \rightarrow x(t)$, $Y = Y(p) \rightarrow y(t)$. Применяя обычные методы решения систем алгебраических линейных уравнений, получаем отсюда

$$X = \frac{2\beta}{(p - \alpha)\beta + \beta^2}, \quad Y = \frac{(p - \alpha)^2 - \beta^2}{(p - \alpha)[(p - \alpha)^2 + \beta^2]}.$$

Переходя от изображений к оригиналам, получаем искомые решения:

$$X(p) = \frac{2\beta}{(p-a)^2 + \beta^2} \rightarrow x(t) = 2e^{at} \sin \beta t;$$

$$Y(p) = \frac{2(p-a)}{(p-a)^2 + \beta^2} - \frac{1}{p-a} \rightarrow y(t) = 2e^{at} \cos \beta t - e^{at}.$$

3.13. Интеграл Дюамеля. Пусть $F(p) \rightarrow f(t)$ и $\Phi(p) \rightarrow \varphi(t)$. По теореме умножения (3.20) имеем тогда

$$F(p) \cdot \Phi(p) \rightarrow \int_0^t f(\theta) \varphi(t-\theta) d\theta, \quad (3.35)$$

откуда, применяя формулу (3.29), получим

$$p F(p) \Phi(p) \rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^t f(\theta) \varphi(t-\theta) d\theta \quad (3.36)$$

(правая часть (3.35), являющаяся функцией от t , равна 0 при $t=0$). Для интеграла в правой части (3.36) t является параметром, причем от этого параметра зависит как подынтегральная функция, так и верхний предел интегрирования. Применив известное из курса анализа правило дифференцирования определенного интеграла по параметру

$$\frac{d}{dt} \int_a^{b(t)} g(\theta, t) d\theta = g(b, t) \cdot \frac{db}{dt} - g(a, t) \cdot \frac{da}{dt} + \int_a^b g_t(\theta, t) d\theta,$$

представим формулу (3.36) в виде

$$p F(p) \Phi(p) \rightarrow f(t) \varphi(0) + \int_0^t f(\theta) \varphi'(t-\theta) d\theta. \quad (3.37)$$

Правую часть этой формулы называют интегралом Дюамеля. В силу равноправности функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ последнюю формулу можно еще переписать так

$$p F(p) \Phi(p) \rightarrow \varphi(t) f(0) + \int_0^t \varphi(\theta) f'(t-\theta) d\theta. \quad (3.38)$$

Интеграл Дюамеля может быть использован при интегрировании дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (3.39)$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Наряду с этим будем рассматривать уравнение с той же левой частью и с правой частью, равной 1:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 1, \quad (3.40)$$

и будем искать его решение, тоже удовлетворяющее нулевым начальным условиям $z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0$.

Уравнения (3.39) и (3.40) в изображениях соответственно будут

$$p^n X + a_1 p^{n-1} X + \dots + a_{n-1} p X + a_n X = F(p);$$

$$p^n Z + a_1 p^{n-1} Z + \dots + a_{n-1} p Z + a_n Z = \frac{1}{p},$$

откуда находим операторные решения упомянутых уравнений

$$X(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}, \quad Z(p) = \frac{1}{p Q_n(p)},$$

где $Q_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$. Из двух последних соотношений находим

$$X(p) = p F(p) Z(p),$$

и, применив формулу (3.37) или (3.38), получаем искомое решение дифференциального уравнения (3.39) в форме

$$\begin{aligned} p F(p) Z(p) &= X(p) \rightarrow x(t) = \\ &= \int_0^t f(\theta) z'(t - \theta) d\theta = z(t) f(0) + \int_0^t z(\theta) f'(t - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Таким образом, с помощью интеграла Дюамеля мы всегда можем получить в виде квадратуры решение $x(t)$ дифференциального уравнения (3.39), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, если известно решение $z(t)$ уравнения (3.40) с той же левой частью и с правой частью, равной 1, также удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $x'' + x = 5t^2$ при начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$.

Сначала найдем решение уравнения $z'' + z = 1$, удовлетворяющее условиям $z(0) = z'(0) = 0$. Уравнение в изображениях $p^2 Z + Z = \frac{1}{p}$, откуда

$$Z(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1},$$

следовательно, $z(t) = 1 - \cos t$. Для отыскания решения заданного уравнения применим первую формулу (3.41). В нашем случае $z'(t) = \sin t$, $f(t) = 5t^2$, так что

$$x(t) = \int_0^t 5\theta^2 \sin(t - \theta) d\theta = 5(t^2 - 2 + 2 \cos t).$$

Последний пример носит иллюстративный характер и не раскрывает преимуществ, возникающих при применении интеграла Дюамеля. Особенно выгодно применять интеграл Дюамеля для интегрирования нескольких линейных дифференциальных уравнений с одинаковыми левыми и различными правыми частями. В этом случае интеграл Дюамеля значительно сокращает объем вычислительной работы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить дифференциальные уравнения при указанных начальных условиях:

а) $x'' + 4x = \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 2$;

б) $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2)x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

в) $x''' + x' = e^{2t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;

г) $x^{(4)} + x''' = \cos t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 2$;

д) $4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$;

е) $x^{(4)} + 4x = t^2$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;

ж) $x^{(5)} + 2x''' + x' = 2t + \cos t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = x^{(4)}(0) = 0$;

з) $x'' - 2x' + 2x = 1 + 1(t-1)$, $x(0) = x'(0) = 0$;

и) $x'' + \omega^2 x = a[1(t) - 1(t-\tau)]$, $x(0) = x'(0) = 0$.

2. Решить системы дифференциальных уравнений:

а) $x' + y = 0$, $y' - 2x - 2y = 0$; $x(0) = y(0) = 1$;

б) $x' + 2x + 2y = 10e^{2t}$, $y' - 2x + y = 7e^{2t}$; $x(0) = 1$, $y(0) = 3$;

в) $2x' + y' - 3x = 0$, $x'' + y' - 2y = e^{2t}$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$;

г) $x' = y - z$, $y' = x + y$, $z' = x + z$; $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

3. Применяя интеграл Дюамеля, решить дифференциальные уравнения

а) $x'' + x' = t$; $x(0) = x'(0) = 0$;

б) $x''' + x' = e^t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

§ 4. ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

3.14. Первая теорема разложения. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые теоремы, относящиеся к обратной задаче — отысканию оригинала по заданному его изображению. Эти теоремы называют обычно теоремами разложения. Рассмотрим первую из них.

Теорема. Если функция $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $p = \infty$, т. е. разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности этой точки имеет вид

$$F(p) = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}} \quad (3.42)$$

(n° 1.53). то $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого степенным рядом

$$f(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!} t + \frac{c_2}{2!} t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n. \quad (3.43)$$

Таким образом, если в окрестности точки $p = \infty$ изображение разложено в ряд (3.42), то оригинал получается путем почленного перехода в этом ряду к оригиналам с помощью формулы (3.14).

Доказательство. Ряд (3.42) сходится в окрестности точки $p = \infty$, т. е. при $|p| > \frac{1}{R}$ ($R > 0$ — некоторое число), или при $|\frac{1}{p}| < R$. Пусть p — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $|\frac{1}{p}| = \frac{1}{p} < R$. Так как ряд (3.42) сходится абсолютно, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}$, в силу чего $\frac{c_n}{p^{n+1}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ будем, начиная с некоторого n , иметь

$$\left| \frac{c_n}{p^{n+1}} \right| < \varepsilon. \quad (3.44)$$

Рассмотрим теперь ряд (3.43) при $t > 0$. В силу последнего неравенства и для тех же n будем иметь

$$\begin{aligned} |f(t)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n \right| < \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{c_n}{n!} t^n \right| < \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon p^{n+1}}{n!} t^n = \varepsilon p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pt)^n}{n!} = \varepsilon p e^{pt}, \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Таким образом, ряд (3.43) сходится при всех $t > 0$. Легко убедиться в том, что функция $f(t)$ является оригиналом (эта функция удовлетворяет даже более жесткому условию, чем условие а), ибо она, как сумма степенного ряда, дифференцируема сколько угодно раз). Докажем теперь, что действительно $f(t) \leftarrow F(p)$. Поскольку степенной ряд (3.43) сходится равномерно, то, умножая его почленно на $e^{-pt} dt$ и почленно интегрируя, находим

$$f(t) \leftarrow \int_0^{\infty} c_0 e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} c_1 \frac{t}{1!} e^{-pt} dt + \dots + \int_0^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} e^{-pt} dt + \dots;$$

но так как в силу (3.14)

$$\int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{n+1}},$$

то

$$f(t) \leftarrow \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \dots + \frac{c_n}{p^{n+1}} + \dots = F(p),$$

и теорема доказана.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $x^{(10)} - x = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 1, x^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 9).$$

Пишем уравнение в изображениях

$$p^{10}X(p) - p^9 - X(p) = 0,$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^9}{p^{10}-1} = \frac{1}{p\left(1-\frac{1}{p^{10}}\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{11}} + \frac{1}{p^{21}} + \dots + \frac{1}{p^{10n-9}} + \dots \quad (\text{при } |p| > 1).$$

Пользуясь первой теоремой разложения, отсюда сразу получаем

$$x(t) = 1 + \frac{t^{10}}{10!} + \frac{t^{21}}{20!} + \dots + \frac{t^{10n-10}}{(10n-10)!} + \dots$$

Выше мы везде прилагали операционный метод к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Этот же метод с успехом может быть применен к интегрированию некоторых уравнений с функциональными коэффициентами, к числу которых относится уравнение, рассматриваемое в следующем примере.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $tx'' + x' + tx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

Положив $x(t) \leftarrow X(p)$, будем иметь

$$x' \leftarrow pX - 1, x'' \leftarrow p^2X - p.$$

Для нахождения изображений функций tx и tx'' воспользуемся формулой (3.13). Получим

$$tx \leftarrow -\frac{d}{dp} X = -X',$$

$$tx'' \leftarrow -\frac{d}{dp} (p^2X - p) = -2pX - p^2X' + 1.$$

Таким образом, уравнение в изображениях, соответствующее данному уравнению, будет

$$-2pX - p^2X' + 1 + pX - 1 - X' = 0$$

$$(p^2 + 1) X' + pX = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно операторного решения $X(p)$ данного дифференциального уравнения. Разделя переменные и интегрируя, найдем

$$X(p) = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}},$$

где C — произвольная постоянная. Выбрав ту ветвь $\sqrt{1+p^2}$, для которой $\sqrt{1} = 1$, применим первую теорему разложения:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{C}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \frac{C}{p} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{p^4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{p^6} + \dots\right) = C \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{1}{p^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{p^5} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{p^7} + \dots\right) \rightarrow C \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{t^2}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{t^4}{4!} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{t^6}{6!} + \dots\right) = C \left(1 - \frac{t^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{t^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{t^6}{2^6 (3!)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots\right) = x(t). \end{aligned}$$

В силу начального условия $x(0) = 1$ нужно принять $C = 1$. Итак, искомое решение

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Сумма получившегося ряда называется функцией Бесселя нулевого порядка и обозначается символом $I_0(t)$. Таким образом, $x(t) = I_0(t)$.

Первая теорема разложения требует, чтобы изображение $F(p)$ было аналитической функцией в окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. в круге $|p| > \frac{1}{R}$ (где $\text{Arg } p$ принимает любые значения). В то же время изображения оригиналов аналитичны в полуплоскости $\text{Re } p > s_0$ (где $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg } p < \frac{\pi}{2}$). Это обстоятельство делает класс функции $f(t)$, изображения $F(p)$, которых удовлетворяют условиям первой теоремы разложения, более узким, чем класс оригиналов. Действительно, считая t комплексной переменной, будем в силу (3.43) и (3.44) иметь

$$|f(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{c_n}{n!} t^n \right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\sigma n+1}}{n!} |t|^n = e^{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e|t|)^n}{n!} = e^{\sigma} e^{e|t|},$$

откуда следует, что $f(t)$ представима степенным рядом во всей комплексной плоскости t . Функции, обладающие таким свойством, называются целыми и трансцендентными функциями. Итак, функция $F(p)$, удовлетворяющая условиям первой теоремы разложения, является изображением целой функции $f(t)$.

Можно доказать и обратную теорему: если оригинал имеет вид $1(t) \cdot f(t)$, где $f(t)$ — целая функция, удовлетворяющая условию $|f(t)| < Me^{s_0|t|}$, то его изображение $F(p)$ аналитично в бесконечно удаленной точке.

Пример 3. Пользуясь известным разложением

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

справедливым во всей комплексной плоскости t , в силу обратной теоремы находим

$$\sin t \longleftrightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} - \dots = \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{1}{p^2}} = \frac{1}{p^2 + 1},$$

что согласуется с формулой (3.11).

3.15. Вторая теорема разложения. В рассмотренных выше примерах нам неоднократно приходилось встречаться с изображениями, которые являлись дробно-рациональными функциями от p (рациональными дробями), т. е. имели вид

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (3.45)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — алгебраические многочлены от p . Переход от таких изображений к оригиналам мы производили, разлагая дробь (3.45) на простейшие дроби. В настоящем пункте мы получим общие формулы для такого перехода. Заметим прежде всего, что для того, чтобы функция (3.45) была изображением некоторого оригинала, степень многочлена $A(p)$ должна быть ниже степени многочлена $B(p)$, т. е. дробь (3.45) должна быть правильной; если это условие не имеет места, то $F(p)$ не стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ и $F(p)$ не может быть изображением (п^о 3.2).

1. Пусть дробь (3.45) правильна и несократима, а $p_1, p_2, \dots, p_n$ — корни (нули) знаменателя $B(p)$, которые все предполагаются простыми. Тогда разложение дроби (3.45) на простейшие имеет вид

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \dots + \frac{c_k}{p-p_k} + \dots + \frac{c_n}{p-p_n}. \quad (3.46)$$

Для определения коэффициентов этого разложения умножим почленно это равенство на $p - p_k$:

$$\frac{(p - p_k) A(p)}{B(p)} = c_1 \frac{p - p_k}{p - p_1} + \dots + c_k + \dots + c_n \frac{p - p_k}{p - p_n},$$

перейдя в этом равенстве к пределу при $p \rightarrow p_k$, найдем

$$c_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{(p - p_k) A(p)}{B(p)} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{A(p)}{\frac{B(p) - B(p_k)}{p - p_k}} = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}.$$

Итак,

$$c_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Подставив найденное выражение в (3.46), получим

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}.$$

Воспользовавшись свойством линейности изображений и формулой (3.4), сразу находим оригинал, соответствующий этому изображению:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.47)$$

II. Пусть дробь (3.45) по-прежнему правильна и несократима, но корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ знаменателя $B(p)$ кратные, причем кратности этих корней соответственно равны $m_1, m_2, \dots, m_n$. Разложение дроби (3.45) на простейшие имеет тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = & \frac{c_{11}}{(p - p_1)^{m_1}} + \frac{c_{12}}{(p - p_1)^{m_1 - 1}} + \\ & + \dots + \frac{c_{1v}}{(p - p_1)^{m_1 - v + 1}} + \dots + \frac{c_{1m_1}}{p - p_1} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{c_{k1}}{(p - p_k)^{m_k}} + \frac{c_{k2}}{(p - p_k)^{m_k - 1}} + \dots + \frac{c_{kv}}{(p - p_k)^{m_k - v + 1}} + \dots + \frac{c_{km_k}}{p - p_k} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{c_{n1}}{(p - p_n)^{m_n}} + \frac{c_{n2}}{(p - p_n)^{m_n - 1}} + \dots + \frac{c_{nv}}{(p - p_n)^{m_n - v + 1}} + \\ & + \dots + \frac{c_{nm_n}}{p - p_n} = \sum_{n=1}^n \sum_{v=1}^{m_k} \frac{c_{kv}}{(p - p_k)^{m_k - v + 1}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

В этой двойной сумме внутреннее суммирование с индексом ν производится по членам, относящимся к какому-нибудь одному корню, т. е. по всем членам каждой из строк в (3.48). Внешнее суммирование с индексом k производится по всем n полюсам, т. е. по строкам в (3.48).

Умножив почленно равенство (3.48) на $(p - p_k)^{m_k}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{(p - p_k)^{m_k} A(p)}{B(p)} = & c_{k1} + c_{k2} (p - p_k) + c_{k3} (p - p_k)^2 + \dots + \\ & + c_{km_k} (p - p_k)^{m_k - 1} + (p - p_k)^{m_k} \left\{ \frac{c_{11}}{(p - p_1)^{m_1}} + \right. \\ & \left. + \dots + \frac{c_{nm_n}}{p - p_1} \right\}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где в фигурной скобке заключены все дроби, знаменатели которых не являются степенью $p - p_k$. Перейдя в этом равенстве к пределу при $p \rightarrow p_k$, получим

$$c_{k1} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{(p - p_k)^{m_k} A(p)}{B(p)}.$$

Продифференцировав почленно (3.49) по p и перейдя к пределу при $p \rightarrow p_k$, найдем

$$c_{k2} = \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d}{dp} \left\{ (p - p_k)^{m_k} \frac{A(p)}{B(p)} \right\};$$

продолжая этот процесс дальше, найдем общую формулу

$$c_{k\nu} = \frac{1}{(\nu - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{\nu-1}}{dp^{\nu-1}} \left\{ (p - p_k)^{m_k} \frac{A(p)}{B(p)} \right\}. \quad (3.50)$$

Перейдя в сумме (3.48) к оригиналам, найдем оригинал дроби (3.45) в случае кратных корней знаменателя в виде

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \dashrightarrow \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{c_{k\nu}}{(m_k - \nu)!} t^{m_k - \nu} e^{p_k t}, \quad (3.51)$$

где коэффициенты $c_{k\nu}$ определяются формулой (3.50).

Формула (3.51), выражающая в общем виде оригинал для любого дробно-рационального изображения составляет содержание второй теоремы разложения (формула (3.47) является частным случаем формулы (3.51), когда все $m_k = 1$). Эта формула громоздка, что затрудняет практическое ее использование. Однако, если воспользоваться понятием вычета функции ($p^0 p^0$ 1.54 и 1.55), то ее можно представить в более простой форме.

Дробно-рациональная функция (3.45) аналитична во всех точках плоскости p , кроме нулей (корней) p_k ее знаменателя, причем точки p_k будут полюсами порядка m_k функции $F(p)$ (п° 1.52). С помощью формулы Лейбница*, используя разложение (3.48), нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \{ (p - p_k)^{m_k} F(p) e^{p t} \} = \\ = \sum_{v=1}^{m_k} \frac{c_{k,v}}{(m_k - v)!} t^{m_k-v} e^{p_k t}. \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства есть вычет функции $F(p) e^{p t}$ относительно полюса p_k порядка m_k (формула (1.127)). Следовательно, формулу (3.51) можно переписать так:

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \div \rightarrow \sum_{k=1}^n \text{Res} [F(p_k) e^{p t}]. \quad (3.52)$$

Итак, вторую теорему разложения можно сформулировать следующим образом: *если изображение (3.45) является дробно-рациональной функцией от p и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — полюсы этой функции (простые или кратные), то оригинал, соответствующий изображению (3.45), определяется формулой (3.52).*

Пример 1. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p^3 - 1}{p^4 + 2p^3 + 9p^2 + 18p}.$$

В этом случае $A(p) = p^3 - 1$, $B(p) = p^4 + 2p^3 + 9p^2 + 18p = p(p + 2)(p^2 + 9)$. Корни знаменателя $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, $p_3 = 3i$, $p_4 = -3i$ все простые. $B'(p) = 4p^3 + 6p^2 + 18p + 18$. Далее вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{A(0)}{B'(0)} = -\frac{1}{18}, \quad \frac{A(-2)}{B'(-2)} = \frac{9}{26}, \quad \frac{A(3i)}{B'(3i)} = \frac{1 + 27i}{36 + 54i} = \\ = \frac{747}{2096} + \frac{459}{2096} i, \quad \frac{A(-3i)}{B'(-3i)} = \frac{1 - 27i}{36 - 54i} = \frac{747}{2096} - \frac{459}{2096} i. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (3.47) получаем

$$\begin{aligned} F(p) \div \rightarrow -\frac{1}{18} + \frac{9}{26} e^{-2t} + \left(\frac{747}{2096} + \frac{459}{2096} i \right) e^{3it} + \\ + \left(\frac{747}{2096} - \frac{459}{2096} i \right) e^{-3it} = \\ = -\frac{1}{18} + \frac{9}{26} e^{-2t} + \frac{747}{1048} \cos 3t - \frac{459}{1048} \sin 3t. \end{aligned}$$

* См. А. Ф. Бермант. Курс математического анализа, т. 1, п° 68, 1950.

Пример 2. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)}.$$

Для функции $F(p)$ точка $p_1 = 0$ является полюсом третьего порядка, а $p_2 = 1$ — простым полюсом. Для отыскания оригинала по формуле (3.52) вычислим вычеты функции $\Phi(p) = F(p)e^{pt} = \frac{e^{pt}}{p^3(p-1)}$ в этих полюсах. Применяя формулы (1.127) и (1.128), находим

$$\begin{aligned} \text{Res } \Phi(0) &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left\{ \frac{e^{pt}}{p-1} \right\} = \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pt} \{ (t^2 p - t^2)(p-1) - 2(t p - t - 1) \}}{(p-1)^3} = -1 - t - \frac{t^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{Res } \Phi(1) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{e^{pt}}{p^3} = e^t. \text{ Далее по формуле (3.52) находим}$$

$$F(p) \xrightarrow{\text{}} \text{Res } \Phi(0) + \text{Res } \Phi(1) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t.$$

Пример 3. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)^2} = \frac{p^3}{(p-i)^2(p+i)^2}.$$

Точки $p_1 = i$ и $p_2 = -i$ являются для $F(p)$ полюсами второго порядка. Вычисляем вычеты функции $\Phi(p) = F(p)e^{pt} = \frac{e^{pt}p^3}{(p^2+1)^2}$ в этих полюсах:

$$\begin{aligned} \text{Res } \Phi(i) &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow i} \frac{d}{dp} \frac{p^3 e^{pt}}{(p+i)^2} = \\ &= \lim_{p \rightarrow i} \frac{\{ (3p^2 + p^3 t)(p+i) - 2p^3 \} e^{pt}}{(p+i)^3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{4i} \right) e^{it}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res } \Phi(-i) &= \frac{1}{1!} \lim_{p \rightarrow -i} \frac{d}{dp} \frac{p^3 e^{pt}}{(p-i)^2} = \\ &= \lim_{p \rightarrow -i} \frac{\{ (3p^2 + p^3 t)(p-i) - 2p^3 \} e^{pt}}{(p-i)^3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{4i} \right) e^{-it}. \end{aligned}$$

По формуле (3.52) находим

$$\begin{aligned} F(p) \xrightarrow{\text{}} \text{Res } \Phi(i) + \text{Res } \Phi(-i) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{4i} \right) e^{it} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{4i} \right) e^{-it} = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) = \\ &= \cos t - \frac{1}{2} t \sin t \text{ (применены формулы (1.26)).} \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти оригиналы, соответствующие изображениям:

$$\begin{aligned} 1) \sin \frac{1}{p}; \quad 2) e^{-\frac{1}{p}}; \quad 3) \ln \left(1 + \frac{1}{p}\right); \quad 4) \frac{6p^3 + 4p + 1}{p^4 + p^2}; \\ 5) \frac{5p^3 + 3p^2 + 12p - 12}{p^4 - 16}; \quad 6) \frac{3p^3 - 1}{(p^2 + 1)^3}. \end{aligned}$$

§ 5. ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

3.16. Импульсивные функции Дирака. Рассмотрим функцию

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} \{1(t) - 1(t-h)\} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{при } t < h, \\ 0 & \text{при } t > h \end{cases}$$

(рис. 3.11). Будем трактовать $\delta(t, h)$ как силу величины $\frac{1}{h}$, действующую в течение промежутка времени h . Импульс этой силы за промежуток ее действия равен, очевидно, 1 при любом h . В пределе при $h \rightarrow 0$ функция $\delta(t, h)$ теряет смысл; однако мы введем условный предел $\delta(t)$ этой функции

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h), \quad (3.53)$$

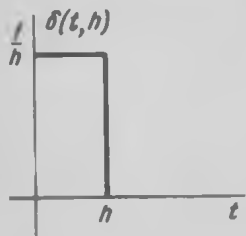


Рис. 3.11

который можно трактовать как силу, бесконечно большую при $t=0$ и равную нулю при всех $t > 0$; однако импульс этой силы по-прежнему равен 1. Таким образом, функция $\delta(t)$ в механическом смысле может быть истолкована как бесконечно

большая сила, мгновенно сообщаемая в момент времени $t=0$ материальной точке единичной массы скорость, равную 1. Эта функция называется импульсивной функцией нулевого порядка или δ -функцией.

Изображение δ -функции естественно определить как предел изображения функции $\delta(t, h)$ при $h \rightarrow 0$. Так как

$$\delta(t, h) \leftarrow \frac{1}{hp} (1 - e^{-hp}),$$

то, применяя правило Лопиталя, найдем

$$\delta(t) \leftarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-hp}}{hp} = 1. \quad (3.54)$$

Полученную функцию $F(p) = 1$ можно считать изображением лишь в условном смысле, ибо она даже не стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. Однако нетрудно убедиться в том, что для этой функции сохраняют свою силу основные теоремы операционного исчисления. В частности, применяя теорему запаздывания, получим для мгновенного толчка в момент времени $t = \tau$:

$$\delta(t - \tau) \leftarrow \div e^{-p\tau}.$$

Определим теперь импульсивную функцию первого порядка $\delta_1(t)$ как предел функции

$$\begin{aligned} \delta_1(t, h) &= \frac{1}{h} \{ \delta(t, h) - \delta(t - h, h) \} = \\ &= \frac{1}{h^2} \{ 1(t) - 2 \cdot 1(t - h) + 1(t - 2h) \} = \begin{cases} \frac{1}{h^2} & \text{при } t < h, \\ -\frac{1}{h^2} & \text{при } h < t < 2h, \\ 0 & \text{при } t > 2h \end{cases} \end{aligned}$$

при $h \rightarrow 0$. Так как $\delta_1(t, h) \leftarrow \div \frac{1}{ph^2} (1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph})$, то аналогично предыдущему найдем

$$\delta_1(t) \leftarrow \div \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{ph^2} (1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}) = p.$$

Можно показать, что функция $\delta_1(t)$ в механическом смысле истолковывается как последовательность действующих друг за другом двух ударных импульсов, направленных в противоположные стороны, мгновенно сообщаящих покоящейся точке единичной массы единичное перемещение и не сообщаящих ей скорости.

Аналогично вводятся импульсивные функции высших порядков. Для них нетрудно получить соотношение

$$\delta_n(t) \leftarrow \div p^n (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.55)$$

где $\delta_0(t) = \delta(t)$.

Функции $p, p^2, \dots$, как и функцию $F(p) = 1$, можно считать изображениями лишь условно. Эти условные изображения и соответствующие им условные оригиналы (импульсивные функции) были введены Дираком и оказались весьма полезными в задачах, в которых рассматриваются величины, имеющие характер мгновенного импульса.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $x'' + \omega^2 x = A \{ \delta(t - \tau) + \delta(t - 2\tau) + \dots + \delta(t - n\tau) \}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Это уравнение описывает колебательный процесс, происходящий под действием n импульсов интенсивности A каждый, следующих друг за другом через промежутки времени τ . Уравнение в изображениях

$$p^2 X + \omega^2 X = A(e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} + \dots + e^{-np\tau}),$$

откуда

$$X = \frac{A}{p^2 + \omega^2} (e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} + \dots + e^{-np\tau}).$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$x(t) = \frac{A}{\omega} \{ \sin \omega(t - \tau) \cdot 1(t - \tau) + \sin \omega(t - 2\tau) \cdot 1(t - 2\tau) + \dots + \sin \omega(t - n\tau) \cdot 1(t - n\tau) \}.$$

3.17. Гамма-функция и изображения дробных степеней. Гамма функция $\Gamma(t)$ определяется как интеграл

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad (t > 0)^*.$$
 (3.56)

Отметим следующие основные свойства гамма-функции:

$$1. \Gamma(t+1) = t\Gamma(t),$$
 (3.57)

$$2. \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n - \text{натуральное}),$$
 (3.58)

$$3. \frac{\Gamma(t)\Gamma(\theta)}{\Gamma(t+\theta)} = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{\theta-1} dx,$$
 (3.59)

$$4. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
 (3.60)

Вычислим один важный интеграл. Используя (3.56), (3.60) и совершив замену переменной по формуле $x = \tau^2$ находим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi},$$

откуда

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
 (3.61)

Через гамма-функцию выражаются изображения дробных степеней t . Пусть $f(t) = t^a$, где $a \geq 0$. Изображение этой функции определится формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} t^a e^{-pt} dt.$$
 (3.62)

* См. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 3, ч. 2 § 71, 1949.

Будем сначала считать p действительной положительной величиной ($p > 0$). Заменив $pt = \theta$, найдем тогда в силу (3.56):

$$F(p) = \frac{1}{p^{a+1}} \int_0^{\infty} \theta^a e^{-\theta} d\theta = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}.$$

Пусть теперь p — комплексное; так как аналитическая функция $F(p)$ полностью определяется ее значениями на любом отрезке положительной оси (теорема единственности аналитического продолжения, п^о 1.35), то формула

$$t^a \longleftrightarrow \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad (3.63)$$

справедлива и для комплексного p . Эта формула является обобщением формулы (3.14) на случай дробных степеней. Действительно, если $a = n$ (натуральное), то $\Gamma(n+1) = n!$ и формула (3.63) обращается в (3.14).

Интеграл (3.62) сходится не только при $a > 0$, но и при $-1 < a < 0$ (ибо гамма-функция (3.56) определена при любом $t > 0$) и, следовательно, формула (3.62) справедлива при $a > -1$. Однако для $-1 < a < 0$ функция $f(t) = t^a$ не является оригиналом, так как в этом случае $t^a \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Можно говорить, что при $-1 < a < 0$ функция t^a является „особым“ оригиналом, а функция $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$ — его особым изображением.

Примеры

1. Пользуясь (3.62), находим

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}} \longleftrightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}.$$

2. Используя последний результат и теорему смещения (3.18), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-at} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p+a}}.$$

3. Отсюда с помощью теоремы об интегрировании оригиналов находим

$$\frac{1}{p \sqrt{p+a}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-at} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-\tau^2} d\tau \quad (a > 0).$$

Введем в рассмотрение часто встречающуюся в теории вероятностей функцию

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau, \quad (3.64)$$

называемую функцией ошибок. Учитывая значение интеграла (3.61) заключаем, что $\operatorname{erf} t$ непрерывна и возрастает от 0 до 1 в промежутке $0 < t < +\infty$ (рис. 3.12). Тогда

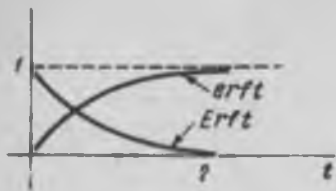


Рис. 3.12

$$\frac{1}{p \sqrt{p+a}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{erf} \sqrt{at} \quad (a > 0).$$

4. Используя результат первого примера формулу (3.4) и теорему умножения (3.20), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}(p-1)} &\rightarrow \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \theta}} e^{t-\theta} d\theta = \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \\ &= e^t \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau = e^t \operatorname{erf} \sqrt{t}. \end{aligned}$$

5. В некоторых вопросах оказывается удобнее рассматривать функцию $\operatorname{Erf} t$, определяемую равенством

$$\operatorname{Erf} t = 1 - \operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau \quad (3.65)$$

(рис. 3.12). Пользуясь этой функцией, найдем изображение оригинала $f(t) = e^{-t^2}$. Имеем

$$e^{-t^2} \leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-t^2} e^{-pt} dt = e^{-\frac{p^2}{4}} \int_0^{\infty} e^{-(t+\frac{p}{2})^2} dt.$$

Считая, что $p > 0$ и положив $t + \frac{p}{2} = \tau$, получим

$$e^{-t^2} \leftrightarrow e^{-\frac{p^2}{4}} \int_{p/2}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf} \left(\frac{p}{2} \right).$$

С помощью аналитического продолжения этот результат можно распространить на комплексные p .

6. Используя результат предыдущего примера и теорему об интегрировании оригиналов (3.31), находим

$$\operatorname{erf} t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p} e^{-\frac{p^2}{4}} \operatorname{Erf} \left(\frac{p}{2} \right). \quad (3.66)$$

3.18 Функции Бесселя. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \lambda^2) x = 0, \quad (3.67)$$

называемое уравнением Бесселя. Это уравнение встречается в различных вопросах техники, физики, астрономии. Действительное положительное число λ , входящее в уравнение, называется его индексом.

Решение уравнения (3.67) будем искать в виде степенного ряда

$$x = t^r(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots). \quad (3.68)$$

Подставив этот ряд в левую часть уравнения (3.67) и приравняв нулю коэффициенты при различных степенях t , получим

$$\begin{array}{l|l} t^r & [r^2 - \lambda^2] a_0 = 0; \\ t^{r+1} & [(r+1)^2 - \lambda^2] a_1 = 0; \\ t^{r+2} & [(r+2)^2 - \lambda^2] a_2 + a_0 = 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ t^{r+s} & [(r+s)^2 - \lambda^2] a_s + a_{s-2} = 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \quad (3.69)$$

Приняв $a_0 \neq 0$, найдем из первого уравнения $r = \pm \lambda$. Взяв сначала $r = \lambda$ и вычисляя из системы (3.69) последовательно значения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots$, найдем

$$\begin{aligned} a_{2s+1} &= 0, \quad a_{2s} = \frac{(-1)^s a_0}{2 \cdot 4 \dots 2s(2\lambda + 2)(2\lambda + 4) \dots (2\lambda + 2s)} = \\ &= \frac{(-1)^s a_0}{2^{2s} \cdot s! (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + s)} \quad (s = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Подставив найденные значения коэффициентов в (3.68), получим следующее решение уравнения Бесселя:

$$x(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\lambda}}{2^{2k} \cdot k! (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + k)}. \quad (3.70)$$

С помощью признака Даламбера легко показать, что этот ряд сходится для всех действительных t . В полученном нами решении (3.70) уравнения Бесселя коэффициент a_0 остался произвольным. Если принять $a_0 = 1/2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)$, то получим решение уравнения Бесселя, которое называется функцией Бесселя λ -го порядка и обозначается символом $I_\lambda(t)$. Итак,

$$I_\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\lambda}. \quad (3.71)$$

Для представления ряда (3.70) в этой форме мы k раз воспользовались свойством (3.57) гамма-функции, в результате чего получается $(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + k) \Gamma(\lambda + 1) = \Gamma(\lambda + k + 1)$. С частным случаем уравнения Бесселя при $\lambda = 0$, решением которого служит функция Бесселя нулевого порядка, мы уже встречались выше (п^о 3.14, пример 2); найденная там функция $I_0(t)$ является частным случаем функции (3.71) при $\lambda = 0$, так как в силу (3.58) $\Gamma(k + 1) = k!$.

Если взять теперь $r = -\lambda$, то найденные из системы (3.69) значения коэффициентов a_s будут отличаться от найденных выше значений этих коэффициентов отрицательным знаком у λ . В результате мы придем к функции Бесселя $I_{-\lambda}(t)$, выражение которой получается из (3.71) заменой λ на $-\lambda$.

Функция Бесселя выражается через элементарные функции в случае, когда индекс $\lambda = \frac{2n+1}{2}$, т. е. равен половине нечетного числа и только в этом случае. Например, так как $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \times \sqrt{\pi}, \dots$ (свойства (3.57) и (3.60) гамма-функции), то при $\lambda = \frac{1}{2}$ ряд (3.71) дает

$$\begin{aligned} I_{1/2}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{2k + \frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \left\{ 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left\{ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t. \end{aligned}$$

Если индекс $\lambda = n$ — натуральное число, то из (3.71) легко вывести, что

$$I_n(-t) = (-1)^n I_n(t), \quad (3.72)$$

откуда следует, что функция Бесселя четного порядка n — четные, а нечетного порядка — нечетные. Кроме этого,

$$I_0(0) = 1, \quad I_n(0) = 0 \quad (n \geq 1). \quad (3.73)$$

Пользуясь тем же рядом (3.71), нетрудно вывести важную рекуррентную формулу

$$I_{\lambda+1}(t) = I_{\lambda-1}(t) - 2I'_{\lambda}(t) \quad (\lambda > 1). \quad (3.74)$$

функции Бесселя табулированы, поэтому работа с ними не труднее, чем с тригонометрическими функциями.

Найдем теперь изображение функции Бесселя $I_n(t)$, индекс n которой есть натуральное число. Начнем с того, что получим оригинал, соответствующий изображению $\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$.

Применяя первую теорему разложения (п⁰ 3.14) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}} &= 1 - \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{p^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{p^6} - \dots = \\ &\rightarrow \frac{1}{2 \cdot 1!} t - \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{t^5}{5!} - \dots = \\ &= \frac{1}{0! 1!} \cdot \frac{t}{2} - \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{t}{2}\right)^3 + \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{t}{2}\right)^5 - \dots \end{aligned}$$

Так как $\Gamma(k+2) = (k+1)!$ [формула (3.58)], то читатель сразу усмотрит, что мы получили ряд (3.71) при $\lambda=1$, а потому сумма последнего ряда равна функции Бесселя $I_1(t)$ первого порядка.

Выше (п⁰ 3.14, пример 2) мы получили соотношение

$$I_0(t) \leftarrow \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}, \quad (3.75)$$

теперь же вывели формулу

$$I_1(t) \leftarrow \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}. \quad (3.76)$$

Пользуясь методом математической индукции, докажем далее, что для любого натурального n имеет место формула

$$I_n(t) \leftarrow \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \quad (3.77)$$

Эта формула доказана нами для $n=0$ и $n=1$. Докажем теперь, что если эта формула верна для $n=k-1$ и $n=k$, ($k>1$), то она верна и для $n=k+1$. В силу формулы (3.74), используя (3.73) и теорему (3.28), будем иметь

$$\begin{aligned} I_{k+1}(t) &\leftarrow \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{k-1}}{\sqrt{p^2+1}} - 2p \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^k}{\sqrt{p^2+1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{k-1}}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1}-p)^2 = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{k+1}}{\sqrt{p^2+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, по индукции формула (3.77) доказана.

Пример 1. Найти оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{t}{p}}$, где n — натуральное число либо нуль. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{t}{p}} &= \frac{1}{p^{n+1}} - \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{p^{n+2}} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{p^{n+3}} - \dots + \\ &\rightarrow \frac{1}{n!} t^n - \frac{1}{1!(n+1)!} t^{n+1} + \frac{1}{2!(n+2)!} t^{n+2} - \dots = \\ &= t^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{1}{0! \Gamma(n+1)} \cdot t^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{1! \Gamma(n+2)} \cdot t^{1+\frac{n}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2! \Gamma(n+3)} \cdot t^{2+\frac{n}{2}} - \dots \right\} = t^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \cdot t^{k+\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Мы пришли к сумме (3.71), в которой положено $\lambda = n$ и на место t подставлено $2\sqrt{t}$. Следовательно, полученная нами сумма равна $I_n(2\sqrt{t})$. Итак,

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{t}{p}} \rightarrow t^{\frac{n}{2}} I_n(2\sqrt{t}).$$

Пример 2. Ряд (3.71) сходится не только для действительных t , но и для любых комплексных t . В последнем случае этот ряд определяет функцию Бесселя комплексного аргумента. Учитывая сказанное, найдем

оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{p} e^{-\frac{t}{p}}$.

Поступая как в предыдущем примере, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} e^{-\frac{t}{p}} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{1!} \cdot \frac{t}{p^2} + \frac{1}{2!} \frac{t^2}{p^3} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{t^3}{p^4} + \dots \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - \frac{1}{(1!)^2} (1t) + \frac{1}{(2!)^2} (1t)^2 - \frac{1}{(3!)^2} (1t)^3 + \dots = I_0(2\sqrt{1t}). \end{aligned}$$

Во многих задачах физики и техники используются функции Кельвина $\text{ber } t$ и $\text{bei } t$, которые определяются соответственно как действительная и взятая с противоположным знаком мнимая части функции $I_0(t\sqrt{t})$, т. е.

$$I_0(t\sqrt{t}) = \text{ber } t - i \text{bei } t.$$

Положив в ряде (3.71) $\lambda = 0$, заменив в нем t на $t\sqrt{t}$ и отделив действительную и мнимую части, получим

$$\text{ber } t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[(4k)!!]^2} \cdot t^{4k},$$

$$\text{bei } t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[(4k+2)!!]^2} \cdot t^{4k+2},$$

Выше мы нашли

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{t}{p}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} I_0(2\sqrt{t}),$$

или

$$\frac{1}{p} \left(\cos \frac{1}{p} - t \sin \frac{1}{p} \right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \text{ber}(2\sqrt{t}) - t \text{bei}(2\sqrt{t}),$$

откуда

$$\frac{1}{p} \cos \frac{1}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \text{ber}(2\sqrt{t}), \quad \frac{1}{p} \sin \frac{1}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \text{bei}(2\sqrt{t}).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти оригиналы для следующих изображений:

а) $\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$; б) $\frac{\sqrt{p+\alpha}}{p}$; в) $\frac{1}{p^{n+1}\sqrt{p}}$; г) $\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}$.

2. Найти изображения функций: а) $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$; б) $\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$.

3. Найти изображения интегралов Френеля:

а) $S(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt$; б) $C(t) = \int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt$.

4. Найти решение дифференциального уравнения $tx'' - 3x' + x = 0$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

§ 6. ОБЩИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

3.19. Интеграл Бромвича. Задачу определения оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$ мы решали выше с помощью выведенных нами формул, дающих изображения для некоторых конкретных оригиналов, а также применяя полученные нами обратные теоремы, к которым относятся теоремы сдвига и умножения, первая и вторая теоремы разложения. Выше мы привели достаточное число примеров, иллюстрирующих применение всех этих формул и теорем.

* Символом $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n одинаковой четности с n ; например $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, $9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$.

Однако многие задачи приводят к изображениям, от которых с помощью перечисленных приемов не удастся перейти к оригиналам. По этой причине в настоящем параграфе мы займемся решением общей задачи о построении оригинала по заданному его изображению.

Пусть $f(t)$ — некоторый оригинал, а s_0 — его показатель роста; пусть $F(p)$ — изображение этого оригинала, т. е.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (3.78)$$

Нетрудно видеть, что функция $g(t) = e^{-st} f(t)$, где s — некоторое фиксированное действительное число, большее s_0 ($s > s_0$) удовлетворяет всем условиям интегральной теоремы Фурье (п^н 2.18), в силу чего функция $g(t)$ представима интегралом Фурье (2.76):

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) e^{i\omega(t-\theta)} d\theta \right\} d\omega.$$

Подставив сюда $g(t) = e^{-st} f(t)$ и учитывая, что $f(t) = 0$ при $t < 0$, получим

$$e^{-st} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left\{ \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-(s+i\omega)\theta} d\theta \right\} d\omega,$$

откуда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+i\omega)t} \left\{ \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-(s+i\omega)\theta} d\theta \right\} d\omega.$$

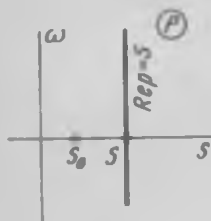


Рис. 3.13

Положим теперь $s + i\omega = p$. Так как s — фиксированное число, то $i d\omega = dp$, а при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ интегрирование в плоскости p будет вестись вдоль прямой $\text{Re } p = s$ (рис. 3.13). Обозначив условно интеграл по этой прямой интегралом в пределах от $s - i\infty$ до $s + i\infty$, перепишем последнюю формулу так

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \left\{ \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-p\theta} d\theta \right\} dp.$$

В силу (3.78) внутренний интеграл здесь равен $F(p)$, так что окончательно находим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-l\infty}^{s+l\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-l\omega}^{s+l\omega} F(p) e^{pt} dp. \quad (3.79)$$

Полученный нами интеграл, называемый интегралом Бромвича, и решает в общем случае задачу отыскания оригинала $f(t)$ по заданному его изображению $F(p)$.

Из изложенного следует, что если два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют общее изображение $F(p)$, то эти оригиналы выражаются одним и тем же интегралом (3.79), т. е. совпадают друг с другом во всех точках, в которых оба они непрерывны. Таким образом, сформулированная в п^о 3.2 теорема единственности оригинала доказана.

3.20. Формулы обращения Римана — Меллина. Рассмотрим формулы (3.78) и (3.79) совместно:

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt; \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s-l\infty}^{s+l\infty} F(p) e^{pt} dp. \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

Мы доказали, что если $F(p)$ определяется первой из этих формул, т. е. является изображением $f(t)$, то $f(t)$ должна определяться второй из них. Иначе говоря, первое равенство (3.80), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестной функции $f(t)$, имеет решение, определяемое второй формулой (3.80). Из проведенного в предыдущем пункте рассуждения, вообще говоря, не следует, что из второй формулы (3.80) следует первая формула, ибо нет оснований считать, что для произвольной функции $F(p)$ найденная по второй формуле функция $f(t)$ будет оригиналом. Иными словами, мы не доказали существование решения первого уравнения (3.80) относительно $f(t)$.

Однако при некоторых условиях, накладываемых на $F(p)$ (которые мы формулируем ниже), из второй формулы (3.80) следует первая формула и, таким образом, второе равенство (3.80), рассматриваемое как уравнение относительно $F(p)$, имеет решение, определяемое первой формулой. Формулы (3.80), рассматриваемые совместно, называются формулами обращения Римана — Меллина.

Сформулируем теперь условия, при которых функция $f(t)$, определяемая второй формулой (3.80), будет оригиналом. Для этого достаточно, чтобы:

1) Функция $F(p)$ была аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 — некоторое положительное число.

2) $F(p)$ стремилась к нулю при $|p| \rightarrow +\infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p > s > s_0$ равномерно относительно $\arg p$. Это значит, что при $|p| > s_0$ можно указать такое число ϵ , не зависящее от $\arg p$, что $|F(p)| < \epsilon$ для всех точек p упомянутой полуплоскости.

3) $F(p)$ была абсолютно интегрируема вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s (s > s_0)$. Это значит, что должен сходиться несобственный интеграл

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(s+i\omega)| d\omega.$$

Доказательство сформулированного утверждения можно найти в более подробных курсах.

3.21. Нахождение оригинала в случае, когда его изображение является мероморфной функцией. В настоящем пункте мы рассмотрим задачу нахождения оригинала для одного часто встречающегося в приложениях класса изображений $F(p)$. Пусть $F(p)$ — мероморфная функция, т. е. равна отношению двух целых функций. Напомним (п⁰ 3.14), что функция $\varphi(p)$ называется целой, если она представима степенным рядом во всей плоскости p . Например, мероморфной функцией является $\operatorname{th} p$ — отношение двух целых функций $\operatorname{sh} p$ и $\operatorname{ch} p$. Мероморфная функция может иметь своими особенностями в плоскости p только полюсы.

Итак, пусть мероморфная функция $F(p)$ удовлетворяет трем условиям, сформулированным в конце предыдущего пункта. Тогда все ее полюсы $p_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ лежат левее некоторой прямой $\operatorname{Re} p = s_0$. Считая все эти полюсы простыми, пронумеруем их в порядке возрастания модулей, т. е. примем $|p_n| < |p_{n+1}|$. (Здесь нужно предположить еще, что среди полюсов p_k нет точек с одинаковыми модулями, однако это ограничение не является существенным и может быть снято при другом способе рассуждений.)



Рис. 3.14

Проведем последовательность окружностей $C_n (n = 1, 2, \dots)$ с центрами в начале координат и с радиусами R_n так, чтобы было $|p_n| < R_n < |p_{n+1}|$ (окружность C_n проходит между полюсами p_n и p_{n+1} , рис. 3.14). Предположим, кроме того, что окружности C_n можно провести таким образом, чтобы при $n \rightarrow \infty$ (или что то же, при $R_n \rightarrow \infty$) функция $F(p)$ на этих окружностях стремилась к нулю равномерно относительно $\arg p$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma_n} F(p) e^{pt} dp \quad (t > 0),$$

где Γ_n — контур, составленный из отрезка γ_n прямой $\operatorname{Re} p = s$ ($s > s_0$) и дуги BDA окружности C_n . Представив этот интеграл в виде суммы интегралов по C_n и γ_n и воспользовавшись основной теоремой о вычетах (п⁰ 1.54), получим

$$\int_{C_n} F(p) e^{pt} dp + \int_{\gamma_n} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [F(p_k) e^{p_k t}]. \quad (3.81)$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$. Указанный предельный переход совершается на основании следующего предложения, известного под названием леммы Жордана, которое приводим без доказательства: *если на некоторой последовательности дуг окружностей $C_n: |p| = R_n$, $\operatorname{Re} p < s$ ($R_n \rightarrow \infty$, s — фиксировано) функция $F(p) \rightarrow 0$ при $R_n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$, то для любого $t > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} F(p) e^{pt} dp = 0,$$

Итак, при $n \rightarrow \infty$ первый интеграл слева в (3.81) стремится к нулю. Второй интеграл слева при $n \rightarrow \infty$, очевидно, стремится к интегралу вдоль прямой $\operatorname{Re} p = s$. Следовательно, в силу второй формулы (3.80) из равенства (3.81) в пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res} [F(p_k) e^{p_k t}]. \quad (3.82)$$

Эта формула определяет оригинал $f(t)$ для мероморфного изображения $F(p)$. Так как

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p)$ и $B(p)$ — целые функции, то, применяя формулу (1.129) для вычисления вычета функции в простом полюсе, получим

$$\operatorname{Res} [F(p_k) e^{p_k t}] = \frac{A(p_k) e^{p_k t}}{B'(p_k)},$$

после чего (3.82) можно будет переписать так

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.83)$$

Полученная формула является обобщением формулы (3.47) на случай мероморфного оригинала $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ (в формуле (3.47) A и B — многочлены относительно p , в то время как в (3.83) A и B — произвольные целые функции.)

Пример 1. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1 - e^{-2p}}{p - 1}$.

От данного изображения можно сразу перейти к оригиналу, применив теорему запаздывания. Воспользуемся, однако, формулой (3.83). Функция $F(p)$ имеет единственный простой полюс $p = 1$. Применяя (3.83), находим

$$f(t) = \frac{1 - e^{-2}}{1} e^t = e^t \cdot 1(t) - e^{t-2} \cdot 1(t-2).$$

Пример 2. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{\text{th } p}{p} = \frac{\text{sh } p}{p \text{ ch } p}$.

$F(p)$ — мероморфная функция, причем $A(p) = \text{sh } p$, $B(p) = p \text{ ch } p$. Нули функции $B(p)$ будут полюсами функции $F(p)$ (п° 1.52). Нулями же $B(p)$ будет точка $p = 0$ и точки, где $\text{ch } p = 0$. Решаем последнее уравнение; положив $p = s + i\omega$, в силу (1.31) имеем

$$\text{ch } p = \frac{1}{2} (e^p + e^{-p}) = \frac{1}{2} \{e^s (\cos \omega + i \sin \omega) + e^{-s} (\cos \omega - i \sin \omega)\}.$$

Отсюда легко усмотреть, что $\text{ch } p$ может обратиться в нуль, только если $s = 0$; тогда $\text{ch } p = \cos \omega$, откуда следует, что нулями $\text{ch } p$ являются точки $p_k = \omega_k i = (2k - 1) \frac{\pi}{2} i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Все эти нули будут простыми, так как $(\cos \omega)'|_{\omega = \omega_k} = -\sin \omega_k \neq 0$. Итак, простыми полюсами функции $F(p)$ будут точки

$$p_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2} i \left(k = \frac{1}{2}, 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right),$$

лежащие на мнимой оси ω . Далее находим

$$\frac{A(p)}{B'(p)} = \frac{\text{sh } p}{\text{ch } p + p \text{ sh } p}.$$

Так как $\text{sh } p_{1/2} = \text{sh } 0 = 0$, $\text{ch } p_{1/2} = \text{ch } 0 = 1$, $\text{ch } p_k = 0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то

$$\frac{A(p_{1/2})}{B'(p_{1/2})} = 0;$$

$$\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} = \frac{\text{sh } p_k}{p_k \text{ sh } p_k} = \frac{1}{p_k} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Напишем теперь выражение для искомого оригинала по формуле (3.83). Так как суммирование в ней нужно произвести по всем полюсам изображения, то получаем

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p_k} e^{p_k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi i} e^{(2k-1)\frac{\pi i}{2} t}.$$

Мы получили представление оригинала в виде ряда Фурье в комплексной форме (п^о 2.4), причем комплексный коэффициент Фурье функции $f(t)$ равен

$$c_k = \frac{2}{(2k-1)\pi i} = -\frac{2i}{(2k-1)\pi}$$

Перейдем к действительной форме этого ряда. По формулам (2.11) находим действительные коэффициенты Фурье:

$$a_k = 2\operatorname{Re} c_k = 0, \quad b_k = -2\operatorname{Im} c_k = \frac{4}{(2k-1)\pi},$$

откуда следует, что

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\Omega t}{2k-1} \quad \left(\Omega = \frac{\pi}{2}\right).$$

Видим, что $f(t)$ является периодической функцией периода $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 4$. Полученный ряд легко просуммировать методом, изложенным в п^о 2.13; поступая так, как мы это делали в указанном пункте, находим значение $f(t)$ на интервале $[0, 4]$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi}{2} \cdot \frac{\sin k\Omega t}{k} = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\Omega t}{k} = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\Omega(t-2)}{k} = \end{aligned}$$

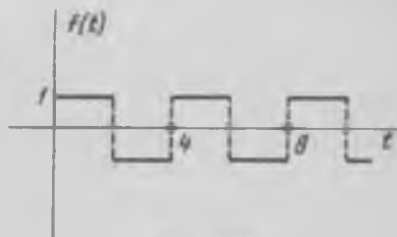


Рис. 3.15

$$= \frac{2}{\pi} (\sin(t) - \sin(t-2)) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < 2 \\ -1 & \text{при } 2 < t < 4 \end{cases}$$

(рис. 3.15). Полный график $f(t)$ получим, периодически продолжив картину с интервала $[0, 4]$ на всю положительную ось t . Аналитически найденный оригинал $f(t)$ можно записать так

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 4k-4 < t < 4k-2 \\ -1 & \text{при } 4k-2 < t < 4k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

3.22. Нахождение оригинала путем непосредственного применения формул обращения. На практике приходится иногда сталкиваться с изображениями, не являющимися мероморфными функциями; переход от них к оригиналам не может быть осуществлен ни с помощью формулы (3.83), ни тем более с помощью теорем предыдущих параграфов. Это, в первую очередь, относится к многозначным изображениям $F(p)$ с особенностями в виде точек разветвления (п^о 1.30).

В этом случае для отыскания оригинала применяется непосредственно формула (3.79):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Вместо интегрирования вдоль отрезка, ограниченного точками $s - i\omega$ и $s + i\omega$, сначала интегрируют вдоль замкнутого контура, содержащего упомянутый отрезок (рис. 3.16). Если $F(p)$ имеет конечное число особых точек, и все они — полюсы, то обычно упомянутый замкнутый контур выбирается содержащим все эти полюсы внутри себя. Если сверх этого $F(p)$ имеет точки разветвления, то нужно провести соответствующие разрезы (см. п^о 1.30).

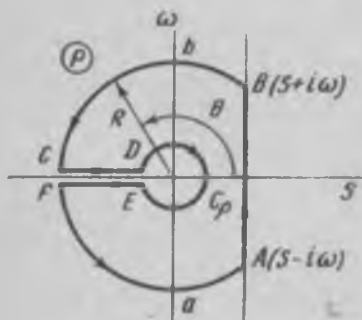


Рис. 3.16

Пример. Найдем оригинал, соответ-

ствующий изображению $F(p) = \frac{1}{p} e^{-\sqrt{p}}$, где имеется в виду та ветвь $\sqrt{p}$, для ко-

торой $\sqrt{p} > 0$ при $p > 0$.

$F(p)$ — многозначная функция, имеющая точку разветвления при $p = 0$ (п^о 1.30). Оригиналу вычисляем по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{pt-\sqrt{p}}}{p} dp, \quad (3.84)$$

причем в силу характера особенностей $F(p)$ для вычисления этого интеграла теорема о вычетах неприменима. Рассмотрим прежде всего интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{pt-\sqrt{p}}}{p} dp,$$

взятый в плоскости p по контуру L (рис. 3.16), составленному из отрезка прямой AB , ограниченного точками $s - i\omega$ и $s + i\omega$, дуг окружностей BC и FA , радиуса R , малой окружности CD , радиуса r и прямых CD и EF . Обе окружности имеют центры в начале координат. В плоскости p проведем разрез вдоль отрицательной части действительной оси. Так как внутри L функция $F(p)$ аналитична, то по теореме Коши (п^о 1.38) рассматриваемый интеграл равен нулю, в силу чего будет

$$\int_{(AB)} = - \int_{(BC)} - \int_{(FA)} - \int_{C_0} - \int_{(CD)} - \int_{(EF)}.$$

Рассмотрим поведение $F(p)$ на дугах BC и FA при $R \rightarrow \infty$. На этих дугах $p = Re^{i\theta}$, так что

$$\sqrt{p} = \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Для того чтобы фиксировать ту ветвь $\sqrt{p}$, которую мы должны иметь в виду, необходимо считать, что в правой полуплоскости $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Тогда на bC : $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ и $\cos \frac{\theta}{2} > 0$; на Fa : $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ и тоже $\cos \frac{\theta}{2} > 0$. Таким образом, на дугах BC и FA будет $\cos \frac{\theta}{2} > 0$, откуда следует, что на этих дугах

$$|e^{-\sqrt{p}}| = e^{-\sqrt{R} \cos \frac{\theta}{2}} < 1,$$

в силу чего

$$\left| \frac{e^{-\sqrt{p}}}{p} \right| < \frac{1}{R},$$

так что $F(p) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Отсюда в силу леммы Жордана (п° 3.21), условия которой здесь выполнены, заключаем, что интегралы по дугам BC и FA стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, в пределе при $R \rightarrow \infty$ (что эквивалентно условию $\omega \rightarrow \infty$) получаем

$$\begin{aligned} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{pt-\sqrt{p}}}{p} dp &= - \int_{C_p} \frac{e^{pt-\sqrt{p}}}{p} dp + \\ &+ \int_0^\infty \frac{e^{-st-l\sqrt{s}}}{s} ds - \int_p^\infty \frac{e^{-st+l\sqrt{s}}}{s} ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл по окружности C_p . Так как на ней $p = \rho e^{i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ ($\pi > \theta > -\pi$), то $pt - \sqrt{p} = \rho_0 (\cos \theta + i \sin \theta) - \sqrt{\rho_0} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$, откуда следует, что на этой окружности $pt - \sqrt{p}$ при малом ρ будет малой величиной порядка $\sqrt{\rho}$. Таким образом,

$$e^{pt-\sqrt{p}} = 1 + \chi(\rho),$$

где $\chi(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ равномерно относительно θ . Следовательно,

$$- \int_{C_p} \frac{e^{pt-\sqrt{p}}}{p} dp = -l \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \chi) d\theta = 2\pi l + l \int_{-\pi}^{\pi} \chi d\theta,$$

причем интеграл в правой части по модулю меньше, чем $2\pi |\chi|_{\max}$, т. е. стремится к нулю вместе с ρ . Таким образом, при $\rho \rightarrow 0$ будем иметь:

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{e^{pt-\sqrt{p}}}{p} dp = 2\pi l + \int_0^\infty \frac{e^{-st-l\sqrt{s}}}{s} ds - \int_0^\infty \frac{e^{-st+l\sqrt{s}}}{s} ds,$$

Совершив в последних двух интегралах замену переменной по формуле $\sqrt{s} = \xi$, получим

$$\int_{s-l\infty}^{s+l\infty} \frac{e^{pt} - \sqrt{p}}{p} dp = 2\pi l - 4l \int_0^{\sqrt{s}} \frac{e^{-\xi^2 t} \sin \xi d\xi}{\xi}$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся равенством

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/a^2} \quad (a > 0),$$

интегрируя которое по b в пределах от 0 до b , получим

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2 x^2} \sin 2bx}{x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \int_0^b e^{-\tau^2/a^2} d\tau$$

положив здесь $a = \sqrt{t}$, $2b = 1$, придем к формуле

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \frac{\sin x}{x} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^{1/2} e^{-\tau^2/t} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{t}}} e^{-\tau^2} d\tau = \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

[см. формулу (3.64)]. Учитывая последний результат, получаем

$$\int_{s-l\infty}^{s+l\infty} \frac{e^{pt} - \sqrt{p}}{p} dp = 2\pi l - 2\pi l \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right),$$

откуда в силу (3.84) окончательно находим

$$f(t) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right) = \operatorname{Erf} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \right)$$

[формула (3.65)].

3.23. Преобразование Фурье и его связь с преобразованием Лапласа. Операционный метод может быть связан с методом гармонического анализа. Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям интегральной теоремы Фурье (п⁰ 2.18); тогда она представима интегралом Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{i\omega(t-\theta)} d\theta \right\} d\omega.$$

Это равенство эквивалентно следующим двум: если

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \quad (3.85)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.86)$$

Функцию $S(\omega)$ назовем спектральной плотностью функции $f(t)$; иногда ее, как и функцию $C(\omega)$ (п⁰ п⁰ 2.19, 2.21), называют спектральной функцией. Функции $S(\omega)$ и $C(\omega)$ связаны друг с другом соотношением

$$S(\omega) = 2\pi \cdot C(\omega).$$

Формулы (3.85) и (3.86) называются соответственно прямым и обратным преобразованиями Фурье. Совместно их называют формулами обращения Фурье. Равенство (3.85), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестной функции $f(t)$, имеет решение, определяемое формулой (3.86); равенство же (3.86), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестной функции $S(\omega)$, имеет решение, определяемое формулой (3.85).

Интегральная теорема Фурье, в частности, требует, чтобы $f(t)$ была абсолютно интегрируема на всей оси t , т. е. чтобы

сходился несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$. Это очень

жесткое требование, которому не удовлетворяют даже такие функции, как $f(t) = \text{const}$, $f(t) = t^n$ ($n > 0$), $f(t) = \sin \pi t$. Для того чтобы расширить класс функций, к которым применимо преобразование Фурье, будем применять это преобразование не к функции $f(t)$, а к функции $g(t) = e^{-st} f(t)$, где s — некоторое фиксированное положительное число, причем функцию $f(t)$ будем считать оригиналом (п⁰ 3.1). Нетрудно убедиться в том, что функция $g(t)$ удовлетворяет всем условиям интегральной теоремы Фурье, если только взять $s > s_0$, где s_0 показатель роста $f(t)$.

Так как теперь $f(t) = 0$ при $t < 0$, то для функции $g(t) = e^{-st} f(t)$ формулы обращения Фурье будут

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$e^{-st} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Введя, как мы это сделали в п⁰ 3.19, вместо действительной переменной ω комплексную переменную $p = s + i\omega$, придадим последним формулам вид

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt; \quad (3.87)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (3.88)$$

Мы пришли к формулам обращения Римана — Меллина (п" 3.20). Итак, мы получили следующую связь операционного метода с методом гармонического анализа: если $F(p)$ есть изображение по Лапласу оригинала $f(t)$, то функция $F(s + i\omega) = S(\omega)$ будет спектральной плотностью затухающей функции $e^{-st} f(t)$.

Сравнивая друг с другом формулы (3.85) и (3.87) (в первой из них для функций $f(t)$, являющихся оригиналами, интегрирование тоже производится в пределах от 0 до ∞), заключаем, что спектральная плотность $S(\omega)$ оригинала $f(t)$ может быть получена из изображения $F(p)$ этой функции заменой в изображении p на $i\omega$, т. е.

$$S(\omega) = 2\pi \cdot C(\omega) = [F(p)]_{p=i\omega}.$$

Последний результат позволяет пользоваться имеющимися таблицами изображений для отыскания спектральных плотностей различных оригиналов.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти оригиналы, соответствующие мероморфным функциям:

$$a) \frac{1}{p \operatorname{ch} p}, \quad б) \frac{\operatorname{ch} p}{p \operatorname{ch} 2p}.$$

§ 1. МАТРИЦЫ

4.1. Первоначальные понятия. Прямоугольной матрицей называется множество чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы, имеющей m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее элементами. Матрицы записывают так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| = (a_{ij}) = \|a_{ij}\|$$

$$\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m; \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Индекс i обозначает номер строки, индекс j — номер столбца матрицы. Матрицы в дальнейшем даны в круглых и прямых скобках.

Матрица, имеющая m строк и n столбцов называется матрицей размера $m \times n$.

Если число строк матрицы равно числу столбцов, $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n . Среди квадратных матриц отметим диагональные матрицы, у которых все элементы с неравными индексами ($i \neq j$) равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Будем говорить, что элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ расположены на главной диагонали. Диагональные матрицы, все отличные от нуля элементы которых равны между собой

($a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$), называются скалярными матрицами. Если $a = 1$, то скалярная матрица называется единичной.

Единичную матрицу принято обозначать буквой E :

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем нам встретятся матрицы вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

называемые нижней и верхней треугольными матрицами, а также матрицы, состоящие из одного столбца и одной строки ($a_1, a_2 \dots a_n$) (так называемые матрица-

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

столбец и матрица-строка).

Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и ее обозначают 0.

4.2. Определители n -го порядка. Свойства и некоторые теоремы. В нашей книге мы не будем излагать теорию определителей, отослав читателей к соответствующей литературе. Мы лишь напомним основные определения, сформулируем свойства и некоторые теоремы об определителях, чтобы иметь возможность сослаться на них в дальнейшем изложении.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n :

$$A = (a_{ij}).$$

Выберем по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы и составим произведение этих элементов, называемое членом определителя:

$$a_{1j} a_{2k} \dots a_{nr}, \quad (4.1)$$

где вторые индексы $j, k, \dots, r$ образуют перестановку чисел $1, 2, \dots, n$.

В матрице n -го порядка n^2 элементов и можно составить $n!$ произведений вида (4.1).

Говорят, что числа $1, 2, \dots, n$ записаны в «порядке», если каждое последующее число больше предыдущего. Если же какое-нибудь последующее число меньше предыдущего, то в записи имеет место «беспорядок».

Числа $3, 4, 5, 6$ записаны в «порядке», числа $3, 5, 6, 4$ — в «беспорядке». Число беспорядков (инверсий) в перестановке n натуральных чисел — есть число пар элементов, в которых большее число предшествует меньшему. Перестановка называется четной, если число инверсий в ней четное число, и нечетной в случае нечетного числа инверсий.

Определителем квадратной матрицы порядка n называется число, представляющее собой сумму членов определителя вида:

$$\sum (\pm a_{1j} a_{2k} \dots a_{nr}),$$

причем знак плюс приписывается произведению элементов в том случае, когда множество вторых индексов является четной перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$, и знак минус, когда число перестановок нечетное.

В частности, для определителей 2-го и 3-го порядков получим формулы, известные читателю из общего курса математики:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} +$$

$$+ a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

Обозначают определитель матрицы $A = (a_{ij})$ так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Подчеркнем различие между матрицей и ее определителем: матрица — таблица чисел, определитель — число, записанное в виде таблицы.

Свойства определителей n -го порядка.

1) Определитель не изменится, если его столбцы заменить строками, не меняя их порядка.

Сформулированное свойство устанавливает равноправие столбцов и строк определителя.

2) Переставить местами два столбца (строки) определителя значит умножить определитель на -1 .

3) Определитель, элементы столбца (строки) которого равны соответствующим элементам другого столбца (строки), равен нулю.

4) Если все элементы k -го столбца (строки) определителя являются суммой двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у которых элементами k -го столбца (строки) являются соответственно первые и вторые слагаемые членов k -го столбца заданного определителя, а все остальные элементы такие же, как и у исходного определителя.

5) Общий множитель всех элементов некоторого столбца (строки) можно выносить за знак определителя.

6) Определитель, у которого все элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, равен нулю.

7) Если к элементам столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на некоторое фиксированное число, то преобразованный определитель равен исходному.

Если в определителе n -го порядка выбрать элемент a_{ij} и вычеркнуть столбец и строку, на пересечении которых находится этот элемент, то оставшиеся столбцы и строки образуют определитель $(n-1)$ -го порядка, называемый минором заданного определителя, соответствующим a_{ij} .

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется соответствующий ему минор, взятый со знаком плюс или минус. Знак плюс приписывается минору элемента a_{ij} , если сумма $i+j$ номеров столбца и строки — число четное, а знак минус, если сумма $i+j$ — нечетное число.

8) Определитель равен сумме произведений элементов j -го столбца на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (4.2)$$

Равенство (4.2) называют разложением определителя $\det A$ по элементам j -го столбца.

Определитель может быть разложен по элементам любого своего столбца (строки).

Формула (4.2) позволяет свести вычисление определителя n -го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$ -го порядка.

9) Сумма произведений элементов столбца (строки) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

Отметим, что:

а) определитель диагональной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на диагонали:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}; \det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

и, в частности, определитель единичной матрицы равен 1: $\det E = 1$;

б) определитель треугольной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали.

4.3. Действия над матрицами. Две матрицы A и B одного и того же размера называются равными, если все их соответствующие элементы равны, т. е. $(a_{ij}) = (b_{ij})$, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

Суммой $A + B = C$ двух прямоугольных матриц A и B одного и того же размера $m \times n$ называется матрица C того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов данных матриц A и B , т. е. если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то $C = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Операция вычисления матрицы C называется сложением матриц A и B .

Пример. Найти сумму матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3+0 & 4+3 & 2+1 \\ 2+3 & 5+7 & 5+8 \\ 1+4 & 7+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 5 & 12 & 13 \\ 5 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Правило сложения двух матриц обобщается на случай любого конечного числа слагаемых матриц.

Произведением матрицы A на число (скаляр) α называется матрица C , элементы которой есть элементы матрицы A , умноженные на α :

$$(c_{ij}) = \alpha (a_{ij}), \text{ если } c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Пример.

$$5. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 35 \\ 40 & 5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Определенные выше линейные операции обладают свойствами

а) $A + [B + C] = [A + B] + C;$

б) $A + B = B + A;$

в) $A + 0 = A$ (0 — нулевая матрица);

г) $[\alpha + \beta] A = \alpha A + \beta A;$

д) $\alpha [A + B] = \alpha A + \alpha B;$

е) $1 \cdot A = A;$

ж) $\alpha [\beta A] = \alpha\beta A$, где A, B и C — матрицы, α и β — скаляры.

Разность двух матриц A и B одинаковых размеров определяется равенством: $A - B = A + [-1] B$.

Пример. Найти разность матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 0-4 & 3-1 \\ 4-8 & 7-0 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Правило умножения матрицы A на матрицу B определяется только для того случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Умножить матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на матрицу $B = (b_{jk})$ размера $n \times q$ это значит найти третью матрицу $C = (c_{ik})$ размера $m \times q$ такую, что $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, q$.

Матрица C называется произведением матрицы A на матрицу B

$$C = AB.$$

Если матрица A — матрица-строка $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$, а матрица B — матрица-столбец

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$C = AB = (a_1 a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

В общем случае, как следует из определения, элемент c_{ik} есть сумма произведений элементов i -ой строки на элементы k -го столбца.

Поясним правило умножения матриц примерами:

$$1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 & 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 8 & 0 \cdot 7 + 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 39 \\ 32 & 36 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \\ 8 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 52 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

Произведение двух матриц в общем случае зависит от порядка сомножителей, оно не коммутативно:

$$AB \neq BA.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 11 \\ 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 7 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 46 \\ 29 & 80 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 4 + 1 \cdot 7 \\ 2 \cdot 2 + 11 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 11 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 27 \\ 37 & 85 \end{pmatrix}.$$

В частном случае равенство $AB = BA$ возможно.

Матрицы A и B , для которых выполняется равенство $AB = BA$, называются перестановочными или коммутирующими.

Например, матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ — перестановочные, так как для них } AB = BA, \text{ (проверьте!).}$$

Напомним, что операция умножения матриц A и B определена только для того случая, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Таким образом, можно перемножить не всякие две матрицы. Может случиться, что произведение матрицы A на B существует, а произведение B на A не существует.

Например, матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ можно умножить на матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ а найти произведение } BA \text{ — невозможно.}$$

Если матрицы A и B квадратные одного и того же порядка, то произведения AB и BA всегда существуют.

Произведение матриц обладает свойствами:

а) $\alpha[AB] = [\alpha A] \cdot B = A[\alpha B];$

б) $[AB]C = A[BC];$

в) $[A+B]C = AC + BC;$

г) $C[A+B] = CA + CB.$

Единичная матрица E порядка n , играющая роль единицы в матричной алгебре, перестановочна с любой матрицей A порядка n , что легко проверить непосредственными вычислениями: $AE = EA = A$. Скалярная матрица

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & a \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots a \end{pmatrix}$$

может быть представлена в виде произведения $S = aE$. Произведение квадратной матрицы A на скалярную матрицу того же размера коммутативно. Действительно: $SA = aEA = aA$,

$$AS = AaE = aAE = aA, \text{ откуда}$$

$$SA = AS.$$

4.4. Линейные преобразования и матрицы. Линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в переменные $y_1, y_2, \dots, y_m$ задается системой равенств

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2;$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m.$$

Числа a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) называются коэффициентами преобразования.

Линейное преобразование может быть записано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

или

$$AX = Y,$$

где A , X , Y — соответствующие матрицы.

Матрица A называется матрицей линейного преобразования.

Пусть имеют место преобразования:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= y_1; & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 &= y'_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= y_2; & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 &= y'_2 \end{aligned}$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Под суммой преобразований будем понимать преобразование:

$$\begin{aligned} (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 &= y_1 + y'_1; \\ (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 &= y_2 + y'_2 \end{aligned}$$

с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

равной сумме матриц $A + B$.

Выполним последовательно линейные преобразования:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2; & y'_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2; \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2; & y'_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2. \end{aligned}$$

Подставляя вместо y_1 и y_2 их значения, найдем

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2); \\ y'_2 &= b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2). \end{aligned} \right\}$$
$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})x_1 + (a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12})x_2; \\ y'_2 &= (a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22})x_1 + (a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22})x_2. \end{aligned} \right\}$$

Матрицей последнего преобразования является матрица C ,

равная произведению матрицы $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ на матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Отметим тождественное преобразование, переводящее переменные в себя:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = x_1;$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_2,$$

матрицей которого является единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2$$

переводит переменные x_1 и x_2 в переменные y_1 и y_2 . Преобразование, переводящее y_1 и y_2 в x_1 и x_2 , называется обратным по отношению к первому:

$$x_1 = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} y_1 + \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} y_2;$$

$$x_2 = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} + \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} y_2.$$

Матрица обратного преобразования:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\det A} & \frac{-a_{12}}{\det A} \\ \frac{-a_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

где $\det A$ определитель матрицы исходного преобразования, отличный от нуля. Если $\det A = 0$, то обратное преобразование не существует.

Нами рассмотрены простейшие примеры линейных преобразований и их матрицы. Линейные преобразования возникают при решении многочисленных задач математики: в задаче о преобразовании координат, в теории систем линейных алгебраических и дифференциальных уравнений и др.

4.5. Транспонирование матриц. Если в матрице:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

поменять местами строки и столбцы, то новая матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется транспонированной по отношению к матрице A .

Отметим, что:

а) если над матрицей A дважды произвести операцию транспонирования, то матрица останется неизменной

$$(A')' = A'' = A;$$

б) транспонированная матрица суммы двух матриц равна сумме транспонированных матриц:

$$(A + B)' = A' + B',$$

что следует из определения суммы двух матриц;

в) определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы A' :

$$\det A = \det A',$$

так как определитель не меняет своей величины при замене строк столбцами и столбцов строками;

г) транспонированная матрица произведения двух матриц равна произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке

$$(AB)' = B' A'.$$

Матрица $(AB)'$ получена умножением элементов строк матрицы A на столбцы матрицы B и заменой затем строк столбцами. Тот же результат можно получить, умножая элементы столбцов матрицы B (строк B') на элементы строк матрицы A (столбцов A').

Примеры.

1) Матрица $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ есть матрица, транспонированная по отношению к матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 6 \end{pmatrix}$.

2) Матрица-строка (5 8 4 9) есть транспонированная матрица, по отношению к матрице-столбцу $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A = A'$, и *кососимметричной*, если $A = -A'$. Элементы симметричной матрицы связаны соотношением $a_{ij} = a_{ji}$, а кососимметричной соотношением $a_{ij} = -a_{ji}$.

Произведение матрицы A на транспонированную матрицу A' есть матрица симметричная:

$$AA' = C,$$

где C — симметричная матрица.
Действительно,

$$(C)' = (AA')' = (A')'A' = AA' = C.$$

4.6. Обратная матрица. Квадратная матрица A называется неособенной или невырожденной, если ее определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$.

Если определитель матрицы A равен нулю ($\det A = 0$), то матрица A называется особенной или вырожденной.

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной квадратной матрице A* , если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица.

Теорема. Всякая неособенная ($\det A \neq 0$) матрица A имеет обратную.

Доказательство. Составим матрицу A^* , которая называется союзной или присоединенной по отношению к матрице A :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ji}); \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы (под алгебраическим дополнением элементов a_{ij} квадратной матрицы понимают алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя данной квадратной матрицы). Заметим, что в матрице A^* алгебраические дополнения элементов строк матрицы A помещены в столбцах, т. е. произведена операция транспонирования. Умножим матрицу A^* на величину, обратную определителю $\det A$.

$$\text{Матрица } \left(\frac{1}{\det A} \cdot A_{ij} \right)$$

и есть матрица, обратная матрице A .

Действительно, умножив матрицу (a_{ij}) на матрицу $\left(\frac{A_{ji}}{\det A}\right)$, получим матрицу C , у которой на главной диагонали будут расположены дроби, в числителях которых записана сумма произведений элементов строк матрицы A на их алгебраические дополнения, т. е. определитель матрицы (см. п^о 4.2), а в знаменателе определитель матрицы A . Таким образом, все элементы матрицы C , расположенные на главной диагонали, равны 1. Все остальные элементы матрицы C есть дроби, в числителях которых записана сумма произведений элементов строк матрицы A на алгебраические дополнения элементов другой строки, а эти суммы равны нулю. В знаменателях дробей записан $\det A \neq 0$.

Таким образом, все элементы матрицы C , расположенные не на главной диагонали, равны нулю.

Матрица C есть единичная матрица: $C = E$. Мы установили, что произведение матриц

$$A \left(\frac{A_{ji}}{\det A} \right) = E$$

есть единичная матрица и, таким образом, матрица $\left(\frac{A_{ji}}{\det A}\right) = A^{-1}$ есть обратная матрица для матрицы A .

В качестве примера найдем матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

предполагая, что матрица A неособенная, $\det A \neq 0$. Составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Чтобы показать справедливость равенства $AA^{-1} = E$, составим

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21}}{\det A} & \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22}}{\det A} \\ \frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21}}{\det A} & \frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Составляя произведения AA^{-1} и $A^{-1}A$, говорят, что матрицу A в первом случае умножают на матрицу A^{-1} справа, а во втором случае — слева.

Если для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} , то она единственная.

Пусть $AB=E$ и $CA=E$. Умножив обе части первого равенства слева, а второго справа на A^{-1} , найдем $A^{-1}AB = A^{-1}E$; $B = A^{-1}$; $CAA^{-1} = EA^{-1}$, $C = A^{-1}$, следовательно, $A^{-1} = C = B$.

Особенная (вырожденная) матрица, определитель которой равен нулю, обратной матрицы не имеет:

по определению $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ и $\det A = 0$, вычислив определитель $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = 1$, приходим к равенству $0 = 1$, что невозможно.

Некоторые свойства обратной матрицы:

а) Определитель обратной матрицы равен величине, обратной определителю заданной матрицы:

$$A^{-1}A = E; \det(A^{-1}A) = \det E, \det A^{-1} \det A = 1$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

б) Обратная матрица произведения квадратных матриц равна произведению квадратных матриц сомножителей, взятых в обратном порядке: $[AB]^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

$$AB[B^{-1}A^{-1}] = A[BB^{-1}]A^{-1} = AA^{-1} = E$$

$B^{-1}A^{-1}$ есть обратная матрица для AB .

в) Транспонированная обратная матрица равна обратной от транспонированной данной матрицы: $[A^{-1}]' = [A']^{-1}$, $[A^{-1}A]' = E'$, $A'[A^{-1}] = E' = E$ умножив на $[A']^{-1}$, получим $[A']^{-1} \cdot A'[A^{-1}]' = [A^{-1}]' = [A']^{-1}$.

Примеры.

1. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы $\det A = -10 \neq 0$, следовательно, матрица A неособенная.

Присоединенная матрица $A^* = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-2}{10} \end{pmatrix}. \text{ Легко проверить, что}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-7}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица неособенная, ее определитель $\det A = 40 \neq 0$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{40} & \frac{-32}{40} & \frac{10}{40} \\ 0 & \frac{20}{40} & \frac{-15}{40} \\ 0 & 0 & \frac{10}{40} \end{pmatrix}.$$

4.7. Решение матричных уравнений. Изложенная в предыдущем пункте теория позволяет решать матричные уравнения:

1) $AX = B$, 2) $YA = C$,

где A — заданная, неособенная, квадратная матрица порядка n ; B и C — заданные прямоугольные матрицы размеров соответственно $n \times r$ и $r \times n$;

X и Y — искомые матрицы соответственно размеров $n \times r$ и $r \times n$.

1) Умножив слева обе части матричного уравнения $AX = B$ на матрицу A^{-1} , обратную матрице A , найдем

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

2) Умножив справа обе части уравнения $YA = C$ на A^{-1} , будем иметь $YAA^{-1} = CA^{-1}$, $Y = CA^{-1}$.

Примеры.

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица A^{-1} равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & \frac{-5}{2} \\ -10 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Найти Y из уравнения

$$Y \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (29 \ 16 \ 49).$$

Матрица A неособенная, ее определитель равен -7 . Обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-7};$$

$$Y = (29 \ 16 \ 49) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-7} = (3 \ 2 \ 7).$$

4.8 Клеточные (блочные) матрицы. Прямоугольные матрицы бывает полезно разбить на клетки (блоки) прямыми, параллельными столбцам и строкам матрицы и рассматривать клетки как матричные элементы данной матрицы. Ниже, например, матрица разбита на 6 клеток:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12}a_{13} & a_{14} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}a_{23} & a_{24} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52}a_{53} & a_{54} \dots a_{5n} \\ \hline a_{61} & a_{62}a_{63} & a_{64} \dots a_{6n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}a_{m3} & a_{m4} \dots a_{mn} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \end{pmatrix},$$

где

$$Q_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{51} \end{pmatrix}; \quad Q_{12} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots \\ a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}; \quad Q_{13} = \begin{pmatrix} a_{14} \dots a_{1n} \\ a_{24} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{54} \dots a_{5n} \end{pmatrix};$$

$$Q_{21} = \begin{pmatrix} a_{61} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad Q_{22} = \begin{pmatrix} a_{62} & a_{63} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix}; \quad Q_{23} = \begin{pmatrix} a_{64} \dots a_{6n} \\ \vdots \\ a_{m4} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

матричные элементы матрицы A , называемые подматрицами A . Очевидно, разбиение матриц на клетки (блоки) может быть произведено различными способами. Матрицу, разбитую на клетки, будем называть клеточной.

Разбиение матрицы на клетки может упростить трудоемкую операцию вычисления обратной матрицы по правилам, изложенным в п⁰ 4.6.

Пусть надо найти матрицу A^{-1} , обратную неособенной квадратной матрице A , которую представим разбитой на клетки:

$$A = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix},$$

где Q_{11} и Q_{22} — квадратные подматрицы.

Искомую матрицу A^{-1} представим также разбитой на клетки, аналогично разбиению матрицы A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A^{-1} обратная матрице A , то

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$Q_{11}R_{11} + Q_{12}R_{21} = E; \quad (4.3)$$

$$Q_{21}R_{11} + Q_{22}R_{21} = 0; \quad (4.4)$$

$$Q_{11}R_{12} + Q_{12}R_{22} = 0;$$

$$Q_{21}R_{12} + Q_{22}R_{22} = E.$$

Из последних равенств найдем искомые подматрицы R_{11} , R_{12} , R_{21} , R_{22} .

Из равенства (4.3) вычтем равенство (4.4), умноженное слева на $Q_{12}Q_{22}^{-1}$:

$$Q_{11}R_{11} + Q_{12}R_{21} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21}R_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{22}R_{21} = E;$$

$$R_{11}(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21}) = E;$$

$$R_{11} = (Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{21})^{-1},$$

из (4.3) найдем

$$R_{21} = -Q_{22}^{-1}Q_{21}R_{11}$$

и аналогично

$$R_{22} = (Q_{22} - Q_{21}Q_{11}^{-1}Q_{12})^{-1};$$

$$R_{12} = -Q_{11}^{-1}Q_{12} \cdot R_{22}.$$

Аналогично обычным диагональным и треугольным матрицам (4.1) рассматривают клеточные (блочные) диагональные и треугольные матрицы, элементами которых служат подматрицы заданной матрицы.

(Особое значение имеют клеточно-диагональные матрицы.

Клеточно-диагональной матрицей называется клеточная матрица, у которой вдоль главной диагонали расположены квадратные матрицы, не являющиеся нулевыми, а остальные клетки состоят только из нулей.

Примером клеточно-диагональной матрицы может служить матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A} & & & & & & \\ & \boxed{B} & & & & & \\ & & \boxed{C} & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Сложение и умножение клеточно-диагональных матриц одинаковой структуры производится особенно просто:

если $A = \begin{pmatrix} \boxed{Q_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{Q_r} & \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \boxed{R_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{R_r} & \end{pmatrix},$ то

$$A + B = \begin{pmatrix} \boxed{Q_1 + R_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{Q_r + R_r} & \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{Q_1 \cdot R_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{Q_r \cdot R_r} & \end{pmatrix}.$$

Рассматривают также клеточные матрицы вида

$$A_n = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & M_n \\ \hline N_n & a_{nn} \end{array} \right),$$

где

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$N_n = (a_{n1} a_{n2} \dots a_{nn}), \quad a_{nn} - \text{число.}$$

Матрица A_n называется окаймленной по отношению к A_{n-1} .

4.9. Треугольные матрицы. Сформулируем некоторые свойства треугольных матриц (4.1)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и правила действия с ними. Высказанные утверждения не будем доказывать в общем виде, но поясним их на примерах.

Определитель любой треугольной матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали, в чем легко убедиться, вычислив ее определитель. Из предыдущего следует, что треугольная матрица является неособенной только тогда, когда все ее диагональные элементы отличны от нуля.

Произведение двух верхних треугольных матриц и двух нижних треугольных матриц одного порядка есть соответственно верхняя и нижняя треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведение верхней треугольной матрицы на нижнюю или нижней на верхнюю при условии, что порядок матриц один и тот же, есть квадратная матрица того же порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} & a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} & a_{13}b_{33} \\ a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} & a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} & a_{23}b_{33} \\ a_{33}b_{13} & a_{33}b_{23} & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Справедливо и обратное утверждение. Всякая квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой определители a_{11} ;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots; \det A \text{ отличны от нуля, представ-}$$

нима в виде произведения треугольных матриц различного вида (нижней и верхней, верхней и нижней), но одного порядка. Если зафиксировать диагональные элементы одной из треугольных матриц, например положить их равными 1, то разложение будет единственным.

Для примера представим матрицу A в виде произведения двух треугольных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y_{12} & y_{13} \\ 0 & 1 & y_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11} y_{12} & x_{11} y_{13} \\ x_{21} & x_{21} y_{12} + x_{22} & x_{21} y_{13} + x_{22} y_{23} \\ x_{31} & x_{31} y_{12} + x_{32} & x_{31} y_{13} + x_{32} y_{23} + x_{33} \end{pmatrix}$$

Решив систему уравнений

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2; & x_{11} y_{12} &= -1; & x_{11} y_{13} &= 0; \\ x_{21} &= 3; & x_{21} y_{12} + x_{22} &= 2; & x_{21} y_{13} + x_{22} y_{23} &= 4; \\ x_{31} &= 4; & x_{31} y_{12} + x_{32} &= 1; & x_{31} y_{13} + x_{32} y_{23} + x_{33} &= 5, \end{aligned}$$

найдем

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2; & x_{22} &= \frac{7}{2}; & y_{12} &= -\frac{1}{2}; \\ x_{21} &= 3; & x_{32} &= 3; & y_{13} &= 0; \\ x_{31} &= 4 & x_{33} &= \frac{11}{7}; & y_{23} &= \frac{8}{7} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7/2 & 0 \\ 4 & 3 & 11/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим операцию нахождения матрицы, обратной треугольной. Можно утверждать, что если матрица A верхняя треугольная, то и обратная матрица тоже верхняя треугольная того же порядка, что и матрица A . Покажем это на примере матриц третьего порядка.

Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

требуется найти матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

такую, что

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последнему матричному равенству соответствуют 9 скалярных равенств:

$$1) \alpha_{11} a_{11} = 1; \quad 2) \alpha_{11} a_{21} = 0; \quad 3) \alpha_{11} a_{31} = 0;$$

- 4) $a_{12}a_{11} + a_{22}a_{12} = 0$; 5) $a_{12}a_{21} + a_{22}a_{22} = 1$;
 6) $a_{12}a_{31} + a_{22}a_{32} = 0$; 7) $a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0$;
 8) $a_{13}a_{21} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{23} = 0$;
 9) $a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} + a_{33}a_{33} = 0$,

из которых находятся элементы матрицы (a_{ij}) :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{a_{11}}, \quad a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0; \quad a_{12} = -\frac{1}{a_{22}} \cdot a_{12}; \quad a_{11} = -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}}; \\ a_{22} &= \frac{1}{a_{22}}, \quad a_{22} = 0, \quad a_{13} = -\frac{1}{a_{33}} [a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12}] = -\frac{1}{a_{33}} \left[\frac{a_{13}}{a_{11}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}} \right], \quad a_{23} = -\frac{1}{a_{33}} \quad a_{23}a_{22} = -\frac{a_{23}}{a_{22}a_{33}}, \quad a_{33} = \frac{1}{a_{33}}. \end{aligned}$$

Мы показали, что матрица (a_{ij}) — действительно верхняя треугольная.

Можно указать и общие формулы для вычисления элементов матрицы (a_{ij}) . Если $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) — верхняя треугольная матрица, то элементы матрицы $A^{-1}(a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) можно вычислить по формулам:

а) если $i = j$, то $a_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$; б) если $i > j$, то $a_{ij} = 0$; в) если $i < j$, то

$$a_{ij} = -\frac{1}{a_{jj}} (a_{ij}a_{i, i+1} \dots a_{i, j-1}) \cdot \begin{pmatrix} a_{ij} \\ a_{i+1, j} \\ \vdots \\ a_{j-1, j} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, если матрица $B = (b_{ij})$ — нижняя треугольная порядка n , то и обратная матрица B^{-1} — нижняя треугольная матрица порядка n . Элементы матрицы B^{-1} вычисляются по формулам:

а) если $i = j$, то $\beta_{ii} = \frac{1}{b_{ii}}$; б) если $i < j$, то $\beta_{ij} = 0$;

$$\text{в) если } i > j, \text{ то } \beta_{ij} = -\frac{1}{b_{ii}} (b_{ij}b_{i, i+1} \dots b_{i, i-1}) \begin{pmatrix} \beta_{ij} \\ \beta_{i+1, j} \\ \vdots \\ \beta_{i-1, j} \end{pmatrix}.$$

4.10. Ортогональные матрицы. Квадратная матрица называется ортогональной, если сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице и сумма произведений соответствующих элементов из двух разных столбцов равна нулю.

Ортогональную матрицу A можно определить как матрицу, у которой обратная A^{-1} и транспонированная A' матрицы совпадают:

$$A^{-1} = A'; AA' = A'A = E.$$

Определитель ортогональной матрицы равен ± 1 :

$$\det(AA') = \det E; \det A \det A' = \det E = 1,$$

но

$$\det A = \det A'; (\det A)^2 = 1; \det A = \pm 1.$$

Обратная и транспонированная матрицы ортогональной матрицы есть также ортогональные матрицы.

4.11. Модуль и норма матрицы. Модулем матрицы A называется матрица, элементами которой являются модули элементов A . Модуль матрицы A обозначают $|A|$. Имеют место следующие соотношения, если только операции сложения и умножения возможны для рассматриваемых матриц A и B

$$|A + B| \leq |A| + |B|; |AB| \leq |A| \cdot |B|; |\alpha A| = |\alpha| \cdot |A|,$$

α — скаляр (число).

Нормой матрицы A , обозначаемой $\|A\|$, называется действительное число, удовлетворяющее условиям:

- $\|A\| \geq 0$, если $A \neq 0$; $\|A\| = 0$, если $A = 0$ (и только в этом случае);
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, где α — скаляр (число);
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Норма матрицы может быть введена различными способами, обычно рассматривают нормы:

$$a) \|A\| = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2};$$

$$б) \|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|;$$

$$в) \|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|.$$

Примеры.

1) Вычислить указанные выше нормы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$a) \|A\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2 + (-3)^2 + 5^2 + 8^2 + 2^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{165};$$

$$б) \|A\| = \max [1 + 3 + 2, 4 + 5 + 1, 3 + 8 + 6] = \max [6, 10, 17] = 17;$$

$$в) \|A\| = \max [1 + 4 + 3, 3 + 5 + 8, 2 + 1 + 6] = \max [8, 16, 9] = 16.$$

2) Вычислить нормы (а), (б) и (в) матрицы-строки $A = (5 \ 2 \ 4 \ 7)$

$$a) \|A\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{94};$$

$$б, в) \|A\| = \max [5, 2, 4, 7] = \max [5, 2, 4, 7] = 7.$$

4.12. Элементарные преобразования матриц. Под элементарными преобразованиями матриц понимают:

1) Умножение всех элементов какой-либо строки (или столбца) на постоянное число $\lambda \neq 0$.

2) Прибавление к элементам какой-либо строки (или столбца) чисел, пропорциональных элементам другой строки (или столбца).

3) Перестановку местами двух строк (или столбцов). Преобразование (1) может быть осуществлено умножением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ слева в случае строки и справа в слу-}$$

чае столбца на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ порядка n . Например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Преобразование (2) осуществляется умножением матриц B_1 и B_2 порядка n на матрицу A :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\lambda} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение B_1 на A равносильно прибавлению к элементам некоторой строки чисел, пропорциональных элементам последующей строки.

Умножение B_2 на A равносильно прибавлению к одной из строк матрицы A чисел, пропорциональных элементам предыдущей строки. Произведения AB_1 и AB_2 осуществляют аналогичные преобразования над столбцами.

Примеры.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{11} + a_{31} & \lambda a_{12} + a_{32} & \lambda a_{13} + a_{33} \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{31}\lambda & a_{12} + a_{32}\lambda & a_{13} + a_{33}\lambda \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}\lambda + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}\lambda + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31}\lambda + a_{33} \end{pmatrix}$$

Две матрицы называются эквивалентными, если одна может быть получена из другой путем конечного числа элементарных преобразований.

4.13. Ранг матрицы. В прямоугольной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

размера $m \times n$ выделим k столбцов и такое же число строк (k не больше наименьшего из чисел m и n) и составим определитель из элементов, стоящий на пересечении выбранных столбцов и строк. Указанным способом может быть получена совокупность определителей, называемых минорами матрицы A (см. п^о 4.2).

Если матрица A — квадратная порядка n , то наибольший возможный порядок полученного вышеописанным способом определителя равен n .

Если матрица размера $m \times n$, то наибольший возможный порядок определителя равен наименьшему из чисел m и n .

Определение. Матрица имеет ранг r , если среди ее миноров существует хотя бы один минор порядка r , отличный от нуля, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю или не существуют. Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Если матрица имеет размер $m \times n$, а ранг ее r , то разность между наименьшим из чисел m и n и рангом r называется дефектом матрицы.

Примеры.

1) Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрица имеет порядок $n=3$, следовательно, ее ранг не может быть больше 3.

Определитель третьего порядка равен нулю $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$, но

существует минор $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$. Ранг матрицы $r = 2$, а дефект $3 - 2 = 1$.

2) Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Размер матрицы 3×5 и, следовательно, ее ранг не больше 3.

Существует определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$.

Следовательно ранг матрицы равен 3, а дефект 0.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите все миноры определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Найдите сумму и разность матриц A и B :

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. Найдите произведения матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

д) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}; B = (7, 11, 9)$ е) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 11 & 4 & 8 & 3 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{ж) } A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 11 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 5 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Над заданными матрицами произвести операцию транспонирования:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить матрицы, обратные данным:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Линейное преобразование записать в матричной форме

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4;$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4;$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4;$$

$$y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4.$$

7. Проверить, что система линейных уравнений

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 = 15;$$

$$3x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -7;$$

$$x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 26$$

может быть записана в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 26 \end{pmatrix} \text{ или } (x_1 x_2 x_3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \\ = (15 - 7 \ 26).$$

8. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить ранг матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

§ 2 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

4.14. Определение линейного векторного пространства. Множество R , элементы которого обозначаются $x, y, z, \dots$, называется линейным или векторным пространством (действительным), если:

а) имеется правило, относящее каждому двум элементам x и y , принадлежащим множеству $R: x \in R, y \in R$, третий элемент z , также принадлежащий $R, z \in R$, который называется суммой элементов x и $y: z = x + y$;

б) имеется правило, относящее каждому элементу $x \in R$ и каждому действительному числу λ , элемент $z = \lambda x, z \in R$, называемый произведением x на число λ ;

в) правила образования суммы элементов и произведения элемента на число удовлетворяют аксиомам:

1) $x + y = y + x$ для любых $x \in R, y \in R$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых $x \in R, y \in R, z \in R$;

3) существует нуль $0 \in R$ такой, что

$$0 + x = x + 0;$$

4) для каждого $x \in R$ существует элемент $-x \in R$ такой, что $x + (-x) = 0$. Элемент $-x$ называется элементом, противоположным элементу x ;

5) $1 \cdot x = x$ для любого $x \in R$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любого $x \in R$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых $x \in R, y \in R, \alpha$ и β — действительные числа.

Элементы $x, y, z, \dots$ линейного пространства R называются **векторами**. Действительные числа α, β, λ , участвующие в определении пространства R , называются **скалярами**.

Примеры векторных пространств.

1. Совокупность всех геометрических векторов на оси, на плоскости и в пространстве составляют линейные пространства, если сложение векторов и умножение на действительное число производится по обычным правилам, известным из аналитической геометрии.

Читателю легко проверить, что все аксиомы, сформулированные в начале этого пункта, выполняются.

2. Множество многочленов степени не выше n , для которых сложение и умножение на число определены правилами алгебры, образуют линейное пространство. Аксиомы линейного пространства выполняются.

Укажем множества элементов, не образующих линейных пространств:

1) множество многочленов степени n не составляют линейное пространство. Разность многочленов может и не быть многочленом степени n , например $(x^2 + 1) - (2x - x^2) = -2x$;

2) множество отрезков оси, начало которых находится в начале координат, а конец в точках с положительной координатой, не образуют линейного пространства, так как умножение на -1 невозможно.

Не трудно убедиться, что в любом линейном пространстве существует только один нуль-вектор $x = 0$ и только один вектор, противоположный данному вектору x .

4.15. Линейная зависимость векторов. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — векторы пространства R ; $c_1, c_2, \dots, c_n$ — скаляры.

Вектор

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_ix_i \quad (3.5)$$

называется линейной комбинацией заданных векторов x_i .

Если вектор (3.5) равен нулю, тогда и только тогда, когда все числа $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, говорят, что векторы x_i линейно независимы.

Если вектор (3.5) равен нулю, но среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ есть хотя бы одно отличное от нуля, то говорят, что векторы линейно зависимы.

Рассматриваемые в векторной алгебре три единичных вектора i, j, k линейно независимы, так как равенство $c_1i + c_2j + c_3k = 0$ возможно только в единственном случае: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Функции $x_1(t) = \cos^2 t$, $x_2(t) = \sin^2 t$, $x_3(t) = 1$, заданные на конечном интервале, линейно зависимы. Равенство $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) = 0$ возможно, если $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$.

Если в линейном пространстве R заданы векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$, причем некоторые из них линейно зависимы, то и все n векторов x_i линейно зависимы.

Пусть линейно зависимы первые q векторов из n , $q < n$, следовательно, имеет место равенство

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_qx_q = 0,$$

причем среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_q$ хотя бы одно отлично от нуля.

Составим сумму:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_qx_q + 0x_{q+1} + \dots + 0x_n = 0.$$

В последнем равенстве среди коэффициентов есть числа отличные от нуля. Таким образом, векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы.

Теорема. Если векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$, принадлежащие линейному пространству R , линейно зависимы, то, по крайней мере, один из них является линейной комбинацией остальных.

Если векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимы, то

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0,$$

причем хотя одно из чисел c_i ($i = 1, 2, \dots, n$) отлично от нуля. Пусть $c_k \neq 0$, $k \leq n$. Тогда вектор x_k равен линейной комбинации векторов $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$:

$$x_k = -\frac{c_1}{c_k} x_1 - \frac{c_2}{c_k} x_2 - \dots - \frac{c_{k-1}}{c_k} x_{k-1} - \\ - \frac{c_{k+1}}{c_k} x_{k+1} - \dots - \frac{c_n}{c_k} x_n.$$

4.16. Размерность. Базис и координаты. Определение 1. *Линейное пространство R называется n -мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов и не существует большего числа линейно независимых векторов.*

Если в пространстве R существует любое число линейно независимых векторов, то оно называется бесконечномерным. Пространство R , указанное в определении 1, называют конечномерным.

В нашем изложении преимущественно рассматриваются конечномерные пространства.

Определение 2. *Совокупность n линейно независимых векторов n -мерного пространства R называется базисом этого пространства.*

Теорема. *Каждый вектор x линейного пространства R n измерений может быть представлен как линейная комбинация базисных векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$, причем разложение единственное.*

Возможность разложения непосредственно следует из определения базиса и утверждения, доказанного в конце предыдущего пункта п^о 3.15.

Докажем единственность разложения. Предположим, что можно написать два разложения:

$$x = \xi_1 l_1 + \xi_2 l_2 + \dots + \xi_n l_n; \\ x = \eta_1 l_1 + \eta_2 l_2 + \dots + \eta_n l_n.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$(\xi_1 - \eta_1) l_1 + (\xi_2 - \eta_2) l_2 + \dots + (\xi_n - \eta_n) l_n = 0,$$

но так как базисные векторы $l_1, l_2, \dots, l_n$ линейно независимы, должны иметь место равенства:

$\xi_1 - \eta_1 = 0$, $\xi_2 - \eta_2 = 0$, ..., $\xi_n - \eta_n = 0$, откуда следует, что

$$\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, \dots, \xi_n = \eta_n.$$

Числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются координатами вектора x относительно базиса $l_1, l_2, \dots, l_n$.

В пространстве свободных геометрических векторов базис составляют основные единичные векторы i, j, k , а координатами вектора являются его проекции на оси координат.

Выведем правила сложения и умножения на число векторов, заданных координатами.

Пусть $x \in R$ и $y \in R$ имеют разложения:

$$\begin{aligned}x &= \xi_1 l_1 + \xi_2 l_2 + \dots + \xi_n l_n; \\y &= \eta_1 l_1 + \eta_2 l_2 + \dots + \eta_n l_n.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}x + y &= (\xi_1 + \eta_1)l_1 + (\xi_2 + \eta_2)l_2 + \dots + (\xi_n + \eta_n)l_n; \\ \lambda x &= \lambda \xi_1 l_1 + \lambda \xi_2 l_2 + \dots + \lambda \xi_n l_n,\end{aligned}$$

λ — действительное число.

Таким образом, при сложении двух векторов, принадлежащих линейному пространству R , координаты векторов, заданные относительно любого, но одного и того же базиса, складываются; а при умножении на действительное число все координаты умножаются на это число.

4.17. Арифметическое линейное пространство. Построим линейное пространство, векторами которого являются упорядоченные совокупности действительных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и которое называется линейным арифметическим пространством.

Числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ являются координатами вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Нулевым вектором называется вектор, все координаты которого равны нулю:

$$x = (0, 0, \dots, 0) \text{ (нуль-вектор)}.$$

Два вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ считаются равными тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты:

$$x = y, \text{ если } \xi_i = \eta_i; i = 1, 2, \dots, n.$$

Суммой двух векторов называется вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат слагаемых векторов:

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n).$$

Умножить вектор арифметического пространства x на действительное число λ значит умножить все его координаты на λ :

$$\lambda x = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n).$$

Линейные операции над векторами арифметического пространства определены так, что выполняются аксиомы, сформули-

рованные в п^о 3.14. Размер такого пространства совпадает с числом координат n .

В частности, матрица-строка $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и матрица-столбец

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

могут рассматриваться как векторы n -мерного

арифметического пространства. Поэтому в дальнейшем мы будем их называть векторами-столбцами и векторами-строками.

4.18. Евклидово пространство. Всякой паре векторов x и y из линейного пространства R поставим в соответствие действительное число, которое будем обозначать (x, y) .

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x и y , если выполняются аксиомы:

- 1) $(x, y) = (y, x)$;
- 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ для любого скаляра α ;
- 4) $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$.

Конечномерное линейное пространство, в котором определено скалярное умножение, называется евклидовым.

В арифметическом линейном пространстве R скалярное произведение векторов можно определить следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \eta_i, \text{ если } x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \text{ и } y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Очевидно, что перечисленные аксиомы (1—4) выполняются. С помощью скалярного произведения вводятся два важных понятия: длина вектора и угол между векторами.

Определение. *Длиной или модулем вектора называют число*

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Длина вектора арифметического линейного пространства равна

$$|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}.$$

Ясно, что единственным вектором, длина которого равна нулю, является нуль-вектор.

Вектор, длина которого равна 1, называется нормированным. Всякий вектор, не равный 0, можно нормировать, умножив его на скаляр $\lambda = \frac{1}{|x|}$. Действительно,

$$|x| \cdot \lambda = |x| \cdot \frac{1}{|x|} = 1.$$

Неравенство Буняковского — Коши. Докажем важное неравенство

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|,$$

называемое неравенством Буняковского — Коши.

Для вектора $x = 0$ оно очевидно.

Пусть $x \neq 0$. Введем вектор $z = y - \alpha x$, где $\alpha = \frac{(y, x)}{(x, x)}$ есть некоторое число.

Отметим, что

$$\begin{aligned} (z, x) &= (y - \alpha x, x) = (y, x) - \alpha (x, x) = \\ &= (y, x) - \frac{(y, x)}{(x, x)} \cdot (x, x) = 0. \end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (z, z) = (z, y - \alpha x) = (z, y) - \alpha (z, x) = (z, y) = \\ &= (y - \alpha x, y) = (y, y) - \alpha (x, y) = (y, y) - \frac{(y, x)}{(x, x)} \cdot (x, y) = \\ &= \frac{(y, y)(x, x) - (y, x)(x, y)}{(x, x)} = \frac{|x|^2 \cdot |y|^2 - |(x, y)|^2}{|x|^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда и следует неравенство Буняковского — Коши

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|.$$

Определение. Углом между векторами x и y назовем число:

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Если один из векторов нулевой, то определение теряет смысл.

Можно записать

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| |y|}, \quad (4.6)$$

причем угол φ определяется однозначно: $0 \leq \varphi \leq \pi$. Высказанное определение законно, так как согласно неравенству Буняковского — Коши

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| |y|} \leq 1.$$

Определение. Два вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(x, y) = 0.$$

Иными словами, если x и y — ненулевые векторы, то, как следует из формулы (4.6), они ортогональны тогда, когда

Матрица преобразования (4.8)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ + & + & + & + \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

являющаяся матрицей перехода от одного базиса к другому, не особенная, ее определитель отличен от нуля.

Преобразование (4.8) может быть записано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}; \quad (4.8')$$

$$L' = AL$$

Пусть координаты вектора x в первом базисе $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ — во втором:

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); \quad x = (\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n).$$

Вектор x может быть разложен по базисным векторам:

$$x = (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = (\xi'_1 \xi'_2 \dots \xi'_n) \begin{pmatrix} l'_1 \\ l'_2 \\ \vdots \\ l'_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая (4.8'), можно написать

$$(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = (\xi'_1 \xi'_2 \dots \xi'_n) \cdot A \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

или

$$(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix},$$

2

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1^1 a_{11} + \xi_1^2 a_{12} + \dots + \xi_1^n a_{1n}; \\ \xi_2 &= \xi_2^1 a_{21} + \xi_2^2 a_{22} + \dots + \xi_2^n a_{2n}; \\ &\vdots \\ \xi_n &= \xi_n^1 a_{n1} + \xi_n^2 a_{n2} + \dots + \xi_n^n a_{nn}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Матрица преобразования (4.11)

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

транспонирована по отношению к матрице (4.9).

Уравнения (4.10–4.11) могут быть решены относительно $\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \dots, \hat{\mathbf{E}}_N$:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 + \dots + b_{1n}\xi_n; \\ \xi_2' &= b_{21}\xi_1 + b_{22}\xi_2 + \dots + b_{2n}\xi_n; \\ &\vdots \\ \xi_n' &= b_{n1}\xi_1 + b_{n2}\xi_2 + \dots + b_{nn}\xi_n. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Матрица преобразования (4.13) обратна матрице (4.12). Равенства (4.11) и (4.13), связывающие координаты вектора x относительно двух разных базисов одного и того же пространства R , представляют собой формулы преобразования координат при переходе от одного базиса к другому.

Справедливо следующее утверждение:

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — координаты некоторого вектора x относительно базиса $l_1, l_2, \dots, l_n$ n -мерного пространства и числа $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ определены равенствами (4.13), причем матрица $B = (b_{ij})$ неособенная, то в пространстве R существует базис $l'_1, l'_2, \dots, l'_n$ такой, что числа $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ будут координатами вектора x в этом базисе.

В частности, векторы первого базиса могут отличаться от векторов второго только постоянными множителями. Формулы перехода от одного базиса к другому в рассматриваемом случае имеют вид

$$l_i = \lambda_i l_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Матрицей преобразования является диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Если все $\lambda_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то имеет место тождественное преобразование с единичной матрицей

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

4.20. Ортогональный базис. В евклидовом пространстве в качестве базиса удобно выбрать базис, образованный системой попарно ортогональных векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$, т. е. считать, что $(l_i, l_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Если, кроме того, длина каждого базисного вектора равна единице, то базис называется ортонормированным.

Примером простейшего ортонормированного базиса в арифметическом линейном пространстве служит базис:

$$l_1 = (1, 0, 0, \dots, 0);$$

$$l_2 = (0, 1, 0, \dots, 0);$$

$$l_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

4.21. Подпространства. Определение. Множество векторов L называется подпространством n -мерного пространства R , если:

- 1) все векторы из L принадлежат R : $L \in R$,
- 2) если $x \in L$ и $y \in L$, то $x + y \in L$,
- 3) если $x \in L$, то $\lambda x \in L$, λ — действительное число.

Из определения следует, что всякое подпространство есть также линейное пространство, размер которого не может быть больше n ; что всякое подпространство содержит нуль-вектор и любую линейную комбинацию векторов x и y .

Примеры подпространств.

- 1) Подпространство, состоящее из единственного вектора-нуля.
- 2) Подпространство пространства R , состоящее из всех векторов пространства R . Два указанных подпространства называют тривиальными.
- 3) Если пространство образуют свободные геометрические векторы в 3-х-мерном пространстве, то векторы, лежащие в координатной плоскости xy , образуют подпространство.

Определим операции сложения и пересечения подпространств. Суммой $L_1 + L_2$ двух подпространств $L_1 \in R$ и $L_2 \in R$ называется множество векторов $x + y$, $x \in L_1$, $y \in L_2$. Легко

проверить, что сумма двух линейных подпространств есть линейное подпространство пространства R . Множество векторов пространства R , одновременно входящих в подпространство L_1 и L_2 , называется пересечением подпространств $L_1 \cap L_2$. Пересечение подпространств $L_1 \in R$ и $L_2 \in R$ есть также подпространство $R: L_1 \cap L_2 \in R$.

4.22. Изоморфизм линейных пространств. Линейное пространство представляет собой множество некоторых элементов (векторов), в котором введены операции сложения векторов и умножения на скаляры, удовлетворяющие некоторым аксиомам.

Природа элементов (векторов) линейного пространства не служит предметом изучения.

Цель теории векторных пространств состоит в изучении свойств пространства по отношению к определяющим его линейным операциям. Пространства, одинаково устроенные относительно операций, обладающие одной структурой, принято называть *изоморфными*.

Определение. Два пространства R' и R'' называются *изоморфными*, если между векторами пространства R' и векторами пространства R'' можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что:

1) если вектору $x' \in R'$ соответствует вектор $x'' \in R''$ и вектору $y' \in R'$ — вектор $y'' \in R''$, то вектору $x' + y' \in R'$ соответствует вектор $x'' + y'' \in R''$;

2) если вектору $x' \in R'$ соответствует вектор $x'' \in R''$, то вектору $\lambda x' \in R'$ соответствует вектор $\lambda x'' \in R''$ (λ — любое действительное число).

Два евклидовых пространства называются *изоморфными*, если кроме перечисленных условий выполняется условие:

3) если векторам $x' \in R'$ и $y' \in R'$ соответствуют векторы $x'' \in R''$ и $y'' \in R''$, то $(x', y') = (x'', y'')$; скалярные произведения соответствующих пар векторов равны между собой. Отметим, что:

а) если два пространства R' и R'' изоморфны, то нулевой вектор пространства R' переходит в нулевой вектор пространства R'' . Действительно, пусть вектор $x' \in R'$, переходит в вектор $x'' \in R''$, но тогда, согласно определению изоморфности (пункт 2), вектор $0 = ox' \in R'$ переходит в вектор $0 = o \cdot x'' \in R''$;

б) если два пространства R' и R'' изоморфны, то линейно независимые векторы $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ пространства R' преобразуются в линейно независимые векторы $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ пространства R'' . Составим линейную комбинацию векторов пространства R'' :

$$a_1 x''_1 + a_2 x''_2 + \dots + a_n x''_n = y'',$$

Так как пространства изоморфны, то вектору $y' \in R''$ в первом пространстве R' соответствует вектор

$$\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \dots + \alpha_n x'_n = y'.$$

Если не все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ равны нулю, то $y' \neq 0$, а потому и $y'' \neq 0$ [см. пункт (а)], что означает линейную независимость векторов $x_1, \dots, x_n$.

Теорема. Любые два линейных пространства одной и той же (конечной) размерности изоморфны.

Пусть $l'_1, l'_2, \dots, l'_n$ — базис пространства R' размерности n , а $l''_1, l''_2, \dots, l''_n$ — базис пространства R'' той же размерности n .

Векторы $x' \in R'$ и $x'' \in R''$ поставлены во взаимное соответствие, если

$$x' = \xi_1 l'_1 + \xi_2 l'_2 + \dots + \xi_n l'_n; \quad x'' = \xi_1 l''_1 + \xi_2 l''_2 + \dots + \xi_n l''_n,$$

т. е. если координаты ξ_i векторов x' и x'' в обоих базисах одинаковые. Докажем, что такое соответствие представляет собой изоморфизм пространств R' и R'' . Проверим условия (1) и (2) из п^о 4.22.

Пусть даны векторы из R' :

$$x' = \sum_{i=1}^n \xi_i l'_i, \quad y' = \sum_{i=1}^n \eta_i l'_i.$$

Этим векторам соответствуют векторы из R'' :

$$x'' = \sum_{i=1}^n \xi_i l''_i, \quad y'' = \sum_{i=1}^n \eta_i l''_i,$$

имеем

$$x' + y' = \sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i) l'_i, \quad x'' + y'' = \sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i) l''_i,$$

т. е. векторы $x' + y' \in R'$ и $x'' + y'' \in R''$ соответствуют один другому.

Если λ — любое действительное число, то

$$\lambda x' = \sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i) l'_i, \quad \lambda x'' = \sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i) l''_i,$$

это означает, что векторы $\lambda x'$ и $\lambda x''$ также соответствуют один другому. Теорема доказана.

Следствие. Всякое n -мерное линейное пространство изоморфно n -мерному арифметическому пространству. Два пространства различной размерности не могут быть изоморфными. Представляем читателю доказать следующую теорему:

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной. Система, не имеющая решения, называется несовместной. Совместная система может иметь одно или несколько решений.

Например, система

$$x_1 + 4x_2 = 2;$$

$$x_1 - 3x_2 = 5$$

совместна и имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, система

$$3x_1 + 4x_2 = 0;$$

$$9x_1 + 12x_2 = 0$$

совместна, но имеет бесконечное множество решений.

Система, имеющая единственное решение, называется определенной; система, имеющая несколько решений, — неопределенной.

Изучение систем линейных уравнений начнем с частного случая: число уравнений n равно числу неизвестных n и матрица системы A — неособенная, т. е. $\det A \neq 0$. Матрицы X и B — векторы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Решение системы (4.14) эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = B.$$

Методы решения матричных уравнений рассмотрены в п^о 4.7. Искомая матрица X равна

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \cdot A^*B, \quad (4.15)$$

где A^{-1} — матрица, обратная A ; A^* — соответствующая присоединенная матрица.

Пример. Решить систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2;$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

Заданную систему запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица системы неособенная, так как ее определитель отличен от нуля и равен 10.

Вычислим алгебраические дополнения

$$A_{11} = -5; A_{12} = 0; A_{13} = 5; A_{21} = 1; A_{22} = -5;$$

$$A_{23} = 1; A_{31} = 13; A_{32} = 4; A_{33} = -7$$

и составим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{13}{10} \\ 0 & -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица равна

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{13}{10} \\ 0 & -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Последнему матричному равенству эквивалентны три скалярных (числовых) равенства:

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -1.$$

Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными удобно записывать и вычислять с помощью определителей.

Произведение $A \cdot B$ равно

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12}A_{22} \dots A_{n2} \\ \vdots \\ A_{1n}A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix},$$

где

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, i-1} & b_1 & a_{1, i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, i-1} & b_2 & a_{2, i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n, i-1} & b_n & a_{n, i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

определитель, полученный из определителя системы заменой его i -го столбца столбцом свободных членов. Равенство (4.15) может быть записано так

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix},$$

что эквивалентно известным формулам Крамера

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пример. Найти решение системы

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 14; \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= -8; \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 &= -4; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Определитель системы

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 204 \neq 0,$$

следовательно, решение может быть найдено с помощью формул Крамера.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -3 & 1 & -5 \\ -8 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{204} = \frac{204}{204} = 1; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 14 & 1 & -5 \\ 2 & -8 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{204} = \frac{-204}{204} = -1;$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 14 & -5 \\ 2 & 2 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{204} = \frac{0}{204} = 0; \quad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 14 \\ 2 & 2 & -1 & -8 \\ -1 & 5 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{204} = \frac{-408}{204} = -2.$$

Решение системы $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = -2$.

4.25. О вычислении ранга матрицы. Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$, ранг которой r . Из определения ранга

матрицы A , а следовательно, и матрицы B линейно независимы.

Следует рассмотреть два случая:

а) ранг матрицы r равен числу неизвестных n , т. е. имеется n независимых уравнений с n неизвестными, причем определитель системы отличен от нуля. Единственное решение может быть найдено по формулам Крамера;

б) ранг матрицы меньше числа неизвестных $r < n$.

В этом случае запишем уравнения системы так:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n; \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Неизвестные, записанные в правой части равенства, зафиксируем, придав им по произволу значения $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$. Мы получим систему r линейных уравнений с r неизвестными, единственное решение которой $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ может быть найдено по формулам Крамера ($\det A_r \neq 0$). Так как значения «свободных неизвестных» $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ выбирались произвольно, система (4.21) имеет бесчисленное множество решений.

В заключение сформулируем полученные результаты:

1) если ранг матрицы системы r равен числу уравнений n , то система имеет единственное решение;

2) если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных и система совместна, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае $n - r$ неизвестных могут быть выбраны произвольно, а оставшиеся r неизвестных определятся единственным образом.

Примеры.

1) Совместна ли система

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{array}$$

Ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

не может быть больше 3.

Преобразуем матрицу A , умножив элементы последней строки соответственно на -1 , -2 , -1 и сложив их с элементами 1, 2, 3 строк,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранги матриц A и A_1 равны, так как матрицы A и A_1 эквивалентны. Ранг матрицы A_1 установить просто

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Ранг матрицы A равен 3.

Вычислим ранг расширенной матрицы B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем матрицу B аналогично предыдущему

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим теперь элементы второй строки матрицы B_1 на -2 , $+2$, $+1$ и сложим с соответствующими элементами 1, 3 и 4 строк. Новая матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 12 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r = 4$, так как определитель четвертого порядка отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & 12 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -8 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -7 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -7 & 12 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ранги матриц A и B различны, следовательно, исследуемая система несовместна

2) Совместна ли система:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned} \right\}$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

и расширенная матрица системы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

могут быть преобразованы в эквивалентные матрицы с помощью элементарных преобразований следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2) & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Непосредственно видно, что все миноры третьего и четвертого порядка равны нулю, но существует отличный от нуля минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ранги матриц A и B равны между собой, равны двум; следовательно, исследуемая система совместна.

3) Решить систему

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 9; \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 15. \end{aligned} \right.$$

Ранг матрицы системы равен 3; ранг расширенной матрицы также равен 3. Ранг матриц равен числу неизвестных, следовательно, система совместна и имеет единственное решение.

Определитель, составленный из коэффициентов первых трех уравнений, отличен от нуля. Четвертое уравнение линейно зависимо от первых трех и его можно отбросить. Решая систему, составленную из первых трех уравнений заданной системы, найдем $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

Легко проверить, что найденные значения неизвестных удовлетворяют и четвертому уравнению.

4.27. Система линейных однородных уравнений. Система линейных алгебраических уравнений называется однородной, если все свободные члены равны нулю:

[illegible]

Ранг матрицы системы (4.22) и ранг расширенной матрицы всегда равны, следовательно, однородная система всегда совместна. Очевидно, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ есть решение системы, оно называется тривиальным. Можно выяснить, когда однородная система имеет нетривиальное решение.

Теорема. Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.

Если ранг матрицы системы r меньше числа неизвестных n , то, как показано в п^о 4.26, система имеет бесконечное множество решений, следовательно, имеется решение, отличное от тривиального.

Если число уравнений совпадает с числом уравнений $m = n$, то из условия $r < n$ вытекает, что определитель системы должен быть равен нулю. Мы приходим к важному утверждению.

Для того чтобы однородная система линейных уравнений, состоящая из n уравнений с n неизвестными, имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю. Однородная система, в которой число уравнений m меньше числа неизвестных n , всегда имеет нетривиальные решения.

Если $m < n$, то ранг матрицы не может быть меньше числа ее строк, $r \leq m$. Следовательно, ранг матрицы меньше числа неизвестных и однородная система имеет ненулевые решения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите системы уравнений по формулам Крамера:

a) $5x_1 - 2x_2 + x_3 = 15$; 6) $2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1$;

$$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -7; \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14;$$

$$x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 26, \quad x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0;$$

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -2.$$

2. Выясните, какие линейные системы совместны и найдите решения совместных систем:

- а) $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 15;$ 6) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4;$
 $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8;$ $x_2 - x_3 + x_4 = -3;$
 $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 17;$ $x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1;$
 $7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 14.$ $-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3.$
- в) $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2;$
 $7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5;$
 $5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3.$

3. Выясните, какие однородные системы имеют решения, отличные от нуля и найдите эти решения:

- а) $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0;$ 6) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0;$
 $3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0;$ $7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0;$
 $4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0.$ $x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0.$

§ 4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ. ПОДОБНЫЕ МАТРИЦЫ

4.28. Характеристические числа и собственные векторы матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу порядка n :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

и матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

λ — независимое переменное; E — единичная матрица. Матрица (4.24) называется характеристической матрицей матрицы A . Определитель матрицы $A - \lambda E$ есть многочлен степени n относительно λ :

$$\det [A - \lambda E] = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} P_1 \lambda^{n-1} + \dots + P_n,$$

он называется *характеристическим многочленом* матрицы A . Коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$,

свободный член P_n равен определителю $\det A$ матрицы A . Сумма диагональных элементов

$$a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Sp } A$$

называется следом матрицы A .

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются *характеристическими числами* или *собственными числами матрицы A* . Множество всех собственных чисел матрицы называется ее спектром. Согласно теореме Виета сумма собственных чисел матрицы равна ее следу:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{Sp } A,$$

а произведение

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n \det A.$$

Определение. Собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному числу λ , называется отличный от нуля вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0,$$

удовлетворяющий уравнению

$$AX = \lambda X. \quad (4.25)$$

Матрицу A можно рассматривать как матрицу линейного преобразования, преобразующего собственный вектор X в вектор λX , отличающийся от вектора X только скалярным множителем. Уравнение (4.25) может быть записано в другой форме:

$$[A - \lambda E] \cdot X = 0, \quad (4.26)$$

которое, будучи однородным, имеет ненулевое решение X только тогда, когда характеристический многочлен равен нулю:

$$\det [A - \lambda E] = 0. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.26) эквивалентно системе n линейных уравнений:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n &= 0; \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n &= 0; \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + (a_{33} - \lambda) x_3 + \dots + a_{3n} x_n &= 0; \\ \vdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) x_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Уравнение (4.27) в развернутом виде переписывается следующим образом:

$$\det [A - \lambda E] = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.29)$$

Оно называется характеристическим уравнением.

Если корни этого уравнения λ_i , т. е. характеристические числа матрицы A , все различны, то каждому из них отвечает характеристический вектор X_i , определяемый системой уравнений (4.28) с точностью до произвольного множителя c .

Примеры. Вычислить собственные числа и собственные векторы матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Составим характеристический многочлен и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4.$$

Вычислим координаты собственных векторов, соответствующих собственным числам λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} 1) \quad \lambda_1 &= 1; \\ (2 - 1)x_1 + 2x_2 &= 0; \\ x_1 + (3 - 1)x_2 &= 0; \\ x_1 &= -2; \\ x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Собственный вектор:

$$X_1 = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \lambda_2 &= 4; \\ (2 - 4)x_1 + 2x_2 &= 0; \\ x_1 + (3 - 4)x_2 &= 0; \\ x_1 &= 1; \\ x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Собственный вектор:

$$X_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c — произвольное постоянное число.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 39\lambda - 28 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 7$.

$$1) (3-1)x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 1x_3 = 0;$$

$$0x_1 - 2x_2 + (5-1)x_3 = 0;$$

$$2x_1 + (4-1)x_2 - 2x_3 = 0;$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Собственный вектор

$$X_1 = e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$2) (3-4)x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0;$$

$$2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0; \quad \lambda_2 = 4.$$

$$0x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1.$$

Собственный вектор

$$X_2 = e \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) (3-7)x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0;$$

$$2x_1 + (4-7)x_2 - 2x_3 = 0; \quad \lambda_3 = 7.$$

$$0x_1 - 2x_2 + (5-7)x_3 = 0.$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad -x_3 = -1.$$

Собственный вектор

$$X_3 = e \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4.29. Теорема Гамильтона — Кэли. Предварительные замечания.

1. Определим степень квадратной матрицы A . Положим, что

$$A^0 = E; \quad A^1 = A; \quad AA = A^2, \dots, \underbrace{AA \dots A}_q = A^q.$$

Для целых неотрицательных q и r имеют места равенства

$$A^q A^r = A^{q+r};$$

$$(A^q)^r = A^{qr};$$

$$A^q A^r = A^r A^q$$

(перестановочность степеней одной и той же матрицы), справедливость которых читатель проверит без затруднений самостоятельно. Понятие степени матрицы A^q приводит к понятию многочлена (полинома) от матрицы A :

$$f(A) = c_0 A^0 + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_r A^r,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_r$ — данные числа. Ясно, что $f(A)$ представляет собой матрицу того же порядка n , что и порядок матрицы (квадратной) A .

Обратим внимание на то, что любой алгебраический полином $f(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_r \lambda^r$ становится полиномом $f(A)$ от матрицы A , если переменная λ заменяется на матрицу A . При этом легко убедиться в том, что для двух полиномов $f_1(A)$ и $f_2(A)$ от одной и той же матрицы A выполняется тождество

$$f_1(A) f_2(A) = f_2(A) f_1(A),$$

являющееся следствием отмеченной выше перестановочности степеней матрицы A : $A^p A^q = A^q A^p$.

Наряду с понятием многочлена (полинома) от матрицы $f(A)$ в теории матриц большую роль играет понятие *полиномиальной матрицы*. Так, принято называть матрицу вида

$$B = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & \dots & P_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(t) & P_{n2}(t) & \dots & P_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

элементы которой $P_{ij}(t)$ представляют собой полиномы

$$P_{ij}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_m t^m,$$

переменной t некоторой степени m . Здесь коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ (числовые), вообще говоря, зависят от индексов i и j .

Путем ряда последовательных разложений матрицы по элементам различных строк и столбцов эта матрица может быть представлена в виде многочлена

$$B = B_0 + B_1 t + \dots + B_r t^r, \quad (4.30)$$

коэффициенты которого $B_0, B_1, \dots, B_r$ представляют собой уже числовые квадратные матрицы того же порядка n , что и сама матрица B .

Например,

$$\begin{pmatrix} t^3 + 2t - 3 & 8t + 4 \\ 3t^2 + 8t - 2 & t^3 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} t^2 + \\ + \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Легко уяснить, что коэффициенты B_i определяются матрицей B однозначно, и это обстоятельство позволяет при рассмотрении многочленов типа (4.30) использовать известный из элементов алгебры метод сравнения коэффициентов.

2. Одной из важнейших теорем в теории матриц является следующая теорема, принадлежащая английским математикам XIX в. Гамильтону и Кэли.

Теорема Гамильтона — Кэли.

Если $f(x)$ есть характеристический многочлен матрицы A , то $f(A) = 0$.

Здесь в правой части равенства $f(A) = 0$ подразумевается матрица порядка n , все элементы которой равны 0, т. е. нулевая матрица.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

определитель которой $\det B$ равен характеристическому многочлену матрицы A $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$. Образует для матрицы B обратную матрицу B^{-1} и присоединенную матрицу B^* , которые будут, очевидно, полиномиальными матрицами. Элементами матрицы B^* служат алгебраические дополнения элементов матрицы B . Поэтому каждый из элементов матрицы B^* представляет собой полином от λ степени не выше $(n-1)$, и поэтому, как было разъяснено,

$$B^* = B_0 + B_1\lambda + \dots + B_{n-1}\lambda^{n-1},$$

где B_i — квадратные матрицы порядка n с числовыми элементами.

По определению обратной матрицы (4.6):

$$BB^{-1} = B \cdot \frac{1}{\det B} \cdot B^* = E.$$

Откуда

$$BB^* = \det BE = f(\lambda)E. \quad (4.31)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} BB^* &= [A - \lambda E] [B_0 + B_1\lambda + \dots + B_{n-1}\lambda^{n-1}] = \\ &= AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + (AB_2 - B_1)\lambda^2 + \dots + \\ &\quad + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} - B_{n-1}\lambda^n. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$f(\lambda) \cdot E = a_0E + a_1E\lambda + \dots + a_nE\lambda^n.$$

Подставляя эти выражения для BB^* и $f(\lambda)E$ в тождество (4.31) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях A' , найдем, что

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 E; \\ AB_1 - B_0 &= a_1 E; \\ AB_2 - B_1 &= a_2 E; \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} E; \\ &- B_{n-1} = a_n E. \end{aligned}$$

Умножим теперь полученные равенства соответственно на $E, A, A^2, \dots, A^n$, получим

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 E; \\ A^2 B_1 - AB_0 &= a_1 A; \\ A^3 B_2 - A^2 B_1 &= a_2 A^2; \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} &= a_{n-1} A^{n-1}; \\ &- A^n B_{n-1} = a_n A^n. \end{aligned}$$

После сложения написанных равенств найдем

$$0 = a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n = f(A),$$

что и составляет утверждение теоремы Гамильтона — Кэли.

Многочлен $f(\lambda)$, для которого $f(A) = 0$, обычно называется аннулирующим многочленом матрицы A .

4.30. Подобные матрицы. Определение. Матрица A называется подобной матрице B , если существует такая неособенная матрица T , что

$$A = T^{-1}BT.$$

Матрица T называется преобразующей матрицей.

Теорема 1. Если матрица A подобна матрице B , то и матрица B подобна матрице A (свойство симметрии).

Пусть

$$A = T^{-1}BT, \quad (4.32)$$

умножим обе части равенства (4.32) слева на матрицу T и справа на матрицу T^{-1} :

$$\begin{aligned} TAT^{-1} &= TT^{-1}BTT^{-1} = B; \\ (T^{-1})^{-1} \cdot AT^{-1} &= B. \end{aligned}$$

Здесь преобразующей матрицей будет матрица T^{-1} .

Теорема 2. Если матрица A подобна матрице B , а матрица B подобна матрице C , то матрица A подобна матрице C (свойство транзитивности).

Пусть

$$A = T_1^{-1} B T_1; \quad B = T_2^{-1} C \cdot T_2.$$

Имеем

$$A = T_1^{-1} B T_1 = T_1^{-1} T_2^{-1} C T_2 T_1 = (T_2 T_1)^{-1} \cdot C (T_2 \cdot T_1).$$

Матрицы A и C подобны, $T_2 T_1$ — преобразующая матрица.

Теорема 3. Каждая матрица подобна сама себе:

$$A = E^{-1} A E.$$

Единичная матрица E — преобразующая матрица. Из теорем 1, 2, 3 следует, что квадратные матрицы порядка n разбиваются на классы подобных матриц. Две любые матрицы из одного класса подобны, а из разных классов не подобны между собой.

Теорема 4. Справедливы соотношения:

$$a) \quad T^{-1} (A_1 + A_2) T = T^{-1} A_1 T + T^{-1} A_2 T,$$

$$b) \quad T^{-1} [A_1 A_2] \cdot T = T^{-1} A_1 T T^{-1} A_2 T.$$

Теорема 5. Подобные матрицы имеют равные определители. Пусть матрица A подобна матрице B :

$$A = T^{-1} B T;$$

$$\det A = \det [T^{-1} B T] = \det T^{-1} \det B \det T. \quad (4.33)$$

Далее

$$\begin{aligned} \det A &= \det T^{-1} \cdot \det T \cdot \det B = \\ &= \frac{1}{\det T} \cdot \det T \cdot \det B = \det B. \end{aligned}$$

Теорема 6. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены $f(\lambda)$.

Пусть матрица A подобна матрице B : $A = T^{-1} B T$ и имеет характеристический многочлен $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det [A - \lambda E] = \det [T^{-1} B T - \lambda E] = \det [T^{-1} (B - \lambda E) T] = \\ &= \det [B - \lambda E]. \end{aligned}$$

Следствие 1. Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические числа.

Следствие 2. Подобные матрицы имеют одинаковые следы. Заметим, что утверждение, обратное теореме 6, не верно. Характеристические многочлены матриц могут быть одинаковы,

но матрицы не обязательно будут подобными. Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеют одинаковые характеристические многочлены:

$$f_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2; \quad f_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2,$$

При любой преобразующей матрице T

$$T^{-1}ET = E \neq A,$$

и, следовательно, матрицы E и A не являются подобными.

§ 1. ВЕРОЯТНОСТЬ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

5.1. Испытания и события. Теория вероятностей имеет дело с экспериментами, результаты которых не определены заранее однозначно; повторение таких экспериментов приводит, вообще говоря, к различным результатам, предсказать которые только по известным условиям эксперимента нельзя. Слово эксперимент понимается здесь как осуществление указанных условий, объем и содержание которых должны быть точно очерчены заранее. При этом предполагается, что совокупность этих условий может действительно (или в принципе) последовательно воспроизводиться неограниченное число раз; другими словами, рассматриваемые эксперименты, которые будем в дальнейшем называть также опытами или испытаниями, могут быть принципиально повторены сколько угодно раз. Возможные результаты (исходы) таких экспериментов будем называть событиями.

В качестве примера можем взять испытание, состоящее в подбрасывании монеты, и, как возможные при этом события, появление на верхней стороне монеты после ее падения либо герба, либо решетки. Это испытание может быть повторено произвольное число раз.

События будем обозначать буквами $A, B, C, \dots$

5.2. Частота и ее устойчивость. Рассмотрим некоторое испытание и будем воспроизводить его достаточно большее число n раз. Обозначим через $m_n(A)$ число тех из этих испытаний, в которых осуществилось одно из возможных при этом событий A . Отношение $\frac{m_n(A)}{n} = k_n(A)$ числа осуществлений события $m_n(A)$ к числу произведенных испытаний n будем называть частотой осуществления события A за рассматриваемые n испытаний.

Опыт и наблюдение говорят, что существуют такие испытания и возможные для них события A , что частота $k_n(A)$ для больших n принимает значения, приближающиеся к некоторому среднему значению p , так что число осуществлений

$m_n(A)$ события A за n испытаний в среднем равно pn . Разумеется, это свойство устойчивости частоты не должно пониматься слишком буквально, например, как существование предела $\lim k_n(A) = p$. В действительности возможны некоторые случайные отклонения в ту или иную сторону. Далее, при изучении закона больших чисел (п^о 5.27, п^о 5.35) характер приближенного равенства $k_n(A) \simeq p$ будет выяснен более точно. Мы будем в дальнейшем рассматривать только такие события A , частоты которых $k_n(A)$ обладают описанным свойством устойчивости, и только такие события будем называть случайными событиями.

Например, при подбрасывании монеты большое число n раз ввиду ее симметрии можно рассчитывать на то, что число появлений герба (как и решетки) будет приблизительно равно $\frac{n}{2}$, что и было на самом деле проверено при помощи тщательно выполненных экспериментов. Поэтому в данном случае появление герба будет случайным событием с частотой $\simeq \frac{1}{2}$.

Наблюдение показывает, что при стрельбе по какой-либо цели, например из винтовки, число поражений $m_n(A)$ цели для одного и того же стрелка при неизменных условиях в среднем пропорционально числу произведенных выстрелов n :

$$m_n(A) \simeq pn.$$

Поэтому факт поражения цели можно считать случайным событием с частотой осуществления $k_n(A) \simeq p$. Уместно отметить, что в отличие от предшествующего примера величина частоты (в среднем) p здесь определяется, помимо других обстоятельств, также личными качествами стрелка и может в известной мере служить оценкой его умения стрелять.

Как случайное событие можно рассматривать факт вынужденной остановки движущегося поезда на определенном участке пути вследствие той или иной технической неисправности, причем частота этого события, естественно, должна зависеть в зависимости от эксплуатационных условий.

Если некоторое событие должно обязательно наступить в результате производимого испытания, сколько бы раз это испытание ни повторялось, то частота осуществления такого события равна единице при любом числе испытаний n . Такое событие называется достоверным, и далее оно обычно будет обозначаться буквой U :

$$k_n(U) = 1.$$

Удобно ввести и рассматривать невозможное событие, определяющим свойством которого служит невозмож-

ность его осуществления в результате производимого испытания. Частота невозможного события равна нулю. Для обозначения невозможного события примем букву V .

5.3. Частные случаи, объединение и пересечение событий. Если при осуществлении некоторого события A обязательно осуществляется и событие B , то первое событие A называется частным случаем второго события B , а событие B называется следствием события A , что обозначается знаком включения $\subset$:

$$A \subset B \text{ (или } B \supset A \text{)}.$$

В этом случае говорят также, что из A вытекает (следует) B . Отметим, что для любого события A справедливо

$$A \subset A, A \subset U,$$

так как здесь в правых частях стоят события, осуществление которых достоверно при условии осуществления событий слева.

События A и B называются эквивалентными, если одновременно

$$A \subset B \text{ и } B \subset A.$$

Это означает, что оба события A и B могут осуществляться только вместе. Для обозначения эквивалентности событий A , B применяется знак равенства: $A = B$.

Событие, состоящее в ненаступлении некоторого события A , называется отрицанием A и обозначается $\bar{A}$. Событие $\bar{A}$ называется также событием, дополнительным к событию A , или событием, противоположным для A .

Отметим, что $\bar{\bar{U}} = V$ и $\bar{\bar{A}} = A$ для любого события A .

Событие C , осуществляющееся в том и только в том случае, когда осуществляются два события A и B , называется пересечением (или произведением) этих двух событий и обозначается при помощи знака пересечения $\cap$:

$$C = A \cap B.$$

Распространены также обозначения:

$$C = AB, C = A \text{ и } B.$$

Наконец, событие D , осуществляющееся в том и только в том случае, когда осуществляется хотя бы одно из двух событий A или B , называется объединением (суммой) этих двух событий и обозначается при помощи знака объединения $\cup$:

$$D = A \cup B.$$

Часто пишут также

$$D = A \vdash B, D = A \text{ или } B.$$

Отметим, что для любого события A справедливо:

$$A \cap U = A, \quad A \cup V = A,$$

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = V.$$

Если пересечение двух событий A и B представляет собой невозможное событие, т. е. их одновременное осуществление невозможно

$$A \cap B = U,$$

то такие события называются несовместными.

Если события изображать в виде областей на плоскости, то указанные операции с событиями допускают следующую геометрическую интерпретацию:

а) пересечение $C = A \cap B$;

б) объединение $C = A \cup B$;

в) дополнительное событие $\bar{A}$.

Ясно, что понятия пересечения и объединения событий переносятся на произвольное число со-

бытий. $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

есть объединение n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ и означает событие, происходящее тогда и только тогда, когда осуществляется хотя бы одно из данных событий $A_1, \dots, A_n$,

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ — пере-

сечение событий $A_1, \dots, A_n$ — означает событие, происходящее тогда и только тогда, когда осуществля-

ются все события $A_1, \dots, A_n$ сразу. При этом справедливы следующие равенства, аналогичные распределительному закону для обычных действий сложения и умножения в алгебре:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap C = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap C);$$

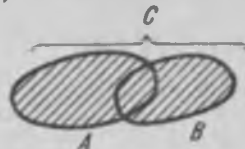
$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cup C = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup C),$$

каковы бы ни были события A_i и C . Например, левая часть первого равенства $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap C$ осуществляется в том случае (и только тогда), когда осуществляется C одновременно

а) Пересечение: $C = A \cap B$



б) Объединение: $C = A \cup B$



в) Дополнительное событие: $\bar{A}$

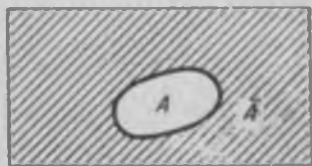


Рис. 5.1

с осуществлением хотя бы одного из событий A_i . Но это эквивалентно событию $\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap C)$, означающему осуществление хотя бы одного из событий A_i совместно с C . Аналогично проверяется справедливость и второго из приведенных равенств.

5.4. Примеры. Рассмотрим массовое производство каких-либо деталей, например, на токарных станках. Обозначим через A событие, состоящее в том, что произведенная деталь оказалась удовлетворяющей поставленным техническим условиям (исправной). Через B обозначим факт неисправности (брака) детали, происходящей по вине рабочего. C пусть обозначает брак детали вследствие неисправности станка, а D — брак по причине недоброкачественности поставленного другим предприятием материала. Тогда $\bar{A}$ будет обозначать неисправность детали (без указания причины) и поэтому

$$B \cup C \cup D \subset \bar{A}.$$

Если брак детали не может возникнуть по какой-либо причине, отличной от трех перечисленных причин, то события $B \cup C \cup D$ и $\bar{A}$ будут эквивалентными:

$$B \cup C \cup D = \bar{A}.$$

Далее $A_1 = B \cap \bar{C} \cap \bar{D}$ представляет собой факт брака детали по вине рабочего при нормально работающем станке и доброкачественном материале, а $A_2 = \bar{B} \cap C \cap \bar{D}$ — факт брака детали из-за неисправности станка при правильной работе рабочего и доброкачественности материала. В виде упоминания читателю предлагается аналогичным образом истолковать следующие события:

$$A_3 = \bar{B} \cap \bar{C} \cap D, \quad A_4 = B \cap C \cap \bar{D};$$

$$A_5 = \bar{B} \cap C \cap D, \quad A_6 = B \cap \bar{C} \cap D \quad \text{и} \quad A_7 = B \cap C \cap D.$$

При этих обозначениях оказываются справедливыми равенства:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cup A_7 &= B \cap C, & A_3 \cup A_7 &= C \cap D; \\ A_4 \cup A_7 &= B \cap D. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Первое из них, например, выполняется потому, что одно из двух событий D или $\bar{D}$ осуществляется с достоверностью: $D \cup \bar{D} = U$. Два других равенства (5.1) выполняются вследствие того, что $B \cup \bar{B} = U$ и $C \cup \bar{C} = U$. Также легко убеждаемся в том, что

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_7 &= B; \\ A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_7 &= C; \\ A_3 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 &= D. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Действительно, по (5.1) $A_1 \cup A_4 \cup A_7 = (B \cap C) \cup (B \cap D)$ и поэтому

$$A_1 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_7 = (B \cap \bar{C} \cap \bar{D}) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) = B,$$

так как одно из трех событий C , D или $(\bar{C} \cap \bar{D})$ осуществляется с достоверностью:

$$C \cup D \cup (\bar{C} \cap \bar{D}) = U.$$

Аналогично проверяется справедливость двух других равенств (5.2).

5.5. Поле событий. Вводимое далее основное понятие вероятности события определяется сразу для совокупности всех событий, осуществление которых возможно в результате не-

которого данного испытания. Поэтому целесообразно рассмотреть эту совокупность событий и выделить наиболее существенные ее свойства.

Совокупность всех возможных в результате некоторого испытания событий, в которую включены достоверное и невозможное события, называется полем событий.

Поле событий будем обозначать буквой S . То обстоятельство, что некоторое событие A принадлежит полю S , обозначается при помощи знака принадлежности ϵ :

$$A \in S.$$

Если осуществление события A возможно для некоторого испытания, то для того же испытания можно говорить и о противоположном событии $\bar{A}$. Другими словами, если $A \in S$, то и $\bar{A} \in S$. Далее, если осуществление событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ возможно в результате некоторого испытания, то как о результате того же испытания можно говорить и об объединении этих событий $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, которое кратко записывается в виде $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Иначе сказать, если $A_i \in S, i = 1,$

$2, \dots, n$, то $\bigcup_{i=1}^n A_i \in S$. В том случае, когда поле S включает в себя некоторую бесконечную последовательность событий $i = 1, 2, \dots$ мы будем считать также, что и объединение всех этих событий A_i опять принадлежит полю S . При этом указанное объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ понимается как событие, эквивалентное осуществлению хотя бы одного из членов последовательности событий $A_i, i = 1, 2, \dots$

Соберем вместе перечисленные свойства поля событий S :

- 1) $\bar{A} \in S$;
- 2) если $A \in S$, то $\bar{A} \in S$;
- 3) если $A_i \in S, i = 1, 2, \dots$, то $\bigcup_i A_i \in S$.

Знак объединения $\bigcup_i A_i$ из свойства (3) может относиться, смотря по обстоятельствам, либо к конечному числу, либо к бесконечной последовательности событий $A_i, i = 1, 2, \dots$

Эти три свойства поля S являются характеристическими и их совокупность может быть принята в качестве определения понятия поля событий S .

Нетрудно показать, что пересечение событий, принадлежащих полю, также будет принадлежать тому же полю.

Действительно, пусть $C_1 \in S$ и $C_2 \in S$. Тогда $\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$ будет обозначать событие, состоящее в ненаступлении ни события

C_1 , ни события C_2 , т. е. $\overline{C_1 \cup C_2}$ будет эквивалентно $\overline{C_1} \cap \overline{C_2}$. Вместе с тем $C_1 \cup C_2$, следовательно, и $\overline{C_1 \cup C_2}$ представляют собой события, принадлежащие полю. Пусть теперь $A \in S$, $B \in S$. Тогда из свойств поля следует, что $\overline{A} \in S$, $\overline{B} \in S$.

Принимая $\overline{A}$ за C_1 и $\overline{B}$ за C_2 по только что сказанному, получаем

$$\overline{A \cup B} = A \cap B,$$

а поэтому пересечение $A \cap B$ принадлежит полю S . Для примера возьмем множество U , состоящее из конечного числа n элементов $A_1, A_2, \dots, A_n$ (произвольной природы). Пусть $A_{i_1}, i_1, \dots, i_k$ обозначает подмножество множества U , состоящее из элементов $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$. В качестве возможного исхода (события) некоторого эксперимента будем считать какое-либо из этих подмножеств. Совокупность S всех таких событий $A_{i_1}, i_1, \dots, i_k$, в число которых включается и пустое множество $\emptyset$ (невозможное событие V), представляет собой поле событий в смысле данного выше формального определения. Каждое из трех определяющих поле свойств 1), 2) и 3) для совокупности событий $A_{i_1}, \dots, i_k$ очевидно, выполняется. Так как число всех различных подмножеств из k элементов $A_{i_1}, i_1, \dots, i_k$ множества U , содержащего n элементов, равно C_n^k , то общее число всех событий, образующих рассмотренное поле S , равно 2^n , потому что $\sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n$. Это — пример конечного поля событий. Аналогичным образом могут быть получены и бесконечные поля событий S , если в качестве U взять то или иное бесконечное множество элементов A , а S будет образовано всеми (или определенного вида) подмножествами множества U .

5.6. Свойства частот событий поля. Частоты событий некоторого поля обладают рядом общих свойств независимо от того, какое поле событий рассматривается.

1) Частота достоверного события $k_n(U)$ равна единице при любом числе испытаний n .

2) Частота всякого события $A \in S$ представляет собой неотрицательное вещественное число, т. е. $k_n(A) \geq 0$.

3) Если события $A_i \in S$, $i = 1, 2, \dots, r$ попарно несовместны, то

$$k_n(\bigcup_{i=1}^r A_i) = \sum_{i=1}^r k_n(A_i).$$

Последнее свойство вытекает из того, что ввиду несовместности событий A_i никакие два из них не могут осуществляться

при одном и том же испытании. Поэтому общее число испытаний $m_n(\bigcup_{i=1}^r A_i)$, в которых осуществляется хотя бы одно из событий A_i , будет равняться сумме чисел $m_n(A_i)$ тех испытаний, в которых осуществляются события A_i , $i = 1, 2, \dots, r$ в отдельности. Итак,

$$m_n(\bigcup_{i=1}^r A_i) = \sum_{i=1}^r m_n(A_i),$$

откуда делением на n получаем сформулированное свойство частот 3).

5.7. Определение вероятностей событий поля. Теория вероятностей представляет собой математическую науку о случайных событиях. Сущность метода, при помощи которого производится в ней изучение случайных событий, заключается в следующем. Сначала выявляются основные, определяющие свойства частот событий, образующих поле. Эти свойства приведены в предыдущем пункте под номерами 1), 2) и 3). Затем каждому из событий A поля S относится определенное число $P(A)$, и этим числом, называемым вероятностями событий, приписываются в виде аксиом свойства, повторяющие выявленные уже основные свойства частот 1), 2) и 3) из п^о 5.6. Таким образом строится математическая модель поля событий и их частот. Теорию вероятностей в целом можно рассматривать как результат дальнейшего, уже чисто математического развития этой модели, хотя, следует отметить, ход исторического построения ее был в действительности иным. Опыт показывает, что соответствие результатов теории вероятностей с реальными явлениями такое же полное, как и для геометрии, теоретической механики или других математических наук.

В соответствии со сказанным понятие вероятностей событий вводится при помощи следующего определения.

Вещественные числа $P(A)$, $P(B)$, ..., отнесенные событиям A , B , ..., из некоторого поля S , называются вероятностями этих событий, если они удовлетворяют следующим аксиомам:

- 1) $P(U) = 1$;
- 2) $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in S$;
- 3) если попарно несовместные события $A_i \in S$, $i = 1, 2, \dots$, то

$$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i).$$

Подчеркнем, что в последней аксиоме 3) речь может идти как о конечном числе событий A_i , так и о бесконечной последовательности их.

Аксиому 3) в соответствии с традицией часто называют теоремой сложения вероятностей.

Вычисление или оценка неизвестных вероятностей событий из некоторого поля S по известным вероятностям других событий из того же поля представляет собой одну из главных задач теории вероятностей.

Происхождение указанных известных вероятностей может быть различным. Не перечисляя всех появляющихся здесь возможностей, отметим, что они могут быть вычислены, например, как вероятности событий из других полей; могут быть определены как числа, вокруг которых группируются наблюдаемые частоты соответствующих событий; могут определяться из соображений симметрии рассматриваемых испытаний и их исходов. Последний прием будет далее исследован более подробно при рассмотрении вопроса о классическом определении вероятностей. Что касается определения некоторых вероятностей по наблюдаемым частотам, то этот способ вполне аналогичен определению численных значений различных физических или геометрических величин при помощи непосредственного измерения этих величин.

Укажем некоторые простейшие следствия, вытекающие из определения вероятностей событий поля.

а) Пусть $A \in S$, следовательно, и $\bar{A} \in S$. Так как $A \cup \bar{A} = U$ и $A \cap \bar{A} = V$, то по теореме сложения вероятностей

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

откуда

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (5.3)$$

В частности, для невозможного события это дает

$$P(V) = 1 - P(U) = 1 - 1 = 0.$$

б) По аксиоме (2) $P(\bar{A}) \geq 0$, а поэтому из равенства (5.3) получается, что

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Иными словами, вероятность любого события A представляет собой неотрицательное вещественное число, не превосходящее единицы.

в) Пусть $A \in S$, $B \in S$, причем $A \subset B$. Событие B может осуществиться только при одновременном осуществлении события A или, как исключаящий этот случай, при одновременном осуществлении противоположного события $\bar{A}$. Поэтому

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(B \cap A).$$

Но событие $B \cap A$ ввиду $A \subset B$ эквивалентно событию A и поэтому $P(B \cap A) = P(A)$.

Следовательно,

$$P(A) \leq P(B),$$

если только $A \subset B$.

Вероятности событий представляют собой математический эквивалент чисел, вокруг которых группируются частоты осуществления события при большом числе n повторений испытаний. Поэтому закономерности теории вероятностей для конкретных случайных событий проявляются при осуществлении большого числа испытаний. В этом смысле теорию вероятностей можно рассматривать как науку о закономерностях массовых явлений.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть событие A означает выпадение на игральном кубике четного числа очков: 2, 4 или 6; B — выпадение числа очков, кратного трем: 3 или 6. Укажите смысл событий

$$A \cup B, A \cap B, \overline{A \cup B} \text{ и } \overline{A \cap B}.$$

2. Изделие, изготавливаемое на некотором станке, может оказаться одного из трех следующих видов: 1) удовлетворяющее техническим условиям (событие A), 2) бракованное, не подлежащее исправлению (событие B) и 3) частично бракованное, подлежащее исправлению (событие C). Укажите наименьшее по числу событий поле событий S , в состав которого входят события A , B и C .

3. Пусть вероятности событий A , B и C вопроса 2) известны: $P(A) = 0,94$; $P(B) = 0,02$; $P(C) = 0,04$. Чему равны вероятности остальных событий поля S ?

§ 2. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.8. Применение теоремы сложения вероятностей. Вернемся к рассмотренному в п^о 5.4 примеру производства деталей с возможным браком из-за указанных там различных причин. Допуская, что иных причин брака нет, замечаем, что одно из введенных там событий $A_1, A_2, \dots, A_7$ или событие A (отсутствие брака) обязательно должно реализоваться, причем любые два из этих событий несовместны. Последнее вытекает из того, что в состав каждой двух из событий A_1 и A_7 входят взаимно дополнительные события (A_1 и A_2 , например, содержат события B и $\overline{B}$), а несовместность события A и любого из событий A_i очевидна. Примем совокупность событий $A_1, A_2, \dots, A_7$ и A за множество U и в качестве объединяющего их поля событий S возьмем совокупность всех подмножеств множества U (включая и пустое подмножество $\emptyset$). Вероятностями событий поля S будут по вышеизложенному любые числа, отнесенные этим событиям и удовлетворяющие аксиомам 1), 2) и 3), определяющим понятие

вероятности (п^о5.7). Существенным обстоятельством при этом будет то, что эти числа (вероятности) для каждого из событий поля S будут полностью определены по заданным (известным) вероятностям только для некоторых событий того же поля S . Источники же сведений об этих последних вероятностях, как это уже отмечалось ранее, могут быть различными, и в нашем случае выяснение этого вопроса мы оставляем в стороне. Считаем, что заданы вероятности событий $A_1, A_2, \dots, A_7$, например:

$$P(A_1) = 0,02; \quad P(A_2) = 0,01; \quad P(A_3) = 0,03;$$

$$P(A_4) = 0,005; \quad P(A_5) = 0,008;$$

$$P(A_6) = 0,01; \quad P(A_7) = 0,002.$$

Располагая этими данными, можно найти вероятности как событий A, B, C и D в отдельности, так и вероятности различных комбинаций этих событий. А именно, прежде всего находим вероятность брака изготавливаемых деталей (без указания причины брака), пользуясь теоремой сложения вероятностей:

$$P(\bar{A}) = P(\bigcup_{i=1}^7 A_i) = \sum_{i=1}^7 P(A_i) =$$

$$= 0,02 + 0,01 + 0,03 + 0,005 + 0,008 + 0,01 + 0,002 = 0,085.$$

Следовательно, вероятность того, что изготовленная деталь окажется исправной, по формуле (5.3) найдется так:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,085 = 0,915.$$

Далее, применяя формулы (6.2) и снова пользуясь теоремой сложения вероятностей, найдем, что

$$P(B) = P(A_1) + P(A_4) + P(A_6) + P(A_7) = 0,037;$$

$$P(C) = P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_7) = 0,025;$$

$$P(D) = P(A_3) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) = 0,05.$$

Если требуется найти вероятности одновременного осуществления событий B и C, C и D, B и D , то следует воспользоваться формулами (5.1) которые дают:

$$P(B \cap C) = P(A_4) + P(A_7) = 0,007;$$

$$P(C \cap D) = P(A_3) + P(A_7) = 0,01;$$

$$P(B \cap D) = P(A_6) + P(A_7) = 0,012.$$

5.9. Классическое определение вероятности. Из предыдущего примера отчетливо видно, что для вычисления вероятностей событий, образующих поле, требуется предварительное знание вероятностей некоторых событий того же поля. Во многих случаях сведения такого рода могут быть почерпнуты из соображений о симметрии каких-либо событий

поля, которые приводят к принятию заключения о равенстве вероятностей этих событий. На этом основано классическое определение понятия вероятности.

Пусть поле событий S содержит n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, объединение которых $\bigcup_{i=1}^n A_i = U$ представляет собой достоверное событие, а остальные события поля S пусть будут образованы всеми различными объединениями некоторых из событий $A_i, i = 1, 2, \dots, n$. Выражение «попарно несовместные события» означает, что каждые два из рассматриваемых событий несовместны. Если $\bigcup_{i=1}^n A_i = U$, то события $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ называются единственными возможными. Пусть известно, что вероятности всех событий $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ равны одна другой. В этом случае эти события будем называть равновероятными. Заключение о равновероятности часто может быть сделано на основании того, что исходы $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ производимого эксперимента оказываются симметричными относительно условий этого эксперимента. Так как события A_i попарно несовместны, то можно применить теорему сложения вероятностей $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, а ввиду единственности событий A_i должно быть $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1$. Поэтому $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$, откуда следует, что

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.4)$$

так как все вероятности $P(A_i)$ равны одна другой, а число их равно n . После того как установлены вероятности (5.4) событий A_i , вероятности всех других событий поля S вычисляются при помощи теоремы сложения вероятностей. Событие $A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_m}$, представляющее собой объединение попарно несовместных событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$, число которых равно $m, 0 \leq m \leq n$, имеет вероятность

$$P(A) = \sum_{j=1}^m P(A_{i_j}) = \frac{m}{n}. \quad (5.5)$$

События $A_{i_j}, j = 1, 2, \dots, m$, осуществление одного из которых равносильно осуществлению события A , называются благоприятствующими для события A . Формула (5.5), полученная сейчас как пример вычисления вероятностей на основе изло-

женного выше их аксиоматического введения, служит при классическом подходе определением понятия вероятности, которое формулируется следующим образом.

Классическое определение вероятности. *Вероятностью некоторого события A называется отношение числа m благоприятствующих ему, равновероятных и попарно несовместных событий, к общему числу n таких единственно возможных событий.*

5.10. Примеры классического подхода к вычислению вероятностей.

Пример 1. Подбрасывается игральный кубик. Какова вероятность выпадения на верхней грани: 1) четного числа очков? 2) числа очков, делящегося на три? Принимаем, что игральный кубик вполне симметричен, так что вероятность появления сверху любой из его шести граней одна и та же, а именно равна $\frac{1}{6}$. Событие A , состоящее в появлении на верхней грани кубика четного числа очков, ранного 2, 4 или 6 ($m = 3$). Поэтому $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Событие B , для которого число очков делится на три, имеет благоприятствующими случаями появление числа очков, ранного 3 или 6 ($m = 2$). Поэтому $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Пример 2. Из полной колоды игральных карт извлекается наудачу одна карта. Найти вероятность того, что эта карта окажется: 1) тузом, 2) пиковой масти, 3) пиковым тузом.

Так как число карт полной колоды ранно 52, и каждая из них имеет одинаковую вероятность быть извлеченной из колоды, то эта вероятность равна $\frac{1}{52}$. Число тузов в колоде $m = 4$, поэтому вероятность извлечения туза ранна $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Общее число карт пиковой масти ранно 13. Поэтому

вероятность извлечения карты этой масти ранна $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Наконец, вероятность извлечения туза пик ранна $\frac{1}{52}$.

Пример 3. Из полного комплекта карт домино извлекается наудачу одна карта. Чему равна вероятность того, что сумма очков на обеих половинах этой карты окажется равной 6? Вероятность извлечения любой из карт домино принимается равной $\frac{1}{28}$, так как число всех карт полного комплекта домино ранно 28. Из них благоприятствующими для рассматриваемого события, когда сумма очков на обеих частях карты равна 6, будут следующие четыре случая: $0 + 6$; $1 + 5$; $2 + 4$; $3 + 3$. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

Пример 4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается наудачу одна, затем также наудачу из оставшихся выбирается вторая цифра. Найти вероятность того, что: 1) первая цифра четная (событие A), 2) вторая цифра четная (событие B), 3) обе цифры четные (событие C). Для ответа на первый вопрос замечаем, что на первом месте с вероятностью $\frac{1}{5}$ может оказаться любая из пяти рассматриваемых цифр, причем в двух случаях, когда она равна 2 или 4 ($m = 2$), осуществляется событие A . Поэтому $P(A) = \frac{2}{5}$. Это делает

также очевидным ответ и на второй вопрос: $P(B) = \frac{2}{5}$. Иначе этот ответ получается из следующих соображений. С каждой из пяти цифр на первом месте может с равной вероятностью комбинироваться на втором месте любая из остающихся четырех цифр, так что общее число всех равновероятных комбинаций двух выбираемых цифр $n = 5 \cdot 4 = 20$. Если на первом месте стоит нечетная цифра (таких случаев три), то четной цифрой на втором месте может быть 2 или 4; всего таких комбинаций $3 \cdot 2 = 6$. Кроме того, возможны две комбинации из четных цифр: 24 и 42. Итак, число всех благоприятствующих для события B случаев $m = 8$ и поэтому $P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Наконец, как уже замечено, благоприятствующими для события C оказываются $m = 2$ случаев, что дает $P(C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Пример 5. Монета подбрасывается пять раз. Найти вероятность того, что после ее падения на верхней стороне появится: 1) все пять раз герб, 2) ровно два раза герб, 3) хотя бы один раз герб. Считая монету симметричной, принимаем вероятность появления сверху после ее падения любой из двух сторон — герба (г) или решетки (р) — одинаковыми, равными $\frac{1}{2}$. При каждом из пяти подбрасываний монеты любая из этих двух возможностей будет комбинироваться с любой другой, так что общее число n всех таких равновероятных комбинаций будет равно $2^5 = 32$ случаев. Из них только в одном случае ($m = 1$) пять раз подряд появляется герб. Поэтому вероятность такого события равна $\frac{1}{32}$. Появление герба точно два раза может осуществиться при любых двух из всех пяти рассматриваемых подбрасываний монеты, т. е. в $C_5^2 = 10$ случаях. Следовательно, вероятность двукратного появления герба равна $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$. Наконец, герб хотя бы в одном из пяти подбрасываний появится в 31-м из всех 32 случаев, так как только при одной-единственной комбинации, когда все пять раз подряд выпадает решетка, он не появляется. Поэтому искомая вероятность появления герба хотя бы один раз равна $\frac{31}{32}$.

Пример 6. Какова вероятность того, что среди вынутых наудачу 4 карт из полной колоды 52 карт ровно две окажутся принадлежащими трефовой масти?

Всего равновероятных комбинаций по 4 карты из общего числа 52 карт можно составить $n = C_{52}^4 = 270\,725$. Из 13 же карт трефовой масти составятся $C_{13}^2 = 78$ различных пар, которые могут произвольным образом сочетаться с $C_{39}^2 = 741$ различными парами карт других мастей. Следовательно, число благоприятствующих рассматриваемому событию равновероятных случаев равно $C_{13}^2 \cdot C_{39}^2 = 78 \cdot 741$. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{C_{13}^2 \cdot C_{39}^2}{C_{52}^4} = \frac{4446}{20\,825} \approx 0,213.$$

Пример 7. Только что разобранный пример обобщается следующим образом. Урна содержит N белых и M черных на ощупь неотличимых шаров, из которой наудачу извлекаются $K < N + M$ шаров. Какова вероятность, что при этом будет извлечено точно $\nu < N$ белых и $\mu < M$ черных шаров ($\nu + \mu = K$)?

Считая вероятность извлечения любого сочетания K шаров одинаковой, получаем, что общее число всех представляющихся здесь равновероятных возможностей равно $C_{N+M}^K = \frac{(N+M)!}{K!(N+M-K)!}$. При этом ν белых шаров

из всего количества N белых шаров может быть образовано $C_N^v = \frac{N!}{v!(N-v)!}$ способами, а μ черных шаров из M черных шаров — $C_M^\mu = \frac{M!}{\mu!(M-\mu)!}$ способами. Следовательно, число всех равновероятных случаев извлечений из урны K шаров, среди которых содержится точно v белых и μ черных шаров, равно произведению $C_N^v \cdot C_M^\mu$. Поэтому искомая вероятность извлечения v белых и μ черных шаров равна

$$\frac{C_N^v \cdot C_M^\mu}{C_{N+M}^{v+\mu}} = \frac{N! M! (v+\mu)! (N+M-v-\mu)!}{(N+M)! v! \mu! (N-v)! (M-\mu)!}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Подбрасывается игральный кубик. Какова вероятность появления на верхней грани числа очков, равного одному из простых чисел?

2. Какова вероятность того, что при одновременном случайном извлечении двух карт из полной колоды 52 игральных карт обе они окажутся бубновой масти?

3. Подбрасываются два игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма чисел, выпавших на обоих кубиках очков, будет равна 4?

4. Симметричная монета подбрасывается $n = 6$ раз. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится решетка.

5. В одной из студенческих учебных групп 26 человек, из которых 5 студентов — отличники по математике, в другой группе 24 человека, из которых 6 студентов — отличники по математике. Какова вероятность того, что оба наудачу выбранные студенты, по одному из каждой группы, окажутся отличниками по математике?

§ 3. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ И ИСПЫТАНИЙ

5.11. Условные частоты событий. Вероятности событий, реализующихся как исходы некоторого испытания, будут, вообще говоря, изменяться вместе с изменением условий, характеризующих это испытание. В частности, к числу дополнительных условий испытания может относиться предположение о том, что определенное событие рассматриваемого поля вероятностей осуществилось. Тогда о вероятностях других событий поля, определяемых при условии, что некоторое определенное событие его осуществилось, говорят как об условных вероятностях. В противоположность этому первоначальные вероятности событий рассматриваемого поля называются безусловными вероятностями. Точное определение понятия условной вероятности будет далее (5.12) сформулировано на основе предварительного выяснения относящихся сюда свойств частот изучаемых событий.

Итак, пусть производится достаточно большое количество n раз испытание, в числе результатов которого возможно осуществление каких-либо двух событий A и B . Пусть собы-

тие B за все n испытаний в действительности осуществилось v раз, а именно при испытаниях с номерами

$$i_1, i_2, \dots, i_v. \quad (5.6)$$

Отношение $\frac{v}{n} = k_n(B)$ будет частотой осуществления события B за n испытаний. Далее, пусть для испытаний с номерами (5.6), т. е. для испытаний при условии осуществления события B , событие A реализуется μ раз, а именно при испытаниях с номерами

$$j_1, j_2, \dots, j_\mu. \quad (5.7)$$

Отношение $\frac{\mu}{v}$ будет представлять собой условную частоту осуществления события A , если учитывать только те испытания (5.6), при которых событие B уже произошло. Эту частоту события A при условии осуществления события B обозначим через $k_n(A/B)$. Имеем $k_n(A/B) = \frac{\mu}{v}$. Замечаем вместе с тем, что испытания с номерами (5.7), число которых равно μ , оказываются как раз теми испытаниями из общего числа всех n рассматриваемых испытаний, при которых одновременно осуществляются оба события A и B . Поэтому частота осуществления пересечения $A \cap B$ имеет величину $k_n(A \cap B) = \frac{\mu}{n}$. Ввиду равенства $\frac{\mu}{v} = \frac{\mu/n}{v/n}$ и учитывая найденные значения частот $k_n(B)$, $k_n(A/B)$ и $k_n(A \cap B)$, получаем

$$k_n(A/B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)}. \quad (5.8)$$

5.12. Определение условной вероятности. Частоты осуществления событий и их свойства служат прообразами соответствующих вероятностей и их свойств. Нижеследующее определение условной вероятности отражает свойство частот событий, выраженное формулой (5.8). Рассматривается некоторое поле вероятностей S .

Определение. Условной вероятностью $P(A/B)$ события $A \in S$ при условии осуществления события $B \in S$ называется отношение вероятности $P(A \cap B)$ пересечения этих событий $A \cap B$ к вероятности $P(B)$ события B :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (5.9)$$

Это определение имеет смысл только при $P(B) > 0$. Если $P(B) = 0$, то понятие условной вероятности относительно такого события B не вводится.

Пример. Рассматривается испытание с единственно возможными и несовместными исходами C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, вероятности которых заданы:

$P(C_1) = 0,1$; $P(C_2) = 0,2$; $P(C_3) = 0,3$; $P(C_4) = 0,4$. Поле событий S образовано событиями C_i и их объединениями. В частности, введем специальные обозначения для следующих объединений:

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 \cup C_2, & A_2 &= C_1 \cup C_3, & B_1 &= C_3 \cup C_4, \\ B_2 &= C_2 \cup C_4. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ясно, что $P(A_1) = 0,3$; $P(A_2) = 0,4$; $P(B_1) = 0,7$; $P(B_2) = 0,6$. Исходные события C_i можно, очевидно, представить как пересечения событий (5.10):

$$C_1 = A_1 \cap A_2, \quad C_2 = A_1 \cap B_2, \quad C_3 = B_1 \cap A_2, \quad C_4 = B_1 \cap B_2,$$

и поэтому вероятности участвующих здесь пересечений заданы, как вероятности событий C_i , $i=1, 2, 3, 4$. Применяя формулу (5.9), найдем следующие условные вероятности:

$$P(A_1/A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4};$$

$$P(A_1/B_2) = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}; \quad P(B_1/A_2) = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}; \quad P(B_1/B_2) = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}.$$

5.13. Условная вероятность как вероятность на поле S_B . Данное определение условных вероятностей само по себе еще не указывает на то, что эти вероятности удовлетворяют всем аксиомам, характеризующим понятие вероятности в смысле определения, изложенного в п⁰ 5.7. На самом деле это действительно так, если условные вероятности рассматривать как заданные на поле событий S_B , образованном всеми пересечениями $A \cap B$, где $A \in S$ пробегает все события поля S , а B — данное определенное событие того же поля S . Проверка этого предоставляется читателю в качестве упражнения.

Итак, условную вероятность $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$ можно рассматривать как вероятность, заданную на поле событий S_B . Это обстоятельство позволяет, во-первых, все общие свойства, устанавливаемые для вероятностей событий произвольного поля S , автоматически переносить на условные вероятности, рассматриваемые как вероятности событий поля S_B . Во-вторых, формула (5.9) теперь может рассматриваться как выражение связи между вероятностью $P(A/B)$, заданной на поле S_B , и вероятностью $P(A)$, заданной на поле S . Иными словами, вероятности $P(A/B)$ и $P(A)$ должны быть согласованы при помощи формулы (5.9).

Пример. В течение данного промежутка времени T может не более одного раза осуществиться некоторое событие A с вероятностью p . Событие, осуществление которого совпадает с осуществлением A в течение части t всего промежутка времени T , обозначается через A_t , причем для любого $t < T$ вероятность события A_t пропорциональна t : $P(A_t) = \frac{t}{T} p$. Пусть промежуток T разбит на две произвольные части t_1 и t_2 , так что $P(A_{t_1}) = \frac{t_1}{T} p$, $P(A_{t_2}) = \frac{t_2}{T} p$. Требуется найти условную вероятность того, что событие A осуществится в течение части t_2 , если известно, что оно не произошло в течение первой части t_1 .

Искомая условная вероятность $P(A_{t_2}/\bar{A}_{t_1})$ может быть вычислена при помощи формулы (5.9):

$$P(A_{t_2}/\bar{A}_{t_1}) = \frac{P(A_{t_2} \cap \bar{A}_{t_1})}{P(\bar{A}_{t_1})}.$$

Но, применяя распределительный закон из п^о 5.3, имеем

$$\begin{aligned} A_{t_2} &= A_{t_2} \cap (A_{t_1} \cup \bar{A}_{t_1}) = \\ &= (A_{t_2} \cap A_{t_1}) \cup (A_{t_2} \cap \bar{A}_{t_1}) = (A_{t_2} \cap \bar{A}_{t_1}), \end{aligned}$$

так как $A_{t_2} \cap A_{t_1} = V$ ввиду невозможности осуществления события A более одного раза. Поэтому

$$P(A_{t_2} \cap \bar{A}_{t_1}) = P(A_{t_2}) = \frac{t_2}{T} p.$$

Далее

$$P(\bar{A}_{t_1}) = 1 - P(A_{t_1}) = 1 - \frac{t_1}{T} p.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$P(A_{t_2}/\bar{A}_{t_1}) = \frac{\frac{t_2}{T} p}{1 - \frac{t_1}{T} p} = \frac{t_2 p}{T - t_1 p}.$$

В частности, пусть ожидается событие, которое может осуществиться не более одного раза в течение данной недели и имеющее вероятность $\frac{1}{14}$ произойти в каждый из семи дней недели. Какова вероятность осуществления этого события в оставшийся седьмой день недели, если известно, что оно не произошло за шесть предшествующих дней?

Здесь $p = 7 \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$, $T = 7$, $t_1 = 6$, $t_2 = 1$

и поэтому искомая условная вероятность равна

$$\frac{t_2 p}{T - t_1 p} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{7 - 6 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

5.14. Вероятность совмещения событий. Изложенные в п^о 5.13 соображения позволяют использовать формулу (5.9) для вычисления вероятности $P(A \cap B)$ одновременного осуществления двух событий A и B , если считать известной условную вероятность $P(A/B)$ события A при гипотезе B и безусловную вероятность $P(B)$ события B . Имеем

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (5.11)$$

Ясно, что можно поменять ролями A и B :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (5.12)$$

Пример 1. Вернемся к уже разобранному ранее примеру 4 из п^о 5.10. Речь идет о последовательном выборе наудачу двух цифр из первых пяти цифр 1, 2, 3, 4 и 5. Вопрос 3) состоит в вычислении вероятности того, что обе выбранные цифры окажутся четными (событие C). Видим, что $C = A \cap B$, где A

$$P(C/A \cap B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

Поэтому

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{5}{9} = \frac{11}{57}.$$

5.16. Независимость двух событий. Одним из самых важных, специфических для теории вероятностей понятий является понятие независимости событий и испытаний. Сначала формулируем определение этого понятия применительно к случаю двух событий.

Определение. Два события поля S $A \subset S$ и $B \in S$ называются взаимно независимыми (или независимыми), если выполняется равенство

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (5.14)$$

Из этого определения прежде всего видно, что если вероятность хотя бы одного из данных событий равна нулю, т. е. $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$, то такие события независимы, так как (5.14) в этом случае выполняется. Но если $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то сравнение (5.14) с формулами (5.11) и (5.12) показывает, что независимость событий A и B эквивалентна равенствам

$$P(A/B) = P(A); \quad P(B/A) = P(B). \quad (5.15)$$

Эти равенства выражают то обстоятельство, что гипотеза об осуществлении одного из данных событий не влияет на вероятность осуществления другого события. Именно это обстоятельство служит объяснением термина «независимость». Заметим, что наличие только одного из равенств (5.15) уже обеспечивает независимость [т. е. справедливость (5.14)] двух событий, так что справедливость другого из этих равенств будет обеспечена автоматически.

На практике признание двух событий независимыми обычно происходит в результате установления справедливости равенств (5.15), причем, как только что было замечено, достаточно проверить одно какое-либо из этих равенств.

5.17. Независимость n событий и испытаний. Понятие взаимной независимости произвольного числа n событий $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ обобщает изложенное определение независимости двух событий. А именно, по определению события $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ называются взаимно независимыми (или сокращенно независимыми), если выполняются равенства

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}) \quad (5.16)$$

для любого числа $k \leq n$ произвольных (различных) индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$, взятых среди индексов $1, 2, \dots, n$. Допустим теперь, что все вероятности $P(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ положительны. Тогда, как и в случае двух событий, сравнение равенств (5.16) с общей формулой (5.13) показывает, что независимость событий A_i эквивалентна тому, что каждая из условных вероятностей $P(A_i / A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ совпадает с соответствующей безусловной вероятностью $P(A_i)$, каковы бы ни были уже осуществившиеся другие события $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$:

$$P(A_i / A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq i_j. \quad (5.17)$$

Иными словами предположение об осуществлении каких бы то ни было событий $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ не влияет на вероятность осуществления любого другого события A_i .

Для независимых событий формула (5.13) переписывается в следующем виде:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n) \quad (5.18)$$

и выражает собой теорему умножения вероятностей для независимых событий.

Аналогичный смысл имеет понятие независимости (точнее — взаимной независимости) ряда испытаний. А именно, рассматривая некоторый ряд испытаний, будем называть их независимыми, если вероятности исходов каждого из этих испытаний сохраняют одни и те же постоянные значения вне зависимости от того, осуществились или нет те или иные исходы в любых других испытаниях.

Вероятность одновременного осуществления некоторых исходов в такого рода независимых испытаниях равна произведению вероятностей тех же исходов в соответствующих испытаниях. Таким образом, формула (5.18) распространяется на случай, когда входящие в нее события A_i представляют собой возможные исходы независимых испытаний.

Подробное исследование понятия независимости испытаний читатель найдет в полных курсах теории вероятностей.

5.18. Надежность механизмов и систем. В качестве примера применения теоремы умножения вероятностей рассмотрим вопрос о надежности какой-либо системы. Пусть речь идет о некотором механизме, состоящем из различного рода элементов $A_1, A_2, \dots, A_n$. Надежностью механизма будем называть вероятность исправного функционирования этого механизма в течение заданного отрезка времени. Предполагается, что механизм перестает быть исправным, если хотя бы один из составляющих его элементов A_i выходит из строя. Это значит, что механизм исправен только при одновременной

исправности всех без исключения его элементов A_i . Пусть далее известно, что вероятность выхода из строя элемента A_i в течение рассматриваемого отрезка времени равна q_i , так что вероятность нормального функционирования того же элемента равна $p_i = 1 - q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Предположим теперь, что возможные два исхода в работе элементов A_i (т. е. исправность или выход из строя), рассматриваемые как случайные события, независимы друг от друга в смысле данных выше определений. При таком предположении надежность всего механизма, т. е. вероятность p совместного осуществления всех событий, каждое из которых состоит в исправности соответствующего элемента A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, найдется по формуле (5.18)

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = \prod_{i=1}^n (1 - q_i).$$

В частности, если все $p_i = p = 1 - q$ одинаковые, то

$$p = (1 - q)^n.$$

Этот результат показывает, что даже при очень высоком качестве составляющих механизм элементов, а это находит выражение в том, что $q > 0$ мало, надежность p механизма в целом при сделанных предположениях не может быть значительной, если n велико, так как $p = (1 - q)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, сколь бы малым ни было данное $q > 0$.

В связи с большой и все возрастающей сложностью современных машин и механизмов, образованных зачастую из огромного количества n составляющих их элементов, задача нахождения путей и средств повышения надежности таких механизмов становится одной из важнейших конкретных технических и экономических проблем. В решении этой проблемы немалую роль призван сыграть и теоретико-вероятностный, статистический анализ вопросов, относящихся к надежности различных систем.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вероятность всхожести предназначенных к посеву семян ранна 0,98. Вероятность попадания семян на пригодный для произрастания данного растения участок почвы равна 0,96. Какой процент семян при посеве в этих условиях даст урожай?

2. Некоторое событие, осуществляющееся не более одного раза в месяц, имеет одинаковую вероятность $\frac{1}{40}$ произойти в каждый из 30 дней месяца. Найти вероятность осуществления этого события в оставшиеся 5 дней месяца, если оно не произошло за первые 25 дней.

3. В некоторой лотерее всего 1000 билетов, из которых 600 выигрышных. Найти вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если куплено 10 билетов?

§ 4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

5.19. Формула полной вероятности. Этот небольшой параграф посвящен простой, но важной формуле, называемой формулой полной вероятности. С ней тесно связана приводимая затем формула Байеса, известная также под именем формулы вероятностей гипотез.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместные события, $A_i \cap A_k = \emptyset$ для $i \neq k$, объединение которых достоверно: $\bigcup_{i=1}^n A_i = U$, а B — какое-либо из событий того же поля вероятностей, причем вероятности $P(A_i)$ для $i = 1, 2, \dots, n$ не равны нулю. Тогда справедлива следующая формула:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B/A_i). \quad (5.19)$$

Для доказательства замечаем, что любое событие B , принадлежащее тому же полю, в состав которого входят и события A_i , можно представить как объединение попарно несовместных событий $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_n$. Действительно, применяя распределительный закон (5.13), получим $B = B \cap U = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$. Так как события $(B \cap A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ попарно несовместны, а это вытекает из попарной несовместности событий A_i , то можно применить теорему сложения вероятностей:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i).$$

Равенство (5.19) получается отсюда заменой вероятностей $P(B \cap A_i)$ произведениями $P(A_i) \cdot P(B/A_i)$ (ф. (5.12)).

Формула (5.19) называется формулой полной вероятности.

Пример. Допустим, что некоторый прибор оформляется в трех вариантах, в зависимости от применения в качестве одного из его элементов либо элемента A_1 , либо элемента A_2 , либо элемента A_3 , причем назначение и способ функционирования прибора одни и те же в любом из указанных трех вариантов, но надежность его работы зависит от примененного элемента A_i , $i = 1, 2, 3$. Как и в примере предшествующего п. 5.18, надежностью здесь называется вероятность исправного функционирования прибора в течение данного времени. Известно, что надежность прибора в случае применения элемента A_1 равна 0,98; в случае применения элемента A_2 надежность равна 0,96 и в случае применения элемента A_3 надежность равна 0,92. Далее пусть известно, что 20% всех рассматриваемых приборов выпускается в варианте A_1 , 30% — в варианте A_2 и остальные 50% — в варианте A_3 . Требуется найти надежность работы наудачу взятого прибора такого рода.

Обозначим через B событие, состоящее в том, что выбранный прибор в течение заданного времени работает исправно. Задача состоит в вычислении вероятности этого события $P(B)$. Замечаем, что события $A_1, A_2,$

A_1 попарно несовместны и объединение их достоверно: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = U$. Поэтому можно воспользоваться формулой (5.19), в первую часть которой входят известные величины: $P(B|A_1) = 0,98$; $P(B|A_2) = 0,96$; $P(B|A_3) = 0,92$. Кроме того, можем считать ввиду выбора прибора наудачу, что

$$P(A_1) = 0,2; \quad P(A_2) = 0,3; \quad P(A_3) = 0,5.$$

Итак, искомая надежность

$$P(B) = 0,2 \cdot 0,98 + 0,3 \cdot 0,96 + 0,5 \cdot 0,92 = 0,944.$$

5.20. Формула Байеса. Допустим теперь дополнительно, что вероятность события B отлична от нуля: $P(B) > 0$.

По формулам (5.11) и (5.12) имеем

$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i) = P(B) \cdot P(A_i|B),$$

откуда

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}.$$

Заменяя здесь $P(B)$ по формуле полной вероятности (5.19), получим

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)}, \quad (5.20)$$

где i может принимать любое из значений $1, 2, \dots, n$.

Формула (5.20) называется формулой Байеса или также формулой вероятностей гипотез. Последнее название объясняется следующим образом. Осуществление события B возможно вместе с одним и только одним из событий A_i , вероятности $P(A_i)$ которых известны. Известны также условные вероятности $P(B|A_i)$ события B при предположении, что произошло событие A_i . Здесь события A_i выступают в качестве гипотетических возможностей, одна из которых должна в действительности сопровождать наступление события B . Формула (5.20) и дает вероятность того, что осуществилась гипотеза A_i , если известно, что событие B произошло.

Пример 1. Из двух данных урн случайно выбирается одна урна, так что вероятность выбора каждой из них равна $\frac{1}{2}$. Из выбранной таким

образом урны затем извлекается наудачу шар, который оказался белого цвета. При этом известно, что в первой урне содержалось 2 белых и 14 черных шаров, а во второй урне — 5 белых и 3 черных шаров, и никаких других шаров урны не содержали. Спрашивается, чему равны вероятности обеих гипотез, а именно, что шар извлекался из первой урны или, в противоположность этому, из второй урны?

Факт выбора первой урны примем за событие A_1 , а второй урны — за событие A_2 . Дано, что $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Извлечение шара белого цвета примем за событие B . Появление шара белого цвета из первой урны

имеет вероятность $P(B|A_1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, а появление шара белого цвета из второй урны имеет вероятность $P(B|A_2) = \frac{5}{8}$. По формуле полной вероятности (5.19) сначала находим вероятность появления белого шара $P(B)$:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

Далее по формуле Байеса находятся вероятности обеих гипотез:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6},$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{6}.$$

Интуитивно ясно, что если извлеченный шар оказался белым, то гораздо более вероятно, что извлечение на самом деле происходило из второй урны, где белых шаров много, чем из первой урны, где белых шаров мало. Эта качественная оценка приобрела точную количественную форму в только что найденных вероятностях гипотез

$$P(A_1/B) = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad P(A_2/B) = \frac{5}{6}.$$

Пример 2. Вернемся к примеру, рассмотренному в предыдущем п^о 5.19. Допустим, что выбранный наудачу прибор в действительности оказался исправным в течение всего назначенного времени. Как эта информация должна отразиться на вероятностях того, что прибор был оформлен в каждом из трех возможных вариантов?

Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся формулой Байеса (5.20). Была найдена вероятность $P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(B|A_i)$, стоящая в знаменателе правой части формулы (5.20), а именно: $P(B) = 0,944$. Поэтому находим

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0,2 \cdot 0,98}{0,944} = 0,208;$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0,3 \cdot 0,96}{0,944} = 0,305;$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0,5 \cdot 0,92}{0,944} = 0,487.$$

Для вычисления условных вероятностей $P(A_i/B)$ по формуле Байеса надо знать вероятности $P(A_i)$ без предположения, что событие B осуществилось, но обычно в действительных встречающихся задачах эти вероятности $P(A_i)$ редко бывают

известны. Поэтому практическое значение формул Байеса сравнительно ограничено.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Некоторое изделие может поступить для обработки в случайном порядке на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,3$ и $p_3 = 0,5$. При обработке на первом станке вероятность брака равна 0,02, на втором станке — 0,03 и на третьем станке — 0,05. Найти вероятность того, что поступившее в цех изделие после обработки окажется удовлетворяющим техническим условиям.

2. Пусть стало известно, что изделие в условиях предыдущего вопроса после обработки оказалось бракованным. Чему равны вероятности гипотез, т. е. вероятности того, что изделие фактически обрабатывалось на первом станке, на втором станке или на третьем станке?

§ 5. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

5.21. Определение и примеры. Ранее уже было отмечено, что закономерности теории вероятностей проявляются для реальных событий при многократном повторении соответствующих испытаний. Поэтому, а также и по другим причинам одной из важнейших задач теории вероятностей является исследование последовательностей различного рода экспериментов со случайными исходами. Одной из простейших, относящихся сюда схем является схема Бернулли (1654—1705). Так называется последовательность взаимно независимых испытаний, в каждом из которых возможно осуществление некоторого события A с постоянной, независимой от номера испытания вероятностью $p = P(A)$. В качестве альтернативного исхода в каждом из испытаний выступает противоположное событие $\bar{A}$ с вероятностью $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

Пример 1. Подбрасывается монета, и событие A состоит в выпадении на верхней стороне монеты герба; противоположное событие $\bar{A}$ — выпадение решетки. Естественно считать, что исходы последовательных подбрасываний независимы друг от друга. При допущении полной симметрии монеты вероятности $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$. Поэтому в процессе последовательного подбрасывания монеты реализуется схема Бернулли с $p = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Аналогично строится пример схемы Бернулли с вероятностью $p \neq \frac{1}{2}$. Для этого вместо монеты возьмем игральный кубик. Если за событие A принять выпадение на верхней грани кубика числа «1», то $p = P(A) = \frac{1}{6}$.

Пример 3. Пусть урна содержит m белых и n черных шаров. Процесс последовательного извлечения наудачу шаров, если после каждого извлечения шара он снова возвращается в урну и все шары тщательно переме-

шаются, а за событие A принимается появление шара белого цвета, образует схему Бернулли с вероятностью $p = \frac{m}{n+m}$ и $q = \frac{n}{n+m}$.

Пример 4. Схема Бернулли возникает также и тогда, когда речь идет о новорожденных младенцах, а событие A состоит в том, что младенец оказывается, например, мужского пола. Обширные и многолетние статистические наблюдения указывают, что вероятность $p = P(A)$ постоянна и приблизительно равна 0,51, а также что рассматриваемые события взаимно независимы.

5.22. Число осуществлений события за n испытаний. Обозначим через μ число осуществлений события A , если производятся n испытаний, связанных по схеме Бернулли. Численное значение величины μ заранее, до производства испытаний, не определено; после выполнения испытаний величина μ становится определенной и может оказаться равной одному из чисел: 0, 1, 2, ..., m , ..., n . Вывод основной для схемы Бернулли формулы (5.21) удобно расчленить и представить в виде следующих вопросов:

1) Найти вероятность осуществления события A во всех n последовательных испытаниях, образующих схему Бернулли, сразу. Здесь надо найти вероятность $P\{\mu = n\}$ того, что $\mu = n$. Так как для каждого отдельного из независимых испытаний $P(A) = p$, то по теореме умножения вероятностей искомая вероятность равна $P\{\mu = n\} = p^n$.

Аналогично, вероятность того, что A не осуществится за n испытаний ни одного раза, т. е. вероятность события $\{\mu = 0\}$, равна $P\{\mu = 0\} = (1 - p)^n = q^n$.

2) Найти вероятность того, что событие A за n испытаний, связанных по схеме Бернулли, осуществится хотя бы один раз.

Здесь надо найти вероятность $P\{\mu \geq 1\}$ события, состоящего в том, что осуществится неравенство $\mu \geq 1$. Противоположным ему будет событие $\mu = 0$. Поэтому, учитывая ответ для предыдущей задачи 1), находим искомую вероятность

$$P\{\mu \geq 1\} = 1 - P\{\mu = 0\} = 1 - (1 - p)^n = 1 - q^n.$$

3) Найти вероятность того, что событие A за n первых испытаний по схеме Бернулли осуществится при испытаниях с номерами $n_1, n_2, \dots, n_m$, $m \leq n$, и не осуществится для остальных $(n - m)$ испытаний.

Здесь требуется найти вероятность совмещения n независимых событий, из которых m определенных событий A имеют вероятность p , а остальные $(n - m)$ событий A имеют вероятность $q = 1 - p$. По теореме умножения вероятностей находим ответ: $p^m q^{n-m}$. Обратим внимание на то, что полученный ответ зависит только от числа m назначенных номеров испытаний $n_1, n_2, \dots, n_m$, а не от самих этих номеров.

4) Найти вероятность осуществления события A за n испытаний по схеме Бернулли ровно m раз.

Здесь требуется определить вероятность события, что $\mu = m$. Отличие от предыдущего вопроса 3) состоит в том, что номера m испытаний, в которых реализуется событие A , не назначены заранее, а могут быть произвольными. Поэтому речь идет о вычислении вероятности того, что A осуществляется хотя бы в одной какой-либо комбинации испытаний с произвольными номерами $n_1, n_2, \dots, n_m$. Число таких комбинаций, попарно исключающих одна другую, равно числу сочетаний C_n^m из n элементов по m элементов в каждом сочетании. Поэтому, применяя теорему сложения вероятностей и учитывая ответ для вопроса 3), получим что

$$P\{\mu = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (5.21)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассматривается $n=8$ испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха (т. е. осуществления события A) в отдельном испытании $p=0.9$. Найти: 1) вероятность осуществления A за все 8 испытаний; 2) вероятность хотя бы однократного неуспеха за те же 8 испытаний; 3) вероятность одновременного успеха только при испытаниях первом, третьем, шестом и седьмом; 4) вероятность успеха ровно 4 раза.

§ 6. ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

5.23. Локальная форма теоремы Лапласа. Для больших значений n и m правая часть формулы (5.21) допускает удобное приближенное выражение, относительноная ошибка которого становится сколь угодно малой, если n и m достаточно велики, и называемое по этой причине асимптотическим. Это асимптотическое выражение вероятности $P\{\mu = m\}$ составляет содержание излагаемой далее локальной теоремы Лапласа (1749 — 1827). Речь идет о правой части равенства (5.21) при предположении, что число n испытаний, связанных по схеме Бернулли, может быть сколь угодно большим. При этом рассматриваются только такие значения m , которые удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \right| \leq T, \quad (5.22)$$

где T — произвольное, хотя и сколь угодно большое число, но независимое от n .

Теорему Лапласа сформулируем в следующем виде.

Теорема Лапласа (локальная форма). Пусть $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ — данные произвольные положительные числа. Вероятность $P\{\mu = m\}$ того, что число осуществлений μ

некоторого события в серии n испытаний по схеме Бернулли окажется равным одному из данных целых чисел m , удовлетворяющих условию $\left| \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \right| \leq T$, имеет выражение

$$P\{\mu = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{t_{m,n}^2}{2}} (1 + a_{m,n}), \quad (5.23)$$

где $|a_{m,n}| < e$, $t_{m,n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, лишь бы только число испытаний n было достаточно большим.

Доказательство теоремы Лапласа читатель найдет в более полных курсах теории вероятностей.

Пример. Возьмем серию из $n = 1000$ подбрасываний вполне симметричной монеты, так что вероятность p появления герба каждый раз принимается равной $\frac{1}{2}$, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Требуется найти вероятность того, что число появлений герба будет точно равно $m = 500$. В данном случае

$$t_{m,n} = \frac{500 - 1000 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{4}}} = 0 \text{ и поэтому, пользуясь формулой (5.23) и считая}$$

(приближенно) $a_{m,n} = 0$, найдем

$$P\{\mu = 500\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 1000 \cdot \frac{1}{4}}} \sim 0,02523.$$

5.24. Интегральная форма теоремы Лапласа. Найденное значение вероятности $P\{\mu = 500\} \simeq 0,02523$ оказалось сравнительно небольшим, как и следовало ожидать в связи с тем, что речь здесь идет о точном совпадении μ с вполне определенным, заранее назначенным числом $m = 500$. Однако вероятность совпадения μ с каким-либо из чисел m , заключенных между двумя данными границами, вообще уже не будет малой, сколь бы большим ни было число испытаний n . Имеется в виду, таким образом, вычисление вероятности $P\{m' \leq \mu \leq m''\}$ того, что μ окажется равным какому-либо из целых чисел, заключенных между m' и m'' . При этом границы m' и m'' предполагаются определенным образом связанными с n , а именно:

$$m' = np + t' \sqrt{npq}, \quad m'' = np + t'' \sqrt{npq};$$

здесь t' и t'' — некоторые произвольные вещественные числа, $t' < t''$, которые не зависят от n .

Вероятность $P\{m' \leq \mu \leq m''\}$ по теореме сложения вероятностей равна сумме

$$\sum_{m' \leq m \leq m''} P\{\mu = m\}, \quad (5.24)$$

где суммирование распространено на все целые m , принадлежащие отрезку $[m', m'']$. Отвечающие им значения $t_{m, n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ заключены между $t' = \frac{m' - np}{\sqrt{npq}}$ и $t'' = \frac{m'' - np}{\sqrt{npq}}$: $t' \leq t_{m, n} \leq t''$.

Поэтому для всех рассматриваемых значений m $|t_{m, n}| \leq T$, где через T обозначено наибольшее из двух чисел $|t'|$ и $|t''|$, T не зависит от n . Это значит, что для каждого слагаемого $P\{\mu = m\}$ суммы (5.24) справедлива формула (5.23), применяя которую получим

$$P\{m' \leq \mu \leq m''\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m' \leq m \leq m''} e^{-\frac{t_{m, n}^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} (1 + \alpha_{m, n}). \quad (5.25)$$

Суммирование по m , как это объяснено выше, эквивалентно суммированию по всем значениям $t_{m, n}$ из отрезка $[t', t'']$. Кроме того, неравенство $m' \leq \mu \leq m''$ равносильно неравенству $t' \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq t''$. Наконец, разность $\Delta t_{m, n} = t_{m+1, n} - t_{m, n}$ равна $\frac{m+1 - np}{\sqrt{npq}} - \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$. Поэтому (5.25) можно переписать следующим образом:

$$P\left\{t' < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < t''\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t' < t_{m, n} < t''} e^{-\frac{t_{m, n}^2}{2}} \cdot \Delta t_{m, n} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t' < t_{m, n} < t''} e^{-\frac{t_{m, n}^2}{2}} \Delta t_{m, n} \cdot \alpha_{m, n}. \quad (5.26)$$

Участвующая в этом равенстве сумма $\sum_{t' < t_{m, n} < t''} e^{-\frac{t_{m, n}^2}{2}} \Delta t_{m, n}$ представляет собой интегральную сумму (сумма Римана) для интеграла $\int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t' < t_{m, n} < t''} e^{-\frac{t_{m, n}^2}{2}} \Delta t_{m, n} = \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Далее $|z_{m,n}| < \varepsilon$ для всех рассматриваемых значений m при $n \rightarrow \infty$ сколь бы малым ни было $\varepsilon > 0$. Следовательно, правая часть (5.26) в пределе при $n \rightarrow \infty$ перейдет в $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема Лапласа (интегральная форма). Пусть t' и t'' $t' < t''$ — данные произвольные вещественные числа. Вероятность $P \left\{ t' < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < t'' \right\}$ того, что число осуществлений x некоторого события в серии n испытаний по схеме Бернулли окажется равным какому-либо из чисел m , удовлетворяющих неравенствам $t' < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < t''$, имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ t' < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < t'' \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (5.27)$$

5.25. Функция $\Phi(x)$ и таблица ее значений. Хотя формула (5.27) имеет предельный характер, когда $n \rightarrow \infty$, по точность, даваемая ею, оказывается практически уже вполне достаточной, если npq достигает нескольких десятков. В дальнейшем будем при указанных значениях n пользоваться формулой (5.27) как точной, не обращая внимания на возможную малую ошибку.

Вычисление интеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ удобно производить по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t'') - \Phi(t'),$$

где через

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

обозначена функция, называемая нормальной функцией распределения вероятностей. Значения функции $\Phi(t)$ табулированы, соответствующие подробные таблицы имеются в качестве добавлений ко многим полным курсам теории вероятностей. Зачастую бывают достаточны, однако, и менее подробные таблицы, образец одной из которых следует далее.

Краткая таблица значений функции $\Phi(t)$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,0	0,50000	1,5	0,93319	3,0	0,99865
0,1	0,53983	1,6	0,94520	3,1	0,99903
0,2	0,57926	1,7	0,95544	3,2	0,99931
0,3	0,61791	1,8	0,96407	3,3	0,99952
0,4	0,65542	1,9	0,97128	3,4	0,99966
0,5	0,69146	2,0	0,97725	3,5	0,99977
0,6	0,72575	2,1	0,98214	3,6	0,99984
0,7	0,75804	2,2	0,98610	3,7	0,99989
0,8	0,78815	2,3	0,98928	3,8	0,99993
0,9	0,81594	2,4	0,99180	3,9	0,99995
1,0	0,84135	2,5	0,99379	4,0	0,99997
1,1	0,86433	2,6	0,99534	4,1	0,99998
1,2	0,88493	2,7	0,99653	4,2	0,99999
1,3	0,90320	2,8	0,99745	4,3	0,99999
1,4	0,91924	2,9	0,99813		

Укажем, что

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \quad (5.28)$$

Это можно понять, исходя из формулы (5.27); p с вероятностью 1 при любом n должно принимать одно какое-либо из значений $m = 0, 1, 2, \dots, n$, т. е. $P\left\{t' \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq t''\right\} \rightarrow 1$, если $t' \rightarrow -\infty$ и $t'' \rightarrow +\infty$. На несложном аккуратном вычислении возникающего здесь двойного предела мы останавливаться не будем. Простые, чисто аналитические доказательства равенства (5.28) обычно излагаются в курсах математического анализа.

Далее, из определения $\Phi(t)$ ясно, что $\Phi(-t) + \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$. Это дает возможность использовать приведенную таблицу значений функции $\Phi(t)$, в которой фигурируют только положительные значения аргумента t .

также и в том случае, если t отрицательно. Для этого применяется равенство

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t). \quad (5.29)$$

5.26. Вычисления вероятностей по теореме Лапласа. Пример 1. Симметричная монета подбрасывается $n = 400$ раз. Найти вероятность того, что число μ выпадений герба будет лежать в пределах от $m_1 = 194$ до $m_2 = 208$.

Здесь $p = q = \frac{1}{2}$, $npq = 400 \cdot \frac{1}{4} = 100$,

$$t' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{194 - 200}{10} = -0,6;$$

$$t'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{208 - 200}{10} = 0,8.$$

По формулам (5.27) и (5.29) имеем

$$\begin{aligned} P\{194 < \mu < 208\} &= P\left\{-0,6 < \frac{\mu - 200}{10} < 0,8\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0,6}^{0,8} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(0,8) - \Phi(-0,6) = \Phi(0,8) + \Phi(0,6) - 1. \end{aligned}$$

В таблице значений $\Phi(t)$ находим, что

$$\Phi(0,8) = 0,78815; \quad \Phi(0,6) = 0,72575.$$

Поэтому искомая вероятность

$$P\{194 < \mu < 208\} = 0,78815 + 0,72575 - 1 = 0,51390.$$

Пример 2. Рассматривается серия из $n = 169$ испытаний по схеме Бернулли с вероятностью осуществления данного события A в каждом испытании $p = \frac{9}{13}$. Требуется указать границы возможных отклонений (одинаковых) в обе стороны числа осуществлений μ события A от значения $np = 169 \cdot \frac{9}{13} = 117$, внутри которых μ будет заключаться с вероятностью $p = 0,9$.

В данном случае требуется найти такое значение m' , чтобы вероятность $P\{np - m' \leq \mu \leq np + m'\}$ была равна 0,9. Прежде всего находим $npq = 169 \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{4}{13} = 36$, $\sqrt{npq} = \sqrt{36} = 6$. Далее полагая $t' = \frac{m'}{\sqrt{npq}} = \frac{m'}{6}$, видим, что t' должно удовлетворять равенству

$$P\left\{-t' \leq \frac{\mu - 117}{6} \leq t'\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t'}^{t'} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0,9.$$

Но $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t'}^{t'} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi(t') - 1$, а потому должно быть: $2\Phi(t') - 1 = 0,9$,

откуда $\Phi(t') = 0,95$. В таблице значений $\Phi(t)$ находим, что ближайшим оказывается значение $t' = 1,6$. Это значит, что $m' \approx 1,6 \cdot 6 \approx 10$. Таким образом, с вероятностью $p = 0,9$ число осуществлений события A при $n = 169$ будет заключено в пределах от $117 - 10 = 107$ до $117 + 10 = 127$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Производится $n = 200$ испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха в отдельном испытании $p = \frac{1}{4}$. Чему равна вероятность того, что число μ всех успехов равно $m = 50$?

2. В условиях предыдущего вопроса найти вероятность того, что число успехов μ будет лежать в пределах от $m_1 = 30$ до $m_2 = 70$.

3. Производится $n = 300$ испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха в отдельном испытании $p = \frac{1}{3}$. При каком значении T вероятность осуществления неравенства $|\mu - 100| < T$ будет равна 0,98?

§ 7. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

5.27. Закон больших чисел. В обеих формах теоремы Лапласа — локальной и интегральной — высказываются утверждения о поведении вероятностей некоторых событий, связанных со схемой Бернулли, в пределе, когда $n \rightarrow \infty$. Два других утверждения о вероятностях в схеме Бернулли, носящих аналогичный предельный характер, когда $n \rightarrow \infty$, составляют содержание излагаемых далее закона больших чисел и теоремы Пуассона (1781—1840).

Закон больших чисел применительно к схеме Бернулли представляет собой теорему, утверждение которой говорит о том, что дробь $\frac{\mu}{n}$, где μ — число осуществлений рассматриваемого события A за n испытаний, почти достоверно должна быть близка к вероятности $p = P(A)$ события A . Точная формулировка гласит следующее.

Закон больших чисел для схемы Бернулли. Пусть $\varepsilon > 0$ — данное произвольное положительное число. Вероятность $P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\}$ того, что число осуществлений μ некоторого события A в схеме Бернулли за n испытаний удовлетворяет неравенству $\left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq \varepsilon$, где p — вероятность события A , стремится при $n \rightarrow \infty$ к 1:

$$P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.30)$$

Доказательство может быть основано на интегральной форме теоремы Лапласа (5.27). Обозначим через $\delta > 0$ произвольное (сколь угодно малое) положительное число. Ввиду равенства (5.28) можно найти такое число t' , что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t'}^{t'} e^{-\frac{u^2}{2}} du > 1 - \delta. \quad (5.31)$$

Далее пусть n столь велико, что $\varepsilon \sqrt{n} > t' \sqrt{pq}$, тогда $\varepsilon n > t' \sqrt{npq}$. Для указанных n

$$\begin{aligned} P\{-\varepsilon n \leq \mu - np \leq \varepsilon n\} &> \\ &\geq P\{-t' \sqrt{npq} \leq \mu - np \leq t' \sqrt{npq}\}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

так как отрезок $[-t' \sqrt{npq}, t' \sqrt{npq}]$ целиком содержится внутри отрезка $[-\varepsilon n, \varepsilon n]$. По теореме Лапласа (5.27), кроме того, для достаточно больших значений n должно быть выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |P\{-t' \sqrt{npq} \leq \mu - np \leq t' \sqrt{npq}\} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t'}^{t'} e^{-\frac{u^2}{2}} du| < \delta. \end{aligned}$$

Поэтому из (5.32) следует, что

$$P\{-\varepsilon n \leq \mu - np \leq \varepsilon n\} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t'}^{t'} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \delta,$$

и, учитывая (5.31), найдем, наконец:

$$P\{-\varepsilon n \leq \mu - np \leq \varepsilon n\} \geq 1 - 2\delta.$$

Это неравенство, как было отмечено, должно выполняться для всех достаточно больших значений n , а δ — любое положительное число. Поэтому $P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, так как неравенство $\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ эквивалентно неравенствам $-\varepsilon n \leq \mu - np \leq \varepsilon n$.

Полезно отметить, что доказанная теорема, содержанием которой служит предельное равенство (5.30), может быть выражена немного иначе: каково бы ни было положительное число $\varepsilon > 0$, имеет место соотношение

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Справедливость сказанного усматривается из того, что одно из двух несовместных неравенств $\left| \frac{\mu}{n} - p \right| \leq \varepsilon$ или $\left| \frac{\mu}{n} - p \right| > \varepsilon$ обязательно должно быть выполнено, а потому

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} + P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} = 1.$$

Закон больших чисел в форме (5.30) является свойством математической модели последовательности одинаковых и в совокупности независимых случайных испытаний. Равенство (5.30) отражает экспериментально наблюдаемый факт устойчивости частот, который послужил основанием для введения самого понятия вероятности, как это изложено выше в п⁰ 5.7. Доказанная справедливость закона больших чисел служит, таким образом, одним из подтверждений целесообразности построенной в п⁰ 5.7 математической модели вероятностей, подтверждением пригодности ее для описания случайных событий и поведения их частот.

На практике для вычисления вероятностей $P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\}$ при больших n удобно пользоваться формулой Лапласа (5.27).

Пример. Рассматривается серия n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью $p = \frac{1}{5}$. Как велико должно быть n , чтобы отклонение дроби $\frac{\mu}{n}$ от $\frac{1}{5}$ с вероятностью 0,98 не превышало $\frac{1}{20}$?

$$\text{В данном примере } \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{2}{5}.$$

По теореме Лапласа

$$\begin{aligned} P\left\{-t' \frac{2}{5} \sqrt{n} < \mu - \frac{n}{5} < t' \frac{2}{5} \sqrt{n}\right\} &\approx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t'}^{t'} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi(t') - 1. \end{aligned}$$

Так как должно быть $2\Phi(t') - 1 = 0,98$, то $\Phi(t') = 0,99$. Находим в таблице соответствующее (ближайшее) значение $t' = 2,3$ (в действительности t' немного больше). Требуется выполнение неравенства $\left|\frac{\mu}{n} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{20}$, эквивалентного неравенствам $-\frac{n}{20} < \mu - \frac{n}{5} < \frac{n}{20}$, которые примут вид не-

равенств, участвующих в теореме Лапласа, если положить $\frac{n}{20} = t' \frac{2}{5} \sqrt{n}$, откуда и находится искомое число $n = 64 (t')^2 \approx 340$.

5.28. Предельная формула Пуассона. Содержанием теоремы Пуассона служит приближенное выражение вероятности $P(\mu = m)$ в том случае, когда число испытаний n велико, а вероятность $p = P(A)$ осуществления рассматриваемого события A в каждом из отдельных испытаний, напротив, мала, так что произведение этих чисел pn оказывается равным некоторому данному числу λ , не зависящему от n . Другими словами, это означает, что в каждой из рассматриваемых серий из n испытаний по схеме Бернулли вероятность p наблюдаемого события A хотя и не меняется от испытания к испытанию, т. е. постоянна в пределах данных n испытаний, но зависит от n , а именно $p = \frac{\lambda}{n}$. Таким образом, вместо бесконечной последовательности взаимно независимых испытаний с постоянной вероятностью осуществления некоторого события A теперь подлежит изучению последовательность серий испытаний, причем в каждой из таких серий испытания взаимно независимы, а вероятность p появления наблюдаемого события в пределах каждой серии сохраняет одно и то же значение $p = \frac{\lambda}{n}$, где n — число испытаний в данной серии. Справедлива следующая теорема.

Теорема Пуассона. Если в серии из n взаимно независимых испытаний вероятность осуществления некоторого события для каждого отдельного испытания равна $\frac{\lambda}{n}$, а число осуществлений его в пределах такой серии обозначено через μ , то

$$P(\mu = m) \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.33)$$

где $\lambda > 0$ — данное, не зависящее от n число.

Доказательство сформулированной теоремы выполняется очень просто, если основываться на асимптотической формуле Стирлинга. Эта формула предназначена для приближенного вычисления $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ и может быть записана в следующем виде:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n), \text{ где } 0 < \varepsilon_n < \frac{1}{12n}.$$

В частности, из написанного равенства вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon_n) = 1.$$

Речь идет о вычислении предела выражения $P(\mu = m) = \frac{p^m q^{n-m} n!}{m! (n-m)!}$ при $n \rightarrow \infty$, если $p = \frac{\lambda}{n}$ и m — данное постоян-

ное число. Заменим в этом выражении $n!$ и $(n-m)!$ по формуле Стирлинга. Получим

$$P\{\mu = m\} = \frac{p^m (1-p)^{n-m} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + \varepsilon_n)}{m! (n-m)^{n-m} e^{-(n-m)} \sqrt{2\pi(n-m)} (1 + \varepsilon_{n-m})} =$$

$$= \frac{(pn)^m (1-p)^{n-m} \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m} \frac{1}{e^m} \sqrt{\frac{n}{n-m}} \cdot \frac{1 + \varepsilon_n}{1 + \varepsilon_{n-m}}}{m!}.$$

При $n \rightarrow \infty$ здесь будет

$$(1-p)^{n-m} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \rightarrow e^{-\lambda}; \quad \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m} = \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{m-n} \rightarrow e^m,$$

$$\sqrt{\frac{n}{n-m}} \rightarrow 1, \quad \frac{1 + \varepsilon_n}{1 + \varepsilon_{n-m}} \rightarrow 1$$

и поэтому

$$P\{\mu = m\} \rightarrow \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

что и требовалось доказать.

Пример. Пусть в результате некоторого испытания возможность осуществления данного события A характеризуется вероятностью $p = 0,001$, т. е. в среднем на каждую тысячу испытаний событие A осуществляется только один раз. Выполняется $n = 2000$ таких взаимно независимых испытаний. Какова вероятность того, что число осуществлений μ события A будет равно $m=0$ (т. е. не произойдет ни разу), а также, что $m=1$, $m=2$ или $m=3$?

В данном случае $p = 0,001$ мало, а $n = 2000$ велико и $\lambda = pn = 2$. Применяем формулу Пуассона (5.33)

$$P\{\mu = 0\} \simeq \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} = 0,135 \quad (0! = 1);$$

$$P\{\mu = 1\} \simeq \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 2e^{-2} = 0,271;$$

$$P\{\mu = 2\} \simeq \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2e^{-2} = 0,271;$$

$$P\{\mu = 3\} \simeq \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{4}{3} e^{-2} = 0,180.$$

Формула Пуассона (5.33), как показывают статистические наблюдения, хорошо оправдывается на практике. Она находит применения в теории систем связи, в теории надежности и вообще при расчете вероятностей редких событий (т. е. событий с малыми вероятностями p), в частности, и при расчете вероятностей различного рода несчастных случаев.

Теорема Лапласа в обеих ее формах (5.23) и (5.27), закон больших чисел (5.30) и теорема Пуассона (5.33) представляют

собой простейшие случаи предельных теорем, называемых так по той причине, что указываемые ими закономерности выполняются в пределе, когда $n \rightarrow \infty$. Исторически они были отправными точками чрезвычайно важного направления исследований в теории вероятностей, целью которого было общее изучение такого рода предельных закономерностей, и которое не может считаться вполне завершенным и в наши дни.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Производится серия n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха в отдельном испытании $p = 0,4$. 1) При каком значении n с вероятностью 0,99 можно гарантировать осуществление неравенства $\left| \frac{\mu}{n} - 0,4 \right| < 0,05$?

2) Какова вероятность осуществления неравенства $|\mu - 40| < 5$, если число испытаний $n = 100$? 3) Каковы возможные отклонения (в обе стороны) числа успехов μ от $n p = 40$, которые могут быть гарантированы с вероятностью 0,92, если число испытаний $n = 200$?

2. В партии из $N = 1000$ изделий имеется 8 бракованных изделий. Из этой партии выбирается наудачу $n = 100$ изделий. Какова вероятность того, что среди выбранных изделий: 1) нет брака, 2) точно одно бракованное изделие, 3) точно два бракованных изделия?

§ 8. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

5.29. Понятие случайной величины. Вместе с понятиями события и его вероятности третьим основным понятием теории вероятностей является понятие случайной величины. Так называется переменная величина, принимающая свои значения в зависимости от случая. Поясним понятие случайной величины примерами.

1) Обозначим через X число очков, выпадающее на верхней грани игральной кости. X — случайная величина, возможные значения которой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 принимаются ею в зависимости от результата испытания — метания игральной кости.

2) В п° 5.22 рассматривалась переменная величина μ — число осуществления события A в n испытаниях по схеме Бернулли. Это случайная величина, принимающая в зависимости от случая возможные значения 0, 1, 2, ..., n .

3) Пусть X обозначает рост наудачу выбранного студента. Здесь возможными значениями величины X будут все числа, заключенные между некоторыми двумя определенными границами a и b . Действительно, практически можно исключить как невозможные значения роста меньшие, чем 1 м, и большие, чем 2,5 м.

4) Пусть α обозначает угол между большой стрелкой случайно остановившихся часов и горизонтальным направлением. Тогда $X = \lg \alpha$ будет случайной величиной, способной принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Случайные величины принято обозначать либо малыми греческими буквами $\xi, \eta, \dots$ и т. д., либо большими латинскими буквами $X, Y, \dots$ и т. д.

5.30. Распределение вероятностей случайной величины. Наиболее важной характеристикой случайной величины служит распределение вероятностей этой величины. Дело в том, что случайная величина принимает те или иные из своих значений, вообще говоря, с различными вероятностями.

Распределение вероятностей случайной величины задается совокупностью ее допустимых значений и вероятностей, с которыми принимаются эти значения, или, возможно, некоторые множества этих значений.

Для большей отчетливости изложения удобно выделить два основных типа случайных величин — дискретные величины и непрерывные величины. Дискретная случайная величина X выделяется тем свойством, что каждое из ее возможных значений x обладает окрестностью, уже не содержащей ни одного из других значений той же величины. Все значения x такого рода случайной величины X могут быть перенумерованы

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$$

Чтобы иметь распределение вероятностей дискретной случайной величины X , надо знать вероятности $P\{X = x_m\} = p_m$ каждого из ее значений x_m . Например, распределение вероятностей числа μ осуществлений события A в n испытаниях по схеме Бернулли определяется формулой (5.21). Ясно, что всегда должно быть $\sum_m p_m = 1$, где суммирование ведется по всем возможным значениям m .

Совокупность значений непрерывной случайной величины X целиком заполняет некоторый промежуток (a, b) числовой оси, который может быть конечным или бесконечным.

Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X задается функцией $F(x) = P\{X < x\}$, равной вероятности события $\{X < x\}$, состоящего в том, что рассматриваемая случайная величина X принимает какое-либо из своих значений, меньших данного числа x . Функция $F(x)$ называется функцией распределения вероятностей величины X . При помощи функции $F(x)$ находится, в частности, вероятность того, что X принимает какое-либо из значений, принадлежащих любому промежутку числовой оси. А именно:

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Действительно, событие $\{X < x_2\}$ представляет собой объединение двух несовместных событий $\{X < x_1\}$ и $\{x_1 \leq X < x_2\}$; следовательно, по теореме сложения вероятностей

$$P\{X < x_2\} = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \leq X < x_2\},$$

откуда

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = P\{X < x_2\} - P\{X < x_1\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Вероятность события $\{X < x\}$ не может уменьшаться, если x увеличивается, так как событие $\{X < x\}$ представляет собой частный случай события $\{X < x'\}$ при $x < x'$. Это значит, что $F(x)$ — неубывающая функция, причем

$$F(-\infty) = \lim_{L \rightarrow -\infty} F(L) = 0, \quad F(\infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1,$$

что выражает стремление к 0 вероятности события $\{X < L\}$ при $L \rightarrow -\infty$ и соответственно стремление к 1 вероятности события $\{X < N\}$ при $N \rightarrow +\infty$.

Понятие функции распределения $F(x)$ применимо и к дискретно распределенным случайным величинам X . В этом случае

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_m < x} p_m,$$

где суммирование выполняется по всем тем индексам m , для которых $x_m < x$.

Если функция распределения вероятностей $F(x)$ величины X обладает производной $f(x)$, то эта производная $f(x)$ также определяет распределение вероятностей величины X . Считая, например, что $f(x)$ непрерывна, можно применить формулу Ньютона — Лейбница, по которой найдем, что

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \leq X < x_2\}.$$

Так как $F(x)$ не убывает, то $F'(x) = f(x) \geq 0$, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Произведение $f(x)dx$ можно понимать как вероятность осуществления неравенств $x \leq X \leq x + dx$. В соответствии с этим функцию $f(x)$ называют плотностью вероятности величины X . Наглядный геометрический смысл функций $F(x)$ и $f(x)$ показан на рис. 5.2.

В первом случае величина ординаты AB для данной абсциссы x равна $F(x)$ — вероятности того, что $X < x$. Во втором случае заштрихованная площадь S равна вероятности того, что $x_1 < X < x_2$.

Одно из основных понятий, относящихся к совокупности случайных величин, характеризует отсутствие связи между этими величинами. Это — понятие взаимной независимости случайных величин аналогичное введенным ранее понятиям взаимной независимости случайных

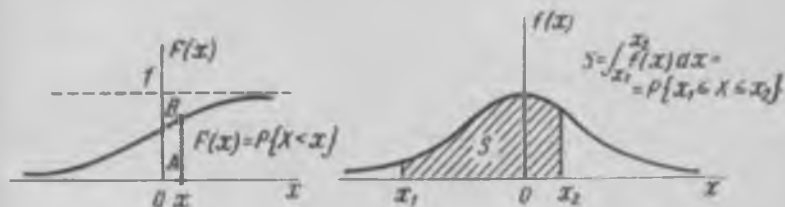


Рис. 5.2

событий и испытаний. Случайные величины независимы в совокупности, если распределения вероятностей любой группы этих величин не зависят от значений, которые приняли другие из рассматриваемых случайных величин. Напротив, если значения, принимаемые одними из случайных величин, сказываются на распределениях вероятностей других величин, то такие величины называются зависимыми (более полно — взаимно зависимыми).

5.31. Числовые характеристики случайной величины. Достаточная для ответа на многие важные вопросы о случайных величинах информация в сжатом виде содержится в разного рода числовых характеристиках случайных величин и распределений вероятностей их. Важнейшими числовыми характеристиками случайных величин являются моменты различных степеней, к числу которых, в частности, принадлежат математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Для дискретной случайной величины X математическое ожидание, обозначаемое MX (часто употребляется и обозначение EX), определяется равенством

$$MX = \sum_m x_m p_m, \quad (5.34)$$

где x_m — возможные значения X , имеющие соответственно вероятности p_m , и суммирование выполняется по всем значениям m .

Если X — непрерывная случайная величина со значениями из интервала (a, b) и $f(x)$ — плотность вероятности этой величины, то математическое ожидание MX выражается определенным интегралом:

$$MX = \int_a^b xf(x) dx. \quad (5.35)$$

Для уяснения сущности понятия математического ожидания полезно рассмотреть механическую аналогию этого понятия. Пусть в точках x_i на числовой оси сосредоточены массы m_i , тогда сумма $\sum_i m_i x_i$ представляет собой статический момент рассматриваемой системы материальных точек, а сумма

$$\frac{1}{m} \sum_i m_i x_i = \sum_i \frac{m_i}{m} x_i \quad (5.36)$$

будет равна координате центра тяжести этой системы, если через $m = \sum_i m_i$ обозначить массу всей системы. Сумма (5.36)

вполне аналогична сумме (5.34), так как $\frac{m_i}{m} > 0$ и $\sum_i \frac{m_i}{m} = 1$.

Математическое ожидание называется также моментом первого порядка или средним значением случайной величины X и обозначается иногда знаком $\bar{X}$. Отметим, что если постоянную величину C рассматривать как случайную величину X , имеющую одно-единственное возможное значение $X = C$, принимаемое с вероятностью $p = 1$, то в соответствии с формулой (5.34) будем иметь

$$MC = C \cdot 1 = C.$$

Дисперсией DX случайной величины X называется математическое ожидание квадрата разности $(X - MX)$:

$$DX = M(X - MX)^2. \quad (5.37)$$

В частности, если X — дискретная величина, то

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i, \quad (5.38)$$

а если X — непрерывная величина, то

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x) dx. \quad (5.39)$$

Часто наряду с дисперсией DX вводится стандартное отклонение $\sigma \geq 0$ величины X , определяемое как квадратный корень из дисперсии:

$$\sqrt{DX} = \sigma \geq 0.$$

Дисперсия DX не может быть отрицательной, и она тем меньше по численному значению, чем теснее группируются значения x_i вокруг математического ожидания MX , так как тогда все слагаемые $(x_i - MX)^2 p_i$ суммы (5.38) малы. Напротив, если возможны большие отклонения x_i от MX , да к тому же если это осуществляется со значительными вероятностями, то дисперсия DX также будет большой. Таким образом, дисперсию DX можно рассматривать как меру разброса случайной величины X вокруг среднего значения MX .

Механическая аналогия дисперсии DX усматривается из замечания, что сумма $\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \frac{m_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 m_i$,

где $\bar{x}$ — координата центра тяжести системы точек x_i , только множителем $\frac{1}{m}$ отличается от момента инерции $\sum_i m_i (x_i - \bar{x})^2$ этой системы относительно ее центра тяжести. Дисперсия DX представляет собой момент второго порядка разности $(X - MX)$. Если постоянную C рассматривать как случайную величину, т. е. такую величину X , которая принимает единственное возможное значение $X = C$ с вероятностью $p = 1$, то по формуле (5.37)

$$DC = M(C - MC)^2 = MO = 0.$$

Напротив, если дано, что $DX = 0$, то это означает, что X равно постоянной $C = MX$.

Вообще момент m_k порядка k случайной величины X определяется как математическое ожидание величины X^k :

$$m_k = MX^k. \quad (5.40)$$

Специальный интерес представляют моменты различных порядков разности $(X - MX)$, которые обозначаются через μ_k и называются центральными моментами величины X_k

$$\mu_k = M(X - MX)^k. \quad (5.41)$$

Отметим, что $m_1 = MX$ и $\mu_2 = \sigma^2 = DX$.

Следует подчеркнуть, что моменты случайной величины, определяемые как математические ожидания при помощи формул вида (5.34) и (5.35), могут не существовать, если фигурирующие в этих формулах суммы или интегралы окажутся расходящимися.

Наконец, укажем на величину, носящую несколько иной по сравнению с моментами характер. Эта величина, называемая медианой распределения случайной величины X , определяется как число me , удовлетворяющее условиям:

$$P\{X < me\} < \frac{1}{2}, P\{X > me\} < \frac{1}{2}.$$

Медиана существует для любой случайной величины, но иногда определяется неоднозначно.

5.32. Примеры случайных величин. Остановимся на примерах случайных величин и распределении их вероятностей.

1) Пусть случайная величина X может принимать любое значение из конечного промежутка (a, b) , причем существует плотность $f(x)$, не зависящая от x :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b. \quad (5.42)$$

Такую величину X принято называть равномерно распределенной на промежутке (a, b) . Функция распределения вероятностей $F(x)$ найдется интегрированием:

$$F(X) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}, \quad a < x < b. \quad (5.43)$$

Равномерно распределенная величина имеет моменты всех порядков. В частности,

$$MX = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2};$$

$$DX = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2) Пусть случайная величина X дискретная, а именно принимает значения $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ с вероятностями $P\{X=m\} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda > 0$ — произвольно заданное вещественное число. Распределение вероятностей этой величины называют пуассоновским в соответствии с утверждением (5.33) теоремы Пуассона. Имеем

$$MX = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda; \quad (5.44)$$

$$DX = \sum_{m=0}^{\infty} (m-\lambda)^2 \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} +$$

$$+ (1+2\lambda) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \lambda^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda^2 + (1-2\lambda)\lambda + \lambda^2 = \lambda. \quad (5.45)$$

Здесь была применена элементарная формула

$$(m-\lambda)^2 = m(m-1) + (1-2\lambda)m + \lambda^2.$$

3) Пусть X принимает любое неотрицательное значение $x \geq 0$, причем плотность вероятности равна

$$f(x) = ae^{-ax}, \quad (5.46)$$

где $\alpha > 0$ — произвольно заданное положительное число. Говорят, что X имеет показательное распределение на полуоси $x > 0$. В этом случае

$$MX = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}; \quad (5.47)$$

$$DX = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2} \quad (5.48)$$

4) В противоположность только что приведенным примерам случайных величин, каждая из которых обладает моментами всех порядков, укажем и такую случайную величину, которая не имеет математического ожидания. Пусть X может принимать любые вещественные значения и имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (5.49)$$

Распределение вероятностей с указанной плотностью вероятности носит название распределения Коши. В данном случае, однако, несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$$

расходится и потому случайная величина с распределением вероятностей (5.49) не обладает математическим ожиданием.

5.33. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин. Укажем на некоторые простые, но важные свойства математического ожидания и дисперсии случайных величин.

1) Если C постоянная, то

$$M(CX) = CMX. \quad (5.50)$$

Действительно, пусть X — дискретная величина, значения x_m которой имеют вероятности p_m , $m = 1, 2, \dots, n$. Тогда величина CX будет иметь значения Cx_m с теми же вероятностями p_m . Поэтому по (5.34)

$$M(CX) = \sum_{m=1}^n Cx_m p_m = C \sum_{m=1}^n x_m p_m = CMX.$$

2) Пусть X и Y — две произвольные случайные величины. Справедливо равенство

$$M(X + Y) = MX + MY. \quad (5.51)$$

Для доказательства предположим опять, что X и Y — дискретные величины со значениями x_m и y_k , $m = 1, 2, \dots, n^1$.

$k = 1, 2, \dots, n''$. Тогда сумма $X + Y$ будет дискретной случайной величиной, значения $x_m + y_k$ которой будут принимать с некоторыми вероятностями $P\{X = x_m; Y = y_k\}$, и поэтому, используя формулу (5.34), получим

$$\begin{aligned} M(X + Y) &= \sum_{m, k} (x_m + y_k) P\{X = x_m; Y = y_k\} = \\ &= \sum_{m=1}^{n'} x_m \sum_{k=1}^{n''} P\{X = x_m; Y = y_k\} + \sum_{k=1}^{n''} y_k \sum_{m=1}^{n'} P\{X = x_m; \\ &Y = y_k\} = \sum_{m=1}^{n'} x_m P\{X = x_m\} + \sum_{k=1}^{n''} y_k P\{Y = y_k\} = MX + MY. \end{aligned}$$

Здесь была применена формула (5.19), по которой

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n''} P\{X = x_m; Y = y_k\} &= P\{X = x_m\}; \\ \sum_{m=1}^{n'} P\{X = x_m; Y = y_k\} &= P\{Y = y_k\}. \end{aligned}$$

В первом случае событие $\{X = x_m\}$ принято за событие B , а события $\{Y = y_k\}$ — за события A_k . Во втором случае $\{Y = y_k\}$ принято за событие B , а $\{X = x_m\}$ — за события A_m .

3) Пусть X и Y — две взаимно независимые случайные величины. Тогда

$$M(XY) = MX \cdot MY. \quad (5.52)$$

Чтобы доказать это равенство, замечаем, что случайная величина XY принимает значения $x_m y_k$ (величины X и Y предполагаются при доказательстве дискретными) с вероятностями $P\{X = x_m; Y = y_k\}$. Но здесь ввиду независимости величин X и Y имеем

$$P\{X = x_m; Y = y_k\} = P\{X = x_m\} \cdot P\{Y = y_k\}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum_{m, k} x_m y_k P\{X = x_m; Y = y_k\} = \\ &= \sum_{m=1}^{n'} x_m P\{X = x_m\} \cdot \sum_{k=1}^{n''} y_k P\{Y = y_k\} = MX \cdot MY. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что равенство (5.52) может нарушаться, если X и Y перестают быть независимыми.

4) Если C постоянная, то

$$D(CX) = C^2 DX. \quad (5.53)$$

Доказательство основано на равенстве (5.50)

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M[C^2(X - MX)^2] = \\ = C^2 M(X - MX)^2 = C^2 DX.$$

5) Пусть X и Y — две взаимно независимые случайные величины. Тогда

$$D(X + Y) = DX + DY. \quad (5.54)$$

Доказательство основано на применении равенств (5.51) и (5.52):

$$D(X + Y) = M[X + Y - M(X + Y)]^2 = \\ = M[(X - MX) + (Y - MY)]^2 = M(X - MX)^2 + \\ + 2M[(X - MX)(Y - MY)] + M(Y - MY)^2 = \\ = M(X - MX)^2 + M(Y - MY)^2 = DX + DY,$$

так как

$$M[(X - MX)(Y - MY)] = M(X - MX) \cdot M(Y - MY) = 0.$$

Равенство (5.54), подобно равенству (5.52), может нарушаться, если X и Y не будут независимыми.

Непосредственным следствием равенств (5.51) и (5.54) служит распространение их на произвольное число случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$:

$$M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n MX_i; \quad (5.55)$$

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n DX_i. \quad (5.56)$$

В равенстве (5.55) связь величин X_i произвольна, а (5.56) мы будем использовать только при предположении взаимной независимости этих величин.

5.34. Вычисление M_p и D_p . Для иллюстрации возможностей применения изложенных свойств математического ожидания и дисперсии вычислим эти характеристики для случайной величины p — числа осуществлений события A в n испытаниях по схеме Бернулли. С каждым из испытаний в схеме Бернулли свяжем случайную величину X , считая, что $X = 1$, если соответствующее испытание привело к реализации события A и $X = 0$, если A не произошло. По условию имеем, что $P\{X = 1\} = p$, $P\{X = 0\} = q = 1 - p$. Поэтому $MX =$

$$= 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \quad DX = M(X - MX)^2 = (1 - p)^2 p + \\ + (0 - p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq(p + q) = pq.$$

Так как рассматривается n последовательных испытаний по схеме Бернулли, то им отвечают n взаимно независимых величин X описанного вида, которые мы отличим одну от другой нижними значками: $X_1, X_2, \dots, X_n$. Ясно, что $\mu = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Поэтому по (5.55) и (5.56)

$$M_\mu = \sum_{i=1}^n MX_i = np, \quad (5.57)$$

$$D_\mu = \sum_{i=1}^n DX_i = npq. \quad (5.58)$$

5.35. Закон больших чисел. Закон больших чисел для схемы Бернулли, доказанный в п^о 5.27, в действительности представляет собой простейший частный случай общей теоремы, носящей тоже наименование закона больших чисел. Принадлежащая П. Л. Чебышеву и дополненная А. А. Марковым формулировка закона больших чисел использует понятия случайной величины, математического ожидания и дисперсии.

Говорят, что последовательность случайных величин, обладающих математическими ожиданиями:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \dots \quad (5.59)$$

подчиняется закону больших чисел, если при любом, сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, выполняется при $n \rightarrow \infty$ предельное равенство:

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i \right| < \varepsilon \right\} \rightarrow 1. \quad (5.60)$$

Смысл этого предельного равенства состоит в том, что среднее арифметическое случайных величин $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью, неограниченно приближающейся к 1, сколь угодно мало (не более чем на ε) отличается от среднего арифметического математических ожиданий тех же случайных величин.

Теперь возникает вопрос, при каких условиях, наложенных на случайные величины X_n , составляющие последовательность (5.59), эта последовательность будет подчиняться закону больших чисел, т. е. будет выполняться предельное равенство (5.60)?

Очень общие условия такого рода, на деле достаточные для большинства практически встречающихся случаев, были найдены П. Л. Чебышевым, которые затем были еще более

расширены А. А. Марковым. Как формулировка П. Л. Чебышева, так и формулировка А. А. Маркова относятся к величинам (5.59), имеющим дисперсии DX_n .

Теорема А. А. Маркова. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ обозначает сумму первых n величин последовательности (5.59). Если при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{DS_n}{n^2} \rightarrow 0, \quad (5.61)$$

то закон больших чисел справедлив для последовательности величин (5.59), т. е. выполняется предельное равенство (5.60).

Теорема П. Л. Чебышева. Если величины (5.59) попарно независимы и дисперсии их DX_n удовлетворяют для всех значений $n = 1, 2, \dots$ неравенству

$$DX_n \leq L, \quad (5.62)$$

где L — данное число, независимое от n , то закон больших чисел справедлив для последовательности величин (5.59), т. е. выполняется предельное равенство (5.60).

Теорема П. Л. Чебышева очень просто сводится к теореме А. А. Маркова. Допуская независимость величин (5.59), это сведение можно выполнить следующим образом. По свойству дисперсии (5.56) имеем

$$DS_n = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n DX_i,$$

а так как справедливо условие (5.62), то будет

$$DS_n \leq nL, \text{ откуда } \frac{DS_n}{n^2} \leq \frac{nL}{n^2} = \frac{L}{n},$$

и, следовательно, окажется выполненным условие (5.61):

$\frac{DS_n}{n^2} \rightarrow 0$; отсюда по теореме А. А. Маркова вытекает справедливость закона больших чисел для величин (5.59).

Покажем, что доказанный ранее закон больших чисел для схемы Бернулли, как это уже было упомянуто, оказывается частным случаем теоремы П. Л. Чебышева.

Для этого вновь рассмотрим случайные величины X_i , введенные в § 5.34 и определяемые условиями: $X_i = 1$, если событие A произошло в испытании с номером i по схеме Бернулли, и $X_i = 0$, если A не произошло в этом испытании.

Тогда $MX_i = p$, $DX_i = pq$ для всех значений i , $\mu = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $M_\mu = \sum_{i=1}^n MX_i = np$. Здесь условие (5.62) оказывается выполненным:

$$DX_i = pq \leq \frac{1}{4},$$

так как для $0 \leq p < 1$ $pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. Поэтому по теореме П. Л. Чебышева закон больших чисел применим к рассматриваемым величинам X_i , причем разность $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i$, фигурирующая в предельном равенстве (5.60), записывается в виде

$$\frac{\mu}{n} - \frac{np}{n} = \frac{\mu}{n} - p.$$

Это значит, что должно выполняться предельное равенство

$$P \left\{ \left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

что составляет содержание закона больших чисел для схемы Бернулли.

В заключение приведем неравенство Чебышева, прямым следствием которого является сформулированная выше теорема Маркова.

Неравенство Чебышева. Если для случайной величины X с математическим ожиданием $MX = A$ возможны только неотрицательные значения: $X \geq 0$, то при любом веществе $t > 0$ будет выполняться неравенство

$$P\{X > t\} \leq \frac{A}{t}.$$

При доказательстве допустим, что X принимает значения $x_i > 0$ с вероятностями p_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Дано, что $A = \sum_{i=1}^n x_i p_i$. Имеем

$$\frac{A}{t} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n x_i p_i > \frac{1}{t} \sum_{x_i > t} x_i p_i > \sum_{x_i > t} p_i = P\{X > t\},$$

что и требовалось доказать. Здесь знак $\sum_{\lambda_i > t} x_i$ означает суммирование слагаемых $x_i p_i$ или p_i только для тех значений i , для которых $x_i > t$.

Если для какой-либо последовательности случайных величин Z_n при любом $\epsilon > 0$ оказывается, что

$$P\{|Z_n - a| > \epsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где a — некоторое вещественное число, то говорят, что величины Z_n сходятся по вероятности к a при $n \rightarrow \infty$.

Из неравенства Чебышева вытекает, что $(Z_n - MZ_n)$ сходятся по вероятности к 0, если $DZ_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Действительно, применяя неравенство Чебышева, найдем, что

$$\begin{aligned} P\{|Z_n - MZ_n| \geq \epsilon\} &= P\{(Z_n - MZ_n)^2 \geq \epsilon^2\} \leq \\ &\leq \frac{M(Z_n - MZ_n)^2}{\epsilon^2} = \frac{DZ_n}{\epsilon^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это вместе с тем доказывает и теорему Маркова. Следует положить $Z_n = \frac{S_n}{n}$, тогда $DZ_n = \frac{DS_n}{n^2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и поэтому

$$P\{|Z_n - MS_n| \geq \epsilon\} = P\left\{\frac{|S_n - MS_n|}{n} \geq \epsilon\right\} \rightarrow 0,$$

если $n \rightarrow \infty$, что и составляет утверждение теоремы Маркова.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть величина X_1 имеет распределение Пуассона с параметром λ_1 : $P\{X_1 = k\} = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и независимая от нее величина X_2 —

распределение Пуассона с параметром λ_2 : $P\{X_2 = h\} = \frac{\lambda_2^h}{h!} e^{-\lambda_2}$. Докажите, что сумма $X = X_1 + X_2$ имеет распределение Пуассона и найдите его параметр. Указание: воспользоваться тождеством $\sum_{k+h=n} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^h}{k! h!} =$

$\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}$, вытекающим из формулы бинома Ньютона.

2. Пусть независимые величины X_1 и X_2 имеют распределение Бернулли: $P\{X_1 = k\} = C_{n_1}^k p^k q^{n_1-k}$, $k = 0, 1, \dots, n_1$, $P\{X_2 = h\} = C_{n_2}^h p^h q^{n_2-h}$, $h = 0, 1, \dots, n_2$. Докажите, что сумма $X = X_1 + X_2$ также имеет распределение

Бернулли. Указание: воспользоваться формулами $\sum_{k+h=n} C_{n_1}^k C_{n_2}^h = C_{n_1+n_2}^n$.

вытекающими из сравнения коэффициентов тождества $(p+q)^{n_1} (p+q)^{n_2} = (p+q)^{n_1+n_2}$.

§ 9. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

5.36. Нормальное распределение и смысл его параметров. Среди случайных величин особенное, во многих отношениях центральное, место занимают величины, функция распределения вероятностей которых имеет вид

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (5.63)$$

где m — произвольное вещественное число, а $\sigma > 0$ — произвольное положительное число. Такие случайные величины называются нормально распределенными величинами, а функция (5.63) — нормальной функцией распределения вероятностей. Употребительны также наименования гауссова случайная величина и распределение вероятностей Гаусса.

Установим связь функции (5.63) с функцией $\Phi(x)$ из п^о 5.25, которая отвечает частным значениям параметров $m = 0$, $\sigma = 1$, и выясним вероятностный смысл этих параметров m и σ .

Замена переменной $\frac{t-m}{\sigma} = u$ в интеграле (5.63) дает

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

откуда, сравнивая это с определением $\Phi(x)$ в п^о 5.25, находим

$$\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (5.64)$$

Пусть величина X имеет функцию распределения $\Phi(x)$, т. е. $P\{X < x\} = \Phi(x)$, тогда $P\left\{X < \frac{x-m}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, откуда $P\{X_1 < x\} = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, где

$$X_1 = \sigma X + m. \quad (5.65)$$

Иными словами, величина X_1 имеет $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ в качестве функции распределения вероятностей.

Функция $\Phi(x)$ имеет производную

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.66)$$

Это — плотность вероятности величины X . Производная функции (5.63), т. е. плотность вероятности величины X_1 , равна

$$\frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (5.67)$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X с функцией распределения $\Phi(x)$. По (5.35)

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0, \quad (5.68)$$

так как интегрируется нечетная функция $x e^{-\frac{x^2}{2}}$ по симметричной относительно начала координат области интегрирования $(-\infty, \infty)$.

Далее по (5.39)

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1, \quad (5.69)$$

так как интегрирование по частям дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ и полученный интеграл, в соответствии с формулой (5.28), равен } \sqrt{2\pi}.$$

Теперь при помощи формул (5.51) и (5.54) из равенства (5.65) находим математическое ожидание и дисперсию величины X_1 :

$$MX_1 = M(\sigma X) + Mm = m, \quad (5.70)$$

$$DX_1 = D(\sigma X) + Dm = \sigma^2. \quad (5.71)$$

Тем самым вскрывается вероятностный смысл параметров m и σ нормальной функции распределения (5.63): m является математическим ожиданием, а σ^2 — дисперсией величины X_1 , имеющей функцию распределения (5.63).

Полезно проследить поведение функций $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ и $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ на графике. Приведем здесь для уяснения их взаимного расположения графики плотностей $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$

при значениях $\sigma = \sigma_1 < 1$, $\sigma = 1$ и $\sigma = \sigma_2 > 1$, предоставляя аналогичное исследование графика функции $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ выполнить читателю самостоятельно.

Как видно из чертежа, графики $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ — симметричные относительно вертикальной оси кривые, ординаты которых быстро убывают при возрастании $|x|$. С увеличением σ максимальная ордината графика функции $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, достигаемая в точке $x=0$, уменьшается, а ширина графика увеличивается

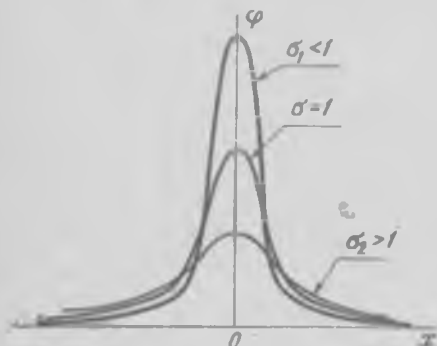


Рис. 5.3

в соответствии с тем, что площадь между графиком и осью абсцисс должна оставаться постоянной, равной единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) dx = 1.$$

Если бы m было отличным от нуля, то указанные на рис. 5.3 графики должны были бы быть смещены в горизонтальном направлении так, чтобы вершины графиков имели абсциссу $x=m$.

5.37. Центральная предельная теорема. Важная роль нормальной функции распределения $\Phi(x)$ уже видна из теоремы Лапласа, изложенной в § 6, но еще более полно это выявляется центральной предельной теоремой, утверждающей, что при известных условиях сумма $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ независимых случайных величин X_i приближенно распределена нормально.

Будем предполагать, что случайные величины X_i последовательности (5.59) взаимно независимы и что каждая из них обладает математическим ожиданием $MX_i = a_i$ и дисперсией $DX_i = \sigma_i^2$. Ограничиваясь только такими величинами, будем говорить, что центральная предельная теорема приложима к последовательности случайных величин (5.59), если для любых вещественных t' и $t'' > t'$ при $n \rightarrow \infty$:

$$P\left\{t' \leq \frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} \leq t''\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t''} e^{-\frac{a^2}{2}} da, \quad (5.72)$$

где

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, A_n = \sum_{i=1}^n a_i, B_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Смысл утверждения (5.72) центральной предельной теоремы состоит, таким образом, в том, что случайная величина $\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}}$ при больших значениях n имеет функцию распределения, приближенно равную нормальной функции распределения $\Phi(x)$.

Оказывается, что утверждение (5.72) выполняется, если случайные величины (5.59) удовлетворяют некоторым условиям весьма общего характера. Не касаясь самой общей формы этих условий, ограничимся здесь формулировкой теоремы, принадлежащей А. М. Ляпунову, область применения которой охватывает большинство встречающихся на практике задач. Будем дополнительно предполагать, что для величин (5.59) существуют моменты третьего порядка $M|X_i - a_i|^3 = C_i$ при всех $i = 1, 2, \dots$.

Теорема Ляпунова. Если случайные величины $X_i, i = 1, 2, \dots$ взаимно независимы, и при $n \rightarrow \infty$

$$\delta_n = \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)^{3/2}} \rightarrow 0, \quad (5.73)$$

то предельное соотношение (5.72) при $n \rightarrow \infty$ выполняется (равномерно) для любых вещественных t' и $t'' > t'$.

Проверим в виде примера, что для величин X_i рассмотренных в п⁰ 5.34 и п⁰ 5.35, связанных с последовательностью испытаний по схеме Бернулли, условие (5.73) выполняется,

откуда будет вытекать, что сумма этих величин $\mu = \sum_{i=1}^n X_i$ приближенно распределена нормально.

Уже было найдено, что

$$a_i = MX_i = p, \sigma_i^2 = DX_i = pq.$$

Вычислим теперь $C_i = M|X_i - a_i|^3 = M|X_i - p|^3 =$
 $= |1 - p|^3 p + |0 - p|^3 q = q^3 p + p^3 q = pq(p^2 + q^2) \leq pq,$
 так как $p^2 + q^2 \leq 1$, если $0 \leq p \leq 1$.

Далее, $\sum_{i=1}^n C_i \leq npq, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = npq.$

Следовательно,

$$\frac{\delta_n}{n} \leq \frac{npq}{(npq)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \rightarrow 0, \text{ если } n \rightarrow \infty.$$

Итак, условие (5.73) выполняется, поэтому должно быть справедливым предельное соотношение (5.72), которое в рассматриваемом случае схемы Бернулли принимает вид

$$P \left\{ t' < \frac{x - np}{\sqrt{npq}} < t' \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t'}^{t'} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Тем самым доказанная ранее теорема Лапласа включается как частный случай в теорему Ляпунова.

Вообще, из теоремы Ляпунова следует, что сумма S_n независимых и ограниченных величин X_i будет распределена приближенно нормально, если дисперсии σ_i^2 этих величин не приближаются к нулю:

$$\sigma_i^2 \geq \sigma^2 > 0; \quad (5.74)$$

здесь σ^2 — данное положительное число, независящее от n . При этом ограниченность величин X_i понимается как соблюдение неравенств

$$|X_i| \leq L \quad (5.75)$$

для всех значений $i = 1, 2, \dots$, где L — также некоторое определенное число, независящее от n .

Действительно, при условии (5.75) $|a_i| = |MX_i| \leq L$, так как, считая, например, X_i дискретными величинами со значениями $x_m^{(i)}$, вероятности которых $p_m^{(i)}$, получим

$$|a_i| = \left| \sum_m x_m^{(i)} p_m^{(i)} \right| \leq L \sum_m p_m^{(i)} = L.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} c_i &= M |X_i - a_i|^3 = \sum_m |x_m^{(i)} - a_i|^3 p_m^{(i)} \leq \\ &\leq (2L)^3 \sum_m p_m^{(i)} = 8L^3 \end{aligned}$$

в силу того, что

$$|x_m^{(i)} - a_i| \leq |x_m^{(i)}| + |a_i| \leq 2L.$$

Вместе с тем, по (5.74)

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \geq n\sigma^2.$$

Итак, для величины δ_n (5.73) имеем оценку:

$$\delta_n \leq \frac{n \cdot 8L^3}{(n^2)^{3/2}} = \frac{8L^3}{\sigma^3} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

и поэтому $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, чем и доказывается справедливость предельного соотношения (5.72) для рассматриваемых величин X_i .

Центральная предельная теорема, указывающая общие условия, обеспечивающие приблизительно нормальное распределение величины

$$\frac{S_n - A_n}{\sqrt{B_n}} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - a_i}{\sqrt{B_n}},$$

имеет принципиальное

значение для ответа на вопрос о причинах большого распространения нормально распределенных величин среди всех реальных случайных величин. А именно, случайная величина приблизительно нормальна, если она образуется в результате сложения большого числа практически произвольных, но малых величин

$$\frac{X_i - a_i}{\sqrt{B_n}}.$$

§ 10. ВЕКТОРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.38. Случайный вектор и его распределение вероятностей. Совокупность n случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ часто удобно рассматривать как совокупность случайных компонент $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ вектора X , который принято называть также случайным. Функцией распределения вероятностей случайного вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ будет функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n вещественных аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, равная вероятности осуществления n неравенств $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n\}.$$

В целях упрощения изложения далее будем говорить только о случайных векторах с двумя компонентами, для которых примем обозначение (X, Y) . Функция распределения будет иметь вид

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}. \quad (5.76)$$

Почти все нижеследующее легко может быть переформулировано для случайных векторов $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ с произвольным числом n компонент.

С помощью функции распределения вероятности $F(x, y)$ выражается вероятность одновременного осуществления неравенств $x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2$ для любых $x_1 < x_2, y_1 < y_2$:

$$P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (5.77)$$

Действительно, заметим сначала, что по теореме сложения вероятностей

$$P\{X < x_1; y_1 \leq Y < y_2\} = F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1), \quad (5.78)$$

так как событие $\{X < x_1; Y < y_2\}$ представляет собой объединение двух несовместных событий $\{X < x_1; y_1 \leq Y < y_2\}$ и $\{X < x_1; Y < y_1\}$.

Но по теореме сложения вероятностей

$$F(x_2, y_2) = F(x_2, y_1) + P\{X < x_1; y_1 \leq Y < y_2\} + P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\},$$

где на этот раз событие $\{X < x_2, Y < y_2\}$ рассмотрено как объединение трех попарно несовместных событий:

$$\{X < x_2; Y < y_1\}, \{X < x_1; y_1 \leq Y < y_2\}, \{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\}.$$

Учитывая (5.78), из последнего равенства находим выражение вероятности $P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\}$, совпадающее с (5.77).

Компоненты вектора (X, Y) можно отождествлять с декартовыми координатами точки плоскости, которую, как и сам вектор, называют случайной точкой. Это дает возможность интерпретировать событие $\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\}$ как нахождение случайной точки (X, Y) в прямоугольнике R , образованном точками (x, y) плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам $x_1 \leq x < x_2, y_1 \leq y < y_2$; формула (5.77) дает вероятность нахождения случайной точки (X, Y) в этом прямоугольнике R .

Если функция $F(x, y)$ имеет непрерывную частную смешанную производную второго порядка $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, то двойной интеграл $\iint_R \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy$, где R — указанный прямоугольник

с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2)$ и (x_2, y_2) имеет в точности ту же самую величину $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$, которая стоит справа в (5.77); следовательно,

$$P\{x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2\} = \iint_R \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy. \quad (5.79)$$

Это дает возможность толковать $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy$ как вероятность нахождения случайной точки (X, Y) в прямоугольнике со сторонами dx и dy , вершины которого расположены в точках $(x, y), (x + dx, y), (x, y + dy), (x + dx, y + dy)$. Другими словами, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ выступает в роли плотности вероятности случайного вектора (X, Y) .

Интегрирование плотности вероятности $f(x, y)$ по данной произвольной области D плоскости приводит к вероятности $P\{(X, Y) \in D\}$ события, состоящего в том, что случайная точка (X, Y) находится в этой области D :

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (5.80)$$

Этот результат обобщает формулу (5.79).

Если компоненты X и Y — дискретные случайные величины, причем X имеет возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, а Y — значения $y_1, y_2, \dots, y_m$, то случайный вектор (X, Y) может принимать только те значения (x, y) , которые имеют вид (x_i, y_j) , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Распределение вероятностей случайного вектора (X, Y) в этом случае задается перечнем всех вероятностей $p_{i,j}$, с которыми осуществляются равенства $(X, Y) = (x_i, y_j)$, т. е. должны быть заданы вероятности

$$p_{i,j} = P\{X = x_i, Y = y_j\} \quad (5.81)$$

для всех значений $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Возможно, что некоторые из этих вероятностей окажутся равными нулю: $p_{i,j} = 0$. Это будет означать, что одновременное осуществление соответствующих равенств $X = x_i$, $Y = y_j$ исключается.

5.39. Частные и условные распределения вероятностей компонент случайного вектора. Если известно распределение вероятностей случайного вектора (X, Y) , то это позволяет найти распределения вероятностей каждой из компонент X и Y в отдельности (т. е. частные распределения) и условные распределения любой из этих компонент при гипотезе, что другая компонента принимает то или иное из своих возможных значений. Сначала разберем, как более простой, случай дискретного случайного вектора (X, Y) , распределение вероятностей которого определено равенствами: (5.81).

Применяя формулу полной вероятности (5.19), находим для любого $i = 1, 2, \dots, n$ вероятность p_i равенства $X = x_i$:

$$p_i = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^m P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^m p_{i,j}. \quad (5.82)$$

Аналогично, для любого $j = 1, 2, \dots, m$ находится вероятность p'_j равенства $Y = y_j$:

$$p'_j = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^n p_{i,j}. \quad (5.83)$$

Каждое из своих значений величины X и Y принимают с положительной вероятностью, т. е. $p_i > 0$, $p'_j > 0$ для всех значений индексов i и j .

Условные вероятности равенства $X = x_i$ при гипотезе, что $Y = y_j$, найдутся применением формулы Байеса (5.20):

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{i,j}}{p'_j} = \frac{p_{i,j}}{\sum_{l=1}^n p_{l,j}}. \quad (5.84)$$

В формуле Байеса за событие B принимается событие $\{Y = y_j\}$, а за событие A_i — событие $\{X = x_i\}$.

Аналогичный вид имеют условные вероятности равенств $\{Y = y_j\}$, если принимается гипотеза, что $X = x_i$:

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{i,j}}{p_i} = \frac{p_{i,j}}{\sum_{j=1}^m p_{i,j}}. \quad (5.85)$$

В том случае, когда для вектора (X, Y) существует плотность вероятности $f(x, y)$, фигурирующие в формулах (5.82) — (5.85) конечные суммы должны быть заменены соответствующими интегралами. В роли вероятности $p_{i,j}$ теперь будет выступать элемент вероятности $f(x, y) dx dy$, и сумма $\sum_{j=1}^m p_{i,j}$, например, заменяется интегралом от этого элемента по y , т. е. интегралом $dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$. Аналогично, сумма $\sum_{i=1}^n p_{i,j}$ заменяется интегралом $dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$. Поэтому вместо (5.82) и (5.83) будут следующие формулы для плотности вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ величин X и Y соответственно:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (5.86)$$

Таким же образом, заменяя в (5.84) и (5.85) $p_{i,j}$ на $f(x, y) dx dy$, а суммы — интегралами, получим условную плотность $f_1(x|Y=y)$ величины X при гипотезе, что $Y=y$, и условную плотность $f_2(y|X=x)$ величины Y при гипотезе, что $X=x$:

$$f_1(x|Y=y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}; \quad f_2(y|X=x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}. \quad (5.87)$$

Из формул (5.86) следует, в частности, важный результат: если случайные величины X_1 и X_2 с плотностями вероятности $f_1(x)$ и $f_2(x)$, соответственно, взаимно независимы, то плотность вероятности $f(y)$ их суммы $Y = X_1 + X_2$ имеет выражение:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y-x) dx. \quad (5.88)$$

Действительно, элемент вероятности $f(x, y) dx dy$ случайного вектора (X_1, Y) равен

$f_1(x) dx \cdot P\{y < Y < y + dy | X_1 = x\} = f_1(x) dx \times$
 $\times P\{y - x < X_2 < y - x + dy | X_1 = x\} = f_1(x) f_2(y - x) dx dy$
 $(X_1 \text{ и } X_2 - \text{величины взаимно независимые}), \text{ и, следовательно,}$
 по второй из формул (5.86) для плотности вероятности $f(y)$ величины Y имеем

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y - x) dx.$$

Перестановка слагаемых $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$ наряду с формулой (5.88) дает эквивалентную формулу:

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) f_1(y - x) dx.$$

Применим выведенные формулы к сложению нормально распределенных величин. Пусть X_1 и X_2 — взаимно независимые случайные величины, и X_i имеет плотность вероятности

$$\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}, \quad i = 1, 2. \text{ Тогда величины } (X_i - m_i) \text{ будут}$$

$$\text{иметь плотность вероятности } \varphi_i(x) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Сумма $(X_1 - m_1) + (X_2 - m_2) = X_1 + X_2 - (m_1 + m_2)$ будет по формуле (5.88) иметь плотность вероятности

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2}} dx.$$

Вычисление этого интеграла легко выполняется с помощью подстановки

$$x = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} t, \text{ тогда}$$

$$x - y = -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} t,$$

$$\frac{x^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2} = \frac{t^2}{2} + \frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, \quad dx = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} dt$$

и поэтому

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot 2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}, \text{ так как } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Это значит, что сумма $X_1 + X_2 - (m_1 + m_2)$ имеет нормальную плотность вероятности $f(y)$, математическое ожидание которой равно 0, а дисперсия равна $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Но тогда сумма $X_1 + X_2$ имеет плотность вероятности

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

снова оказывающейся нормальной с математическим ожиданием $(m_1 + m_2)$ и дисперсией $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Ясно, что полученный результат распространяется на случай произвольного числа n взаимно независимых нормальных величин $X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Эта сумма — нормальная величина, ее параметры m и σ^2 получаются суммированием соответствующих параметров слагаемых.

5.40. Коэффициент корреляции. Полная картина взаимной зависимости двух компонент X и Y вектора (X, Y) дается функцией распределения вероятностей $F(x, y)$ этого вектора или, в частных случаях, плотностью вероятностей $f(x, y)$ или вероятностями $p_{i,j}$ изолированных значений рассматриваемого вектора. Для многих целей, однако, желательно иметь более простую и удобную для практического использования характеристику зависимости между двумя случайными величинами. Для величин, обладающих дисперсиями, такой удобной и полезной мерой зависимости между ними служит коэффициент корреляции, определяемый формулой

$$r = r(X, Y) = \frac{M[(X-a)(Y-b)]}{\sqrt{DX \cdot DY}}, \quad (5.89)$$

где $a = MX$, $b = MY$ и, конечно, $DX > 0$, $DY > 0$.

Установим некоторые простейшие свойства коэффициента корреляции, которые и делают его пригодным к роли меры зависимости между случайными величинами.

1) *Абсолютная величина коэффициента корреляции между любыми двумя случайными величинами не может быть больше 1:*

$$|r(X, Y)| \leq 1. \quad (5.90)$$

Для доказательства рассмотрим дисперсию суммы $\frac{X-a}{\sqrt{DX}} + \varepsilon \frac{Y-b}{\sqrt{DY}}$, где ε равно либо 1, либо -1 . Так как дисперсия любой величины не может быть отрицательной, то

$$D\left(\frac{X-a}{\sqrt{DX}} + \varepsilon \frac{Y-b}{\sqrt{DY}}\right) = 2 + 2\varepsilon r(X, Y) \geq 0, \quad (5.91)$$

а значит,

$$\varepsilon r(X, Y) \leq 1. \quad (5.92)$$

Это равносильно доказываемому неравенству (5.90), так как в (5.92) $\varepsilon = \pm 1$.

2) Равенство $|r(X, Y)| = 1$ возможно тогда и только тогда, когда величины $X - a$ и $Y - b$ связаны прямой пропорциональностью.

Действительно, если $X - a = k(Y - b)$, то

$$M[(X - a)(Y - b)] = M[k(Y - b)^2] = kDY,$$

$DX = M(X - a)^2 = M[k(Y - b)]^2 = k^2DY$ и поэтому

$$|r(X, Y)| = \left| \frac{kDY}{\sqrt{k^2DY \cdot DY}} \right| = 1.$$

Напротив, если $|r(X, Y)| = 1$, то, полагая $\varepsilon = 1$ или -1 , будем иметь $\varepsilon r(X, Y) = -1$, и, следовательно, по (5.91)

$$D \left(\frac{X - a}{\sqrt{DX}} + \varepsilon \frac{Y - b}{\sqrt{DY}} \right) = 0,$$

что означает $\frac{X - a}{\sqrt{DX}} + \varepsilon \frac{Y - b}{\sqrt{DY}} = 0$,

так как $M \left(\frac{X - a}{\sqrt{DX}} + \varepsilon \frac{Y - b}{\sqrt{DY}} \right) = 0$.

Итак,

$$\frac{X - a}{\sqrt{DX}} = -\varepsilon \frac{Y - b}{\sqrt{DY}},$$

что и надо было установить.

3) Если случайные величины X и Y независимы, то

$$r(X, Y) = 0.$$

Действительно, в этом случае

$$M[(X - a)(Y - b)] = M(X - a) \cdot M(Y - b) = 0,$$

так как каждый из двух сомножителей последнего произведения равен 0, поэтому и $r(X, Y) = 0$.

В качестве предостережения заметим, что свойство 3) коэффициента корреляции необратимо: если установлено, что $r(X, Y) = 0$, то это не должно служить основанием считать величины X и Y независимыми.

Коэффициент корреляции отличен от нуля только для зависимых величин, и по мере приближения абсолютной величины $r(X, Y)$ к единице зависимость между X и Y в извест-

ном смысле приближается к прямой пропорциональности между величинами $X - a$ и $Y - b$.

5.41. Равномерное распределение в двумерной области. Простейший пример непрерывного случайного вектора (X, Y) двух измерений (т. е. с двумя компонентами X и Y) доставляет вектор, равномерно распределенный в прямоугольнике R : $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, площадь которого $S = (x_2 - x_1) \times (y_2 - y_1)$. Это значит, что плотность вероятности вектора (X, Y) постоянна и равна $\frac{1}{S}$ для всех значений (x, y) из указанного прямоугольника. Каждая из компонент X и Y в отдельности будет равномерно распределенной случайной величиной: X — в интервале (x_1, x_2) с плотностью вероятности $\frac{1}{x_2 - x_1}$, Y — в интервале (y_1, y_2) с плотностью $\frac{1}{y_2 - y_1}$. Это прямо следует из формул (5.86). Например, плотность вероятности

для величины X равна интегралу $\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = \frac{1}{S} \int_{y_1}^{y_2} dy = \frac{1}{x_2 - x_1}$. Далее, условные плотности вероятности любой из компонент X или Y найдутся по формулам (5.87). Видим, что эти условные плотности не зависят от значений, принимаемых другой из рассматриваемых компонент и снова равны: $\frac{1}{x_2 - x_1}$ для величины X и $\frac{1}{y_2 - y_1}$ для величины Y . Компоненты X и Y оказываются, таким образом, взаимно независимыми случайными величинами, и коэффициент корреляции $r(X, Y)$ между ними равен нулю. Это усматривается и непосредственно из формулы (5.89). Если g — некоторая область в прямоугольнике R , то вероятность попадания случайной точки (X, Y) в g выражается по формуле (5.80):

$$P[(X, Y) \in g] = \iint_g \frac{1}{S} dx dy = \frac{s}{S}, \quad (5.93)$$

где s — площадь области g .

Несколько более общий пример случайного вектора (X, Y) получится, если вместо прямоугольника R взять произвольную область G , площадь которой пусть будет $S < \infty$. Равномерность распределения вектора (X, Y) в G означает существование постоянной плотности $f(x, y) = \frac{1}{S}$. Вероятность попадания (X, Y) в подобласть g области G снова дается формулой (5.93), но компоненты X и Y уже не будут, вообще говоря, независимыми случайными величинами и коэффициент корреляции $r(X, Y)$ также не обязательно должен быть равен нулю.

5.42. Нормальное распределение двух измерений. Среди случайных векторов (X, Y) выделяются своей особенной ролью нормально распределенные векторы, которые представляют собой обобщение нормально распределенных случайных величин из п° 5.36. Случайный вектор (X, Y) будем называть *нормально распределенным*, если он обладает *плотностью вероятности*

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \\ = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]} \end{aligned} \quad (5.94)$$

для всех вещественных x и y , где a, b — произвольные вещественные числа, $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ — произвольные положительные числа и число r удовлетворяет условию $|r| < 1$.

Распределения вероятностей компонент X и Y и их условные распределения определяются по формулам (5.86) и (5.87).

Плотность вероятности $f_1(x)$ величины X равна интегралу

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}},$$

т. е. X имеет нормальное распределение, причем $a = MX$, $\sigma_1^2 = DX$. Аналогично устанавливается, что Y также нормально распределенная величина, $b = MY$, $\sigma_2^2 = DY$.

Далее по формуле (5.89) коэффициент корреляции $r(X, Y)$ между X и Y равен интегралу

$$r(X, Y) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \iint_{-\infty}^{+\infty} (x-a)(y-b) \varphi(x, y) dx dy,$$

показывающему, что

$$r(X, Y) = r.$$

Фактическое вычисление двух последних интегралов предоставляется читателю выполнить самостоятельно.

Наконец, условная плотность вероятности $f_1(x|Y=y)$ величины X при гипотезе, что $Y=y$, имеет выражение

$$\begin{aligned} f_1(x|Y=y) &= \frac{\varphi(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx} = \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}} \cdot \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-r^2)}} e^{-\frac{\left[x-a-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-b)\right]^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}} \end{aligned}$$

показывающее, что это условное распределение также нормальное, имеющее математическое ожидание $a + r \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - b)$ и дисперсию $\sigma_1^2 (1 - r^2)$. Точно так же условное распределение вероятностей величины Y при заданном значении $X = x$ будет нормальным с математическим ожиданием $b + r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - a)$ и дисперсией $\sigma_2^2 (1 - r^2)$.

Изложенные свойства нормально распределенного вектора (X, Y) говорят, в частности, что при $r = 0$ условные распределения X или Y при любом значении другой из этих величин оказываются нормальными, с постоянными параметрами: a и σ_1 для величины X , b и σ_2 для величины Y . Таким образом, для нормально распределенного вектора (X, Y) равенство коэффициента корреляции нулю: $r = 0$, не только необходимо, но и достаточно для независимости компонент X и Y этого вектора. Ранее было отмечено, что для произвольного вектора (X, Y) условие $r = 0$ не гарантирует независимости компонент X и Y .

Одним из наиболее известных практических применений нормального распределения вероятностей двух измерений служит использование его в теории рассеяния ружейного или артиллерийского огня. Пусть в плоскости цели введены декартовы координаты x, y . Многочисленные наблюдения подтверждают, что плотность вероятности попадания снаряда в точку (x, y) плоскости цели с большой точностью оказывается равной нормальной плотности $\varphi(x, y)$ (5.94) при надлежаще выбранных параметрах a, b, σ_1, σ_2 и r . Это обстоятельство лежит в основе расчета среднего числа снарядов, потребного для поражения заданной цели.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите функцию распределения вероятностей суммы $X_1 + X_2$ независимых случайных величин X_1 и X_2 , каждая из которых имеет равномерное распределение на отрезке $(0, 1)$.

2. Найдите плотность вероятности случайной величины $(-X)$, если величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ .

3. Найдите плотность вероятности разности $X_1 - X_2$ независимых случайных величин X_1 и X_2 , если эти величины имеют нормальное распределение с параметрами, соответственно равными $m_1, \sigma_1; m_2, \sigma_2$.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. ВЫБОРКА И ВЫБОРОЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

6.1. Генеральная совокупность и выборка. Исходными понятиями математической статистики служат понятия генеральной совокупности и случайной выборки из этой совокупности. Указанные понятия в этой главе употребляются в следующем смысле. Пусть в соответствии с результатами некоторого испытания случайная величина X , имеющая функцию распределения вероятностей $F(x)$, принимает те или иные численные значения x . Если производится независимо одно от другого n таких испытаний, то отвечающие им численные значения случайной величины X обозначим $x_1, x_2, \dots, x_n$. По установившейся в математической статистике традиции та же ситуация терминологически описывается иным образом. Вместо понятия случайной величины X , имеющей функцию распределения вероятностей $F(x)$, вводится понятие генеральной совокупности значений x , короче — просто генеральной совокупности с функцией распределения вероятностей $F(x)$. При этом следует представлять себе, что доля всех тех значений x в генеральной совокупности, которые меньше данного числа x_0 , равна $F(x_0)$. Испытание, в результате которого величина X принимает численное значение x , заменяется понятием случайного выбора одного из значений x генеральной совокупности. Если производится n независимых одно от другого таких выборов, то совокупность их результатов $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется случайной выборкой, короче — просто выборкой из данной генеральной совокупности, а число n носит название объема этой выборки.

Основная задача математической статистики состоит в получении обоснованных выводов о свойствах генеральной совокупности по известным свойствам извлеченной из нее выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Сначала, однако, возникает задача представить саму выборку в удобном для дальнейшего ее использования виде. Это — задача описания и систематизации выборки.

Получение обоснованных выводов о свойствах генеральной совокупности по данным свойствам выборки представляет собой задачу анализа генеральной совокупности.

Наконец, располагая полученными таким образом сведениями о свойствах генеральной совокупности, можно ставить вопрос о свойствах повторно извлекаемых из нее выборок. Эти вопросы относятся к задаче предсказания или прогноза.

6.2. Распределение выборки. Описание и систематизацию выборки удобно производить с помощью понятия распределения выборки. Распределением выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется распределение вероятностей вспомогательной дискретной случайной величины X^* , принимающей значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, составляющие выборку, причем каждое из этих значений принимается с одинаковой вероятностью $\frac{1}{n}$:

$$p_i = P\{X^* = x_i\} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если через n_x обозначить число тех членов x_i выборки, которые меньше x : $x_i < x$, то $P\{X^* < x\} = \frac{n_x}{n}$. Эта величина, являющаяся функцией от x , называется функцией распределения выборки, которую называют также эмпирической функцией распределения. Прием для нее обозначение $F_n^*(x)$:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}. \quad (6.1)$$

График функции $F_n^*(x)$ представляет собой ступенчатую кривую со скачками в точках x_i , равными $\frac{1}{n}$ (рис. 6.1). Таковую кривую иногда называют кривой накопленных частот, поскольку ордината $F_n^*(x)$ кривой в точке x равна частоте $\frac{n_x}{n}$ значений выборки, меньших x .

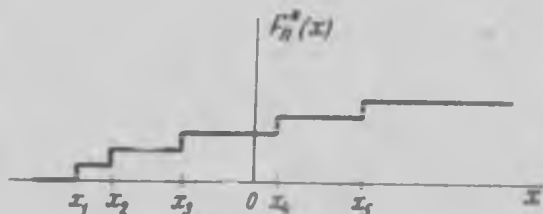


Рис. 6.1

На практике имеет распространение и другое графическое представление выборки, известное под названием гистограммы выборки. Предварительно выборка подвергается группировке. Для этого весь интервал числовой оси, в который попадают значения выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$, делят на 10—20 равных частей $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k < \dots < a_m$. Пусть v_k обозначает число членов x_i выборки, попадающих в интервал от a_{k-1} до a_k , т. е. для которых $a_{k-1} \leq x_i < a_k$. Над каждым из интервалов (a_{k-1}, a_k) , как на основании, строится прямоугольник высотой v_k . Полученный ступенчатый график и называется гистограммой выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ (см. рис. 6.2). При этом часто бывает удобно считать, что все v_k значений выборки из интервала (a_{k-1}, a_k) сосредоточены в середине этого интервала $\frac{a_{k-1} + a_k}{2}$.

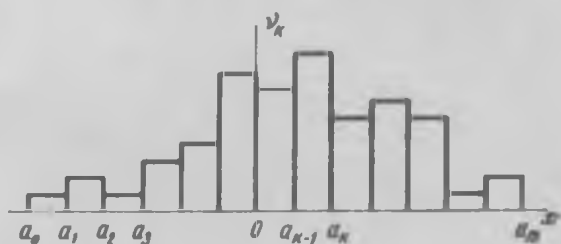


Рис. 6.2

6.3. Числовые характеристики выборки. Числовые характеристики введенной в предыдущем п^о 6.2 вспомогательной случайной величины X^* называются числовыми характеристиками выборки. К числу их относятся среднее значение, дисперсия, моменты различных порядков и т. д.

Среднее значение $\bar{x}$ выборки определяется как математическое ожидание величины X^* :

$$\bar{x} = MX^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (6.2)$$

Дисперсией выборки, для которой примем обозначение s^2 , будет дисперсия величины X^* :

$$s^2 = DX^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (6.3)$$

Момент выборки порядка k будет обозначаться через m_k :

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k. \quad (6.4)$$

На практике при вычислении моментов могут оказаться полезными следующие замечания. Пусть, например, значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ выборки находятся вблизи некоторого определенного числа a . Тогда часто вместо формулы (6.2) удобнее вести вычисления по немного видоизмененной формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a) + a. \quad (6.5)$$

Например, пусть выборка состоит из 10 значений x_i :

999, 1001, 1003, 998, 1005, 1000, 1002, 996, 998, 1004.

Замечаем, что эти значения находятся вблизи числа $a = 1000$. Для вычисления $\bar{x}$ по формуле (6.5) составляем разности $(x_i - a)$:

-1, 1, 3, -2, 5, 0, 2, -4, -2, 4.

Сумма этих разностей равна 6. Поэтому

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot 6 + 1000 = 1000,6.$$

Далее вычисление дисперсии s^2 по формуле (6.3) может быть неоправданно усложненным вследствие того, что среднее значение $\bar{x}$ окажется содержащим больше десятичных знаков, чем сами значения x_i выборки. Это привело бы к необходимости трудоемкого вычисления квадратов и последующего сложения многозначных чисел $(x_i - \bar{x})^2$. Поэтому вместо формулы (6.3) часто применяется ее видоизменение:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a + a - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - 2(\bar{x} - a)^2 + (\bar{x} - a)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь число a выбирается таким образом, чтобы вычисленные суммы $\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ оказалось возможно более простым.

Численные значения x_i выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ расположены в том порядке, какой придается им n последовательно выполненными выборками значений x_i из генеральной совокупности, и нет оснований ожидать, что эти значения x_i следуют одно за другим в порядке возрастания их величины. Изменим теперь взаимное расположение членов x_i выборки таким образом, чтобы они шли в неубывающем порядке. При этом придется заново перенумеровать члены выборки, которые будем теперь обозначать $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Итак,

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_{n-1}^* \leq x_n^*. \quad (6.7)$$

Ряд значений выборки, расположенных в неубывающем порядке (6.7), называется вариационным рядом. Здесь $x_1^* = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$ будет минимальным членом выборки (и вариационного ряда), $x_n^* = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ — их максимальным членом. Средний член вариационного ряда называется медианой. Если объем выборки $n = 2l + 1$ — нечетное число, то медианой будет x_{l+1}^* , а если $n = 2l$ — четное число, то медианами будут x_l^* и x_{l+1}^* . В последнем случае иногда медианой называют также среднее арифметическое $\frac{1}{2} (x_l^* + x_{l+1}^*)$ или даже любое из чисел x_i , заключенных между x_l^* и x_{l+1}^* .

6.4. Выравнивание эмпирических данных. Одним из видов представления выборки служит замена функции распределения выборки $F_n^*(x)$ в тех или иных отношениях близкой к ней и удобной функцией. Для этой цели часто может быть использована нормальная функция распределения вероятностей, связанные с ней разложения по ортогональным функциям Эрмита, функции, изображаемые кривыми Пирсона различных типов и т. д. Если речь идет о частоте сравнительно маловероятных событий, то для приближения распределения выборки может оказаться полезным распределение Пуассона с надлежаще выбранным параметром λ .

Приведем пример такого рода выравнивания эмпирической функции распределения при помощи нормального распределения на примере данных о диаметрах головок 200 заклепок. Данные взяты из книги А. Хальд. Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, М. — Л., 1956, стр. 46.

Результаты измерения диаметров головок заклепок сгруппированы в интервалы длиной 0,05 мм, и середины x_i этих интервалов помещены в первом столбце нижеследующей табл. 6.1.

Таблица 6.1

x_i	v_i	n_i	t_i	$\Phi(t_i)$	Δ_i
1	2	3	4	5	6
13,12	2	0,010	-2,47	0,007	0,003
13,17	1	0,015	-2,01	0,022	-0,007
13,22	8	0,055	-1,56	0,054	0,001
13,27	17	0,140	-1,10	0,136	0,004
13,32	27	0,275	-0,64	0,261	0,014
13,37	30	0,425	-0,19	0,425	0,000
13,42	37	0,610	0,27	0,606	0,004
13,47	27	0,745	0,73	0,767	-0,022
13,52	25	0,870	1,18	0,881	-0,011
13,57	17	0,955	1,64	0,946	0,009
13,62	7	0,990	2,10	0,982	0,008
13,67	2	1,000	2,55	0,995	0,005

Второй столбец содержит числа v_i тех заклепок, диаметры головок которых попали в интервал от $x_i - 0,025$ до $x_i + 0,025$.

По этим данным при помощи формул (6.5) и (6.6) найдены значения $\bar{x} = 13,4155$ и $s^2 = 0,01199525$. После округления принято $\bar{x} = 13,416$ и $s = 0,109$. В качестве приближающей применена нормальная функция распределения с параметрами $m = \bar{x}$ и $\sigma = s$, т. е. функция $\Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right)$. Значения этой функции для концов x каждого из интервалов группирования, т. е. в точках $t_i = \frac{x_i + 0,025 - \bar{x}}{s}$, помещены в пятом столбце таблицы. Третий столбец содержит значения накопленных частот, т. е. числа $n_i = \frac{1}{200} (v_1 + v_2 + \dots + v_i)$, а последний, шестой столбец — разность Δ_i между этими накопленными частотами n_i и найденными значениями функции $\Phi(t_i)$. По значениям Δ_i можно судить о степени приближения данного эмпирического распределения при помощи построенного нормального распределения.

Функция $\Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right)$ в приведенном примере служит инструментом описания выборки, и пока еще нет оснований рассматривать ее как приближение к распределению генеральной совокупности. В какой мере и в каком смысле величины $\bar{x}$, s и функции $F_n^*(x)$, $\Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right)$ могут быть исполь-

зованы для получения информации о среднем значении, дисперсии или распределении генеральной совокупности речь пойдет в следующих двух параграфах настоящей главы. По сначала надо рассмотреть понятие статистики и выборочного распределения.

6.5. Выборочные распределения. Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ считать независимыми переменными, то среднее значение $\bar{x}$, дисперсия s^2 и моменты m_k порядка k , выраженные формулами (6.2), (6.3) и (6.4), будут функциями аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вообще, произвольная функция $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисляемая для значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, образующих выборку, называется статистикой. Величины $\bar{x}$, s^2 и m_k являются примерами статистик. Рассмотрим некоторую статистику $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — выборка, извлеченная из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — n независимых случайных величин, каждая из которых имеет одно и то же распределение, определяемое той же функцией $F(x)$. Тогда $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет собой численное значение случайной величины $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, когда первый из аргументов X_1 принимает значение x_1 , второй аргумент X_2 — значение x_2 , X_3 — значение x_3 и т. д.

Определение. Распределение вероятностей случайной величины $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется выборочным распределением статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

В соответствии с этим числовые характеристики случайной величины $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, например ее среднее значение, дисперсия или моменты, называются соответственно выборочным средним значением статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, выборочной дисперсией ее, выборочными моментами и т. д. При этом в дальнейшем, как это общепринято в литературе по математической статистике, будем случайную величину $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и ее численное значение $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для данной выборки обозначать одним и тем же знаком $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим среднее значение выборки (статистики), равное $\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.

Если n достаточно велико, не менее нескольких десятков, когда вступает в силу заключение центральной предельной теоремы, эту статистику можно считать приближенно нормальной со средним значением $m_{\bar{x}} = M\bar{x}$ и дисперсией $\sigma_{\bar{x}}^2 = D\bar{x}$. Пренебрегая малой ошибкой, можно считать, таким образом, что при больших значениях n

$$P\left\{\frac{\bar{x} - m_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (6.8)$$

Предполагается, что функция распределения вероятностей $F(x)$ генеральной совокупности обладает конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$; это обеспечивает применимость центральной предельной теоремы.

Величины $m_{\bar{x}} = M\bar{x}$ и $\sigma_{\bar{x}}^2 = D\bar{x}$ являются выборочным средним значением и выборочной дисперсией статистики $\bar{x}$. Эта величина подсчитывается следующим образом:

$$m_{\bar{x}} = M\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Mx_i = \frac{1}{n} nm = m, \quad (6.9)$$

где m — среднее значение генеральной совокупности, т. е. среднее значение величины X с функцией распределения $F(x)$. Далее,

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}}^2 = D\bar{x} &= M(\bar{x} - m_{\bar{x}})^2 = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n M(x_i - m)^2 + 2 \sum_{i \neq j} M((x_i - m)(x_j - m)) \right] = \\ &= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где σ^2 — дисперсия генеральной совокупности, равная каждому из слагаемых $M(x_i - m)^2$. Слагаемые второй суммы $M((x_i - m)(x_j - m))$ равны нулю, так как $(x_i - m)$ и $(x_j - m)$ при $i \neq j$ — независимые величины и $Mx_i = Mx_j = m$.

В том случае, когда n — малое число и заключение центральной предельной теоремы еще не имеет силы, формула (6.8) не может считаться верной. Однако если генеральная совокупность сама имеет нормальное распределение $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, то формула (6.8) будет точной при любом значении $n = 1, 2, \dots$. Это вытекает из доказанного в п⁰ 5.39 свойства нормально распределенных случайных величин — их сумма снова нормальна. В этом случае, следовательно, формула (6.8) верна при любом n , причем $m_{\bar{x}} = m$ и $\sigma_{\bar{x}}^2 = D\bar{x}$ определяются по формулам (6.9) и (6.10), в которых m и σ являются параметрами нормального распределения $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ генеральной совокупности.

Возвращаясь к случаю генеральной совокупности с произвольной функцией распределения $F(x)$, приведем еще значения выборочных моментов:

$$M(\bar{x} - m)^3 = \frac{\mu_3}{n^2}, \quad (6.11)$$

$$M(\bar{x} - m)^4 = \frac{3\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}. \quad (6.12)$$

Для дальнейшего будут нужны и первые два момента статистики: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$,

$$M(s^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Mx_i^2 - M(\bar{x})^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \quad (6.13)$$

Аналогичные, но несколько более длинные вычисления дают

$$D(s^2) = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3}. \quad (6.14)$$

Здесь μ_k — центральные моменты генеральной совокупности, определенные формулой (5.41).

Ряд других важных для приложений выборочных распределений и их характеристик будет указан в следующих параграфах.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите среднее значение и дисперсию s^2 выборки, образованной следующими $n = 10$ значениями x_i :

20,02; 19,96; 19,98; 19,94; 20,08;

20,00; 19,92; 20,10; 20,04; 20,00.

§ 2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

6.6. Точечные оценки. Пусть a обозначает некоторый параметр, связанный с распределением генеральной совокупности, например одна из его числовых характеристик: математическое ожидание m , дисперсия σ^2 , моменты высших порядков μ_k , медиана me или какая-либо другая величина, от которой зависит распределение генеральной совокупности. Задача статистической оценки параметров состоит в обоснованном с позиций теории вероятности суждений о числовом значении (одного или нескольких) параметров a генеральной совокупности по определившимся значениям $x_1, x_2, \dots, x_n$ извлеченной из нее выборки. В настоящем п⁰ речь будет идти об основах теории точечных оценок параметров, т. е. об оценках их при помощи числовых значений подходящих для этой цели статистик $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Другой тип оценок параметров, а именно оценок их при помощи дове-

рительных интервалов, рассматривается в следующем п^о 6.7.

Пусть a — оцениваемый параметр и $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторая статистика, которая, рассматриваемая как случайная величина, сходится по вероятности к a при $n \rightarrow \infty$; иными словами,

$$P\{|g(x_1, x_2, \dots, x_n) - a| < \varepsilon\} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty, \quad (6.15)$$

сколь бы малым ни было данное $\varepsilon > 0$.

В этом случае статистика $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется состоятельной оценкой параметра a . Если n достаточно велико, то (6.15) показывает, что со сколь угодно близкой к единице вероятностью следует ожидать неравенства

$$|g(x_1, x_2, \dots, x_n) - a| < \varepsilon,$$

а это и означает, что значение $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть взято в качестве оценки параметра a .

Ранее, в п^о 5.35, было показано, что условие $DZ_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ влечет за собой сходимость по вероятности величин $(Z_n - MZ_n)$ к нулю. Применяя это к случаю статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получаем, что для выполнения (6.15) достаточно, чтобы

$$Dg(x_1, \dots, x_n) \rightarrow 0 \quad (6.16)$$

и

$$Mg(x_1, \dots, x_n) \rightarrow a, n \rightarrow \infty. \quad (6.17)$$

Условия (6.16) и (6.17) обеспечивают, таким образом, состоятельность статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ как оценки параметра a .

Возьмем для примера статистику $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Формула

(6.10) говорит, что при $n \rightarrow \infty$ выполнено условие (6.16), а формула $M\bar{x} = m$ (6.9) показывает справедливость (6.17) для случая $a = m$. Следовательно, среднее значение $\bar{x}$ выборки является состоятельной оценкой для математического ожидания (среднего значения) m генеральной совокупности и в зависимости от требуемой точности при достаточно больших значениях n , обычно не меньше нескольких десятков, значение $\bar{x}$ может быть использовано как приближение для m .

Вторым примером будет оценка дисперсии σ^2 генеральной совокупности. По формуле (6.14) получаем, что дисперсия

σ^2 , статистики $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ удовлетворяет условию (6.16):

$$\sigma_s^2 = Ds^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (6.18)$$

Кроме того, формула (6.13) показывает, что выполняется и условие (6.17):

$$Ms^2 \rightarrow \sigma^2, n \rightarrow \infty. \quad (6.19)$$

Таким образом, величина s^2 пригодна для оценивания σ^2 в качестве ее состоятельной оценки.

Можно доказать, что вообще каждый из моментов выборки $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r$ сходится по вероятности к соответствующему моменту MX^r генеральной совокупности, если только последний существует, т. е. что статистика $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r$ является состоятельной оценкой для параметра MX^r .

Пусть математическое ожидание $Mg(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существует. При многократных повторениях извлечения выборки данного фиксированного объема n значения статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будут концентрироваться, сходиться по вероятности, к значению выборочного математического ожидания $Mg(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если для данного n $Mg(x_1, x_2, \dots, x_n)/a$, то использование статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве оценки для a даже в случае ее состоятельности будет связано с систематической ошибкой $Mg(x_1, x_2, \dots, x_n) - a$. Если систематическая ошибка $Mg - a$ равна нулю, т. е.

$$Mg(x_1, x_2, \dots, x_n) = a, \quad (6.20)$$

то $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется несмещенной оценкой параметра a . В противоположном случае оценка будет смещенной.

Если речь идет об оценке $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой выполнено условие (6.17), то при больших значениях n , когда разность $Mg - a$ в силу (6.17) мала, различие между смещенной и несмещенной оценками практически исчезает.

Так как $M\bar{x} = m$, то статистика $\bar{x}$ оказывается не только состоятельной, но и несмещенной оценкой параметра m . Напротив, статистика s^2 не является несмещенной оценкой для σ^2 . Это видно из формулы (6.13):

$$Ms^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2.$$

Ввиду сделанного вывода о смещенности s^2 как оценки для σ^2 , вместо s^2 предпочтительнее пользоваться, особенно для небольших значений n , статистикой

$$\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (6.21)$$

Для статистики $\bar{s}^2$ выполняются при $n \rightarrow \infty$ соотношения:

$$Ds^2 = \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 Ds^2 \rightarrow 0, \quad M\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1} Ms^2 = \sigma^2, \quad (6.22)$$

означающие, что $\bar{s}^2$ является состоятельной и несмещенной оценкой для дисперсии σ^2 генеральной совокупности.

Пусть теперь даны две несмещенные оценки $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ одного и того же параметра a :

$$Mg_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = Mg_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a. \quad (6.23)$$

Если степень концентрации значений статистик $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вокруг их математического ожидания a различна, то для использования в качестве оценки a более выгодно применять, естественно, ту статистику g_1 , для которой степень указанной концентрации выше. В качестве меры рассеяния случайной величины g_1 вокруг ее математического ожидания используем выборочную дисперсию этой случайной величины. Таким путем вводится понятие эффективности оценок.

Если выполнено условие (6.23), то при соблюдении неравенства $Dg_1 < Dg_2$ оценка g_1 для параметра a называется более эффективной, чем оценка g_2 .

Если для статистики $g = g_0$ выборочная дисперсия Dg достигает минимального возможного значения по сравнению с дисперсиями любых других статистик g , удовлетворяющих условию $Mg = a$, то статистика g_0 называется эффективной оценкой параметра a .

Можно доказать, например, что в том случае, когда генеральная совокупность имеет нормальное распределение, статистика $\bar{x}$ будет при любом значении n эффективной оценкой для среднего значения m генеральной совокупности.

Приведем пример оценки среднего значения m и дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности по извлеченной из нее выборке объема $n = 30$. Значения x_i выборки в порядке их поступления в процессе выбора сведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

-1,90	0,40	-0,34	-1,90
1,37	0,69	0,98	-0,32
-0,89	-0,90	-1,38	-0,42
-0,13	0,15	1,48	0,77
0,15	0,90	-0,65	0,08
-0,79	0,82	1,10	0,17
-0,96	1,53	0,30	0,87
1,55		-0,13	

Вычисление $\bar{x}$ и s^2 по указанным ранее формулам дало следующие результаты:

$$\bar{x} = 0,087; \quad s^2 = 0,949; \quad s = 0,974.$$

В действительности выбор производился из нормально распределенной совокупности с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 1$. Его техника состояла в предварительном получении 30 значений y_i равномерно распределенной на интервале $(0,1)$ величины Y и последующем затем вычислении по этим данным значений x_i случайной величины X , связанной с Y равенством $Y = \Phi(X)$. Так как $P\{Y < y\} = y$ для любого $0 \leq y \leq 1$, то $P\{X < x\} = P\{Y < y = \Phi(x)\} = \Phi(x)$, т. е. X — нормально распределенная величина с $m = 0$, $\sigma = 1$.

6.7. Доверительные интервалы. Пусть генеральная совокупность имеет функцию распределения вероятностей $F(x, a)$, зависящую от параметра a . Допустим, что $a_1 = a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $a_2 = a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такие две статистики, что вероятность одновременного осуществления двух неравенств:

$$a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < a$$

и

$$a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) > a$$

равна $\beta = 1 - \alpha$, независимо от того, чему в действительности равно значение параметра a . Иными словами, пусть соблюдается условие

$$P\{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) < a < a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = \beta, \quad (6.24)$$

каково бы ни было значение параметра a , где β — независимая от a заданная вероятность.

Интервал (a_1, a_2) , концы которого равны значениям статистик $a_1 = a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $a_2 = a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, может быть

охарактеризован как случайный интервал, длина которого и положение на числовой оси меняются, вообще говоря, от выборки к выборке. Напротив, параметр a имеет некоторое, пусть и неизвестное, но для данной генеральной совокупности вполне определенное значение. Можно сказать, что «компонента случайности» в соотношении $(a_1, a_2) \in a$ относится к интервалу (a_1, a_2) .

Интервал (a_1, a_2) с концами $a_1 = a_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $a_2 = a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется доверительным интервалом для параметра a , соответствующим заданной доверительной вероятности $\beta = 1 - \alpha$.

В случае, если генеральная совокупность, кроме параметра a , зависит и от других параметров $b, c, \dots$, то доверительный интервал для a определяется требованием соблюдения условия (6.24) при любых значениях всех параметров $a, b, c, \dots$

Доверительные интервалы (a_1, a_2) служат оценками параметра a в следующем смысле. Если после извлечения выборки и нахождения отвечающего ей доверительного интервала (a_1, a_2) считать, что параметр a имеет одно из значений, лежащих в (a_1, a_2) , то доля тех случаев в большой серии извлечений выборок данного объема n , когда это заключение окажется истинным, будет по закону больших чисел близка к β . Напротив, доля случаев, когда заключение о принадлежности a интервалу (a_1, a_2) окажется ложным, будет $\approx 1 - \beta = \alpha$.

Такого рода информация о значениях параметров оказывается достаточной для решения многих практически важных задач, в особенности, если доверительная вероятность β близка к единице.

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда генеральная совокупность имеет нормальное распределение с известной дисперсией σ^2 , но среднее значение m ее неизвестно и подлежит оценке.

Возьмем статистику $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, которая, как уже ранее было установлено, имеет также нормальное распределение с параметрами $M\bar{x} = m$ и $D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}$. Таким образом,

$$P\left\{-t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - m < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Но неравенства $-t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - m < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ равносильны неравен-

ствам $\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и поэтому

$$P\left\{\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (6.25)$$

Это означает, что интервал (m_1, m_2) , где

$$m_1 = \bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad m_2 = \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6.26)$$

является доверительным интервалом для параметра m генеральной совокупности с известным значением σ^2 . Доверительная вероятность имеет величину

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (6.27)$$

Для численной иллюстрации возвратимся к выборке из нормально распределенной генеральной совокупности, значения которой представлены в табл. 6.2. Назначим доверительную вероятность $\beta = 0,98$. Из равенства (6.27), пользуясь таблицей значений нормальной функции распределения, находим $t = 2,33$. Так как $\bar{x} = 0,087$ (см. п⁰ 6.6) и известно, что $\sigma = 1$, то концы доверительного интервала будут

$$m_1 = \bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,087 - 0,425 = -0,338;$$

$$m_2 = \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,087 + 0,425 = 0,512.$$

Напомним, что истинное значение $m = 0$.

Если генеральная совокупность не имеет нормального распределения, но обладает конечной дисперсией σ^2 , то равенство (6.25) уже не будет верным для всех значений n , но в силу центральной предельной теоремы оно будет справедливым в пределе, когда $n \rightarrow \infty$. Это означает, что для больших значений n построенный выше интервал с концами m_1 и m_2 (6.26) может быть взят в качестве приближения к доверительному интервалу для среднего m , если дисперсия σ^2 известна.

Если же и σ^2 неизвестна, то при больших n все-таки вместо σ^2 с большой степенью доверия может быть взята дисперсия выборки s^2 , и поэтому в качестве приближенных доверительных интервалов параметра m в этом случае можно брать интервалы с концами:

$$m_1 = \bar{x} - t \frac{s}{\sqrt{n}}; \quad m_2 = \bar{x} + t \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Аналогично допустимо поступать и при оценке других параметров, статистические оценки которых $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ распределены приближенно нормально.

В основе изложенного построения доверительных интервалов (m_1, m_2) лежит то обстоятельство, что статистика $\bar{x}$ распределена нормально (или приближенно нормально).

В следующем п⁰ 6.8 приводится ряд других важнейших выборочных распределений. Они лежат в основе построения доверительных интервалов для параметра m при неизвестной дисперсии σ^2 , для дисперсии σ^2 , а также играют большую роль и в теории статистической проверки гипотез.

6.8. Выборочные распределения некоторых статистик. Одним из самых важных, имеющих многочисленные приложения в статистике распределений является распределение

величины $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$, где каждая из независимых величин X_i распределена нормально с параметрами $MX_i = 0$ и $DX_i = 1$. Распределение величины χ^2 часто называется χ^2 -распределением (читается: χ^2 -квадрат распределение). Число слагаемых n суммы $\sum_{i=1}^n X_i^2$ носит наименование числа степеней свободы χ^2 -распределения. Ввиду того что $\chi^2 \geq 0$, вероятность $P\{\chi^2 < x\} = 0$ для всех $x \leq 0$.

Для положительных значений x

$$P\{\chi^2 < x\} = \int_0^x C_n x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx, \quad (6.28)$$

где постоянная C_n определяется из того соображения, что

$$\int_0^{\infty} C_n x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1.$$

Это дает

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

где $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ представляет собой значение при $x = \frac{n}{2}$ функции $\Gamma(x)$ Эйлера:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

Из (6.28) вытекает, что

$$P\{\chi^2 > x\} = \int_x^{\infty} C_n x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad (6.29)$$

Интеграл $\int_x^{\infty} C_n x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ как функция от x табулирован.

Таблицы его значений приводятся в более полных руководствах по математической статистике, в частности для числа степеней свободы $n \leq 30$ они даны как приложения к книге Н. В. Смирнова и И. В. Дунин-Барковского «Краткий курс математической статистики для технических приложений», Физматгиз, 1959 г.

Если число степеней свободы $n > 30$, то оказывается, что с достаточной для практических целей точностью случайная величина $\sqrt{2\chi^2}$ может рассматриваться как нормально распределенная величина с параметрами $m = \sqrt{2n-1}$ и $\sigma = 1$. В этом случае, следовательно, можно полагать

$$P \left\{ \chi^2 < \frac{(\sqrt{2n-1} + x)^2}{2} \right\} = P \{ \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} < x \} \simeq \Phi(x)$$

и пользоваться для нахождения вероятностей $P \{ \chi^2 < x \}$ таблицей значений функции нормального распределения $\Phi(x)$.

Величину $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ можно рассматривать как сумму двух такого же рода величин $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$, где

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} X_i^2, \chi_2^2 = \sum_{i=n_1+1}^n X_i^2.$$

Поэтому сумма двух независимых величин, каждая из которых имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы соответственно n_1 и n_2 , также имеет χ^2 -распределение, число степеней свободы которого $n = n_1 + n_2$.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ представляет собой выборку из генеральной совокупности с нормальным распределением, среднее значение которого $m=0$, а дисперсия имеет некоторое данное значение σ^2 . Введем величины y_i , $i=1, 2, \dots, (n-1)$, определяемые через значения выборки x_i по формулам:

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} (x_1 + x_2 + \dots + x_i - ix_{i+1}), \quad (6.30)$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1).$$

Легко проверяется тождество

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2. \quad (6.31)$$

Действительно, при переходе от выборки объема n к выборке объема $(n-1)$ левая часть написанного равенства уменьшается на величину

$$x_n^2 - \frac{(x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n)^2}{n} + \frac{(x_1 + \dots + x_{n-1})^2}{n-1}, \quad (6.32)$$

а правая его часть — на величину

$$\frac{1}{(n-1)n} (x_1 + \dots + x_{n-1} - (n-1)x_n)^2. \quad (6.33)$$

Величины (6.32) и (6.33) тождественно равны одна другой, в чем читатель убедится после несложного вычисления.

Уменьшая в доказываемом тождестве (6.31) указанным образом шаг за шагом число слагаемых, после $(n-2)$ таких шагов придем к равенству

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2) \right]^2,$$

справедливость которого очевидна. Следовательно, справедливо и тождество (6.31) при любом n , что и требовалось доказать.

Тождество (6.31) перепишем в другом виде:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{y_i}{\sigma} \right)^2, \quad (6.34)$$

так как

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Каждая из величин y_i (6.30) выражается в виде суммы нормально распределенных величин. Поэтому все величины y_i также нормальны, причем

$$My_i = 0, \quad Dy_i = \frac{1}{(d+1)} (is^2 + i^2\sigma^2) = \sigma^2. \quad (6.35)$$

Наконец, несложное вычисление показывает, что коэффициент корреляции между любыми двумя различными величинами y_i равен нулю, а это для нормально распределенных величин эквивалентно их независимости.

Итак, мы получили, что правая часть тождества (6.34) представляет собой сумму квадратов независимых и нормально распределенных величин $\frac{y_i}{\sigma}$, параметры которых в силу (6.35) равны 0 и 1. Тем самым доказано, что левая часть

тождества (6.34), т. е. статистика $\frac{ns^2}{\sigma^2}$, имеет χ^2 -распределение с $(n-1)$ степенями свободы. Это значит, что

$$P \left\{ x' < \frac{ns^2}{\sigma^2} < x'' \right\} = \int_{x'}^{x''} C_{n-1} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx. \quad (6.36)$$

Заметим теперь, что распределение статистики $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ не зависит от среднего значения m нормально распределенной генеральной совокупности, из которой извлечена выборка, если дисперсия ее σ^2 неизменна. Действительно, изменение m повлечет за собой сдвиг всех значений x_i и $\bar{x}$, рассматриваемых как случайные величины, на одно и то же число, и поэтому все разности $(x_i - \bar{x})$, следовательно, и случайная величина s^2 останутся без изменения. Это показывает, что распределение статистики $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ определяется равенством (6.36) при любом значении среднего m генеральной совокупности.

Рассмотрим теперь вместе с величинами y_i , $i = 1, 2, \dots$, $(n-1)$ статистику $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$. Она имеет нормальное распределение и коэффициент корреляции ее с каждой из величин y_i равен нулю. Отсюда следует независимость между $\bar{x}$ и статистиками y_i , что влечет за собой, если учесть (6.34), важный для последующего вывод: статистики $\bar{x}$ и s^2 независимы одна от другой.

Можно доказать, на чем мы здесь не останавливаемся, что если случайная величина X распределена нормально с параметрами $m=0$ и $\sigma=1$, а независимая от нее величина Y имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы, то отношение

$$t = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}} \quad (6.37)$$

представляет собой случайную величину, имеющую плотность вероятности, равную

$$s_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (6.38)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — упоминавшаяся ранее функция Эйлера.

Возьмем теперь вместо X статистику $\frac{\bar{x}-m}{s} \sqrt{n}$, распределенную нормально с параметрами 0 и 1, а вместо Y — статистику $\frac{ns^2}{\sigma^2}$, имеющую χ^2 -распределение с числом степеней свободы $(n-1)$. Величина t (6.37) будет равна

$$t = \frac{\bar{x}-m}{s} \sqrt{n-1}. \quad (6.39)$$

Эта величина имеет плотность вероятности (6.38), если в этой формуле заменить n на $(n-1)$, т. е. плотность вероятности

$$s_{n-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi(n-1)}} \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}. \quad (6.40)$$

Распределение вероятностей, определяемое плотностью $s_n(x)$ (6.38), называется распределением Стьюдента с n степенями свободы (Стьюдент — псевдоним английского математика В. Госсета). Таким образом, отношение $t = \frac{\bar{x}-m}{s} \sqrt{n-1}$ имеет распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы. Распределение Стьюдента табулировано, соответствующие таблицы имеются, например, в приложениях к книге Н. В. Смирнова и И. В. Дунина-Барковского «Краткий курс математической статистики для технических приложений», Физматгиз, 1959 г.

6.9. Доверительные интервалы (продолжение). Начнем с построения доверительного интервала для неизвестного значения дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности. В основу берем выборочное распределение статистики $\frac{ns^2}{\sigma^2}$, определяемое формулой (7.36). Пусть $\beta = 1 - \alpha$ — назначенная доверительная вероятность. Выбираем x' и x'' по условиям

$$P\left\{\frac{ns^2}{\sigma^2} < x'\right\} = P\left\{\frac{ns^2}{\sigma^2} > x''\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

Численные значения x' и x'' находятся для заданной вероятности $\frac{\alpha}{2}$ по таблице χ^2 -распределения с числом степеней свободы $(n-1)$. При таких x' и x'' будет

$$P\left\{x' < \frac{ns^2}{\sigma^2} < x''\right\} = 1 - \alpha = \beta.$$

Неравенства $x' < \frac{ns^2}{\sigma^2} < x''$ эквивалентны неравенствам $\frac{ns^2}{x'} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{x''}$. Поэтому

$$P \left\{ \frac{ns^2}{x''} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{x'} \right\} = P \left\{ s \sqrt{\frac{n}{x''}} < \sigma < s \sqrt{\frac{n}{x'}} \right\} = \beta. \quad (6.41)$$

Это означает, что параметр σ имеет доверительный интервал $\left(s \sqrt{\frac{n}{x''}}, s \sqrt{\frac{n}{x'}} \right)$.

Отметим еще раз, что распределение статистики $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ не зависит от среднего m генеральной совокупности и поэтому построенный доверительный интервал для σ также не зависит от m .

Для численной иллюстрации возьмем выборку, представленную в табл. 6.2. Назначим вероятность $\beta = 0,90$. Тогда $\frac{\alpha}{2} = 0,05$ и таблица χ^2 -распределения при числе степеней свободы $n - 1 = 29$ дает $x' = 17,7$, $x'' = 42,6$. Следовательно, доверительный интервал для σ , отвечающий статистическому материалу табл. 6.2, имеет границы:

$$\sqrt{\frac{ns^2}{x''}} = \sqrt{\frac{27,5176}{42,6}} = 0,80;$$

$$\sqrt{\frac{ns^2}{x'}} = \sqrt{\frac{27,5176}{17,7}} = 1,25.$$

Задача оценки математического ожидания m нормально распределенной генеральной совокупности в том случае, когда ее дисперсия σ^2 также неизвестна, решается при помощи статистики $t = \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n - 1}$, имеющей распределение Стьюдента с числом степеней свободы $(n - 1)$. По назначенной вероятности $\beta = 1 - \alpha$ находится значение t' такое, что

$$P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n - 1} \right| < t' \right\} = \beta.$$

Неравенство $\left| \frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n - 1} \right| < t'$ эквивалентно неравенствам $\bar{x} - \frac{st'}{\sqrt{n - 1}} < m < \bar{x} + \frac{st'}{\sqrt{n - 1}}$ и поэтому

$$P \left\{ \bar{x} - \frac{st'}{\sqrt{n - 1}} < m < \bar{x} + \frac{st'}{\sqrt{n - 1}} \right\} = \beta. \quad (6.42)$$

Это означает, что интервал $\left(\bar{x} - \frac{st'}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + \frac{st'}{\sqrt{n-1}}\right)$ будет доверительным интервалом для m в рассматриваемых условиях.

Материал табл. 6.2 снова дает подходящую численную иллюстрацию. Пусть, например, задана доверительная вероятность $\beta = 0,95$. По таблице распределения Стьюдента в случае числа степеней свободы $n - 1 = 29$ находим $t' = 2,045$. Поэтому границами доверительного интервала для m будут

$$\bar{x} - \frac{st'}{\sqrt{n-1}} = 0,087 - 0,364 = -0,277;$$

$$\bar{x} + \frac{st'}{\sqrt{n-1}} = 0,087 + 0,364 = 0,451.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите доверительный интервал для среднего m по материалу табл. 6.2, отвечающий доверительной вероятности $\beta = 0,96$ (дисперсия σ^2 считается известной, $\sigma^2 = 1$).
2. Найдите доверительный интервал по материалу табл. 6.2 для m , отвечающий доверительной вероятности $\beta = 0,90$, если считать, что σ^2 не известно.
3. Найдите доверительный интервал для σ по материалу табл. 6.2, если назначена доверительная вероятность $\beta = 0,80$.

§ 3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

6.10. Описание способа проверки гипотез. Одна из наиболее часто встречающихся на практике задач, связанных с применением статистических методов, состоит в решении вопроса о том, должно ли на основании данной выборки быть принято или, напротив, отвергнуто некоторое предположение относительно генеральной совокупности. Примеры такого рода вопросов могут быть приведены из самых разнообразных областей практической или научной деятельности. Допустим, что для лечения некоторой болезни предложено новое лекарство, уже испытанное на определенном числе больных. Спрашивается, можно ли по данным о результатах такого лечения сделать обоснованное заключение о том, что новое лекарство более эффективно, чем применявшиеся ранее методы лечения? Или, может быть, следует признать, что наблюдаемая разница в результатах лечения при старом и новом методах лежит в допустимых границах и носит чисто случайный характер? Рассматривая данные о результатах лечения новым лекарством как выборку из некоторой генеральной совокупности, здесь по этой выборке требуется принять или отклонить гипотезу о том, что новое лекарство более эффективно, чем старые методы лечения.

Аналогичная задача возникает в агрономической практике, когда по урожаю на опытных участках следует сделать заключение о целесообразности тех или иных нововведений в методы обработки почвы или ухода за посевами. Тот же вопрос стоит и перед руководителями какого-либо промышленного предприятия, когда они должны принять решение об изменении технологического процесса или признать техническую целесообразность замены одного оборудования другим.

Задачи статистической проверки гипотез ставятся, таким образом, в следующем виде. Относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза H . Из этой генеральной совокупности извлекается выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$. Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по каждой данной выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу H или принять ее. Характер высказываемых гипотез H может быть весьма различным. Это могут быть, например, предположения о том, что среднее значение m генеральной совокупности равно некоторому данному числу, лежит в некоторых границах, те же предположения о дисперсии σ^2 , предположения о том, что генеральная совокупность имеет то или иное распределение вероятностей и т. д.

Опишем в общих чертах принцип проверки гипотез относительно генеральной совокупности по извлеченной из нее выборке.

Пусть при гипотезе H известно распределение вероятностей некоторой статистики $g = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и, в частности, для данного значения вероятности $\beta = 1 - \alpha$ пусть (t_1, t_2) обозначает такой интервал, для которого

$$P\{g \in (t_1, t_2)\} = P\{t_1 < g(x_1, x_2, \dots, x_n) < t_2\} = \beta. \quad (6.43)$$

Предположим $\alpha = 1 - \beta$ столь малым числом, что мы решаем скорее отказаться от гипотетического равенства (6.43), а следовательно, отвергнуть и гипотезу H , чем на деле допустить возможность события $g \in (t_1, t_2)$, имеющего вероятность, выражаемую этим малым числом α :

$$P\{g \notin (t_1, t_2)\} = 1 - \beta = \alpha. \quad (6.44)$$

Пусть теперь из рассматриваемой генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$, для которой фактически оказалось, что численное значение статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лежит вне интервала (t_1, t_2) , т. е. пусть реализовалось событие, вероятность которого была оценена малым числом α . В соответствии со сказанным, в этом случае принимается

решение о том, что гипотеза H должна быть отвергнута. Если же численное значение статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ оказалось лежащим в интервале (t_1, t_2) , то выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ считается не противоречащей, или согласующейся, с гипотезой H . Говорят также, что в этом случае выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ подтверждает гипотезу H .

Следует отчетливо представить себе, что заключения об отклонении или принятии гипотезы H на основании статистического материала $x_1, x_2, \dots, x_n$ не могут быть правильными на 100%. Если руководствоваться описанным выше правилом, то в принципе не исключено, что при справедливости гипотезы H все-таки осуществится событие $g \in (t_1, t_2)$, которое повлечет за собой отклонение гипотезы H . Вероятность этого равна α . Такого рода возможная ошибка, когда отклоняется верная в действительности гипотеза H , называется ошибкой первого рода. Но возможны и иные ошибки. Может случиться, что значение статистики $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ окажется принадлежащим интервалу (t_1, t_2) , что повлечет за собой принятие гипотезы H , тогда как в действительности вместо H справедлива какая-либо другая гипотеза H^* , не сильно изменяющая равенство (6.43). Такого типа ошибка, когда принимается ложная в действительности гипотеза H , называется ошибкой второго рода. Понятно, что статистика $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тем с большим основанием может быть использована как инструмент для проверки гипотезы H , чем меньшее значение будут иметь вероятности ошибок обоих родов.

Изложенное правило проверки гипотез называется критерием значимости, а применяемая при этом статистика $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ часто называется просто критерием. Вероятность α -осуществления события $g \in (t_1, t_2)$, т. е. вероятность ошибки первого рода, называется уровнем значимости данного критерия. Обычно уровень значимости α , в зависимости от требуемой точности, принимается равным 0,1, 0,05 или 0,01. Часто, особенно в литературе прикладного характера, уровень значимости выражается в процентах. Только что названные три значения α будут обозначаться как 10, 5 или 1%-ный уровень значимости. Область значений статистики g , лежащая вне интервала (t_1, t_2) , называется критической областью. Интервал (t_1, t_2) называется областью допустимых значений.

В рамках настоящего курса не может быть освещена теория построения критериев для проверки гипотез. В следующих п^но будут приведены критерии для проверки ряда конкретных гипотез, подобно тому как ранее были описаны

конкретные виды оценок параметров, без исследования вопросов о том, как эти критерии могут быть найдены или построены.

6.11. Критерии значимости для проверки гипотез о среднем значении. Первым критерием рассмотрим критерий для проверки гипотезы о значении математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности, дисперсия которой σ^2 известна. Пусть H обозначает гипотезу, что математическое ожидание m генеральной совокупности равно данному числу m_0 . Так как генеральная совокупность имеет функцию распределения $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, то при гипотезе H эта функция будет равна $\Phi\left(\frac{x-m_0}{\sigma}\right)$, и, следовательно, среднее выборочное $\bar{x}$ будет иметь нормальное распределение с параметрами m_0 и $\frac{\sigma^2}{n}$ [см. (6.9) и (6.10)].

Поэтому

$$P\left\{-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} - m_0 < t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (6.45)$$

Принимая статистику $\bar{x} - m_0$ за критерий для проверки гипотезы, что $m = m_0$, и назначив уровень значимости α , по $\beta = 1 - \alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ находим соответствующее значение

$t = t_\alpha$. Тогда интервал $\left(-t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ будет областью допустимых значений, а область вне этого интервала — критической областью.

Проверим, например, гипотезу, что среднее m генеральной совокупности, выборка из которой представлена в табл. 6.2, имеет значение $m_0 = 0$. Назначим 5%-ный уровень значимости. Тогда $\beta = 1 - 0,05 = 0,95$. Таблица нормального распределения (при $\sigma = 1$) дает $t_{0,05} = 1,96$. Следовательно, областью допустимых значений для критерия $\bar{x} - m_0 = \bar{x}$ будет интервал с границами $\pm t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \pm 0,358$ (так как $n = 30$), т. е. интервал $(-0,358; 0,358)$.

В действительности оказалось, что $\bar{x} = 0,087$. Это означает, что гипотеза $m = 0$ согласуется с данными табл. 6.2.

Аналогично проверяется гипотеза о том, что вероятность p в испытаниях, образующих схему Бернулли, имеет данное значение p_0 . Допуская, что проверяемая гипотеза $p = p_0$ спра-

ведлива, по теореме Лапласа для достаточно больших значений n получим, что

$$P\left\{\left|\frac{\mu - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right| < t\right\} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (6.46)$$

Приняв за критерий для проверки рассматриваемой гипотезы статистику $\frac{\mu - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$, назначив уровень значимости α ,

и найдя по равенству $\beta = 1 - \alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du$ значение $t =$

$= t_\alpha$, получим область допустимых значений для $\frac{\mu - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$ в виде интервала $(-t_\alpha, t_\alpha)$. При этом приближенное равенство (6.46) рассматривается как точное, что не влечет существенной ошибки, если $np_0(1-p_0)$ достигает нескольких десятков.

Совершенно таким же образом, на пояснении деталей чего мы не останавливаемся, проверяются гипотезы о численном значении математического ожидания генеральной совокупности с произвольной функцией распределения, обладающей данной дисперсией σ^2 . Вместо теоремы Лапласа должна быть использована центральная предельная теорема.

Другим примером гипотезы о параметрах рассмотрим гипотезу, состоящую в том, что математические ожидания двух различных генеральных совокупностей совпадают одно с другим. Сначала допустим, что обе генеральные совокупности распределены нормально, и параметры их обозначим m_1 и σ_1^2 для первой совокупности, m_2 и σ_2^2 — для второй. Пусть из первой генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ объема n_1 , а из второй — выборка $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ объема n_2 . Через $\bar{x}$ и $\bar{y}$ обозначаются соответственно средние значения этих выборок. Допустим, что справедлива гипотеза $m_1 = m_2$. Среднее $\bar{x}$ имеет нормальное распределение с параметрами m_1 и $\frac{\sigma_1^2}{n_1}$, а среднее $\bar{y}$ — нормальное распределение с параметрами m_2 и $\frac{\sigma_2^2}{n_2}$. Выборки $\bar{x}$ и $\bar{y}$ независимы между собой и поэтому разность $\bar{x} - \bar{y}$ имеет нормальное распределение с параметрами $m_1 - m_2 = 0$ и $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$. Это значит, что

$$P\left\{\left|\bar{x} - \bar{y}\right| < t \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (6.47)$$

За критерий для проверки гипотезы $m_1 = m_2$ принимается

статистика $(\bar{x} - \bar{y})$; по выбранному уровню значимости α находится при помощи таблицы нормального распределения $t = t_{\alpha}$, и область допустимых значений для критерия $(\bar{x} - \bar{y})$ будет интервал с границами $\pm t_{\alpha} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$.

Если сравниваемые по математическому ожиданию генеральные совокупности не являются нормальными, то предыдущие соображения уже не будут вполне точными, но при больших значениях n_1 и n_2 , когда вступает в силу действие центральной предельной теоремы, равенство (6.47) можно считать практически точным и интервал $\pm t_{\alpha} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$ будет достаточным приближением для области допустимых значений критерия $(\bar{x} - \bar{y})$.

6.12. Критерии согласия. Во многих случаях распределение генеральной совокупности не известно и требуется по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ решить вопрос о том, допустимо ли считать это неизвестное распределение совпадающим с тем или иным гипотетическим распределением. Критерии значимости для проверки таких гипотез о распределении генеральной совокупности носят специальное наименование критериев согласия (употребляется также название критерий соответствия). Остановимся на двух такого рода критериях. Первый из них — это критерий χ^2 , тесно связанный с рассматривавшимся выше χ^2 -распределением.

Пусть проверяется гипотеза о том, что генеральная совокупность имеет данную функцию распределения $F(x)$. Все множество значений x генеральной совокупности разбивается каким-либо образом на части, например на некоторое число k интервалов $\delta_i = (a_i; a_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Обозначим через p_i вероятность принадлежности выборочного значения x интервалу δ_i , т. е.

$$P[a_i \leq x < a_{i+1}] = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Интервалы δ_i предполагаются выбранными так, чтобы все вероятности p_i были положительными: $p_i > 0$.

Пусть, далее, выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ содержит n_i своих значений, попадающих в интервал δ_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Если общее число выборочных значений x_i , т. е. объем выборки n достаточно велик, то по теореме Лапласа случайные величины n_i будут приближенно распределены нормально со средним значением np_i и дисперсией $np_i(1 - p_i)$. Нормальным будет (приближенно) и распределение величины $\frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ для каждого из значений $i = 1, 2, \dots, k$. Учитывая данное ранее

определение χ^2 -распределения, можем ожидать, что сумма

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (6.48)$$

будет иметь приблизительно χ^2 -распределение. Это действительно так, и соответствующая теорема гласит, что распределение величины χ^2 (6.48) в пределе, когда $n \rightarrow \infty$, совпадает с χ^2 -распределением при числе степеней свободы $(k - 1)$. Уменьшение числа степеней свободы на единицу по сравнению с числом слагаемых суммы (6.48) объясняется тем, что величины n_i не являются независимыми, а связаны соотношением $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Сформулированная теорема приводит к следующему критерию согласия. По выбранному уровню значимости α находится значение χ_α такое, что $P[\chi^2 > \chi_\alpha] = \alpha$. Принимается, что величина (6.48)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n$$

имеет χ^2 -распределение с числом степеней свободы $(k - 1)$. Если окажется, что вычисленное по выборке значение величины χ^2 попало в область допустимых значений, т. е. $\chi^2 < \chi_\alpha$, то выборка считается подтверждающей гипотезу о том, что генеральная совокупность имеет функцию распределения $F(x)$. Если же численное значение χ^2 окажется в критической области, т. е. $\chi^2 > \chi_\alpha$, то сформулированная гипотеза отвергается.

Надо иметь в виду, что принятие χ^2 -распределения для величины χ^2 (6.48) считается допустимым, если для всех значений $i = 1, 2, \dots, k$, $np_i \geq 10$.

Отметим важное обстоятельство, касающееся условий применимости критерия χ^2 как критерия согласия. Функция распределения вероятностей генеральной совокупности может зависеть от некоторого числа неизвестных параметров, и проверяемая гипотеза иногда формулируется как гипотеза о виде этой функции распределения без фиксации численных значений параметров. По произведенной выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ сначала находятся оценки для неизвестных параметров и затем по определившемуся таким образом распределению генеральной совокупности вычисляются вероятности p_i , участвующие в выражении для χ^2 (6.48). Например, может быть высказана гипотеза о том, что генеральная совокупность распределена нормально, без указания численных значений параметров m и σ . Извлекается выборка и параметры m и σ оцениваются при помощи статистик $\bar{x}$ и s^2 . Затем строится критерий χ^2 , при

помощи которого и проверяется высказанная гипотеза о нормальности генеральной совокупности. За более подробными указаниями относительно применения критерия χ^2 в этих случаях, в частности относительно числа степеней свободы критерия, читатель должен обратиться к более полным руководствам по математической статистике.

В качестве другого критерия согласия опишем кратко критерий, основанный на распределении величины

$$D_n = \max_x |F(x) - F_n^*(x)|, \quad (6.49)$$

где $F(x)$ — функция распределения вероятностей генеральной совокупности и $F_n^*(x)$ — функция распределения выборки данного объема n .

Максимум $|F(x) - F_n^*(x)|$ в (6.49) вычисляется относительно ~~всех~~ вещественных значений x , $-\infty < x < \infty$.

А. Н. Колмогоров доказал, что при любой непрерывной функции $F(x)$ справедливо предельное соотношение

$$P \left\{ D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right\} \rightarrow K(\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.50)$$

где $\lambda > 0$ — произвольное положительное число, а функция $K(\lambda)$ имеет выражение

$$K(\lambda) = 1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2(r\lambda)^2}. \quad (6.51)$$

Проверка гипотезы о том, что генеральная совокупность имеет данную функцию распределения вероятностей $F(x)$ (непрерывную) производится следующим образом. Выбирается уровень значимости α , по которому находится значение $\lambda = \lambda_\alpha$ так, чтобы

$$K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Для функции $K(\lambda)$ составлены подробные таблицы, и значение λ_α по данному α находится при помощи одной из таких таблиц.

Равенство (6.50) рассматриваем как точное для данного значения n , пренебрегая возникающей при этом ошибкой.

Затем определяется для данной выборки максимум

$$D_n = \max_x |F(x) - F^*(x)| \text{ и в том случае, когда } D_n < \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}},$$

проверяемая гипотеза принимается, а если окажется, что $D_n > \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$, то гипотеза о том, что функция распределения генеральной совокупности равна $F(x)$, должна быть отвергнута.

Численный пример даст материал табл. 6.2. Проверяемая

гипотеза состоит в том, что $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Пусть уровень значимости $\alpha = 0,1$. Ему отвечает значение $\lambda_\alpha = 1,22$. Областью допустимых значений для критерия D_n будет область $D_n < \frac{1,22}{\sqrt{30}} = 0,223$. В действительности оказывается, что $D_n = 0,122 < 0,223$; это означает приемлемость гипотезы о том, что

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

§ 4. ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ РЕГРЕССИИ

6.13. Выборка из двумерной генеральной совокупности и ее числовые характеристики. Подобно тому, как принятие случайной величиной X в результате испытания одного из своих значений x в статистике описывается как выбор значений x из соответствующей генеральной совокупности, также и принятие двумерной величиной (X, Y) той или иной пары (x, y) возможных числовых значений рассматривается как выбор этой пары (x, y) из двумерной генеральной совокупности, имеющей ту же самую функцию распределения вероятностей $F(x, y)$, которая задает распределение величины (X, Y) . Выборка объема n представляет собой n такого рода пар (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Распределением выборки (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ называется распределение вероятностей дискретного случайного вектора (X^*, Y^*) , принимающего только значения (x_i, y_i) , образующие выборку, и притом каждое из них с одинаковой вероятностью $\frac{1}{n}$:

$$P \{X^* = x_i; Y^* = y_i\} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.52)$$

Числовые характеристики случайного вектора (X^*, Y^*) называются числовыми характеристиками выборки (x_i, y_i) . Это будут средние значения компонент x и y , их моменты различных порядков, а также коэффициент корреляции между компонентами и т. д. В частности, средние значения компонент равны

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (6.53)$$

Дисперсии компонент

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \quad (6.54)$$

Коэффициент корреляции r_{xy} между компонентами выборки имеет выражение

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x \cdot s_y}. \quad (6.55)$$

6.14. Линии регрессии выборки. К числу вопросов, наиболее часто возникающих при обработке экспериментальных данных, относится вопрос об описании при помощи той или иной удобной функции $y = f(x)$ данной выборки (x_i, y_i) из двумерной генеральной совокупности. Предполагается, что функция $f(x)$ должна быть определена таким образом, чтобы ее значения $y_i = f(x_i)$, вычисленные для значений $x = x_i$ выборки, в некотором смысле были наиболее близкими к значениям y_i выборки для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Аналогичный вопрос может быть поставлен и о функции $x = \varphi(y)$, которая для $y = y_i$ давала бы значения $x_i = \varphi(y_i)$, наиболее близкие к значениям x_i выборки, $i = 1, 2, \dots, n$.

Решим простейшую задачу подобного рода, считая функцию $f(x)$ линейной:

$$f(x) = ax + b.$$

Коэффициенты ее a и b — выбираем по методу наименьших квадратов, в соответствии с которым сумма квадратов разностей

$$\Delta = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

должна быть минимальной.

Искомые коэффициенты a и b могут быть найдены с помощью правила отыскания экстремальных значений функций двух аргументов: частные производные $\frac{\partial \Delta}{\partial a}$ и $\frac{\partial \Delta}{\partial b}$ в точке минимума функции Δ должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n x_i (ax_i + b - y_i) = 0; \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0. \quad (6.57)$$

Второе из этих уравнений дает

$$nb = \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i,$$

т. е.

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad (6.58)$$

где средние значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определены формулами (6.53). После подстановки вместо b разности $\bar{y} - a\bar{x}$ уравнение (6.56) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^n x_i (a(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})) = 0,$$

откуда

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})}.$$

Более симметрично тот же результат можно записать иначе:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (6.59)$$

так как $\sum_{i=1}^n \bar{x}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \bar{x}(y_i - \bar{y}) = 0.$

Если учесть формулы (6.54) и (6.55), то из (6.59) и (6.58) получим, что

$$a = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}, \quad (6.60)$$

$$b = \bar{y} - r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \bar{x}. \quad (6.61)$$

Проверка того, что найденные коэффициенты a и b действительно обращают сумму квадратов Δ в минимум, может быть выполнена обычными методами и здесь опускается.

Таким образом, функция

$$y = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} x + \bar{y} - r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \bar{x} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}) + \bar{y} \quad (6.62)$$

осуществляет наилучшее по методу наименьших квадратов представление значений y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ выборки по сравнению с любой другой линейной функцией $y = ax + b$.

График функции (6.62) в прямоугольной декартовой координатной системе является прямой линией, проходящей через точку $(\bar{x}, \bar{y})$ и называется эмпирической линией регрессии y на x .

Аналогичный вид имеет функция, графическим изображением которой будет эмпирическая линия регрессии x на y :

$$x = r_{xy} \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y}) + \bar{x}. \quad (6.63)$$

Уравнения обеих линий регрессии допускают следующую симметричную форму записи:

регрессия y на x :

$$\frac{y - \bar{y}}{s_y} = r_{xy} \frac{x - \bar{x}}{s_x};$$

регрессия x на y :

$$r_{xy} \cdot \frac{y - \bar{y}}{s_y} = \frac{x - \bar{x}}{s_x}.$$

В заключение иллюстрируем построение уравнения линии регрессии y на x численным примером. В табл. 6.3 приведены $n = 20$ значений (x_i, y_i) выборки, а также значения $\bar{y}_i$, вычисленные по уравнению регрессии для каждого из двадцати значений x_i . Последний столбец таблицы содержит разности $\bar{y}_i - y_i$, наглядно показывающие погрешности, возникающие при замене y_i значениями $\bar{y}_i$. В результате вычислений оказалось, что $\bar{x} = 1,35$; $20s_x^2 = 940,55$; $\bar{y} = 0,2$; $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1410,6$; $a = 1,500$; $b = -1,825$.

Линия регрессии y на x :

$$y = 1,5x - 1,825.$$

Таблица 6.3

i	x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i - y_i$	i	x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i - y_i$
1	-5	-9	-9,325	-0,325	11	9	11	11,675	0,675
2	-6	-10	-10,825	-0,825	12	9	12	11,675	-0,325
3	8	10	10,175	0,175	13	-8	-13	-13,825	-0,825
4	-7	-12	-12,325	-0,325	14	-10	-19	-16,825	2,175
5	10	13	13,175	0,175	15	-2	-4	-4,825	-0,825
6	0	-2	-1,825	0,175	16	7	8	8,675	0,675
7	2	0	1,175	0,175	17	14	20	19,175	-0,825
8	-1	-3	-3,325	-0,325	18	1	0	-0,325	-0,325
9	9	11	11,675	0,675	19	-3	-6	-6,325	-0,325
10	-4	-8	-7,825	0,175	20	4	5	4,175	-0,825

ГЛАВА 1.

§ 1. 1. а) $z = 2(\cos t + i \sin t)$; б) $z = 2t + (t^2 - 1)i$; в) $z = (1 + 2i)t$;

$$г) z = 2\cos t + 3i \sin t; \quad д) z = \frac{1}{3}t + \left(1 - \frac{2}{3}t\right)i.$$

2. а) $x - y = 0$; б) $x = y^2 + 4$; в) $x^2 + y^2 = 1$; г) $y = x^3$; д) $xy = 1$.

§ 2. 2. а) да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) да.

3. а) двусвязна; б) трехсвязна; в) односвязна; г) двусвязна; д) двусвязна; е) односвязна.

4. а) парабола $16u = 64 - v^2$; б) парабола $4u = v^2 - 4$; в) прямая $v = 2$; г) окружность $u^2 + v^2 = 16$.

5. а) прямая $u + v = 0$; б) окружность $u^2 + v^2 = R^2$; в) окружность

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

§ 3. 3. а) $x^2 + y^2 = 1$; б) $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$; в) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$;

$$г) x = \frac{1}{4} - y^2; \quad д) \rho = e^y.$$

4. а) $z = \frac{a}{4}(3e^{it} + e^{-3it})$; б) $z = a\bar{z}e^{it}$.

8. а) i ; б) $-ie$; в) $\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $\ln 5 + i\left[(2k+1)\pi - \right.$

$$\left. - \arctg \frac{4}{3}\right]; \quad д) \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)i; \quad е) \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)\cos 5 + \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)\sin 5;$$

$$ж) \frac{1}{2}\left(e^5 + \frac{1}{e^5}\right)\sin 1 - \frac{i}{2}\left(e^5 - \frac{1}{e^5}\right)\cos 1; \quad з) \frac{\sin 4 - i \operatorname{sh} 2}{\cos 4 + \operatorname{ch} 2}; \quad и) \cos 1;$$

$$к) \frac{1}{2}(e^{-3} - e^3)\cos 1 + \frac{i}{2}(e^{-3} + e^3)\sin 1; \quad л) 2k\pi + \frac{\pi}{2} - i \ln(3 \pm$$

$$\pm 2\sqrt{2}); \quad м) k\pi + (-1)^k \arctg \frac{1}{a} - i \ln[x^2 + (-1)^{k+1}a],$$

$$\text{где } a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}}; \quad н) \frac{1}{2}[(2k+1)\pi - \arctg \sqrt{2}] - \frac{i}{4}\ln 3;$$

$$о) k\pi + \frac{i}{2}\ln 3; \quad п) k\pi i + \ln[\sqrt{2} + (-1)^{k+1}]; \quad р) \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i;$$

$$с) ie^{-\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}; \quad т) e^{-\pi\left(2k + \frac{1}{4}\right)}\left[\cos \frac{\ln 2}{2} + i \sin \frac{\ln 2}{2}\right];$$

$$у) e^{-2k\pi}(\cos \ln 4 + i \sin \ln 4); \quad ф) \cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + i \sin(2k+1)\pi\sqrt{2}.$$

6. а) $e^x \cos y, e^x \sin y$; б) $\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\sin x, \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\cos x$;

$$в) \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}, \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}; \quad г) \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y,$$

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin y; \quad д) x + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\cos y, y + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\sin y;$$

$$е) e^x(x \cos y - y \sin y), \quad e^x(x \sin y + y \cos y).$$

§ 4. 3. а) $z^3 + Ci$; б) $z^2 + 2z + Ci$; в) $\frac{1}{z} + 2iz - 2i - 1$.

4. а) $i(z^2 - 1)$; б) $iz^3 + i - 1$; в) $ze^z + (1 + i)z + C$.

5. а) 0 и 5; б) $\frac{\pi}{4}$ и 4; в) $-\frac{\pi}{4}$ и $\sqrt{2}$.

6. а) сжимается круг $|z| < \frac{1}{2}$, растягивается круг $|z| > \frac{1}{2}$;

б) сжимается круг $|z| < \frac{1}{3}$, растягивается круг $|z| > \frac{1}{3}$;

в) сжимается круг $|z - 2| < \frac{1}{4}$, растягивается область $|z - 2| > \frac{1}{4}$;

г) сжимается круг $|z| > 1$, растягивается круг $|z| < 1$;

д) сжимается полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$, растягивается полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$.

§ 5. 1. $w = (2 + i)z + 1 - 3i$.

2. $w = (1 + i)(1 - z)$.

3. $w = e^{iz} Rz + w_0$.

4. а) $\frac{2+i}{5}$; б) $\frac{9}{2} + i$.

5. а) полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w < 0$; б) область, ограниченная окружностями $|w| = 1$ и $|w + \frac{5}{4}i| = \frac{3}{4}$, содержащая точку $w = 0$; в) область, полученная из нижней полуплоскости $\operatorname{Im} w < 0$ удалением находящейся в этой полуплоскости части круга $|w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}| < \frac{1}{\sqrt{2}}$; г) область, ограниченная прямой $\operatorname{Re} w = 1$ и касающейся ее окружностью $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

6. а) $w = \frac{2i(z+1)}{1+5i-4z}$; б) $w = \frac{iz+2+i}{z+1}$.

7. а) $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — действительные числа и $ad - bc > 0$;

б) $w = \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — действительные числа и $ad - bc < 0$;

в) $w = i \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — действительные числа и $ad - bc < 0$.

8. а) $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$; б) $w = \left(\frac{z^2+4}{z^2-4}\right)^2$; в) $w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^2$.

9. а) $w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{\frac{3}{2}}$; б) $w = e^{\frac{\pi i}{3}} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{2}{3}}$;

в) $w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$; г) $w = \left(\frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}}\right)^2$.

10. а) полярная сетка $\rho = \text{const}$, $\theta = \text{const}$; б) спирали $\rho = e^{\frac{\theta - \theta_0}{h}}$; в) угол $\alpha < \theta < \beta$; г) сектор $\rho < 1$, $0 < \theta < \alpha$; д) кольцо $1 < \rho < e$ с разрезом вдоль луча $\theta = 0$.

11. а) $w = e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$; б) $w = e^{\frac{2\pi iz}{z-2}}$; в) $w = e^{\frac{\pi i(z+2)}{3(z-2)}}$.

12. а) и б) внешность эллипса
$$\frac{4u^2}{\left(R + \frac{1}{R}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(R - \frac{1}{R}\right)^2} = 1;$$

в) верхняя половина внутренности предыдущего эллипса;

г) область между ветвями гиперболы $u^2 - v^2 = \frac{1}{2}$.

13. а) $w = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}}$; б) $w = \sqrt{\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$.

14. а) верхняя полуплоскость; б) правая полуплоскость с разрезом по интервалу $[0, 1]$; в) внутренность эллипса $\frac{u^2}{ch^2h} + \frac{v^2}{sh^2h} = 1$ с разрезами $[-chh, -1]$ и $[1, chh]$.

15. а) $w = \sqrt{\frac{\cos \pi z}{1 + \cos \pi z}}$; б) $w = \sqrt{\cos 2z + ch 2}$.

16. а) вся плоскость с разрезами по действительной оси вдоль лучей $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$; б) верхняя полуплоскость; в) вся плоскость с разрезом по мнимой оси вдоль интервала $-1 < v < 1$; г) полукруг $|w| < 1$, $\text{Re } w > 0$.

§ 6. 1. а) $2 + i$; б) $\frac{1}{2} i\pi$; в) $i\pi R^2$.

2. а) $\frac{1+i}{2}$; б) $1 + i$.

3. Если контур l не охватывает точки 1 и 2, то $J = 0$; если l охватывает точку 1, но не охватывает точку 2, то $J = -2\pi i$; если l охватывает точку 2, но не охватывает 1, то $J = 4\pi i$; если l охватывает обе точки 1 и 2, то $J = 2\pi i$.

4. а) 0; б) 2π .

5. $\pi(e^2 + e^{-2}) l$.

6. $\frac{1}{2} \pi l$.

7. $12\pi l$.

8. $2\pi(\cos 1 - \sin 1) l - 2\pi(\cos 1 + \sin 1)$.

9. Если обе точки 0 и 1 лежат вне l , то $I = 0$; если 0 лежит внутри, а 1 вне l , то $I = 1$; если 1 лежит внутри, а 0 вне l , то $I = e$; если обе точки 0 и 1 лежат внутри l , то $I = 1 + e$.

- § 7. 1. а) сходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится неабсолютно; д) сходится неабсолютно при $\varphi \neq 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), расходится при $\varphi = 2k\pi$; е) сходится абсолютно; ж) расходится.

2. а) 1; б) 0; в) ∞ ; г) 2; д) e^{-1} .

3. а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $r = \infty$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}$, $r = \infty$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n z^n}{b^{n+1}}$, $r = \left| \frac{b}{a} \right|$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n$, $r = 1$;

д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $r = 1$.

4. а) $\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$, $r = 3$;

б) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n (z-1)^n$, $r = 1$;

в) $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-2)^n}{n 2^n}$, $r = 2$.

5. а) $-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n$ при $|z| < 2$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$ при $|z| > 2$;

в) $-\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$ при $0 < |z-1| < 1$;

г) $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2} \right)^n$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{z^{2n+2}}$ при $|z| > 1$;

е) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! (z-1)^n}$ при $0 < |z-1| < +\infty$;

ж) $\frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}$ при $0 < |z| < +\infty$.

6. а) 0 и ± 1 — простые полюсы, $z = \infty$ — правильная точка (простой

нуль); б) $\frac{1}{\sqrt{2}} (1 \pm i)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} (-1 \pm i)$ — простые полюсы,

$z = \infty$ — правильная точка; в) 1 — полюс 3-го порядка, $z = \infty$ — полюс 2-го порядка; г) $z = \infty$ — существенно особая точка.

д) 0 — существенно особая точка, $z = \infty$ — правильная точка,

е) $-\frac{3}{4}$ — простой полюс, $z = \infty$ — существенно особая точка.

§ 8. 1. а) $\operatorname{Res} f(1) = \operatorname{Res} f(-1) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Res} f(0) = 1$, $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$;

б) $\operatorname{Res} f(i) = -\frac{i}{4}$, $\operatorname{Res} f(-i) = \frac{i}{4}$, $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$;

в) $\operatorname{Res} f(-1) = 2 \sin 2$, $\operatorname{Res} f(\infty) = -2 \sin 2$;

г) $\operatorname{Res} f\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = -1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

д) $\operatorname{Res} f(0) = \operatorname{Res} f(\infty) = 0$.

2. а) $-2\pi i$; б) $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$; в) $-\frac{\pi i}{12i}$; г) -1 ; д) πi ; е) $-\frac{2}{9}\pi i$; ж) 0.

3. а) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; б) $\pi(2a+b)[a(a+b)]^{-\frac{3}{2}}$; в) $-\frac{\pi}{27}$;

г) $\frac{\pi}{4a}$; д) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$;

е) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3 \sin 1)$; ж) $\frac{\pi}{2e^4}(2 \cos 2 + \sin 2)$;

з) $\frac{1}{4}\pi e^{-2}$; и) $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$.

4. а) π ; б) $\pi(2 \sin 2 - 3 \sin 3)$; в) $\frac{\pi}{5}(\cos 1 - e^{-2})$;

г) $\frac{\pi}{3} \left[\sin a + e^{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} \left(\sin \frac{a}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{a}{2} \right) \right]$.

ГЛАВА II.

§ 1. 1. а) $\frac{T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k\omega t}{k}$; б) $\frac{T}{2} - \frac{T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k}$;

в) $\frac{T^2}{3} + \frac{T^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega t}{k^2} - \frac{T^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k}$;

г) $\frac{a+b}{2} + \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1}$;

д) $b + \frac{aT}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k\omega t}{k}$;

$$e) \frac{aT + 4b}{4} - \frac{2aT}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\omega t}{(2k-1)^2};$$

$$ж) \frac{aT}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin k\omega t}{k} + \frac{4b}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1};$$

$$з) \frac{(b-a)l}{4} + \frac{2(a-b)l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{(a+b)l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l};$$

$$и) \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega t}{4k^2 - 1};$$

$$к) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos 2k\omega t}{4k^2 - 1};$$

$$а) \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(2k-1)\omega x}{(2k-1)^2} \left(\omega = \frac{\pi}{l} \right).$$

$$2. f(t) \approx 53 + 8,3 \cos t + 22,3 \sin t + 16,8 \cos 2t + 14,3 \sin 2t.$$

$$\S 2. 1. f(x) = \frac{240}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^3} - \frac{2880}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^5} +$$

$$+ \frac{1440}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{(2k)^2};$$

$$2. f(t) = \frac{T^2}{8} - \frac{12T^2}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\omega t}{(2k-1)^4} -$$

$$- \frac{2T^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega t}{(2k-1)^3} + \frac{6T^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\omega t}{(2k)^3} \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right).$$

$$3. a) f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}, & \frac{T}{2} < t < T, \\ 0, & t = 0, \frac{T}{2}, T. \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}, & 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4} (2\pi - x)^2, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi^3}{4l} x, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ \frac{\pi^3}{4l} (x-l), & \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

$$r) f(t) = \begin{cases} \pi^3 \left(\frac{2}{3T^2} t^3 - \frac{1}{2T} t^2 + \frac{1}{12T} t \right), & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ \pi^3 \left(\frac{2}{3T^2} t^3 - \frac{3}{2T^2} t^2 + \frac{13}{12T} t - \frac{1}{4} \right), & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

$$4. a) \frac{\pi^3}{6} - Tt + t^3 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\omega t}{k^2 + 1} \quad (0 < t < T);$$

$$6) \sin t - \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin kt}{k^2 - k} \quad (0 < t < \pi);$$

$$a) \frac{\pi}{2} + \frac{(\pi^2 - 3)\pi}{6l} x - \frac{\pi^3}{4l^3} x^3 + \frac{\pi^3}{12l^3} x^3 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1} \sin k\omega x \quad (0 < x < 2l).$$

$$\S 3. 1. a) c_k = -\frac{T \sin \frac{k\pi}{2}}{k^2 \pi^2} l, \text{ откуда следует, что } A_{7k} = |c_{2k}| = 0, A_{2k-1} =$$

$$= |c_{2k-1}| = \frac{T}{(2k-1)^2 \pi^2}, \varphi_{2k-1} = \arg c_{2k-1} = (-1)^k \frac{\pi}{2};$$

$$6) c_k = \frac{1 + (-1)^k}{\pi(k^2 - 1)} \left(i \sin \frac{k\pi}{2} - \cos \frac{k\pi}{2} \right), \text{ откуда } A_{2k-1} =$$

$$= |c_{2k-1}| = 0, A_{2k} = |c_k| = \frac{2}{\pi(4k^2 - 1)}, \varphi_k =$$

$$= [1 + (-1)^k] \frac{\pi}{2}.$$

$$2. a) f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{k-5} e^{ikh\omega t}, f_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-5} + s_{k+5}) e^{ikh\omega t},$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-5} - s_{k+5}) e^{ikh\omega t}, \text{ где } s_0 = \frac{h}{2},$$

$$s_k = [(-1)^k - 1] \frac{h}{2k\pi} \quad (k \neq 0);$$

$$6) f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{k-6} e^{ikh-t}, f_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-6} + \\ + s_{k+6}) e^{ikh-t}, f_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (s_{k-6} - s_{k+6}) e^{ikh-t}, \\ \text{где } s_k = \frac{h}{\pi} \cdot \frac{1 + (-1)^k}{k^2 - 1}.$$

$$\S 4. 1. a) \frac{2h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t \cos \omega t}{\omega} d\omega; \quad 6) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \omega) \sin \omega x}{\omega} d\omega;$$

$$b) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(t - \alpha) - \sin \omega(t - \beta)}{\omega} d\omega;$$

$$r) \frac{2h}{\pi \tau} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^2} \cos \omega t d\omega; \quad \lambda) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \pi \cdot \sin \omega t}{1 - \omega^2} d\omega.$$

$$2. a) e^{-t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t d\omega}{1 + \omega^2} (0 < t < +\infty);$$

$$6) e^{-t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t d\omega}{1 + \omega^2} (0 < t < +\infty).$$

$$3. a) f_1(t) = \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\} \cos \omega t d\omega,$$

$$f_2(t) = \frac{4a\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t d\omega}{[a^2 + (\omega - \omega_0)^2][a^2 + (\omega + \omega_0)^2]};$$

$$6) f_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a^2(a^2 + \omega^2 + \omega_0^2) \cos \omega t + \omega^2(a^2 + \omega^2 - \omega_0^2) \sin \omega t}{(a^2 - \omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4a^2\omega^2} d\omega,$$

$$f_2(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(a^2 - \omega^2 + \omega_0^2) \cos \omega t + 2a\omega \sin \omega t}{(a^2 - \omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4a^2\omega^2} d\omega;$$

$$b) f_1(t) = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \frac{2n\pi\omega}{\omega_0} \cdot \cos \omega t d\omega,$$

$$f_2(t) = \frac{2h\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \frac{2n\pi\omega}{\omega_0} \sin \omega t d\omega.$$

ГЛАВА III.

$$\S 1. 1. a) \frac{8}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p}; \quad б) \frac{2}{p^4} + \frac{4p}{p^3 + 4}; \quad в) \frac{1}{p^3 + 9} - \frac{5}{p}.$$

$$г) \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{4p}{p^3 - 4}; \quad д) \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

$$е) \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}; \quad ж) \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \frac{p}{p^2 + 4\omega^2};$$

$$з) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 + 1} + \frac{25}{p^2 + 25} \right); \quad и) \ln \frac{p-b}{p-a}.$$

$$\S 2. 1. a) \frac{1}{p} (e^{-p} - 3e^{-2p} + 2e^{-3p} + 2e^{-4p} - 2e^{-5p});$$

$$б) \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p}) - \frac{1}{p} e^{-3p}; \quad в) \frac{2}{p^2} (1 - 2e^{-p} + e^{-2p});$$

$$г) \frac{1}{2p^2} (2 - 2e^{-p} - e^{-2p} + e^{-4p});$$

$$д) \frac{2}{p^3} (1 - e^{-p}) - \frac{1}{p^2} (2e^{-p} + e^{-2p} - e^{-4p}) + \frac{1}{p} e^{-4p}.$$

$$2. a) f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 3, & t > 1 \end{cases}; \quad F(p) = \frac{1}{p^2} (1 - e^{-p}) + \frac{2}{p} e^{-p};$$

$$б) f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < 2 \\ 5 - 2t, & 2 < t < 3 \\ 6 - 2t, & t > 3 \end{cases}; \quad F(p) = \frac{1}{p} (5 - 4e^{-2p} + e^{-3p}) - \frac{2}{p^2} e^{-2p};$$

$$в) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 1 + e^{-t}, & t > 1 \end{cases}; \quad F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{e} \frac{e^{-p}}{p+1};$$

$$г) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ \sin t, & 2\pi < t < 3\pi \\ 0, & t > 3\pi \end{cases}; \quad F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} (e^{-2\pi p} + e^{-3\pi p});$$

$$д) f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ \sin 2\pi t, & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \\ -2, & t > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{2}{p} (1 - e^{-\frac{p}{2}} - e^{-\frac{3}{2}p}) + \frac{2\pi}{p^2 + 4\pi^2} (e^{-\frac{3p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}})$$

$$е) f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 < t < 1 \\ -t^2 + 4t - 3, & 1 < t < 3 \\ t - 3, & t > 3; \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} (1 - 3e^{-p} - 3e^{-3p}) - \frac{2}{p^3} (e^{-p} - e^{-3p}).$$

$$3. \text{ а) } \frac{2\omega(p+a)}{[(p+a)^2 + \omega^2]^2}; \text{ б) } \frac{(p+a)^2 - \omega^2}{[(p+a)^2 + \omega^2]^2}.$$

$$4. \text{ а) } \frac{A}{p} \frac{1 - e^{-\frac{pT}{2}}}{1 + e^{-\frac{pT}{2}}} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{pT}{4}; \text{ б) } \frac{A}{p(1 - e^{-pT})} - \frac{A}{pT^2}.$$

$$\text{ в) } \frac{2A}{Tp^2} \operatorname{th} \frac{pT}{4}; \text{ г) } \frac{A\omega}{(1 - e^{-\frac{pT}{2}})(p^2 + \omega^2)} \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right).$$

$$5. \text{ а) } \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t; \text{ б) } e^{3t} \cos(t\sqrt{2});$$

$$\text{ в) } 3 + \frac{t^2}{2} - 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t;$$

$$\text{ г) } e^{2t} \left[\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} t + \sqrt{2} \right) \sin(t\sqrt{2}) - 2t \cos(t\sqrt{2}) \right];$$

$$\text{ д) } 2 - 3 \cdot 1(t-1) + 1(t-3);$$

$$\text{ е) } \frac{1}{6} t^3 [1 + e^{-3t} \cdot 1(t-2)]; \text{ ж) } \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t);$$

з) функция, получающаяся при периодическом продолжении функции $\psi(t) = t^2 - Tt$ с интервала $[0, T]$ на всю положительную часть оси t .

$$\S 3. 1. \text{ а) } x = \frac{11}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \cos 3t + \sin 2t;$$

$$\text{ б) } x = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t;$$

$$\text{ в) } x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10} e^{2t} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t;$$

$$\text{ г) } x = t^2 - t + 1 - \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t;$$

$$\text{ д) } x = e^{t^2};$$

$$\text{ е) } x = \frac{1}{4} (t^2 - \operatorname{sh} t \cdot \sin t);$$

$$\text{ ж) } x = t^2 - 4 + \left(4 - \frac{3}{8} t \right) \cos t + \left(\frac{3}{8} + t - \frac{1}{8} t^2 \right) \sin t;$$

$$\text{ з) } x = \frac{1}{2} [1 - e^t (\cos t - \sin t)] \cdot 1(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} [1 - e^{t-1} (\cos(t-1) - \sin(t-1))] \cdot 1(t-1);$$

$$\text{ и) } x = \frac{2a}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} [1(t) - 1(t-\tau)].$$

2. а) $x = e^t (\cos t - 2 \sin t)$,

$y = e^t (\cos t + 3 \sin t)$;

б) $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$;

в) $x = -\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{23}}{2} t +$

$+\frac{11}{4\sqrt{23}} e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{23}}{2} t$;

$y = -\frac{1}{2} e^t - \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{5}{8} e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{23}}{2} t - \frac{73}{8\sqrt{23}} e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{23}}{2} t$;

г) $x = 2 - e^t$,

$y = -2 + 4e^t - te^t$,

$z = -2 + 5e^t - te^t$.

3. а) $x = \frac{1}{2} t^2 - t + 1 - e^{-t}$;

б) $x = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t - 1$.

§ 4. 1. а) $1 - \frac{t^2}{3! 2!} + \frac{t^4}{5! 4!} - \dots$;

б) $I_0(2\sqrt{t})$ (воспользоваться результатом примера 2 из п° 3.14);

в) $\frac{1}{t} (1 - e^{-t})$.

2. а) $4 + t + 2 \cos t - \sin t$, б) $4 \operatorname{ch} 2t + \cos 2t + \frac{3}{2} \sin 2t$;

в) $\frac{1}{2} t^2 \sin t$.

§ 5. 1. а) $e^{-at} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-at} + \sqrt{a} \operatorname{erf} \sqrt{at}$;

в) $\frac{2^{n+1} t^n}{(2n+1)!} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$; г) $e^t \operatorname{erf} \sqrt{t}$.

2. а) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(V p^2 + 1 - p)^{\frac{1}{2}}}{V p^2 + 1}$;

б) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(V p^2 + 1 + p)^{\frac{1}{2}}}{V p^2 + 1} \left(\text{исходить из функции } \frac{e^{pt}}{\sqrt{t}} \right)$.

3. а) $\frac{(V p^2 + 1 - p)^{\frac{1}{2}}}{2p \sqrt{p^2 + 1}}$; б) $\frac{(V p^2 + 1 + p)^{\frac{1}{2}}}{2p \sqrt{p^2 + 1}}$.

4. $x = c I_2(2\sqrt{t})$.

§ 6. 1. а) $f(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } 4k-3 < t < 4k-1 \ (k=1, 2, \dots), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

$$6) f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 4k-3 < t < 4k-1, \\ 2 & \text{при } 8k-5 < t < 8k-3 \quad (k = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ГЛАВА IV.

- § 3. 1. а) $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 3$; б) $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 0$.
 2. а) $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -1; x_4 = 4$ (единственное решение).
 б) бесчисленное множество решений $x_1 = -t; x_2 = 3 + x_4; x_3 = 6 + 2x_4$;
 в) система несовместна.
 3. а) $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2, x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2$;
 б) решений, отличных от нуля нет.

ГЛАВА V.

- § 1. 3. $P(A \cup B) = 0,96; P(A \cup C) = 0,98; P(B \cup C) = 0,06$.
 § 2. 1. $\frac{1}{2}; 2. \frac{1}{17}; 3. \frac{1}{12}; 4. \frac{63}{64}; 5. \frac{5}{104}$.
 § 3. 1. $0,94; 2. \frac{1}{3}; 3. 0,999$.
 § 4. 1. $0,962; 2. \frac{2}{19}; \frac{9}{38}; \frac{25}{38}$.
 § 5. 1. $0,431; 0,569; 0,0656; 0,00459$.
 § 6. 1. $0,065; 2. 0,999; 3. 19$.
 § 7. 1. 1) $0,639; 2) 0,692; 3) \pm 12$.
 2. 1) $0,449; 2) 0,359; 0,144$.
 § 10. 1. $F(x) = 0$, если $x < 0$; $F(x) = \frac{x^2}{2}$, если $0 < x < 1$;
 $F(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{2}$, если $1 < x < 2$; $F(x) = 1$, если $x > 2$.
 2. Плотность нормального распределения с параметрами $(-m), \sigma$.
 3. Плотность нормального распределения с параметрами $(m_1 - m_2) \times \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

ГЛАВА VI.

- § 1. 1. $20,04; 0,00432$.
 § 2. 1. $(-0,287; 0,461)$. 2. $(-0,206; 0,379)$. 3. $(0,850; 1,200)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие	3

Глава I

Функции комплексного переменного

§ 1. Комплексные числа	5
1.1. Комплексные числа	6
1.2. Сложение и вычитание	9
1.3. Умножение и деление	11
1.4. Возвышение в степень и извлечение корня	13
1.5. Сфера комплексных чисел	15
§ 2. Функции комплексного переменного	16
1.6. Области и их границы. Окрестности	16
1.7. Функции комплексного переменного	19
1.8. Предел последовательности	22
1.9. Предел функции	23
1.10. Непрерывность функции	24
§ 3. Простейшие трансцендентные функции	27
1.11. Показательная функция	27
1.12. Логарифмическая функция	28
1.13. Тригонометрические функции	29
1.14. Обратные тригонометрические функции	30
1.15. Гиперболические функции	31
1.16. Функции обратные гиперболическим	32
1.17. Общая степенная функция	32
§ 4. Производная и дифференциал	34
1.18. Производная	34
1.19. Условия Коши—Римана	34
1.20. Аналитические функции. Дифференциал	36
1.21. Связь аналитических функций с гармоническими	39
1.22. Геометрический смысл аргумента и модуля производной	40
1.23. Конформные отображения	42
§ 5. Конформные отображения	44
1.24. Общие принципы	44
1.25. Линейная функция	46
1.26. Инверсия	48
1.27. Функция $w = \frac{1}{z}$	50
1.28. Дробно линейная функция	51
1.29. Степенная функция	57
1.30. Радиал	59
1.31. Показательная функция	62
1.32. Логарифмическая функция	64
1.33. Функция Жуковского	66
1.34. Тригонометрические функции	70
1.35. Аналитические продолжения. Принцип симметрии	72
§ 6. Интегрирование функций комплексного переменного	76
1.36. Интеграл от функции комплексного переменного	76
1.37. Вычисление контурных интегралов	78
1.38. Теорема Коши	79
1.39. Независимость контурного интеграла от пути интегрирования	82

1.40.	Неопределенный интеграл	84
1.41.	Формула Ньютона—Лейбница	85
1.42.	Формула Коши	86
1.43.	Производные высших порядков от аналитической функции	88
1.44.	Теорема о среднем и некоторые ее следствия	89
§ 7.	Ряды	91
1.45.	Числовые ряды	91
1.46.	Функциональные ряды	94
1.47.	Степенные ряды	96
1.48.	Ряд Тейлора	99
1.49.	Ряд Лорана	102
1.50.	Нули аналитической функции	107
1.51.	Особые точки	108
1.52.	Связь между нулями и полюсами	111
1.53.	Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки	113
§ 8.	Вычеты функции	116
1.54.	Вычет функции в конечной изолированной особой точке	116
1.55.	Вычет функции в конечном полюсе	117
1.56.	Вычет функции в бесконечно удаленной точке	120
1.57.	Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов	122

Глава II

Элементы гармонического анализа

§ 1.	Тригонометрические многочлены и ряд Фурье	127
2.1.	Периодические функции	127
2.2.	Тригонометрические многочлены	128
2.3.	Формулы Эйлера—Фурье	130
2.4.	Ряд Фурье. Теорема Дирихле	131
2.5.	Ряд Фурье для функции, заданной на интервале длины T	133
2.6.	Ряды Фурье для четной и нечетной функции	134
2.7.	Ряды Фурье для функции, заданной на интервале $\left[0, \frac{T}{2}\right]$	140
2.8.	Практический гармонический анализ	142
2.9.	Связь между рядом Фурье и рядом Лорана	146
§ 2.	Ряды Фурье усиленной сходимости	148
2.10.	Порядок убывания коэффициентов Фурье	148
2.11.	О важности быстроты сходимости рядов Фурье	152
2.12.	Разложение функции в быстро сходящийся ряд Фурье (метод А. С. Малиева)	153
2.13.	Усиление сходимости рядов Фурье (метод А. Н. Крылова)	156
§ 3.	Спектры периодических функций	164
2.14.	Комплексное представление гармонического колебания	164
2.15.	Амплитудный и фазовый спектры периодической функции	165
2.16.	Равенство Парсеваля	167
2.17.	Высокочастотное колебание	168
§ 4.	Интеграл Фурье	172
2.18.	Интегральная теорема Фурье	172
2.19.	Аналогия с рядами Фурье	174
2.20.	Действительная форма интеграла Фурье	176
2.21.	Порядок убывания спектральной функции	179
2.22.	Равенство Парсеваля для непериодических функций	181

Глава III

Операционное исчисление

§ 1.	Оригиналы и изображения	183
3.1.	Оригиналы и изображения	183

32.	Существование изображений	185
33.	Примеры вычисления изображений. Дифференцирование и интегрирование изображений	188
§ 2	Основные теоремы операционного исчисления. Изображение периодических оригиналов	191
34.	Теорема подобия	191
35.	Теорема запаздывания	192
36.	Теорема смещения	196
37.	Теорема умножения	197
38.	Изображения периодических оригиналов	200
§ 3	Дифференцирование и интегрирование оригиналов Приложение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	203
39.	Дифференцирование оригиналов	203
310.	Интегрирование оригиналов	205
311.	Интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	205
312.	Интегрирование систем линейных уравнений	208
313.	Интеграл Дюамеля	209
§ 4	Теоремы разложения	211
314.	Первая теорема разложения	211
315.	Вторая теорема разложения	215
§ 5	Изображение некоторых специальных функций	220
316.	Импульсные функции Дирака	220
317.	Гамма-функция и изображения дробных степеней	222
318.	Функции Бесселя	224
§ 6	Общий способ определения оригинала по изображению	229
319.	Интеграл Бромвича	229
320.	Формула обращения Римана—Меллина	231
321.	Нахождение оригинала в случае, когда его изображение является мероморфной функцией	232
322.	Нахождение оригинала путем непосредственного применения формул обращения	235
323.	Преобразование Фурье и его связь с преобразованием Лапласа	238

Глава IV

Элементы линейной алгебры

§ 1.	Матрицы	241
4.1.	Первоначальные понятия	241
4.2.	Определители n -го порядка. Свойства и некоторые теоремы	242
4.3.	Действия над матрицами	245
4.4.	Линейные преобразования и матрицы	248
4.5.	Транспонирование матриц	250
4.6.	Обратная матрица	251
4.7.	Решение матричных уравнений	255
4.8.	Клеточные (блочные) матрицы	256
4.9.	Треугольные матрицы	259
4.10.	Ортогональные матрицы	262
4.11.	Модуль и норма матрицы	263
4.12.	Элементарные преобразования матриц	263
4.13.	Ранг матрицы	265
§ 2.	Элементы теории линейных векторных пространств	266
4.14.	Определение линейного векторного пространства	268
4.15.	Линейная зависимость векторов	269
4.16.	Размерность. Базис и координаты	270

4.17.	Арифметическое линейное пространство	271
4.18.	Евклидово пространство	272
4.19.	Преобразование координат	274
4.20.	Ортогональный базис	277
4.21.	Подпространства	277
4.22.	Изоморфизм линейных пространств	278
4.23.	Линейные оболочки. Гиперплоскость	280
§ 3.	Решение систем линейных уравнений	280
4.24.	Формулы Крамера	280
4.25.	Вычисление ранга матрицы	283
4.26.	Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера—Капелли	285
4.27.	Система линейных однородных уравнений	290
§ 4.	Характеристические числа и собственные векторы матрицы. Подобные матрицы	291
4.28.	Характеристические числа и собственные векторы матрицы	291
4.29.	Теорема Гамильтона—Кэли	294
4.30.	Подобные матрицы	297

Глава V

Теория вероятностей

§ 1.	Вероятность и ее основные свойства	300
5.1.	Испытания и события	300
5.2.	Частота и ее устойчивость	300
5.3.	Частные случаи, объединение и пересечение событий	302
5.4.	Примеры	304
5.5.	Поле событий	304
5.6.	Свойства частот событий поля	306
5.7.	Определение вероятностей событий поля	307
§ 2.	Примеры вычисления вероятностей	309
5.8.	Применение теоремы сложения вероятностей	309
5.9.	Классическое определение вероятностей	310
5.10.	Примеры классического подхода к вычислению вероятностей	312
§ 3.	Условные вероятности. Независимость событий и испытаний	314
5.11.	Условные частоты событий	314
5.12.	Определение условной вероятности	315
5.13.	Условная вероятность как вероятность на поле S_A	316
5.14.	Вероятность совмещения событий	317
5.15.	Теорема умножения вероятностей	318
5.16.	Независимость двух событий	319
5.17.	Независимость n событий и испытаний	319
5.18.	Надежность механизмов и систем	320
§ 4.	Формула полной вероятности. Формула Байеса	322
5.19.	Формула полной вероятности	322
5.20.	Формула Байеса	323
§ 5.	Схема Бернулли	325
5.21.	Определение и примеры	325
5.22.	Число осуществлений событий за n испытаний	326
§ 6.	Теорема Лапласа	327
5.23.	Локальная форма теоремы Лапласа	327
5.24.	Интегральная форма теоремы Лапласа	328
5.25.	Функция $\Phi(x)$ и таблица ее значений	330
5.26.	Вычисление вероятностей по теореме Лапласа	332
§ 7.	Закон больших чисел для схемы Бернулли. Теорема Пуассона	333
5.27.	Закон больших чисел	333
5.28.	Предельная формула Пуассона	336

§ 8. Случайные величины и распределение вероятностей. Закон больших чисел	338
5.29. Понятие случайной величины	338
5.30. Распределение вероятностей случайной величины	339
5.31. Числовые характеристики случайной величины	341
5.32. Примеры случайных величин	344
5.33. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин	345
5.34. Вычисление $M\mu$ и $D\mu$	347
5.35. Закон больших чисел	348
§ 9. Нормальное распределение. Центральная предельная теорема	352
5.36. Нормальное распределение и смысл его параметров	352
5.37. Центральная предельная теорема	354
§ 10. Векторные случайные величины	357
5.38. Случайный вектор и его распределение вероятностей	357
5.39. Частные и условные распределения вероятностей компонентов случайного вектора	359
5.40. Коэффициент корреляции	362
5.41. Равномерное распределение в двумерной области	364
5.42. Нормальное распределение двух измерений	365

Глава VI

Основные понятия математической статистики

§ 1. Выборка и выборочные распределения	367
6.1. Генеральная совокупность и выборка	367
6.2. Распределение выборки	368
6.3. Числовые характеристики выборки	369
6.4. Выравнивание эмпирических данных	371
6.5. Выборочные распределения	373
§ 2. Оценка параметров генеральной совокупности	375
6.6. Точечные оценки	375
6.7. Доверительные интервалы	379
6.8. Выборочные распределения некоторых статистик	382
6.9. Доверительные интервалы (продолжение)	386
§ 3. Статистическая проверка гипотез	388
6.10. Описание способа проверки гипотез	388
6.11. Критерии значимости для проверки гипотез о среднем значении	391
6.12. Критерии согласия	393
§ 4. Построение эмпирических линий регрессии	396
6.13. Выборка из двумерной генеральной совокупности и ее числовые характеристики	396
6.14. Линии регрессии выборки	397
Ответы к задачам главы I	400
Ответы к задачам главы II	404
Ответы к задачам главы III	408
Ответы к задачам главы IV	411
Ответы к задачам главы V	411
Ответы к задачам главы VI	411