Б. А. ДУБРОВИН, С. П. НОВИКОВ, А. Т. ФОМЕНКО

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических специальностей университетов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.151
Д 79
УДК 514

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. **Современная геометрия: Методы и приложения.**— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.— 760 с.

Книга включает геометрию Евклида и Минковского, их группы преобразований, классическую геометрию кривых и поверхностей, тензорный анализ и риманову геометрию, вариационное исчисление и теорию поля, основы теории относительности, понятие многообразия и важнейшие примеры, основы теории расслоений, гомотопий и гомологий, некоторые их приложения, в частности, к теории калибровочных полей.

1-е издание выходило в 1979 г.

Для студентов университетов — математиков, механиков, физиков-теоретиков, начиная со 2-го курса. Книга будет полезна также аспирантам и научным работникам.

Рецензенты:
академик *А. В. Погорелов*,
член-корреспондент АН СССР *Ю. Г. Решетняк*

Д $\frac{1702040000-046}{053(02)-86}$ 58-85

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы, 1979;
с изменениями, 1986

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 10

ЧАСТЬ I

ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ПОЛЕЙ

Глава 1. Геометрия в области пространства. Основные понятия . 17

§ 1. Системы координат 17
1. Декартовы координаты в пространстве (17). 2. Замена координат (19).

§ 2. Евклидово пространство 23
1. Кривая в евклидовом пространстве (24). 2. Квадратичные формы и векторы (29).

§ 3. Римановы и псевдоримановы пространства 32
1. Риманова метрика (32). 2. Метрика Минковского (35).

§ 4. Простейшие группы преобразований евклидова пространства 37
1. Группы преобразований области (37). 2. Преобразования плоскости (38). 3. Движения трехмерного евклидова пространства (44). 4. Другие примеры групп преобразований (47).

§ 5. Формулы Френе 50
1. Кривизна плоских кривых (50). 2. Пространственные кривые. Кривизна и кручение (55). 3. Ортогональные преобразования, зависящие от параметра (58).

§ 6. Псевдоевклидовы пространства 61
1. Простейшие понятия специальной теории относительности (61). 2. Преобразования Лоренца (63).

Глава 2. Теория поверхностей 70

§ 7. Геометрия на поверхности в пространстве 70
1. Координаты на поверхности (70). 2. Касательная плоскость (73). 3. Метрика на поверхности (74). 4. Площадь поверхности (78).

§ 8. Вторая квадратичная форма 82
1. Кривизна кривых на поверхности в евклидовом пространстве (82). 2. Инварианты пары квадратичных форм (84). 3. Свойства второй квадратичной формы (86).

§ 9. Метрика сферы 91

§ 10. Пространственноподобные поверхности в псевдоевклидовом пространстве 93
1. Псевдосфера (93). 2. Кривизна пространственноподобных поверхностей в $\mathbb{R}^3_1$ (96).

§ 11. Комплексный язык в геометрии 97
1. Комплексные и вещественные координаты (97). 2. Эрмитово скалярное произведение (99). 3. Примеры групп комплексных преобразований (100).

§ 12. Аналитические функции 102
1. Комплексная запись элемента длины и дифференциала функции (102). 2. Комплексные замены координат (104). 3. Поверхности в комплексном пространстве (107).
§ 13. Конформный вид метрик поверхностей 109
1. Изотермические координаты. Гауссова кривизна в конформных координатах (109). 2. Метрики сферы и плоскости Лобачевского в конформном виде (112). 3. Поверхности постоянной кривизны (114).
§ 14. Группы преобразований как поверхности в N-мерном пространстве 116
1. Координаты в окрестности единицы (116). 2. Экспонента от матрицы (122). 3. Кватернионы (124).
§ 15. Конформные преобразования многомерных евклидовых и псевдоевклидовых пространств 129

Глава 3. Тензоры. Алгебраическая теория 136

§ 16. Примеры тензоров 136
§ 17. Общее определение тензора 142
1. Закон преобразования компонент тензоров произвольного ранга (142). 2. Алгебраические операции над тензорами (148).
§ 18. Тензоры типа $(0, k)$ 151
1. Дифференциальная форма записи тензоров с нижними индексами (151). 2. Кососимметрические тензоры типа $(0, k)$ (153). 3. Внешнее произведение дифференциальных форм. Внешняя алгебра (156). 4. Кососимметрические тензоры типа $(k, 0)$ (поливекторы). Интеграл от антикоммутирующих переменных (157).
§ 19. Тензоры в римановом и псевдоримановом пространстве . 159
1. Поднятие и опускание индексов (159). 2. Собственные значения квадратичной формы (161). 3. Оператор * (162). 4. Тензоры в евклидовом пространстве (162).
§ 20. Кристаллографические группы и конечные подгруппы группы вращений плоскости и пространства. Примеры инвариантных тензоров 164
§ 21. Тензоры ранга 2 в псевдоевклидовом пространстве и их собственные значения 184
1. Кососимметрические тензоры. Инварианты электромагнитного поля (184). 2. Симметрические тензоры и собственные значения. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (187).
§ 22. Поведение тензоров при отображениях 190
1. Общая операция ограничения тензоров с нижними индексами (190). 2. Отображение касательных пространств (191).
§ 23. Векторные поля 192
1. Однопараметрические группы диффеоморфизмов (192). 2. Экспонента от векторного поля (194). 3. Производная Ли. Примеры (195).
§ 24. Алгебры Ли 199
1. Алгебры Ли и векторные поля (199). 2. Основные матричные алгебры Ли (201). 3. Линейные векторные поля (206). 4. Левоинвариантные поля на группах преобразований (208). 5. Метрика Киллинга (209). 6. Классификация трехмерных алгебр Ли (210). 7. Алгебра Ли конформной группы (211).

Глава 4. Дифференциальное исчисление тензоров 217

§ 25. Дифференциальное исчисление кососимметрических тензоров 217
1. Градиент кососимметрического тензора (217). 2. Внешний дифференциал формы (220).

§ 26. Кососимметрические тензоры и теория интегрирования . 225
1. Интегрирование дифференциальных форм (225). 2. Примеры дифференциальных форм (230). 3. Общая формула Стокса. Примеры (235). 4. Доказательство общей формулы Стокса для куба (242).

§ 27. Дифференциальные формы в комплексных пространствах 244
1. Операторы d' и d'' (244). 2. Кэлерова метрика. Форма кривизны (247).

§ 28. Ковариантное дифференцирование 249
1. Евклидова связность (249). 2. Ковариантное дифференцирование тензоров произвольного ранга (257).

§ 29. Ковариантное дифференцирование и метрика 261
1. Параллельный перенос векторных полей (261). 2. Геодезические (263). 3. Связности, согласованные с метрикой (264). 4. Связности, согласованные с комплексной структурой (267).

§ 30. Тензор кривизны 271
1. Общий тензор кривизны (271). 2. Симметрии тензора кривизны. Тензор кривизны, порожденный метрикой (275). 3. Примеры: тензор кривизны двух- и трехмерных пространств, метрики Киллинга (276). 4. Уравнения Петерсона — Кодацци. Поверхности постоянной отрицательной кривизны и уравнение «sin-gordon» (281).

Глава 5. Элементы вариационного исчисления 286

§ 31. Одномерные вариационные задачи 286
1. Уравнения Эйлера — Лагранжа (286). 2. Основные примеры функционалов (289).

§ 32. Законы сохранения 293
1. Группы преобразований, сохраняющих вариационную задачу (293). 2. Некоторые примеры. Применение законов сохранения (294).

§ 33. Гамильтонов формализм 304
1. Преобразование Лежандра (304). 2. Движущиеся системы координат (306). 3. Принципы Мопертюи и Ферма. Приложения (310).

§ 34. Геометрическая теория фазового пространства 312
1. Градиентные системы (312). 2. Скобка Пуассона (314). 3. Канонические преобразования (319).

§ 35. Лагранжевы поверхности 323
1. Пучки траекторий и уравнение Гамильтона — Якоби (323). 2. Случай гамильтонианов, являющихся однородными функциями первого порядка от импульсов (326).

§ 36. Вторая вариация для уравнения геодезических . . . 329
1. Формула второй вариации (329). 2. Сопряженные точки и условие минимальности (332).

Глава 6. Многомерные вариационные задачи. Поля и их геометрические инварианты 335

§ 37. Простейшие многомерные вариационные задачи . . . 335
1. Уравнения Эйлера — Лангранжа (335). 2. Тензор энергии-импульса (338). 3. Уравнения электромагнитного поля (342).

4. Уравнения гравитационного поля (348). 5. Мыльные пленки (355). 6. Уравнение равновесия тонкой пластинки (360).
§ 38. Примеры лагранжианов 365
§ 39. Простейшие понятия общей теории относительности . . 368
§ 40. Спинорное представление групп $SO(3)$ и $O(3, 1)$. Уравнение Дирака и его свойства 382
1. Автоморфизмы алгебры матриц (382). 2. Спинорное представление группы $SO(3)$ (383). 3. Спинорное представление группы Лоренца (385). 4. Уравнение Дирака (388). 5. Уравнение Дирака в электромагнитном поле. Оператор зарядового сопряжения (390).
§ 41. Ковариантное дифференцирование полей с произвольной симметрией 391
1. Калибровочные преобразования. Калибровочно инвариантные лагранжианы (391). 2. Форма кривизны (394). 3. Основные примеры (395).
§ 42. Примеры калибровочно инвариантных функционалов. Уравнения Максвелла и Янга — Миллса. Функционалы с тождественно нулевой вариационной производной (характеристические классы) 399

ЧАСТЬ II

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ

Глава 1. **Примеры многообразий** 407

§ 1. Понятие многообразия 407
1. Определение многообразия (407). 2. Отображения многообразий; тензоры на многообразии (411). 3. Вложения и погружения многообразий. Многообразия с краем (414).
§ 2. Простейшие примеры многообразий 416
1. Поверхности в евклидовом пространстве. Группы преобразований как многообразия (416). 2. Проективные пространства (421).
§ 3. Необходимые сведения из теории групп Ли 424
1. Строение окрестности единицы группы Ли. Алгебра Ли группы. Полупростота (424). 2. Понятие (линейного) представления. Пример нематричной группы Ли (430).
§ 4. Комплексные многообразия 433
1. Определения и примеры (433). 2. Римановы поверхности как многообразия (439).
§ 5. Простейшие однородные пространства 442
1. Действие группы на многообразии (442). 2. Примеры однородных пространств (443).
§ 6. Пространства постоянной кривизны (симметрические пространства) 447
1. Понятие симметрического пространства (447). 2. Группа изометрий. Свойства ее алгебры Ли (449). 3. Симметрические пространства 1-го и 2-го типов (451). 4. Группы Ли как симметрические пространства (452). 5. Построение симметрических пространств. Примеры (454).
§ 7. Линейные элементы и связанные с ними многообразия . . 458
1. Конструкции, связанные с касательными векторами (458). 2. Нормальное расслоение к подмногообразию (461).

Глава 2. Вопросы обоснования. Необходимые сведения из теории функций. Типичные гладкие отображения 464

§ 8. Разбиение единицы и его применения 464
1. Разбиение единицы (464). 2. Простейшие применения разбиения единицы. Интеграл по многообразию и формула Стокса (468). 3. Инвариантные метрики (473).

§ 9. Реализация компактных многообразий как поверхностей в $\mathbb{R}^N$ 475

§ 10. Некоторые свойства гладких отображений многообразий . 475
1. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими (475). 2. Теорема Сарда (477). 3. Трансверсальная регулярность (481). 4. Функции Морса (484).

§ 11. Применения теоремы Сарда 488
1. Существование вложений и погружений (488). 2. Построение функций Морса как функций высоты (491). 3. Фокальные точки (493).

Глава 3. Степень отображения. Индекс пересечения. Их приложения 496

§ 12. Понятие гомотопии 496
1. Определение гомотопии. Аппроксимация отображений и гомотопий гладкими (496). 2. Относительные гомотопии (498).

§ 13. Степень отображения 499
1. Определение степени (499). 2. Обобщения основного определения (500). 3. Гомотопическая классификация отображений многообразия в сферу (502). 4. Простейшие примеры (503).

§ 14. Некоторые применения степени 506
1. Степень и интеграл (506). 2. Степень векторного поля на гиперповерхности (507). 3. Число Уитни. Формула Гаусса — Бонне (509). 4. Индекс особой точки векторного поля (513). 5. Трансверсальная поверхность векторного поля. Теорема Пуанкаре — Бендиксона (516).

§ 15. Индекс пересечения и его применения 519
1. Определение индекса пересечения (519). 2. Суммарная особенность векторного поля (521). 3. Алгебраическое число неподвижных точек. Теорема Брауэра (523). 4. Коэффициент зацепления (525).

Глава 4. Ориентируемость многообразий. Фундаментальная группа. Накрытия (расслоенные пространства с дискретным слоем) . . 527

§ 16. Ориентируемость и гомотопия замкнутых путей 527
1. Перенос ориентации вдоль пути (527). 2. Примеры неориентируемых многообразий (529).

§ 17. Фундаментальная группа 530
1. Определение фундаментальной группы (530). 2. Зависимость от начальной точки (532). 3. Свободные гомотопические классы отображений окружности (532). 4. Гомотопическая эквивалентность (533). 5. Примеры (534). 6. Фундаментальная группа и ориентируемость (536).

§ 18. Накрытие и накрывающая гомотопия 537
1. Определение и фундаментальные свойства накрытий (537). 2. Простейшие примеры. Универсальное накрытие (539). 3. Разветвленные накрытия. Римановы поверхности (541). 4. Накрытия и дискретные группы преобразований (543).

§ 19. Накрытия и фундаментальная группа. Вычисление фундаментальной группы некоторых многообразий 544
1. Монодромия (544). 2. Вычисление фундаментальной группы с помощью накрытий (547). 3. Простейшая гомологическая группа (550).
§ 20. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского . 552

Глава 5. **Гомотопические группы** 567

§ 21. Определение абсолютных и относительных гомотопических групп. Примеры 567
1. Основные определения (567). 2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары (570).
§ 22. Накрывающая гомотопия. Гомотопические группы накрытий и пространств петель 573
1. Понятие расслоения (573). 2. Точная последовательность расслоения (575). 3. Зависимость гомотопических групп от начальной точки (577). 4. Случай групп Ли (580). 5. Умножение Уайтхеда (582).
§ 23. Сведения о гомотопических группах сфер. Оснащенные многообразия. Инвариант Хопфа 585
1. Оснащенные многообразия и гомотопические группы сфер (585). 2. Надстройка (589). 3. Вычисление групп $\pi_{n+1}(S^n)$ (591). 4. Группы $\pi_{n+2}(S^n)$ (592).

Глава 6. **Гладкие расслоения (косые произведения)** 596

§ 24. Гомотопическая теория косых произведений 596
1. Понятие гладкого расслоения (596). 2. Связность (601). 3. Вычисление гомотопических групп с помощью расслоений (603). 4. Классификация расслоений (609). 5. Векторные расслоения и операции над ними (614). 6. Мероморфные функции (616). 7. Формула Пикара — Лефшеца (620).
§ 25. Дифференциальная геометрия расслоений 622
1. G-связности в главных расслоениях (622). 2. G-связности в ассоциированных расслоениях. Примеры (627). 3. Кривизна (630). 4. Характеристические классы. Конструкции (635). 5. Характеристические классы. Перечисление (641).
§ 26. Узлы и зацепления. Косы 649
1. Группа узла (649). 2. Полином Александера (651). 3. Расслоение, связанное с узлом (652). 4. Зацепления (654). 5. Косы (655).

Глава 7. **Некоторые примеры динамических систем и слоений на многообразиях** 658

§ 27. Простейшие понятия качественной теории динамических систем. Двумерные многообразия 658
1. Основные определения (658). 2. Динамические системы на торе (662).
§ 28. Гамильтоновы системы на многообразиях. Теорема Лиувилля. Примеры 667
1. Гамильтоновы системы в кокасательном расслоении (667). 2. Гамильтоновы системы на многообразиях. Примеры (668). 3. Геодезические потоки (671). 4. Теорема Лиувилля (673). 5. Примеры (675).
§ 29. Слоения 679
1. Основные определения (679). 2. Примеры слоений коразмерности 1 (682).

§ 30. Вариационные задачи с высшими производными. Гамильтоновы полевые системы 688
1. Гамильтонов формализм задач с высшими производными (688). 2. Примеры (691). 3. Гамильтонов формализм полевых систем (694).

Глава 8. **Глобальная структура решений многомерных вариационных задач** 703

§ 31. Некоторые многообразия общей теории относительности (ОТО) 703
1. Постановка задачи (703). 2. Сферически симметричные решения (704). 3. Аксиально симметричные решения (712). 4. Космологические модели (716). 5. Модели Фридмана (718). 6. Анизотропные вакуумные модели (722). 7. Более общие модели (726).

§ 32. Некоторые примеры глобальных решений уравнений Янга — Миллса. Киральные поля 731
1. Общие замечания. Решения типа монополей (731). 2. Уравнение дуальности (736). 3. Киральные поля. Интеграл Дирихле (739).

§ 33. Минимальность комплексных подмногообразий 748

Список литературы 753
Предметный указатель 755

ПРЕДИСЛОВИЕ

До последнего времени риманова геометрия и основы топологии не входили в программы обязательного университетского математического образования даже для математических факультетов. Раньше существовали (и до сих пор существуют кое-где) курсы классической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей, на которые все постепенно стали смотреть как на анахронизм. Однако до сих пор нет единой точки зрения на то, как именно эти курсы следует модернизировать, какую часть современной геометрии следует считать общеобязательным элементом современной математической культуры, сколь абстрактным должен быть язык ее изложения.

Модернизированный курс геометрии начал создаваться на отделении механики механико-математического факультета МГУ в 1971 г. Здесь точка зрения на содержание и уровень абстрактности изложения геометрического курса диктовалась соображениями необходимости: кроме геометрии кривых и поверхностей теория тензоров, их ковариантное дифференцирование, риманова кривизна, геодезические и вариационное исчисление, включая законы сохранения и гамильтонов формализм, особый случай кососимметрических тензоров («форм»), операций над ними, многомерные формулы типа Стокса и их инвариантная запись безусловно полезны в различных разделах механики, особенно в механике сплошных сред, теории относительности и др. Многие ведущие механики разделяли точку зрения математиков о полезности внедрения некоторых сведений из теории многообразий, групп преобразований, алгебр Ли, а также изложения простейших идей наглядной топологии. При этом язык изложения всех частей курса должен был быть предельно простым, не абстрактным, терминология — общей с той, которая используется физиками всюду, где это возможно. Этот материал и составил первоначальный курс, записанный и изданный в МГУ в виде пособий:

Новиков С. П. Дифференциальная геометрия, части I и II.— Ротапринт НИИ механики при МГУ, 1972.

В дальнейшем авторы видоизменяли разные части курса, добавляли новые. Эти дополнения были изданы в МГУ:

Новиков С. П., Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия, часть III.— Ротапринт НИИ механики при МГУ, 1974.

Эта книга написана авторами в результате обработки, упорядочения и дальнейшего развития ротапринтных пособий по геометрии, о которых мы упоминали выше. Она, как нам кажется, может служить учебным пособием, на базе которого без труда формируется обязательный геометрический курс.

Идея создания пособия такого типа и план книги принадлежат С. П. Новикову. Работа по согласованию материала упомянутых выше ротапринтных пособий с этим планом была проведена Б. А. Дубровиным. Это составило

более половины первой части книги. Весь остальной материал пришлось писать целиком заново. Неоценимый вклад при завершении работы над книгой внес редактор Д. Б. Фукс.

Содержание написанной нами книги значительно выходит за рамки обязательного курса, который может быть прочитан студентам 2—3-го курсов университета. Это сделано авторами преднамеренно: мы хотели, чтобы уже в части I ряд разделов книги служил для дальнейшего самостоятельного ознакомления студентов и аспирантов с более сложными геометрическими по своей сути понятиями и методами теории групп преобразований и алгебр Ли, теории поля и вариационного исчисления, в частности с теми, которые играют фундаментальную роль в математическом формализме физики. При этом мы старались минимизировать уровень абстрактности языка изложения и системы обозначений, жертвуя часто так называемой «общностью» формулировок и доказательств: нередко важный факт в узловых, определяющих всю суть дела примерах может быть получен из элементарных соображений классического анализа и геометрии, не использующих никакие современные «сверхинвариантные» понятия и обозначения, но его формулировка и особенно доказательство «в общем виде» требуют резкого усложнения уровня формализации и абстрактности. В таких случаях мы излагали вывод именно для этих важнейших примеров на том простейшем языке, который для этого нужен, оставляя доказательство общего утверждения за рамками этой книги или помещая его уже потом. При изложении геометрических вопросов, связанных с современной физикой более тесно, мы анализировали физическую литературу: довольно большие начальные части книг по квантовой теории поля (например [36], [37]) содержат ряд полезных сведений о важных понятиях, связанных с многомерным вариационным исчислением и простейшими представлениями групп Ли в той форме, в какой они используются физиками; книги [38], [39] посвящены теории полей, геометрических по своему смыслу; например, существенная часть книги [38] является изложением римановой геометрии в физическом аспекте и содержит много полезного конкретного материала. Любопытно посмотреть также книги по механике сплошных сред и теории твердого тела ([40] — [42]), чтобы составить себе представление о некоторых применениях тензоров, теории групп и т. д.

При написании книги авторы не стремились к полному «самообслуживанию»: в математическом образовании изучение геометрии является лишь одной из компонент; ряд вопросов анализа, дифференциальных уравнений, алгебры, элементов общей топологии и теории меры излагается в других курсах. Мы в данной книге не занимались изложением этих вопросов, лишь в случае необходимости напоминая формулировки.

Вторая часть книги, посвященная геометрии и топологии многообразий, содержит гораздо больше материала, выходящего за рамки обязательного курса, чем первая. Книг по топологии и геометрии многообразий было написано немало; однако большинство их посвящено узким частям этой области и написано языком (как правило, весьма абстрактным), специально приспособленным только для изложения данного узкого раздела со всеми обоснованиями, являющимися зачастую основными источниками сложно-

сти. По мере возможности мы и в этой части соблюдали принципы минимальной абстрактности изложения, предпочтения важнейших примеров общим теоремам и возможной независимости изложения разных глав, чтобы каждую из них в отдельности было легче читать (если это вообще допускается сутью дела). Однако следует иметь в виду такое обстоятельство: хотя ряд понятий топологии (например, узлы и зацепления, фундаментальная группа, гомотопические группы, расслоенные пространства) вводится без особого труда, попытки серьезно использовать их в простейших примерах неизбежно требуют развития некоторого аппарата, не представленного никакими аналогиями в классической математике. Вследствие этого сложность второй части для читателя, даже хорошо владеющего аппаратом классической математики, но впервые изучающего элементы топологии, существенно выше, чем в первой части,— тут ничего не поделаешь. Внедрение этих методов в различные разделы самой математики, начиная с 50-х годов, было весьма интенсивным. В последние годы возник ряд «ростков» нетривиального применения методов топологии (иногда вместе с комплексной алгебраической геометрией) в ряде современных математико-физических задач: в квантовой теории конкретных полей, имеющих геометрическую природу, например полей Янга — Миллса, киральных полей, в теории жидких кристаллов и сверхтекучести, в общей теории относительности, в теории некоторых важных в физике нелинейных волновых уравнений, например, Кортевега — де Фриза, sin-gordon и др., в статистической механике некоторых веществ с «длинными молекулами» (попытки применения узлов и зацеплений). Мы не можем, к сожалению, изложить сами эти приложения в рамках данной книги, так как их изложение в каждом случае потребовало бы большого количества предварительных физических сведений, которые увели бы нас весьма далеко. Однако при подборе материала мы считались с информацией о том, какие топологические соображения и понятия имеются в этих приложениях, зная о необходимости иметь по топологии книгу, которую мог бы (при сильном желании) прочесть молодой физик-теоретик современной школы, и при этом с определенной пользой.

Развитие топологических и геометрических идей за последние 20 лет потребовало существенного усложнения алгебраического аппарата, переплетающегося с многомерной геометрической интуицией, глубокого использования функционального анализа и теории уравнений в частных производных, комплексного анализа; все это не вошло в данную книгу, претендующую на элементарность (многое из этого не изложено до сих пор ни в одной книге учебного типа и изучается лишь по журнальным статьям и монографиям).

Наглядным и общеполезным разделом классической геометрии поверхностей в трехмерном пространстве является также геометрия в целом, в особенности теория выпуклых фигур и ее приложения. Большой интерес также представляют глобальные проблемы теории поверхностей отрицательной кривизны. Не будучи специалистами в этих областях, авторы не смогли выделить из них достаточно простых и иллюстративных «выжимок», которые могли бы быть помещены в элементарную книгу. С этими разделами геометрии читатель может познакомиться по книгам [4]—[6].

По техническим соображениям третья часть книги, относящаяся к теории гомологий, будет издана авторами отдельно.

Из книг по топологии и геометрии многообразий по самому подходу к выбору материала авторам оказались наиболее близкими классические книги Зейферта и Трельфалля «Топология» и «Вариационное исчисление в целом», а также более современные прекрасные книги [11], [12], [17]. Материал этих книг и методика их авторов активно использовались и продумывались нами в процессе работы. Если говорить о второй части, мы хотели написать нечто вроде современного аналога книги типа «Топология» Зейферта и Трельфалля, однако гораздо более разносторонней по содержанию, перестроенной по мере возможности на технику современной теории гладких многообразий с упрощенным языком, обогащенную новым материалом, ориентированную на сегодняшнее представление о значении топологических методов, о возможном читателе, впервые изучающем топологическую книгу, но желающем узнать не слишком мало и при этом за минимально возможное время. Нам казалось разумным в той мере, в которой это вообще возможно в математической книге (особенно в первой части), пытаться использовать методический опыт, накопленный физиками: как сделать математически нетривиальные явления понятными с помощью минимальных общедоступных средств (не отказываясь, разумеется, от характерного для математической литературы выделения в тексте явных формулировок теорем и лемм). В любом случае, по нашему мнению, понимание должно предшествовать формализации и обоснованию. Существует немало фактов, использование которых в применениях никак не связано с тем, как именно этот факт был доказан (лишь бы он был верен). Иногда в процессе разбора примеров (особенно в более сложных разделах второй части) мы приводим такие факты без доказательства и затем их используем. Нам этот прием кажется оправданным. Читатель, наконец, сам сможет (если захочет) разобрать по другой литературе доказательство факта, приложения которого он уже хорошо знает. (Для этого мы рекомендуем книгу [26].) Впрочем, мы старались разбить доказательство таких фактов на вполне решаемые задачи, помещенные в соответствующих параграфах в число упражнений.

В двух последних главах книги помещен ряд извлечений из современной литературы по динамическим системам и слоениям, общей теории относительности, теории полей Янга — Миллса и киральных полей. Излагаемые здесь идеи принадлежат различным современным авторам. В данной книге, носящей чисто учебный характер, мы сочли возможным не приводить соответствующего длинного списка цитирований. Читатель, который будет изучать эти вопросы более глубоко по современной литературе, найдет в ней и соответствующие цитирования.

В заключение авторы хотели бы выразить свою глубокую благодарность коллегам по механико-математическому факультету МГУ, чья ценная поддержка сделала возможной работу над новыми геометрическими курсами и их внедрением. Из числа ведущих математиков факультета это относится в первую очередь к создателю школы советских топологов П. С. Александрову и известным геометрам П. К. Рашевскому и Н. В. Ефимову.

Авторы благодарны редактору книги Д. Б. Фуксу за большую работу по усовершенствованию рукописи, а также рецензентам А. Д. Александрову, А. В. Погорелову, Ю. Ф. Борисову, В. А. Топоногову, В. И. Кузьминову, сделавшим ряд полезных замечаний.

Авторы выражают также особую благодарность ученым, способствовавшим внесению в материал книги ряда нестандартных разделов. Например, доказательство теоремы Лиувилля о конформных отображениях отсутствует в общедоступной литературе и было сообщено авторам В. А. Зоричем. Редактор книги Д. Б. Фукс указал авторам простые доказательства ряда теорем. Авторы благодарят также О. И. Богоявленского, М. И. Монастырского, С. Г. Гиндикина, Э. Б. Винберга, Д. В. Алексеевского, И. В. Грибкова, П. Г. Гриневича.

При подготовке второго издания книги авторы учли многочисленные отзывы и пожелания читателей — от студентов и аспирантов до крупных ученых, математиков и физиков. Наиболее значительной методической перестройке подверглись разделы, посвященные геометрической теории фазового пространства и гамильтонова формализма. Дано также систематическое изложение бесконечномерного (теоретико-полевого) обобщения гамильтонова формализма. Далее, в качестве одного из приложений теории кососимметрических тензоров в § 18 включен формализм так называемого интегрирования по антикоммутирующим переменным. Методически улучшены главы, посвященные многомерному вариационному исчислению. Серьезно расширен текст начала второй части с тем, чтобы более элементарно подвести читателя к понятию многообразия. Ликвидированы некоторые ошибки в доказательстве теоремы Лиувилля о вполне интегрируемых системах. Были устранены некоторые другие недочеты и замеченные опечатки и расширен список литературы.

Авторы благодарят Я. Б. Зельдовича, замечания которого позволили улучшить изложение в ряде мест при подготовке английского и французского изданий книги (разумеется, эти улучшения сделаны и в настоящем издании). Авторы благодарны также рецензентам переработанного варианта книги А. В. Погорелову и Ю. Г. Решетняку за ряд полезных замечаний.

Часть I

ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ПОЛЕЙ

Глава 1

ГЕОМЕТРИЯ В ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Системы координат

Мы начнем с обсуждения некоторых понятий, лежащих в основе геометрии. Школьная, греческая геометрия изучала различные метрические свойства простейших геометрических фигур. Основные задачи, решаемые в ней,— нахождение соотношений между длинами и углами треугольников и многоугольников. Кроме того, на базе этого были вычислены площади поверхностей и объемы некоторых тел. Центральные понятия школьной геометрии, на основе которых она строилась,— это длина отрезка прямой (или кривой для случая окружности), а также угол между двумя пересекающимися линиями (прямыми или кривыми).

Основная цель аналитической геометрии — описание геометрических фигур формулами в декартовой системе координат на плоскости или в трехмерном пространстве. По сравнению со «школьной» геометрией здесь изменился лишь метод, но предмет остался тем же самым. Равным образом и дифференциальная геометрия — это тот же предмет, но дополнительно здесь будут глубоко использоваться средства дифференциального исчисления и линейной алгебры. При этом дифференциальная геометрия расширяет класс рассматриваемых объектов, вводя в рассмотрение общие гладкие фигуры.

1. Декартовы координаты в пространстве. Итак, наши основные представления о геометрии таковы:

1. Геометрия разворачивается в некотором пространстве, которое состоит из точек P, Q, ...

2. Следуя методу аналитической геометрии, в это пространство можно ввести декартовы координаты. Введение декартовых координат в пространство означает, что каждой точке пространства поставлен в соответствие набор действительных чисел x^1, ..., x^n, называемых ее *координатами*, причем требуется выполнение следующих свойств:

а) разным точкам пространства соответствуют разные наборы координат; это означает, что две точки P и Q с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^n)$ совпадают в том и только том случае, если $x^i = y^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

б) наоборот, каждому набору $(x^1, \ldots, x^n)$, где x^i — любые действительные числа, должна соответствовать какая-то точка P изучаемого пространства.

Определение 1. Пространство, в котором введены декартовы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ так, что выполняются перечисленные свойства, называется *n-мерным декартовым пространством* *) и обозначается через $\mathbb{R}^n$. Число n называется *числом измерений* или *размерностью* пространства.

Часто мы будем называть сами наборы $(x^1, \ldots, x^n)$ точками декартова пространства. Простейший пример декартова пространства — это числовая прямая, которая является одномерным декартовым пространством. Здесь имеется только одна координата $x^1 (n = 1)$. Другие примеры, появляющиеся в аналитической геометрии,— это декартовы координаты на плоскости (двумерное декартово пространство) и в «обычном», т. е. трехмерном, пространстве (рис. 1). Этих примеров было вполне достаточно для решения задач «школьной» геометрии.

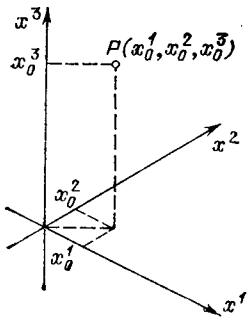


Рис. 1

Укажем менее привычный, но крайне важный пример декартова пространства. Современные физические представления не допускают разделения пространства и времени и сразу апеллируют к четырехмерному пространственно-временно́му континууму. Эта форма математического подхода к упорядочению явлений природы является чрезвычайно удобной.

Точками пространственно-временно́го континуума являются события. Каждому событию поставим в соответствие набор из четырех чисел (t, x^1, x^2, x^3), где t — «момент времени», когда произошло событие, x^1, x^2, x^3 — координаты «места события». Величины (t, x^1, x^2, x^3) и будут декартовыми координатами в пространственно-временно́м континууме. Таким образом, пространственно-временно́й континуум есть четырехмерное декартово пространство. Теперь можно забыть исходную интерпретацию координат (t, x^1, x^2, x^3) как времени и места события. Трехмерное пространство, в котором разворачивается классическая геометрия, тогда будет просто поверхностью уровня $t = \text{const}$. Процесс жизни каждого объекта, который можно в любой момент времени считать одноточечным («точечной частицы»), отождествляется с линией $x^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, в четырехмерном пространстве. Эту линию мы назовем *мировой линией точечной частицы* (рис. 2). Мы также будем рассматривать трехмерный и даже двумерный пространственно-временной континуум с координатами (t, x^1, x^2)

*) Возможно, такая терминология не является общеупотребительной. Мы надеемся, что это не смутит читателя.

и (t, x^1) соответственно, так как в этих случаях легче рисовать.

2. Замена координат. Пусть в n-мерном декартовом пространстве задана числовая функция $f(P)$, т. е. функция от положения точки P в пространстве. Пользуясь декартовыми координатами, мы можем представить функцию f как функцию от n действительных переменных: если $P=(x^1, \ldots, x^n)$, то $f(P)=f(x^1, \ldots, x^n)$. Мы будем рассматривать только непрерывные (и даже непрерывно дифференцируемые) функции $f(x^1, \ldots, x^n)$. Функции f могут быть определены не на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, а только на его части — на области пространства.

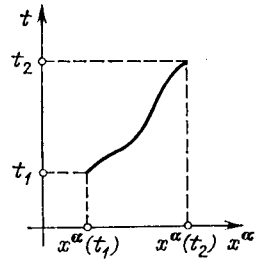


Рис. 2

Определение 2. *Область или область без границы* (открытое множество) — это совокупность D точек в $\mathbb{R}^n$ такая, что вместе с любой точкой из этой совокупности ей принадлежат также все достаточно близкие к ней точки пространства.

Более точно, если $P_0=(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ лежит в области D, то найдется такое $\varepsilon>0$, что если для точки $P=(x^1, \ldots, x^n)$ выполняются неравенства

$$|x^i - x_0^i| < \varepsilon, \quad i=1, \ldots, n,$$

то P лежит в области D.

Определение 3. *Область с границей* получается из области без границы добавлением ее предельных точек. *Граница* области состоит из добавленных точек.

Простейший пример области без границы — это все пространство $\mathbb{R}^n$. Другой простой пример области без границы: область состоит из таких точек плоскости (x_1, x_2), что $x_1^2+x_2^2<\rho^2$ (открытый круг). Соответствующая область с границей состоит из таких точек (x_1, x_2), что $x_1^2+x_2^2\leqslant\rho^2$. Этот пример является в определенном смысле типичным. Имеет место простая теорема.

Теорема 1. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задан набор непрерывных функций $f_1(P), \ldots, f_m(P)$, $P=(x^1, \ldots, x^n)$. Рассмотрим совокупность D точек P, удовлетворяющих неравенствам*

$$f_1(P)<0, \quad f_2(P)<0, \ldots, f_m(P)<0.$$

Тогда D — область без границы.

Доказательство. Пусть $P_0=(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ лежит в D, т. е. $f_1(P_0)<0, \ldots, f_m(P_0)<0$. Тогда из теоремы о сохранении знака непрерывной функции следует, что при каждом j найдется такое $\varepsilon_j>0$, что неравенства $|x^i - x_0^i|<\varepsilon_j$, $i=1, 2, \ldots, n$, влекут за собой неравенство $f_j(P)<0$. Беря $\varepsilon=\min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, мы

видим, что D содержит все точки $(x^1, \ldots, x^n)$, у которых $|x^i - x_0^i| < \varepsilon$. Таким образом, D — область без границы.

Замечание. Двигаясь по кривым изнутри области D: $f_j(P) < 0$, $j = 1, \ldots, m$, можно достичь, в силу непрерывности функций f_j, лишь тех точек P, где $f_j(P) \leqslant 0$. Если выполняются простые аналитические ограничения на функции $f_1, \ldots, f_m$ (мы укажем их в части II), то любая точка P такая, что $f_j(P) = 0$ при любом j, достижима. Эти ограничения выполнены во всех встречающихся ниже примерах. Таким образом, при этих ограничениях решения неравенств $f_j(P) \leqslant 0$, $j = 1, \ldots, m$, дают область с границей.

Очень важным и часто встречающимся является понятие *ограниченной области* в пространстве, т. е. такой, что все достаточно далекие от начала координат точки ей не принадлежат.

Декартовы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ дают, очевидно, координаты и в любой области D, но они принимают не все значения. Для функций $f(x^1, \ldots, x^n)$, определенных в области, можно говорить о непрерывности и дифференцируемости так же, как и для функций во всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть заданы какие-либо другие координаты $(z^1, \ldots, z^n)$ в той же области. Мы можем написать

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(z^1, \ldots, z^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ z^j &= z^j(x^1, \ldots, x^n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Написанные равенства означают просто, что каждой точке области можно сопоставить как набор декартовых координат $(x^1, \ldots, x^n)$, так и набор новых координат $(z^1, \ldots, z^n)$,— поэтому декартовы координаты можно выразить через новые и наоборот.

Разберем первоначально линейные замены координат в пространстве:

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i z^j, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

(более краткая запись: $x^i = a_j^i z^j$, где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Как известно из линейной алгебры, для того чтобы можно было выразить z через x, необходимо и достаточно, чтобы матрица $A = (a_j^i)$ имела обратную $B = A^{-1} = (b_j^i)$. Обратная матрица определяется так: $b_j^i a_k^j = \delta_k^i$, где

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}$$

(символ Кронекера), суммирование по j подразумевается. Итак, декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки P выражаются через но-

вый набор чисел $z^1, \ldots, z^n$ с помощью матрицы $A = (a^i_j)$. Равенство (2) можно кратко записать так:

$$X = AZ, \quad X = (x^1, \ldots, x^n), \quad Z = (z^1, \ldots, z^n).$$

Равенство (2) означает, что если точка P соответствовала набору координат $x^1, \ldots, x^n$, то в новых координатах ей соответствует набор $z^1, \ldots, z^n$ такой, что $x^i = a^i_j z^j$. Мы видели, что матрица A должна быть обратимой и, значит, иметь отличный от нуля определитель (быть невырожденной). Тогда можно выразить и новые координаты через старые:

$$Z = BX, \quad z^j = b^j_k x^k \tag{3}$$

(суммирование по k).

Рассмотрим теперь произвольные новые координаты $x' = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$, где функции $x^i(z^1, \ldots, z^n)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми (гладкими).

Мы предполагаем, что новые координаты изображают каждую точку изучаемой области пространства,— это значит, что любому набору чисел $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ в изучаемой области соответствует хотя бы один набор $(z^1_0, \ldots, z^n_0)$ такой, что $x^i_0 = x^i(z^1_0, \ldots, z^n_0)$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 4. Точка $P = (x^1_0, \ldots, x^n_0)$ называется *неособой точкой* системы координат $(z^1, \ldots, z^n)$, если матрица

$$A = (a^i_j) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)\Bigg|_{z^1 = z^1_0, \ldots, z^n = z^n_0} \tag{4}$$

где $z^1_0, \ldots, z^n_0$ таковы, что $x^i(z^1_0, \ldots, z^n_0) = x^i_0$, $i = 1, \ldots, n$, имеет ненулевой определитель (не вырождена).

Матрица A называется *матрицей Якоби* данной замены и обозначается через $\hat{J} = \frac{\partial x}{\partial z}$. Определитель матрицы Якоби называется *якобианом* и обозначается через J:

$$J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \det \hat{J}.$$

Из курса математического анализа известна следующая теорема об обратном преобразовании (частный случай общей теоремы о неявных функциях).

Если задан переход к новым координатам $x^i = x^i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, причем $x^i_0 = x^i(z^1_0, \ldots, z^n_0)$ и $J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) \neq 0$ при $z^1 = z^1_0, \ldots, z^n = z^n_0$, то в достаточно малой окрестности точки $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ можно выразить координаты $z^1, \ldots, z^n$ через $x^1, \ldots, x^n$ так, что $z^i = z^i(x)$, причем $z^i_0 = z^i(x^1_0, \ldots, x^n_0)$, $i = 1, \ldots, n$. При

этом матрица $(b_j^i) = \left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)$, т. е. матрица Якоби обратного преобразования, будет обратной матрицей по отношению к матрице $(a_l^h) = \left(\frac{\partial x^h}{\partial z^l}\right)$, т. е.

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^h} = \delta_h^i \tag{5}$$

(напоминаем: подразумевается суммирование по j).

Для $n = 1$ это утверждение выглядит так: если $x = x(z)$, $x(z_0) = x_0$ и $\frac{dx}{dz} \neq 0$ при $z = z_0$, то можно выразить z через x, $z = z(x)$, так, что $z_0 = z(x_0)$ и $\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dz} = 1$ в достаточно малой окрестности точки x_0.

В разобранном выше случае линейных замен координат $X = AZ$, т. е. $x^i = a_j^i z^j$. В этом случае матрица Якоби $\frac{\partial x}{\partial z}$ совпадает с матрицей A, так как $a_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^k}$ и эти числа постоянны. При этом если $\det A \neq 0$, то замена обратима во всем пространстве и $Z = BX$, где B — матрица, обратная к A.

Разберем другие примеры координат на плоскости и в пространстве, известные из аналитической геометрии.

1. На плоскости рассматриваются *полярные координаты* r, φ, для которых

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi. \tag{6}$$

Здесь всегда $r \geqslant 0$. Далее, пары (r, φ) и $(r, \varphi + 2k\pi)$ при целом k изображают одну и ту же точку $P = (x^1, x^2)$. Поэтому φ является однозначной координатой, лишь если потребовать, чтобы $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. При $r = 0$ дополнительно надо сказать, что все пары $(0, \varphi)$ изображают одну и ту же точку (начало координат), так что в начале координат происходит нечто еще худшее. Убедимся, что начало координат есть особая точка полярной системы координат. Составим матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Мы имеем для якобиана

$$J = \det A = r \geqslant 0.$$

Итак, якобиан равен нулю лишь в точке $r = 0$. Если выразить r через x^1, x^2, то $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$. Эта функция не дифференци-

руема при $x^1 = 0$, $x^2 = 0$. В области $\{r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ новые координаты полностью однозначны и не имеют особых точек.

2. *Цилиндрические координаты* $z^1 = r$, $z^2 = \varphi$, $z^3 = z$ в трехмерном декартовом пространстве с декартовыми координатами x^1, x^2, x^3, где

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi, \quad x^3 = z. \tag{8}$$

Здесь $r = 0$ задает прямую, ось z, вдоль которой координатная система «портится». Действительно, матрица Якоби здесь имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

и якобиан равен нулю только при $r = 0$. В области $r > 0$ система координат не имеет особых точек. Как и выше, координата φ однозначна в области $0 < \varphi < 2\pi$.

3. *Сферические координаты* $z^1 = r$, $z^2 = \theta$, $z^3 = \varphi$ в трехмерном пространстве (рис. 3). Имеем

$$x^1 = r\cos\varphi\sin\theta, \quad x^2 = r\sin\varphi\sin\theta, \quad x^3 = r\cos\theta, \tag{10}$$

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

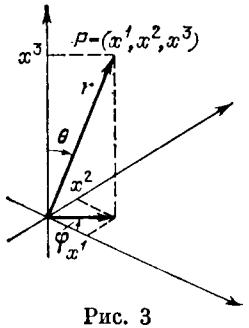


Рис. 3

Для сферических координат матрица Якоби имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Якобиан $J = \det A$ имеет вид

$$J = r^2\sin\theta.$$

Мы видим, что в области $r > 0$, $\theta \neq 0$, π этот якобиан не обращается в нуль.

Сферическая система координат однозначна и не имеет особых точек в области $r > 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$. Точки $r = 0$ (любые θ, φ) или $\theta = 0$, π (любые r, φ) — это особые точки.

§ 2. Евклидово пространство

Кроме перечисленных в предыдущем параграфе понятий, в основе наших представлений о геометрии лежит понятие длины линии в пространстве и понятие угла между двумя пересекающимися линиями, измеренного в точке их пересечения. Эти наши представления основаны на том, что (в некотором приближении)

мы живем в евклидовом трехмерном пространстве, в котором существуют декартовы координаты со специальными свойствами.

1. Кривая в евклидовом пространстве. Пусть декартовы координаты в трехмерном пространстве таковы, что если точке P соответствуют три ее координаты (x^1, x^2, x^3), а точке Q — координаты (y^1, y^2, y^3), то квадрат длины прямолинейного отрезка, соединяющего точки P и Q, равен $l^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2$. Тогда пространство называется *евклидовым*, а декартовы координаты с такими свойствами называются *евклидовыми координатами*.

Из курса линейной алгебры известно, что с точками евклидова пространства удобно связывать векторы. У нас имеется начало координат — точка O; назовем вектор, ведущий из точки O в изучаемую точку P, *радиус-вектором* этой точки. Декартовы координаты (x^1, x^2, x^3) точки P мы будем называть координатами вектора. Два вектора $\xi = (x^1, x^2, x^3)$, $\eta = (y^1, y^2, y^3)$, ведущих из точки O в точки P и Q соответственно, можно складывать покоординатно и получить вектор $\xi + \eta$ с координатами $(x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$. Можно также умножить вектор на число. Единичные векторы e_1, e_2, e_3 с координатами $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ имеют длину, равную 1. Далее будет видно, что они вдобавок взаимно перпендикулярны. Любой вектор ξ с координатами (x^1, x^2, x^3) имеет вид $\xi = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$. Здесь все пространство трехмерно и $n = 3$. Для любых n, разумеется, все аналогично. Поэтому евклидово пространство зачастую рассматривается как линейное (или векторное) пространство, в котором квадрат расстояния между точками (концами радиус-векторов) $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ измеряется как $l^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2$. В трехмерном евклидовом пространстве мы имеем $n = 3$, для плоскости $n = 2$, а случай $n > 3$ является их простым обобщением.

В евклидовом пространстве имеется важная операция, называемая *скалярным произведением векторов*.

Определение 1. Если заданы вектор $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ и вектор $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$, то их *евклидовым скалярным произведением* называется число

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i. \tag{1}$$

Это скалярное произведение обладает следующими важными свойствами:

а) $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle$;

б) $\langle \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \eta \rangle = \lambda_1 \langle \xi_1, \eta \rangle + \lambda_2 \langle \xi_2, \eta \rangle$,

где λ_1, λ_2 — любые действительные числа;

в) $\langle \xi, \xi \rangle > 0$, если $\xi \neq 0$.

Декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых это скалярное произведение имеет вид (1), называются *евклидовыми*.

Используя понятие скалярного произведения, можно сказать, что квадрат длины прямолинейного отрезка, ведущего из точки P с радиус-вектором $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ в точку Q с радиус-вектором $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$, есть скалярный квадрат вектора $\xi - \eta$, а длина любого вектора $\zeta = (z^1, \ldots, z^n)$ равна $\sqrt{\langle \zeta, \zeta \rangle}$. Часто длину вектора ζ обозначают через $|\zeta| = \sqrt{\langle \zeta, \zeta \rangle}$. Свойство в) означает, что все ненулевые векторы ζ имеют положительную длину.

Из аналитической геометрии известно, что для двух векторов $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, $\eta = (y^1, \ldots, y^n)$ угол между ними тоже выражается через скалярное произведение:

$$\cos \varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\sqrt{\langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle}} = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi|\,|\eta|}. \tag{2}$$

Таким образом, длины и углы тесно связаны с понятием скалярного произведения между векторами. В дальнейшем именно скалярное произведение будет взято за основное, первичное понятие, на котором строится геометрия.

Пусть теперь имеется кривая линия в евклидовом пространстве, заданная в параметрической форме:

$$x^1 = f^1(t), \ldots, x^n = f^n(t), \tag{3}$$

где параметр t пробегает отрезок от a до b и $f^i(t)$ — гладкие функции параметра t, $i = 1, \ldots, n$. *Касательным вектором* или *вектором скорости* кривой в момент t называется вектор

$$v(t) = \left(\frac{df^1}{dt}, \ldots, \frac{df^n}{dt}\right). \tag{4}$$

Определение 2. *Длиной линии* называется число

$$l = \int_a^b \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle}\, dt = \int_a^b |v(t)|\, dt. \tag{5}$$

Иначе говоря, длиной линии называется интеграл от длины ее вектора скорости *).

Если есть линия $x^i = f^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, и другая линия $x^i = g^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, пересекающиеся при $t = t_0$ (т. е. $f^i(t_0) = g^i(t_0)$, $i = 1, \ldots, n$), то можно говорить об угле между этими линиями в точке пересечения. Обозначим касательные векторы

*) Авторы не претендуют на аксиоматическое изложение понятия длины. Мы не пытаемся выводить единственность этого определения из каких-либо аксиом. Это определение само есть аксиома.

скорости к линиям при $t = t_0$ соответственно через

$$v = \left(\frac{df^1}{dt}, \ldots, \frac{df^n}{dt}\right)\Big|_{t=t_0},$$
$$w = \left(\frac{dg^1}{dt}, \ldots, \frac{dg^n}{dt}\right)\Big|_{t=t_0}. \tag{6}$$

Определение 3. *Углом между линиями* в точке их пересечения при $t = t_0$ называется такой угол φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, что имеет место равенство

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{|v|\,|w|}. \tag{7}$$

Два последних определения можно рассматривать как важные факты, которые должны доказываться в курсе математического анализа. Но в действительности их можно рассматривать и как первичные определения. Нужно только проверить соответствие этих определений наглядным понятиям о длинах и углах между кривыми в евклидовом пространстве. Из школьного курса геометрии известно, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$. Далее, из аналитической геометрии известно, что длина прямолинейного отрезка — вектора ξ с координатами $y^1, \ldots, y^n$ — равна $\sqrt{(y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2}$ (по теореме Пифагора). Проведем вычисление для отрезка и окружности и убедимся, что наше определение длины дает те же числа.

1) *Отрезок.* Для простоты пусть он выходит из начала координат. Тогда он задается формулой $x^i = y^i t$, где $i = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. При $t = 0$ все координаты $x^i = 0$, а при $t = 1$ все координаты $x^i = y^i$, т. е. мы попадаем в конец вектора ξ. Длина нашего отрезка прямой равна

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx^n}{dt}\right)}\,dt = \sqrt{(y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2},$$

т. е. мы получили известную формулу для длины отрезка.

2) *Окружность.* Она задается формулой (на плоскости) $x^1 = R\cos t$, $x^2 = R\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Вектор скорости здесь имеет вид $v(t) = (-R\sin t, R\cos t)$, и длина равна

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi R. \tag{8}$$

Для окружности мы также имеем нужный ответ.

Кроме того, наше определение длины удовлетворяет тому требованию, что длина кривой, составленной из двух кусков, равна сумме длин этих кусков.

Заметим, однако, что формула (5) для длины кривой относится к параметризованным кривым $x^i = f^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, $a \leqslant t \leqslant b$. Попросту говоря, мы бежим вдоль линии вместе с параметром t, меняющимся между a и b со скоростью $v(t) = \left(\frac{df^1}{dt}, \ldots, \frac{df^n}{dt}\right)$, и эта скорость $v(t)$ бега по кривой явным образом входит в нашу формулу

$$l = \int_a^b |v(t)|\, dt. \tag{9}$$

Что будет, если мы побежим по той же самой кривой с другой скоростью? Мы движемся от точки $P = (f^1(a), \ldots, f^n(a))$ до точки $Q = (f^1(b), \ldots, f^n(b))$. Получим ли мы то же самое число, если будем двигаться по той же самой линии от точки P до точки Q, но с другой скоростью?

Точная постановка этого вопроса такова. Пусть задан новый параметр τ, меняющийся от a' до b' $(a' \leqslant \tau \leqslant b')$, и параметр t представлен в виде функции от τ, $t = t(\tau)$, $t(a') = a$, $t(b') = b$, причем $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Последнее неравенство означает просто, что мы бежим по параметру τ в ту же сторону по кривой, что и по параметру t. Тогда наша кривая представлена в виде

$$x^i = f^i(t) = f^i(t(\tau)) = g^i(\tau), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Скорость движения по параметру τ имеет вид

$$w(\tau) = \left(\frac{dg^1}{d\tau}, \ldots, \frac{dg^n}{d\tau}\right), \quad a' \leqslant \tau \leqslant b'. \tag{11}$$

Длина кривой в новой параметризации равна

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)|\, d\tau. \tag{12}$$

Покажем, что

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)|\, d\tau = l = \int_a^b |v(t)|\, dt.$$

Вычислим длину вектора $w(\tau)$:

$$|w(\tau)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dg^i}{d\tau}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)^2} = \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df^i}{dt}\right)^2} = \frac{dt}{d\tau}|v(t)|,$$

так как $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Поэтому

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)|\, d\tau = \int_{a'}^{b'} |v(t(\tau))| \frac{dt}{d\tau}\, d\tau = \int_{a}^{b} |v(t)|\, dt,$$

что и требовалось доказать.

Вывод. *Длина отрезка на кривой не зависит от скорости пробегания этого отрезка кривой.*

Таким образом, наше определение длины удовлетворяет всем необходимым требованиям для обслуживания наших интуитивных представлений об этой величине.

Пример. Пусть кривая на плоскости задана как график функции $x^2 = f(x^1)$. Тогда в качестве параметра t можно взять просто x^1: $x^1 = t$, $x^2 = f(t)$. Вектор скорости имеет вид $v = \left(1, \frac{df}{dx^1}\right)$, и длина кривой равна

$$l = \int_a^b |v|\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx^1}\right)^2}\, dx^1. \tag{13}$$

На любой гладкой кривой (такой кривой, что параметр скорости v не обращается в нуль) можно выбрать параметр l (размерности длины) так, чтобы вектор скорости был единичным: $|v| = 1$. Такой параметр l называется *натуральным*. Для него $\int_a^b |v|\, dl = b - a$. Следовательно, натуральный параметр имеет простой геометрический смысл — он равен длине отрезка кривой, который мы пробежали.

Пусть теперь в евклидовом пространстве с евклидовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задана другая система координат $(z^1, \ldots, z^n)$, так что $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть кривая задается параметрически в новых координатах $z^i = z^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда в исходных, евклидовых координатах та же самая кривая имеет вид

$$x^j = x^j(z(t)) = h^j(t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Назовем *вектором скорости кривой в координатах* $(z^1, \ldots, z^n)$ вектор $v_z(t) = (v_z^1, \ldots, v_z^n)$, где

$$v_z^j = \frac{dz^j}{dt}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

В исходных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ вектор скорости $v = v_x = \left(\frac{dh^1}{dt}, \ldots, \frac{dh^n}{dt}\right)$. Это — вектор, взятый в точке $P = (h^1(t), \ldots, h^n(t))$, тот же самый вектор, что и v_z, но взятый в точке $P =$

$=(z^1(t), \ldots, z^n(t))$. Точка P одна и та же, и вектор один и тот же, но записанный в двух разных системах координат (z) и (x). Выясним, как преобразуются координаты вектора скорости при замене координат. Имеем

$$v_x^i = \frac{dh^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{dz^j}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j \tag{15}$$

(напоминаем: суммирование по j). Квадрат длины вектора скорости имеет вид

$$|v_x|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dh^i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^l} v_z^j\right)^2 = g_{jk} v_z^j v_z^h, \tag{16}$$

где введено обозначение

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}. \tag{17}$$

Вывод. *В произвольных координатах* $(z^1, \ldots, z^n)$, *где* $x = x(z)$, *скалярный квадрат вектора* $v_z = \left(\frac{dz^1}{dt}, \ldots, \frac{dz^n}{dt}\right)$ *скорости кривой задается формулой*

$$|v_z|^2 = |v_x|^2 = g_{jk}\frac{dz^j}{dt}\frac{dz^k}{dt}, \tag{18}$$

где $g_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}$.

2. Квадратичные формы и векторы. Мы видели в предыдущем пункте, что координаты вектора скорости кривой при замене координат $x = x(z)$ преобразуются по правилу

$$v_x^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j \tag{19}$$

или, кратко,

$$v_x = A v_z,$$

где $A = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ — определенная в предыдущем параграфе матрица Якоби замены, причем мы даже не пользовались здесь тем, что координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ евклидовы. Закон преобразования (19) можно положить в основу общего определения вектора.

Определение 4. *Вектором* в точке $P = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ называется набор чисел $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, отнесенный к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Если две системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ связаны заменой $x = x(z)$, причем $x^i(z_0^1, \ldots, z_0^n) = x_0^i$, $i = 1, \ldots, n$, то для новой системы координат z этот же вектор в точке

$z_0^1, \ldots, z_0^n$ задается другим набором чисел $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$, который связан с исходным формулой

$$\xi^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right|_{z^k = z_0^k} \zeta^j. \tag{20}$$

Следует обратить внимание, что главным в определении вектора является вид закона преобразования (20).

Рассмотрим другой часто встречающийся геометрический объект — градиент функции. Мы привыкли говорить, что градиент числовой функции $f(x^1, \ldots, x^n)$ (например, для случая $n = 3$) в декартовых координатах $x^1, \ldots, x^n$ — это вектор с компонентами

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right). \tag{21}$$

Положим $\xi_j = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$, $j = 1, \ldots, n$. Посмотрим, как выглядит градиент той же функции в других координатах $z^1, \ldots, z^n$, где $x = x(z)$. Имеем

$$\operatorname{grad} f(x^1(z), \ldots, x^n(z)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z^n}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначив через η_i компоненты $\dfrac{\partial f}{\partial z^i}$ градиента в новой системе координат, получим

$$\eta_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i}\xi_j. \tag{22}$$

Мы видим, что градиент функции при заменах координат преобразуется иначе, чем вектор. Такая величина будет ниже называться *ковектором*.

Пусть теперь система координат $x^1, \ldots, x^n$ евклидова, а $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n)$ и $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^n)$ — два вектора, которые выходят из одной точки $P = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. В системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$ такой, что $x = x(z)$, $x(z_0) = x_0$, эти же векторы имеют соответственно координаты $(\eta_1^1, \ldots, \eta_1^n)$ и $(\eta_2^1, \ldots, \eta_2^n)$, связанные с прежними координатами формулами

$$\xi_1^i = a_j^i \eta_1^j, \quad \xi_2^i = a_j^i \eta_2^j,$$

где (a_j^i) — матрица Якоби, вычисленная при $z^k = z_0^k$, $k = 1, \ldots, n$. Скалярное произведение векторов ξ_1 и ξ_2 в исходной системе координат имеет вид

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_1^i \xi_2^i = \delta_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \tag{23}$$

В новой системе координат оно равно

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} (a_j^i \eta_1^j)(a_k^i \eta_2^k) = g_{jk} \eta_1^j \eta_{2r}^k \tag{24}$$

где матрица

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_j^i a_k^i = \delta_{sq} a_j^s a_k^q \tag{25}$$

— та самая матрица, которая появилась в предыдущем пункте при решении задачи о вычислении длины кривой в произвольных координатах. Поэтому скалярное произведение векторов в новых координатах определяется той же самой матрицей $G = (g_{ij})$. Формула (25) на алгебраическом языке означает, что

$$G = A^{\top} A, \tag{26}$$

где $^{\top}$ обозначает транспонирование матрицы. Выясним, как преобразуются компоненты g_{ij} матрицы G при переходе к новым координатам. Пусть заданы новые координаты $y^1, \ldots, y^n$ в той же области, и $z^j = z^j(y^1, \ldots, y^n)$, $j = 1, \ldots, n$. Положим $B = (b_j^i) = \left(\dfrac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$. Мы знаем, что тогда векторы ξ_1, ξ_2 в координатах $y^1, \ldots, y^n$ имеют компоненты $(\zeta_1^1, \ldots, \zeta_1^n)$, $(\zeta_2^1, \ldots, \zeta_2^n)$, причем

$$\eta_1^i = b_j^i \zeta_1^j, \quad \eta_2^i = b_j^i \zeta_2^j. \tag{27}$$

Пусть матрица, дающая выражение для скалярного произведения в координатах (y), равна h_{ij}. Это означает, что

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = h_{kl} \zeta_1^k \zeta_2^l = g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j. \tag{28}$$

Используя равенство (27), получаем

$$h_{kl} \zeta_1^k \zeta_2^l = (b_k^i g_{ij} b_l^j)(\zeta_1^k \zeta_2^l), \tag{29}$$

откуда

$$h_{kl} = b_k^i g_{ij} b_l^j. \tag{30}$$

Итак, $H = B^{\top} G B$.

Определение 5. *Квадратичной формой (на векторах)* в точке $x_0^1, \ldots, x_0^n$ называется набор чисел g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, с $g_{ij} = g_{ji}$, отнесенный к системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Если две системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(z^1, \ldots, z^n)$ связаны заменой $x = x(z)$, причем $x^i(z_0^1, \ldots, z_0^n) = x_0^i$, $i = 1, \ldots, n$, то для новой системы координат $(z^1, \ldots, z^n)$ эта же квадратичная форма задается набором чисел h_{kl}, $k, l = 1, \ldots, n$, с $h_{kl} = h_{lk}$, который связан

с исходным набором формулой

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^j}\bigg|_{z^s=z_0^s} h_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^i}\bigg|_{z^s=z_0^s}. \tag{31}$$

В матричной форме это означает, что

$$G = A^\top H A.$$

Если в точке P задана квадратичная форма g_{ij}, преобразующаяся при заменах координат по закону (31), то на касательных векторах в точке P можно определить квадратичную (или билинейную) функцию $\{\xi, \xi\}$ (или $\{\xi, \eta\}$), полагая

$$\{\xi, \xi\} = g_{ij}\xi^i\xi^j$$
$$(\{\xi, \eta\} = g_{ij}\xi^i\eta^j).$$

Из закона преобразования (31) следует, что так определенные функции не зависят от выбора системы координат, а зависят только от точки P и вектора ξ (или векторов ξ и η).

§ 3. Римановы и псевдоримановы пространства

1. Риманова метрика. Понятие длины или, как говорят, метрики в пространстве или области пространства уже обсуждалось нами. Длина гладкой кривой $x^i = x^i(t)$ в n-мерном пространстве с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задается, по определению, формулой (2.5) *)

$$l = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt, \quad \dot{x} = v = \frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

и требует предварительного определения понятия длины вектора скорости кривой в каждой точке пространства.

Риманова метрика предполагает задание длин векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в виде

$$|\xi|^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j \tag{2}$$

в данной системе координат. Это означает, что $|\xi|^2$ есть квадратичная функция от вектора ξ в смысле предыдущего параграфа. Длина вектора должна не зависеть от выбора системы координат, поэтому величины g_{ij} при замене координат должны преобразовываться как компоненты квадратичной формы, т. е. по формуле (2.31). Исходя из этого, введем понятие римановой метрики.

Определение 1. *Римановой метрикой* в области пространства $\mathbb{R}^n$ называется положительная квадратичная форма, задан-

*) Здесь ссылка на формулу (5) из § 2. Такая же система ссылок используется и ниже.

ная на касательных векторах в каждой точке и гладко зависящая от точки.

Используя данное в предыдущем параграфе определение квадратичной формы, можно переформулировать определение римановой метрики в таком виде:

Определение 2. Римановой метрикой в области пространства с произвольными координатами $(z^1, \ldots, z^n)$ называется набор функций $g_{ij} = g_{ji}(z^1, \ldots, z^n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, причем матрица (g_{ij}) положительно определена. Если заданы новые координаты $(y^1, \ldots, y^n)$ в той же области и $z^i = z^i(y^1, \ldots, y^n)$, $i = 1, \ldots, n$, то в новых координатах риманова метрика определяется набором функций $g'_{ij} = g'_{ji}(y^1, \ldots, y^n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, причем

$$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}. \tag{3}$$

Положительная определенность матрицы (g_{ij}) означает, что $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0$, если вектор ξ отличен от нулевого.

Если задана риманова метрика, то *длина кривой* $z^i = z^i(t)$ равна

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t)) \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}}\, dt. \tag{4}$$

Если заданы две кривые $z^i = f^i(t)$, $z^i = h^i(t)$, причем они пересекаются при $t = t_0$, то *углом между ними* называется такое число φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, что

$$\cos\varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi|\,|\eta|};$$

здесь $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$, $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$, где ξ, η — векторы скорости в точке пересечения $t = t_0$.

Определение 3. *Пусть* $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ — два вектора в точке $P = (z^1_0, \ldots, z^n_0)$. Тогда их *скалярным произведением* называется число $\langle \xi, \eta \rangle$, равное

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}(z^1_0, \ldots, z^n_0)\xi^i\eta^j. \tag{5}$$

Законы преобразования (3), (2.20) величин (g_{ij}) и координат векторов (ξ^i) обеспечивают независимость скалярного произведения двух векторов, исходящих из одной точки, от выбора системы координат.

Скалярное произведение двух векторов, исходящих из разных точек, не инвариантно при заменах координат.

Пример. Евклидова метрика.

а) $n = 2$. В евклидовых координатах $x^1 = x$, $x^2 = y$

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В полярных координатах r, φ

$$x^1 = r\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\varphi \quad \text{(см. § 1)},$$

$$r = z^1, \quad \varphi = z^2, \quad g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что для кривой $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

б) $n = 3$. В евклидовых координатах x^1, x^2, x^3 имеем $g_{ij} = \delta_{ij}$. В цилиндрических координатах ($y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$, см. § 1)

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

В сферических координатах ($y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$, см. § 1)

$$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Часто также пишут формулы для дифференциала dl или dl^2:

$$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{6}$$

Для разобранных примеров получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для декартовых координат } dl^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2, \\ &\text{для полярных } dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2, \\ &\text{для цилиндрических } dl^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2, \\ &\text{для сферических } dl^2 = (dr)^2 + r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\varphi)^2]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Определение 4. Говорят, что метрика $g_{ij} = g_{ji}(z)$ *евклидова*, если найдутся координаты $x^1, \ldots, x^n$, $x^i = x^i(z)$, с

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0, \quad g_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x^h}{\partial z^i}\frac{\partial x^h}{\partial z^j}.$$

Тогда в координатах $x^1, \ldots, x^n$

$$g'_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Координаты $x^1, \ldots, x^n$ называются *евклидовыми координатами*.

Все разобранные выше примеры метрик — это евклидовы метрики в разных координатах. В следующей главе мы рассмотрим другие примеры римановых метрик.

2. Метрика Минковского. Пусть величины $g_{ij} = g_{ji}(z)$, $i, j = 1, \ldots, n$, таковы, что матрица g_{ij} невырождена, $\det(g_{ij}) \neq 0$, но форма $g_{ij}\xi^i\xi^j$ неположительна (индефинитна). Тогда мы говорим, что имеется *псевдориманова метрика*.

Мы говорим, что g_{ij} — псевдориманова метрика *типа* (p, q), где $p + q = n$, если p и q — положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$.

Нетрудно видеть (см. задачу в конце параграфа), что числа p и q определены корректно, т. е. индексы инерции не зависят от системы координат.

Если g_{ij} — псевдориманова метрика типа (p, q) и $g^0_{ij} = g_{ij}(z^1_0, \ldots, z^n_0)$, то квадратичную форму $g^0_{ij}\xi^i\xi^j$ заменой $\xi^i = \lambda^i_k \eta^k$ можно привести к виду

$$\eta_1^2 + \ldots + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - \ldots - \eta_n^2.$$

В окрестности точки такое приведение уже, вообще говоря, невозможно.

Определение 5. Говорят, что метрика $g_{ij} = g_{ji}(z)$ *псевдоевклидова*, если найдутся новые координаты $x^1, \ldots, x^n$, $x^i = x^i(z)$, $\det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0$, такие, что

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i}\frac{\partial x^1}{\partial z^j} + \ldots + \frac{\partial x^p}{\partial z^i}\frac{\partial x^p}{\partial z^j} - \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j} - \ldots - \frac{\partial x^n}{\partial z^i}\frac{\partial x^n}{\partial z^j}.$$

В этих новых координатах

$$g'_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$
$$g'_{ii} = 1 \quad \text{при} \quad i \leqslant p, \quad g'_{ii} = -1 \quad \text{при} \quad i \geqslant p + 1.$$

Координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ называются *псевдоевклидовыми координатами типа* (p, q), где $q = n - p$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести псевдоевклидову метрику типа (p, q), определив «скалярное произведение» векторов $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$ формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle_{p,q} = \xi^1\eta^1 + \ldots + \xi^p\eta^p - \xi^{p+1}\eta^{p+1} - \ldots - \xi^n\eta^n; \qquad (8)$$

при этом псевдоевклидовыми будут обычные координаты $x^1, \ldots$

..., x^n; пространство $\mathbb{R}^n$ с этой метрикой также называется псевдоевклидовым и обозначается $\mathbb{R}^n_{p,q}$.

Можно считать, что $p \leqslant [n/2]$, поскольку возможна замена $g_{ij} \to -g_{ij}$.

Особенно важен случай пространства $\mathbb{R}^4_{1,3}$. Это — пространство специальной теории относительности («пространство Минковского»). В специальной теории относительности постулируется, что пространственно-временной континуум, определенный в § 1, является пространством Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$. Напомним, что точка в пространственно-временно́м континууме задается своими декартовыми координатами (t, x^1, x^2, x^3). Здесь первая координата t имеет размерность времени, а координаты (x^1, x^2, x^3) — размерность длины. Соответствующие псевдоевклидовы координаты таковы: $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3, где c — постоянная, имеющая размерность скорости (длина/время) и являющаяся скоростью света в пустоте.

Квадрат элемента длины dl^2 имеет вид

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{9}$$

Если есть две точки (события) $P_1 = (x_1^0, \ldots, x_1^3)$, $P_2 = (x_2^0, \ldots, x_2^3)$ то величина

$$|P_1 - P_2|^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2 \tag{10}$$

называется пространственно-временны́м интервалом между событиями P_1 и P_2. Величина $|P_1 - P_2|^2$ может быть как положительной, так и отрицательной, а также нулем (при несовпадающих точках P_1 и P_2) (см. § 6).

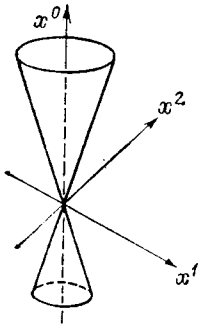


Рис. 4.

В заключение этого параграфа рассмотрим полезный пример координат в пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$ — *псевдосферические координаты*. Пусть псевдоевклидовы координаты в $\mathbb{R}^3_{1,2}$ суть x^0, x^1, x^2. Определим псевдосферические координаты (ρ, χ, φ), полагая

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \rho \operatorname{ch} \chi, \\ x^1 &= \rho \operatorname{sh} \chi \cos \varphi, \\ x^2 &= \rho \operatorname{sh} \chi \sin \varphi, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &-\infty < \rho < \infty, \\ &0 < \chi < \infty, \\ &0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = \rho^2 > 0.$$

Следовательно, координаты ρ, χ, φ заданы лишь в области $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 > 0$. В пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$ эта область — внутренность конуса $(x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$ (рис. 4). Все точки этой области (кроме точек оси x^0) — неособые для псевдосферических координат. Квадрат элемента длины dl^2 в этой области

имеет вид

$$dl^2 = d\rho^2 - \rho^2[(d\chi)^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\varphi)^2]. \tag{12}$$

Нетрудно ввести псевдосферические координаты и во внешности конуса, задавая их формулами

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= \rho \operatorname{sh}\chi, \\ x^1 &= \rho \operatorname{ch}\chi\cos\varphi, \\ x^2 &= \rho \operatorname{ch}\chi\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \quad \rho > 0. \tag{13}$$

Этот случай менее важен для приложений.

Задача. Доказать, что тип псевдоримановой метрики не зависит от выбора системы координат.

§ 4. Простейшие группы преобразований евклидова пространства

1. Группы преобразований области. Предположим, что в n-мерном пространстве заданы две области: область Ω_x с координатами $x^1, \ldots, x^n$ и область Ω_z с координатами $z^1, \ldots, z^n$. Предположим, далее, что каждой точке области Ω_z поставлена в соответствие точка области Ω_x, так что $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Если координаты $z^1, \ldots, z^n$ можно выразить обратно через $x^1, \ldots, x^n$, т. е. $z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n)$, $j = 1, \ldots, n$, то говорят, что задано *преобразование области* Ω_z в область Ω_x. При этом мы, конечно, требуем, чтобы функции $x^i(z^1, \ldots, z^n)$ и обратные им функции $z^j(x^1, \ldots, x^n)$ были гладкими. Тогда якобианы $\det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ и $\det\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ нигде не обращаются в нуль.

Если области Ω_x и Ω_z совпадают, т. е. $\Omega_x = \Omega_z = \Omega$, то говорят, что задано преобразование области Ω. Таким образом, преобразование области Ω — это введение новых координат в этой области такое, что новые координаты можно всюду в области выразить через старые и наоборот:

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n), \quad z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n).$$

Напомним, что совокупность элементов G называется *группой*, если в этой совокупности заданы две операции: каждой паре g, h элементов из G ставится в соответствие их произведение $g \circ h$ из G и каждому элементу g из G ставится в соответствие элемент g^{-1} из G. При этом должны иметь место следующие свойства:

1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;
2) существует такой элемент $1 \in G$, что $1 \circ g = g \circ 1 = g$;
3) $g \circ (g^{-1}) = 1$.

Все преобразования данной области Ω образуют группу. Операция произведения двух преобразований определяется так: если

φ — преобразование

$$x = x(z), \tag{1}$$

ψ — преобразование

$$z = z(y), \tag{2}$$

то $\varphi \circ \psi$ — суперпозиция этих преобразований

$$x = x(z(y)). \tag{3}$$

Обратное преобразование φ^{-1} определяется так:

$$z = z(x) \tag{4}$$

(т. е. координаты z^j из равенства (1) выражаем обратно через $x^1, \ldots, x^n$). Роль элемента 1 играет тождественное преобразование

$$x^i = z^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Свойства 1), 2), 3) проверяются без труда.

В дальнейшем мы из группы G всех преобразований будем выделять некоторые подгруппы, важные для геометрии. Пусть в области Ω имеется некоторая метрика (риманова или псевдориманова), задаваемая в координатах $x^1, \ldots, x^n$ симметрической невырожденной матрицей $g_{ij} = g_{ji}(x^1, \ldots, x^n)$. Если задано преобразование $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, то в координатах $z^1, \ldots, z^n$ эта же метрика задается матрицей $g'_{ij} = g'_{ij}(z^1, \ldots, z^n)$, где

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^h}{\partial z^i} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}. \tag{6}$$

Определение 1. Преобразование $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$ называется *движением* данной метрики *), если

$$g'_{ij}(z^1, \ldots, z^n) = g_{ij}(x^1(z), \ldots, x^n(z)). \tag{7}$$

Таким образом, движение метрики точно сохраняет вид скалярного произведения (g_{ij}). Имеет место следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Все движения данной метрики образуют группу.*

Действительно, если два преобразования φ и ψ сохраняют вид метрики, то и их суперпозиция будет сохранять вид метрики, обратное преобразование φ^{-1} также сохраняет вид метрики. Кроме того, тождественное преобразование сохраняет вид метрики по определению.

Эта группа называется *группой движений* данной метрики.

2. Преобразования плоскости. а) Пусть x^1, x^2 — декартовы координаты в плоскости. Простейшим примером преобразования плоскости является *сдвиг* (или *трансляция*) плоскости как целого вдоль какого-либо вектора $\xi = (\xi^1, \xi^2)$. В координатах это пре-

*) Мы часто будем так говорить, подразумевая под этим движение пространства, сохраняющее данную метрику.

образование имеет вид

$$x^1 = z^1 + \xi^1, \quad x^2 = z^2 + \xi^2. \tag{8}$$

Произведение двух таких сдвигов на векторы ξ и η имеет вид

$$x^1 = z^1 + (\xi^1 + \eta^1), \quad x^2 = z^2 + (\xi^2 + \eta^2),$$

т. е. опять есть сдвиг на вектор $\xi + \eta$. Преобразование, обратное преобразованию (8), имеет вид

$$z^1 = x^1 - \xi^1, \quad z^2 = x^2 - \xi^2. \tag{9}$$

Это также есть сдвиг на вектор $-\xi$. Тождественное преобразование есть сдвиг на нулевой вектор. Таким образом, сдвиги плоскости образуют группу. Каждому сдвигу соответствует вектор ξ в плоскости, причем произведению сдвигов соответствует сумма векторов, а обратному сдвигу — вектор $-\xi$. Это означает, что группа всех сдвигов плоскости изоморфна группе векторов в плоскости. Эта группа коммутативна (абелева), так как $\xi + \eta = \eta + \xi$.

б) Следующий пример — *растяжения* (*гомотетии*) плоскости, не являющиеся, вообще говоря, движениями. В координатах растяжение определяется формулами

$$x^1 = \lambda z^1, \quad x^2 = \lambda z^2, \tag{10}$$

где λ — произвольное вещественное число, отличное от нуля. Произведение двух растяжений — в λ раз и в μ раз — имеет вид

$$x^1 = \lambda\mu y^1, \quad x^2 = \lambda\mu y^2. \tag{11}$$

Растяжение, обратное к (10), имеет вид

$$z^1 = \frac{x^1}{\lambda}, \quad z^2 = \frac{x^2}{\lambda}. \tag{12}$$

Таким образом, растяжения плоскости образуют группу. Эта группа также абелева и изоморфна группе отличных от нуля действительных чисел по умножению.

в) *Сдвиги вместе с растяжениями.* Речь идет о преобразованиях, задаваемых формулами

$$x^1 = \lambda z^1 + \xi^1, \quad x^2 = \lambda z^2 + \xi^2, \quad \lambda \neq 0. \tag{13}$$

Если $z^1 = \mu y^1 + \eta^1$, $z^2 = \mu y^2 + \eta^2$ — другое такое преобразование, то суперпозиция этих двух преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= (\lambda\mu) y^1 + (\xi^1 + \lambda\eta^1), \\ x^2 &= (\lambda\mu) y^2 + (\xi^2 + \lambda\eta^2). \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, первое преобразование определялось парой (λ, ξ), где λ — отличное от нуля вещественное число, ξ — вектор на плоскости, второе — парой (μ, η), а их суперпозиция $(\lambda, \xi) \circ (\mu, \eta)$ — парой $(\lambda\mu, \xi + \lambda\eta)$. Таким образом, если мы отождествим преоб-

разование (13) с парой (λ, ξ) (где λ — отличное от нуля вещественное число, а ξ — вектор на плоскости), то суперпозиция $(\lambda, \xi)\circ(\mu, \eta)$ определяется формулой

$$(\lambda, \xi)\circ(\mu, \eta)=(\lambda\mu, \xi+\lambda\eta). \tag{15}$$

Преобразование, обратное к преобразованию (λ, ξ), запишется в виде $\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}\xi\right)$. Следовательно, сдвиги вместе с растяжениями образуют группу. Эта группа неабелева. Действительно, из формулы (15) следует, что суперпозиция $(\mu, \eta)\circ(\lambda, \xi)$ равна

$$(\mu, \eta)\circ(\lambda, \xi)=(\lambda\mu, \eta+\mu\xi)\neq(\lambda, \xi)\circ(\mu, \eta).$$

Замечание. Группа сдвигов и растяжений плоскости имеет нормальный делитель (сдвиги), причем факторгруппа изоморфна группе растяжений. Формула (15) является определением полупрямого произведения группы сдвигов плоскости и группы ненулевых действительных чисел по умножению, состоящей из растяжений.

г) *Линейные преобразования плоскости.* Эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} x^1 &= az^1 + bz^2, \\ x^2 &= cz^1 + dz^2 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Такое преобразование определяется матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Чтобы преобразование (16) было обратимым, т. е. чтобы из уравнений (16) можно было выразить z^1, z^2 через x^1, x^2, нужно, чтобы определитель $\Delta = ad - bc$ был отличен от нуля, т. е. чтобы матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ была невырожденной. Если имеется другая невырожденная матрица $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ и

$$\begin{aligned} z^1 &= a'y^1 + b'y^2, \\ z^2 &= c'y^1 + d'y^2 \end{aligned} \tag{17}$$

— соответствующее линейное преобразование, то суперпозиция преобразований (16) и (17) имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= (aa' + bc')y^1 + (ab' + bd')y^2, \\ x^2 &= (ca' + dc')y^1 + (cb' + dd')y^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Это преобразование также линейно и оно отвечает произведению матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Таким образом, группа линейных преобразований плоскости изоморфна группе невырожденных матриц второго порядка. Эта группа также неабелева.

д) *Аффинная группа* получается из линейной добавлением трансляций. Каждое преобразование из этой группы определяется парой (A, ξ), где A — невырожденная матрица, ξ — вектор в плоскости. Вид аффинного преобразования таков:

$$\begin{aligned} x^1 &= az^1 + bz^2 + \xi^1, \\ x^2 &= cz^1 + dz^2 + \xi^2 \end{aligned} \quad \text{или} \quad x = Az + \xi, \tag{19}$$

где

$$\Delta = ad - bc \neq 0.$$

Закон суперпозиции в аффинной группе имеет следующий вид:

$$(A, \xi) \circ (B, \eta) = (AB, \xi + A\eta). \tag{20}$$

Аффинная группа является полупрямым произведением группы невырожденных матриц второго порядка и группы векторов на плоскости.

е) Пусть на плоскости задана евклидова метрика, и x^1, x^2 — евклидовы координаты на плоскости. Метрика g_{ij} в координатах имеет вид

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Выясним, какие из аффинных преобразований (19) являются движениями евклидовой метрики. В координатах (z^1, z^2) метрика задается матрицей g'_{ij}, где

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^h}{\partial z^i}\,\delta_{hl}\,\frac{\partial x^l}{\partial z^j} = \sum_{h=1}^{2} \frac{\partial x^h}{\partial z^i}\,\frac{\partial x^h}{\partial z^j}. \tag{21}$$

Матрица Якоби $\left(\frac{\partial x^h}{\partial z^i}\right)$ аффинного преобразования совпадает с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Если аффинное преобразование (19) есть движение, то $g'_{ij} = \delta_{ij}$ и это равенство превращается в систему трех уравнений

$$a^2 + c^2 = 1, \quad ab + cd = 0, \quad b^2 + d^2 = 1 \tag{22}$$

или в матричное уравнение

$$A^{\top} A = 1.$$

Это означает, что матрица A ортогональна.

Таким образом, (19) есть движение евклидовой метрики тогда и только тогда, когда матрица A ортогональна. Уравнение (22) можно решить явно. Так как $a^2 + c^2 = 1$, то можно выбрать такой угол φ, что $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$. Тогда

$$d = \cos\varphi, \quad b = -\sin\varphi \quad \text{или} \quad d = -\cos\varphi, \quad b = \sin\varphi.$$

При каждом φ получаем два типа ортогональных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Матрицы первого типа задают поворот плоскости как целого на угол φ вокруг начала координат. Определитель такой матрицы равен единице. Преобразование второго типа сводится к суперпозиции поворота на угол φ и отражения в оси абсцисс:

$$z^1 = y^1,$$
$$z^2 = -y^2.$$

Определитель матрицы A в этом случае равен -1. Движения первого типа, где определитель матрицы равен $+1$, образуют подгруппу в группе всех движений. Такие движения (т. е. движения без отражений) мы будем называть *собственными*.

Лемма 2. а) *Любое собственное движение плоскости есть вращение вокруг некоторой точки или сдвиг.*

б) *Любое движение вида $z \mapsto Az + \xi$, где определитель матрицы A равен -1, есть суперпозиция отражения в некоторой прямой и сдвига вдоль оси отражения (скользящее отражение).*

Доказательство. Пусть движение имеет вид

$$x = Az + \xi, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{25}$$

т. е. $z \mapsto Az + \xi$. Если $\varphi = 0$, то $A = 1$, и мы получаем чистый сдвиг. Пусть $A \neq 1$. Найдем центр вращения для этого движения. Этот центр будет неподвижной точкой преобразования (25), т. е. такой точкой z_0, что

$$z_0 = Az_0 + \xi. \tag{26}$$

Из равенства (26) получаем

$$(1 - A)z_0 = \xi. \tag{27}$$

Если матрица A вида (25) отлична от 1, то матрица $1 - A$ не вырождена, поэтому из уравнения (27) однозначно определяется центр вращения z_0. Утверждение а) доказано.

Рассмотрим теперь полную группу движений плоскости. Пусть $\det A = -1$. Тогда поворотом осей можно добиться (см. формулу (24)), что

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

т. е. A есть матрица отражения в оси абсцисс. Преобразование

$z \mapsto Az + \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z^1 + \xi^1 \\ -z^2 + \xi^2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Сделаем перенос начала координат, полагая

$$z^1 = y^1, \quad z^2 = y^2 + \frac{1}{2}\xi^2. \tag{30}$$

После сдвига наше движение примет вид

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^1 + \xi^1 \\ -y^2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Это и есть скользящее отражение. В частности, при $\xi^1 = 0$ получаем чистое отражение. Лемма доказана.

Мы получаем, таким образом, три типа движений плоскости: сдвиги, вращения и скользящие отражения (в частности, отражения).

ж) В заключение этого пункта рассмотрим группу движений и растяжений. Выясним, что происходит с евклидовой метрикой при преобразованиях

$$x = \lambda Bz + \xi, \text{ где } B^\top B = 1. \tag{32}$$

Здесь матрица Якоби $A = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ имеет вид $A = \lambda B$, где B — ортогональная матрица. Тогда в координатах (z^1, z^2) евклидова метрика примет вид

$$g'_{ij} = \lambda^2 g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}. \tag{33}$$

Таким образом, при этих преобразованиях метрика g_{ij} умножается на число. Такие аффинные преобразования называются *конформными*. Выясним, какие из аффинных преобразований (19) конформны. Рассуждая, как в предыдущем пункте, получаем для матрицы A условие конформности

$$\left(\frac{1}{\lambda} A^\top\right)\left(\frac{1}{\lambda} A\right) = 1. \tag{34}$$

Следовательно, матрица $B = \frac{1}{\lambda} A$ ортогональна. Таким образом, конформная подгруппа состоит из аффинных преобразований вида

$$x = \lambda Bz + \xi, \tag{35}$$

где матрица B ортогональна.

Пусть определитель матрицы B равен $+1$, т. е. B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Введем комплексные переменные $v = z^1 + iz^2$, $w = x^1 + ix^2$. Тогда из равенства (35) получаем

$$w = (x^1 + ix^2) = \lambda(\cos\varphi - i\sin\varphi)(z^1 + iz^2) + (\xi^1 + i\xi^2),$$

т. е.

$$w = \alpha v + \beta, \tag{36}$$

где комплексные числа α и β имеют вид

$$\alpha = \lambda e^{-i\varphi}, \quad \beta = \xi^1 + i\xi^2. \tag{37}$$

Формула (37) означает, что собственные ($\det B = 1$) конформные преобразования плоскости суть комплексно линейные преобразования комплексной прямой $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$

$$v = z^1 + iz^2 \mapsto w = x^1 + ix^2.$$

Пусть теперь определитель матрицы B равен -1. Мы видели (см. в примере выше), что такие преобразования получаются из вращений добавлением отражения в оси абсцисс:

$$x^1 = z^1,$$
$$x^2 = -z^2.$$

На языке комплексных переменных v и w преобразование устроено так:

$$w = \bar{v} = z^1 - iz^2. \tag{38}$$

Таким образом, общий вид конформного аффинного преобразования евклидовой метрики на плоскости таков:

$$w = \alpha v + \beta \quad \text{или} \quad w = \alpha\bar{v} + \beta, \tag{39}$$

где α и β — произвольные комплексные числа, $\alpha \neq 0$. Если $|\alpha| = 1$, то преобразования (39) являются движениями евклидовой метрики. Если α — вещественное число, то мы получаем разобранные в примере в) сдвиги с растяжениями.

3. Движения трехмерного евклидова пространства. Рассмотрим сначала движение, являющееся линейным преобразованием и оставляющее неподвижным начало координат. Оно задается матрицей $A = (a^i_j)$ третьего порядка:

$$\begin{aligned} x &= Az, \\ x^i &= a^i_j z^j. \end{aligned} \tag{40}$$

В координатах x^1, x^2, x^3 метрика является евклидовой, т. е. имеет вид $g_{ij} = \delta_{ij}$. Здесь матрица Якоби $\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = a^i_j$ совпадает с матрицей A. Поэтому в координатах z^1, z^2, z^3 метрика имеет вид g'_{ij}, где

$$g'_{ij} = a^h_i \delta_{hl} a^l_j = \sum_{h=1}^{3} a^h_i a^h_j.$$

Если $g'_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. преобразование (40) есть движение, то имеем

$$\sum_{k=1}^{3} a_i^k a_j^k = \delta_{ij}. \tag{41}$$

Равенство (41) попросту означает, что если базисные векторы $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ были ортонормированы, т. е. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, то векторы $Ae_i = a_i^k e_k$ тоже ортонормированы.

Матричная запись равенства (41) такова:

$$A^{\top} A = 1. \tag{42}$$

Стало быть, матрица A ортогональна. Так как $\det A^{\top} = \det A$, то определитель матрицы A равен ± 1:

$$\det A = \pm 1. \tag{43}$$

Группа ортогональных матриц совпадает с группой преобразований, оставляющих инвариантной форму $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, т. е. таких матриц A, что

$$\langle x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle. \tag{44}$$

При этих условиях имеет место

Лемма 3. *Преобразование A имеет инвариантную прямую, на которой A либо неподвижно, либо является отражением.*

Доказательство. Если v — направляющий вектор такой прямой, то мы должны иметь

$$Av = \lambda v, \tag{45}$$

где λ — действительное число. Поэтому v — собственный вектор с собственным значением λ. Здесь λ есть корень характеристического многочлена матрицы A:

$$\det(A - \lambda \cdot 1) = 0. \tag{46}$$

Уравнение (46) является кубическим относительно λ с вещественными коэффициентами. Поэтому оно имеет хотя бы один вещественный корень λ_0. Корню λ_0 отвечает хотя бы один собственный вектор v_0. Тогда

$$\langle v_0, v_0 \rangle = \langle Av_0, Av_0 \rangle = \lambda_0^2 \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Значит, $\lambda_0 = \pm 1$. Лемма доказана.

Пусть вектор w ортогонален собственному вектору v_0: $\langle w, v_0 \rangle = 0$. Тогда вектор Aw тоже ортогонален v_0:

$$\langle v_0, Aw \rangle = \pm \langle Av_0, Aw \rangle = \pm \langle v_0, w \rangle = 0. \tag{47}$$

Вывод. *Плоскость, ортогональная вектору v_0 и проходящая через начало координат, инвариантна относительно преобразования A.*

Выберем в пространстве евклидовы координаты (x^1, x^2, x^3) так, что ось x^3 идет вдоль вектора v_0. Тогда в этих координатах матрица A будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Из уравнения (42) вытекает, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ортогональна. Поэтому она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{49}$$

В зависимости от знаков λ_0 и $ad - bc$ получаем следующие типы движений.

а) *Вращение вокруг некоторой оси.* Матрица этого преобразования такова (x^3 — ось вращения):

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \lambda_0 (ad - bc) = 1. \tag{50}$$

В случае $\lambda_0 = -1$, $ad - bc = -1$ выбором координат (x^1, x^2) можно добиться, чтобы матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ приняла вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ есть матрица вращения на угол π вокруг оси x^1.

б) *Зеркальное вращение.* Это преобразование есть результат двух последовательных преобразований: вращения вокруг некоторой оси и отражения в плоскости, ортогональной этой оси. Матрица здесь приводится к виду

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det A = -1. \tag{51}$$

Мы видим, что если $\det A = +1$, то соответствующее ортогональное преобразование всегда есть вращение вокруг некоторой оси. Ортогональные матрицы A образуют группу, которая обозначается $O(3)$. Ортогональные матрицы с определителем $+1$ образуют подгруппу в $O(3)$, которая обозначается $SO(3)$. Всякая матрица из $SO(3)$ имеет хотя бы одно собственное значение 1. В силу проведенных рассуждений группа $SO(3)$ состоит из вращений относительно всевозможных прямых, проходящих через начало координат.

Разберем теперь случай произвольных движений трехмерного пространства. Эти движения являются аффинными преобразо-

ваниями

$$z \to Az + \xi. \tag{52}$$

Так же, как и для случая плоскости, убеждаемся в том, что матрица A ортогональна. Сделаем сдвиг начала координат: пусть $z = y + y_0$. Тогда после сдвига движение запишется так:

$$y \to Ay + (A-1)y_0 + \xi. \tag{53}$$

Пусть A имеет вид (51), т. е. задает зеркальное вращение. Тогда матрица $A-1$ невырождена. Можно найти вектор y_0 такой, что

$$(1-A)y_0 = \xi, \quad y_0 = (1-A)^{-1}\xi. \tag{54}$$

Тогда в координатах y отображение будет просто зеркальным вращением:

$$y \to Ay, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin & \varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Пусть теперь матрица $A \neq 1$ имеет вид (50) и задает вращение относительно некоторой оси. Тогда матрица $A-1$ вырождена. Уравнение (54) для вектора y_0 запишется так:

$$(1-A)\,y_0 = \xi \leftrightarrow \begin{cases} (1-\cos\varphi)\,y_0^1 - \sin\varphi\, y_0^2 = \xi^1, \\ \sin\varphi\, y_0^1 + (1-\cos\varphi)\,y_0^2 = \xi^2, \\ 0 = \xi^3. \end{cases} \tag{56}$$

Эта система решений не имеет (если $\xi^3 \neq 0$). Но из первых двух уравнений однозначно находятся y_0^1 и y_0^2 (если $\varphi \neq 0$, т. е. преобразование (52) не есть чистый сдвиг). Тогда при произвольном выборе третьей координаты y_0^3 движение (52) будет иметь вид

$$y \to Ay + (0, 0, \xi^3), \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

где $\eta = (0, 0, \xi^3)$ направлен вдоль оси вращения A, $A\eta = \eta$. Следовательно, это движение винтовое.

Вывод. *Собственные движения* ($\det A = +1$) *трехмерного пространства — это винтовые движения* (*в частности, сдвиги и вращения*).

Полная группа движений получается добавлением зеркальных вращений и скользящих отражений.

4. Другие примеры групп преобразований. а) По аналогии с п. 3 рассмотрим группу движений n-мерного евклидова пространства, сохраняющих начало координат. Эта группа обозначается $O(n)$. Каждый элемент из $O(n)$ задается ортогональной матрицей A n-го порядка

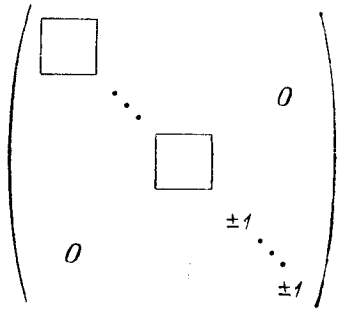
$$x = Az, \quad A^{\mathrm{T}}A = 1, \quad \det A = \pm 1. \tag{58}$$

Преобразования вида (58), где $\det A = 1$, образуют подгруппу

$SO(n) \subset O(n)$. Эта группа также называется группой n-мерных вращений. Название это, однако, условно, так как n-мерное вращение при $n \geqslant 3$ не является, вообще говоря, плоским вращением.

Группа $SO(n)$ *связна*. Это означает следующее: если A_0 и A_1 — любые два вращения, $A_0, A_1 \in SO(n)$, то в $SO(n)$ найдется кривая $A(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (т. е. непрерывное семейство ортогональных матриц с определителем 1), такая, что $A(0) = A_0$, $A(1) = A_1$. Достаточно доказать это утверждение для случая, когда A_0 — единичная матрица $1 \in SO(n)$.

Из линейной алгебры известно, что любую ортогональную матрицу можно привести к ящичному виду:



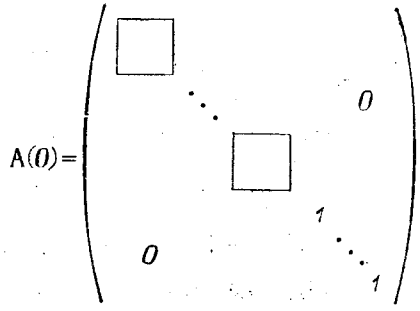
(59)

где i-й ящик имеет вид

$$\square = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix} \tag{60}$$

(мы получили такое приведение в случае $n = 2, 3$ в предыдущих пунктах).

Рассмотрим семейство матриц $A(t)$, заменяя в каждом ящике (60) угол φ_i на $t\varphi_i$. Тогда при $t = 1$ мы имеем исходную матрицу A, а при $t = 0$ получаем матрицу, на диагонали которой стоят только ± 1. Так как $\det A = 1$, то количество минус единиц четно. Перенумеровав координаты, приведем матрицу к такому виду:



(61)

где каждый ящик имеет вид

$$\square = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Такую матрицу можно уже связать кривой с единичной матрицей: заменим каждый ящик (62) на такой:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{63}$$

При $t = \pi$ мы получаем исходную матрицу, при $t = 0$ — единичную.

Ясно, что группа $O(n)$ несвязна: если матрицы A_0 и A_1 таковы, что $\det A_0 = 1$, $\det A_1 = -1$, то в группе $O(n)$ эти матрицы нельзя связать кривой. Действительно, если такая кривая $A(t)$ существует, то $\det A(t)$ — непрерывная функция t. Но $\det A_0 = \det A(0) = 1$, $\det A(1) = -1$.

б) *Группа Галилея.* Известный из классической механики принцип относительности Галилея состоит в следующем утверждении: если покоящуюся систему отсчета (x^1, x^2, x^3) заменить на любую другую систему отсчета (x'^1, x'^2, x'^3), которая движется относительно первой прямолинейно и равномерно, то все законы классической механики сохранят свой вид. Это означает, что законы классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\begin{aligned} x'^1 &= x^1 - vt, \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \quad t' = t. \end{aligned} \tag{64}$$

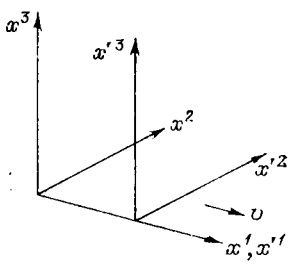


Рис. 5. Система (x^1, x^2, x^3) покоится, система (x'^1, x'^2, x'^3) движется с постоянной скоростью v вдоль первой оси

Здесь v есть скорость движущейся системы относительно покоящейся (рис. 5). Системы отсчета, получающиеся из покоящейся преобразованием (64), называются инерциальными. Сделаем важное замечание: в классической механике время t (как и вмещающее пространство $\mathbb{R}^3$) носит абсолютный характер, т. е. величина промежутка времени Δt между событиями A и B не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета этот промежуток измеряется. Иными словами, время течет одинаково для всей Вселенной; в каждой точке пространства находятся синхронизированные часы. С чисто геометрической точки зрения преобразования Галилея являются просто формулами перехода от одной системы координат (t, x^1, x^2, x^3) к другой (t', x'^1, x'^2, x'^3), где $t' = t$. Общий вид

преобразований из группы Галилея, сохраняющей вид законов классической механики, таков:

$$t' = t,$$
$$x' = Ax + x_0 - vt, \tag{65}$$

где A — матрица вращения.

Определение 2. *Группой Галилея* называется группа преобразований вида (65).

Менее очевидный пример группы преобразований, возникающей в механике:

$$t \to \beta t, \qquad \alpha^3 = \beta^2. \tag{66}$$
$$x \to \alpha x;$$

Группа преобразований (66) связана с третьим законом Кеплера. Этот закон утверждает, что квадраты периодов обращения планет относятся, как кубы их расстояний от Солнца (в перигелиях). Фактически третий закон Кеплера следует из того, что эта механическая система — движение частицы в ньютоновом поле тяготения с потенциалом $\varphi = \text{const}/r$ — инвариантна относительно преобразований (66): эти преобразования переводят траекторию движения в траекторию движения.

Задачи. 1. Пусть $Q(x) = b_{ij}x^ix^j$, где $b_{ij} = b_{ji}$, — квадратичная форма, $B(x, y) = b_{ij}x^iy^j$ — соответствующая билинейная форма. Доказать, что линейное преобразование A сохраняет билинейную форму $B(Ax, Ay) = B(x, y)$ в том и только том случае, если оно сохраняет квадратичную форму $Q(Ax) = Q(x)$ (векторы x и y любые).

2. Любое движение евклидова пространства задается аффинным преобразованием (доказать).

3. Аффинная группа в n-мерном пространстве изоморфна группе матриц порядка $n + 1$ вида

$$\begin{pmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A есть невырожденная $n \times n$-матрица, ξ есть n-мерный вектор-столбец.

4. Найти матричную реализацию группы Галилея.

§ 5. Формулы Френе

1. Кривизна плоских кривых. Рассмотрим евклидову плоскость с евклидовыми координатами (x, y) и базисными ортами e_1, e_2. Любая точка P с координатами (x, y) изображается радиус-вектором $r = xe_1 + ye_2$, идущим из начала координат O в точку P.

Длина вектора r дается евклидовой формулой

$$|r| = \sqrt{\langle r, r\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

Пусть задана гладкая кривая

$$r = r(t), \quad x = x(t), \quad y = y(t), \tag{2}$$

где радиус-векторы точек кривой имеют вид $x(t)e_1 + y(t)e_2$. Длина кривой имеет вид

$$l = \int_a^b \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = \int_a^b dl, \quad \text{где } \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}; \tag{3}$$

здесь дифференциал длины имеет вид $dl = |v|dt$, $|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, $v = \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2$ — вектор скорости. Мы будем писать $v_t = \frac{dr}{dt}$, явно отмечая внизу значком t, что вектор скорости отнесен к параметру t. Нам часто будет удобно рассматривать кривую, заданную через натуральный параметр — длину l (см. § 2, конец п. 1):

$$x = x(l), \quad y = y(l). \tag{4}$$

Тогда $v = v_l = \frac{dx}{dl}e_1 + \frac{dy}{dl}e_2$, $|v| = 1$. Если на кривой был задан произвольный параметр t, $x = x(t)$, $y = y(t)$, то мы имеем связь: $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$. Существенную роль будут играть два вектора — скорости и ускорения —

$$\frac{dr}{dt} = v_t, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = w_t. \tag{5}$$

Если параметр натурален, $t = l$, то $|v_l| = 1$. Имеет место простая, но часто используемая

Лемма 1. *Если задан зависящий от времени вектор $v = v(t)$ и $|v| \equiv 1$, то векторы v и $\dot{v}$ ортогональны.*

Доказательство. Так как $v = v^1e_1 + v^2e_2$ и $|v|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2$, то

$$\frac{d}{dt}\langle v, v\rangle = \langle \dot{v}, v\rangle + \langle v, \dot{v}\rangle = 2\langle v, \dot{v}\rangle = \frac{d}{dt}|v|^2 = 0;$$

поэтому $\langle v, \dot{v}\rangle = 0$. Лемма доказана.

Замечание. Если имеются два любых вектора $v(t)$ и $w(t)$, то в евклидовой геометрии имеет место формула $\frac{d}{dt}\langle v, w\rangle = \langle \dot{v}, w\rangle + \langle v, \dot{w}\rangle$.

Применяя нашу лемму к кривой, наделенной натуральным параметром $l = t$, $r = r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$, и полагая $v = \frac{dr}{dt}$, получаем

Следствие. *Векторы скорости $v(t)$ и ускорения $w(t) = \frac{dv}{dt}$ ортогональны, если параметр натурален.*

Определение 1. *Кривизной* кривой $r(t)$ называется величина вектора ускорения $k = |w(t)|$, если $t = l$ (натуральный параметр). *Ориентированной кривизной* называется величина $\hat{k} = \pm k$, где знак совпадает со знаком определителя, составленного из координат векторов v и w (знаком ориентации репера (v, w)).

Вывод.

$$\frac{dv}{dt} = kn = \frac{d^2r}{dl^2}, \tag{6}$$

где n — единичный вектор, нормальный к кривой:

$$n = \frac{w}{|w|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2}} \left(\frac{d^2x}{dl^2} e_1 + \frac{d^2y}{dl^2} e_2\right). \tag{7}$$

Радиусом кривизны R называется число $1/k$.

Соответствует ли это понятие кривизны нашим наглядным представлениям?

Свойства кривизны:

1) *Кривизна прямой равна нулю.*

Доказательство. Пусть $x = x_0 + al$, $y = y_0 + bl$ (прямая), причем параметр l натурален; это значит, что

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 = 1.$$

Тогда $w = \frac{d^2r}{dl^2} = 0$ и $k = 0$, $R = \infty$.

2) *Кривизна окружности радиуса R постоянна и равна R^{-1}.*

Доказательство. Пусть

$$x = x_0 + R\cos(l/R), \quad y = y_0 + R\sin(l/R),$$

где $R = \text{const}$; тогда

$$\frac{d^2x}{dl^2} = -\frac{\cos(l/R)}{R}, \quad \frac{d^2y}{dl^2} = -\frac{\sin(l/R)}{R}$$

и $|w| = \frac{1}{R} = k$.

Имеет место важная

Теорема 1. *Если кривая $r = r(l)$ с нигде не обращающейся в нуль кривизной задана через натуральный параметр l, то имеют место формулы Френе*

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dl} &= w = kn, \\ \frac{dn}{dl} &= -kv, \end{aligned} \tag{8}$$

где $n = \frac{w}{|w|}$ — единичный вектор нормали.

Доказательство. Так как n — единичный вектор и векторы n и v ортогональны, мы имеем:

а) $\left\langle n, \frac{dn}{dl} \right\rangle = 0$ (из леммы 1);

б) $\frac{dn}{dl} = \alpha v$ ($n \perp v$, и размерность пространства равна 2).

Так как $|v| = 1$, то $|\alpha| = \left|\frac{dn}{dl}\right|$. Чему равно α? Так как $\langle v, n\rangle = 0$, мы имеем

$$0 = \frac{d}{dl}\langle v, n\rangle = \left\langle \frac{dv}{dl}, n \right\rangle + \left\langle v, \frac{dn}{dl} \right\rangle = k + \alpha \langle v, v\rangle = k + \alpha.$$

Итак, $\alpha = -k$. Теорема доказана.

Замечание. Если кривизна кривой в некоторых ее точках обращается в нуль, то можно определить вектор нормали n к кривой, так что $n \perp v$, и репер (v, n) положительно ориентирован. В этом случае формулы Френе (8) остаются справедливыми с заменой кривизны k на ориентированную кривизну $\widehat{k}$ (проверьте!).

Каков геометрический смысл формул Френе? Так как $\frac{dv}{dl} = kn$, $\frac{dn}{dl} = -kv$, и (v, n) — единичный ортонормированный репер, то

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= v + (\Delta l)\frac{dv}{dl} + O(\Delta l^2) = v + k(\Delta l)n + O(\Delta l^2), \\ n + \Delta n &= n + (\Delta l)\frac{dn}{dl} + O(\Delta l^2) = n - k(\Delta l)v + O(\Delta l^2). \end{aligned} \tag{9}$$

Положим $k(\Delta l) = \Delta\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \cos(\Delta\varphi) &= 1 + O(\Delta\varphi^2), \\ \sin(\Delta\varphi) &= \Delta\varphi + O(\Delta\varphi^2), \end{aligned} \tag{10}$$

и мы можем написать

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= \cos(\Delta\varphi)v + \sin(\Delta\varphi)n, \\ n + \Delta n &= -\sin(\Delta\varphi)v + \cos(\Delta\varphi)n, \end{aligned} \tag{11}$$

т. е. переход от репера (v, n) к реперу $(v + \Delta v, n + \Delta n)$ состоит в повороте на малый угол $\Delta\varphi$.

Итак, формулы Френе описывают вращение репера (v, n) при переходе от точки l к близкой точке $l + \Delta l$ с точностью до малых второго порядка. Иногда это выражают формулами

$$k = \left|\frac{d\varphi}{dl}\right|, \quad \widehat{k} = \frac{d\varphi}{dl}, \tag{12}$$

где φ — угол поворота вектора v (или n) при движении вдоль кривой. Параметр здесь все время считался натуральным.

Поставим теперь следующий естественный вопрос: как вычислить кривизну плоской кривой $r(t)=(x(t), y(t))$, если параметр t не является натуральным.

В этом случае $v_t=(\dot{x}, \dot{y})$ и $|v_t| \neq 1$. Поэтому векторы v_t и $\dot{v}_t = w_t$ (скорость и ускорение) не перпендикулярны.

Пусть $\xi = \xi(t) = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ — любой вектор. Для нашей кривой мы имели

$$dl = |v_t|dt = |\dot{r}|dt. \tag{13}$$

Для любого вектора $\xi(t)$ имеем

$$\frac{d\xi}{dl} = \frac{1}{|v_t|}\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\frac{dt}{dl}, \tag{14}$$

где $|v_t| = |\dot{r}|$ и скорость определена по отношению к параметру t пробегания вдоль кривой.

Пусть $\eta(t) = \dfrac{v_t}{|v_t|} = \dfrac{dr}{dl}$; $\eta(t)$ — единичный вектор касательной (он совпадает с вектором скорости v, если параметр натуральный).

По определению кривизны имеем

$$k = \left|\frac{d^2r}{dl^2}\right| = \left|\frac{d\eta}{dl}\right| = \left|\frac{d}{dl}\left(\frac{v_t}{|v_t|}\right)\right| \tag{15}$$

(длина ускорения в натуральном параметре равна кривизне). Из формулы (14) вытекает, что

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{v_t}{|v_t|}\right) = \frac{1}{|v_t|}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_t}{|v_t|}\right) = \frac{1}{|v_t|^2}\left(\frac{dv_t}{dt} - \frac{v_t}{|v_t|}\frac{d|v_t|}{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{|v_t|^2}\left(\ddot{r} - \frac{\dot{r}}{2|\dot{r}|^2}\frac{d|\dot{r}|^2}{dt}\right), \quad |v_t| = |\dot{r}|.$$

Итак, получаем (считая, что $|\dot{r}| \neq 0$)

$$k = \left|\frac{d^2r}{dl^2}\right| = \left|\frac{d}{dl}\left(\frac{\dot{r}}{|\dot{r}|}\right)\right| = \frac{1}{|\dot{r}|^2}\left|\ddot{r} - \frac{\langle \dot{r}, \ddot{r}\rangle}{|\dot{r}|^2}\dot{r}\right|. \tag{16}$$

Отсюда для кривизны имеем

$$k = \left|\frac{d^2r}{dl^2}\right| = \frac{1}{|\dot{r}|^2}|\eta - \langle \xi, \eta\rangle \xi|, \tag{17}$$

где $\eta = \ddot{r}$, $\xi = \dfrac{dr}{dl} = \dfrac{\dot{r}}{|\dot{r}|} = \dfrac{\dot{v}_t}{|v_t|}$.

Компоненты вектора $w = \dfrac{d^2r}{dl^2}$ имеют вид

$$w = \frac{1}{|\dot r|^2}\left(\ddot x - \dot x\frac{\dot x\ddot x + \dot y\ddot y}{\dot x^2 + \dot y^2}\right)e_1 + \frac{1}{|\dot r|^2}\left(\ddot y - \dot y\frac{\dot x\ddot x + \dot y\ddot y}{\dot x^2 + \dot y^2}\right)e_2. \tag{18}$$

Далее,

$$|w|^2 = k^2 = \frac{(\dot x\ddot y - \ddot y\dot x)^2}{(\dot x^2 + \dot y)^3}. \tag{19}$$

Итак, мы доказали важную формулу для кривизны.

Теорема 2. *При любом выборе параметра t для кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеет место формула*

$$k = \left|\frac{d^2r}{dl^2}\right| = \frac{|\dot x\ddot y - \ddot y\dot x|}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}, \tag{20}$$

где предполагается, что $\dot x^2 + \dot y^2 = |\dot r|^2 \neq 0$.

Заметим, что в числителе стоит модуль определителя матрицы $\begin{pmatrix} \dot x & \dot y \\ \ddot x & \ddot y \end{pmatrix}$.

2. Пространственные кривые. Кривизна и кручение. Для любой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, т. е. $r = r(t)$, заданной в евклидовых координатах в трехмерном пространстве, имеем

$$dl = |\dot r|\,dt = |v_t|\,dt = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\,dt. \tag{21}$$

Для удобства основных определений мы, как и в случае плоских кривых, рассмотрим первоначально лишь натуральный параметр l, $r = r(l)$, $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$. По определению $v = \dot r = \dot x e_1 + \dot y e_2 + \dot z e_3$ и $w = \dot v = \ddot r = \ddot x e_1 + \ddot y e_2 + \ddot z e_3$ (точка здесь означает производную по l, так как $t = l$). Как и в плоском случае, вводим

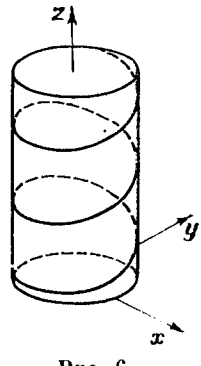


Рис. 6

Определение 2. *Кривизной* пространственной кривой называется модуль ускорения в параметре l: $k = |w| = |\ddot r|$. *Радиусом кривизны* называется величина, обратная кривизне: $R = k^{-1}$.

Мы знаем из леммы 1, что векторы скорости и ускорения ортогональны: $v \perp w$, так как $|v| = 1$. Однако в трехмерном случае векторов v и w не хватает, чтобы составить полный репер пространства, даже если $w \neq 0$. Кроме того, наглядно очевидно, что одной кривизны в трехмерном пространстве не хватает для того, чтобы охарактеризовать геометрические свойства кривой. Представьте себе, например, кривую, намотанную на цилиндр:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = t$$

(винтовую линию). Кроме кривизны, она еще закручивается по

третьему направлению (рис. 6). Третий вектор базиса можно взять ортогональным к v и w.

Напомним, что в линейной алгебре трехмерного евклидова пространства имеется важная операция векторного произведения векторов. Если ξ, η — векторы в трехмерном пространстве,

$$\xi = \xi^i e_i, \quad \eta = \eta^i e_i, \tag{22}$$

где e_i — базисные орты ($e_i \perp e_j$, $|e_i| = 1$), то мы можем построить вектор $\gamma = [\xi, \eta]$, $\gamma = \gamma^i e_i$, положив $\gamma^1 = \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2$, $\gamma^2 = \xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3$, $\gamma^3 = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$. Другими словами, $\pm\gamma^i$ равно определителю части матрицы $\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \end{pmatrix}$, остающейся после вычеркивания i-го столбца. Мы видим, что

$$\begin{gathered} [\xi, \eta] = -[\eta, \xi], \ [\xi_1 + \xi_2, \eta] = [\xi_1, \eta] + [\xi_2, \eta], \\ [\lambda\xi, \eta] = \lambda[\xi, \eta]. \end{gathered} \tag{23}$$

Верно также тождество Якоби

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\zeta, \xi], \eta] + [[\eta, \zeta], \xi] = 0. \tag{24}$$

Далее, из аналитической геометрии известны такие свойства векторного произведения: вектор $[\xi, \eta]$ направлен перпендикулярно к плоскости, натянутой на векторы (ξ, η), т. е. к плоскости векторов вида $\lambda\xi + \mu\eta$, а длина его равна

$$|[\xi, \eta]| = |\xi||\eta| \sin\varphi,$$

где φ — угол между ξ и η,

$$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \frac{\langle \xi, \eta\rangle^2}{|\xi|^2|\eta|^2}. \tag{25}$$

Замечание. Если векторы ξ и η лежат в плоскости (x, y), то их векторное произведение ортогонально к этой плоскости (т. е. направлено по оси z), и $[\xi, \eta] = (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)e_3$. Тогда длина $|[\xi, \eta]|$ равна $|\xi^1\eta^2 - \eta^1\xi^2| = |\xi||\eta| \sin\varphi$.

Полученную в предыдущем пункте формулу (20) для кривизны плоской кривой можно теперь переписать так:

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{|[\dot{r}, \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3} \tag{26}$$

для произвольного параметра t.

Таким образом, общая формула кривизны плоской кривой выражает кривизну через длину векторного произведения $[\dot{r}, \ddot{r}]$. Так как кривизна связана с вращением репера (v, n) по формулам Френе, то с кривизной естественно связывается вектор угловой скорости вращения репера (v, n), направленный ортогонально к плоскости (x, y). Вернемся к пространственной кривой $r =$

$= r(l)$, $r = (x, y, z)$, $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$. Для нее

$$v(l) = \frac{dr}{dl}, \quad w(l) = \frac{d^2r}{dl^2}. \tag{27}$$

Мы считаем, что $|w| \neq 0$ и $|v| \neq 0$ (такие точки называются *невырожденными точками кривой*). Предположим, что $|v| \equiv 1$; тогда $\langle w, v\rangle = 0$, т. е. $w \perp v$. Рассмотрим вектор $b = [v, n]$, где $n = \frac{w}{|w|}$. Вектор n называется *главной нормалью* кривой, вектор b — *бинормалью*. Мы видим, что $|b| = |v||n| \sin\varphi = 1$, $b \perp v$, $b \perp n$. Мы получаем ортонормированный репер (v, n, b) в точке кривой, где $w \neq 0$ (в невырожденной точке).

Как и для случая скалярного произведения, нам будет полезно следующее утверждение.

Лемма 2. *Если заданы два вектора $\xi(t)$, $\eta(t)$ в трехмерном пространстве, то имеет место формула типа Лейбница*

$$\frac{d}{dt}[\xi, \eta] = \left[\frac{d\xi}{dt}, \eta\right] + \left[\xi, \frac{d\eta}{dt}\right]. \tag{28}$$

Это непосредственно следует из обычной формулы Лейбница для дифференцирования произведения функций: $(fg)' = f'g + fg'$. Следует обратить внимание на порядок сомножителей в правой части формулы (28).

Теорема 3. *Для любой пространственной кривой $r = r(l)$, где l — натуральный параметр, имеют место следующие формулы Френе*:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dl} &= kn, \\ \frac{dn}{dl} &= -\varkappa b - kv, \\ \frac{db}{dl} &= \varkappa n. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь первая строчка есть просто определение числа k, а $|\varkappa| = \left|\frac{db}{dl}\right|$; число $\varkappa$ называется *кручением* пространственной кривой (оно не обязательно положительно).

В плоском случае $b = \text{const}$, и поэтому $|\varkappa| = \left|\frac{db}{dl}\right| = 0$.

Формулы Френе можно переписать в матричном виде в репере (v, n, b). Обозначив $v = e_1$, $n = e_2$, $b = e_3$, имеем

$$\frac{de_i}{dl} = b_i^j e_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{30}$$

причем матрица $B = (b_i^j)$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\varkappa \\ 0 & \varkappa & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Мы видим, что эта матрица, как и подобная матрица в двумерном случае, кососимметрична.

Перейдем к доказательству формул Френе для пространственных кривых. Выведем сначала формулу $\frac{db}{dl} = \varkappa n$. Так как $b = [v, n]$, то $[v, n]^{\cdot} = \dot{b} = [\dot{v}, n] + [v, \dot{n}]$ в силу леммы 2. Так как $|v| = 1$ и $|n| = 1$, то $\dot{v} \perp v$ и $\dot{n} \perp n$. Поэтому $\dot{v} = kn$, $\dot{n} = \alpha v + \beta b$, где α и β — какие-то неизвестные числа. Так как $[n, n] = 0$ и $[v, v] = 0$, то $[\dot{v}, n] = 0$ и $[v, \dot{n}] = \beta[v, b] = -\beta n$. Поэтому

$$\frac{db}{dl} = \frac{d}{dl}[v, n] = -\beta n = \varkappa n, \tag{32}$$

где $\varkappa$ определяется из этого равенства.

Итак, $\dot{b} = \varkappa n$. Вычислим $\dot{n}$. Так как $n = [b, v]$, то

$$\frac{d}{dl}[b, v] = [\dot{b}, v] + [b, \dot{v}] = \varkappa b - kv.$$

Теорема доказана.

В заключение следует отметить, что кривизна и кручение — полный набор геометрических инвариантов кривой в евклидовом пространстве. Более точно:

1) Если для плоской кривой известна зависимость $k = k(l)$, то эта кривая однозначно восстанавливается с точностью до движения плоскости. Уравнение $k = k(l)$ называется *натуральным уравнением кривой.*

2) Если для пространственной кривой известны функции $k = k(l)$, $\varkappa = \varkappa(l)$, то можно восстановить кривую с точностью до движения всего пространства. Эта пара уравнений называется натуральным уравнением пространственной кривой.

Доказательства этих теорем можно прочесть в учебнике П. К. Рашевского ([2]).

3. Ортогональные преобразования, зависящие от параметра. Пусть $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$,— ортогональная матрица (см. § 4), т. е.

$$A^{\top}A = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \tag{33}$$

причем все a_{ij} — функции параметра t. Пусть, далее, $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$, т. е. $A(0) = 1$. Имеет место

Лемма 3. *Матрица* $B = \left(\frac{dA}{dt}\right)\Big|_{t=0}$ *кососимметрична, если* $A(0) = 1$.

Доказательство. Продифференцируем обе части равенства (33) по t. Получим

$$0 = \frac{d}{dt}\delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (\dot{a}_{ij}a_{ik} + a_{ij}\dot{a}_{ik}).$$

Положим теперь $t=0$. Так как $a_{ij}(0)=\delta_{ij}$, то мы получим

$$0=\sum_{i=1}^{n}(\dot{a}_{ij}\delta_{ik}+\delta_{ij}\dot{a}_{ik})=b_{kj}+b_{jk},$$

что и требовалось доказать.

Из этой леммы можно сразу получить новое доказательство формул Френе. Пусть $e_1(l)=v(l)$, $e_2(l)=n(l)$, $e_3(l)=b(l)$ — зависящий от натурального параметра l репер, связанный с данной пространственной кривой. Тогда репер $e_1(l+\Delta l)$, $e_2(l+\Delta l)$, $e_3(l+\Delta l)$ получается из репера $e_1(l)$, $e_2(l)$, $e_3(l)$ ортогональным преобразованием, так как оба эти репера ортонормированы:

$$\begin{gathered}e_i(l+\Delta l)=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}(l,\Delta l)\,e_j(l)\quad(i=1,2,3),\\ \sum_{i=1}^{3}a_{ij}(l,\Delta l)\,a_{ik}(l,\Delta l)=\delta_{jk}.\end{gathered}\tag{34}$$

Дифференцируя равенство (34) по Δl и полагая $\Delta l=0$, мы получаем

$$\dot{e}_i(l)=\sum_{j=1}^{3}b_{ij}e_j(l),\tag{35}$$

где матрица (b_{ij}) кососимметрична в силу леммы 3. Поэтому матрица $B=(b_{ij})$ имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}0 & b_{12} & b_{13}\\ -b_{12} & 0 & b_{23}\\ -b_{13} & -b_{23} & 0\end{pmatrix},\quad b_{ij}=-b_{ji}.\tag{36}$$

По определению

$$\dot{e}_1=\frac{de_1}{dl}=\frac{dv}{dl}=kn=ke_2,$$

поэтому $b_{12}=k$, $b_{13}=0$. Значит, $b_{21}=-k$, $b_{31}=0$, и матрица B имеет такой вид:

$$B=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & -b_{32}\\ 0 & b_{32} & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначив здесь $\varkappa=b_{32}$, мы получаем формулы Френе (29).

Для плоского случая доказательство проводится аналогично.

Задачи. 1. Для винтовой линии $r=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\}$, $a>0$, $b\neq 0$, найти репер Френе, кривизну и кручение.

2. Найти кривизну и кручение кривых:

а) $r=e^t\{\sin t,\ \cos t,\ 1\}$;

б) $r=a\{\operatorname{ch}t,\ \operatorname{sh}t,\ t\}$.

3. Найти кривизну эллипса в вершинах, если его полуоси равны a и b.

4. Найти кривизну и кручение кривых:

а) $r = \{t^2\sqrt{3}/2,\ 2-t,\ t^3\}$,

б) $r = \{3t - t^3,\ 3t^2,\ 3t + t^3\}$.

5. Доказать, что если у кривой кривизна $k(l) \equiv 0$, то кривая является прямой линией.

6. Доказать, что если кручение кривой $\varkappa(l) \equiv 0$, то кривая лежит в плоскости. Найти уравнение этой плоскости.

7. Описать класс кривых с постоянной кривизной и кручением: $k(l) \equiv \text{const}$, $\varkappa(l) \equiv \text{const}$.

8. Описать класс кривых с постоянным кручением: $\varkappa(l) = \text{const}$.

9. Доказать, что кривая $r = r(t)$ плоская тогда и только тогда, когда смешанное произведение $(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = 0$.

10. Пусть S — площадь между плоской кривой и секущей на расстоянии h от касательной (и параллельной касательной). Выразить $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{S^2}{h^3}$ через кривизну кривой.

11. Доказать, что для гладкой замкнутой кривой

$$\int (r\, dk - \varkappa b\, dl) = 0.$$

12. Доказать, что формулы Френе можно представить в виде

$$\dot{v} = [\xi,\ v], \quad \dot{n} = [\xi,\ n], \quad \dot{b} = [\xi,\ b].$$

Найти вектор ξ (вектор Дарбу).

13. Решить уравнение $r' = [\omega,\ r]$, $\omega = \text{const}$.

14. Доказать, что кривизна и кручение пропорциональны: $k = c \cdot \varkappa$ $(k \neq 0)$, где c — константа, в том и только том случае, если найдется такой постоянный вектор u, что $\langle u,\ r\rangle = \text{const}$.

15. Пусть нормальные плоскости к кривой, натянутые на векторы n, b, проходят через фиксированную точку x_0. Показать, что кривая лежит на сфере с центром в этой точке.

16. Доказать, что кривая лежит на сфере радиуса r в том и только том случае, если справедливо соотношение

$$r^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right).$$

17. Доказать, что $\varkappa = -(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})/|[\dot{r}, \ddot{r}]|$.

18. Для гладкой кривой $r = r(l)$ рассмотрим кривую $n(l)$ (n — вектор нормали в данной точке), l^* — натуральный параметр на этой кривой. Доказать, что $\dfrac{dl^*}{dl} = \sqrt{k^2 + \varkappa^2}$.

19. Пусть

$$A = A(l) = \begin{pmatrix} 0 & k(l) & 0 \\ -k(l) & 0 & -\varkappa(l) \\ 0 & \varkappa(l) & 0 \end{pmatrix} = (a_j^i(l)).$$

Определим векторы $r_j = r_j(l)$ как решения системы уравнений

$$\frac{dr_j}{dl} = a_j^i r_i, \qquad j = 1, 2, 3,$$

где $r_1(0)$, $r_2(0)$, $r_3(0)$ — заданный ортонормированный репер.

а) Доказать, что репер $r_1(l)$, $r_2(l)$, $r_3(l)$ ортонормирован при любом l.

б) Пусть $r(l) = r_0 + \int_0^l r_1(l)\,dl$. Доказать, что тогда $r_1(l) = v(l)$, $r_2(l) = n(l)$, $r_3(l) = b(l)$, где v, n, b — касательная, нормаль и бинормаль кривой $r(l)$, причем кривизна и кручение этой кривой равны $k(l)$, $\varkappa(l)$.

20. Пусть кривая лежит на сфере и имеет постоянную кривизну. Доказать, что кривая — окружность.

§ 6. Псевдоевклидовы пространства

1. Простейшие понятия специальной теории относительности. Напомним, что псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^n_{p,q}$, $p+q=n$, определяется как пространство с координатами $x^1, \ldots, x^n$, в которых «квадрат длины» вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ задается формулой

$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{p} (\xi^i)^2 - \sum_{i=1}^{q} (\xi^{p+i})^2 \qquad (1)$$

(см. § 3, п. 2). При $n=4$, $p=1$ получаем *пространство-время специальной теории относительности* (пространство Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3} = \mathbb{R}^4_1$) с координатами x^0, x^1, x^2, x^3; обычно полагают $x^0 = ct$, где постоянная c — скорость света в пустоте. Пространства $\mathbb{R}^n_{1,n-1} = \mathbb{R}^n_1$ мы также будем называть пространствами Минковского (размерности n).

Квадрат длины вектора $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ задается формулой

$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi \rangle = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2. \qquad (2)$$

Величина $\langle \xi, \xi \rangle$ может быть и положительной, и отрицательной, и даже нулем. Векторы ξ, для которых $|\xi| = 0$, образуют в пространстве $\mathbb{R}^4_1$ конус, называемый *изотропным* или *световым* конусом (см. рис. 7 для пространства $\mathbb{R}^3_1$). Векторы, лежащие внутри конуса, имеют положительный квадрат длины, $|\xi|^2 > 0$, и

называются *времениподобными*. Векторы, лежащие вне конуса, имеют отрицательный квадрат длины, $|\xi|^2 < 0$, и называются *пространственноподобными*. На рис. 7 ξ_+ — времениподобный вектор, ξ_- — пространственноподобный; вектор ξ_0 лежит на изотропном конусе и имеет нулевую длину — такие векторы также называются *изотропными* или *световыми*.

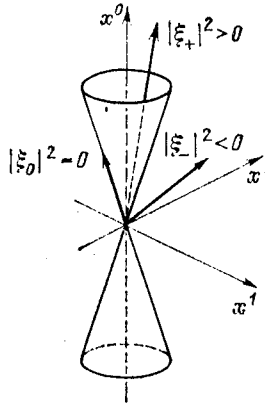


Рис. 7. Изотропный конус в пространстве $\mathbb{R}^3_1$: $(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2=0$

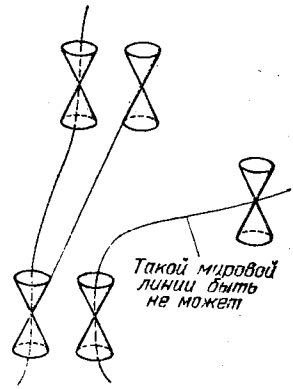


Рис. 8. Мировые линии массивных и безмассивных частиц

Рассмотрим мировую линию какой-нибудь материальной частицы (см. § 1, п. 1). Эта мировая линия имеет вид

$$x_0 = ct, \quad x^1 = x^1(t), \quad x^2 = x^2(t), \quad x^3 = x^3(t) \tag{3}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4_1$. Здесь кривая $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$ есть обычная траектория точки в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Вектор ξ, касательный к мировой линии (3), имеет вид

$$\xi = (c, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3). \tag{4}$$

Заметим, что $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ — координаты вектора скорости v для пространственного движения точки. В специальной теории относительности принимается постулат, что материальные частицы не могут двигаться со скоростью, большей скорости света c, т. е. $|v| \leqslant c$. Это означает, что

$$c^2 - (\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2 - (\dot{x}^3)^2 \geqslant 0, \tag{5}$$

т. е. вектор ξ или времениподобный, или изотропный. В частности, если наша мировая линия есть мировая линия луча света, то вектор ξ изотропный, т. е. $|v| = c$. По этой причине изотропный конус и называется также световым. В действительности изотропные касательные векторы могут иметь только мировые линии безмассовых частиц (таких как, например, фотоны). Ми-

ровые линии массивных частиц имеют всегда времениподобные касательные векторы. В частности, мировая линия массивной частицы целиком распространяется строго внутри светового конуса (рис. 8; заметим, что изотропный конус имеется во всех точках пространства). Для времениподобных кривых (т. е. для таких кривых, у которых касательный вектор всегда времениподобен) можно определить понятие длины аналогично тому, как это было в евклидовой геометрии. Если кривая задана в виде $x^0 = x^0(\tau)$, $x^1 = x^1(\tau)$, $x^2 = x^2(\tau)$, $x^3 = x^3(\tau)$, $\xi = (\dot{x}^0, \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$, $|\xi|^2 > 0$, то длина l имеет вид

$$l = \int_a^b |\xi| \, d\tau = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (\dot{x}^\alpha)^2} \, d\tau. \tag{6}$$

В специальной теории относительности величина l/c называется собственным временем, прожитым частицей. Параметр l является натуральным параметром на мировой линии.

Если точка движется в трехмерном пространстве с постоянной скоростью $v = (v^1, v^2, v^3)$, т. е.

$$x^0 = ct, \quad x^1 = v^1 t, \quad x^2 = v^2 t, \quad x^3 = v^3 t, \tag{7}$$

то имеем

$$dl = \sqrt{c^2 - v^2}\, dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dx^0, \quad l = x^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{8}$$

где мы используем сокращенное обозначение $v^2 = |v|^2$.

В частности, x^0/c есть собственное время покоящейся частицы (в исходной системе координат).

2. Преобразования Лоренца. Мы видели выше (см. § 4, п. 4), что в классической (ньютоновской) механике время носит абсолютный характер, т. е. величина промежутка времени Δt между событиями не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчета этот промежуток измеряется. Инерциальные системы отсчета классической механики получались одна из другой преобразованием Галилея (4.64).

В специальной теории относительности преобразования Галилея заменяются преобразованиями Лоренца. Переход к другой системе отсчета — это выбор новых координат в пространстве $\mathbb{R}^4_1$, т. е. некоторое преобразование пространства Минковского. Преобразование Лоренца сохраняет начало координат и пространственновременной интервал, т. е. квадратичную форму $dl^2 = c^2(dt)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Переход к другой инерциальной системе отсчета осуществляется движением псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^4_1$. Полная группа этих движений называется *группой Пуанкаре*.

Начнем с изучения группы движений псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{R}^2_1$. Пусть сперва движение оставляет неподвижным

начало координат. Тогда оно задается матрицей A:

$$x^0 = ax'^0 + bx'^1,$$
$$x^1 = cx'^0 + dx'^1. \tag{9}$$

Если координаты x^0, x^1 псевдоевклидовы, то метрика имеет в них вид $g_{\alpha\beta} = \{g_{00} = 1,\ g_{11} = -1,\ g_{12} = g_{21} = 0\}$. Так как преобразование (9) является движением, то

$$(g_{\alpha\beta}) = G = A^T G A. \tag{10}$$

Так как $\det A^T = \det A$ и определитель произведения матриц равен произведению определителей, то

$$(\det A)^2 = 1, \quad \det A = \pm 1.$$

Из (10) вытекает система из трех уравнений для элементов матрицы A:

$$a^2 - c^2 = 1, \quad ab - cd = 0, \quad b^2 - d^2 = -1. \tag{11}$$

Ясно, что $a \neq 0$. Положим $\beta = c/a$. Прямое вычисление дает

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad c = \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad b = \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad d = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{12}$$

Здесь знак a совпадает со знаком c, а знак b — со знаком d. Итак, группа всех преобразований A, являющихся движениями псевдоевклидовой метрики в пространстве $\mathbb{R}^2_1$, состоит из следующих матриц:

$$A = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Введем угол гиперболического поворота ψ, положив $\beta = \operatorname{th}\psi$. Тогда

$$A = \pm\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi, & \pm\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi, & \pm\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \tag{14}$$

т. е. мы получаем группу гиперболических поворотов. Любой гиперболический поворот переводит изотропный конус $|\xi|^2 = 0$ в себя. Кроме того, если $|\xi|^2 = 1$, то $|A\xi|^2 = 1$. Векторы, имеющие единичную длину, образуют в $\mathbb{R}^2_1$ «псевдосферу единичного радиуса». Эта псевдосфера задается в $\mathbb{R}^2_1$ уравнением $(x^0)^2 - (x^1)^2 = 1$ и является гиперболой (рис. 9).

Напомним, что группа ортогональных преобразований евклидовой плоскости состояла из двух связных компонент; собствен-

ных и несобственных преобразований. Группа движений псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{R}^2_1$ устроена более сложно: она состоит из четырех связных компонент (из четырех кусков):

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Преобразования из первой связной компоненты можно соединить кривой с единичным (т. е. тождественным) преобразованием. Матрицы преобразований 1, P, T, PT, принадлежащих четырем различным связным компонентам, имеют вид

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Преобразования из первой и второй связных компонент не меняют направления времени t. Такие преобразования называются *ортохронными*. Таким образом, связная компонента единицы состоит из собственных (с определителем $+1$) ортохронных преобразований.

Рассмотренная нами группа движений псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{R}^2_1$, сохраняющих начало координат, обозначается через $O(1, 1)$. Это частный случай группы $O(p, q)$, $p+q=n$, псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$. Таким образом, $O(p, q)$ есть группа матриц A, сохраняющих скалярное произведение (1):

$$\langle A\xi, A\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle = \\ = \xi^1\eta^1 + \ldots + \xi^p\eta^p - \ldots - \xi^n\eta^n. \quad (16)$$

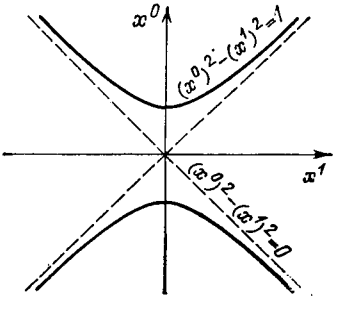


Рис. 9

Особо важны группы $O(1, n-1)$ — движения n-мерного пространства Минковского $\mathbb{R}^n_1$, сохраняющие начало координат. Мы видели, что группа $O(1, 1)$ состоит из четырех кусков (четырех компонент связности). В действительности из четырех кусков состоит и группа $O(1, n-1)$; мы не доказываем здесь этого утверждения и ограничиваемся более слабым его вариантом.

Лемма 1. *Существует гомоморфизм**) φ *группы* $O(1, n-1)$ *на группу* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. *Здесь* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ — *прямая сумма циклических групп второго порядка* $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$.

---

*) Напомним, что гомоморфизм φ группы G_1 в группу G_2 — это отображение φ: $G_1 \to G_2$ такое, что $\varphi(1) = 1$, $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)$ и $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$. Часто гомоморфизм φ называют «представлением» группы G_1 в группе G_2.

Доказательство. Пусть e_0 — единичный вектор вдоль оси x^0. Если матрица $A \in O(1, n-1)$, то положим

$$\varphi(A) = (\det A,\ \operatorname{sgn}\langle e_0,\ Ae_0\rangle). \tag{17}$$

Заметим, что скалярное произведение $\langle e_0,\ Ae_0\rangle$ не равно нулю, так как вектор Ae_0 времениподобен:

$$\langle Ae_0,\ Ae_0\rangle = \langle e_0,\ e_0\rangle = 1. \tag{18}$$

Предоставляем читателю проверить гомоморфность отображения φ.

Преобразования A такие, что $\varphi(A) = (1, 1)$, называются *собственными*. Преобразования, у которых $\operatorname{sgn}\langle e_0,\ Ae_0\rangle = +1$, называются, как и прежде, ортохронными (они не меняют направления времени t). Ядро*) гомоморфизма φ состоит из собственных преобразований и является связной компонентой единицы группы $O(1, n-1)$. Этого мы здесь не доказываем; из доказанной леммы следует только, что в группе не меньше четырех компонент связности.

Полная группа движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_1^n$ получается из группы $O(1, n-1)$ добавлением трансляций (сдвигов).

Переформулируем теперь полученные результаты о движениях псевдоевклидова пространства на языке специальной теории относительности. Как уже было сказано, переход от одной инерциальной системы отсчета (ct', x'^1, x'^2, x'^3) к другой (ct, x^1, x^2, x^3) осуществляется преобразованием, сохраняющим квадратичную форму $(ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Пусть система (x') движется относительно (x) вдоль оси x^1 со скоростью v. Это означает, что $x^2 = x'^2$, $x^3 = x'^3$ и преобразование координат имеет вид

$$\begin{aligned} x^0 = (ct) &= \mathrm{a}(ct') + \mathrm{b}x'^1, \\ x^1 = \mathrm{c}(ct') &+ \mathrm{d}x'^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \end{aligned} \tag{19}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ лежит в $O(1, 1)$.

Если скорость v уменьшить до нуля, то преобразование (19) станет тождественным, поэтому матрица A лежит в связной компоненте единицы группы $O(1, 1)$ и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}. \tag{20}$$

---

*) Ядром гомоморфизма φ группы G_1 в группу G_2 называется совокупность всех таких элементов g группы G_1, что $\varphi(g) = 1$.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} ct &= ct' \operatorname{ch}\psi + x'^1 \operatorname{sh}\psi, \\ x^1 &= ct' \operatorname{sh}\psi + x'^1 \operatorname{ch}\psi. \end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим движение в системе $K(ct, x^1)$ начала координат O' штрихованной системы. Тогда $x'^1 = 0$ и формулы (21) принимают вид

$$\begin{aligned} ct &= ct' \operatorname{ch}\psi, \\ x^1 &= ct' \operatorname{sh}\psi \end{aligned}$$

или, разделив одно на другое, $x^1/ct = \operatorname{th}\psi$. Но x^1/t есть, очевидно, скорость v системы K' относительно K. Таким образом,

$$\operatorname{th}\psi = v/c. \tag{22}$$

Отсюда

$$\operatorname{sh}\psi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{23}$$

Подставив это в (20), найдем

$$\begin{aligned} t &= \left(t' + \left(\frac{v}{c^2}\right) x'^1\right) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ x^1 &= (x'^1 + vt') \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Эти преобразования и называются преобразованиями Лоренца.

Пусть скорость v мала по сравнению со скоростью света c, т. е. $v/c \ll 1$; из (24) вытекает, что если $v/c \to 0$, то преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (4.64): $t = t'$, $x^1 = x'^1 + vt$. Иными словами, при малых взаимных скоростях систем отсчета формулы теории относительности переходят в формулы классической механики. Однако в области больших скоростей (сравнимых со скоростью света) начинаются глубокие расхождения этих двух теорий. Эти принципиальные расхождения мы проиллюстрируем на следующих популярных эффектах теории относительности: сокращение линейных размеров в направлении вектора скорости и отставание часов (связанное с тем, что одновременные в одной системе отсчета события в другой системе становятся разновременными).

Пусть в системе K покоится твердый стержень длины l, параллельный оси x^1; пусть координаты его концов в K равны x_1^1, x_2^1, т. е. $l = x_2^1 - x_1^1$. Найдем теперь длину этого стержня *) в системе K'. Для этого найдем координаты его концов x'^1_1 и x'^1_2

*) Предостережем читателя, что длиной стержня является не четырехмерная инвариантная величина, а длина трехмерной проекции.

в системе K'; имеем в момент времени t'

$$x_1^1 = \frac{x_1'^1 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x_2^1 = \frac{x_2'^1 + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{25}$$

Длина стержня l' в системе K' равна $l' = x_2'^1 - x_1'^1$. Вычитая x_1^1 из x_2^1, получаем

$$l = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{26}$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью v, уменьшится в отношении $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (лоренцево сокращение).

Перейдем к изучению временно́й координаты t. Пусть в системе K произошли два одновременных события A_1 и A_2 (т. е. $t(A_1) = t(A_2)$ в системе K), причем пусть событие A_1 произошло в точке с координатами (x_1^1, x_1^2, x_1^3), а A_2 — в точке с координатами (x_2^1, x_2^2, x_2^3), $x_1^1 \neq x_2^1$. Что происходит в движущейся системе отсчета K' с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K? Из формул преобразования Лоренца (24) имеем

$$t(A_1) = \frac{t'(A_1) + (v/c^2)\, x_1'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t(A_2) = \frac{t'(A_2) + (v/c^2)\, x_2'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

т. е. $t'(A_1) - t'(A_2) = \frac{v}{c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(x_2'^1 - x_1'^1) \neq 0$. Поэтому $t'(A_1) \neq t'(A_2)$, т. е. два события A_1 и A_2, одновременные в K, оказываются не одновременными в K'.

Заметим, что если $t(A_1) > t(A_2)$ и $x_2'^1 - x_1'^1$ не мало, то мы получим, что $t'(A_1) < t'(A_2)$, т. е. на первый взгляд кажется, что следствие предшествует причине. Предлагаем читателю разобраться в этом мнимом парадоксе самостоятельно.

Пусть в системе K' покоятся часы. Возьмем в качестве событий A_1 и A_2 два события, происшедших в одном месте x'^1, x'^2, x'^3 пространства в системе K'. Время в системе K' между этими событиями есть временной интервал $\Delta t' = t_2' - t_1'$. Найдем теперь время Δt, которое прошло между теми же событиями в системе K. Из (24) имеем

$$t_1 = \frac{t_1' + (v/c^2)\, x'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + (v/c^2)\, x'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{27}$$

Мы получили, что $\Delta t > \Delta t'$. Другими словами, движущиеся часы

идут медленнее неподвижных, т. е. часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами.

Разберем важный вопрос о сложении параллельных скоростей. Пусть точка P в системе K' движется относительно этой системы вдоль оси x'^1 со скоростью w'. Какова скорость точки P относительно системы K? Ясно, что $w' = \frac{dx'^1}{dt'}$, $w = \frac{dx^1}{dt}$,

$$dt = \frac{dt' + (v/c^2)\,dx'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dx^1 = \frac{v\,dt' + dx'^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad w = \frac{dx^1}{dt} = \frac{v + w'}{1 + vw'/c^2}.$$

Если v, $w' \ll c$, то $w \approx w' + v$, и мы получаем обычную формулу для сложения скоростей в классической механике. Отметим, что если $w' = c$, то для любой скорости $v < c$ скорость w точки P в системе K имеет вид $\frac{v + c}{1 + vc/c^2} = c$, т. е. добавление к скорости света c любой скорости v не меняет скорости света.

Задачи. 1. Определим «векторное произведение» в пространстве $\mathbb{R}^3_{1,2}$, полагая

$$\xi \times \eta = (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1, \quad \xi^0\eta^2 - \xi^2\eta^0, \quad \xi^1\eta^0 - \xi^0\eta^1),$$

где $\xi = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$, $\eta = (\eta^0, \eta^1, \eta^2)$.

а) Проверить, что для базисных векторов e_0, e_1, e_2 (e_0 времениподобен) попарные векторные произведения имеют вид

$$e_0 \times e_1 = -e_2, \quad e_0 \times e_2 = e_1, \quad e_1 \times e_2 = e_0.$$

б) Доказать, что $\times$ — билинейная антисимметричная операция, причем справедливо тождество Якоби

$$\xi_1 \times (\xi_2 \times \xi_3) + \xi_3 \times (\xi_1 \times \xi_2) + \xi_2 \times (\xi_3 \times \xi_1) = 0.$$

в) Доказать, что так определенное векторное произведение инвариантно относительно собственных преобразований Лоренца.

2. Пусть $r = r(l)$ — времениподобная кривая в $\mathbb{R}^3_{1,2}$, причем $(\dot r(l))^2 = (\dot r^0)^2 - (\dot r^1)^2 - (\dot r^2)^2 \equiv 1$ и $\dot r^0 > 0$. Введем векторы v, n, b, полагая $v = \dot r$, $\dot v = kn$, $b = n \times v$. Доказать псевдоевклидов аналог формул Френе:

$$\dot v = kn, \quad \dot n = kv - \varkappa b, \quad \dot b = \varkappa n.$$

3. Вывести аналог леммы (5.3) о производной лоренцева преобразования (в $\mathbb{R}^3_{1,2}$), зависящего от параметра.

4. Решить в $\mathbb{R}^3_{1,2}$ уравнение: $\dot r = \omega \times r$, ω — постоянный вектор.

5. Доказать, что ортогональное дополнение времениподобного вектора в $\mathbb{R}^{n+1}_{1,n}$ есть пространственноподобная гиперплоскость. Каким может быть ортогональное дополнение пространственноподобного вектора? светового?

Глава 2

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 7. Геометрия на поверхности в пространстве

1. Координаты на поверхности. Поверхности в трехмерном пространстве — это простейший объект, на котором возникает, как говорят, внутренняя геометрия. Что это значит?

Мы изучали линии и их метрические инварианты на плоскости и в пространстве. Но эти инварианты (кривизна и кручение) являются инвариантами расположения линии — это понятия внешней геометрии. Никаких внутренних метрических инвариантов на линии не бывает. Это означает, что вдоль линии можно выбрать натуральный параметр, в котором длина отрезка (по линии) между точками измеряется так же, как на прямой:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} |v_t|\, dt, \qquad v_t = \dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Для поверхностей это уже не так: никаким образом нельзя задать координаты на сфере (даже на куске сферы) так, чтобы формулы длин в этих координатах были такими же, как формулы длины в декартовых координатах (x, y) на евклидовой плоскости.

Каким образом задаются поверхности? Есть три способа задания поверхностей в трехмерном пространстве:

1) Простейший — это определить ее как график функции

$$z = f(x, y).$$

2) Более общий — уравнением

$$F(x, y, z) = 0.$$

3) Параметрический (по аналогии с кривыми): $r = r(u, v)$ или, подробнее, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где u, v — параметры, пробегающие какую-либо область в плоскости (u, v).

Определение 1. Мы будем говорить, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает поверхность, *неособую в точке* $P = (x_0, y_0, z_0)$, где $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, если градиент функции F в точке P отличен

от нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial x}e_1+\frac{\partial F}{\partial y}e_2+\frac{\partial F}{\partial z}e_3\neq 0 \text{ при } x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0.$$

Согласно теореме о неявных функциях, если, скажем, $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{x_0,y_0,z_0}\neq 0$, то можно решить уравнение $F(x, y, z)=0$ около точки $P=(x_0, y_0, z_0)$ относительно z, т. е. найти функцию $z=f(x, y)$, для которой $f(x_0, y_0)=z_0$ и $F(x, y, f(x, y))=0$ в некоторой области плоскости (x, y), окружающей точку (x_0, y_0). Дифференцируя равенство $F(x, y, z)=0$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

и, значит,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

Следовательно, поверхность, заданную уравнением $F(x, y, z)=0$, в окрестности неособой точки можно задать в виде графика. Поэтому локально, около неособой точки, всегда можно задать поверхность параметрически: $z=f(u, v)$, $x=u$, $y=v$ (около точки $x_0=u_0$, $y_0=v_0$). Иначе говорят так: около неособой точки можно задать локальные координаты (u, v).

Наоборот, пусть поверхность $r=r(u, v)$ задана параметрически:

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v).$$

Определение 2. Точка $P=(x_0, y_0, z_0)=(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ называется неособой, если матрица

$$A=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\right|_{u_0,v_0}$$

имеет ранг два.

Теорема 1. *Если поверхность задана параметрически и точка $P=(u_0, v_0)$ неособа, то около этой точки поверхность можно задать уравнением $F(x, y, z)=0$, где $F(x_0, y_0, z_0)=0$ и $\operatorname{grad} F|_{x_0,y_0,z_0}\neq 0$.*

Доказательство. По определению неособой точки ранг матрицы A равен двум. Пусть для определенности детерминант

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\neq 0.$$

Напомним теорему об обратном отображении. Пусть $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, якобиан в точке (u_0, v_0) не равен нулю, и $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$. Тогда в некоторой окрестности точки

(x_0, y_0) можно найти обратное отображение

$$u = u(x, y), \quad u_0 = u(x_0, y_0), \quad v = v(x, y), \quad v_0 = v(x_0, y_0),$$

причем матрица $\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$ обратна матрице $\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$. Пользуясь этой теоремой, мы найдем выражения $u(x, y)$, $v(x, y)$; затем, подставив их в выражение для z, мы получим функцию $z(u(x, y), v(x, y))$, для которой $z_0 = z(u_0, v_0) = z(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$. Получаем локальное представление поверхности в виде графика $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, около неособой точки x_0, y_0, z_0. Теорема доказана.

Вывод состоит в том, что локально, около неособой точки $P = (x_0, y_0, z_0)$ на поверхности, все три способа задания поверхностей (гладкими функциями) эквивалентны.

Примеры. 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид); а) особых точек нет, б) в целом графиком нельзя задать (локально можно), в) в целом нельзя задать параметрически (так, чтобы все точки были неособыми).

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (однополостный гиперболоид); а) в целом нельзя задать в виде графика, б) в целом можно задать параметрически, выбирая в качестве параметров $u = z$, $v = \varphi$, где φ — полярный угол.

3) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (двуполостный гиперболоид); одну половину можно задать как в виде графика $z = f(x, y)$, так и параметрически, так что все точки будут неособыми.

4) Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Точка (0, 0, 0) — особая.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть поверхность задана системой уравнений в области n-мерного пространства:

$$f_1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \ldots, f_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0. \tag{1}$$

Определение 3. Точка $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ поверхности (1) называется неособой, если ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{x^i = x_0^i}$, $i = 1, \ldots, n-k$, $j = 1, \ldots, n$, равен ровно $n - k$.

Имеет место следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Около неособой точки* $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ *поверхности* (1) *можно ввести локальные координаты* $(z^1, \ldots, z^k)$.

Доказательство. Пусть минор порядка $n - k$, не равный нулю, есть $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{x^q = x_0^q}$, $j = k+1, \ldots, n$. Тогда мы в окрестности

точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ на поверхности примем за локальные координаты недостающие переменные $(x^1, \ldots, x^k)$. Решим систему уравнений (1) в окрестности этой точки, пользуясь теоремой о неявных функциях:

$$x^{k+1} = x^{k+1}(z^1, \ldots, z^k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^n = x^n(z^1, \ldots, z^k),$$
$$z^1 = x^1, \ldots, z^k = x^k.$$

В переменных $(z^1, \ldots, z^k)$ мы получаем параметрическое представление поверхности в окрестности изучаемой точки.

Важный частный случай — это гиперповерхности в n-мерном пространстве. Они задаются одним уравнением

$$f(x^1, \ldots, x^n) = 0. \tag{2}$$

Точка $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, лежащая на гиперповерхности (2), т. е. такая, что $f(x_0^1, \ldots, x_0^n) = 0$, будет неособой, если

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)\Big|_{x^j = x_0^j} \neq 0. \tag{3}$$

2. Касательная плоскость. Пусть поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически: $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, где u, v — координаты на поверхности. Кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$, заданная в координатах u, v, определяет кривую $r(t) = r(u(t), v(t))$, лежащую на нашей поверхности в $\mathbb{R}^3$. Ее вектор скорости $\dot{r}(t)$ имеет вид

$$\dot{r}(t) = r_u\dot{u} + r_v\dot{v}, \quad r_u = \frac{\partial r}{\partial u}, \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}. \tag{4}$$

Если изучаемая точка неособая, то векторы $r_u = (x_u, y_u, z_u)$ и $r_v = (x_v, y_v, z_v)$ линейно независимы. Из (4) следует, что любой касательный вектор к поверхности есть линейная комбинация векторов r_u, r_v. Следовательно, векторы, касающиеся поверхности в данной неособой точке, образуют двумерное пространство с базисом r_u, r_v, которое и называется касательной плоскостью в данной точке. Координатами вектора скорости $\dot{r}$ в этом базисе служат величины $\dot{u}$, $\dot{v}$.

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и кривая $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ лежит на поверхности, т. е. $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Тогда $0 = \frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t))$. Отсюда имеем

$$0 = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}. \tag{5}$$

Если в данной точке $\operatorname{grad} F = (F_x, F_y, F_z) \neq 0$, то уравнение (5) относительно координат $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ касательного вектора задает касательную плоскость.

Пусть теперь в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ задана k-мерная поверхность (в параметрической форме):

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(z^1, \ldots, z^k), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^n &= x^n(z^1, \ldots, z^k). \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда вектор скорости кривой $z^j = z^j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, лежащей на поверхности (6), имеет вид

$$v = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = \dot{z}^1 f_1 + \ldots + \dot{z}^k f_k,$$

где векторы $f_1, \ldots, f_k$ имеют вид

$$f_j = \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^j}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial z^j}\right), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Векторы f_j образуют базис k-мерной плоскости, касающейся поверхности в данной (неособой) точке. Мы видим, что если кривая задана в координатах $z^1, \ldots, z^k$, то ее касательный вектор имеет в базисе (f_j) координаты $(\dot{z}^1, \ldots, \dot{z}^k)$.

Если k-мерная поверхность задана системой из $n - k$ уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x^1, \ldots, x^n) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_{n-k}(x^1, \ldots, x^n) &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

то для координат $(\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)$ вектора, касающегося этой поверхности, будем иметь систему линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x^l} \dot{x}^l = 0. \tag{9}$$

В неособой точке ранг системы (9) равен $n - k$, поэтому система (9) определяет k-мерную плоскость в $\mathbb{R}^n$. Это и есть касательная плоскость к поверхности в данной точке.

Замечание. Мы видим, что в любом случае геометрический смысл условия неособости таков: плоскость, касательная к поверхности в данной точке, имеет размерность, равную размерности поверхности, т. е. числу параметров k для параметрического задания поверхности. Если поверхность задана системой уравнений, это число равно размерности пространства минус количество уравнений.

3. Метрика на поверхности. Пусть поверхность (или ее кусок) задана параметрически: $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, где u, v — координаты на поверхности. Изучаемую точку мы всегда далее будем

считать неособой: ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ равен двум $\left(\text{где } x_u = \frac{\partial x}{\partial u},\ x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots\right)$.

Как мы определили выше понятие римановой метрики?

Пусть задана кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$. Ее длина имеет вид $l = \int |v_t|\, dt, v_t = (\dot{u}, \dot{v})$. Здесь $v_t = (\dot{u}, \dot{v})$ — вектор скорости в координатах (u, v) и $|v_t|^2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, $x^1 = u$, $x^2 = v$, $g_{ij} = g_{ij}(u, v)$. Мы называли набор функций g_{ij} (в координатах u, v) римановой метрикой. Этот набор определяет длину кривой, а также углы между двумя кривыми в точке их пересечения.

Как определить длину кривой? Чему равны $g_{ij}(u, v)$ $(u = x^1, v = x^2)$?

Мы заметим, что кривая $u = u(t)$, $v = v(t)$ записана через координаты (u, v) на поверхности, но сама поверхность лежит в трехмерном евклидовом пространстве (x, y, z), где $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$.

Естественно, что длиной кривой $u(t)$, $v(t)$ на поверхности мы называем длину этой кривой в трехмерном евклидовом пространстве.

Кривую мы запишем в виде

$$\begin{aligned} x &= x(u(t), v(t)) = x(t), \\ y &= y(u(t), v(t)) = y(t), \\ z &= z(u(t), v(t)) = z(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Для длины кривой в трехмерном евклидовом пространстве мы имеем по определению

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \tag{11}$$

Так как $\dot{x} = x_u\dot{u} + x_v\dot{v}$ и т. д., то мы получаем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

где $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$, $u = x^1$, $v = x^2$ и

$$\begin{aligned} g_{11} &= E = x_u x_u + y_u y_u + z_u z_u, \\ g_{12} &= F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ g_{22} &= G = x_v x_v + y_v y_v + z_v z_v. \end{aligned} \tag{12}$$

Если

$$r_u = x_u e_1 + y_u e_2 + z_u e_3, \qquad r_v = x_v e_1 + y_v e_2 + z_v e_3,$$

то

$$g_{ij} = \langle r_{x^i}, r_{x^j} \rangle, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{13}$$

При этом функции $g_{ij}(u, v)$ определены в координатах на поверхности.

Выражение $g_{ij}dx^i dx^j = E(du)^2 + 2F(du\,dv) + G(dv)^2$ называют обычно первой квадратичной формой (или римановой метрикой) на поверхности.

Если поверхность задана в виде $F(x, y, z) = 0$, то риманова метрика на поверхности (первая квадратичная форма) — это просто квадратичная форма $dx^2 + dy^2 + dz^2$ при условии $F(x, y, z) = 0$, из которого следует, что

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0.$$

Если $F_z \neq 0$ в изучаемой точке поверхности, то $dz = -\left(\frac{F_x}{F_z}\right) dx - \left(\frac{F_y}{F_z}\right) dy$. Поэтому на поверхности $F(x, y, z) = 0$, $x = u$, $y = v$ имеем

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{F_x}{F_z}\,dx + \frac{F_y}{F_z}\,dy\right)^2.$$

Таким образом,

$$g_{11} = E = 1 + \frac{F_x^2}{F_z^2}, \quad g_{22} = G = 1 + \frac{F_y^2}{F_z^2}, \quad g_{12} = F = \frac{F_x F_y}{F_z^2}. \tag{14}$$

Здесь $u = x^1 = x$, $v = x^2 = y$.

Если поверхность имеет вид $z = f(x, y)$, то

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = f_x f_y, \quad g_{22} = 1 + f_y^2. \tag{15}$$

Итак, риманова метрика на поверхности появляется здесь как способ вычисления длин кривых в координатах (u, v) на самой поверхности. Сама поверхность расположена в трехмерном евклидовом пространстве, и речь идет просто о длине этой же кривой в трехмерном евклидовом смысле.

Евклидовы координаты (x, y, z) заданы в виде функций на поверхности: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. По определению имеем

$$\begin{gathered} dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v; \\ g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G. \end{gathered} \tag{16}$$

В некоторых случаях бывает, что метрика $g_{ij}(x^1, x^2)$ самой поверхности двумерно евклидова (см. § 3). Это означает, что на поверхности найдется пара функций $\bar{u}(x^1, x^2)$, $\bar{v}(x^1, x^2)$ таких, что

$$(d\bar{u})^2 + (d\bar{v})^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{17}$$

Пример. Метрика цилиндра евклидова: уравнение цилиндра $f(x, y) = c$ (z не входит). Евклидовы координаты — это z и нату-

ральный параметр l плоской кривой $f(x, y) = c$: $\bar{u} = z$, $\bar{v} = l$. Имеем

$$dx^2 + dy^2 + dz^2|_{f(x, y)=c} = dz^2 + dl^2.$$

Пусть поверхность задана в виде $F(x, y, z) = 0$ и $\operatorname{grad} F \neq 0$. Тогда на поверхности имеем $dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$. Если ξ — касательный вектор к поверхности, $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3$, то $F_x\xi^1 + F_y\xi^2 + F_z\xi^3 = 0$ или $\xi \perp \operatorname{grad} F$. Отсюда получаем вывод: вектор $\operatorname{grad} F$ нормален к поверхности $F(x, y, z) = 0$.

При параметрическом способе задания поверхности: $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ имеем два вектора

$$\xi = r_u = r_{x^1} = x_u e_1 + y_u e_2 + z_u e_3,$$

$$\eta = r_v = r_{x^2} = x_v e_1 + y_v e_2 + z_v e_3.$$

Оба эти вектора касательны к поверхности. Если они линейно независимы (т. е. точка неособая), то их векторное произведение $[\xi, \eta] = [r_u, r_v]$ ортогонально плоскости (r_u, r_v) и тем самым к поверхности.

Имея риманову метрику, мы можем измерять на поверхности длину любой кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$ и угол между двумя кривыми в точке их пересечения. Скалярное произведение векторов скорости $\eta_1 = (\dot{u}_1, \dot{v}_1)$ и $\eta_2 = (\dot{u}_2, \dot{v}_2)$ в точке пересечения (u_0, v_0) кривых $(u_1(t), v_1(t))$ и $(u_2(t), v_2(t))$ задается формулой

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = g_{ij}\eta_1^i\eta_2^j \quad (\eta_k^i = \dot{u}_k, \quad \eta_k^j = \dot{v}_k, \quad k = 1, 2),$$

а угол φ между ними — формулой

$$\cos\varphi = \frac{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle}{|\eta_1||\eta_2|} \qquad (|\eta_1|^2 = \langle \eta_1, \eta_1 \rangle, \quad |\eta_2|^2 = \langle \eta_2, \eta_2 \rangle).$$

Приведем теперь формулы для общего случая k-мерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве. Сказанное в п. 1 позволяет нам ограничиться случаем параметрически заданной поверхности: $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$. Длины кривых $z^j = z^j(t)$, $j = 1, \ldots, k$, лежащих в пространстве на поверхности

$$x^i(t) = x^i(z^1(t), \ldots, z^k(t)), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

вычисляются по формуле

$$l = \int_a^b |\dot{x}|\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}^i)^2}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sum_k \left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}\right)\dot{z}^i\dot{z}^j}\, dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\dot{z}^i\dot{z}^j}\, dt, \tag{19}$$

$$g_{ij}(z^1, \ldots, z^k) = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}. \tag{20}$$

Очевидно, $(dl)^2 = g_{ij}dz^i dz^j$.

Таким образом, метрика пространства определяет метрику на любой лежащей в нем поверхности, оказывающуюся, вообще говоря, неевклидовой. Метрика (20) называется *индуцированной* метрикой на поверхности.

Для случая гиперповерхности $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$, $\operatorname{grad} F \neq 0$ (пусть $\partial F/\partial x^n \neq 0$), метрика (20) имеет вид

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{F_{x^i} F_{x^j}}{F_{x^n}^2},$$

где $F_{x_q} = \dfrac{\partial F}{\partial x^q}$.

4. Площадь поверхности. Если бы мы имели евклидову плоскость с координатами (x, y) и область U на плоскости, то площадь области U измерялась бы двукратным интегралом $\sigma(U)$:

$$\sigma(U) = \iint_U dx\, dy.$$

Если мы сделаем замену переменных (взаимно однозначную)

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{21}$$

то мы будем иметь формулу

$$\sigma(U) = \iint_V |x_u y_v - x_v y_u|\, du\, dv, \tag{22}$$

где V — область в (u, v)-плоскости, соответствующая области U в (x, y)-плоскости. Таким образом, имеем

$$\sigma(U) = \iint_V |J|\, du\, dv,$$

где J — якобиан замены переменных (21), $J = x_u y_v - y_u x_v$. Возникает вопрос: как вычислять площадь области на поверхности $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ в пространстве, если известна риманова метрика на самой поверхности

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{23}$$

Рассмотрим детерминант матрицы (g_{ij}):

$$g = \det(g_{ij}) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = EG - F^2 > 0. \tag{24}$$

Определение 4. Площадью области U на поверхности $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$ называется величина

$$\sigma(U) = \iint_U \sqrt{g}\, du\, dv, \tag{25}$$

где U — область на поверхности, заданная параметрически как область в плоскости (u, v).

Выражение $\sqrt{g}\,du\,dv$ называется дифференциалом (элементом) площади на поверхности с римановой метрикой (g_{ij}).

Каково основание для такого определения площади области на поверхности? Почему элемент площади должен браться в виде $\sqrt{g}\,du\,dv$, если скалярное произведение касательных векторов в точке (u, v) задано матрицей (g_{ij})?

Рассмотрим для понимания этого вопроса пару векторов ξ, η евклидовой плоскости и параллелограмм $\lambda\xi + \mu\eta$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Площадь параллелограмма равна $\sigma = |\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1| = |\det A|$, где $A = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{pmatrix}$, т. е. матрица A образована из компонент векторов $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ и $\eta = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2$ по отношению к ортонормированному базису e_1, e_2.

Поставим теперь другую задачу: пусть задана плоскость с базисными векторами $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Пусть скалярное произведение базисных векторов задается матрицей

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = g_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \tag{26}$$

Чему равна площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$? Точки параллелограмма — это $\lambda\bar{e}_1 + \mu\bar{e}_2$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Мы считаем, что матрица g_{ij} — матрица положительной квадратичной формы:

$$g_{ij}\xi^i\xi^j > 0.$$

Лемма 2. *Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, равна $\sqrt{g}$, где $g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.*

Доказательство. Квадратичную форму g_{ij} можно привести к диагональному виду $g'_{ij} = \delta_{ij}$ линейным преобразованием A. Точно это значит следующее: найдутся векторы e_1, e_2:

$$\bar{e}_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \quad \bar{e}_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2, \tag{27}$$

такие, что $\langle e_i, e_j \rangle = g'_{ij} = \delta_{ij}$ (т. е. $|e_i|^2 = 1$, $e_1 \perp e_2$). Из формул (27) вытекает, что

$$g_{11} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle = a_{11}^2 + a_{12}^2,$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12},$$
$$g_{22} = \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle = a_{21}^2 + a_{22}^2.$$

На матричном языке

$$(g_{ij}) = G = A^{\top}A, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Какова площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$? Так как базис (e_1, e_2) ортонормирован и векторы e_1, e_2 имеют вид (27), то площадь параллелограмма, натянутого на $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$,

равна $|\det A|$. Но $\det A^{\top} = \det A$, поэтому из (28) получаем

$$g = \det(g_{ij}) = (\det A)^2, \tag{29}$$

$$|\det A| = \sqrt{g}.$$

Лемма доказана.

Напомним без доказательства извлечения из основных идей, лежащих в основе понятия двукратного интеграла и связанного с ним понятия площади области.

Рассмотрим область U на плоскости с координатами $x^1 = u$, $x^2 = v$, ограниченную некоторой кусочно гладкой кривой Г. Разобьем плоскость на малые прямоугольники со сторонами Δu, Δv (мы считаем, что Δu и Δv стремятся к нулю). Очевидно, площадь области U больше (или равна ей) суммы площадей всех внутренних для этой области прямоугольников.

Определение 5. Площадью области U называется предел сумм площадей всех внутренних прямоугольников при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$, если этот предел существует.

Пусть теперь дополнительно задана непрерывная функция $f(u, v)$ двух переменных. Определим понятие интеграла функции по области U.

Рассмотрим все внутренние для области прямоугольники со сторонами Δu и Δv для прямоугольной сетки. Для прямоугольника S_α мы рассмотрим значение $f(u_\alpha, v_\alpha)$ нашей функции в центре прямоугольника. Рассмотрим интегральную сумму

$$S(f, U) = \sum_{\alpha} f(u_\alpha, v_\alpha)\, \Delta u\, \Delta v,$$

где сумма берется по всем внутренним прямоугольникам.

Определение 6. Предел сумм $S(f, U)$ при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$, если он существует, называется двукратным интегралом от функции $f(u, v)$ по области и обозначается $\int\int_U f(u, v)\, du\, dv$.

В частности, если $f(u, v) \equiv 1$ и (u, v) — евклидовы координаты, то интеграл $\int\int_U du\, dv$ совпадает с площадью области U.

Напомним, что выше мы определили площадь области U на плоскости с координатами $u = x^1$, $v = x^2$, в которых метрика имеет вид $dl^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\, dv + g_{22}dv^2$, как интеграл

$$\sigma(U) = \int\int_U \sqrt{g}\, du\, dv.$$

Почему? Если Δu и Δv малы, то площадь малого параллелограмма с центром в точке (u_α, v_α) и со сторонами Δu и Δv равна примерно $S_\alpha \approx \Delta u\, \Delta v \sqrt{g}$ согласно доказанному выше утверждению. Здесь $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$, причем числа g_{ij} вычисляются

в точке (u_α, v_α). Мы имеем при малых Δu, Δv

$$\sum_\alpha S_\alpha = \sum_\alpha \sqrt{g(u_\alpha, v_\alpha)}\,\Delta u\,\Delta v.$$

Предел этих сумм при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ и есть интеграл $\sigma(U) = \iint\limits_U \sqrt{g}\,du\,dv$.

В заключение приведем формулы для площади поверхности в различных заданиях.

Теорема 2. 1. *Пусть поверхность задана в виде графика* $z = f(x, y)$, *и пусть задана область* U *на поверхности, которая проектируется в область* V *на плоскости* (x, y). *Тогда имеет место равенство*

$$\sigma(U) = \iint\limits_V \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy. \tag{30}$$

2. *Если поверхность задана уравнением* $F(x, y, z) = 0$ *и область* U *на поверхности взаимно однозначно проектируется в область* V *на плоскости* (x, y), *то имеет место формула*

$$\sigma(U) = \iint\limits_V \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F_z|}\,dx\,dy, \tag{31}$$

где $F_z = \dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ *при* (x, y, z), *лежащих в области* U.

3. *Если поверхность задана в параметрической форме:* $r = r(u, v)$, *то имеет место формула*

$$\sigma(U) = \iint\limits_V |[r_u, r_v]|\,du\,dv, \tag{32}$$

где V *— область на плоскости* (u, v), $[r_u, r_v]$ *— векторное произведение.*

Доказательство. 1. Напомним, что для поверхности $z = f(x, y)$ имеем

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = f_x f_y, \quad g_{22} = 1 + f_y^2, \quad u = x, \quad v = y.$$

Тогда $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. Из определения 4 площади поверхности получаем нужное утверждение.

2. Для поверхности $F(x, y, z) = 0$ при $F_z \neq 0$ имеем $x^1 = u = x$, $x^2 = v = y$, $g_{11} = 1 + \dfrac{F_x^2}{F_z^2}$, $g_{12} = \dfrac{F_x F_y}{F_z^2}$, $g_{22} = 1 + \dfrac{F_y^2}{F_z^2}$. Как и в п. 1, убеждаемся, что

$$\sqrt{g} = \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}} = \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F_z|}.$$

3. Напомним, что если $r = r(u, v)$, $x^1 = u$, $x^2 = v$, то $g_{ij} = \langle r_{x^i}, r_{x^j} \rangle$. Поэтому для площади параллелограмма, натянутого на векторы r_u, r_v, равной $|[r_u, r_v]|$, имеем

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |[r_u, r_v]|^2.$$

Поэтому по определению 4 имеем

$$\sigma(U) = \int\int_V |[r_u, r_v]| \, du \, dv.$$

Теорема доказана.

Итак, мы убедились в том, что площадь определяется, как и длина, заданием скалярного произведения (g_{ij}) касательных векторов в каждой точке.

Задачи. 1. Тор T^2 в трехмерном евклидовом пространстве задается в виде поверхности вращения окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности. Написать параметрические уравнения тора и индуцированную метрику на торе.

2. Вычислить первую квадратичную форму на эллипсоиде вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

3. Найти метрику, индуцированную на поверхности вращения

$$r(u, \varphi) = \{\rho(u)\cos\varphi, \quad \rho(u)\sin\varphi, \quad z(u)\}.$$

Проверить, что ее меридианы $\{\varphi = \text{const}\}$ и параллели $\{u = \text{const}\}$ образуют ортогональную сеть. Найти линии, которые делят пополам угол между меридианами и параллелями.

4. Найти на сфере линии, пересекающие меридианы под заданным углом α (локсодромы). Найти длину локсодромы.

5. Пусть $F(x, y, z)$ — гладкая однородная функция (т. е. $F(cx, cy, cz) = c^n F(x, y, z)$). Доказать, что метрика на конической поверхности $F(x, y, z) = 0$ евклидова вне начала координат.

§ 8. Вторая квадратичная форма

1. Кривизна кривых на поверхности в евклидовом пространстве. Пусть задана поверхность в трехмерном евклидовом пространстве и (x_0, y_0, z_0) — неособая точка на ней. Предположим сначала, что ось z нормальна к касательной плоскости к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0), в этом случае оси x и y ей параллельны. Тогда поверхность локально около точки (x_0, y_0, z_0) задается уравнением $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ с

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{grad} f|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим второй дифференциал функции $z = f(x, y)$, т. е. $d^2f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}dy^2$, и составим матрицу $a_{ij} = f_{x^ix^j}$, где $x^1 = x$, $x^2 = y$ (эта матрица называется *гессианом*). Рассмотрим эту матрицу квадратичной формы в точке (x_0, y_0, z_0), в которой $\operatorname{grad} f = 0$.

Определение 1. *Главными кривизнами* поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), в которой $\operatorname{grad} f = 0$, называются собственные значения матрицы (a_{ij}). *Гауссовой кривизной* называется детерминант матрицы (a_{ij}) в этой точке, а *средней кривизной* называется след матрицы в этой точке: след $a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2$, k_1 и k_2 — собственные значения, гауссова кривизна $K = k_1k_2 = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Как мы увидим в гл. 4, гауссова кривизна поверхности зависит только от внутренних метрических свойств этой поверхности.

Мы определили пока понятие кривизны в специальных координатах, связанных с изучаемой точкой: ось z нормальна к поверхности, а оси x, y касательны к ней в этой точке или, локально, $z = f(x, y)$ и $\operatorname{grad} f = 0$ в точке (x_0, y_0). Для определения этих величин в произвольных координатах обратимся к теории кривизны линий на поверхности.

Пусть поверхность задана в параметрической форме

$$r = r(u, v). \tag{2}$$

Тогда $[r_u, r_v] = |[r_u, r_v]|m$, где m — единичный вектор нормали к поверхности, $|m| = 1$. Рассмотрим кривую $r = r(u(t), v(t))$ на поверхности. Имеем $\dot r = r_u\dot u + r_v\dot v$, $\ddot r = (r_{uu}\dot u^2 + 2r_{uv}\dot u\dot v + r_{vv}\dot v^2) + (r_u\ddot u + r_v\ddot v)$. Так как $r_u \perp m$ и $r_v \perp m$, получаем

$$\langle \ddot r, m\rangle = \langle r_{uu}, m\rangle\dot u^2 + 2\langle r_{uv}, m\rangle\dot u\dot v + \langle r_{vv}, m\rangle\dot v^2 = b_{11}\dot u^2 + 2b_{12}\dot u\dot v + b_{22}\dot v^2. \tag{3}$$

Вывод. *Нормальная проекция ускорения* $\langle \ddot r, m\rangle$ *— это квадратичная форма от вектора скорости* $(\dot u, \dot v)$ *в локальных координатах* $u = x^1$, $v = x^2$.

Положим $b_{11} = L$, $b_{12} = M$, $b_{22} = N$. Имеем

$$\langle \ddot r, m\rangle dt^2 = b_{ij}dx^idx^j = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Определение 2. Выражение $\langle \ddot r, m\rangle dt^2$ называется *второй квадратичной формой* поверхности (2).

Пусть линия $u(t)$, $v(t)$ отнесена к натуральному параметру $t = l$. Согласно формулам Френе для кривой $r = r(t) = r(u(t), v(t))$ имеем

$$\ddot r = \frac{d^2r}{dl^2} = kn,$$

где n — главная нормаль к кривой, k — кривизна кривой. Поэтому $\langle \ddot r, m\rangle = k\langle n, m\rangle = k\cos\theta$, где θ — угол между m и n. Отсюда

получаем

$$k\cos\theta\, dl^2 = \langle \ddot{r},\ m\rangle dl^2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = b_{ij}dx^i dx^j,$$
$$x^1 = u,\quad x^2 = v,$$

где $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$.

Вывод.

$$k\cos\theta = \frac{b_{ij}dx^i\,dx^j}{g_{ij}dx^i\,dx^j},\quad x^1 = u,\quad x^2 = v. \tag{4}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Кривизна кривой на поверхности в трехмерном пространстве, умноженная на косинус угла между нормалью к поверхности и главной нормалью кривой, совпадает с отношением значений второй и первой квадратичных форм на касательном векторе к кривой.*

Следствие. *Если кривая является сечением поверхности с помощью нормальной плоскости, то* $\cos\theta = 1$ *и*

$$k = \frac{b_{ij}dx^i\,dx^j}{g_{ij}dx^i\,dx^j}. \tag{5}$$

2. Инварианты пары квадратичных форм. Итак, в каждой точке поверхности задана пара квадратичных форм:

1) $$dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{6}$$

2) $$\langle \ddot{r},\ m\rangle dt^2 = b_{ij}dx^i dx^j. \tag{7}$$

При этом форма dl^2 положительно определена.

Какие инварианты пары квадратичных форм нам известны из алгебры?

Рассмотрим на плоскости пару квадратичных форм, из которых одна положительно определена. Пусть матрицы квадратичных форм имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{8}$$

($g_{21} = g_{12}$, $b_{21} = b_{12}$). Составим уравнение

$$\det(Q - \lambda G) = 0, \tag{9}$$

или

$$(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})^2 = 0.$$

Корни λ_1, λ_2 этого уравнения называются *собственными значениями пары квадратичных форм.*

Решим линейные уравнения

$$\left.\begin{aligned} (b_{11} - \lambda_i g_{11})\,\xi_i^1 + (b_{12} - \lambda_i g_{12})\,\xi_i^2 = 0, \\ (b_{12} - \lambda_i g_{12})\,\xi_i^1 + (b_{22} - \lambda_i g_{22})\,\xi_i^2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где ξ_i^1, ξ_i^2 — неизвестные, $i = 1, 2$.

Если λ_1, λ_2 — собственные значения, то система (10) имеет нетривиальные решения $f_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2)$ и $f_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2)$.

Направления векторов f_1, f_2 называются *главными направлениями* пары квадратичных форм; f_1 соответствует λ_1 и f_2 соответствует λ_2.

Как и прежде, скалярные произведения $\langle e_i, e_j\rangle$ базисных векторов плоскости обозначаются через g_{ij}, $i, j = 1, 2$ (при этом риманова метрика задается формой g_{ij}).

Лемма 1. *Если собственные значения пары квадратичных форм различны, то главные направления ортогональны.*

Мы имеем два главных направления f_1, f_2,

$$f_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_1^2 e_2, \quad f_2 = \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2.$$

Их ортогональность означает по определению, что

$$\langle f_1, f_2\rangle = g_{ij}\xi_1^i\xi_2^j = 0.$$

Доказательство. Выберем пару плоских векторов d_1, d_2 таких, что $\langle d_i, d_j\rangle = \delta_{ij}$. Это можно сделать в силу положительной определенности квадратичной формы с матрицей g_{ij}, так как ее можно привести линейным преобразованием к сумме квадратов. Вторую квадратичную форму мы рассмотрим теперь в новом базисе d_1, d_2, считая, что

$$e_i = a_i^j d_j, \quad A = (a_i^j). \tag{11}$$

В новом базисе d_1, d_2 для матриц $\bar{G}$ и $\bar{Q}$ первой и второй квадратичных форм имеем

1) $\bar{G} = (\langle d_i, d_j\rangle) = (\delta_{ij})$ или $\bar{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и, значит, $G = A^\top A$;

2) $Q = A^\top \bar{Q} A$.

Так как $G = A^\top A$ и $Q = A^\top \bar{Q} A$, то

$$\begin{gathered} Q - \lambda G = A^\top (\bar{Q} - \lambda \cdot 1) A, \\ \det (Q - \lambda G) = (\det A)^2 \det (\bar{Q} - \lambda \cdot 1). \end{gathered} \tag{12}$$

Заметим, что $\det A = \det A^\top = \sqrt{g} = \sqrt{\det G} \neq 0$. Поэтому уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$\det (\bar{Q} - \lambda \cdot 1) = 0. \tag{13}$$

В базисе d_1, d_2 скалярное произведение евклидово. Оно задается единичной матрицей $\bar{G} = 1 = (\delta_{ij})$. Из курса алгебры известно, что квадратичную форму $\bar{Q}$ можно вращением привести к форме, задаваемой диагональной матрицей, а собственные векторы f_1, f_2 последней ортогональны в обычном евклидовом смысле. Лемма доказана.

Эта лемма представляет собой вариант теоремы о приведении квадратичной формы в евклидовой плоскости к диагональному виду с помощью вращения.

3. Свойства второй квадратичной формы. Вернемся теперь к первой и второй квадратичным формам поверхности в трехмерном евклидовом пространстве:

$$g_{ij}dx^i dx^j = dl^2, \tag{14}$$

$$b_{ij}dx^i dx^j, \quad x^1 = u, \quad x^2 = v. \tag{15}$$

Отношение этих квадратичных форм есть кривизна нормального сечения.

Определение 3. Собственные значения этой пары квадратичных форм называются *главными кривизнами поверхности* в изучаемой точке. Произведение главных кривизн называется *гауссовой кривизной поверхности*, а сумма их — *средней кривизной поверхности* *).

Пример. Пусть поверхность задана в виде $z = f(x, y)$, и пусть в изучаемой точке (x_0, y_0) имеем $f_x = f_y = 0$ (ось z нормальна к касательной плоскости к поверхности в этой точке). Пусть $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$. Для первой и второй квадратичных форм получаем (в изучаемой точке x_0, y_0)

(I) $$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (g_{ij} = \delta_{ij}),$$

(II) $$\begin{aligned} L = b_{11} &= \langle r_{uu}, m\rangle = f_{xx}(x_0, y_0), \\ M = b_{12} &= \langle r_{uv}, m\rangle = f_{xy}(x_0, y_0), \\ N = b_{22} &= \langle r_{vv}, m\rangle = f_{yy}(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь вектор m совпадает с единичным вектором вдоль оси z.

Итак, в исследуемой точке вторая квадратичная форма имеет вид

$$b_{ij}dx^i\,dx^j = f_{x^i x^j}dx^i\,dx^j = d^2 f. \tag{17}$$

Гауссова кривизна в этом случае совпадает с детерминантом $\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$. Собственные значения получаются из уравнения $(f_{xx} - \lambda)(f_{yy} - \lambda) - (f_{xy})^2 = 0$, так как $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Касательная плоскость к поверхности в этой точке параллельна плоскости (x, y). Главные направления в этой точке можно получить, решая уравнения

$$(f_{x^i x^j} - \lambda_1 \delta_{ij})\,\xi_1^j = 0, \quad i, j = 1, 2 \text{ для } f_1, \tag{18}$$

$$(f_{x^i x^j} - \lambda_2 \delta_{ij})\,\xi_2^j = 0, \quad i, j = 1, 2 \text{ для } f_2. \tag{19}$$

---

*) Часто средней кривизной называют полусумму главных кривизн.

Так как $f_1 \perp f_2$, мы можем взять единичные векторы главных направлений за новые оси координат x', y' — совершить вращение в плоскости (x, y). Необходимо лишь, чтобы было $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

В новых координатах (z, x', y') имеем

$$z = f(x(x', y'), y(x', y')),$$

где $x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$, $y = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$, φ — угол вращения.

В новых координатах вторая квадратичная форма имеет вид (только в рассматриваемой точке)

$$\lambda_1 (dx')^2 + \lambda_2 (dy')^2. \tag{20}$$

Для кривизны нормального сечения в данной точке получаем формулу

$$k = \frac{\lambda_1 (dx')^2 + \lambda_2 (dy')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}. \tag{21}$$

Касательный вектор e к нормальному сечению поверхности имеет в данной точке вид $e = (\dot{x}', \dot{y}')$, где

$$dx' = \dot{x}' dt, \quad dy' = \dot{y}' dt.$$

Поэтому имеем

$$\cos^2\alpha = \frac{(dx')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{(dy')^2}{(dx')^2 + (dy')^2}, \tag{22}$$

где α — угол между осью x и касательным вектором e к нормальному сечению.

Итак, мы установили, что при нашем специальном выборе системы координат $k = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha$. Эта формула называется *формулой Эйлера*. Оказывается, что она имеет место в любой системе координат.

Теорема 2. *Кривизна нормального сечения дается формулой*

$$k = \lambda_1 \cos^2\alpha + \lambda_2 \sin^2\alpha,$$

где λ_1, λ_2 — главные кривизны, α — угол на поверхности между касательным вектором к нормальному сечению и соответствующим главным направлением.

Доказательство. Мы вывели формулу Эйлера для случая, когда поверхность задана в виде $z = f(x, y)$ и $f_x = f_y = 0$ в изучаемой точке (x_0, y_0). Однако, поскольку сам результат не зависит от выбора координат, то мы всегда можем для изучаемой точки выбрать связанные с ней координаты так, что ось z нормальна к поверхности в этой точке, а оси x, y касательны к поверхности и взаимно ортогональны (и даже являются главными направлениями). Тогда поверхность в окрестности изучаемой точки задается в виде

$$z = f(x, y), \quad f_x = f_y = 0.$$

Более того, в этой точке $f_{xy} = f_{yx} = 0$, если оси являются главными направлениями. Тогда $\lambda_1 = f_{xx}$, $\lambda_2 = f_{yy}$ в этой точке. Поскольку в таких координатах мы уже вывели формулу Эйлера, теорема доказана.

Замечание. При изменении направления оси z на противоположное знак главных кривизн также меняется.

Отметим следствие из формулы Эйлера: если $\lambda_1 > \lambda_2$, то λ_1 и λ_2 суть максимальная и минимальная кривизны нормальных сечений в данной точке (с учетом знака).

Укажем полезные формулы для второй квадратичной формы.

Если поверхность задана в виде $z = f(x, y)$, то для коэффициентов второй квадратичной формы имеем (здесь $x = u$, $y = v$)

$$r_u = (1, 0, f_x), \quad r_v = (0, 1, f_y), \quad [r_u, r_v] = (-f_x, -f_y, 1),$$
$$r_{uu} = (0, 0, f_{xx}), \quad r_{uv} = (0, 0, f_{xy}), \quad r_{vv} = (0, 0, f_{yy}),$$
$$m = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad L = b_{11} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$
$$M = b_{12} = b_{21} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = b_{22} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \tag{23}$$

Отсюда получаем

$$b_{ij}dx^i dx^j = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}} \left(f_{x^i x^j} dx^i dx^j\right), \tag{24}$$
$$x^1 = u = x, \quad x^2 = v = y.$$

Напомним, что для коэффициентов g_{ij} мы имели формулы (7.15):

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = g_{21} = f_x f_y; \quad g_{22} = 1 + f_y^2,$$
$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2. \tag{25}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Гауссова кривизна поверхности равна отношению детерминантов второй и первой квадратичных форм:*

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \tag{26}$$

В частности, если поверхность задана в виде графика $z = f(x, y)$, то имеет место формула

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Доказательство. Собственные значения λ_1 и λ_2 определялись из уравнения (9)

$$\det(Q - \lambda G) = 0,$$

где $Q=(b_{ij})=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ — матрица второй квадратичной формы, $G=(g_{ij})$. Заметим, что $Q-\lambda G=(b_{ij}-\lambda g_{ij})$ и $\det(Q-\lambda G)=(b_{11}-\lambda g_{11})(b_{22}-\lambda g_{22})-(b_{12}-\lambda g_{12})^2$. Матрица $G=(g_{ij})$ положительно определена и потому невырождена. Следовательно,

$$\det(Q-\lambda G)=\det G\det(G^{-1}Q-\lambda\cdot 1),$$

где $\det G\neq 0$. Собственные значения λ_1 и λ_2 можно определить, решая уравнение $\det(G^{-1}Q-\lambda\cdot 1)=0$. Напомним факт из алгебры: произведение всех собственных значений матрицы равно ее детерминанту, в частности, $\det A=\lambda_1\lambda_2$ для матриц второго порядка. Полагая $A=G^{-1}Q$, видим, что

$$\lambda_1\lambda_2=\det(G^{-1}Q)=\frac{\det Q}{\det G}=K. \tag{27}$$

Отсюда следует, что гауссова кривизна равна отношению детерминантов матриц второй и первой квадратичных форм.

Далее, если поверхность задана в виде $z=f(x, y)$, то коэффициенты b_{ij}, g_{ij} даются формулами (23), (7.15). Вычисляя детерминанты и составляя их отношения, получаем формулу для гауссовой кривизны.

Следствие. *Если поверхность задана в виде графика $z=f(x, y)$, то знак гауссовой кривизны K совпадает со знаком детерминанта $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$, так как*

$$K=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}.$$

Пример. Пусть поверхность задана в виде $z=f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $f_{xx}+f_{yy}=0$. Тогда $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\leqslant 0$, так как $f_{xx}=-f_{yy}$. Поэтому гауссова кривизна $K<0$ всюду, где хотя бы одна из двух производных f_{xx}, f_{xy} отлична от нуля.

Укажем геометрический смысл гауссовой кривизны. Выберем для данной точки поверхности ортонормированный репер (x, y, z), где ось z нормальна к поверхности. Тогда локально поверхность запишется в виде $z=f(x, y)$, где $f_x=f_y=0$ в этой точке.

В данной точке мы получим $g_{ij}=\delta_{ij}$, так как $g_{11}=1+f_x^2$ $g_{12}=f_xf_y$, $g_{22}=1+f_y^2$. Далее, $L=b_{11}=f_{xx}$, $M=b_{12}=f_{xy}$, $N=b_{22}=f_{yy}$.

Разберем три случая.

1) $K>0$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ (минимум функции $f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$, рис. 10, *а*).

2) $K>0$, $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ (максимум функции $f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$, рис. 10, *б*).

3) $K<0$, поэтому $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ или наоборот — это седло или «перевал» (рис. 10, *в*).

Вывод. *При $K>0$ локально поверхность лежит по одну сторону от касательной плоскости около изучаемой точки. При $K<0$ поверхность обязательно пересекает касательную плоскость сколь угодно близко от точки касания.*

Если гауссова кривизна всюду положительна, то это — *строго выпуклая поверхность.*

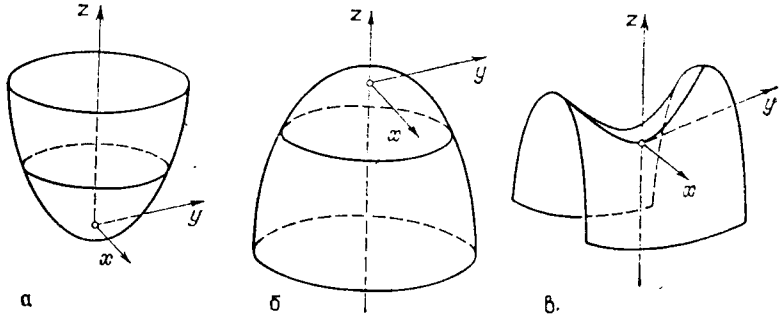


Рис. 10

Задачи. 1. Найти поверхность, у которой все нормали пересекаются в одной точке.

2. Вычислить вторую квадратичную форму на поверхности вращения

$$r(u, \varphi)=\{x(u),\ \rho(u)\cos\varphi,\ \rho(u)\sin\varphi\},\quad \rho(u)>0.$$

3. Вычислить гауссову и среднюю кривизну на поверхности, задаваемой уравнением

$$z=f(x)+g(y).$$

4. Доказать, что если у поверхности, вложенной в трехмерное евклидово пространство, гауссова и средняя кривизна тождественно равны нулю, то поверхность является плоскостью.

5. Доказать, что на поверхности $z=f(x, y)$ средняя кривизна H равна

$$H=\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} f}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} f|^2}}\right).$$

6. Пусть поверхность S образована касательными прямыми к данной кривой с кривизной $k(l)$. Доказать, что если кривая изгибается с сохранением $k(l)$, то и поверхность S сохраняет метрику.

7. Если метрика поверхности имеет вид

$$dl^2=A^2du^2+B^2dv^2,\quad A=A(u, v),\quad B=B(u, v),$$

то гауссова кривизна имеет вид

$$K = -\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A_v}{B}\right)_v + \left(\frac{B_u}{A}\right)_u\right].$$

8. Доказать, что единственными поверхностями вращения, имеющими нулевую среднюю кривизну, являются плоскость и катеноид, где катеноид получается вращением кривой $\left(\frac{\operatorname{ch}(at+b)}{a}, t\right)$.

§ 9. Метрика сферы

Сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса R с центром в начале координат задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{1}$$

В сферических координатах r, θ, φ эта сфера задается уравнением $r = R$, θ, φ любые. Поэтому параметры (θ, φ) могут служить локальными координатами на сфере, за исключением ее северного и южного полюсов (где $\theta = 0$, $\theta = \pi$; это — особые точки сферической системы координат — см. § 1). Известно (§ 3, п. 1), что евклидова метрика $dx^2 + dy^2 + dz^2$ в сферических координатах принимает следующий вид:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{2}$$

На поверхности $r = R$ дифференциал dr обращается в нуль, и для метрики сферы в координатах (θ, φ) мы получаем вид

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{3}$$

Здесь $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (рис. 11). В малой окрестности точки 0 имеем $\sin\theta \sim \theta$. Тем самым dl^2/R^2 приближенно равно евклидовой метрике $d\theta^2 + \theta^2 d\varphi^2$ (в полярных координатах θ, φ). Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость (см. рис. 12, на котором изображено плоское сечение сферы). Здесь θ, φ — координаты на сфере, а (r, φ) — полярные координаты на плоскости. Из рис. 12 видно, что $\varphi = \varphi$, $r = R\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$. Используя эти формулы перехода, мы можем переписать метрику (3) в координатах (r, φ) (или в координатах x, y):

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2) = \frac{4R^4}{(R^2+x^2+y^2)^2}(dx^2+dy^2). \tag{4}$$

Ясно, что метрика сферы получается из метрики евклидовой плоскости умножением на функцию $4R^4/(R^2+x^2+y^2)^2$, т. е.

$$dl^2_{\text{сфера}} = \frac{4R^4}{(R^2+x^2+y^2)^2}\, dl^2_{\text{плоскость}}. \tag{5}$$

Пример. Найдем длину окружности и площадь круга радиуса ρ на сфере. Пусть центр окружности расположен в северном

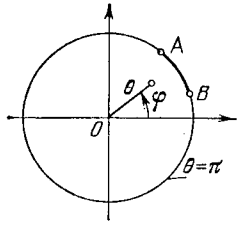


Рис. 11. Расстояние между точками A и B, измеренное вдоль окружности радиуса $\theta = \pi$, равно нулю, т. е. вся граница круга склеивается в одну точку, что и дает двумерную сферу

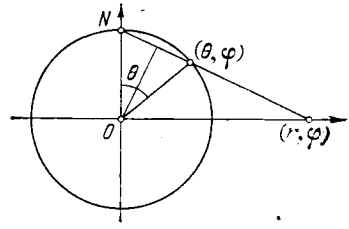


Рис. 12. Стереографическая проекция: $(\theta, \varphi) \to (r, \varphi)$

полюсе N (точка $\theta = 0$; рис. 13). Тогда радиус ρ окружности равен $\rho = R\theta_0$. Следовательно, уравнение окружности имеет вид $\theta = \rho/R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Круг радиуса ρ — это область $\theta \leqslant \rho/R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. На кривой $\theta = \rho/R = \text{const}$ имеем

$$dl^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = R^2 \sin^2 \frac{\rho}{R}\, d\varphi^2,$$

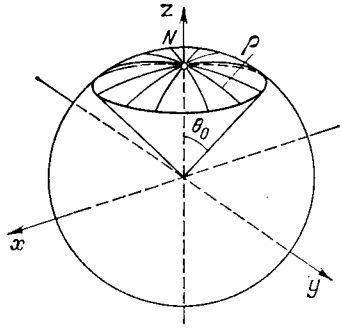


Рис. 13. Круг радиуса ρ на сфере

поэтому длина l_ρ равна

$$l_\rho = \int_0^{2\pi} R \sin \frac{\rho}{R}\, d\varphi = 2\pi R \sin \frac{\rho}{R}. \qquad (6)$$

Мы видим, что при $\rho = R\pi/2$ длина максимальна (экватор); при $\rho = \pi$ длина равна нулю (южный полюс). Из формулы (6) вытекает, что отношение длины окружности l_ρ к радиусу ρ на сфере всегда меньше 2π:

$$\frac{l_\rho}{\rho} = 2\pi \frac{\sin(\rho/R)}{\rho/R} < 2\pi \text{ при } \rho > 0.$$

Найдем теперь площадь σ_ρ круга радиуса ρ. Из вида (3) для dl^2 вытекает, что $\sqrt{g} = R^2 |\sin\theta|$. Поэтому площадь равна

$$\sigma_\rho = \iint\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant \rho/R} R^2 |\sin\theta|\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= R^2 \int_0^{\rho/R} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\frac{\rho}{R}\right), \quad \rho \leqslant \frac{\pi}{R}. \qquad (7)$$

При $\rho = \pi R$ наш круг совпадает со всей сферой и мы получаем, что площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Если радиус ρ мал, то $\sin\frac{\rho}{R} \approx \frac{\rho}{R}$ и $1 - \cos\frac{\rho}{R} \approx \frac{\rho^2}{2R^2}$. Получаем

$$l_\rho = 2\pi R \sin\frac{\rho}{R} \approx 2\pi\rho,$$

$$\sigma_\rho = 2\pi R^2\left(1 - \cos\frac{\rho}{R}\right) \approx \pi\rho^2,$$

т. е. при малых радиусах мы имеем для длин и площадей примерно те же формулы, что и в евклидовой геометрии.

Найдем теперь гауссову и среднюю кривизну сферы радиуса R. Заметим, что нормальные сечения сферы — это окружности радиуса R (так называемые большие круги на сфере). Поэтому кривизна любого нормального сечения постоянна и равна R^{-1} (см. § 5, п. 1). Таким образом, оба собственных значения второй квадратичной формы равны друг другу и равны R^{-1}. Значит, гауссова кривизна сферы равна $1/R^2$, средняя кривизна сферы равна $2/R$.

Перейдем к группе движений метрики сферы. Всякое вращение пространства вокруг начала координат переводит сферу радиуса R в себя. Это вращение, задаваемое ортогональной матрицей, сохраняет римапову метрику на сфере. Таким образом, движения сферы S^2 определяются ортогональными матрицами. Напомним (см. § 4, п. 3), что группа ортогональных матриц обозначается $O(3)$ и называется полной ортогональной группой. Каждое вращение описывается тремя параметрами. Итак, метрика сферы имеет по меньшей мере трехмерную совокупность движений.

Важное замечание. Мы видели, что всевозможные преобразования сферы, задаваемые ортогональными матрицами, являются движениями. Поэтому группа $O(3)$ содержится в группе всех движений сферы S^2. Однако пока мы еще не доказали, что группа $O(3)$ действительно совпадает с группой всех движений. Это совпадение имеет место. Любое преобразование, сохраняющее метрику на S^2, является линейным и ортогональным преобразованием в $\mathbb{R}^3$. Однако строгое доказательство этого факта требует привлечения понятия геодезической линии. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 4.

§ 10. Пространственноподобные поверхности в псевдоевклидовом пространстве

1. Псевдосфера. Рассмотрим трехмерное псевдоевклидово пространство с координатами (t, x, y), в которых псевдоевклидова метрика имеет вид

$$dl^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2. \qquad (1)$$

Псевдосфера радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^3_1$ задается уравнением

$$t^2 - x^2 - y^2 = R^2. \tag{2}$$

Это — двуполостный гиперболоид в трехмерном пространстве (рис. 14). Псевдосфера лежит целиком внутри светового конуса $t^2 - x^2 - y^2 = 0$ и в псевдосферических координатах ρ, χ, φ (см. (3.11), (3.12)) задается уравнениями

$$\rho = R \quad \text{(верхняя половина)},$$

$$\rho = -R \quad \text{(нижняя половина)}.$$

Мы будем в дальнейшем рассматривать только верхнюю половину гиперболоида, где $\rho = R$. Напомним, что метрика $dt^2 - dx^2 - dy^2$ в псевдосферических координатах ρ, χ, φ имеет вид (3.12):

$$dl^2 = -\rho^2(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\, d\varphi^2) + d\rho^2. \tag{3}$$

Поэтому на гиперболоиде, где $d\rho = 0$, имеем

$$-dl^2 = R^2(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\, d\varphi^2). \tag{4}$$

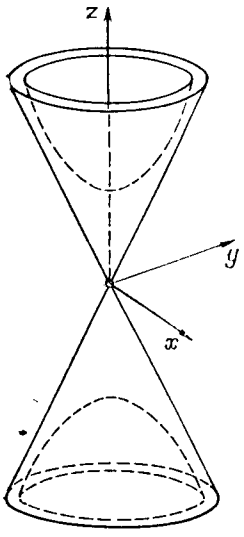


Рис. 14

Таким образом, метрика, индуцированная псевдоевклидовой (т. е. индефинитной) метрикой на поверхности псевдосферы, отрицательно определена.

Это эквивалентно тому, что псевдосфера $t^2 - x^2 - y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^3_1$ — пространственно-

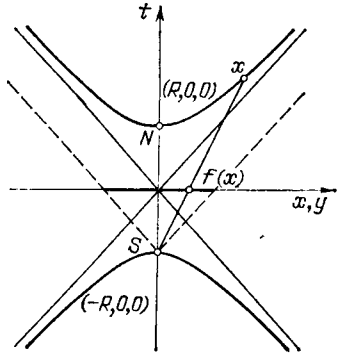


Рис. 15

подобная гиперповерхность: касательные векторы к этой поверхности всегда пространственноподобны (на них $dl^2 < 0$).

Определение 1. Метрика (4) называется *метрикой Лобачевского.*

По аналогии с предыдущим параграфом можно построить стереографическую проекцию псевдосферы на плоскость (x, y). Центром псевдосферы является начало координат O, северный по-

люс — это точка с координатами $(R, 0, 0)$, южный — точка с координатами $(-R, 0, 0)$. Образом верхней половины псевдосферы будет открытый круг $x^2+y^2<R^2$ (рис. 15). Пусть t, x, y — координаты точки P на псевдосфере (где $t>0$), и пусть u, v — координаты точки $f(P)$, где f — стереографическая проекция. Вычислим связь между этими координатами в явном виде. Из рис. 15 видно, что

$$\frac{x}{u}=\frac{t+R}{R},\quad \frac{y}{v}=\frac{t+R}{R},$$

откуда $x=u(1+t/R)$, $y=v(1+t/R)$. Подставляя x и y в уравнение поверхности $t^2-x^2-y^2=0$, получим

$$t=-R\left(1+\frac{2R^2}{u^2+v^2-R^2}\right), \tag{5}$$

откуда

$$x=\frac{2R^2u}{R^2-u^2-v^2},\quad y=\frac{2R^2v}{R^2-u^2-v^2}. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) — искомые формулы для стереографической проекции. Теперь можно найти вид метрики (4) на псевдосфере в координатах (u, v). Непосредственное вычисление показывает, что

$$-dl^2=-(dt^2-dx^2-dy^2)=\frac{4R^4}{(u^2+v^2-R^2)^2}(du^2+dv^2). \tag{7}$$

Опять (как и для сферы S^2) метрика псевдосферы в координатах u, v пропорциональна метрике евклидовой плоскости. Метрика (7) на круге $u^2+v^2<R^2$, взятая со знаком минус, называется метрикой модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Если ввести на круге $u^2+v^2<R^2$ полярные координаты (r, φ), то метрика Лобачевского запишется в виде

$$dl^2=\frac{4R^4}{(R^2-r^2)^2}(dr^2+r^2\,d\varphi^2). \tag{8}$$

Очевидна аналогия с метрикой сферы S^2 (см. (9.4)).

Соберем различные виды метрик сферы S^2 и плоскости Лобачевского L^2 в одну таблицу $(R=1)$:

S^2	L^2
$d\theta^2+\sin^2\theta\,(d\varphi)^2$	$d\chi^2+\operatorname{sh}^2\chi\,(d\varphi)^2$
$4\dfrac{dx^2+dy^2}{(1+x^2+y^2)^2}$	$4\dfrac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$, $x^2+y^2<1$

Рассмотрим еще одну форму записи метрики Лобачевского. Из теории функций комплексного переменного хорошо известно, что существует дробно-линейное преобразование комплексной плоскости, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг. Укажем одно из таких преобразований: $z=(1+iw)/(1-iw)$ (рис. 16). Если мы положим $z=u+iv$, $w=x+iy$, то тем самым мы введем на единичном круге новые координаты (x, y), где $y>0$. Непосредственное вычисление показывает, что метрика Лобачевского в координатах (x, y) принимает вид

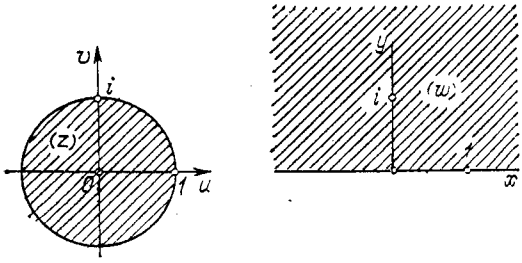


Рис. 16

$$dl^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2},\quad y>0. \tag{9}$$

Метрика (9) называется метрикой модели Клейна геометрии Лобачевского.

Найдем группу движений плоскости Лобачевского. Любое псевдоортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^3_1$ (см. § 6, п. 2) сохраняет форму $t^2-x^2-y^2$ и поэтому переводит псевдосферу $t^2-x^2-y^2=R^2$ в себя. Но преобразование из $O(1, 2)$ может менять местами верхнюю и нижнюю половину псевдосферы. Следовательно, группа движений плоскости Лобачевского содержит группу ортохронных преобразований из $O(1, 2)$. В гл. 4 будет показано, что эти группы совпадают. Таким образом, плоскость Лобачевского, так же как сфера и евклидова плоскость, имеет трехпараметрическую совокупность движений.

2. Кривизна пространственноподобных поверхностей в $\mathbb{R}^3_1$. Будем говорить, что поверхность в $\mathbb{R}^3_1$ пространственноподобна, если любой касательный к ней вектор пространственноподобен. Другими словами, метрика Минковского $dl^2=dt^2-dx^2-dy^2$ индуцирует на поверхности отрицательно определенную метрику.

Для случая, когда поверхность задана как график функции $t=f(x, y)$, метрика на поверхности имеет вид

$$-dl^2=-(dt^2-dx^2-dy^2)=$$
$$=(1-f_x^2)\,dx^2-2f_xf_y\,dx\,dy+(1-f_y^2)\,dy^2=g_{ij}dx^i\,dx^j,$$
$$x^1=x,\quad x^2=y.$$

Имеем: $\det g_{ij}=1-f_x^2-f_y^2$; условие пространственноподобности имеет вид $\det g_{ij}=1-f_x^2-f_y^2>0$. Единичный вектор нормали к поверхности имеет вид $m=(1, f_x, f_y)\big/\sqrt{1-f_x^2-f_y^2}$ (времени-

подобен). Вторая квадратичная форма поверхности определена равенством

$$b_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^i \partial x^j},\ m \right\rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Введем гауссову кривизну K пространственноподобной поверхности, полагая

$$K = -\frac{\det b_{ij}}{\det g_{ij}}. \tag{10}$$

Для поверхностей, заданных уравнением $t = f(x, y)$, $1 - f_x^2 - f_y^2 > 0$, по аналогии с § 8 будем иметь

$$K = \frac{f_{xy}^2 - f_{xx} f_{yy}}{(1 - f_x^2 - f_y^2)^2}. \tag{11}$$

В частности, для гиперболоида $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ (геометрия Лобачевского) получаем $K \equiv -1$.

Замечания. 1. В гл. 4 будет вычислена кривизна плоскости Лобачевского, исходя из внутренней геометрии. Мы снова получим $K \equiv -1$; это объясняет выбор знака в определении (10).

2. Как и в § 8, получаем: пространственноподобные поверхности отрицательной гауссовой кривизны $K < 0$ в пространстве $\mathbb{R}_1^3$ являются выпуклыми.

§ 11. Комплексный язык в геометрии

1. Комплексные и вещественные координаты. Во многих задачах геометрии удобно пользоваться комплексным языком. В связи с этим мы изложим здесь нужные нам простейшие факты.

Пусть задано n-мерное линейное пространство $\mathbb{C}^n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Любой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$\xi = z^k e_k, \quad z^k = x^k + iy^k, \tag{1}$$

где z^k — комплексные координаты. Пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное линейное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ над полем вещественных чисел, где базис в $\mathbb{R}^{2n}$ задается так:

$$e_1, \ldots, e_n, \quad ie_1, \ldots, ie_n. \tag{2}$$

Тогда имеем

$$\xi = z^k e_k = x^k e_k + y^k (ie_k), \tag{3}$$

где $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ — вещественные координаты вектора ξ. Описанная операция называется *овеществлением*.

Комплексно линейные невырожденные преобразования пространства $\mathbb{C}^n$ образуют группу $GL(n, \mathbb{C})$. Это — группа комплексных матриц размером $n \times n$ с определителем, не равным нулю.

При овеществлении каждое такое преобразование дает некоторое линейное преобразование вещественного пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Получаем таким образом *отображение овеществления*

$$GL(n, \mathbb{C}) \to GL(2n, \mathbb{R}). \tag{4}$$

Пример. Пусть $n = 1$. Мы имеем тогда одномерное комплексное пространство с координатой $z = x + iy$. Линейные преобразования пространства $\mathbb{C}$ — это умножения на комплексные числа $\lambda \neq 0$:

$$z \mapsto \lambda z. \tag{5}$$

Если $\lambda = a + ib$, $a^2 + b^2 \neq 0$, то получим

$$z = x + iy \mapsto (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Таким образом, соответствующее преобразование пространства $\mathbb{R}^2$ задается матрицей вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = r(\lambda), \quad a^2 + b^2 \neq 0. \tag{6}$$

Видно, что заведомо не любое линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^2$ получается из комплексно линейных преобразований пространства $\mathbb{C}$.

Аналогично нетрудно показать, что если в n-мерном случае A — матрица из $GL(n, \mathbb{C})$, причем $\Lambda = A + iB$, где A и B — вещественные матрицы, то при отображении $r: GL(n, \mathbb{C}) \to GL(2n, \mathbb{R})$ получается матрица

$$r(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Задача. Докажите, что определитель матрицы $r(\Lambda)$ имеет вид $\det(r(\Lambda)) = |\det \Lambda|^2$.

Замечание. Укажем другое описание образа отображения $r: GL(n, \mathbb{C}) \to GL(2n, \mathbb{R})$. Если $\Lambda \in GL(n, \mathbb{C})$ — комплексно линейное преобразование, то для любого вектора ξ имеем

$$\Lambda(i\xi) = i\Lambda(\xi). \tag{8}$$

При овеществлении умножение на i делается линейным преобразованием I в $2n$-мерном вещественном пространстве. Имеем

$$r(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } 1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Матрица оператора $I = r(i)$ умножения на i в базисе (2) имеет вид (9), так как

$$i(e_k) = ie_k, \quad i(ie_k) = -e_k.$$

Из (8) вытекает, что матрица I коммутирует с матрицей $r(\Lambda)$. Это и означает комплексность оператора.

В $GL(n, \mathbb{C})$ есть подгруппа матриц с определителем 1, обозначаемая $SL(n, \mathbb{C})$.

2. Эрмитово скалярное произведение. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$ задается на комплексном языке следующим образом:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} z_1^k \bar{z}_2^k, \quad \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^{n} |z^k|^2. \tag{10}$$

Оно обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \langle \lambda\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \lambda \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \langle \xi, \lambda\eta \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{\lambda} \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle \eta, \xi \rangle_{\mathbb{C}}}, \\ \langle \xi_1 + \xi_2, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi_1, \eta \rangle_{\mathbb{C}} + \langle \xi_2, \eta \rangle_{\mathbb{C}}, \\ \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}} > 0 \text{ при } \xi \neq 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Любое скалярное произведение со свойствами (11) называется *эрмитовым*.

В овеществленном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ можно также ввести евклидово скалярное произведение: если $\xi_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n, y_1^1, \ldots, y_1^n)$, $\xi_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^n, y_2^1, \ldots, y_2^n)$, то

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{n} (x_1^k x_2^k + y_1^k y_2^k). \tag{12}$$

Покажем, что эрмитово скалярное произведение связано с евклидовым следующим образом:

$$\operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{R}}, \tag{13}$$

где Re означает действительную часть комплексного числа. Действительно, имеем

$$\operatorname{Re} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} (x_1^k + iy_1^k)(x_2^k - iy_2^k) = \sum_{k=1}^{n} (x_1^k x_2^k + y_1^k y_2^k).$$

В частности, из формулы (10) вытекает, что эрмитов скалярный квадрат вектора совпадает с евклидовым:

$$\langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}}. \tag{14}$$

Пусть $\Lambda \in GL(n, \mathbb{C})$ — комплексное невырожденное линейное преобразование.

Определение 1. Λ называется *унитарным*, если

$$\langle \Lambda\xi_1, \Lambda\xi_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}}. \tag{15}$$

Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$, в котором эрмитово скалярное произведение имеет вид (10), Λ задается матрицей $\Lambda = (\lambda_h^l)$. Тогда из условия унитарности имеем

$$\sum_{h=1}^{n} \lambda_h^l \overline{\lambda}_h^{l'} = \delta^{ll'} \tag{16}$$

или, в матричной форме,

$$\overline{\Lambda}^{\top}\Lambda = 1 \leftrightarrow \overline{\Lambda}^{\top} = \Lambda^{-1} \tag{17}$$

($\top$ означает транспонирование). Унитарные матрицы Λ образуют группу, которая обозначается через $U(n)$ и называется *унитарной группой*. Из (17) вытекает, что

$$\det(\overline{\Lambda}^{\top}\Lambda) = (\overline{\det \Lambda})(\det \Lambda) = |\det \Lambda|^2 = 1.$$

Таким образом, унитарные матрицы имеют детерминант, по модулю равный единице. В группе $U(n)$ есть подгруппа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем единица.

Замечание. Можно заметить, по аналогии с § 4, что $U(n)$ есть группа движений эрмитовой метрики в $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим образ $r(U(n))$ в группе $GL(2n, \mathbb{R})$. Из формулы (13) вытекает, что если $\Lambda \in U(n)$, т. е. Λ сохраняет эрмитов скалярный квадрат, то матрица $r(\Lambda)$ сохраняет евклидов скалярный квадрат в $\mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, образ $r(U(n))$ унитарной группы в $GL(2n, \mathbb{R})$ имеет вид

$$r(U(n)) = SO(2n) \cap r(GL(n, \mathbb{C})). \tag{18}$$

Аналогично псевдоевклидовым пространствам можно рассмотреть псевдоэрмитовы пространства $\mathbb{C}^n_{p,q}$, $p+q=n$, где квадрат длины вектора ξ с координатами $(z^1, \ldots, z^n)$ задается формулой

$$\langle \xi, \xi \rangle_{p,q} = |z^1|^2 + \ldots + |z^p|^2 - \ldots - |z^n|^2. \tag{19}$$

Группа комплексных линейных преобразований, сохраняющих форму (19), обозначается $U(p, q)$, а ее подгруппа, составленная из матриц с определителем единица,— $SU(p, q)$.

3. Примеры групп комплексных преобразований. Мы видели выше, что группа $GL(1, \mathbb{C})$ — это группа ненулевых комплексных чисел (по умножению). Группа $U(1)$ состоит из всех комплексных чисел, по модулю равных единице: $U(1) = \{e^{i\varphi}\}$. Заметим, что $r(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, так что отображение r определяет изоморфизм групп $U(1)$ и $SO(2)$.

Рассмотрим теперь группу $SL(2, \mathbb{C})$. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$, т. е. $ad - bc = 1$. Поставим в соответствие матрице A дробно-

линейное преобразование (расширенной) комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{20}$$

Если $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ — другая матрица с определителем единица, то имеем

$$z'' = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'} = \frac{(a'a + b'c)\,z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)\,z + c'b + d'd},$$

т. е. построенное отображение представляет собой гомоморфизм

$$\varphi\colon SL(2, \mathbb{C}) \to L, \tag{21}$$

где L — группа дробно-линейных преобразований. Нетрудно видеть, что ядро гомоморфизма φ состоит из двух матриц: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, причем φ отображает $SL(2, \mathbb{C})$ на всю группу L («эпиморфно»). Поэтому

$$L = SL(2, \mathbb{C}) / \pm 1. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь группу $U(2)$. Если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ принадлежит $U(2)$, то

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad |c|^2 + |d|^2 = 1, \quad a\bar{c} + b\bar{d} = 0. \tag{23}$$

Ее подгруппа $SU(2)$ выделяется дополнительным условием $ad - bc = 1$. Таким образом, группа $SU(2)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{24}$$

Другой пример — группа $SU(1, 1)$. Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} c & d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix}, \quad |c|^2 - |d|^2 = 1. \tag{25}$$

Заметим, что $c \neq 0$ (так как $|c| \geqslant 1$).

Существует отображение $SU(1, 1) \to SU(2)$, определяемое формулой

$$\begin{pmatrix} c & d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/c & d/\bar{c} \\ -\bar{d}/c & 1/\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Обратное отображение определено при $a \neq 0$. Это отображение не является групповым гомоморфизмом.

§ 12. Аналитические функции

1. Комплексная запись элемента длины и дифференциала функции. Пусть задана кривая в пространстве $\mathbb{C}^n$ в комплексных координатах (z^k), имеющая вид

$$z^k = z^k(t) = x^k(t) + iy^k(t). \tag{1}$$

Тогда в вещественных координатах (x^k, y^k) мы получаем кривую $x^1(t), \ldots, x^n(t), y^1(t), \ldots, y^n(t)$. Ее длина имеет вид

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\dot{x}^k)^2 + (\dot{y}^k)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \dot{z}^k \dot{\bar{z}}^k}\, dt. \tag{2}$$

В пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ удобно перейти от координат (x^k, y^k) к комплексным координатам $z^k, \bar{z}^k$, $k = 1, \ldots, n$, полагая

$$\begin{aligned} z^k &= x^k + iy^k, \qquad \bar{z}^k = x^k - iy^k, \\ x^k &= \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k), \quad y^k = \frac{1}{2i}(z^k - \bar{z}^k). \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда элемент длины в комплексной форме запишется так:

$$dl^2 = \sum_{k=1}^{n} dz^k d\bar{z}^k, \tag{4}$$

где положено

$$dz^k = dx^k + i\, dy^k, \quad d\bar{z}^k = dx^k - i\, dy^k. \tag{5}$$

Введем операторы в пространстве комплекснозначных функций на $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \\ \frac{\partial}{\partial y^k} &= i\left(\frac{\partial}{\partial z^k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(z^k) &= \frac{\partial}{\partial z^k}(\bar{z}^k) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z^k}(z^k) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(\bar{z}^k) = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Из формул (6), (7) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Дифференциал любой комплекснозначной функции* $f(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ *имеет вид*

$$df = \frac{\partial f}{\partial z^1} dz^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z^n} dz^n + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^1} d\bar{z}^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^n} d\bar{z}^n. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь произвольный многочлен с комплексными коэффициентами $P(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$ от переменных $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$. Совершив замену переменных (3), мы получим из многочлена $P(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ многочлен $Q(z^1, \ldots, z^n, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Многочлен* $Q(z, \bar{z}) = P(x, y)$ *тогда и только тогда зависит от переменных* $z^1, \ldots, z^n$ *и не зависит от* $\bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n$, *когда выполнены тождества*

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Доказательство. Операторы $\frac{\partial}{\partial z^k}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ обладают следующим очевидным свойством (формула Лейбница):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^k}(fg) &= \frac{\partial f}{\partial z^k} g + f \frac{\partial g}{\partial z^k}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(fg) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}^k}. \end{aligned} \tag{11}$$

Далее, используя формулы (8), отсюда получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}[(z^k)^m] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\left[(\bar{z}^k)^m\right] = m(\bar{z}^k)^{m-1}. \tag{12}$$

Отсюда сразу получаем, что если $P(x, y) = Q(z, \bar{z})$ не зависит от z^k, то $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть многочлен P зависит от $\bar{z}^k$, причем максимальная степень, с которой $\bar{z}^k$ входит в P, равна m. Покажем, что $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \not\equiv 0$.

Многочлен P имеет вид

$$P = A_0(\bar{z}^k)^m + A_1(\bar{z}^k)^{m-1} + \ldots + A_m,$$

где $A_0, \ldots, A_m$ — многочлены от всех переменных $z^1, \ldots, z^n$ и всех $\bar{z}^q$, кроме $\bar{z}^k$. Поэтому $\frac{\partial A_i}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0$, $i = 0, \ldots, m$ (A_i не зависят от $\bar{z}^k$). Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} P = A_0 m(\bar{z}^k)^{m-1} + A_1(m-1)(\bar{z}^k)^{m-2} + \ldots$$

Так как $A_0 \not\equiv 0$, то $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} \not\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема применима не только к многочленам, но и к сходящимся степенным рядам: независимость от переменных $\bar{z}^k$ эквивалентна условиям $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0$.

Определение 1. *Комплексно аналитической* называется функция $f(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n)$, для которой выполнены тождества

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Для функций двух вещественных переменных $f(x, y) = f(z, \bar{z})$, где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, условие аналитичности (независимости от $\bar{z}$) имеет вид

$$2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0. \tag{14}$$

Если $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, то условие (14) запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{15}$$

Уравнения (15) называются *уравнениями Коши — Римана*. Из (15), очевидно, следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{16}$$

Следовательно, вещественная и мнимая части комплексно аналитической функции суть решения уравнения Лапласа (т. е. гармонические функции): $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ — оператор Лапласа.

2. Комплексные замены координат. Пусть в некоторой области n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ заданы два набора комплексных координат

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + iy^1, \ \ldots, \quad z^n = x^n + iy^n, \\ w^1 &= u^1 + iv^1, \ \ldots, \quad w^n = u^n + iv^n. \end{aligned} \tag{17}$$

Тогда координаты $w^k = x^k + iy^k$ задаются в виде функций от координат $z^k = x^k + iy^k$:

$$w^k = w^k(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Определение 2. Замена координат (18) называется *комплексно аналитической*, если

$$\frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^l} \equiv 0, \quad k, l = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Для комплексно аналитической замены координат (18) можно ввести матрицу Якоби (a_l^k), положив

$$a_l^k = \frac{\partial w^k}{\partial z^l}, \quad k, l = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Определитель матрицы (a_l^k) называется *комплексным якобианом* замены (18):

$$J_{\mathbb{C}} = \det(a_l^k). \tag{21}$$

Замена (18) в овеществленном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ дает замену

$$u^k = u^k(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n), \quad v^k = v^k(x^1, y^1, \ldots, x^n, y^n), \tag{22}$$
$$k = 1, \ldots, n.$$

Пусть

$$J_{\mathbb{R}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \tag{23}$$

— (вещественный) якобиан замены (22).

Оказывается, комплексный и вещественный якобианы связаны весьма просто.

Лемма 2. *Для комплексно аналитической замены координат имеет место следующее равенство:*

$$J_{\mathbb{R}} = |J_{\mathbb{C}}|^2.$$

Доказательство. Пусть $A = (a_l^k) = \left(\frac{\partial w^k}{\partial z^l}\right)$ —(комплексная) матрица Якоби, $J_{\mathbb{C}} = \det A$. Найдем вещественную матрицу Якоби для перехода от координат $z^1, \ldots, z^n, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ к координатам $w^1, \ldots, w^n, \bar{w}^1, \ldots, \bar{w}^n$. Из условия комплексной аналитичности имеем

$$\frac{\partial w^k}{\partial z^l} = a_l^k, \quad \frac{\partial w^k}{\partial \bar{z}^l} = \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial z^l} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}^k}{\partial \bar{z}^l} = \bar{a}_l^k.$$

Поэтому искомая матрица Якоби имеет вид $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$. Ее определитель равен

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} = |\det A|^2 = |J_{\mathbb{C}}|^2.$$

Заметим теперь, что переход от координат $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$ к координатам $z^1, \ldots, z^n, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n$ или от (u, v) к координатам $(w, \bar{w})$ задается матрицей

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & i \\ \hline 1 & & 0 & -i & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & -i \end{array}\right), \quad \det B = (-2i)^n.$$

Тогда

$$J_{\mathbb{R}} = \det\left(B^{-1}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}\end{pmatrix}B\right) = |J_{\mathbb{C}}|^2.$$

Следствие. *Если (комплексный) якобиан замены (18) отличен от нуля, то локально можно выразить обратно z через w:*

$$z^k = z^k(w^1, \ldots, w^n), \quad k = 1, \ldots, n,$$

причем обратные функции $z^k(w)$ комплексно аналитичны.

Доказательство. Функции $z^k(w, \overline{w})$ существуют в силу вещественной теоремы об обратном отображении (см. § 1). Матрица Якоби для замены (в $\mathbb{R}^{2n}$) $(w, \overline{w}) \to (z, \overline{z})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{A}^{-1}\end{pmatrix},$$

что и доказывает следствие.

Пример. При $n = 1$ замена (18) имеет вид

$$w = w(z), \quad \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} \equiv 0. \tag{24}$$

Эта замена обратима всюду, где $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$.

Под *преобразованием* в комплексном случае всегда будем понимать взаимно однозначное отображение одной области пространства $\mathbb{C}^n$ на другую, задаваемое комплексно аналитическими функциями.

Примеры преобразований при $n = 1$. 1) Комплексные аффинные преобразования

$$w(z) = az + b, \quad a \neq 0. \tag{25}$$

При таком преобразовании $\frac{dw}{dz} = a \neq 0$.

Напомним (§ 4, п. 2), что с вещественной точки зрения преобразования (25) дают движения плоскости вместе с растяжениями, сохраняющие ориентацию.

2) Дробно-линейные преобразования

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \tag{26}$$

(можно считать, что $ad - bc = 1$). В этом случае

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{(cz + d)^2} \neq 0. \tag{27}$$

Строго говоря, преобразование (26) не определено при $z = -\frac{d}{c}$. Можно считать (пока чисто формально), что отображение (26) задано в расширенной комплексной плоскости, где комплексная

прямая $\mathbb{C}$ дополнена одной бесконечно удаленной точкой ∞, причем

$$-\frac{d}{c} \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}. \tag{28}$$

Например, преобразование

$$w = \frac{1+iz}{1-iz} \tag{29}$$

переводит верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ в единичный круг $|w| < 1$. Мы использовали это отображение в § 10 при построении модели Клейна геометрии Лобачевского.

3. Поверхности в комплексном пространстве. Мы рассмотрим простейший случай одномерных поверхностей (комплексных кривых) в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$. Такая кривая задается в пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами (w, z) уравнением

$$f(w, z) \tag{30}$$

где $f(w, z)$ — комплексно аналитическая функция переменных w, z. Уравнение (30) есть система двух вещественных уравнений $u = 0$, $v = 0$, где $f = u + iv$, и поэтому задает двумерную поверхность в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Введем комплексный градиент $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f$, полагая

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{31}$$

Точка (w_0, z_0) на кривой (30) называется неособой, если $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f|_{z_0, w_0} \neq 0$. Имеет место следующий комплексный аналог теоремы о неявных функциях (который мы приводим без доказательства).

Теорема 2. *Пусть $f(w, z)$ — комплексно аналитическая функция переменных w, z, причем в точке w_0, z_0 с $f(w_0, z_0) = 0$ градиент $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f$ отличен от нуля. Пусть, например, $\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0$. Тогда в достаточно малой окрестности точки (w_0, z_0) уравнение $f(w, z) = 0$ имеет единственное и при этом комплексно аналитическое решение $w = w(z)$, так что $f(w(z), z) = 0$, $w_0 = w(z_0)$, $\frac{dw}{dz} \equiv 0$.*

Пример. Пусть $f(w, z)$ — многочлен от двух переменных. Тогда полная совокупность решений уравнения $f(w, z) = 0$ вида $w = w(z)$ называется *многозначной алгебраической функцией*, а сама поверхность (комплексная кривая) $f(w, z) = 0$ называется *графиком* или *римановой поверхностью* этой многозначной функции *).

*) Это — упрощенный вариант общепринятого определения римановой поверхности (см., например, [16]). Наше определение равносильно общепринятому в случае, если поверхность $f(w, z) = 0$ не имеет особых точек и самопересечений.

Важный частный случай — *гиперэллиптические* кривые, т. е. римановы поверхности, задаваемые уравнением

$$f(w, z) = w^2 - P_n(z) = 0, \tag{32}$$

где $P_n(z)$ — многочлен n-й степени. Это — график алгебраической функции $w = \sqrt{P_n(z)}$.

Лемма 3. *Поверхность* (32) *неособа тогда и только тогда, когда многочлен* $P_n(z)$ *не имеет кратных корней.*

Доказательство. Вычислим градиент функции f:

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2w, -\frac{dP_n(z)}{dz}\right).$$

Если $\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f$ обращается в нуль на поверхности (32), то

$$2w = 0, \quad \frac{dP_n(z)}{dz} = 0, \quad w^2 - P_n(z) = 0.$$

Отсюда вытекает, что особая точка имеет координаты $(0, z_0)$, где z_0 — общий корень многочлена $P_n(z)$ и его производной $\frac{dP_n}{dz}$. Отсутствие таких общих корней и эквивалентно отсутствию кратных корней у многочлена $P_n(z)$. Лемма доказана.

На поверхности (32) на основании комплексной теоремы о неявной функции можно ввести локальную координату z в тех точках, где $\frac{\partial f}{\partial w} = 2w \neq 0$, т. е. где $P_n(z) \neq 0$. Если $P_n(z) = 0$, то $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{dP_n(z)}{dz} \neq 0$. В окрестности таких точек можно в качестве локальной координаты взять w.

Вернемся к случаю произвольной неособой комплексно аналитической кривой $f(w, z) = 0$. Пусть $\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_{(w_0, z_0)} \neq 0$ в некоторой точке (w_0, z_0). Тогда $w = w(z)$, $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \equiv 0$. Эрмитова метрика dl^2 в $\mathbb{C}^2$

$$dl^2 = dw\, d\bar{w} + dz\, d\bar{z} \tag{33}$$

на поверхности $f(w, z) = 0$ превращается в

$$dl^2 = dw\, d\bar{w} + dz\, d\bar{z} = \left(1 + \left|\frac{dw}{dz}\right|^2\right) dz\, d\bar{z}. \tag{34}$$

Если $z = x + iy$, то на поверхности $f(w, z) = 0$ квадрат элемента длины примет вид

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z} = g(x, y)\,(dx^2 + dy^2), \tag{35}$$

где $g(z, \bar{z}) = 1 + \left|\frac{dw}{dz}\right|^2$ в разобранном случае.

Определение 3. Координаты (x, y), в которых метрика на поверхности имеет вид $dl^2 = g(x, y)(dx^2 + dy^2)$, называются *конформными*.

Имеет место простая

Лемма 4. *Конформный вид метрики инвариантен (только) относительно комплексно аналитических замен координат и их суперпозиций с комплексным сопряжением.*

Доказательство. Пусть для координаты z метрика имеет вид

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z}.$$

Пусть $z = z(w)$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \equiv 0$. Тогда

$$dz = \left(\frac{dz}{dw}\right) dw, \quad d\bar{z} = \overline{\left(\frac{dz}{dw}\right)}\, d\bar{w}$$

и

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z} = g(w, \bar{w}), \overline{z(w, \bar{w})}\Big) \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 dw\, d\bar{w}.$$

Если $\frac{\partial z}{\partial w} = 0$, то доказательство полностью аналогично. Если же $z = z(w, \bar{w})$, $\frac{\partial z}{\partial w} \neq 0$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \neq 0$, то легко видеть, что метрика dl^2 в переменных w, $\bar{w}$ будет иметь вид

$$dl^2 = g\, dz\, d\bar{z} = g\left|\frac{\partial z}{\partial w} dw + \frac{\partial z}{\partial \bar{w}} d\bar{w}\right|^2 =$$

$$= g(a_{11}(dx')^2 + 2a_{12}dx'\, dy' + a_{22}(dy')^2),$$

где $w = x' + iy'$; очевидно, здесь $a_{12} \neq 0$. Лемма доказана.

§ 13. Конформный вид метрик поверхностей

1. Изотермические координаты. Гауссова кривизна в конформных координатах. Пусть двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически:

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q), \quad z = z(p, q), \tag{1}$$

где p, q изменяются в некоторой области пространства $\mathbb{R}^2$. Тогда на поверхности возникает индуцированная метрика

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E(dp)^2 + 2F\, dp\, dq + G(dq)^2, \tag{2}$$

$g = EG - F^2 > 0$. Заменами локальных координат (p, q) на поверхности метрику dl^2 можно привести к конформному виду. Именно, имеет место ([1])

Теорема 1. *Пусть E, F, G — (вещественно) аналитические функции переменных (p, q). Тогда можно ввести новые локальные*

координаты u, v такие, что в этих координатах метрика dl^2 примет следующий вид:

$$dl^2 = f(u, v)\,(du^2 + dv^2). \tag{3}$$

Замечание. Такие координаты называются *изотермическими* или *конформными*. Таким образом, в изотермических координатах метрика имеет конформный вид в смысле предыдущего параграфа.

Изотермические координаты определяются неоднозначно, как было выяснено в лемме 12.4. Рассмотрим две системы изотермических координат (p, q) и (u, v), и пусть $u = u(p, q)$, $v = v(p, q)$.

Мы знаем, что если замена сохраняет конформный вид метрики, то функция $w(z, \bar{z})$ является комплексно аналитической функцией переменной z или $\bar{z}$. Таким образом, полная совокупность преобразований, сохраняющих конформный вид метрики в изотермических координатах, получается добавлением ко всевозможным комплексно аналитическим преобразованиям $w(z)$ комплексного сопряжения $z \mapsto z'$.

Пример. Рассмотрим плоскость $\mathbb{C}$ с комплексной координатой $z = x + iy$. Евклидова метрика $dl^2 = dx^2 + dy^2$ имеет конформный вид, т. е.

$$dl^2 = dz\,d\bar{z}. \tag{4}$$

Рассмотрим произвольное дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1. \tag{5}$$

Тогда имеем

$$dl^2 = dz\,d\bar{z} = |cz + d|^{-4} dw\,d\bar{w}, \tag{6}$$

т. е. дробно-линейные преобразования сохраняют конформный вид евклидовой метрики плоскости.

Пусть поверхность в трехмерном евклидовом пространстве задана в конформных координатах u, v так, что метрика на поверхности имеет вид

$$dl^2 = g(u, v)\,(du^2 + dv^2). \tag{7}$$

Выведем формулу для гауссовой кривизны в конформных координатах.

Теорема 2. *Гауссова кривизна поверхности в $\mathbb{R}^3$ с метрикой* (7) *имеет вид*

$$K = -\frac{1}{2g}\,\Delta \ln g, \tag{8}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ — *оператор Лапласа.*

Доказательство. Пусть поверхность задана в параметрическом виде: $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$. Тогда условие (7) озна-

чает, что

$$\langle r_u, r_u\rangle = \langle r_v, r_v\rangle = g, \quad \langle r_u, r_v\rangle = 0. \tag{9}$$

Дифференцируя эти равенства по u, v, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} &= \langle r_{uu}, r_u\rangle = \langle r_{uv}, r_v\rangle, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v} &= \langle r_{vv}, r_v\rangle = \langle r_{uv}, r_u\rangle, \\ \langle r_{uu}, r_v\rangle + \langle r_u, r_{uv}\rangle &= 0 = \langle r_{uv}, r_v\rangle + \langle r_u, r_{vv}\rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

Введем единичные векторы e_1, e_2, n, полагая

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} r_u, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} r_v, \quad n = [e_1, e_2]. \tag{11}$$

Репер (e_1, e_2, n) в каждой точке поверхности ортонормирован, и при этом вектор n нормален поверхности, а векторы e_1, e_2 ее касаются. По определению коэффициенты второй квадратичной формы имеют вид

$$b_{11} = L = \langle r_{uu}, n\rangle, \quad b_{12} = M = \langle r_{uv}, n\rangle, \quad b_{22} = \langle r_{vv}, n\rangle = N. \tag{12}$$

Из формул (10) и (12) следует, что векторы r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} в базисе e_1, e_2, n имеют координаты

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, L\right), \\ r_{uv} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, M\right), \\ r_{vv} &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial g}{\partial v}, N\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, имеет место формула

$$\langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle = LN - M^2 - \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Из формул (10), (14) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \langle r_{uuv}, r_v\rangle + \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial v}\langle r_{uu}, r_v\rangle - \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle + \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle = \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - (LN - M^2) + \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно (8.26), для гауссовой кривизны будем иметь

$$K = \frac{LN - M^2}{g^2} = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = -\frac{1}{2g}\Delta \ln g.$$

Теорема доказана.

Если метрика (7) записана в комплексном виде:

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z},$$

то формула (8) для гауссовой кривизны примет вид

$$K = -\frac{2}{g}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}\ln g. \tag{15}$$

2. Метрики сферы и плоскости Лобачевского в конформном виде. В действительности конформные координаты для сферы уже были найдены в § 9. Рассмотрим сферу радиуса $R = 1$ и ее стереографическую проекцию на экваториальную плоскость с координатами (x, y). Напомним, что в координатах (x, y) метрика сферы dl^2 имела вид (формула 9.4))

$$dl^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \tag{16}$$

Если $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, то формула (16) примет вид

$$dl^2 = \frac{4}{(1 + |z|^2)^2}\,dz\,d\bar{z}, \tag{17}$$

где z — координата на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Для плоскости Лобачевского мы имели формулу для dl^2 в координатах (x, y) стереографической проекции (формула (10.7) при $R = 1$):

$$dl^2 = \frac{4}{(1 - (x^2 + y^2))^2}(dx^2 + dy^2). \tag{18}$$

В комплексной записи формула (18) примет вид

$$dl^2 = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2}\,dz\,d\bar{z}, \quad |z| < 1, \tag{19}$$

где z — комплексная координата в единичном круге (метрика модели Пуанкаре). Если мы отобразим единичный круг на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, полагая $z = \frac{1 + iw}{1 - iw}$, то метрика плоскости Лобачевского примет вид

$$dl^2 = -\frac{4}{(w - \bar{w})^2}\,dw\,d\bar{w}, \quad \operatorname{Im} w > 0 \tag{20}$$

(метрика модели Клейна).

Выясним, как устроены группы движений этих метрик в комплексной реализации. Мы видели в предыдущем пункте, что дробно-линейные преобразования заведомо сохраняют конформный вид метрики. Будем искать движения наших метрик среди дробно-линейных преобразований (мы докажем в гл. 4, что других движений нет).

$$z = \frac{aw + b}{cw + d}, \quad ad - bc = 1. \tag{21}$$

Для метрики сферы будем иметь

$$dl^2 = \frac{4dz\,d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} = \frac{4dw\,d\bar{w}}{[|aw+b|^2+|cw+d|^2]^2} =$$

$$= \frac{4dw\,d\bar{w}}{[|b|^2+|d|^2+w(a\bar{b}+c\bar{d})+\bar{w}(\bar{a}b+\bar{c}d)+(|a|^2+|c|^2)|w|^2]^2}. \quad (22)$$

Чтобы преобразование (21) было движением метрики сферы (17), должны выполняться, стало быть, такие равенства:

$$|b|^2+|d|^2=1, \quad a\bar{b}+c\bar{d}=0, \quad |a|^2+|c|^2=1, \quad (23)$$

причем мы считаем, что $ad-bc=1$.

Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ лежит в $SU(2)$. Напомним (§ 11, п. 3), что при отождествлении группы $SL(2,\mathbb{C})$ с группой всех дробно-линейных преобразований мы должны перейти к факторгруппе по подгруппе (± 1). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Дробно-линейная группа (собственных) движений метрики сферы S^2 изоморфна факторгруппе $SU(2)/\pm 1$.*

Следствие. *Имеет место изоморфизм групп $SU(2)/\pm 1 \approx SO(3)$.* (Проверьте с помощью стереографической проекции!)

Замечание. Чтобы получить полную совокупность движений сферы, мы должны добавить к вращениям еще и отражения. Это соответствует присоединению к дробно-линейным преобразованиям $z=\frac{aw+b}{cw+d}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$, комплексного сопряжения $z \mapsto \bar{z}$.

Перейдем к плоскости Лобачевского. Начнем с модели Пуанкаре. Вычисление, аналогичное предыдущему, показывает, что после преобразования (21) будем иметь

$$dl^2 =$$

$$= \frac{4dz\,d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2} = \frac{4dw\,d\bar{w}}{[|d|^2-|b|^2+(c\bar{d}-a\bar{b})w+(\bar{a}b-\bar{c}d)\bar{w}+(|c|^2-|a|^2)|w|^2]^2}.$$

Следовательно, должны выполняться условия

$$|d|^2-|b|^2=1, \quad |c|^2-|a|^2=-1, \quad c\bar{d}-a\bar{b}=0, \quad (24)$$

причем $ad-bc=1$. Таким образом, мы получаем, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ лежит в группе $SU(1,1)$. Заметим, что выполнение условий (24) гарантирует, что при дробно-линейном преобразовании $z=\frac{aw+b}{cw+d}$ единичный круг переходит в себя, так как его граничная окружность $|z|=1$ переходит в окружность $|w|=1$.

Рассмотрим теперь модель Клейна. Отыщем прежде всего преобразования вида (21), переводящие верхнюю полуплоскость

$\operatorname{Im} z > 0$ в себя. Для этого должно выполняться условие:

$$\text{если } \operatorname{Im} w = 0, \text{ то } \operatorname{Im} z = 0. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что если w вещественно и $z = \frac{aw + b}{cw + d}$, то мнимая часть $\operatorname{Im} z$ имеет вид

$$\operatorname{Im} z = w^2 \operatorname{Im} (a\bar{c}) + w \operatorname{Im} (b\bar{c} + a\bar{d}) + \operatorname{Im} (b\bar{d}).$$

В силу произвольности w должны выполняться равенства

$$\operatorname{Im} a\bar{c} = \operatorname{Im} (b\bar{c} + a\bar{d}) = \operatorname{Im} (b\bar{d}) = 0.$$

Тем самым из требования (25) уже вытекает, что a, b, c, d — вещественные числа. Все преобразования (21) с вещественными a, b, c, d оказываются движениями метрики Лобачевского в модели Клейна: $dl^2 = \frac{4dz\,d\bar{z}}{-(z-\bar{z})^2}$. Вычисления, аналогичные разобранным выше случаям, мы приводить не будем. Замечательно, что все дробно-линейные преобразования, сохраняющие область определения метрики Лобачевского, автоматически оказываются движениями. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Дробно-линейная группа (собственных) движений метрики Лобачевского изоморфна*:

а) *группе* $SU(1, 1)/\pm 1$ *в модели Пуанкаре,*

б) *группе* $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ *в модели Клейна,*

в) *группе* $SO(1, 2)$ *(точнее, ее связной компоненте).*

Следствие. *Группы* $SU(1, 1)/\pm 1$, $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ *и связная компонента группы* $SO(1, 2)$ *изоморфны.* (Проверьте заменой координат!)

Замечание. Чтобы получить полную группу движений в модели Пуанкаре, нужно присоединить к дробно-линейным преобразованиям комплексное сопряжение $z \mapsto \bar{z}$ (очевидно, оно переводит единичный круг в себя и дает движение метрики (19)).

В модели Клейна следует добавить преобразование $z \mapsto -z$, переводящее в себя верхнюю полуплоскость и дающее движение метрики (20).

3. Поверхности постоянной кривизны. Пусть метрика поверхности записана в комплексном виде: $dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z}$. Полагая $g = e^{\varphi}$, будем иметь для гауссовой кривизны (формулы (8), (15))

$$K = -\frac{1}{2} e^{-\varphi} \Delta\varphi, \quad K = -2e^{-\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial \bar{z}}. \tag{26}$$

Если кривизна K постоянна, то для функции φ получаем уравнение (Лиувилля)

$$\Delta\varphi = -2Ke^{\varphi}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial \bar{z}} = -\frac{K}{2} e^{\varphi}. \tag{27}$$

Теорема 5. *Поверхность с метрикой* $dl^2 = g(z, \bar{z})\,dz\,d\bar{z}$ *постоянной кривизны* $K = \text{const}$ (*локально*) *изометрична*: а) *сфере при* $K > 0$; б) *евклидовой плоскости при* $K = 0$; в) *плоскости Лобачевского при* $K < 0$.

Доказательство. Из (26) будем иметь

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{K}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right) = e^{-\varphi}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\,\partial\bar{z}} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial\bar{z}}\right) =$$

$$= e^{-\varphi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

откуда $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \psi(z)$, где $\psi(z)$ — аналитическая функция. Сделав комплексно аналитическую замену $z = f(w)$, получим

$$g(z, \bar{z}) \to g\left|\frac{df}{dw}\right|^2, \quad \varphi \to \tilde{\varphi}(w, \bar{w}) = \varphi(z, \bar{z}) + \ln\frac{df}{dz} + \ln\frac{\overline{df}}{d\bar{z}}.$$

В новых переменных мы также будем иметь $\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial w^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial w}\right)^2 = \tilde{\psi}(w)$, где $\tilde{\psi}(w)$ — аналитическая функция от w, для которой получаем выражение

$$\tilde{\psi}(w) = \psi(z)(f')^2 + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Здесь $f' = \frac{df}{dw}$. Можно выбрать функцию f так, чтобы функция $\tilde{\psi}(w)$ обратилась в нуль. Для этого нужно решить уравнение

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -\psi(f(w))(f')^2 \tag{28}$$

(левая часть этого уравнения в теории функций комплексного переменного называется «производная Шварца»)*).

После сделанной замены получим

$$\frac{\partial^2 e^{-\varphi/2}}{\partial w^2} = -\frac{1}{2}e^{-\varphi/2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right) = 0. \tag{29}$$

Из вещественности $e^{-\varphi/2}$ получаем также

$$\frac{\partial^2 e^{-\varphi/2}}{\partial\bar{w}^2} = 0. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует

$$e^{-\varphi/2} = aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c,$$

*) Разрешимость этого уравнения в рамках данной книги постулируется.

где a, c — вещественные константы, b — комплексная. Получим метрику вида

$$dl^2 = g(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z} = \frac{dw\, d\bar{w}}{(aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c)^2}. \tag{31}$$

Кривизна этой метрики равна $K = 4(ac - b\bar{b})$. Форму (31) дробно-линейными преобразованиями $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ можно привести к виду:

а) $\frac{4R^2 dz\, d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$, $K = 4(ac - b\bar{b}) = R^{-2} > 0$;

б) $dz\, d\bar{z}$, $K = 4(ac - b\bar{b}) = 0$;

в) $\frac{4R^2\, dz\, d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$, $K = 4(ac - b\bar{b}) = -R^{-2} < 0$.

Получаем метрики сферы, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Теорема доказана.

Задача. Пусть метрика имеет вид

$$dl^2 = dx^2 + f(x)\, dy^2, \quad 0 < f(x) < \infty.$$

Доказать, что метрика приводится к конформному виду

$$dl^2 = g(u, v)\,(du^2 + dv^2).$$

§ 14. Группы преобразований как поверхности в N-мерном пространстве

1. Координаты в окрестности единицы. Рассмотрим группу матриц $GL(n, \mathbb{R})$ с детерминантом, не равным нулю:

$$A = (a^i_j), \quad \det(a^i_j) \neq 0. \tag{1}$$

Условие (1) задает область в пространстве всех матриц, обозначаемом через $M(n, \mathbb{R})$. Это — линейное пространство размерности n^2. Таким образом, полная линейная группа есть область в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$. Координатами в пространстве $M(n, \mathbb{R})$ служат матричные элементы a^i_j. Если $A = (a^i_j)$, $B = (b^i_j)$ — две матрицы n-го порядка, то их произведение $C = AB$ имеет вид $C = (c^i_j)$,

$$c^i_j = a^i_k b^k_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Из формулы (2) вытекает, что координаты произведения двух матриц выражаются через координаты сомножителей при помощи гладких функций (которые даже являются многочленами от координат). Другими словами, закон умножения определяет гладкое

отображение прямого произведения:

$$GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R}),$$

где $(A, B) \mapsto AB$.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех матриц n-го порядка евклидову метрику, полагая

$$|A|^2 = \sum_{i,j} |a_j^i|^2, \quad A = (a_j^i). \tag{3}$$

Очевидно, будем иметь

$$|A + B| \leqslant |A| + |B|. \tag{4}$$

По отношению к произведению матриц метрика (3) обладает следующим свойством.

Лемма 1. *Имеет место неравенство*

$$|AB| \leqslant |A||B|. \tag{5}$$

Доказательство. Это вытекает из следующего неравенства:

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)^2 \tag{6}$$

[вывод неравенства (6): $\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum (x_i y_j - x_j y_i)^2$]. Лемма доказана.

Построим другую удобную систему координат в окрестности единичной матрицы $1 \in GL(n, \mathbb{R})$. Рассмотрим в пространстве всех матриц единичный шар (без границы) $|X| < 1$, $X = (x_j^i)$.

Лемма 2. *Если* $|X| < 1$, *то матрица* $A = 1 + X$ *обратима*,

$$A = 1 + X \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Доказательство. Рассмотрим ряд из матриц вида

$$B = 1 - X + X^2 - X^3 + \ldots \tag{7}$$

Покажем, что этот ряд сходится. Используя неравенства (4) и (5), будем иметь

$$|X^m - X^{m+1} + X^{m+2} - \ldots \pm X^{m+k-1}| \leqslant$$

$$\leqslant |X^m| \cdot |1 + |X| + \ldots + |X|^{k-1}| = |X|^m \frac{1 - |X|^k}{1 - |X|}.$$

Поэтому последовательность частичных сумм ряда (7) фундаментальна при $|X| < 1$ и этот ряд сходится. Но в то же время

$$AB = (1 + X)(1 - X + X^2 - X^3 + \ldots) = 1, \quad B = A^{-1}.$$

Лемма доказана.

Введем координаты на окрестности единицы в группе $GL(n,\mathbb{R})$, задаваемой условиями

$$|A-1|<1. \tag{8}$$

Если $A=(a^i_j)$, то координата x^i_j матрицы A равна

$$x^i_j(A)=a^i_j-\delta^i_j, \quad x^i_j(1)=0, \tag{9}$$

$$\delta^i_j=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j.\end{cases}$$

Замечание. Аналогично можно ввести координаты в окрестности с центром в произвольной точке B_0, $B_0\in GL(n,\mathbb{R})$. Действительно, если мы все матрицы в этой окрестности умножим на B_0^{-1}, то окрестность переедет в окрестность единицы, где координаты уже построены. Формально эта процедура задается так: если $C=B_0^{-1}=(c^i_j)$, то положим

$$\begin{aligned} y^i_j(A)&=c^i_k a^k_j-\delta^i_j,\\ y^i_j(B_0)&=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Координаты y^i_j пригодны для таких матриц A, что

$$|A-B_0|<|B_0|. \tag{11}$$

Таким образом, мы построили для группы $GL(n,\mathbb{R})$ локальные координаты в окрестности произвольной точки.

Касательное пространство в единице к группе $GL(n,\mathbb{R})$ естественно отождествляется с пространством всех матриц n-го порядка. Рассмотрим кривую $A(t)\in GL(n,\mathbb{R})$, т. е. семейство матриц $A(t)$, зависящих от параметра t. Пусть эта кривая проходит через единицу при $t=0$, т. е. $A(0)=1$. Тогда касательный вектор (вектор скорости) этой кривой при $t=0$ — это матрица $\dot{A}(t)|_{t=0}$. Наоборот, пусть X — любая матрица. Тогда кривая $A(t)=1+tX$ при t, достаточно близких к нулю, лежит в $GL(n,\mathbb{R})$. Очевидно, что

$$A(0)=1, \quad \dot{A}(0)=X;$$

тем самым доказано совпадение совокупности всех векторов, касательных в единице к группе $GL(n,\mathbb{R})$, и совокупности всех матриц n-го порядка.

Рассмотренные в §§ 4 и 6 группы преобразований задавались уравнениями в пространстве всех матриц. Так, группа $SL(n,\mathbb{R})$ матриц n-го порядка с определителем 1 задается одним уравнением

$$\det A=1. \tag{12}$$

Это — гиперповерхность в пространстве всех матриц, целиком лежащая в $GL(n,\mathbb{R})$.

Теорема 1. $SL(n, \mathbb{R})$ — *неособая поверхность в пространстве всех матриц.*

Доказательство. Докажем сначала, что $1 \in SL(n, \mathbb{R})$ — неособая точка этой гиперповерхности. Для этого достаточно доказать (см. § 7, п. 2), что касательное пространство к $SL(n, \mathbb{R})$ в этой точке имеет размерность точно $n^2 - 1$. Действительно, пусть $\det A(t) = 1$, причем $A(0) = 1$, и $\frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = X$. По правилу дифференцирования определителя имеем

$$0 = \frac{d}{dt}(\det A(t))|_{t=0} = \operatorname{Sp} X,$$

где Sp обозначает след. Поэтому $\operatorname{Sp} X = 0$ — уравнение касательного пространства к $SL(n, \mathbb{R})$ в точке 1 (напомним, что коэффициентами этого уравнения служат элементы матрицы Якоби $\partial \det A/\partial a_j^i$, $A = (a_j^i)$, при $A = 1$). Итак, мы доказали, что касательное пространство в единице к группе $SL(n, \mathbb{R})$ совпадает с совокупностью матриц со следом 0. Размерность пространства таких матриц равна $n^2 - 1$. Поэтому точка 1 на группе — это неособая точка в $SL(n, \mathbb{R})$. Далее, пусть B — любая точка группы $SL(n, \mathbb{R})$ — произвольная унимодулярная матрица. Умножим все матрицы, лежащие в окрестности матрицы B, на B^{-1}. Тогда B перейдет в 1, и эта окрестность сдвинется в окрестность единицы. Это отображение — гладкое и невырожденное; поэтому точка B является неособой. Теорема доказана.

Использованный здесь метод, основанный на исследовании касательного пространства в единице группы, мы применим и для других матричных групп. При этом мы всегда будем доказывать только неособость соответствующей поверхности в точке 1. (Из доказательства теоремы 1 видно, что этого достаточно.)

Рассмотрим теперь группу $O(n)$ ортогональных матриц n-го порядка. Соответствующая поверхность в $\mathbb{R}^{n^2}$ задается системой уравнений

$$\sum_k a_k^i a_k^j = \delta^{ij}, \quad A^T A = 1, \quad A = (a_j^i). \tag{13}$$

Среди уравнений (13) есть, очевидно, совпадающие, которые получаются при перестановке индексов i и j. Остается $n(n+1)/2$ уравнений. Мы должны показать, что ранг этой системы уравнений равен $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$. Это означает, что размерность касательного пространства к группе $O(n)$ равна $n(n-1)/2$. Докажем, что касательное пространство к $O(n)$ в единице совпадает с пространством всех кососимметрических матриц. Если $A(t) \in O(n)$, $A(0) = 1$ — семейство ортогональных матриц, $X = \frac{d}{dt} A(t)|_{t=0}$, то $0 = \frac{d}{dt}(A^T(t) A(t))_{t=0} = X^T + X = 0$ (ср. § 5, п. 3). Это и есть уравнение касательного пространства

в единице группы $O(n)$, совпадающего с пространством кососимметрических матриц. Ясно, что размерность пространства всех кососимметрических матриц равна $n(n-1)/2$ (в качестве декартовых координат в этом пространстве можно взять матричные элементы x^i_j с $i<j$). Отсюда следует неособость поверхности $O(n)$.

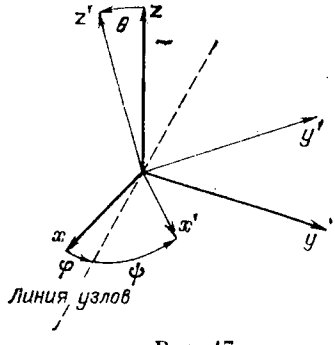


Рис. 17

В частности, группа $SO(n)$, которая есть связная компонента группы $O(n)$, также есть неособая поверхность в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n^2}$.

Пример. Рассмотрим группу $SO(3)$ вращений трехмерного пространства. В качестве локальных координат на этой неособой поверхности можно взять известные из аналитической геометрии углы Эйлера. Если вращение переводит систему координат (x, y, z) в (x', y', z') (рис. 17), то такое вращение можно представить в виде последовательного выполнения трех:

а) Вращение на угол φ вокруг оси z. При этом ось x перейдет в линию узлов.

б) Вращение на угол θ вокруг линии узлов. Ось z переходит в ось z'.

в) Вращение на угол ψ вокруг оси z'. Линия узлов переходит в ось x'.

Можно ввести и другие локальные координаты на $SO(3)$. Каждое вращение можно задать, указав ось вращения и угол вращения φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Ось можно считать направленной: мы считаем, что вращение вокруг оси на угол φ происходит против часовой стрелки. Каждое вращение можно задать, таким образом, вектором φ: направление вектора φ задает ось вращения, модуль $|\varphi|$ — угол вращения. Таким образом, любой точке группы $SO(3)$ соответствует точка из шара радиуса π в трехмерном пространстве — конец вектора φ. Поскольку вращения на угол π и на угол $-\pi$ совпадают, то на поверхности этого шара — двумерной сфере радиуса π — пары диаметрально противоположных точек изображают одно и то же вращение из группы $SO(3)$.

В такой системе координат единица группы совпадает с началом координат, а касательное пространство в единице совпадает с самим трехмерным векторным пространством.

Рассмотрим теперь комплексный случай. Группа $GL(n, \mathbb{C})$ — область в пространстве $M(n, \mathbb{C})$ всех матриц. $M(n, \mathbb{C})$ — это комплексное пространство $\mathbb{C}^{n^2}$ размерности n^2. С вещественной точки зрения это — область в пространстве $\mathbb{R}^{2n^2}$. Группа $SL(n, \mathbb{C})$ — это комплексная поверхность размерности n^2-1 (вещественная раз-

мерность равна $2n^2-2$). Касательное пространство группы $SL(n, \mathbb{C})$ в точке 1 также совпадает с пространством комплексных матриц со следом нуль.

Рассмотрим теперь унитарную группу $U(n)$. Она задается в пространстве всех комплексных матриц n-го порядка уравнениями

$$f^{ij}(A)=\sum_{k=1}^{n} a_k^i \bar{a}_k^j=\delta^{ij}, \quad A=(a_j^i), \text{ или } A\bar{A}^{\mathrm{T}}=1. \tag{14}$$

Мы видим, что функции $f^{ij}(A)$ не являются комплексно аналитическими: $\frac{\partial f^{ij}}{\partial \bar{a}_k^j} \not\equiv 0$. Поэтому группа $U(n)$ не является комплексной поверхностью. Докажем ее неособость. Каждое уравнение $f^{ij}=\delta^{ij}$ в вещественном смысле задает два уравнения

$$\operatorname{Re} f^{ij}=\delta^{ij}, \quad \operatorname{Im} f^{ij}=0.$$

Заметим, что имеют место тождества

$$f^{ij}=\bar{f}^{ji},$$

поэтому уравнения $f^{ij}=0$ и $f^{ji}=0$ при $i \neq j$ эквивалентны. Кроме того, $\operatorname{Im} f^{ii}=0$. Поэтому уравнение $f^{ii}=1$ дает только одно вещественное условие на матрицу A. Получаем таким образом $n+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2$ различных вещественных уравнений. Нужно доказать, что касательное пространство в единице к группе $U(n)$ имеет (вещественную) размерность $2n^2-n^2=n^2$. Это пространство совпадает с совокупностью всех косоэрмитовых матриц n-го порядка:

$$\bar{X}^{\mathrm{T}}=-X. \tag{15}$$

Действительно, если $A(t) \in U(n)$, $A(0)=1$, то

$$A(t)\cdot\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)=1, \quad \left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}=X,$$

$$0=\frac{d}{dt}\left(A\bar{A}^{\mathrm{T}}\right)|_{t=0}=X+\bar{X}^{\mathrm{T}}.$$

Размерность пространства всех косоэрмитовых матриц равна n^2. Декартовы координаты в нем таковы: $\frac{1}{i}x_k^k$, $k=1, \ldots, n$, $\operatorname{Re} x_j^i$, $\operatorname{Im} x_j^i$ при $i<j$.

Группа $SU(n)$ унитарных матриц с определителем 1 также представляет собой неособую вещественную поверхность размерности n^2-1. Ее касательное пространство в единице совпадает с пространством всех косоэрмитовых матриц со следом нуль.

Пример. Рассмотрим группу $SU(2)$. Мы видели (§ 11, п. 3), что матрицы из $SU(2)$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Если $a = x + iy$, $b = u + iv$, то уравнение $|a|^2 + |b|^2 = 1$ задает трехмерную сферу радиуса 1 в четырехмерном пространстве с координатами x, y, u, v.

2. Экспонента от матрицы. Пусть T — касательное пространство в единице к группе $GL(n, \mathbb{R})$. Построим отображение касательного пространства на саму группу:

$$\exp\colon T \to GL(n, \mathbb{R}), \quad \exp(0) = 1, \tag{16}$$

полагая

$$\exp X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots \tag{17}$$

Лемма 3. 1) *Ряд* (17) *сходится для всех матриц* X.

2) *Если матрицы* X *и* Y *коммутируют*, $XY = YX$, *то*

$$\exp(X + Y) = (\exp X)(\exp Y). \tag{18}$$

3) *Матрица* $A = \exp X$ *обратима и*

$$A^{-1} = \exp(-X). \tag{19}$$

4) $\exp(X^{\mathrm{T}}) = (\exp X)^{\mathrm{T}}$.

Доказательство. Используя неравенства (4) и (5), для ряда (17) будем иметь

$$\left|\frac{X^m}{m!} + \frac{X^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + \frac{X^{m+h-1}}{(m+k-1)!}\right| < \frac{|X|^m}{m!} + \ldots + \frac{|X|^{m+k-1}}{(m+k-1)!}.$$

Но ряд $e^{|X|}$ сходится при всех значениях $|X|$. Поэтому последовательность частичных сумм ряда (17) фундаментальна при всех $|X|$ и этот ряд сходится. Докажем формулу (18). Используя перестановочность матриц X и Y, получим

$$\exp X \exp Y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{Y^l}{l!}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\sum_{h+l=m} \frac{m!}{k!\,l!} X^k Y^l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(X + Y)^m = \exp(X + Y).$$

Формула (19) вытекает из (18), так как матрицы X и $Y = -X$ коммутируют и $\exp(0) = 1$. Утверждение 4) очевидно.

Лемма доказана.

Пусть G — одна из рассмотренных выше матричных групп ($G = GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $U(n)$ и т. д.). Пусть T — касательное про-

странство к группе G в единице. Покажем, что отображение exp переводит T в G.

Лемма 4. 1) *Если* $G=SL(n, \mathbb{R})$ *и* $X \in T$, *т. е.* $\operatorname{Sp} X=0$, *то* $A=\exp X \in SL(n, R)$, *т. е.* $\det A=1$.

2) *Если* $G=O(n)$ *и* $X \in T$, *т. е. матрица* X *кососимметрична, то* $A=\exp X \in O(n)$, *т. е. матрица* A *ортогональна.*

3) *Если* $G=U(n)$ *и* $X \in T$, *т. е. матрица* X *косоэрмитова, то* $A=\exp X \in U(n)$, *т. е. матрица* A *унитарна.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Sp} X=0$. Рассмотрим семейство матриц вида

$$A(t)=\exp(tX),$$

t — параметр. В силу леммы 3 имеем

$$A(t_1+t_2)=A(t_1)A(t_2)$$

(матрицы t_1X и t_2X коммутируют). Если $f(t)=\det A(t)=\det\exp(tX)$, то $f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)$. Следовательно, $f(t)=e^{ct}$, где c — константа. Покажем, что $c=0$. Имеем: $f(t)=\det\exp(tX)=\det(1+tX+o(t))=t\operatorname{Sp} X+o(t)$. Если $\operatorname{Sp} X=0$, то $c=\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=0$. Утверждение 1) доказано.

Пусть матрица X кососимметрична:

$$X^{\top}=-X.$$

Тогда матрицы X и $X^{\top}$ коммутируют между собой. Пусть $A=\exp X$. Тогда в силу леммы 3 будем иметь

$$A^{\top}A=(\exp X)^{\top}\exp X=\exp\left(X^{\top}+X\right)=1, \qquad A \in O(n).$$

Утверждение 2) доказано.

Пусть теперь матрица X косоэрмитова:

$$\overline{X}^{\top}=-X$$

(черта означает комплексное сопряжение). Пусть $A=\exp X$. Тогда опять в силу леммы 3 будем иметь

$$\overline{A}^{\top}A=\overline{\exp X}^{\top}\exp X=\exp\overline{X}^{\top}\exp X=$$
$$=\exp\left(X+\overline{X}^{\top}\right)=1, \qquad A \in U(n).$$

Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает, что для групп $G=SO(n)$, $SU(n)$ экспонента $\exp X$ также лежит в G, если матрица X лежит в T.

Лемма 5. *В некоторой окрестности начала координат отображение* $\exp X$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. Достаточно проверить, что якобиан отображения exp отличен от нуля в точке 0 (в начале координат).

Пусть $A = (a_j^i) = \exp X$, $X = (x_j^i)$. Имеем

$$\frac{\partial a_l^h}{\partial x_j^i} = \delta_i^h \delta_l^j + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены, обращающиеся в нуль при $X = 0$. Таким образом, матрица Якоби отображения exp имеет вид: $\left(\frac{\partial a_l^h}{\partial x_j^i}\right)\Big|_{x=0} = \delta_i^h \delta_l^j$. Это — единичная матрица порядка n^2, что и доказывает лемму.

Отображение exp позволяет ввести удобные локальные координаты в окрестности единицы группы: координатами здесь служат декартовы координаты (x_j^i) в окрестности нуля в касательном пространстве T. Явная формула для координат x_j^i такова: если A лежит в окрестности единицы группы G, то

$$x_j^i(A) = (\ln A)_j^i = \left[(A-1) - \frac{(A-1)^2}{2} + \frac{(A-1)^3}{3} - \ldots\right]_j^i. \qquad (20)$$

В целом отображение exp может не быть взаимно однозначным (даже не быть отображением на всю группу G — см. ниже задачу 3).

Замечание. Рассмотрим в пространстве T прямую, проходящую через начало координат, т. е. семейство матриц вида tX, t — параметр. Тогда семейство матриц $A(t) = \exp(tX)$ образует *однопараметрическую подгруппу*

$$A(s)A(t) = A(s+t), \quad A(0) = 1,$$
$$A(-t) = A^{-1}(t). \qquad (21)$$

Пример. В группе $SO(3)$ для произвольной оси имеется очевидная однопараметрическая подгруппа вращений вокруг этой оси. Заметим, что $A(t + 2\pi) = A(t)$. Для вращений вокруг оси z имеем

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

3. Кватернионы. Множество кватернионов — это совокупность $\mathbb{H}$ линейных комбинаций с вещественными коэффициентами вида

$$q \in \mathbb{H}, \quad q = a + bi + cj + dk, \qquad (22)$$

где i, j, k — некоторые линейно независимые символы. Введем билинейное умножение в $\mathbb{H}$, положив

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik,$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad (23)$$

и кватернионы, у которых $b = c = d = 0$, коммутируют со всеми остальными. Легко проверить, что $\mathbb{H}$ с так определенным умножением превращается в ассоциативную, но не коммутативную алгебру над полем вещественных чисел. Эту алгебру можно представить в матричном виде.

Лемма 6. *Сопоставим каждому кватерниону* $q = a + bi + cj + dk$ *матрицу* $A(q) \in M(2, \mathbb{C})$, *полагая*

$$A(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \tag{24}$$

(*здесь* i — *мнимая единица*!). *Тогда*

$$A(q_1 q_2) = A(q_1) A(q_2). \tag{25}$$

Замечание. Формула (25) означает, что отображение $q \mapsto A(q)$ является гомоморфизмом.

Доказательство. Достаточно проверить (25) при $q = i, j, k$. Имеем

$$A(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$A(i) A(j) = A(k)$$

и т. д.

Замечание. Матрицы

$$\sigma_x = -iA(k), \quad \sigma_y = -iA(j), \quad \sigma_z = -iA(i) \tag{27}$$

часто называются *матрицами Паули*. Эти матрицы таковы, что

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1, \quad \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z, \ \ldots \tag{28}$$

Введем операцию сопряжения в $\mathbb{H}$, полагая

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk \quad \text{для} \quad q = a + bi + cj + dk. \tag{29}$$

Лемма 7. *Отображение* $q \mapsto \bar{q}$ — *антиавтоморфизм алгебры* $\mathbb{H}$, *т. е.*

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2, \quad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1. \tag{30}$$

Доказательство. Это сразу следует из того, что

$$A(\bar{q}) = \overline{A}^{\mathrm{T}}(q), \tag{31}$$

а отображение $A \mapsto \overline{A}^{\mathrm{T}}$ — антиавтоморфизм алгебры матриц $M(2, \mathbb{C})$.

Определим норму кватерниона $|q|^2$, полагая

$$|q|^2 = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{для} \quad q = a + bi + cj + dk. \tag{32}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$|q|^2 = \det A(q); \tag{33}$$

поэтому норма обладает свойством

$$|q_1q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2. \tag{34}$$

Следствие. *Совокупность кватернионов* $\mathbb{H}$ *образует «тело». Это означает, что для каждого отличного от нуля кватерниона* q, *где* $|q|^2 \neq 0$, *определен обратный кватернион* q^{-1} *такой, что*

$$qq^{-1} = 1.$$

Доказательство. Можно положить

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}; \tag{35}$$

тогда $qq^{-1} = q\bar{q}/|q|^2 = 1$.

Совокупность кватернионов с нормой 1 обозначим через $\mathbb{H}_1$. В силу (34) это группа по умножению, а из (35) следует, что если $q \in \mathbb{H}_1$, то $q^{-1} = \bar{q}$.

В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (a, b, c, d) $\mathbb{H}_1$ — это гиперповерхность, задаваемая уравнением

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2 = 1. \tag{36}$$

Поэтому $\mathbb{H}_1$ совпадает с единичной трехмерной сферой в $\mathbb{R}^4$. Заметим, что если $q = a + bi + cj + dk$, $1 = |q|^2$ и $x = a + bi$, $y = c + di$, то $|x|^2 + |y|^2 = 1$ и матрица $A(q)$ имеет вид

$$A(q) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Поэтому (см. § 11, п. 3) группа $\mathbb{H}_1$ изоморфна группе $SU(2)$.

Мы видели (§ 13, п. 2), что группа $SO(3)$ вращений сферы изоморфна факторгруппе $SO(3) \approx SU(2)/\pm 1$. Укажем еще один способ доказать этот факт.

Пусть $\mathbb{H}_0$ — трехмерное пространство кватернионов x, удовлетворяющих условию $\bar{x} = -x$. Метрика в этом пространстве задается формулой $|x|^2 = x\bar{x} = -x^2$. Очевидно, это пространство евклидово.

Лемма 8. *Если* $|q|^2 = 1$, *то преобразование*

$$\alpha_q\colon\ x \mapsto qxq^{-1},\quad x \in \mathbb{H}_0, \tag{38}$$

есть вращение трехмерного евклидова пространства $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Так как $\bar{x} = -x$, $\bar{q} = q^{-1}$, то $\overline{qxq^{-1}} = \bar{q}^{-1}\bar{x}q = -qxq^{-1}$. Поэтому трехмерное пространство $\mathbb{H}_0$ при преобразовании α_q переходит в себя. Кроме того, $|qxq^{-1}| = |x|$, т. е. длина вектора в $\mathbb{H}_0$ сохраняется. Лемма доказана.

Таким образом, отображение $q \mapsto \alpha_q$ есть гомоморфизм группы $\mathbb{H}_1 = SU(2)$ в группу вращений трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Легко показать, что образом этого гомоморфизма служит вся

группа вращений, что $\alpha_{-q} = \alpha_q$ и что если $\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2}$, то $q_1 = \pm q_2$. Из этого и вытекает, что $SO(3) \approx SU(2)/\pm 1$.

Другой пример. Построим изоморфизм групп $SU(2) \times SU(2)/\pm 1 \approx SO(4)$. Пусть $p, q \in \mathbb{H}_1 \approx SU(2)$. Тогда отображение

$$\alpha_{p,q}\colon\ x \mapsto pxq^{-1},\ x \in \mathbb{H} \approx \mathbb{R}^4, \tag{39}$$

сохраняет квадрат нормы кватерниона x и является ортогональным преобразованием четырехмерного пространства $\mathbb{H}$. Ясно, что $\alpha_{-p,-q} = \alpha_{p,q}$. Образ отображения $(p, q) \mapsto \alpha_{p,q}$ лежит в группе $SO(4)$ в силу связности группы $SU(2) \times SU(2)/\pm 1$.

Рассмотрим теперь n-мерное кватернионное пространство $\mathbb{H}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и кватернионными координатами $(q^1, \ldots, q^n)$. Имеет место важное замечание: любой кватернион $q = a + bi + cj + dk$ можно представить в виде

$$q = x + yj = x + j\bar{y},\quad x = a + bi,\quad y = c + di, \tag{40}$$

где x и y можно считать просто комплексными числами. Если $u + vj$ — другой кватернион, то имеет место следующее тождество:

$$(x + yj)(u + vj) = (x + yj)(u + j\bar{v}) = (xu - y\bar{v}) + (xv + y\bar{u})j. \tag{41}$$

Теперь пространство $\mathbb{H}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{2n}$ с базисом $e_1, \ldots, e_n, je_1, \ldots, je_n$ и с комплексными координатами $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, где $q^k = x^k + y^k j$. Действительно, используя представление (40), получаем

$$q^k e_k = x^k e_k + y^k j e_k = x^k e_k + y^k (je_k). \tag{42}$$

Пусть $GL(n, \mathbb{H})$ — группа обратимых кватернионно линейных преобразований пространства $\mathbb{H}^n$. Каждое преобразование $\Lambda \in GL(n, \mathbb{H})$ задается матрицей $\lambda_l^k \in \mathbb{H}$, $k, l = 1, \ldots, n$, причем кватернионные координаты $q^1, \ldots, q^n$ преобразуются по закону

$$(q^k) \to (q^l \lambda_l^k) = (q'^k) \tag{43}$$

(порядок сомножителей существен). Используя тождество (41), мы получим, что комплексные координаты в $\mathbb{C}^{2n}$ преобразуются по закону

$$\begin{aligned} x^k &\to (x^l a_l^k - y^l \bar{b}_l^k) = (x'^k), \\ y^k &\to (x^l b_l^k + y^l \bar{a}_l^k) = (y'^k), \\ \lambda_l^k &= a_l^k + b_l^k j. \end{aligned} \tag{44}$$

Таким образом, каждое $\mathbb{H}$-линейное преобразование пространства $\mathbb{H}^n$ дает комплексно линейное преобразование соответствующего

пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Мы получаем гомоморфизм групп:

$$GL(n, \mathbb{H}) \xrightarrow{c} GL(2n, \mathbb{C}), \tag{45}$$

причем из (44) вытекает, что если $\Lambda = A + Bj$, то

$$c(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Замечание. По аналогии с § 11, п. 1 образ гомоморфизма c можно было определить как совокупность комплексных матриц, коммутирующих с оператором J умножения на j, $J = c(j)$.

Определим теперь в $\mathbb{H}^n$ квадратичную форму $|\xi|^2$, полагая

$$|\xi|^2 = \sum_{k=1}^{n} |q^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} q^k \bar{q}^k, \quad \xi = q^k e_k. \tag{47}$$

Если $q = x + yj$, то $|q|^2 = |x|^2 + |y|^2$, поэтому в комплексных координатах (x^k, y^k), $q^k = x^k + y^k j$, квадратичная форма (47) совпадает со стандартным квадратом модуля вектора:

$$\sum |q^k|^2 = \sum |x^k|^2 + \sum |y^k|^2. \tag{48}$$

Соответствующий аналог эрмитовой формы в $\mathbb{H}^n$ имеет вид

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{n} q_1^k \bar{q}_2^k, \quad \xi_1 = (q_1^k), \quad \xi_2 = (q_2^k). \tag{49}$$

Определение 1. Группой $Sp(n)$ называется совокупность всех кватернионных преобразований, сохраняющих форму (49).

В комплексных координатах форма $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{H}}$ выражается так:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{n} (x_1^k + y_1^k j)\overline{(x_2^k + y_2^k j)} =$$

$$= \sum_k (x_1^k \bar{x}_2^k + y_1^k \bar{y}_2^k) + \sum_k (y_1^k x_2^k - x_1^k y_2^k) j. \tag{50}$$

Пусть $\Lambda \in Sp(n)$. Из формулы (50) вытекает, что Λ сохраняет эрмитову форму $\sum_k (x_1^k \bar{x}_2^k + y_1^k \bar{y}_2^k) = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ и, кроме того, кососимметрическую форму $\sum_k y_1^k x_2^k - x_1^k y_2^k$. Таким образом, $c(Sp(n))$ содержится в $U(2n)$ и состоит из унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^{2n}$, сохраняющих кососимметрическую форму $\sum_k (y_1^k x_2^k - x_1^k y_2^k)$.

Пример. Группа $Sp(1)$ изоморфна $SU(2)$. Действительно, $c(Sp(1)) \subset U(2)$, причем матрицы из $c(Sp(1))$ сохраняют форму $y_1 x_2 - x_1 y_2$, т. е. сохраняют «площадь» комплексного параллелограмма, натянутого на векторы (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Поэтому все преобразования из $c(Sp(1))$ унимодулярны. Этот же результат

мы получили выше, поскольку матрицы из $c(Sp(1))$ имеют вид $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & \bar{a} \end{pmatrix}$ с $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Задачи. 1. Доказать связность (см. § 4) групп $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $Sp(n)$.

2. Доказать, что для любой матрицы X справедлива формула: $\det(\exp X) = e^{\operatorname{Sp} X}$.

3. Проверить, что для группы $SL(2, \mathbb{R})$ образ экспоненциального отображения не покрывает всей группы.

4. Описать структуру касательных пространств в единице групп $U(n)$, $SU(n)$, $SO(p, q)$, $SU(p, q)$.

5. Найти все однопараметрические подгруппы в $SL(2, \mathbb{R})$.

§ 15. Конформные преобразования многомерных евклидовых и псевдоевклидовых пространств

Пусть заданы две метрики $g_{\alpha\beta}$ и $g'_{\alpha\beta}$ в области U пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$. Мы скажем, что эти две метрики определяют одну и ту же конформную структуру, если $g'_{\alpha\beta}(x) = \lambda(x) g_{\alpha\beta}(x)$, $\lambda(x) \neq 0$. Более общо, метрика, конформно эквивалентная данной метрике $g_{\alpha\beta}$, получается из нее заменами координат $x = x(y)$ и умножениями на числовую функцию $\lambda(x)$.

Определение 1. Отображение $\varphi\colon U \to U$ области U с метрикой $g_{\alpha\beta}$ в себя называется *конформным*, если метрика $g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_l}{y\partial\beta} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial y\beta}$ пропорциональна исходной:

$$g'_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \quad \lambda = \lambda(x).$$

Рассмотрим далее псевдоевклидовы метрики типа (p, q) в $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_{p,q}$ с метрикой $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\alpha}\delta_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\alpha} = \pm 1$. Нас будут особо интересовать пространства Евклида $\mathbb{R}^n$ с положительной метрикой и пространства Минковского $\mathbb{R}^n_1 = \mathbb{R}^n_{1,n-1}$.

Среди конформных преобразований этих пространств имеются линейные. Очевидно, линейные конформные преобразования сводятся к следующим:

а) движения — группа $O(p, q)$, $\lambda(x) \equiv 1$;

б) растяжения (дилатации)

$$x \mapsto \lambda x, \quad \lambda = \text{const};$$

в) суперпозиции движений и дилатаций

$$x \mapsto \lambda A(x), \quad A \in O(p, q), \quad \lambda = \text{const}.$$

Кроме того, имеются сдвиги (также движения)

$$x \mapsto x + x_0.$$

Это — «очевидные» конформные преобразования. Кроме них, имеются еще так называемые *инверсии*

г) $$x^\alpha \to \frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{\langle x - x_0, x - x_0\rangle}, \tag{1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение

$$\langle x - x_0, x - x_0\rangle = (x^\alpha - x_0^\alpha)(x^\beta - x_0^\beta) g_{\alpha\beta}(x).$$

Для инверсий имеем

$$\lambda(x) = \text{const}\, \langle x - x_0, x - x_0\rangle^{-1}. \tag{2}$$

При $n = 1$ все преобразования конформны.

При $n = 2$ имеется большое количество конформных преобразований, определяющихся одной произвольной комплексно аналитической функцией (см. § 12).

Для $n > 2$ положение меняется. Имеет место

Теорема 1 (Лиувилля). *Всякое гладкое (требуется не менее четырех непрерывных производных у функций, задающих отображение *)) конформное преобразование области евклидова (псевдоевклидова) пространства размерности $n \geqslant 3$ является суперпозицией движения, дилатации и инверсии.*

Дадим доказательство для $n = 3$.

Евклидов и псевдоевклидов случай в доказательстве, по существу, не различаются. Поэтому мы будем работать с обычной евклидовой метрикой. Пусть $y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$ есть отображение области $U \subset \mathbb{R}^n$ в область $V \subset \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности можно считать, что точка $O = (0, \ldots, 0)$ лежит в обеих областях U и V, причем $y^\alpha(O) = O$. Конформность означает, что $A = (a_\beta^\alpha) = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ есть матрица линейного конформного преобразования во всех точках $x \in U$. Иначе говоря, для векторов $dx = (dx^\alpha)$ и $dy = A\,dx$, $dy^\alpha = a_\beta^\alpha dx^\beta$, имеем

$$|dy| = \lambda(x)\,|dx|. \tag{3}$$

Пусть η_1, η_2, η_3 — три вектора, которые все попарно ортогональны: $\langle \eta_i, \eta_j\rangle = 0$, $i \neq j$. Имеем

$$0 = \langle \eta_i, \eta_j\rangle = \langle A\eta_i, A\eta_j\rangle \tag{4}$$

для всех точек $x \in U$, $A = A(x) = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$. Дифференцируя (4) по

---

*) В действительности теорема справедлива и при меньшей гладкости, но мы не будем этим заниматься.

направлению третьего вектора η_k, $i \neq k$, $j \neq k$, получим

$$\eta_k^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \langle A\eta_i, A\eta_j \rangle = \left\langle \eta_k^\nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^\beta \partial x^\nu} \eta_i^\beta, A\eta_j \right\rangle + \left\langle A\eta_i, \eta_k^\nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^\beta \partial x^\nu} \eta_j^\beta \right\rangle. \tag{5}$$

Переставляя циклически индексы (i, j, k), получим из (5) три тождества. Складывая два из них и вычитая третье, имеем

$$\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu \partial x^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta, A\eta_3 \right\rangle = 0 \tag{6}$$

(возможны перестановки индексов 1, 2, 3).

Таким образом, вектор $\frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu \partial x^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta$ ортогонален вектору $A\eta_3$, если вектор η_3 был ортогонален к обоим векторам η_1, η_2.

Поскольку $n = 3$, отсюда имеем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu \partial y^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta = \mu(x)(A\eta_1) + \nu(x)(A\eta_2). \tag{7}$$

Коэффициенты μ и ν по определению имеют вид

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{|A\eta_1|^2} \left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu \partial x^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta, A\eta_1 \right\rangle, \\ \nu &= \frac{1}{|A\eta_2|^2} \left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x^\nu \partial x^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta, A\eta_2 \right\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\lambda^2 |\eta_1|^2} \left[\frac{1}{2} \eta_2^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \langle A\eta_1, A\eta_1 \rangle \right] = \frac{\eta_2^\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}}{\lambda(x)}, \\ \nu &= \frac{\eta_1^\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}}{\lambda(x)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим $1/\lambda(x)$ через $\rho(x)$; $|A\eta_1|^2 = \lambda(x)|\eta_1|^2$. Разделив (9) на $\lambda(x)$ и используя (8), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\beta} (\rho y \eta_1^\nu \eta_2^\beta) = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\nu \partial x^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta \right) y. \tag{10}$$

Дифференцируя (10) по направлению третьего вектора η_3, получим

$$\frac{\partial^3 (\rho y)}{\partial x^\nu \partial x^\beta \partial x^\delta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta \eta_3^\delta = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\nu \partial x^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta \right) A\eta_1 + \left(\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\delta \partial x^\nu \partial x^\beta} \eta_1^\nu \eta_2^\beta \eta_3^\delta \right) y. \tag{11}$$

Крайние члены этого равенства симметричны относительно пере-

становок (η_1, η_2, η_3). Поэтому и средний член должен быть симметричен:

$$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\,\eta_1^\gamma\eta_2^\beta\right)\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\delta}\,\eta_3^\delta\right)=\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\,\eta_2^\gamma\eta_3^\beta\right)\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\delta}\,\eta_1^\delta\right). \tag{12}$$

Так как $A\eta_3 \neq 0$, $A\eta_1 \neq 0$ и $A\eta_2 \neq 0$, получаем

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\delta}\,\eta_1^\gamma\eta_2^\delta \equiv 0. \tag{13}$$

Итак, билинейная форма (13) обращается в нуль на любой паре ортогональных векторов. Поэтому ее матрица пропорциональна метрике $g_{\gamma\delta}$ с некоторым множителем $\sigma(x)$:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\delta} = \sigma(x)\,g_{\gamma\delta}. \tag{14}$$

Покажем, что $\sigma(x) = \text{const}$. Пусть ξ_i — любые векторы. Дифференцируя (14), имеем

$$\frac{\partial^3\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta\,\partial x^\delta}\,\xi_1^\gamma\xi_2^\beta\xi_3^\delta = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^\gamma}\,\xi_1^\gamma\right)\langle\xi_2, \xi_3\rangle. \tag{15}$$

Переставляя ξ_1 и ξ_2 и вычитая полученные равенства друг из друга, получаем

$$\left\langle\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\,\xi_1^\alpha\right)\xi_2 - \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^\gamma}\,\xi_2^\gamma\right)\xi_1,\ \xi_3\right\rangle = 0. \tag{16}$$

Из этого равенства для всех векторов ξ_i следует $\sigma = \text{const}$. Окончательно имеем

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta} = \sigma g_{\gamma\beta},$$
$$\sigma = \text{const}, \quad \rho = \frac{1}{\lambda} = a_1\,|x - x_0|^2 + b_1, \quad a_i, b_i = \text{const}. \tag{17}$$

Для обратного отображения $x = x(y)$ получаем

$$\lambda(x) = \frac{1}{\rho(x)} = a_2\,|y - y_0|^2 + b_2. \tag{18}$$

Условие $\lambda\rho = 1$ приобретает вид

$$(a_1|x - x_0|^2 + b_1)\,(a_2|y - y_0|^2 + b_2) = 1. \tag{19}$$

Так как $y(0) = 0$, то $x_0 = y_0 = 0$. Из этого следует, что конформное отображение преобразует любую сферу в сферу.

Рассмотрим семейство сфер $|x| = R$. Так как $y(0) = 0$, радиальный луч $(0, y)$ переходит в радиальный луч $(0, x)$. Далее,

$$|y| = \int_0^x |dy| = \int_0^x \lambda(x)\,|dx| = \int_0^{|x|} \frac{dt}{at^2 + b}. \tag{20}$$

Этот интеграл дает трансцендентную функцию от верхнего предела, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Это противоречит (19). Значит, либо $a = 0$, либо $b = 0$.

Случай $a = 0$. Тогда $\rho = \lambda = \text{const}$. Это — линейное отображение.

Случай $b = 0$, $a \neq 0$. Применим инверсию $x^* = x/|x|^2$, мы сведем этот случай к предыдущему, так как $|x^*| = 1/|x|$.

Для евклидовых метрик и $n = 3$ теорема доказана. Заметим, что евклидовость метрики не играла роли в доказательстве. Поэтому теорема верна и для псевдоевклидовых метрик при $n = 3$.

Видоизменения доказательства для $n > 3$ не очень значительны. Размерность использовалась только при выводе равенства (7) с тройкой ортогональных векторов (η_1, η_2, η_3).

Задача. Докажите (7) для любой размерности $n \geqslant 3$.

После этого теорема автоматически будет следовать из дальнейших выкладок, которые не зависят от n.

Конформные преобразования определялись нами для областей в пространстве — евклидовом или псевдоевклидовом. Действительно, инверсии имеют особую точку $x = x_0$, которая переходит в ∞ при отображении (метрика евклидова). В псевдоевклидовом случае особое множество, как видно из уравнений (2), имеет вид

$$\langle x - x_0,\ x - x_0 \rangle = 0,$$

т. е. световой конус, проходящий через точку x_0.

Заметим, что группа конформных преобразований одинакова у всех метрик $g_{\alpha\beta}$, отличающихся множителем $\lambda(x)$. Поэтому конформные преобразования можно моделировать на любом пространстве с римановой метрикой, конформно эквивалентной евклидовой метрике $g_{\alpha\beta} = \lambda(x)\delta_{\alpha\beta}$ в «евклидовых» координатах. В частности, метрика n-мерной сферы S^n, заданной уравнением

$$\sum_{a=0}^{n} (x^a)^2 = 1,$$

конформно эквивалентна евклидовой метрике в некоторых других координатах. При $n = 2$ такие координаты уже указывались в § 9. В пространстве любой размерности конформно евклидовы координаты на сфере (без верхнего полюса) вводятся, как и при $n = 2$, стереографической проекцией на плоскость $(x^1, \ldots, x^n)$ и обозначаются через $x^1, \ldots, x^n$. Метрика имеет вид (см. § 9 для $n = 2$)

$$g_{\alpha\beta} = g(x)\ \delta_{\alpha\beta}, \quad g(x) = \frac{R^4}{(R^2 + r^2)^2}, \tag{21}$$

$$r^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2, \quad R = \text{const}.$$

В координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ мы можем рассмотреть все конформные преобразования, полученные в теореме Лиувилля: это — пре-

образования из группы $O(n)$, трансляции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, дилатации и инверсии, а также их суперпозиции.

С другой стороны, на сфере S^n имеется группа ее движений $O(n+1)$. Кроме того, сферу можно считать границей единичного шара $S^n = \partial D^{n+1}$, $|x| \leqslant R$, на котором в координатах $(x^0, \ldots, x^n)$ определена метрика Лобачевского (см. § 10)

$$\tilde{g}_{ab} = \frac{R^4}{(R^2 - r^2)^2}\,\delta_{ab}, \quad r^2 = \sum_{i=0}^{n} (x^i)^2 < R^2. \tag{22}$$

Группа преобразований метрики Лобачевского на шаре D^{n+1} есть $O(n+1, 1)$ — эта группа шире, чем группа $O(n+1) \subset O(n+1, 1)$. Можно представлять себе пространство Лобачевского реализованным как квадратичная поверхность в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+2}$ с координатами $(z^0, \ldots, z^{n+1})$ и метрикой

$$dl^2 = (dz^0)^2 - \sum_{a=1}^{n+1} (dz^a)^2. \tag{23}$$

Пространство Лобачевского выделяется уравнением

$$(z^0)^2 - \sum_{a=1}^{n+1} (z^a)^2 = 1. \tag{24}$$

Между координатами $(z^1, \ldots, z^{n+1})$ и $(x^0, \ldots, x^n)$ имеется связь (см. (10.6), где $x^0 = u$, $x^1 = v$, $z^1 = x$, $z^2 = y$):

$$z^\alpha = \frac{2R^2 x^{\alpha-1}}{R^2 - r^2}, \qquad \alpha = 1, \ldots, n+1, \tag{25}$$

$$r^2 = \sum_{\alpha=1}^{n+1} (x^{\alpha-1})^2.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Группа Лоренца $O(n+1, 1)$, действуя на пространстве Лобачевского L^{n+1}, порождает действие на сфере S^n (например, если L^{n+1} реализовано как шар D^{n+1} с границей S^n и метрикой (22)). Все эти преобразования конформны на сфере S^n в стандартной метрике, не имеют особенностей и содержат базисные преобразования, а значит, и всю группу конформных преобразований S^n (или $\mathbb{R}^n$), которая тем самым совпадает с $O(n+1, 1)$.*

Необходимо сопоставить трансляции, дилатацию и инверсию в $\mathbb{R}^n$ с преобразованиями из группы $O(n+1, 1)$. Все эти преобразования представлены уже для $n = 1$, где вычисления совсем

просты:

$$\text{трансляция } (x \mapsto x + a) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2}+1 & a & -\frac{a^2}{2} \\ a & 1 & -a \\ \frac{a^2}{2} & a & 1-\frac{a^2}{2} \end{pmatrix} \in O(2, 1),$$

$$\text{дилатация } (x \mapsto \pm \lambda x,\ \lambda > 0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \frac{\lambda^2-1}{2\lambda} & 0 & \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \end{pmatrix} \in O(2, 1),$$

$$\text{инверсия } \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O(2, 1).$$

Эти преобразования конформны на сфере S^n и вместе с группой $O(n)$ порождают всю группу $O(n+1, 1)$.

Задача. Докажите, что группа конформных преобразований пространства $\mathbb{R}^n_1$ аналогичным образом изоморфна группе $O(n, 2)$. Вообще, конформные преобразования в пространстве $\mathbb{R}^n_{p,q}$ составляют группу $O(p+1, q+1)$. В частности, для пространства Минковского $\mathbb{R}^4_1$ группа конформных преобразований изоморфна $O(4, 2)$.

Замечание. Кроме того, группа $O(4, 2)$ оказывается локально изоморфной группе $SU(2, 2)$. Мы этот изоморфизм строить не будем.

Глава 3

ТЕНЗОРЫ. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 16. Примеры тензоров

Как мы уже привыкли, многие величины, например расстояние от точки до некоторого фиксированного центра и другие, задаются в виде числовых функций от точки в пространстве. Если у нас имеется несколько таких величин, то мы уже имеем несколько функций точки (или, как говорят, вектор-функцию точки). В трехмерном пространстве для полной характеризации положения точки в пространстве необходимо знать значение не менее трех числовых функций, именуемых координатами точки (x^1, x^2, x^3): каждая из координат x^i есть функция точки, а совокупность (x^1, x^2, x^3) полностью определяет эту точку. Мы встречались с разными типами координат — например, на плоскости имеются декартовы координаты (x^1, x^2) и полярные, где $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$; в пространстве — декартовы, цилиндрические (r, z, φ) или сферические (r, θ, φ).

Таким образом, координаты — это набор числовых функций точки, которые полностью определяют положение этой точки в пространстве. Точно так же координатами любой физической системы называется такой набор числовых функций от состояния этой системы, которые полностью его определяют (состояние системы — это точка «пространства всех возможных состояний» системы). Например, состояние движущейся материальной точки определяется шестью числами: тремя координатами и тремя компонентами вектора скорости; здесь мы имеем дело с шестимерным пространством состояний.

Оказывается, тем не менее, что понятие числовой функции точки или совокупности таких функций недостаточно. Дело в том, что многие геометрические и физические величины могут быть описаны в виде набора числовых функций только после того, как в пространстве уже задан какой-то набор координат (x^1, x^2, x^3); числовая запись этих величин может сильно измениться, если мы зададим другие координаты z^1, z^2, z^3,

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3), \qquad i = 1, 2, 3.$$

Чтобы уяснить себе эту возможность, мы рассмотрим понятие вектора, например вектора скорости при движении вдоль неко-

торой кривой

$$z^j = z^j(t), \quad j = 1, 2, 3;$$
$$x^i = x^i(z^1(t), z^2(t), z^3(t)) = x^i(t); \quad i = 1, 2, 3.$$

В координатах (z^1, z^2, z^3) мы имеем компоненты вектора скорости в виде

$$\left(\frac{dz^1}{dt}, \frac{dz^2}{dt}, \frac{dz^3}{dt}\right)\Big|_{t=t_0} = (\eta^1, \eta^2, \eta^3).$$

При записи той же кривой в других координатах x^1, x^2, x^3 мы получим другие компоненты того же вектора

$$\left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right)\Big|_{t=t_0} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

и при этом

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{dz^j}{dt}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, для компонент вектора мы имеем формулу преобразования их числовой записи при замене координат

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{3} \eta^j \frac{\partial x^i}{\partial z^j}, \quad i = 1, 2, 3; \qquad (1)$$
$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3),$$

(ξ^1, ξ^2, ξ^3) — компоненты вектора в координатах x^1, x^2, x^3 в заданной точке,

(η^1, η^2, η^3) — компоненты вектора в координатах z^1, z^2, z^3 в той же точке.

Тензоры — это важнейший из классов величин, числовая запись которых меняется при изменении координат. Вектор — это простейший и наиболее наглядный пример тензора. Разумеется, тривиальным примером тензора является скаляр, который не меняется при замене координат.

Прежде чем вводить математически точное понятие тензора, мы рассмотрим другие примеры, с которыми нам уже приходилось многократно встречаться.

1. Градиент числовой функции. Как мы привыкли говорить и думать, градиент числовой функции $f(x^1, x^2, x^3)$ в декартовых координатах x^1, x^2, x^3 — это вектор с компонентами

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = (\xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Посмотрим, как выглядит градиент той же функции в других координатах z^1, z^2, z^3, где

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3) = x^i(z); \quad i = 1, 2, 3.$$

Имеем

$$\operatorname{grad} f(x^1(z), x^2(z), x^3(z)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \frac{\partial f}{\partial z^2}, \frac{\partial f}{\partial z^3}\right) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3);$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Итак, мы имеем ответ:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x^j}{\partial z^i} \xi_j; \tag{2}$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) — компоненты градиента в координатах (x^1, x^2, x^3), (η_1, η_2, η_3) — компоненты градиента в координатах (z^1, z^2, z^3).

Сравним теперь две формулы преобразования числовой записи для вектора скорости кривой и градиента функции.

$$\text{Вектор скорости: } \xi^i = \sum_{j=1}^{3} \eta^j \frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

$$\text{Градиент: } \eta_i = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i}.$$

Это — разные формулы!

Для сопоставления этих формул введем матрицу Якоби $A = (a_j^i)$, где $a_j^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}$, и транспонированную матрицу $A^{\mathrm{T}} = (b_k^j)$, где $b_k^j = a_j^k$.

Для векторов ξ и η мы перепишем формулы (1) и (2) в виде

$$\xi = A\eta \quad \text{(вектор скорости)}, \tag{1'}$$

$$\eta = A^{\mathrm{T}}\xi \quad \text{(градиент)}. \tag{2'}$$

Если матрица A^{T} имеет обратную $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$, то мы можем переписать формулу (2'):

$$\begin{gathered} (A^{\mathrm{T}})^{-1}\eta = (A^{\mathrm{T}})^{-1} A^{\mathrm{T}}\xi = \xi, \\ \xi = (A^{\mathrm{T}})^{-1}\eta \quad \left(\text{или } \xi_i = \sum_{j=1}^{3} \eta_j \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

В каком случае законы преобразования векторов скорости и градиентов функций при переходе от системы координат x к системе z совпадут?

Из формул (1), (2) и (3) мы получаем

$$\xi = A\eta \qquad \text{(вектор скорости)},$$

$$\xi = (A^{\mathrm{T}})^{-1}\eta \quad \text{(градиент функции)}.$$

Окончательный вывод состоит в том, что для совпадения формул преобразования (1) и (3) необходимо иметь равенство матриц

$$A = (A^{\top})^{-1} \quad \text{или} \quad A^{\top}A = 1,$$

т. е. $A = (a_j^i) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$ — ортогональная матрица (см. § 4). (Заметим в скобках, что замена координат $x = x(z)$ такая, что в каждой точке матрица Якоби $A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)$ ортогональна, является линейным ортогональным преобразованием $A = \text{const}$.)

Итак, градиент функции при заменах координат преобразуется иначе, чем вектор скорости. Это — другой вид тензора, который иногда называют «ковектором», в отличие от векторов скорости.

2. Риманова метрика. Как уже говорилось, в n-мерном пространстве или в области пространства метрические понятия (такие, как длины и углы) задаются с помощью набора функций $g_{ij}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, если заданы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$. Для длины кривой мы имели, по определению, формулу

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i \dot{x}^j}\, dt, \tag{4}$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и квадратичная форма $\sum g_{ij}\xi^i\xi^j$ положительна. Это — квадратичная форма, определенная на векторах типа «векторов скорости» в каждой данной точке $(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ и зависящая от точки. Мы называли g_{ij} римановой метрикой. При замене координат

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

формула длины кривой приобретает вид

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}(z(t))\, \dot{z}^i \dot{z}^j}\, dt,$$

где $x^i(t) = x^i(z^1(t), \ldots, z^n(t))$, причем закон преобразования компонент метрики имеет вид

$$\tilde{g}_{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}. \tag{5}$$

Итак, квадратичные формы на векторах преобразуются по закону (5). Это еще один вид тензора (называемый тензором 2-го ранга).

Итак, у нас имеются уже несколько типов тензоров:

а) скаляр (не преобразуется),

б) вектор (преобразуется по закону (1)),
в) ковектор (преобразуется по закону (2)),
г) риманова метрика (преобразуется по закону (5)).

Напомним, что риманова метрика (g_{ij}) в данных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ была нужна для того, чтобы определить понятие длины вектора в данной точке: если задан вектор $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в точке $x = (x^1, \ldots, x^n)$, то квадрат длины $|\xi|^2$ равен $\sum g_{ij}(x)\xi^i\xi^j$. В частности, это применялось к векторам скорости параметризованных кривых для определения длины кривой как интеграла от длины вектора скорости.

Закон преобразования (5) для компонент метрики при замене координат однозначно вытекает из закона (1) для компонент вектора и очевидного требования, чтобы длина кривой не зависела от того, в каких координатах производится ее вычисление. Фактически длина кривой есть интеграл по времени от длины вектора скорости. Следовательно, необходимо, чтобы квадрат длины вектора скорости

$$|\xi|^2 = \sum g_{ij}\xi^i\xi^j$$

не зависел от выбора координат. Из этого требования и из формул (1) для компонент вектора вытекает закон преобразования (5) для компонент метрики (g_{ij}).

3. Если мы хотим определить инвариантное понятие квадрата длины ковектора, преобразующегося по закону (2) (или (3)), то мы должны ввести компоненты $(g^{ij}(x))$ и положить

$$|\xi|^2 = \sum g^{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad \text{(в точке } x\text{)},$$
$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

При замене $x^i = x^i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, мы получим закон преобразования

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i}, \qquad \tilde{g}^{ij}(z) = \sum_{k,l=1}^{n} g^{kl} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l}, \tag{6}$$

и длина не будет зависеть от выбора координат:

$$|\eta|^2 = |\xi|^2 = \sum \tilde{g}^{ij}\eta_i\eta_j = \sum g^{ij}\xi_i\xi_j.$$

Здесь

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — запись ковектора в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ в точке (x).

$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — запись того же ковектора в той же точке, но в координатах $(z^1, \ldots, z^n)$.

Закон преобразования (6) дает еще один тип тензора (2-го ранга).

4. Наконец, следует разобрать еще один недостающий тип тензоров 2-го ранга — линейные операторы на векторах.

Предположим, что в каждой точке пространства с координатами $x^1, \ldots, x^n$ задана матрица $(a_j^i(x)) = A(x)$, которая определяет линейное преобразование векторов в каждой точке $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Это линейное преобразование $A(x)$ имеет вид $\eta = A\xi$, где

$$\eta^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(x)\,\xi^j; \tag{7}$$

здесь $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — вектор в точке x.

Та же самая матрица определяет линейное преобразование ковекторов по формуле $\eta = A\xi$, где

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \xi_i. \tag{8}$$

При замене координат $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$ из формул (1), (7) можно вывести, что компоненты матрицы A преобразуются по закону $A \to {}'A = ({}'a_j^i)$:

$${}'a_j^i = \sum \frac{\partial z^i}{\partial x^k} a_l^k \frac{\partial x^l}{\partial z^j}, \tag{9}$$

где $x^i = x^i(z)$, $z^j = z^j(x)$ и $z^i(x(z)) = z^i$; при этом

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Для ковектора мы можем переписать формулу (2) в виде

$$\xi_i = \sum \eta_j \frac{\partial z^j}{\partial x^i},$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial z^k} = \delta_k^j.$$

Соберем теперь в таблицу законы преобразования для вектора, ковектора и всех трех видов тензоров 2-го ранга.

Законы преобразования:

1. Скаляр (тензор 0-го ранга) не преобразуется.

Тензоры 1-го ранга:

2. Вектор $\xi = (\xi^i)$ (типа вектора скорости) преобразуется по формуле

$$\tilde{\xi}^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z^j}{\partial x^i} \xi^i.$$

3. Ковектор $\xi = (\xi_i)$ (типа градиента функции) преобразуется по формуле

$$\tilde{\xi}_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

Тензоры 2-го ранга:

4. Скалярное произведение векторов g_{ij} преобразуется по формуле

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{k,l} g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

5. Скалярное произведение ковекторов g^{ij} преобразуется по формуле

$$\tilde{g}^{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^l}.$$

6. Линейный оператор на векторах (ковекторах) $A = (a^i_j)$ преобразуется по формуле

$$\tilde{a}^i_j = \sum_{k,l} a^k_l \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \frac{\partial z^i}{\partial x^k}.$$

Здесь $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n)$, причем

$$z^j(x^1(z^1, \ldots, z^n), \ldots, x^n(z^1, \ldots, z^n)) = z^j;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta^i_j.$$

§ 17. Общее определение тензора

1. Закон преобразования компонент тензоров произвольного ранга. Итак, в предыдущем параграфе были разобраны тензоры 1-го ранга (векторы и ковекторы) и тензоры 2-го ранга (квадратичные формы на векторах g_{ij}, квадратичные формы на ковекторах g^{ij} и линейные преобразования — операторы a^i_j).

Теперь мы можем дать определение тензоров общего вида.

Определение 1. *Тензором (тензорным полем) типа* (p, q) *ранга* $p + q$ называется объект, задаваемый набором чисел $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$

в произвольной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$, числовая запись которого зависит от системы координат по следующему закону: если $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n)$; $z(x(z)) = z$, то имеет место формула

$$T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} = \sum_{(k),(l)} {}'T_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \frac{\partial z^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{l_q}}{\partial x^{j_q}}; \tag{1}$$

здесь ${}'T_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p}$ — числовая запись тензора в координатах (z) и $T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ — числовая запись тензора в координатах (x).

Индексы $(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q)$ и $(k_1, \ldots, k_p; l_1, \ldots, l_q)$ меняются от 1 до n (тензоры в n-мерном пространстве).

Таким образом:

вектор скорости — тензор типа (1, 0),

ковектор — тензор типа (0, 1),

квадратичная форма на векторах — тензор типа (0, 2),

квадратичная форма на ковекторах — тензор типа (2, 0),

линейный оператор на векторах или ковекторах — тензор типа (1, 1).

Теорема 1. *Компоненты* ${}'T_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p}$ *можно выразить через* $T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ *по формуле*

$${}'T_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p} = \sum_{(i)(j)} T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}}. \tag{2}$$

Доказательство. Используем соотношения

$$\sum_j \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial z^j}{\partial x^k} = \delta_k^i; \quad \sum_j \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial z^q} = \delta_q^k,$$

вытекающие из того факта, что преобразования $x = x(z)$ и $z = z(x)$ обратны друг другу:

$$x^i(z(x)) = x^i; \qquad z^q(x(z)) = z^q.$$

Рассмотрим соотношение (1) как линейное уравнение с правыми частями $T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ и неизвестными ${}'T_{l_1 \ldots l_q}^{k_1 \ldots k_p}$. Решая это уравнение, нужно получить (2).

В силу (1) имеет место формула

$$\sum_{i,j} T_j^i \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}} =$$

$$= \sum_{i,j} \left(\sum_{r,s} {}'T_s^r \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{r_p}} \frac{\partial z^{s_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{s_q}}{\partial x^{j_q}} \right) \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}} =$$

$$= \sum_{i,j,r,s} {}'T_s^r \frac{\partial x^i}{\partial z^r} \frac{\partial z^s}{\partial x^j} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z^l} = \sum_{r,s} {}'T_s^r \delta_l^s \delta_r^k \equiv {}'T_l^k;$$

здесь

$$i=(i_1, \ldots, i_p); \quad j=(j_1, \ldots, j_q);$$
$$l=(l_1, \ldots, l_q); \quad s=(s_1, \ldots, s_q);$$
$$k=(k_1, \ldots, k_p); \quad r=(r_1, \ldots, r_p).$$

Таким образом, приходим к соотношениям (2). Теорема доказана.

Перечислим простейшие свойства тензоров.

В любой заданной точке пространства тензоры образуют линейное пространство: если $T=\left(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ и $S=\left(S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ — тензоры типа (p, q), то их линейная комбинация $\lambda T+\mu S=U$ с компонентами $U^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\lambda T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}+\mu S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_p}$ тоже есть тензор типа (p, q) в той же самой точке. Важно отметить, что тензор — объект, прикрепленный к точке, и не существует никакого правила сложения тензоров, прикрепленных к разных точкам.

Размерность линейного пространства тензоров типа (p, q) (в точке) в n-мерном пространстве равна n^{p+q}. Если базисные координатные векторы в n-мерном пространстве с системой координат $x^1, \ldots, x^n$ обозначить через $e_1, \ldots, e_n$, а базисные ковекторы — через $e^1, \ldots, e^n$, то любой тензор формально удобно записать в таком виде:

вектор $\xi=\sum\limits_i \xi^i e_i$ $\left(\text{например, } \dfrac{dx}{dt}=\sum \dfrac{dx^i}{dt}e_i\right)$,

ковектор $\xi=\sum\limits_i \xi_i e^i$ $\left(\text{например, } \operatorname{grad} f=\sum \dfrac{\partial f}{\partial x^i}e^i\right)$,

квадратичная форма $(g)=\sum\limits_{i,j} g_{ij}e^i\otimes e^j$ (для векторов),

квадратичная форма $(g)=\sum\limits_{i,j} g^{ij}e_i\otimes e_j$ (для ковекторов),

линейный оператор $A=\sum\limits_{i,j} a^i_j e_i\otimes e^j$.

Любой тензор $T=\left(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\right)$ запишется так:

$$T=\sum_{i,j} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e_{i_1}\otimes \ldots \otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes \ldots e^{j_q}. \tag{3}$$

Существенно отметить, что в этой записи порядок индексов важен — нельзя поменять местами, вообще говоря, e_{i_1} и e_{i_2} и т. д.

Итак, базис в линейном пространстве тензоров типа (p, q) в данной точке пространства (x) имеет вид

$$e_{i_1}\otimes \ldots \otimes e_{i_p}\otimes e^{j_1}\otimes \ldots \otimes e^{j_q}, \tag{4}$$

где i, j независимо принимают значения $1, \ldots, n$; таким образом, базис состоит из n^{p+q} элементов. При замене координат $x^i=$

$= x^i(z^1, \ldots, z^n)$ мы переходим к другому базису в линейном пространстве тензоров, прикрепленных к данной точке,— к базису, связанному с координатными векторами системы z в данной точке.

Взаимное выражение в данной точке пространства этих базисов друг через друга происходит согласно формулам

$$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} =$$

$$= \sum_{k,l} \frac{\partial z'^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial z'^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z'^{l_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z'^{l_q}} e'_{k_1} \otimes \ldots \otimes e'_{k_p} \otimes e'^{l_1} \otimes \ldots \otimes e'^{l_q}. \tag{4'}$$

Разберем несколько примеров.

1. *Тензор напряжений* (трехмерный случай). В сплошной среде в каждой точке $x = (x^1, x^2, x^3)$ сила давления, действующая на малую площадку площади ΔS, ортогональную единичному вектору n, вычисляется как $(\Delta S) P(n)$, где P — линейный оператор: $P = (P^i_j)$. Тензор P^i_j называется тензором напряжений. Если $n = \sum_{j=1}^{3} n^j e_j$, то $P(n) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} n^j P^i_j \right) e_i$ или $\{P(n)\}^i = \sum_{j=1}^{3} n^j P^i_j$. Например, в случае применимости закона Паскаля $P^i_j = \delta^i_j p$, где p — число, называемое давлением в данной точке.

2. *Тензор деформации.* Если сплошная среда задана в координатах x^1, x^2, x^3 и задано смещение каждой точки среды

$$x^i \to x^i + u^i(x),$$

то говорят, что среда подверглась деформации. Если первоначально расстояние между близкими точками среды было, например, евклидово в координатах x^1, x^2, x^3:

$$(\Delta l)^2 = \sum (\Delta x^i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i - {}'x^i)^2,$$

то после деформации между теми же точками будет другое расстояние $(\Delta \bar{l})^2 = \sum |(x^i + u^i(x)) - {}'x^i - u^i({}'x)|^2$. Очевидно,

$$(\Delta \bar{l})^2 = (\Delta l)^2 + 2 \sum_{i=1}^{3} \Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{3} (\Delta u^i)^2,$$

$$\Delta x^i = x^i - {}'x^i,$$

$$\Delta u^i = u^i(x) - u^i({}'x) \approx \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \Delta x^j.$$

Поэтому при $\Delta x^i \to 0$

$$(d\bar{l})^2 = (dl)^2 + 2 \sum_{i,j} dx^i \, dx^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \sum_{k,l,i} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} dx^k \, dx^l.$$

При этом верно равенство

$$2\sum_{i,j}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\,dx^i\,dx^j=\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right)dx^i\,dx^j,$$

так как

$$\sum_{i,j}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\,dx^i\,dx^j=\sum_{i,j}\frac{\partial u^j}{\partial x^i}\,dx^i\,dx^j.$$

Определение 2. Разность $(d\bar{l})^2-(dl)^2=\sum_{i,j}\eta_{ij}dx^i\,dx^j+$ $+\sum_{k,l,i}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^l}\,dx^k\,dx^l$ называется тензором деформации среды. Здесь $\eta_{ij}=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}$.

Если u^i — малые смещения, то квадратичной частью по u^i пренебрегают. Получается *тензор малой деформации*

$$\eta_{ij}=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}.$$

Согласно закону Гука, малая деформация среды вызывает напряжение, линейно зависящее от деформации. Поэтому между тензорами напряжений и деформации должна быть линейная связь:

$$P=U(\eta).$$

Эта линейная связь является тензором 4-го ранга. В индексной записи: $P^i_j=\sum_{k,l}U^{ikl}_j\eta_{kl}$; здесь $P=(P^i_j)$, $\eta=(\eta_{kl})$, $U=(U^{ikl}_j)$. Тензор U^{ikl}_j 4-го ранга описывается 81 компонентой. Неужели действительно закон Гука в сплошной среде описывается 81 величиной?

Если координаты евклидовы, то мы можем (относительно ортогональных преобразований) не различать векторов и ковекторов — и вообще верхних и нижних индексов тензора — они преобразуются одинаково. Тензор $U=U^{ikl}_j$ в евклидовых координатах определяется 81 числом. Это число можно значительно уменьшить, введя гипотезу изотропности среды по направлениям. Она означает, что тензор U в каждой точке должен быть таким, что его числовая запись во всех координатах, отличающихся на вращения вокруг этой точки (включая отражения), одинакова, т. е. не меняется при ортогональных преобразованиях. Эта гипотеза выполнена в жидкостях, но в твердом теле верна далеко не всегда.

При наличии изотропности можно воспользоваться следующей важной теоремой, которую мы приводим без доказательства (поскольку речь идет об ортогональных преобразованиях, мы можем не делать различия между верхними и нижними индексами).

Теорема 2. *Класс тензоров 4-го ранга, инвариантных относительно ортогональных преобразований, определяется тремя параметрами* λ, μ, ν; *его составляют тензоры*

$$U_{ijkl} = \lambda\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{ij}\delta_{kl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}.$$

На языке переходов от двухиндексных тензоров η_{ij} к двухиндексным тензорам P_{ij} этот тензор описывается формулой

$$P_{ij} = \lambda\eta_{ij} + \mu(\mathrm{Sp}\,\eta)\delta_{ij} + \nu\eta_{ji},$$

где $\mathrm{Sp}\,\eta = \sum_i \eta_{ii}$. Если вспомнить, что рассматриваемые нами тензоры η и P симметричны, $\eta_{ji} = \eta_{ij}$ и $P_{ij} = P_{ji}$, то можно отбросить слагаемое с ν. Окончательный вывод: в изотропном веществе любой линейный закон связи между двумя физическими (симметричными) тензорами 2-го ранга, описываемый тензором 4-го ранга, зависит лишь от двух постоянных в каждой точке среды.

Естественно поставить вопрос, какими бывают изотропные тензоры 1-го, 2-го и 3-го ранга.

Очевидно, не бывает векторов и ковекторов, координаты которых не менялись бы при вращениях.

Что касается тензоров 2-го ранга, то тензор (η_{ij}) переходит при преобразовании $x \to x$, $y \to -y$ в тензор (η'_{ij}) с $\eta'_{11} = \eta_{11}$, $\eta'_{22} = \eta_{22}$, $\eta'_{12} = -\eta_{12}$, $\eta'_{21} = -\eta_{21}$, а при преобразовании $x \to y$, $y \to x$ в тензор (η''_{ij}) с $\eta''_{11} = \eta_{22}$, $\eta''_{22} = \eta_{11}$, $\eta''_{12} = \eta_{21}$, $\eta''_{21} = \eta_{12}$; равенства $\eta_{ij} = \eta'_{ij} = \eta''_{ij}$ показывают, что $\eta_{11} = \eta_{22}$, $\eta_{12} = \eta_{21} = 0$, т. е. что $\eta_{ij} = \lambda\delta_{ij}$. Таким образом, $\lambda\delta_{ij}$ — единственный изотропный тензор 2-го ранга.

Можно показать, что изотропных тензоров 3-го ранга не бывает.

Подчеркнем, что гипотеза изотропности предполагает наличие римановой метрики (мы формулировали ее для евклидовой метрики), в то время как понятие тензора не связано с метрикой — сама метрика есть разновидность тензора. Поэтому стоит посмотреть, какие тензоры инвариантны не только относительно вращений, но вообще относительно линейных преобразований. При этом уже важно различать верхние и нижние индексы.

Прежде всего ясно, что ненулевой тензор ранга (p, q) может быть инвариантным только при $p = q$: при подобном растяжении системы координат в $\lambda \neq 1$ раз все компоненты тензора умножатся на λ^{q-p}, что равно 1 только при $p - q = 0$. В частности, инвариантный тензор обязан иметь четный ранг. Среди тензоров 2-го ранга инвариантен только тензор $\eta^i_j = \lambda\delta^i_j$: это видно из того, что уже вращательно инвариантных тензоров 2-го ранга больше нет. Оказывается, что инвариантных тензоров 4-го ранга имеется двухпараметрическое семейство: $U^{ij}_{kl} = \lambda\delta^i_k\delta^j_l + \mu\delta^i_l\delta^j_k$.

2. Алгебраические операции над тензорами. Введем сначала следующие удобные обозначения. Пусть в системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ заданы компоненты $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ тензора типа (p, q). Пусть дана другая система координат $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ (штрихи мы ставим у индексов), причем

$$x^{k'} = x^{k'}(x^1, \ldots, x^n), \quad k' = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Компоненты нашего тензора в штрихованной системе координат обозначим через $T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q}$. Тогда закон преобразования (1) примет вид

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \sum_{(i),(j)} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} \tag{6}$$

или

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{(i')(j')} T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}. \tag{7}$$

Кроме того, введем следующее правило обращения с тензорами: если в формулу некоторый индекс входит дважды, то по этому индексу подразумевается суммирование от 1 до n (n — размерность пространства), а знак суммы $\sum$ можно не писать. Так, в формуле (6) будет производиться суммирование по дважды повторяющимся — сверху и снизу — индексам $i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q$; в формуле (7) дважды повторяются индексы $i'_1, \ldots, i'_p; j'_1, \ldots, j'_q$; индексы i_1 и i'_1 и т. д. считаются независимыми.

Использование этого правила, а также использование штрихованных индексов позволяет избежать ошибок при написании формул тензорного анализа.

Введем теперь три важнейшие алгебраические операции над тензорами. Определим их сначала в некоторой фиксированной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$.

1) Перестановка индексов. Пусть σ — некоторая перестановка чисел $(1, \ldots, q)$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & q \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(q) \end{pmatrix}$. Перестановка σ действует на наборах $(j_1, \ldots, j_q)$ по правилу

$$\sigma(j_1, \ldots, j_q) = (j_{\sigma(1)}, \ldots, j_{\sigma(q)}). \tag{8}$$

Мы будем говорить, что тензор $\widetilde{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ получается из тензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ перестановкой нижних индексов, если

$$\widetilde{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{\sigma(j_1, \ldots, j_q)}. \tag{9}$$

Перестановка верхних индексов определяется аналогично. Нельзя переставлять между собой нижний и верхний индексы — такая операция не инвариантна относительно замены координат.

2) Свертка (след). Для тензора $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ типа (p, q) его сверткой по индексам (i_k, j_l) будет тензор $\widetilde{T}^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}}$ типа $(p-1, q-1)$, определяемый формулой

$$\widetilde{T}^{i_1\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{q-1}} = T^{i_1\dots i_{k-1}\,i\,i_k\dots i_{p-1}}_{j_1\dots j_{l-1}\,i\,j_l\dots j_{q-1}} \tag{10}$$

(напомним, что по дважды входящему — сверху и снизу — индексу i производится суммирование от 1 до n). Например, свертка тензора T^i_j типа (1, 1) — это скаляр T^i_i (след $\operatorname{Sp} T$ линейного оператора T^i_j).

3) Умножение (тензорное). Если заданы два тензора $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ и $P^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}$ типов (p, q) и (k, l) соответственно, то их произведением будет тензор $S = T \otimes P$ типа $(p+k, q+l)$ с компонентами

$$S^{i_1\dots i_{p+k}}_{j_1\dots j_{q+l}} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} P^{i_{p+1}\dots i_{p+k}}_{j_{q+1}\dots j_{q+l}} \tag{11}$$

(порядок сомножителей существен). Заметим, что тензорное умножение ассоциативно.

Лемма 1. *В результате операций* 1), 2), 3) *получается снова тензор, причем результаты их применений не зависят от выбора системы координат.*

Доказательство. 1). Пусть σ переставляет между собой только индексы k и l:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & l & \dots & q \\ 1 & \dots & l & \dots & k & \dots & q \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\widetilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_k\dots j_l\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_l\dots j_k\dots j_q}. \tag{12}$$

При переходе к штрихованной системе координат будем иметь

$$\widetilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_l\dots j_k\dots j_q} =$$

$$= T^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_k}}{\partial x^{j_l}} \dots \frac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^{j_k}} \dots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}. \tag{13}$$

Изменим обозначение индексов в правой части: j'_k обозначим через j'_l, j'_l — через j'_k. Это не изменит всего выражения, так как по этим индексам производится суммирование. Тогда правая

часть формулы (13) примет вид

$$T'^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_l\dots j'_k\dots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{i_p}}\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial x'^{j_l}}{\partial x^{j_l}}\dots\frac{\partial x'^{j_k}}{\partial x^{j_k}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x'^{j_q}}=$$

$$=\widetilde{T}'^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{i_p}}\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial x'^{j_q}}{\partial x^{j_q}},$$

т. е. мы доказали, что $\widetilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — компоненты тензора типа (p, q).

2) Для тензора, свернутого по индексам i_k и j_l, будем иметь ($\widehat{i_k}$ и $\widehat{j_l}$ означает, что эти индексы пропущены)

$$\widetilde{T}'^{i'_1\dots\widehat{i_k}\dots i'_p}_{j'_1\dots\widehat{j_l}\dots j'_q}=T'^{i'_1\dots i'_p}_{j'_1\dots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{i_p}}\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial x'^{j_q}}{\partial x^{j_q}}\Bigg|_{i_k=j_l=i}=$$

$$=T'^{i'_1\dots l'_p}_{j'_1\dots j'_q}\delta'^{j'_l}_{i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{i_1}}\dots\frac{\partial\widehat{x}^{i_k}}{\partial x'^{i_k}}\dots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{i_p}}\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial\widehat{x}'^{j_l}}{\partial x^{j_l}}\dots\frac{\partial x'^{j_q}}{\partial x^{j_q}}=$$

$$=\widetilde{T}'^{i'_1\dots\widehat{i_k}\dots i'_p}_{j'_1\dots\widehat{j_l}\dots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{i_1}}\dots\frac{\partial\widehat{x}^{i_k}}{\partial x'^{i_k}}\dots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x'^{i_p}}\frac{\partial x'^{j_1}}{\partial x^{j_1}}\dots\frac{\partial\widehat{x}'^{j_l}}{\partial x^{j_l}}\dots\frac{\partial x'^{j_q}}{\partial x^{j_q}},$$

где мы воспользовались равенством $\dfrac{\partial x^i}{\partial x'^{i_k}}\dfrac{\partial x'^{j_l}}{\partial x^i}=\delta'^{j_l}_{i_k}$. Тензорность произведения (11) очевидна. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь примеры применения построенных операций.

Примеры. 1. Пусть даны вектор ξ^i и ковектор η_j. Можно составить их произведение — тензор $T^i_j=\xi^i\eta_j$ типа (1, 1) и его след $T^i_i=\xi^i\eta_i$. Последний представляет собой скаляр — *скалярное произведение вектора и ковектора.*

2. Если даны вектор ξ^i и линейный оператор A^k_l, то их произведение $T^{ik}_l=A^k_l\xi^i$ есть тензор типа (2, 1). Свертка

$$\eta^k=T^{ik}_i=A^k_i\xi^i$$

есть снова вектор — результат применения оператора A^k_l к исходному вектору ξ^i.

Замечание. Используя введенное скалярное произведение векторов и ковекторов, отнесем каждому вектору ξ^i линейный дифференциальный оператор первого порядка на функциях; так

как $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ — ковектор (градиент функции), то выражение

$$\partial_\xi f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{14}$$

будет скаляром (производная функции по направлению ξ). В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве векторов, где координаты вектора e_k равны $(e_k)^i = \delta^i_k$, то из формулы (14) получаем, что

$$\partial_{e_k}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{15}$$

Поэтому при нашем соответствии базисные векторные поля переходят в операторы $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Таким образом, вектору ξ соответствует дифференциальный оператор

$$\partial_\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{16}$$

Задачи. 1. Проверить, что перестановка верхнего и нижнего индексов $T^{\ldots i_k \ldots}_{\ldots j_l \ldots} \to T^{\ldots j_l \ldots}_{\ldots i_k \ldots}$ не есть тензорная операция. (Привести пример.)

2. Тензор 2-го ранга называется невырожденным, если соответствующая матрица невырождена. Показать, что для невырожденного тензора 2-го ранга обратная матрица также будет тензором.

§ 18. Тензоры типа $(0, k)$

1. Дифференциальная форма записи тензоров с нижними индексами. Рассмотрим для начала случай тензоров типа (0, 1) — ковекторов. Выше мы имели пример ковектора — градиент функции $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Напомним, что в анализе дифференциалом функции называлось выражение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{1}$$

Если задана замена $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, то

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{2}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) dx^{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{3}$$

т. е. выражение df инвариантно относительно замен координат.

Аналогично, если мы любому ковектору T_i поставим в соответствие выражение $T_i dx^i$ (дифференциальную форму), то это выражение будет инвариантно относительно замены координат.

Что такое символы dx^i? Базисные ковекторные поля e^i преобразуются по закону

$$e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'}, \quad T_i e^i = T_{i'} e^{i'}. \tag{4}$$

Последнее равенство означает просто, что T_i (соответственно $T_{i'}$) — координаты ковектора в базисе $e^1, \ldots, e^n$ (соответственно $e^{1'}, \ldots, e^{n'}$).

Мы видим, что базисные ковекторы e^i преобразуются по тому же закону, что и dx^i:

$$e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'} \leftrightarrow dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{5}$$

$$e^i \leftrightarrow dx^i, \quad e^{i'} \leftrightarrow dx^{i'}.$$

Можно сказать, что символы dx^i — это базисные ковекторы e^i. Дифференциальная форма $T_i dx^i$ соответствует разложению $T_i e^i$ ковектора по базису. Мы видели в предыдущем параграфе, что любой ковектор — это линейная форма на векторах. В частности, значение линейной формы $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ на векторе $\Delta\xi = \Delta x^i e_i$ равно по определению

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \Delta\xi\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i. \tag{6}$$

Это выражение называется, как известно, главной линейной частью приращения функции f при сдвиге вдоль вектора $\Delta\xi$.

Рассмотрим второй важный случай — тензоры типа (0, 2). Базис в пространстве таких тензоров составляют произведения

$$e^i \otimes e^j. \tag{7}$$

Разложение любого тензора T_{ij} по базису (7) имеет вид

$$T_{ij} e^i \otimes e^j. \tag{8}$$

Тензор T_{ij} — это билинейная форма на векторах. Действительно, если ξ^i, η^j — два вектора, то выражение

$$T_{ij} \xi^i \eta^j \tag{9}$$

есть скаляр — значение билинейной формы T на векторах ξ, η.

Любой тензор типа (0, 2) распадается в сумму симметрического и кососимметрического ($T_{ji} = -T_{ij}$). Это очевидно из сле-

дующего тождества:

$$T_{ij} = T_{ij}^{\mathrm{sym}} + T_{ij}^{\mathrm{alt}},$$
$$T_{ij}^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}); \quad T_{ij}^{\mathrm{alt}} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \tag{10}$$

Из формул (10) получаем базис в пространстве симметрических тензоров

$$\frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}, \quad i \leqslant j, \tag{11}$$

и в пространстве кососимметрических тензоров

$$e^i \wedge e^j = e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i, \quad i < j. \tag{12}$$

Если тензор T_{ij} симметрический, то его разложение по базису (11) имеет вид

$$T_{ij}e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij}e^i \otimes e^j + \sum_{i>j} T_{ij}e^i \otimes e^j =$$
$$= \sum_i T_{ii}e^i \otimes e^i + \sum_{i<j} 2T_{ij}\left(\frac{e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i}{2}\right). \tag{13}$$

Если тензор T_{ij} кососимметрический, то его разложение по базису (12) имеет вид

$$T_{ij}e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij}e^i \otimes e^j + \sum_{i>j} T_{ij}e^i \otimes e^j = \sum_{i<j} T_{ij}\, e^i \wedge e^j. \tag{14}$$

В дифференциальной форме базис (11) записывается в виде $dx^i dx^j = dx^j dx^i$, базис (12) записывается в виде $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

Пример. Риманова метрика g_{ij} — пример симметрического тензора типа (0, 2). Его разложение по базису $dx^i dx^j$ имеет вид

$$g_{ij}dx^i dx^j. \tag{15}$$

Это — известная формула для квадрата элемента длины dl^2.

2. Кососимметрические тензоры типа (0, k).

Определение 1. Кососимметрическим тензором (типа (0, k)) называется тензор $T_{i_1,\ldots,i_k}$ такой, что

$$T_{\sigma(i_1,\ldots,i_k)} = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\, T_{i_1\ldots i_k}. \tag{16}$$

Здесь $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$ — знак перестановки σ, действие перестановки σ на набор $(i_1, \ldots, i_k)$ определено формулой (8) § 17. Это определение не зависит от выбора системы координат ввиду тензорного характера операции перестановки индексов. Таким образом, тензор $T_{i_1\ldots i_k}$ меняет знак при любой нечетной перестановке индексов и сохраняет свое значение при четной перестановке индексов.

Замечание. Если ранг k больше размерности пространства n, то кососимметрический тензор $T_{i_1\ldots i_k}$ тождественно равен нулю (обязательно будет пара совпадающих индексов).

Для кососимметрических тензоров мы будем в целях удобства использовать язык дифференциальных форм. Базис в пространстве таких тензоров состоит из элементов

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < \ldots < i_k, \tag{17}$$

где

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, e^{\sigma(i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k)} \tag{18}$$

(суммирование по всем перестановкам индексов). Как и в предыдущем пункте, мы получим для кососимметрического тензора $T_{i_1\ldots i_k}$ соответствующую дифференциальную форму

$$T_{i_1\ldots i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{19}$$

Выражение $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ кососимметрично относительно перестановок индексов:

$$dx^{\sigma(i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{20}$$

Пример. Рассмотрим кососимметрические тензоры типа $(0, n)$ в n-мерном пространстве. Каждый такой тензор $T_{i_1\ldots i_n}$ определяется одним числом $T_{1\,2\ldots n}$. Действительно,

$$T_{\sigma(1,\ldots,n)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, T_{1\,2\ldots n}, \tag{21}$$

а если среди индексов $i_1, \ldots, i_n$ есть хотя бы два совпадающих, то компонента $T_{i_1\ldots i_n}$ равна нулю. Таким образом, мы имеем единственный базисный тензор — это $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Компоненты этого тензора в физической литературе обозначаются $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$. Ясно, что компонента $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ отлична от нуля, лишь если среди индексов $i_1 \ldots i_n$ нет повторяющихся; тогда

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_n) = +1, \\ -1 & \text{при} \quad \operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_n) = -1. \end{cases} \tag{22}$$

Очевидно, $T_{i_1\ldots i_n} = T_{1\,2\ldots n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$.

Как преобразуются кососимметрические тензоры n-го ранга при замене координат?

Теорема 1. *Кососимметрические тензоры ранга, равного размерности пространства, при замене координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ преобразуются по закону*

$$T_{1\,2\ldots n} = T_{1'2'\ldots n'} J, \tag{23}$$

где $J = \det\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ — *якобиан замены.*

Доказательство. Проверим формулу (23) для базисного тензора $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$. Имеем

$$\varepsilon_{12\dots n} = \varepsilon'_{i_1\dots i_n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{i_n}} = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{\partial x^{\sigma(i_1,}}{\partial x^1}\dots\frac{\partial x^{i_n)}}{\partial x^n}.$$

Эта формула и есть определение детерминанта J.

Пример. Пусть тензор g_{ij} типа (0, 2) является невырожденной квадратичной формой и $g = \det(g_{ij})$. При замене координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$ матрица g_{ij} преобразуется по закону

$$g_{i'j'} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

или, в матричной форме, $G' = A^{\top}GA$, где $A = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$, $G = (g_{ij})$, $G' = (g_{i'j'})$. Поэтому определитель $g = \det G$ преобразуется по закону

$$g' = \det G' = \det(A^{\top}GA) = (\det A)^2\det G. \tag{24}$$

Следовательно, $\sqrt{|g'|} = \sqrt{|g|}\,|\det A|$. Таким образом, доказано

Следствие. *Выражение* $\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$ *является тензором относительно таких замен координат, что* $J = \det A = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) > 0$.

Форма $\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$ называется *элементом объема*, задаваемым метрикой g_{ij}.

Комплексный случай. Если задано *комплексное* пространство с координатами $z^1, \dots, z^n$; $\bar z^1, \dots, \bar z^n$, где $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$, $\bar z^\alpha = x^\alpha - iy^\alpha$, то дифференциальные формы можно записывать в виде

$$T = \sum T^{(p,q)}, \quad p+q = k,$$

где слагаемые

$$T^{(p,q)} = \sum_{\substack{i_1<\dots<i_p\\ j_1<\dots<j_q}} T_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}dz^{i_1}\wedge\dots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar z^{j_1}\wedge\dots\wedge d\bar z^{j_q} \tag{25}$$

называются «формами типа (p, q)».

Например, пусть задана форма вида

$$\Omega = T_{\alpha\beta}dz^\alpha\wedge d\bar z^\beta,$$

где $T_{\beta\alpha} = -\overline{T}_{\alpha\beta}$. Тогда матрица $(iT_{\alpha\beta})$ удовлетворяет условию

$$iT_{\beta\alpha} = \overline{iT_{\alpha\beta}}$$

и является матрицей эрмитовой формы $\sum iT_{\alpha\beta}dz^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}$. Таким образом, в комплексном случае эрмитова метрика задается формой типа (1, 1).

3. Внешнее произведение дифференциальных форм. Внешняя алгебра. В качестве приложения введенных в § 17 алгебраических операций над тензорами определим внешнее произведение двух кососимметрических тензоров типа $(0, p)$ и типа $(0, q)$ (дифференциальных форм ранга p и q соответственно). Пусть

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sum_{i_1<\ldots<i_p} T_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},\\ \omega_2 &= \sum_{j_1<\ldots<j_q} S_{j_1\ldots j_q}dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.\end{aligned} \tag{26}$$

Определим форму ω ранга $p+q$:

$$\omega = \omega_1\wedge\omega_2 = \sum_{k_1<\ldots<k_{p+q}} R_{k_1\ldots k_{p+q}}dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_{p+q}}, \tag{27}$$

полагая

$$R_{k_1\ldots k_{p+q}} = \sum_{\sigma\in S_{p+q}} \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{p!q!}T_{\sigma(k_1\ldots k_p}S_{k_{p+1}\ldots k_{p+q})}. \tag{28}$$

Величины $R_{k_1\ldots k_{p+q}}$ образуют тензор, получаемый из тензоров $T_{i_1\ldots i_p}$, $S_{j_1\ldots j_q}$ комбинацией операций тензорного произведения и перестановки индексов. Этот тензор кососимметричен по построению, и определение (28) не зависит от выбора координат.

Лемма 1. *Внешнее умножение дифференциальных форм — билинейная ассоциативная операция, причем*

$$\omega_2\wedge\omega_1 = (-1)^{pq}\omega_1\wedge\omega_2, \tag{29}$$

если ω_1 *— форма ранга* p, ω_2 *— форма ранга* q.

Доказательство. Билинейность очевидна; ассоциативность проверяется непосредственно из формулы (28). Формула (29) вытекает из того, что знак перестановки

$$\begin{pmatrix}1 & \ldots & q & q+1 & \ldots & p+q\\ p+1 & \ldots & p+q & 1 & \ldots & p\end{pmatrix}$$

равен $(-1)^{pq}$ (проверьте!). Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно проверить, что для базисных форм $\omega_1 = dx^i$, $\omega_2 = dx^j$ внешнее произведение (28) совпадает с определенным в п. 2 символом $dx^i\wedge dx^j$. Вообще, если $\omega_1 = dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$, $\omega_2 = dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}$, то

$$\omega_1\wedge\omega_2 = dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}. \tag{30}$$

Внешнее произведение задает в пространстве форм в данной точке структуру *внешней алгебры.*

4. Кососимметрические тензоры типа (k, 0) (поливекторы). Интеграл от антикоммутирующих переменных. Кососимметрические тензоры с верхними индексами часто называют *поливекторами.* Для их описания также удобно использовать язык внешней алгебры. Если $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис векторов, то задается базис кососимметрических тензоров типа (k, 0) — поливекторов — аналогично (17), (18), $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$, где свертка с базисными формами такова ($e^j \leftrightarrow dx^j$):

$$\left(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k},\ e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_k}\right) = \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_k}_{i_k}, \tag{31}$$

$j_1 < \ldots < j_k$. В полной аналогии с тензорами типа (0, k) поливекторы образуют внешнюю алгебру, натянутую на символы $e_1, \ldots, e_n$. Аналогично теореме 1 устанавливается следующая

Теорема 2. *При замене координат верна формула*

$$T^{12\ldots n} = J^{-1} T^{1'2'\ldots n'}, \tag{32}$$

где $J = \det\left(\partial x^{i'}/\partial x^j\right)$ — *якобиан замены.*

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 1.

Следуя современной литературе по квантовой теории поля, введем «интеграл от антикоммутирующих переменных» $\theta_1, \ldots, \theta_n$:

$$\int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} f(\theta_1, \ldots, \theta_n)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n; \tag{33}$$

здесь считается, что $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — полином во внешней алгебре с образующими $\theta_1, \ldots, \theta_n$, интеграл берется только по всему пространству (не по области!). При линейных заменах в θ-пространстве величина $d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$ по определению преобразуется так:

$$d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n = J^{-1} d\theta'_1 \wedge \ldots \wedge d\theta'_n, \tag{34}$$

где $J = \det\left(\partial\theta_i/\partial\theta'_j\right)$ — обычное число. Правила интегрирования по определению таковы:

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_j d\theta_j = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} d\theta_j = 0, \tag{35}$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(\theta_1) \wedge g(\theta_2)\, d\theta_1 \wedge d\theta_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} f(\theta_1)\, d\theta_1\right) \wedge \left(\int_{\mathbb{R}} g(\theta_2)\, d\theta_2\right) \tag{36}$$

(остальные правила самоочевидны), где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — произвольный набор внешних образующих. Из формул (31), (32) вытекает вывод: после сопоставления $d\theta_j \to e_j$, $\theta_j \to e^j$ величина $d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$ сведется к базисному поливектору — тензору типа (n, 0), старший член коэффициента $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ — к тензору

типа $(0, n)$, а «интеграл» — это их обычная свертка. Таким образом, интеграл от антикоммутирующих переменных — это обычная свертка тензоров, записанных в формализме Картана внешних алгебр как для форм, так и для поливекторов. Полезность этой интерпретации определяется следующим фактом.

Задача. Пусть $f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \exp\left(\frac{1}{i2} a^{ij}\theta_i \wedge \theta_j\right)$, $a^{ji} = -a^{ij}$. Доказать формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ldots \int f(\theta_1, \ldots, \theta_n)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n = \sqrt{\det(a^{ij})}. \qquad (37)$$

Выражение (33) на пространстве $\mathbb{R}^n$ дает тензор типа (n, n), кососимметрический отдельно по нижним и отдельно по верхним индексам. Такой тензор есть скаляр в $\mathbb{R}^n$.

Замена $\theta(\theta')$ в интеграле (33) может быть и нелинейной. Требуется только, чтобы она сохраняла, как говорят, $\mathbb{Z}_2$-градуировку, т. е. полиномы $\theta(\theta')$ должны быть линейной комбинацией выражений нечетной степени во внешней алгебре.

Пример. Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $f(\theta) = \theta_1$. Тогда по определению имеем

$$\int f(\theta)\, d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 = 0.$$

Рассмотрим такую замену:

$$\theta_1 = \theta_1' + \theta_1' \wedge \theta_2' \wedge \theta_3', \quad \theta_2 = \theta_2', \quad \theta_3 = \theta_3'.$$

Напишем матрицу Якоби этой замены (точные определения см. ниже):

$$\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j'}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \theta_2' \wedge \theta_3' & -\theta_1' \wedge \theta_3' & \theta_1' \wedge \theta_2' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якобиан $J = \det(\partial\theta_i/\partial\theta_j')$ имеет вид $J = 1 + \theta_2' \wedge \theta_3'$; $J^{-1} = 1 - \theta_2' \wedge \theta_3'$. Проверьте следующее тождество:

$$\int f(\theta(\theta'))\, J^{-1}\, d\theta_1' \wedge d\theta_2' \wedge d\theta_3' = 0.$$

Более общо, если

$$\theta_i = a_{ij}(\theta_1', \ldots, \widehat{\theta_j'}, \ldots, \theta_n') + \theta_j' \wedge b_{ij}(\theta_1', \ldots, \widehat{\theta_j'}, \ldots, \theta_n'),$$

то мы полагаем

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j'} = b_{ij}(\theta_1', \ldots, \widehat{\theta_j'}, \ldots, \theta_n').$$

Очевидно, при $\mathbb{Z}_2$-градуированных заменах элементы матрицы Якоби коммутируют.

Задача. Докажите следующую формулу замены переменных:

$$\int f(\theta(\theta'))\, J^{-1}\, d\theta'_1 \wedge \ldots \wedge d\theta'_n = \int f(\theta)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n, \quad (38)$$

где $J = \det(\partial\theta_i/\partial\theta'_j)$.

Указание. Если $f(\theta)$ — одночлен старшей степени, то формула (38) очевидна. Требует отдельного анализа то, что младшие члены, содержащиеся в полиноме $f(\theta)$, дадут нулевой вклад после замены, как показывает пример выше.

Задачи. 1. Пусть $\omega^j = a^j_i dx^i$. Доказать формулу

$$\omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k} = J^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k},$$

где $J^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ — минор матрицы (a^j_i), стоящий на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$. В частности,

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n = \det(a^j_i)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

2. Найти размерность пространства k-форм (в данной точке).

3. Доказать, что $\sum\limits_k a^j_{i_k} \varepsilon_{i_1 \ldots i_{k-1} i i_{k+1} \ldots i_n} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \operatorname{Sp}(a^j_i)$, где $\operatorname{Sp}(a^j_i) = a^i_i$ — след матрицы.

§ 19. Тензоры в римановом и псевдоримановом пространстве

1. Поднятие и опускание индексов. Пусть g_{ij} — тензор типа (0, 2), задающий риманову или псевдоримапову метрику. Напомним, что если заданы два вектора ξ^i, η^j, то можно определить их скалярное произведение, положив

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^i \eta^j g_{ij}. \quad (1)$$

(Мы использовали здесь операцию тензорного произведения и свертки.)

Аналогично, если g^{ij} — тензор типа (2, 0), то он задает скалярное произведение ковекторов ξ_j, η_i по формуле

$$\langle \xi, \eta \rangle = g^{ij} \xi_j \eta_i. \quad (2)$$

В присутствии метрики g_{ij} можно определить весьма важную операцию опускания индексов. Если $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — тензор типа (p, q), то можно построить тензор $T^{i_2 \ldots i_p}_{i_1 j_1 \ldots j_q}$ типа $(p-1, q+1)$, полагая

$$T^{i_2 \ldots i_p}_{i_1 j_1 \ldots j_q} = g_{i_1 k} T^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}. \quad (3)$$

Легко видеть, что это снова тензор (итерация операций умножения на тензор g_{ij} и свертки).

Переход от тензора $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ к тензору $T^{i_2\dots i_p}_{i_1 j_1\dots j_q}$ называется *опусканием индекса* i_1 с помощью метрики g_{ij}.

Пример. Если ξ^i — вектор, то после опускания индекса мы получим ковектор

$$\xi_i = g_{ij}\xi^j. \tag{4}$$

Таким образом, опускание индексов задает линейное отображение пространства векторов в пространство ковекторов. Это соответствие можно описать следующим образом: если $\langle , \rangle$ — соответствующее g_{ij} скалярное произведение, то вектору η соответствует линейная форма (ковектор), принимающая на векторе ξ значение $\langle \xi, \eta\rangle$.

Наоборот, для поднятия нижних индексов при наличии метрики g_{ij} необходимо рассмотреть обратную метрику, т. е. такую матрицу g^{ij}, что

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k \tag{5}$$

(напомним, что $\det(g_{ij}) \neq 0$).

По определению имеем

$$T^{j_1 i_1\dots i_p}_{j_2\dots j_q} = g^{j_1 h}T^{i_1\dots i_p}_{h j_2\dots j_q}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Если мы опустим индекс, а потом поднимем, то получим исходный тензор.*

Доказательство. Опустив у тензора $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ индекс i_1, получим тензор $g_{i_1 h}T^{h i_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$. Подняв после этого индекс i_1, получим тензор

$$g^{i_1 l}g_{lh}T^{h i_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \delta^{i_1}_h T^{h i_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q},$$

совпадающий с исходным. Лемма доказана.

Матрица g^{ij} задает скалярное произведение ковекторов, как мы видели выше. Таким образом, заданием метрики g_{ij} мы определили и скалярное произведение ковекторов g^{ij}. Это скалярное произведение на ковекторах однозначно определяется требованием, чтобы после операции поднятия индексов мы получили то же скалярное произведение, что и для векторов. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. *Верно следующее равенство: для пары векторов* $\xi = (\xi^i)$, $\eta = (\eta^i)$ *и соответствующей пары ковекторов* $\widehat{\xi} = (\widehat{\xi}_i) = (g_{ij}\xi^j)$, $\widehat{\eta} = (\widehat{\eta}_i) = (g_{ij}\eta^j)$ *их скалярные произведения совпадают:* $\langle \widehat{\xi}, \widehat{\eta}\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$.

Доказательство. Так как $\langle \xi, \eta\rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$ и $\langle \widehat{\xi}, \widehat{\eta}\rangle = g^{ij}\widehat{\xi}_j\widehat{\eta}_i$, то

$$\langle \widehat{\xi}, \widehat{\eta}\rangle = g^{ij}\widehat{\xi}_j\widehat{\eta}_i = g^{ij}g_{jk}\xi^k g_{il}\eta^l = \delta^i_k\xi^k g_{il}\eta^l = \xi^i g_{ik}\eta^k = \langle \xi, \eta\rangle.$$

Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно видеть, что пока мы использовали только невырожденность тензора g_{ij}, $g = \det(g_{ij}) \neq 0$; положительная определенность (и даже симметричность) в предыдущих утверждениях и формулах роли не играли. В гл. 5 мы будем проводить аналогичные конструкции для кососимметрической метрики в связи с гамильтоновым формализмом.

2. Собственные значения квадратичной формы. Пусть задан линейный оператор T_i^j — тензор типа (1, 1). Если нет метрики, то не имеет смысла говорить о симметричности или косой симметричности этого тензора, так как нельзя переставлять между собой индексы i и j.

Если же имеется метрика g_{ij}, то можно опустить индекс: $T_{ij} = g_{ik}T_j^k$; мы получим при этом тензор типа (0, 2), определяющий билинейную форму $\{,\}_T$ от двух векторов. Если $\langle,\rangle$ — скалярное произведение, соответствующее метрике g_{ij}, то эта билинейная форма имеет вид

$$\{\xi, \eta\}_T = \langle \xi, T\eta \rangle = \xi^i g_{ij} T_k^j \eta^k, \tag{7}$$

$$\xi = (\xi^i), \quad \eta = (\eta^i).$$

Определение 1. Говорят, что линейный оператор T_i^j в пространстве с метрикой g_{ij} *симметричен* (*кососимметричен*), если билинейная форма $T_{ij} = g_{ik}T_j^k$ симметрична, $T_{ji} = T_{ij}$ (кососимметрична, $T_{ji} = -T_{ij}$).

Теорема 1. *Линейный оператор $T = (T_j^i)$ в пространстве с римановой или псевдоримановой метрикой g_{ij} симметричен или кососимметричен в том и только в том случае, если для любых векторов $\xi = (\xi^i)$, $\eta = (\eta^i)$ выполняется соотношение*

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle \quad (\textit{симметричность}), \tag{8}$$

$$\langle T\xi, \eta \rangle = -\langle \xi, T\eta \rangle \quad (\textit{косая симметричность}). \tag{9}$$

Теорема является очевидным следствием формулы (7).

Пусть теперь в римановом или псевдоримановом пространстве задана симметрическая билинейная форма T_{ij}. Тогда, подняв индекс, можно рассмотреть оператор $T_j^i = g^{ik}T_{kj}$.

Определение 2. Собственные значения оператора $T_j^i = g^{ik}T_{kj}$ называются *собственными значениями квадратичной формы T_{ij} в метрике g_{ij}*.

Если λ — собственное значение оператора T_j^i, ξ^i — соответствующий собственный вектор, то по определению имеем

$$T_j^i \xi^j = \lambda \xi^i \Leftrightarrow g^{ik}T_{kj}\xi^j = \lambda \xi^i. \tag{10}$$

Тем самым собственный вектор ξ^i есть решение системы уравнений

$$T_{kj}\xi^j = \lambda g_{ki}\xi^i, \qquad k = 1, \ldots, n \tag{11}$$

(ср. систему (10)).

След $\operatorname{Sp} T_j^i$ и детерминант $\det T_j^i$ линейного оператора $T_j^i = g^{ik}T_{kj}$ являются метрическими инвариантами формы T_{ij} (т. е. инвариантами, зависящими от метрики). В частности, след имеет вид

$$T_i^i = g^{ik}T_{ik}. \tag{12}$$

Пример. На поверхности $r = r(u, v)$, $r = (x, y, z)$, в пространстве $\mathbb{R}^3$ возникало две квадратичные формы ($x^1 = u$, $x^2 = v$):

1) метрика $g_{ij}dx^i dx^j$ — тензор g_{ij};

2) вторая квадратичная форма $b_{ij}dx^i dx^j$ — тензор b_{ij} (здесь суммирование проводится по повторяющимся индексам от 1 до 2, так как поверхность двумерна).

В § 8 были получены формулы:

$$\text{гауссова кривизна } K = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})},$$

$$\text{средняя кривизна } H = b_i^i = g^{ij}b_{ij}.$$

Таким образом, средняя кривизна — это след двумерного тензора b_{ij} в присутствии метрики g_{ij}. Для гауссовой кривизны имеем

$$K = (\det(g_{ij}))^{-1}\det(b_{ij}) = \det\left(g^{ik}b_{kj}\right) = \det\left(b_j^i\right).$$

Тем самым гауссова кривизна также есть метрический инвариант второй квадратичной формы.

3. Оператор *. В присутствии метрики g_{ij} можно задать операцию $*$ отождествления кососимметрических тензоров типа $(0, k)$ и $(0, n-k)$.

Определение 3. Если $T_{i_1\dots i_k}$ — кососимметрический тензор типа $(0, k)$, то через $*T$ будет обозначаться кососимметрический тензор типа $(0, n-k)$, задаваемый формулой

$$(*T)_{i_{k+1}\dots i_n} = \frac{1}{k!}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n}T^{i_1\dots i_k}, \tag{13}$$

где $T^{i_1\dots i_k}$ — соответствующий тензору $T_{i_1\dots i_k}$ тензор типа $(k, 0)$:

$$T^{i_1\dots i_k} = g^{i_1j_1}\dots g^{i_kj_k}T_{j_1\dots j_k}. \tag{14}$$

Мы видели в п. 2 § 18, что $\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ в n-мерном пространстве есть тензор относительно замен координат с положительным якобианом. Поэтому $*T$ будет тензором относительно таких замен, а его косая симметричность очевидна.

Замечание. Имеет место формула (проверьте)

$$*(*T) = (-1)^{k(n-k)}\operatorname{sgn}(g)\,T. \tag{15}$$

4. Тензоры в евклидовом пространстве. В евклидовом пространстве метрика g_{ij} в евклидовых координатах имеет вид $g_{ij} =$

$= \delta_{ij}$. Поэтому при опускании (поднятии) индексов компоненты любого тензора не меняются:

$$T^{i_2 \ldots i_p}_{i_1 j_1 \ldots j_q} = \delta_{i_1 i} T^{i i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}. \tag{16}$$

Таким образом, в евклидовых координатах нет различия между верхними и нижними индексами; все индексы, например, можно считать нижними. Такая запись будет инвариантна относительно замен, сохраняющих евклидову метрику, т. е. относительно ортогональных преобразований и трансляций.

В частности, в евклидовых координатах матрица оператора и матрица соответствующей ему квадратичной формы совпадают. Набор компонент градиента преобразуется как вектор при движениях евклидова пространства и т. д.

Рассмотрим для случая трехмерного евклидова пространства с евклидовыми координатами x, y, z действие оператора $*$:

$$* dx = dy \wedge dz, \quad * dy = -dx \wedge dz, \quad * dz = dx \wedge dy$$

(проверьте). Любая 1-форма (ковектор) имеет вид $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dx$. Для такой формы

$$* \omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy,$$

$$* (* \omega) = \omega.$$

Если f — скаляр, то $* f = f\,dx \wedge dy \wedge dz$ — форма 3-го ранга и $* (f\,dx \wedge dy \wedge dz) = f$.

Задачи. 1. Пусть $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — рассматривавшийся выше (см. п. 2 § 18) кососимметрический тензор в трехмерном евклидовом пространстве. Доказать следующие формулы:

а) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}$,

б) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}$,

в) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}$,

г) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 6$

(везде суммирование по повторяющимся индексам подразумевается); $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

2. Пусть

$$\omega_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} T_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2 = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} S_{j_1 \ldots j_p} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}.$$

Положим $\{\omega_1, \omega_2\} = \frac{1}{p!} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p} T_{i_1 \ldots i_p} S_{j_1 \ldots j_p}$. Доказать, что $\omega_1 \wedge * \omega_2 = \{\omega_1, \omega_h\} \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

§ 20. Кристаллографические группы и конечные подгруппы группы вращений плоскости и пространства. Примеры инвариантных тензоров

В этом параграфе мы познакомимся с кристаллографическими группами. Затем мы классифицируем конечные подгруппы в ортогональных группах $O(2)$ и $O(3)$.

Мы будем рассматривать кристаллическую структуру, целиком заполняющую все трехмерное евклидово пространство, или же евклидову плоскость (плоская структура). Одна из стандартных моделей кристалла следующая: считается, что кристалл состоит из нескольких сортов атомов, жестко закрепленных в пространстве (или на плоскости) и расположенных друг относительно друга строго определенным образом.

Определение 1. *Решеткой кристалла* называется совокупность всех атомов кристалла.

Мы резко сузим класс рассматриваемых решеток и ограничимся трансляционно инвариантными решетками, к определению которых мы сейчас перейдем. Именно такие решетки соответствуют большинству реальных физических кристаллов (в некотором приближении). Мы будем считать, что решетка кристалла всегда содержит некоторое подмножество, определяемое так: это все точки (атомы), являющиеся концами векторов $\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3$ (или на плоскости: $\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$). Здесь n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа, векторы α_1, α_2, α_3 называются векторами основных трансляций. Векторы α_1, α_2, α_3 иногда называются примитивными векторами решетки и всегда предполагаются линейно независимыми.

Важное требование: обычно считается, что решетка R кристалла переходит в себя при всех основных трансляциях вдоль векторов α_1, α_2, α_3, а значит, и при всех целочисленных линейных комбинациях этих основных трансляций; т. е. требуется, чтобы кристаллическая структура оставалась инвариантной при всех трансляциях, порожденных векторами α_1, α_2, α_3. Это — одно из основных свойств реальных («бесконечных») кристаллов.

Обозначим трансляции вдоль векторов α_1, α_2, α_3 через τ_1, τ_2, τ_3 соответственно. Тогда любая из рассматриваемых нами трансляций может быть записана в виде

$$T = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 + n_3\tau_3.$$

Определение 2. Решетка R называется *трансляционно инвариантной*, если она переходит в себя при произвольной трансляции вида $T = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 + n_3\tau_3$. Аналогичное определение формулируется и в случае плоской решетки.

Итак, в дальнейшем мы будем рассматривать только трансляционно инвариантные решетки (на плоскости или в пространстве).

Замечание. Обычно начинают изложение математической теории кристаллов с понятия такой дискретной подгруппы Γ группы G_3 движений пространства $\mathbb{R}^3$, что G_3/Γ компактно. Это и называют кристаллографической группой Γ. Доказывается, что подгруппа трансляций имеет конечный индекс в Γ. Атомы располагаются в точках какой-либо орбиты группы Γ. Обычно это одна из наиболее симметричных орбит. Подробное изложение читатель может найти в книге [46].

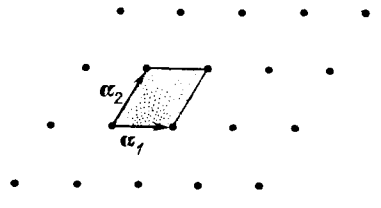


Рис. 18

Определение 3. Параллелепипед, построенный на векторах α_1, α_2, α_3, называется *примитивной ячейкой* решетки (кристалла).

Замечание. Пусть нам задана некоторая решетка R. Мы всегда будем считать, что векторы α_1, α_2, α_3 (α_1, α_2 на плоскости) таковы, что объем параллелепипеда, построенного на них, является минимально возможным.

На рис. 18 изображена простейшая двумерная решетка; показана также ее примитивная ячейка. Ясно, что в силу трансляционной инвариантности кристалла весь кристалл (решетка) состоит из объединения сдвинутых (трансляциями) примитивных ячеек. Простейшая плоская решетка, изображенная на рис. 18, обладает тем свойством, что каждый атом (т. е. каждая точка решетки) получается из какого-то одного атома (произвольного) путем применения некоторой трансляции $T = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 + n_3\tau_3$. Это обстоятельство выражают в следующих терминах: множество всех основных трансляций *транзитивно* на решетке. Однако это выполнено далеко не для всех решеток. В частности, это может происходить и по следующей причине: решетка, вообще говоря, состоит из нескольких типов атомов, а потому (в рамках нашей модели) естественно требовать, чтобы при основной трансляции атомы одного сорта переходили снова в атомы этого же сорта и не переходили в те точки решетки, которые заняты атомами другого сорта. Таким образом, множество основных трансляций может быть не транзитивно на решетке. Пример такой решетки показан на рис. 19.

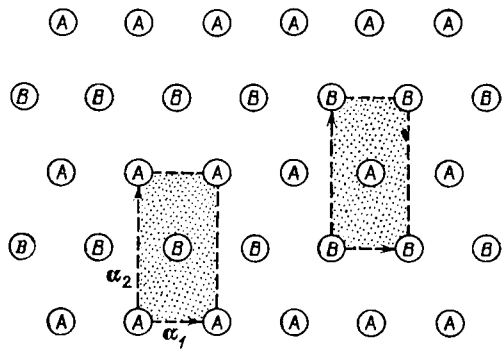


Рис. 19

Здесь атомы типа A не могут быть переведены основными трансляциями в атомы типа B (аналогично, атомы типа B не переводятся в атомы типа A). В то же время основные трансляции транзитивны на атомах типа A и на атомах типа B (по отдельности): любой атом типа A (соответственно B) может быть получен из какого-то одного атома типа A (соответственно B) путем применения некоторой основной трансляции.

Таким образом, видим, что в общем случае для полного задания решетки кристалла недостаточно задать совокупность основных трансляций. С другой стороны, ясно, что поскольку вся решетка является объединением примитивных ячеек, то для полного описания решетки, наряду с совокупностью всех основных трансляций, достаточно задать расположение атомов в какой-нибудь одной примитивной ячейке. Конечно, среди множества всех решеток естественно выделен такой класс решеток, у которых все атомы примитивной ячейки получаются из одного атома этой ячейки применением основных трансляций (двух трансляций на плоскости и трех — в пространстве).

Определение 4. Решетка R (двумерная или трехмерная), все атомы которой расположены в точках вида $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3$ ($n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2$ для плоскости), где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа, называется *решеткой Браве.*

Можно сказать, что совокупность основных трансляций транзитивна на решетке Браве. Из определения видно, что различные решетки Браве отличаются друг от друга только формой примитивной ячейки. В частности, аффинным преобразованием любые две решетки Браве могут быть переведены друг в друга, т. е. с аффинной точки зрения имеется только одна решетка Браве. Метрически различные решетки Браве (т. е. решетки, не совмещаемые друг с другом ортогональными преобразованиями и параллельными переносами) разнятся углами и длинами векторов основных трансляций.

Определение 5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — атомы, расположенные внутри примитивной ячейки; тогда векторы $X_1, \ldots, X_n$ (идущие из начала координат — вершины примитивной ячейки — в точки $X_1, \ldots, X_n$) образуют *базис решетки* (рис. 20).

Утверждение 1. *Задание векторов основных трансляций и базиса решетки R полностью определяет всю решетку R.*

Это утверждение очевидным образом следует из наших определений базиса, трансляций и из свойства инвариантности (трансляционной) решетки. Более детальные рассуждения мы оставляем читателю как элементарное упражнение на перечисленные определения.

Окончательно установим соответствие между свойствами идеального бесконечного кристалла и реального кристалла, имеющего границу. На рис. 21 изображен (идеализированно) реальный трехмерный кристалл без дефектов, имеющий границу. Здесь

числа N_1, N_2, N_3 обозначают число примитивных ячеек, укладывающихся в соответствующих ребрах нашего параллелепипеда (кристалла), т. е. $AB = N_1\alpha_1$, $BC = N_2\alpha_2$, $AD = N_3\alpha_3$.

Будем разрешать трансляции реального кристалла на произвольные векторы, кратные векторам α_1, α_2, α_3, но при этом будем

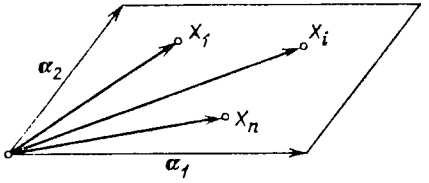


Рис. 20

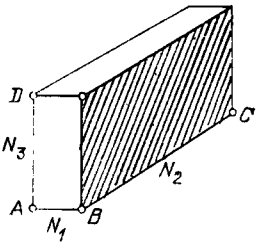


Рис. 21

поступать следующим образом: сдвинув, например, решетку на вектор α_1, мы срежем слой, выпедший за правую грань (границу) кристалла и приклеим его к левой грани, которая ровно на вектор α_1 углубилась внутрь параллелепипеда. Оказывается, что использование такой формальной модели оправдано: большинство физических конструкций и вычислений не меняется при такой процедуре «периодизации». Ясно, что такая точка зрения в точности эквивалентна рассмотрению бесконечного идеального кристалла. Введение описанных выше условий периодичности на гранях кристалла можно пояснить на наглядном геометрическом языке. Так как граница кристалла (например, рассмотрим для простоты одномерный кристалл) состоит из двух атомов с номерами 1 и N, то любая трансляция такого «склеенного» кристалла (т. е. одномерного кристалла с условием периодичности на его концах) сводится к вращению окружности на угол, кратный $2\pi/N$. В случае плоских кристаллов введение условия периодичности эквивалентно тому, что мы вводим тор T^2. Трехмерный кристалл с условием периодичности склеивается в тор T^3.

С каждой решеткой естественно связано понятие симметричной ячейки (не путать с примитивной ячейкой!). Симметричная ячейка содержит в себе некоторый выделенный атом, являющийся ее центром.

Определение 6. Фиксируем атом решетки R. *Симметричной ячейкой* (с центром в данном атоме) называется множество точек пространства (соответственно плоскости в случае плоской решетки), расположенных ближе к фиксированному нами атому, чем к любому другому атому решетки. Симметричная ячейка иногда называется *ячейкой Вигнера — Зейтца* (в теории дискретных групп — «областью Дирихле»).

На рис. 22 изображена так называемая гексагональная двумерная (плоская) решетка, на которой указаны примитивная и симметричная ячейки (эти ячейки различны!). Границами (двумерной) симметричной ячейки являются перпендикуляры, восставленные к серединам всех ребер решетки, соединяющих фиксированный атом со всеми ближайшими соседними атомами.

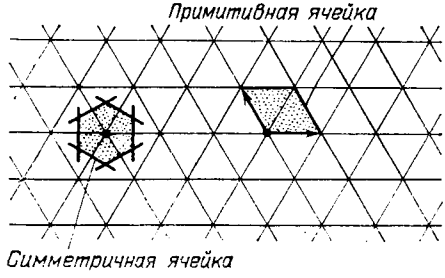


Рис. 22

Теперь мы перейдем к изучению преобразований, сохраняющих решетку (т. е. преобразующих ее в себя). Рассмотрим группу движений пространства (соответственно плоскости), т. е. совокупности всех линейных преобразований (неоднородных), сохраняющих квадратичную форму $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ (соответственно $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$). Обозначим эту группу через G_3 (в случае плоскости — через G_2).

Утверждение 2. *Любой элемент g группы G_3 (соответственно G_2) единственным образом представляется в виде композиции двух преобразований: $g = T \circ \alpha$, где T — трансляция, а α — вращение (собственное или несобственное, т. е. с определителем $+1$ или -1).*

Доказательство. Как было показано в § 4, любое движение g трехмерного пространства принадлежит к одному из двух типов: 1) винтовое движение $g = T\alpha$, где α — вращение, $\det \alpha = +1$, T — трансляция вдоль оси вращения; 2) $g = \alpha$, где $\alpha \in O(3)$ и $\det \alpha = -1$ (зеркальное вращение). В каждом из этих двух типов описанное представление вида $g = T\alpha$ или $g = \alpha$ однозначно. Утверждение доказано.

Замечание. Так как трансляции и вращения не коммутируют между собой (вообще говоря), то $T\alpha \neq \alpha T$ (постройте пример!).

Совокупность трансляций $\{T\}$ образует, очевидно, подгруппу в G_3 (соответственно G_2), которая является нормальным делителем в G_3 (соответственно G_2). В самом деле, преобразование gTg^{-1} снова является трансляцией для любого вращения $g \in O(3)$, где $O(3)$, как и выше, обозначает группу вращений вокруг точки O ($g \in O(2)$ для случая плоскости). Отметим, что группа $O(3)$ (соответственно $O(2)$) не является нормальным делителем в группе G_3 (соответственно G_2).

Среди всех преобразований группы G_3 (группы G_2) мы выделим теперь все те преобразования, которые переводят в себя некоторую фиксированную решетку R.

Определение 7. Множество преобразований (движений) из группы G_3 (соответственно G_2), переводящих решетку R в себя, называется *пространственной группой* этой решетки и будет обозначаться нами через $G_3(R)$ (соответственно $G_2(R)$).

Ясно, что множество $G_3(R)$ (соответственно $G_2(R)$) является группой в обычном алгебраическом смысле.

Все дальнейшие определения мы сформулируем для случая трехмерного евклидова пространства, имея в виду, что аналогичные определения и факты имеют место и в плоском случае.

Группа $G_3(R)$ содержит в себе подгруппу $T_3(R)$ — группу трансляций решетки.

Определение 8. *Группой трансляций кристалла* (т. е. решетки R) называется подгруппа $T_3(R)$ группы $G_3(R)$, состоящая из всевозможных трансляций T (напомним, что любая трансляция решетки R имеет вид $T = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 + n_3\tau_3$, где τ_1, τ_2, τ_3 — трансляции, порожденные примитивными векторами решетки α_1, α_2, α_3).

Напомним также, что мы все время рассматриваем трансляционно инвариантные решетки R.

Легко показать, что подгруппа $T_3(R)$ является нормальным делителем в группе $G_3(R)$. В самом деле, нужно доказать, что если $g \in G_3(R)$ и $t \in T_3(R)$, то $gtg^{-1} \in T_3(R)$ для любых g и t. Иными словами, нужно убедиться в том, что преобразование gtg^{-1} снова является трансляцией решетки. Но это следует из трансляционной инвариантности решетки.

В дальнейшем изложении мы будем предполагать, что фиксирована некоторая точка O пространства, принадлежащая нашей решетке,— «начало координат»; например, вершина примитивной ячейки — начало векторов основных трансляций. Всевозможные вращения решетки (с определителем ± 1) мы будем рассматривать относительно этой точки O.

Как было доказано выше, любое преобразование $g \in G_3$ допускает однозначное представление в виде $g = T\alpha$, где T — трансляция, а α — вращение с определителем ± 1. Иногда для вычислительных целей полезно представлять это разложение в матричном виде. Отметим, что любое движение g евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ можно (однозначно) представить в виде $y = Ax + b$, где y, x — векторы из $\mathbb{R}^n$, $A \in O(n)$, b — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$,— вектор, определяющий трансляцию. Неоднородному преобразованию g пространства $\mathbb{R}^n$, можно однозначно сопоставить следующее однородное преобразование пространства $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\hat{g} = \left|\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{matrix} \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 \end{array}\right|.$$

При этом оператор $\widehat{g}$, действуя в $\mathbb{R}^{n+1}$, порождает на плоскости $\mathbb{R}^n$, проходящей через точку с координатами $(0, \ldots, 0, 1)$ параллельно координатной плоскости $\mathbb{R}^n$ $(x^1, \ldots, x^n)$ (рис. 23), линейное неоднородное преобразование, совпадающее с действием оператора g в пространстве $\mathbb{R}^n$. В частности, из явной записи оператора $\widehat{g}$, очевидно, следует, что группа движений пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ распадается в полупрямое произведение подгруппы вращений

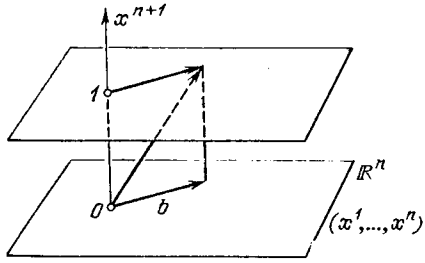


Рис. 23

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0\ \ldots\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

и подгруппы трансляций

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}b^1\\ \vdots\\ b^n\end{matrix} \\ \hline 0\ \ldots\ 0 & 1 \end{array}\right).$$

Вернемся теперь к группе преобразований некоторой решетки R. Поскольку $G_3(R) \subset G_3$, то и любой элемент $g \in G_3(R)$ допускает однозначное представление в виде $g = T\alpha$, где T — трансляция, α — вращение ($T\alpha \neq \alpha T$, вообще говоря). Подчеркнем важное обстоятельство: преобразования T и α не обязаны принадлежать группе $G_3(R)$; в частности, преобразование T вовсе не обязано быть элементом группы трансляций кристалла (тем не менее композиция $T\alpha$ уже является преобразованием решетки, переводя ее в себя).

Группа $O(3)$ (группа всех трехмерных ортогональных матриц) состоит из двух компонент связности, а именно: одна компонента (подгруппа собственных вращений $SO(3)$) состоит из матриц α с определителем $+1$, а вторая компонента (несобственные вращения) состоит из матриц α с определителем -1. Группа всех параллельных переносов в $\mathbb{R}^3$ связна (она описывается тремя параметрами и не отличается от самого трехмерного пространства). В то же время группа $G_3(R)$ дискретна; дискретность группы $G_3(R)$ означает, что в группе $G_3(R)$ не существует преобразований, сколь угодно близких к единице группы (кроме, конечно, самого тождественного преобразования).

Итак, любой элемент $g \in G_3(R)$ имеет вид $g = T\alpha$, где преобразования T и α восстанавливаются по преобразованию g однозначно, т. е. из равенства $T\alpha = T'\alpha'$ следует, что $T = T'$ и

$\alpha = \alpha'$ (см. доказательство выше). Однако группа $G_3(R)$ не распадается в прямое произведение двух своих подгрупп, поскольку, вообще говоря, $T\alpha \neq \alpha T$.

Определение 9. Совокупность всех вращений $\alpha \in O(3)$ таких, что для некоторого T (трансляции) преобразование $T\alpha$ принадлежит группе $G_3(R)$, называется *точечной группой* кристалла (или решетки R).

Иными словами, вращение α принадлежит точечной группе кристалла R в том и только в том случае, когда существует такая трансляция T (не обязательно принадлежащая группе $T_3(R)$ трансляций решетки), что композиция преобразований $T\alpha$ есть элемент пространственной группы кристалла, т. е. группы $G_3(R)$. Точечную группу мы будем обозначать через $S_3(R)$. Эту группу часто называют также *группой симметрий* кристалла (решетки), а ее элементы — *операциями симметрии* кристалла (решетки).

Утверждение 3. *Множество преобразований $S_3(R)$ образует группу в обычном алгебраическом смысле.*

Доказательство. Так как подгруппа T_3 (группа трансляций) группы G_3 является ее нормальным делителем, то можно рассмотреть проекцию π группы G_3 на факторгруппу G_3/T_3. При этом группа $G_3(R)$ перейдет в некоторую подгруппу $\pi G_3(R)$ группы G_3/T_3. Из доказанного ранее следует, что факторгруппа G_3/T_3 изоморфна группе $O(3)$, таким образом, $\pi G_3(R)$ является подгруппой группы $O(3)$. Элементами этой подгруппы являются те и только те вращения α, для которых существует такой элемент $T \in T_3$, что композиция $T\alpha$ принадлежит $G_3(R)$. Поскольку это совпадает с определением множества $S_3(R)$, то тем самым доказано, что множество $S_3(R)$ совпадает с $\pi G_3(R)$, в частности оно является группой. Утверждение доказано.

Замечание. Так как группа $\pi G_3(R)$ изоморфна факторгруппе $G_3(R)/G_3(R) \cap \mathrm{Ker}(\pi)$, где $\pi\colon G_3 \to O(3)$, и так как $\mathrm{Ker}(\pi) = T_3$*), то окончательно $\pi G_3(R) \approx S_3(R) \approx G_3(R)/G_3(R) \cap T_3$. С другой стороны, пересечение $G_3(R) \cap T_3$ совпадает с группой $T_3(R)$, т. е. точечная группа кристалла $S_3(R)$ изоморфна факторгруппе $G_3(R)/T_3(R)$.

Иногда бывает полезно явное вычисление операции умножения в точечной группе кристалла и вычисление трансляции, отвечающей композиции двух симметрий. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in S_3(R)$. Рассмотрим $\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2 \in S_3(R)$. По определению $S_3(R)$ существуют такие T_1 и T_2, что $T_1\alpha_1 \in G_3(R)$, $T_2\alpha_2 \in G_3(R)$; тогда $(T_1\alpha_1)(T_2\alpha_2) \in G_3(R)$. Пусть трансляции T_1, T_2 определяются векторами x_1, x_2, а вращения α_1, α_2 — матрицами A_1, A_2 соответственно. Тогда, если r — вектор в пространстве $\mathbb{R}^3$, то $(T_1\alpha_1)r = A_1r + x_1$, $(T_2\alpha_2)r = A_2r + x_2$ (сначала применяется вращение,

*) Для гомоморфизма π через $\mathrm{Ker}(\pi)$ обозначается совокупность элементов группы таких, что $\pi(g) = 1$.

а потом трансляция). Отсюда $(T_1\alpha_1)(T_2\alpha_2)r = (T_1\alpha_1 T_2\alpha_2)r = (A_1A_2)r + (A_1x_2 + x_1)$. Итак, вращение $\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2$, определяемое матрицей A_1A_2, входит в преобразование $g = T_3\alpha_3$, где трансляция T_3 задается вектором $x_3 = A_1x_2 + x_1$.

Приведем теперь пример плоской (двумерной) решетки R, для которой существует элемент $g \in G_3(R)$, разложение которого в композицию вида $g = T\alpha$ обладает тем свойством, что $T \notin G_3(R)$ и $\alpha \notin G_3(R)$. Решетка изображена на рис. 24. Отражение $\alpha \in O(2)$ в прямой l, очевидно, не сохраняет решетку R; далее, трансляция T вдоль вектора β (заметим, что эта трансляция не является примитивной трансляцией решетки), также не сохраняет решетку R, т. е. два преобразования T и α не принадлежат группе $G_2(R)$. Однако преобразование $g = T\alpha$, очевидно, переводит решетку R в себя. Эта операция (преобразование) $g = T\alpha$ является скользящим отражением. Подчеркнем еще раз, что элементы точечной группы (преобразования) кристалла (решетки), вообще говоря, не переводят в себя кристалл (решетку), т. е. точечная группа кристалла не является подгруппой группы движений кристалла. Точечная группа имеет большое значение в теории кристаллических структур и недаром называется группой симметрий решетки, поскольку она содержит в себе не только «настоящие» симметрии решетки, но и такие преобразования, которые переводят в себя решетку только после применения некоторой трансляции, также не являющейся движением решетки. Ясно, что решетка, изображенная на рис. 24, обладает симметрией скользящего отражения. Кроме кристаллов с симметрией такого типа, часто встречаются кристаллы, обладающие винтовой (или аксиально-винтовой) симметрией. Эта симметрия является композицией вращения $\alpha \in O(3)$ и трансляции T вдоль оси этого вращения. Рекомендуем читателю построить пример трехмерной решетки, обладающей аксиально-винтовой симметрией.

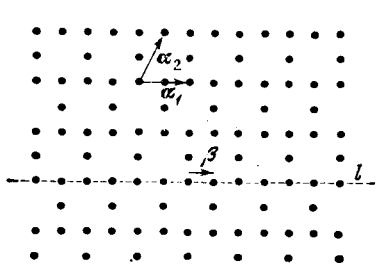


Рис. 24

В теории кристаллических структур часто рассматривают еще одну группу преобразований, естественно связанную с каждой решеткой.

Определение 10. *Стационарной группой* $H_3(R)$ решетки называется подгруппа группы $G_3(R)$, состоящая из всех преобразований, сохраняющих решетку и оставляющих неподвижной точку O — центр вращений.

Напомним, что точка O предполагается фиксированной. Ясно, что $H_3(R) = G_3(R) \cap O(3)$, поскольку любое преобразование решетки, оставляющее точку O на месте, является ортогональным

преобразованием, т. е. вращением вокруг точки O, причем определитель этого преобразования может равняться как $+1$, так и -1. Группа $H_3(R)$ не является, вообще говоря, факторгруппой группы $G_3(R)$ по нормальному делителю $T_3(R)$, т. е. $H_3(R) \not\approx G_3(R)/T_3(R)$. См. пример на рис. 24.

Утверждение 4. *Группы $H_3(R)$ (стационарная группа), $S_3(R)$ (точечная группа или группа симметрий) и $G_3(R)$ (группа движений решетки), рассматриваемые как подгруппы в группе G, связаны между собой соотношением $H_3(R) = S_3(R) \cap G_3(R)$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $H_3(R) \subset S_3(R) \cap G_3(R)$. Пусть $\alpha \in H_3(R)$. Тогда α, в частности, является вращением (и принадлежит $G_3(R)$), а потому можно положить $g = T\alpha$, где $T = E$ — тождественное преобразование (сдвиг на нулевой вектор), т. е. $g = \alpha = E\alpha$; отсюда, по определению $S_3(R)$, получаем, что $\alpha \in S_3(R)$. Обратно: докажем, что $H_3(R) \supset S_3(R) \cap G_3(R)$. Пусть $\alpha \in S_3(R)$ и $\alpha \in G_3(R)$. Это означает, что α сохраняет решетку R и, кроме того, является вращением, т. е. $\alpha \in O(3) \cap G_3(R) = H_3(R)$. Тот факт, что α входит в некоторое разложение $g = T\alpha$, в данный момент для нас несуществен. Утверждение доказано.

Замечание. Если решетка R является решеткой Браве, то группы $S_3(R)$ и $H_3(R)$ совпадают. Это непосредственно следует из определения решетки Браве (см. выше).

Далеко не каждая подгруппа ортогональной группы $O(3)$ может являться точечной группой (т. е. группой симметрий) некоторой решетки R. Оказывается, что трансляционная инвариантность решетки накладывает весьма жесткие ограничения на группы $S_3(R)$, $G_3(R)$ и $H_3(R)$. Обозначим через $H_3(R)_{(0)}$ подгруппу стационарной группы $H_3(R)$, состоящую только из собственных вращений, т. е. $H_3(R)_{(0)} = SO(3) \cap G_3(R)$; каждое вращение из подгруппы $H_3(R)_{(0)}$ имеет определитель $+1$ и оставляет точку O неподвижной. В теории кристаллических структур большое значение имеет следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R — трансляционно инвариантная решетка. Тогда группа $H_3(R)_{(0)}$ состоит из конечного числа преобразований, каждое из которых является поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через точку O, на угол φ, кратный либо $\pi/3$, либо $\pi/2$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда решетка R является решеткой Браве, т. е. все атомы ее примитивной ячейки получаются из точки O путем применений к точке O основных трансляций решетки. Пусть $\alpha \in H_3(R)_{(0)}$ — собственное вращение; тогда, как нам известно из § 4, преобразование α является поворотом на некоторый угол φ вокруг некоторой оси l, проходящей через неподвижную точку O (напомним, что мы вычисляем группу $H_3(R)_{(0)}$ относительно точки O, совпадающей с одним из атомов решетки). Пусть Π — плоскость, орто-

гональная l и проходящая через точку O. Решетка Браве состоит из точек, определяемых векторами $\alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3$. Спроектируем все атомы решетки R параллельно прямой l на плоскость П и рассмотрим проекции точек, которые расположены ближе всего к точке O, но не совпадают с ней. Фиксируем одну из таких точек A_1 (их может оказаться несколько, находящихся на одинаковом расстоянии от точки O; см. рис. 25). Поскольку решетка R симметрична относительно точки O, то наряду с каждой точкой $B_1 \in R$ противоположная ей точка B_1 (относительно точки O) также принадлежит R. При повороте вокруг l на угол φ точка B_1 перейдет в точку решетки B_2 (так как преобразование α сохраняет решетку R), т. е. проекция OA_1 перейдет в проекцию OA_2, составляющую с ней угол φ. Так как векторы OB_1 и OB_2 принадлежат решетке, то их разность — вектор B_1B_2 — также принадлежит решетке R. Так как вектор B_1B_2 параллелен плоскости П, то, следовательно, после трансляции он определит вектор OA в плоскости П, конец которого — точка A — снова принадлежит решетке. Отсюда следует, что длина вектора A_1A_2 не меньше длины вектора OA_1 ($|OA_1| = |OA_2|$), так как точки A_1 и A_2 находятся на минимально возможном расстоянии от точки O. Итак, в треугольнике OA_1A_2 сторона A_1A_2 не меньше, чем $|OA_1| = |OA_2|$, т. е. угол φ не меньше $\pi/3$. Применяя последовательно преобразование α, получаем в плоскости II правильный многоугольник с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ($A_{m+1} = A_1$), и так как $\varphi \geqslant \pi/3$, то $1 \leqslant m \leqslant 6$. Однако в силу симметричности решетки R многоугольник $A_1 \ldots A_m$ также симметричен относительно точки O. Следовательно, m может принимать только следующие значения: 2, 4, 6. Итак, угол φ может равняться только следующим числам: $k\pi$, $k\pi/2$, $k\pi/3$, т. е. $\varphi = (\pi/3, 2\pi/3, \pi/2, \pi)$. Таким образом, для решеток Браве теорема доказана.

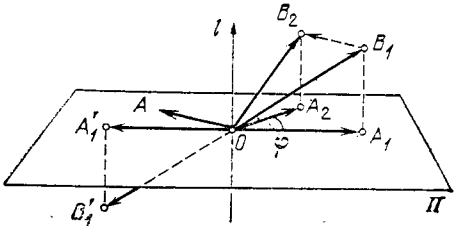


Рис. 25

Для того чтобы провести доказательство теоремы в общем случае, осталось доказать, что в любой решетке содержится подрешетка Браве, переходящая в себя при повороте на угол φ. Однако мы не будем здесь доказывать это, а предпочтем дать другое доказательство, продемонстрировав еще одну важную идею, играющую немалую роль при исследовании кристаллических структур. Рассмотрим сначала случай плоской решетки. Обозначим через α_1 и α_2 векторы основных трансляций решетки R. Пусть φ — поворот вокруг точки O, переводящий решетку в себя. Рассмотрим вектор α_1 и применим к нему итерации поворота φ.

При этом мы получим последовательность векторов α_1, $\varphi\alpha_1$, $\varphi^2\alpha_1$. Так как примитивная ячейка содержит только конечное число атомов, то после конечного числа применений поворота φ точка должна вернуться в прежнее положение, следовательно, угол φ имеет вид $2m\pi/n$ для некоторых целых m и n (рис. 26). Так как вектор α_1 был вектором трансляции и так как подгруппа трансляций является нормальным делителем группы движений решетки, то и все векторы α_1, $\varphi\alpha_1$, $\varphi^2\alpha_1$, ... являются трансляциями решетки. Рассмотрим три вектора α_1, $\varphi\alpha_1$ и $\varphi^2\alpha_1$. Если векторы

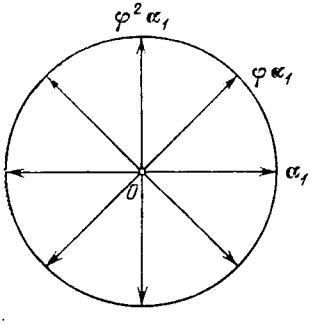


Рис. 26

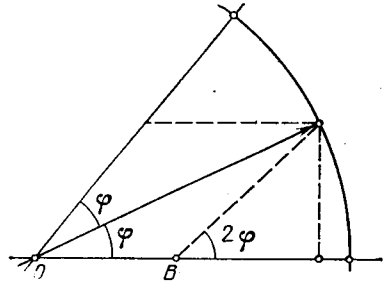


Рис. 27

α_1 и $\varphi^2\alpha_1$ линейно зависимы, то φ есть поворот на угол, кратный $\pi/2$. Рассмотрим случай, когда α_1, $\varphi^2\alpha_1$ — базис. В этом случае, для того чтобы группа движения решетки была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\varphi\alpha_1$ разлагался по векторам α_1 и $\varphi^2\alpha_1$ с рациональными координатами. Действительно, если вектор $\varphi\alpha_1$ имеет в базисе α_1, $\varphi^2\alpha_1$ иррациональные координаты, то, применяя последовательные трансляции решетки вдоль вектора $\varphi\alpha_1$, получим, что в примитивной ячейке решетки содержится бесконечное число точек (атомов), что противоречит нашему определению решетки. Таким образом, осталось получить аналитическое выражение для координат вектора $\varphi\alpha_1$ в базисе α_1, $\varphi^2\alpha_1$. Из рис. 27 получаем следующее выражение:

$$OB = \cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2\cos\varphi} = \frac{1}{2\cos\varphi}.$$

(Здесь φ обозначает также угол, поворотом на который является φ.) Таким образом, рациональность координат вектора $\varphi\alpha_1$ эквивалентна рациональности $\cos\varphi$. Отсюда снова получаем, что угол φ может принимать только следующие значения: $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/2$, π.

Рассмотрим теперь произвольную трансляционно инвариантную решетку в трехмерном пространстве. Пусть φ — произвольный поворот решетки вокруг точки O, переводящий решетку в себя. Рассмотрим ось l, вокруг которой совершается этот поворот, и рассмотрим плоскость Π, ортогональную оси l и проходящую

через точку O. Рассмотрим вектор α_1 — вектор основной трансляции (два других вектора основных трансляций нас сейчас не интересуют). В том случае, когда вектор α_1 лежит в плоскости П, дословно повторяются предыдущие рассуждения. В том случае, когда вектор α_1 не лежит в плоскости П, он движется по конусу с вершиной в точке O и осью — прямой l. Спроектировав этот конус на плоскость П, мы можем снова повторить предыдущие рассуждения применительно к проекции вектора на плоскость П. Тем самым теорема полностью доказана.

Теперь рассмотрим плоскую решетку R и группу $H_2(R)$. Доказанная выше теорема позволяет полностью описать набор групп $H_2(R)_{(0)}$ для произвольных плоских (трансляционно инвариантных) решеток; иными словами, сейчас мы укажем список из пяти групп таких, что любая группа $H_2(R)_{(0)}$ совпадает с одной из этих групп.

Теорема 2 (теорема классификации групп $H_2(R)_{(0)}$). *Пусть C_n (где $n = 1, 2, 3, 4, 6$) обозначает группу из n элементов следующего вида:*

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ -\sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

т. е. группа C_n состоит из поворотов на угол $2\pi k/n$ вокруг точки O. Тогда для любой плоской решетки R ее группа $H_2(R)_{(0)}$ совпадает с одной из групп C_n ($n = 1, 2, 3, 4, 6$).

Это непосредственно следует из доказанной выше теоремы.

Итак, плоские решетки могут иметь только те типы собственных симметрий, которые перечислены выше. Отметим, что группа C_1 состоит только из тождественного преобразования. Если мы теперь захотим перечислить не только собственные стационарные группы плоских решеток, но и несобственные группы, т. е. полные группы $H_2(R)$, то для этого достаточно воспользоваться тем, что на плоскости имеется отражение, меняющее ориентацию (например, отражение в оси x). Компонируя это отражение с элементами группы $H_2(R)_{(0)}$ и рассматривая новую группу $H_2(R) = H_2(R)_{(0)} \cup H_2(R)^*_{(0)}$, мы, очевидно, и получаем полный список всех стационарных групп плоских решеток: C_1, C_2, C_3, C_4, C_6; D_1, D_2, D_3, D_4, D_6, где $C_i \subset D_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 6$, и $D_i/C_i = \mathbb{Z}_2$.

Легко предъявить для каждой из этих групп соответствующую плоскую решетку, инвариантную относительно действия этой группы. Это мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Отметим, что в списке полученных групп симметрий отсутствует группа C_5. Поскольку плоские трансляционно инвариантные решетки определяют на плоскости различные орнаменты, то их исследованием занимались специалисты по декоративным узо-

рам на протяжении многих столетий. В частности, в арабском искусстве неоднократно предпринимались попытки построить орнамент, основанный на числе 5 (т. е. с группой $H_2(R)_{(0)}$, изоморфной C_5). Поскольку эти попытки ни к чему не привели, то в арабские орнаменты были введены так называемые «компромиссные варианты», нарушающие кое-где орнаментальную симметрию, основанную на числе 5.

Рассмотрим произвольную плоскую трансляционно инвариантную решетку. Мы описали все возможные варианты для стационарной группы $H_2(R)$. Как устроены полные группы $G_2(R)$ движений решеток? Оказывается, что существуют ровно 17 неизоморфных друг другу групп, дающих полный список всех групп $G_2(R)$. Мы не будем здесь это доказывать. Каждой из этих 17 групп отвечает плоская решетка с такой группой $G_2(R)$. Интересно отметить, что все эти 17 типов орнаментов также были обнаружены в древности (в основном египетскими декораторами).

Перейдем теперь к трехмерным решеткам. Здесь задача классификации и полного описания всех типов группы $H_3(R)$ и $G_3(R)$ значительно усложняется по сравнению с плоским случаем. Мы не будем поэтому подробно проводить эту классификацию, а разберем более простой вопрос: как устроены все конечные группы собственных вращений в трехмерном пространстве. Поскольку для произвольной трансляционно инвариантной трехмерной решетки ее стационарная группа (как и группа симметрий $S_3(R)$) является дискретной (а следовательно, конечной) группой, то, предъявив полный список всех конечных подгрупп группы $SO(3)$, мы, тем самым, оценим «сверху» список групп $H_3(R)_{(0)}$ и $S_3(R)_{(0)}$ для трехмерных решеток.

Сначала мы приведем некоторый список конечных групп вращений трехмерного пространства. Рассмотрим некоторую прямую l, проходящую через точку O, и пусть Π — плоскость, ортогональная прямой l и также проходящая через точку O. Рассмотрим в плоскости Π действие группы C_n (циклическая группа поворотов в плоскости Π вокруг точки O на угол $2\pi/n$). Ясно, что эта группа превращается в группу вращений всего трехмерного пространства вокруг оси l. Обозначим эту группу той же буквой C_n. Здесь $n = 1, 2, 3, \ldots$, причем C_1 — группа, состоящая только из тождественного преобразования. Кроме группы C_n на плоскости Π действует еще одна группа D_n. Отражение плоскости Π относительно некоторой прямой q, лежащей в плоскости Π, в трехмерном пространстве можно осуществить поворотом вокруг этой прямой q на угол, равный π. Таким образом, эти несобственные вращения плоскости Π можно дополнить до собственных вращений трехмерного пространства. Обозначим возникающую группу через D'_n. Таким образом, группа D'_n состоит из следующих преобразований: всех преобразований из подгруппы C_n и, кроме того, поворотов на угол π всего трехмерного пространства вокруг n

осей, лежащих в плоскости П и образующих друг с другом углы, равные $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$. Следует отметить, что группа D_1', так же как и группа C_2, состоит только из двух элементов: из тождественного преобразования и полуоборота вокруг единственной прямой в плоскости П, поэтому эти две группы изоморфны. Следовательно, если мы хотим составить список различных (неизоморфных) групп, то группу D_1' следует исключить. Таким образом, получаем следующий список: C_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$; D_n', $n = 2, 3, 4, \ldots$

Кроме этих двух бесконечных серий дискретных групп, в трехмерном пространстве существуют еще некоторые более экзотические группы преобразований. В самом деле, рассмотрим пять правильных многогранников в трехмерном пространстве (куб, октаэдр, икосаэдр, тетраэдр, додекаэдр). Каждому из них можно сопоставить конечную группу собственных вращений, переводящих этот многогранник в себя. Этим способом мы получаем еще пять конечных групп. Однако среди этих пяти групп есть совпадающие. В действительности, различными будут только три группы: группы тетраэдра, куба и додекаэдра. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Впишем в куб сферу, а в сферу — октаэдр таким образом, чтобы вершины октаэдра совпали с теми точками, в которых грани куба касаются сферы (рис. 28). Ясно, что всякое вращение, переводящее куб в себя, оставляет инвариантным также и октаэдр. Верно и обратное; следовательно, группы симметрий куба и октаэдра совпадают. Точно так же устанавливается, что совпадают группы симметрий (собственных вращений) додекаэдра и икосаэдра. Обозначим через T, W, P группы собственных вращений (соответственно) тетраэдра, куба (и октаэдра), додекаэдра (и икосаэдра). Можно вычислить (мы оставляем это как задачу для читателя), что порядки этих групп равны соответственно 12, 24, 60. Если же рассмотреть полные группы вращений многогранников (т. е. включая и несобственные вращения), то, естественно, полученные группы $\tilde{T}$, $\tilde{W}$, $\tilde{P}$ имеют порядки 24, 48, 120. Оказывается, что предъявленные нами группы исчерпывают весь список собственных дискретных групп вращений.

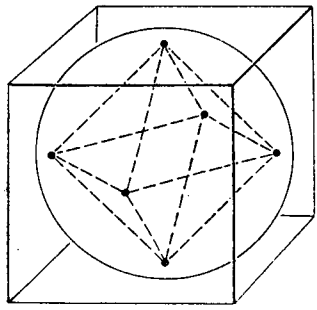


Рис. 28

Теорема 3. *Полный список конечных групп собственных вращений в трехмерном пространстве имеет вид*

$$C_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$D_n' \quad (n = 2, 3, \ldots),$$
$$T, W, P,$$

где C_n — группа (циклическая), состоящая из повторных применений поворота вокруг некоторой оси l на угол α, равный $2\pi/n$, где n — целое число; D_n — группа тех же вращений, взятых вместе с отражениями относительно n осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной l, составляющих друг с другом углы $\alpha/2$; T, W, P — группы преобразований, оставляющие инвариантными соответственно правильный тетраэдр, куб (или октаэдр) и додекаэдр (или икосаэдр).

Доказательство. Во-первых, известно, что всякое собственное вращение в трехмерном пространстве, не являющееся тождественным, есть вращение вокруг некоторой оси. Поэтому каждое такое вращение оставляет на единичной сфере неподвижными ровно две диаметрально противоположные точки, в которых ось вращения пересекает сферу. Назовем такие точки полюсами вращения.

Пусть теперь задана какая-нибудь конечная группа Γ собственных вращений порядка N. Тогда в ней ровно $N-1$ нетождественных преобразований. Рассмотрим их полюсы. Число ν преобразований из Γ, оставляющих полюс p неподвижным, называется кратностью полюса p. Очевидно, эти ν преобразований являются итерациями вращения вокруг соответствующей оси на угол $2\pi/\nu$. Они составляют циклическую подгруппу Γ_p группы Γ порядка ν. Число нетождественных преобразований в группе Γ_p равно $\nu-1$.

Рассмотрим теперь орбиту точки p относительно группы Γ. Покажем, что число элементов орбиты полюса p кратности ν равно в точности N/ν. В самом деле, заметим, что все элементы орбиты являются полюсами той же кратности ν. Это вытекает из следующих простых рассуждений. Пусть преобразование A из Γ переводит p в точку q, а $B\in\Gamma_p$, т. е. B оставляет p на месте. Тогда преобразование $A^{-1}BA$ переводит q в q. И обратно, если T — некоторое преобразование, переводящее q в себя, то преобразование $ATA^{-1}=B$ переводит p в p; следовательно, преобразование T имеет вид $A^{-1}BA$. Таким образом, между элементами группы Γ_p и преобразованиями T, оставляющими на месте точку q, установлено взаимно однозначное соответствие, которое и доказывает равенство кратностей точек p и q. Обозначим через $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ различные преобразования (включая тождественное), оставляющие инвариантной точку p. Предположим, что в орбите точки p имеется ровно n точек (включая p). Обозначим эти точки через $q_1, \ldots, q_n$. Пусть теперь L_i — одно из преобразований группы Γ, переводящих точку p в q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Тогда группа Γ исчерпывается набором следующих (различных) преобразований: $S_1L_1, S_2L_1, \ldots, S_\nu L_1, S_1L_2, S_2L_2, \ldots, S_\nu L_2, \ldots, S_1L_n, S_2L_n, \ldots, S_\nu L_n$.

Итак, $N=n\nu$, что в свою очередь означает, что кратность является делителем числа N. Отсюда, обозначив через n_ν число

полюсов в орбите, содержащей полюс, а через ν_c — кратность каждого из них, получим: $N = n_c\nu_c$.

Подсчитаем теперь число пар (S, p), где p — полюс, а S — нетождественное преобразование группы Г, оставляющее этот полюс неподвижным. С одной стороны, это число равно $2(N-1)$, поскольку с каждым из $N-1$ нетождественных преобразований группы Г связано ровно два полюса. С другой стороны, для каждого полюса p имеется $\nu_p - 1$ нетождественных преобразований, оставляющих этот полюс инвариантным (здесь ν_p — кратность полюса). Следовательно, число таких пар равно $\sum(\nu_p - 1)$, где p пробегает множество всех полюсов. Из этого следует, что

$$2(N-1) = \sum_c (\nu_c - 1) n_c, \tag{1}$$

где суммирование в правой части берется по всем орбитам группы Г, содержащим полюсы. Поскольку $N = n_c\nu_c$, то, поделив равенство (1) на N, получим соотношение

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_c \left(1 - \frac{1}{\nu_c}\right). \tag{2}$$

Исследуем равенство (2). Если группа Г состоит только из тождественного преобразования, то $N = 1$ и полюсов нет. Пусть теперь $N \geqslant 2$. Тогда левая часть равенства (2), очевидно, не меньше 1, но меньше 2. Отсюда легко следует, что в правой части равенства не может быть меньше двух слагаемых. Следовательно, имеется по крайней мере две орбиты. При этом число орбит не может быть больше трех, так как иначе сумма в правой части была бы не меньше 2. Таким образом, имеется две или три орбиты. Пусть орбит две. В этом случае равенство (2) принимает вид $2 = \frac{N}{\nu_1} + \frac{N}{\nu_2}$. Но сумма двух целых положительных чисел равна двум лишь в том случае, когда каждое из них равно единице. Следовательно, $n_1 = 1 = n_2$, т. е. $\nu_1 = \nu_2 = N$. Это значит, что каждая из двух орбит состоит ровно из одного полюса кратности N. Мы получаем циклическую группу порядка N поворотов вокруг (вертикальной) оси.

Пусть теперь число орбит равно трем. Тогда

$$\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1 + \frac{2}{N}. \tag{3}$$

Расположим кратности в порядке их возрастания: $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_3$. Все три числа ν_1, ν_2, ν_3 не могут быть больше двух, иначе мы бы получили: $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, что противоречит равенству (3). Следовательно, $\nu_1 = 2$. Отсюда $\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{N}$.

Оба числа ν_2, ν_3 не могут быть $\geqslant 4$, так как в этом случае в левой части мы получили бы сумму, не превосходящую 1/2. Поэтому $\nu_2 = 2$ или 3. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu_1 = \nu_2 = 2$, $N = 2\nu_3$. Положим $\nu_3 = n$. Мы получили два класса полюсов кратности 2, состоящих каждый из n полюсов, и один класс, состоящий из двух полюсов кратности n. Очевидно, что полученная группа совпадает с группой $D_{n'}$ (см. выше).

Теперь рассмотрим случай $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{N}$. Поскольку $\nu_3 \geqslant \nu_2 \geqslant 3$, то возможны следующие три варианта: $\nu_3 = 3$, $N = 12$, $\nu_3 = 4$, $N = 24$, $\nu_3 = 5$, $N = 60$, которые мы обозначим соответственно через T, W, P. Как мы сейчас увидим, обозначения эти не случайны и порождены обозначениями для соответствующих групп правильных многогранников. В самом деле, рассмотрим случай T. Здесь мы имеем два класса, состоящих каждый из четырех полюсов 3-го порядка (т. е. кратности 3). Ясно, что полюсы одного класса должны являться вершинами правильного тетраэдра, а полюсы другого класса диаметрально противоположны им. Таким образом, получается группа собственных вращений тетраэдра. Шесть эквивалентных полюсов кратности 2 являются проекциями середин шести его ребер из центра O на сферу, в которую вписан тетраэдр. Теперь рассмотрим случай W. Здесь один класс состоит из шести полюсов 4-го порядка, являющихся вершинами правильного октаэдра; следовательно, мы получили группу собственных вращений октаэдра. Один класс состоит из восьми полюсов 3-го порядка (соответствующих центрам его граней); еще один класс состоит из двенадцати полюсов кратности 2 (соответствующих серединам его ребер). И, наконец, рассмотрим последний случай — случай P. Здесь имеются такие классы: из 12 полюсов кратности 5, являющихся вершинами правильного икосаэдра; из 20 полюсов кратности 3, соответствующих центрам 20 граней; из 30 полюсов кратности 2, соответствующих серединам 30 ребер этого многогранника.

Итак, описание групп и доказательство теоремы закончено.

Вернемся теперь к описанию стационарных групп трехмерных решеток. Предварительно введем в рассмотрение некоторые новые группы. Пусть B — отражение трехмерного пространства относительно точки O, т. е. преобразование B переводит любую точку X в точку $-X$. Ясно, что ортогональное преобразование B меняет ориентацию в $\mathbb{R}^3$. Кроме того, B коммутирует с любым вращением, т. е. B есть образующая центра в группе $O(3)$; в матричной записи $B = -1$, где 1 — единичная матрица. Следовательно, каждая подгруппа H в группе $SO(3)$ порождает подгруппу $\tilde{H}$ в группе $O(3)$, которая получается из H присоединением всех элементов вида Bg, где $g \in H$. Ясно, что H содержится в $\tilde{H}$ как подгруппа индекса 2.

Опишем еще один способ включения зеркальных отражений в конечные группы. Пусть Γ — подгруппа индекса 2 в другой группе Φ собственных вращений, причем одна половина элементов группы Φ (обозначим их через S) принадлежит Γ, а другая половина элементов Φ (обозначим их через S') не принадлежит Γ. Заменим теперь все элементы S' элементами BS'. Тогда мы получим новую группу, которую обозначим через $\Phi\Gamma$, содержащую Γ, в то время как другую половину элементов этой группы (т. е. элементы, не принадлежащие Γ) составляют зеркальные отражения. Например, имеется группа WT, так как группа T тетраэдра есть подгруппа индекса 2 группы октаэдра W.

Теорема 4. *Все стационарные группы трансляционно инвариантных трехмерных решеток задаются следующим списком (содержащим 32 группы, причем все они попарно неизоморфны):* C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$, $\bar{C}_4$, $\bar{C}_6$; D_2', D_3', D_4', D_6'; $\tilde{D}_2'$, $\tilde{D}_3'$, $\tilde{D}_4'$, $\tilde{D}_6'$; C_2C_1, C_4C_2, C_6C_3; $D_4'D_2'$, $D_6'D_3'$; $D_2'C_2$, $D_3'C_3$, $D_4'C_4$, $D_6'C_6$, T, W, $\bar{T}$, $\bar{W}$, WT. *Каждой из этих групп отвечает трансляционно инвариантная трехмерная решетка.*

Доказательство получается комбинированием доказанной ранее теоремы, описывающей все собственные конечные группы вращений, далее, описанной процедуры включения зеркальных операций и, наконец, замечания, согласно которому допустимыми являются только полюсы кратности 2, 3, 4, 6. Мы не будем проводить во всех подробностях все эти сопоставления.

Рассмотрим теперь кристаллографические группы в связи с конкретными тензорными полями. Ограничимся одним простым примером: выделим такое макроскопическое свойство кристалла, как электропроводность, описывающее связь между вектором напряженности ε электрического поля и вектором плотности тока j.

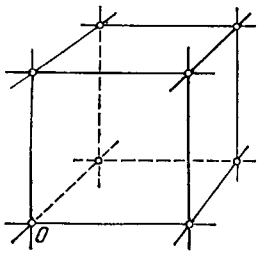


Рис. 29

Эта связь имеет следующий вид: $j_k = \sigma_k^s \varepsilon_s$, где $j = \{j_k\}$; $\varepsilon = \{\varepsilon_s\}$, а $\{\sigma_k^s\}$ — тензор электропроводности вещества. Если вещество изотропно, то тогда $\sigma_k^s = \sigma\delta_k^s$, где σ — скаляр, т. е. в простейшем случае электропроводность задается только одним скаляром σ. В общем случае $\{\sigma_k^s\}$ является тензором общего вида. Рассмотрим тензор электропроводности кристалла, описываемого кубической решеткой в $\mathbb{R}^3$, т. е. кубического кристалла (рис. 29). Кристалл считается идеальным и решетка R заполняет все пространство. Ясно, что группа симметрий этого кристалла содержит, в частности, следующие три ортогональных преобразования:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. α_1 — поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси z, α_2 — поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси y, α_3 — поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси x.

Поскольку решетка R переходит в себя, то, следовательно, эти три операции симметрии сохраняют тензор $\{\sigma_k^s\}$. Запишем это обстоятельство в аналитической форме. Обозначим через A матрицу $\{\sigma_k^s\}$; тогда $A_i' = \alpha_i A \alpha_i^{-1} = A$ для любого $i = 1, 2, 3$. Вычисляя матрицу A_1', получаем

$$A_1' = \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1^2 & \sigma_3^2 \\ -\sigma_2^1 & \sigma_1^1 & -\sigma_3^1 \\ \sigma_2^3 & -\sigma_1^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} = A.$$

Отсюда следует, что $\sigma_1^1 = \sigma_2^2$; подобным же образом, вычисляя матрицы A_2' и A_3', получаем, что $\sigma_1^1 = \sigma_2^2 = \sigma_3^3$. Группа $S_3(R)$ содержит еще три преобразования:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. β_1 — поворот на угол π вокруг оси OZ, β_2 — поворот на угол π вокруг оси OX, β_3 — поворот на угол π вокруг оси OY. Решетка снова переходит в себя, что дает нам соотношение $A_i = \beta_i A \beta_i^{-1} = A$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Вычисляя матрицу $\tilde{A}_1$, получаем

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & -\sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & -\sigma_3^2 \\ -\sigma_1^3 & -\sigma_2^3 & -\sigma_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3 \end{pmatrix} = A,$$

откуда следует, что $\sigma_3^1 = \sigma_3^2 = \sigma_1^3 = \sigma_2^3 = 0$. Вычисляя матрицы $\tilde{A}_2$ и $\tilde{A}_3$, аналогично получаем, что $\sigma_j^i = 0$ при $i \neq j$, т. е., окончательно, $A = \{\sigma_k\} = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. $\sigma_k^s = \sigma \delta_k^s$, где σ — скаляр. Тем самым мы доказали следующее утверждение: электропроводность кубического кристалла изотропна (т. е. не зависит от направления) подобно электропроводности изотропного вещества. Этот результат не является физически очевидным, поскольку в случае кубической решетки можно было бы ожидать, что электропроводность в направлении ребер кубического кристалла иная, чем электропроводность в направлении диагонали. Тем самым мы продемонстрировали важное (хотя и простое) применение свойств группы симметрий $S_3(R)$, резко снизив число независимых компонент у тензора $\{\sigma_k^s\}$.

§ 21. Тензоры ранга 2 в псевдоевклидовом пространстве и их собственные значения

1. Кососимметрические тензоры. Инварианты электромагнитного поля. Разберем важный пример тензоров — кососимметрические тензоры 2-го ранга в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$. В частности, электромагнитное поле F_{ik} является таким тензором, и мы принимаем соответствующую терминологию, называя тензор полем и т. д.

Определение 1. *Инвариантами* поля F_{ik} называются коэффициенты характеристического многочлена

$$P(\lambda) = \det(F_{ik} - \lambda g_{ik}), \tag{1}$$

где g_{ik} — метрика Минковского.

Введем векторы электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, полагая

$$\begin{gathered} E_\alpha = F_{0\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3; \\ -H^1 = F_{23}, \quad -H^2 = F_{31}, \quad -H^3 = F_{12}. \end{gathered} \tag{2}$$

Матрица F_{ik} принимает тогда следующий вид:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -E_2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -E_3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Характеристический многочлен тензора F_{ik} имеет вид*

$$P(\lambda) = -\lambda^4 + (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)\lambda^2 + \langle \mathbf{E}, \mathbf{H} \rangle^2. \tag{4}$$

Доказательство получается прямым вычислением определителя матрицы $(F_{ik} - \lambda g_{ik})$, где матрица F_{ik} имеет вид (3). Другое доказательство легко получить при помощи доказанной ниже теоремы 1 о каноническом виде кососимметрических тензоров в псевдоевклидовом пространстве.

Замечание. Хотя матрица F_{ik} в данной точке кососимметрична, ввиду неевклидовости метрики она, вообще говоря, не может быть приведена к стандартной блочной форме при помощи лоренцева преобразования.

Переводя формулы (2) на язык дифференциальных форм, мы получаем

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j = \\ &= E_\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha - H^1 dx^2 \wedge dx^3 - H^2 dx^3 \wedge dx^1 - H^3 dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются векторами лишь по отношению к вращениям трехмерного пространства (x^1, x^2, x^3). Так как F_{ik} —

тензор, при лоренцевых преобразованиях вида

$$x^1 = \frac{x^{1'} + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x^2 = x^{2'}; \quad x^3 = x^{3'}; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{6}$$

где $x^0 = ct$, $x^{0'} = ct'$, для векторов **E** и **H** имеем

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1'; \quad E_2 = \frac{E_2' + \frac{v}{c}H^{3'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad E_3 = \frac{E_3' - \frac{v}{c}H^{2'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ H^1 &= H^{1'}; \quad H^2 = \frac{H^{2'} - \frac{v}{c}E_3'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad H^3 = \frac{H^{3'} + \frac{v}{c}E_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Тензоры вида F_{ik} в данной точке образуют шестимерное векторное пространство. Выясним, как действует в этом пространстве оператор $*$.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$*F = -\sum_{\alpha=1}^{3} H^\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha - E_1 dx^2 \wedge dx^3 - \\ - E_2 dx^3 \wedge dx^1 - E_3 dx^1 \wedge dx^2, \tag{8}$$

где форма F имеет вид

$$F = E_\alpha dx^0 \wedge dx^\alpha - H^1 dx^2 \wedge dx^3 - H^2 dx^3 \wedge dx^1 - H^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

Доказательство. Оператор $*$ действует так:

$$(*F)_{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iklm}F^{lm}; \quad F^{lm} = g^{lp}g^{mq}F_{pq}. \tag{9}$$

Здесь g_{ij} — метрика Минковского,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix};$$

тензор F^{ik} будет иметь вид

$$F^{0\alpha} = -F_{0\alpha} = -E_\alpha; \quad F^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Следствие. *Квадрат оператора $*$ равен -1.*

Введем в пространстве $\mathbb{R}^6$ кососимметрических тензоров 2-го ранга структуру комплексного линейного пространства, полагая

$$(a+bi)F = aF + b*F. \tag{11}$$

В силу следствия это определение корректно: $i^2F = **F = -F$. Получаем трехмерное комплексное пространство $\mathbb{C}^3$.

Замечание. Мы будем считать, что $\mathbf{E}$ есть вещественная часть тензора F, а $\mathbf{H}$ — его мнимая часть. Это не противоречит предыдущим определениям. Действительно, умножим $\mathbf{E}+i\mathbf{H}$ на i:

$$i(\mathbf{E}+i\mathbf{H}) = -\mathbf{H}+i\mathbf{E}.$$

В силу леммы 2 именно так действует оператор $*$. Таким образом, координаты z^1, z^2, z^3 в $\mathbb{C}^3$ можно ввести, положив

$$z^\alpha = E_\alpha + iH^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Оператор $*$ инвариантен относительно преобразований из группы $SO(1, 3)$. Поэтому последние являются комплексно линейными преобразованиями нашего пространства $\mathbb{C}^3$. Более того, как легко видеть, они сохраняют квадратичную форму

$$\langle F, F\rangle = -*(F \wedge *F + iF \wedge F) = -\frac{1}{2}(F_{ik}F^{ki} + i\varepsilon^{ijkl}F_{ij}F_{kl}). \tag{13}$$

Запишем эту форму в координатах z^1, z^2, z^3. Имеем

$$\langle F, F\rangle = -H^2 + E^2 + 2i\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = (\mathbf{E}+i\mathbf{H})^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}(z^\alpha)^2. \tag{14}$$

Таким образом, форма (13) есть скалярный квадрат комплексного 3-вектора $\mathbf{E}+i\mathbf{H}$.

Комплексно линейные преобразования пространства $\mathbb{C}^3$, сохраняющие скалярный квадрат, называются, по аналогии с вещественным случаем, *комплексно ортогональными*, а образуемая ими группа обозначается через $O(3, \mathbb{C})$; ее не следует смешивать с $U(3)$.

Итак, введение комплексной структуры в пространство кососимметрических тензоров 2-го ранга определяет гомоморфизм группы Лоренца $SO(1, 3)$ в $O(3, \mathbb{C})$.

Величины $\operatorname{Re}\langle F, F\rangle = E^2 - H^2, \frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle F, F\rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$ являются инвариантами электромагнитного поля.

Разберем теперь вопрос о приведении лоренцевыми преобразованиями кососимметрического тензора ранга 2 к каноническому виду.

Теорема 1. 1. *Пусть* $\langle F, F\rangle = E^2 - H^2 + 2i\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle \neq 0$.

а) *Если* $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle \neq 0$, *то лоренцевым преобразованием можно привести тензор* F *к такому виду, что векторы* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{H}$ *параллельны и оба отличны от нуля.*

б) *Если* $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$, $E^2 - H^2 \neq 0$, *то можно привести тензор* F *к такому виду, что* $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$ *при* $E^2 - H^2 > 0$ *или* $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$ *при* $E^2 - H^2 < 0$.

Каноническая форма тензора F *в обоих случаях такова:*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E' & 0 & 0 \\ -E' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H' \\ 0 & 0 & H' & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $E'^2 - H'^2 = E^2 - H^2$, $E'H' = \langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$.

2. *Пусть* $\langle F, F\rangle = 0$, т. е. $E^2 - H^2 = 0$, $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$. *Тогда после любого лоренцева преобразования векторы* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{H}$ *будут взаимно перпендикулярны и будут иметь равные длины. Тензор* F_{ik} *можно привести в этом случае к виду*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & -E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\langle F, F\rangle \neq 0$. Положим $F = c \cdot n$, где $c = \sqrt{\langle F, F\rangle}$ и $\langle n, n\rangle = 1$. Поворотом из $SO(3, \mathbb{C})$ вектор n можно перевести в любой другой, в частности в вещественный вектор n'. Представим c в виде $E' + iH'$; новый вектор электрического поля имеет вид

$$\mathbf{E}' = E'n', \tag{17}$$

а новый вектор магнитного поля — вид

$$\mathbf{H}' = H'n', \tag{18}$$

причем $c^2 = E'^2 - H'^2 + 2i\langle \mathbf{E}', \mathbf{H}'\rangle = \langle F, F\rangle = E^2 - H^2 + 2i\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle$. Векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ параллельны. Выбирая в качестве n' единичный вектор оси x^1, мы получаем канонический вид (15). Утверждение 1, а) теоремы 1 доказано. Если же $\langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$, то $\langle \mathbf{E}', \mathbf{H}'\rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{H}\rangle = 0$. Поэтому или $E' = 0$ или $H' = 0$. Утверждение 1, б) тем самым доказано: если $E^2 - H^2 > 0$, то $H' = 0$; если $E^2 - H^2 < 0$, то $E' = 0$.

Докажем, наконец, 2. Вещественными вращениями можно добиться, чтобы вектор $\mathbf{E}$ был направлен вдоль оси x^1. Тогда вектор $\mathbf{H}$ лежит в плоскости (x^2, x^3). Вращением в этой плоскости можно направить его вдоль оси x^3.

Теорема доказана.

2. Симметрические тензоры и собственные значения. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Пусть T_{ik} — симметрический тензор типа (0, 2) в пространстве Минковского с метрикой g_{ik}.

Определение 2. *Собственными значениями тензора* T_{ik} называются решения уравнения

$$P(\lambda)=\det(T_{ik}-\lambda g_{ik})=0. \tag{19}$$

Напомним, что эти собственные значения λ — собственные значения оператора $T^i_k=g^{ij}T_{jk}$. Соответствующие собственные векторы определяются как решения системы

$$T_{ik}\xi^k=\lambda g_{ik}\xi^k, \quad P(\lambda)=0. \tag{20}$$

Из-за псевдоевклидовости метрики матрицу T_{ik} нельзя, вообще говоря, привести к диагональному виду преобразованием Лоренца. Мы разберем детально типы симметрических тензоров в двумерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^2_1$. Имеет место

Теорема 2. 1. *Если уравнение* $P(\lambda)=0$ *имеет два различных вещественных корня* $\lambda_0\neq\lambda_1$, *то матрица* T_{ik} *приводится (лоренцевым преобразованием) к виду*

$$\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & -\lambda_1\end{pmatrix}. \tag{21}$$

2. *Если уравнение* $P(\lambda)=0$ *имеет два комплексно сопряженных корня* $\lambda_{0,1}=\alpha\pm i\beta$, *то матрица* T_{ik} *приводится к виду*

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{pmatrix}. \tag{22}$$

3. *Если уравнение* $P(\lambda)=0$ *имеет два совпадающих корня* $\lambda_0=\lambda_1=\lambda$, *то матрица* T_{ik} *в любых координатах имеет вид*

$$\begin{pmatrix}\lambda+\mu & -\mu\\ -\mu & -\lambda+\mu\end{pmatrix}, \tag{23}$$

где величина μ *не является инвариантом тензора* T_{ik} *и, вообще говоря, не может быть сделана нулевой лоренцевым преобразованием.*

Доказательство. Пусть собственные значения $\lambda_0\neq\lambda_1$ (вещественные или комплексные) различны. Им отвечает пара линейно независимых собственных векторов ξ_0, ξ_1, которые находятся из системы (20). Покажем, что эти векторы ортогональны. Имеем $\xi^i_0T_{ik}\xi^k_1=\lambda_0g_{ik}\xi^i_0\xi^k_1=\lambda_1g_{ik}\xi^i_0\xi^k_1$, поэтому $\langle\xi_0,\xi_1\rangle=g_{ik}\xi^i_0\xi^k_1=0$. Пусть $\lambda_0\neq\lambda_1$ вещественны. Тогда один из собственных векторов времениподобен, а другой пространственноподобен. Выбирая их в качестве новых координатных осей, получаем доказательство утверждения 1 теоремы 2.

Пусть $\lambda_{0,1}=\alpha\pm i\beta$. Соответствующие собственные векторы также будут комплексно сопряжены: $\xi_{0,1}=a\pm ib$. Нормируем эти векторы условиями

$$\langle a+ib,\ a+ib\rangle=\langle a-ib,\ a-ib\rangle=2.$$

Вместе с условием ортогональности $\langle \xi_0, \xi_1 \rangle = 0$ это дает

$$\langle a, b \rangle = 0, \quad \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle = 0, \quad \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle = 2.$$

Отсюда $|a|^2 = 1$, $|b|^2 = -1$. В базисе a, b тензор T_{ik} примет вид (22). Утверждение 2 доказано.

Пусть теперь $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$. Допустим, что собственному значению λ отвечает ровно один собственный вектор ξ. (Если бы таких векторов было два, то матрица T_{ik} приводилась бы к диагональному виду $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, т. е. к виду (23) с $\mu = 0$.) Покажем, что ξ — изотропный вектор. Действительно, в противном случае ортогональное дополнение вектора ξ было бы собственным подпространством, не содержащим ξ. Таким образом, $|\xi|^2 = 0$, и из этого следует, что

$$(\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 = 0 \Rightarrow \xi^0 = \xi^1$$

(если $\xi^0 = -\xi^1$, то нужно еще сделать отражение). Система (20) запишется поэтому в виде

$$T_{00} + T_{01} = \lambda, \quad T_{10} + T_{11} = -\lambda,$$

откуда $T_{00} = \lambda + \mu$, $T_{11} = -\lambda + \mu$, $T_{01} = -\mu = T_{10}$. Теорема доказана.

Пусть теперь F_{ik} — кососимметрический тензор в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$. По тензору F_{ik} построим симметрический тензор T_{ik}, полагая

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-g^{lm}F_{il}F_{km} + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right). \tag{24}$$

Если F_{ik} — тензор электромагнитного поля, то тензор T_{ik} называется *тензором энергии-импульса поля* F_{ik}. Используя трехмерные векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, определяемые формулой (2), получим

$$T_{00} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \quad T_{0\alpha} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]_\alpha,$$
$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)\right\}, \tag{25}$$
$$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Величина $W = T_{00}$ называется *плотностью энергии* электромагнитного поля F_{ik}; вектор $S_\alpha = -T_{0\alpha}$ называется *вектором Пойнтинга*; трехмерный тензор $T_{\alpha\beta}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant 3, \ 1 \leqslant \beta \leqslant 3)$ — *максвелловский тензор напряжений.*

Исследуем вопрос о приведении к каноническому виду тензора энергии-импульса T_{ik}, определенного формулой (24). В соответствии с теоремой 1 приведем к каноническому виду тензор F_{ik}. В случае (15), когда $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$, тензор T_{ik}

примет диагональный вид

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} +W & & & 0 \\ & -W & & \\ & & +W & \\ 0 & & & +W \end{pmatrix}, \quad W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2). \tag{26}$$

Здесь все собственные значения равны $\pm W$. В случае (16), когда

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0), \quad \mathbf{H} = (0, 0, H), \quad E = H,$$

из формул (25) получим

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} W & 0 & -W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -W & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}. \tag{27}$$

Этот случай отвечает последнему утверждению теоремы 2 (формула (23)), $\mu = W$ — случай *электромагнитных волн*. Тензор энергии-импульса здесь не приводится к диагональному виду; все собственные значения равны нулю.

§ 22. Поведение тензоров при отображениях

1. Общая операция ограничения тензоров с нижними индексами. Пусть дано отображение F области m-мерного пространства с координатами $x^{1'}, \ldots, x^{m'}$ в область n-мерного пространства с координатами $x^1, \ldots, x^n$:

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Тогда каждому тензору $T_{i_1 \ldots i_k}$ типа $(0, k)$ в пространстве $(x^1, \ldots, x^n)$ соответствует тензор $(F^*T)'_{i_1 \ldots i_k}$ в штрихованном пространстве:

$$(F^*T)'_{i_1 \ldots i_k}(x^{1'}, \ldots, x^{m'}) = \left[T_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i_k}} \right](x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})). \tag{2}$$

Проверку того, что F^*T — тензор типа $(0, k)$, мы оставляем читателю.

Итак, тензоры типа $(0, k)$ отображаются в направлении, противоположном направлению отображения пространств. Операция F^* называется *операцией ограничения тензора*.

Пример. Пусть в n-мерном пространстве задана метрика g_{ij} и m-мерная поверхность

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Тогда, пользуясь операцией ограничения, мы получаем метрику $g_{i'j'}$ на поверхности (3), где

$$g_{i'j'} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}; \quad i', j' = 1, \ldots, m.$$

Это — метрика поверхности, индуцированная метрикой g_{ij} объемлющего пространства.

Рассмотрим теперь случай ограничения кососимметрического тензора $T_{i_1\ldots i_k}$ типа $(0, k)$ на k-мерную поверхность $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{k'})$ в n-мерном пространстве. В теории интегрирования кососимметрических форм нам будет полезна явная формула для такого ограничения.

Теорема 1. *Для формы* $\sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, *ограниченной на k-мерную поверхность* $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{k'})$, *имеет место равенство*

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} J^{i_1\ldots i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{k'}. \qquad (4)$$

Здесь $J^{i_1\ldots i_k}$ — *минор k-го порядка матрицы* $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$, *составленный из столбцов с номерами* $i_1, \ldots, i_k$.

Доказательство. Согласно определению (2)

$$(F_* T)_{1'\ldots k'} = T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{k'}}. \qquad (5)$$

Пользуясь косой симметричностью $T_{i_1\ldots i_k}$, мы можем переписать правую часть в виде

$$T_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{k'}} = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k}\left(\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{\partial x^{i_{\sigma(1)}}}{\partial x^{1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_{\sigma(k)}}}{\partial x^{k'}}\right) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1\ldots i_k} J^{i_1\ldots i_k},$$

что и доказывает теорему.

2. Отображение касательных пространств. Невозможно, вообще говоря, определить отображение тензоров с верхними индексами, соответствующее отображению пространств. Но если дано отображение $F: x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})$, $i = 1, \ldots, n$, то можно определить отображение F_* пространства векторов в точке

$(x^{1'}, \ldots x^{m'})$ в пространство векторов в точке $x^i(x^{1'}, \ldots, x^{m'})$, $i = 1, \ldots, n$. Это отображение строится так:

$$(F_* T)^i \big|_{x^h = x^h(x^{1'}, \ldots, x^{m'})} = T^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \bigg|_{(x^{1'}, \ldots, x^{m'})}. \tag{6}$$

Аналогично строится отображение F_* для тензоров типа $(k, 0)$. Таким образом, касательные пространства отображаются в ту же сторону, в которую действует отображение F. Отображение F_* касательных пространств часто называется *дифференциалом отображения* F.

Если F — гладкая функция в пространстве, то F_* — линейное отображение касательного пространства в каждой точке в вещественную прямую $\mathbb{R}$, т. е. линейная форма на векторах. Это и есть дифференциал $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)$ в обычном смысле.

На векторных полях (в целом) отображение F_* определить нельзя: если точки P_1 и P_2 при отображении F переходят в одну точку P, то из точки P будут исходить два вектора: $F_* T(P_1)$ и $F_* T(P_2)$, $T = (T^i)$.

Если гладкое отображение F взаимно однозначно, и отображение F^{-1} гладко, то можно определить отображение F_*, и оно будет изоморфизмом. Такие отображения F называются *диффеоморфизмами*.

Задача. Доказать, что для дифференциальных форм ω_1, ω_2 и гладкого отображения F справедлива формула

$$F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2).$$

§ 23. Векторные поля

1. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Пусть в области пространства задано векторное поле, имеющее в координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ компоненты $\xi^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n)$. С каждым таким векторным полем связана автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\dot{x}^i(t) = \xi^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \\ &\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ее решения $x^i = x^i(t)$ называются *интегральными кривыми* векторного поля ξ^i. Обозначим через

$$F_t^i(x_0^1, \ldots, x_0^n) = x^i = x^i(t, x_0^1, \ldots, x_0^n) \tag{2}$$

интегральную кривую поля ξ^i с начальными условиями

$$x^i|_{t=0} = x_0^i. \tag{3}$$

Формула (2) задает отображение

$$F_t\colon (x_0^1, \ldots, x_0^n) \mapsto (x^1(t, x_0^1, \ldots, x_0^n), \ldots, x^n(t, x_0^1, \ldots, x_0^n)) \quad (4)$$

нашей области в себя, зависящее от параметра t (сдвиг на время t вдоль интегральных кривых). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что отображение F_t определено при малых t в окрестности данной точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ и локально является диффеоморфизмом. Далее, F_0 есть тождественное отображение, и диффеоморфизмы F_t образуют локальную группу:

$$F_{t+s} = F_t \circ F_s, \quad F_{-t} = (F_t)^{-1}. \quad (5)$$

Термин «локальная группа» означает, что эти равенства справедливы, если обе части определены для соответствующих значений параметров $\pm t$, s, $t+s$. Мы получаем локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов, связанную с полем ξ^i.

При малых t явный вид отображений F_t таков:

$$x^i(t, x_0^1, \ldots, x_0^n) = x_0^i + t\xi^i(x_0^1, \ldots, x_0^n) + o(t). \quad (6)$$

С той же точностью матрица Якоби отображения F_t имеет вид

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^j} = \delta_j^i + t\frac{\partial \xi^i}{\partial x_0^j} + o(t). \quad (7)$$

Матрица Якоби обратного отображения имеет вид

$$\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - t\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + o(t). \quad (8)$$

Наоборот, если мы имеем однопараметрическую локальную группу диффеоморфизмов $F_t = (F_t^1, \ldots, F_t^n)$, то по ней однозначно восстанавливается векторное поле

$$\xi^i = \frac{d}{dt}F_t^i\Big|_{t=0}, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (9)$$

Векторное поле ξ^i называется *полем скоростей*.

Пример. Рассмотрим в плоскости с координатами (x, y) однопараметрическую группу вращений на угол t вокруг начала координат. Тогда отображение F_t имеет вид

$$x = x_0\cos t - y_0\sin t, \quad y = x_0\sin t + y_0\cos t. \quad (10)$$

Имеем

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = -y_0, \quad \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = x_0.$$

Итак, поле скоростей ξ^i, $i = 1, 2$, в декартовых координатах x, y имеет вид

$$\xi(x, y) = (-y, x). \quad (11)$$

Интегральными кривыми этого поля являются окружности $x^2+y^2=\text{const}$ (рис. 30).

2. Экспонента от векторного поля. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов $F_t(x)$, соответствующая векторному полю $\xi(x)$, действуют на гладких функциях $f=f(x)$ по правилу

$$(F_t f)(x)=f(F_t(x)). \tag{12}$$

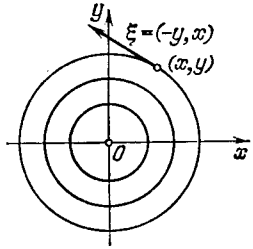


Рис. 30

Рассмотрим, например, на прямой однопараметрическую группу сдвигов $F_t(x)=x+t$. Векторное поле ξ здесь постоянно. Преобразования (12) имеют вид

$$F_t f(x)=f(x+t). \tag{13}$$

Для аналитических функций $f(x)$ (т. е. разлагающихся в сходящийся степенной ряд в окрестности любой точки x) выражение (13) при малых t может быть представлено при помощи ряда Тейлора

$$F_t f(x)=f(x+t)=f(x)+tf'(x)+\frac{t^2}{2}f''(x)+\ldots=$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\right)f(x)=\exp\left(t\frac{d}{dx}\right)f(x). \tag{14}$$

Обобщая результат этого вычисления, дадим

Определение 1. *Экспонентой векторного поля* ξ называется оператор

$$\exp(t\partial_\xi)=1+t\partial_\xi+\frac{t^2}{2}(\partial_\xi)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(\partial_\xi)^n, \tag{15}$$

где ∂_ξ — производная по направлению поля ξ (формула (17.16)). Действие этого оператора на функции $f(x)$ определяется равенством

$$\exp(t\partial_\xi)f(x)=f(x)+t\partial_\xi f(x)+\frac{t^2}{2}(\partial_\xi)^2 f(x)+\ldots \tag{16}$$

Это выражение определено для тех функций $f(x)$ и для тех t, для которых ряд, стоящий в правой части, сходится.

Утверждение 1. *Для аналитических векторных полей* $\xi(x)$ *(т. е. все функции* $\xi^i(x^1,\ldots,x^n)$ *аналитичны) и аналитических функций* $f(x)$ *экспонента векторного поля* $\xi(x)$ *совпадает с оператором* (12) *при достаточно малых* t:

$$\exp(t\partial_\xi)f(x)=f(F_t(x)). \tag{17}$$

Доказательство. Рассмотрим такую точку $x=(x^1,\ldots,x^n)$, где поле $\xi(x)$ не обращается в нуль. Согласно теореме существо-

вания и единственности решений системы (1) в некоторой окрестности этой точки можно сделать замену координат

$$x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

так, что в новых координатах система (1) запишется в виде

$$\dot{y}^1 = 1, \quad \dot{y}^2 = 0, \ \ldots, \ \dot{y}^n = 0 \tag{19}$$

(см. [30]). Для систем с аналитическими правыми частями замену (18) можно выбрать аналитической. Функция вида $\tilde{f}(y) = f(x(y))$, где $f(x)$ — аналитическая функция, также аналитична. В новых координатах равенство (17) примет такой вид:

$$\exp\left(t\frac{\partial}{\partial y^1}\right)\tilde{f}(y) = \tilde{f}(y^1 + t, y^2, \ldots, y^n),$$

что немедленно вытекает из (14). Утверждение доказано.

Задача. Вычислите оператор $\exp\left[(ax + b)\frac{d}{dx}\right]$.

3. Производная Ли. Примеры. Пусть $\xi = (\xi^i)$ — векторное поле, F_t — соответствующая однопараметрическая группа диффеоморфизмов, $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — тензор типа (p, q). В силу взаимной однозначности отображения F_t определен закон преобразования тензора от координат $x^i(t)$ к x^i_0. Для тензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$, перенесенного из точки $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ в точку $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$, получаем выражение

$$(F_t T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{l_1 \ldots l_p}_{k_1 \ldots k_q} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^{j_1}_0} \ldots \frac{\partial x^{k_q}}{\partial x^{j_q}_0} \frac{\partial x^{i_1}_0}{\partial x^{l_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p}_0}{\partial x^{l_p}}. \tag{20}$$

Определение 2. *Производной Ли* тензорного типа $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ вдоль векторного поля ξ называется выражение

$$L_\xi T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \frac{d}{dt}(F_t T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\Big|_{t=0}. \tag{21}$$

Таким образом, производная Ли измеряет скорость *) изменения тензора $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ при деформации пространства, задаваемой отображением F_t. Так как $F_t T$ — тензор типа (p, q) при каждом значении t, то и $L_\xi T$ — также тензор типа (p, q).

---

*) В механике сплошной среды выражение $\frac{dT}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + L_\xi T$, где $T = T(\tau, x)$ — произвольное тензорное поле, называется *полной производной* T вдоль поля скоростей $\xi = (\xi^i)$. В гидродинамике важен случай $T = (\xi_i)$.

Получим явную формулу для производной Ли. Для этого, используя формулы (8) и (9), перепишем формулу (20) с точностью до $o(t)$. Имеем

$$(F_t T)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{l_1\dots l_p}_{k_1\dots k_q}\left(\delta^{k_1}_{j_1} + t\frac{\partial \xi^{k_1}}{\partial x_0^{j_1}}\right)\dots$$

$$\dots\left(\delta^{k_q}_{j_q} + t\frac{\partial \xi^{k_q}}{\partial x_0^{j_q}}\right)\left(\delta^{i_1}_{l_1} - t\frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial x^{l_1}}\right)\dots\left(\delta^{i_p}_{l_p} - t\frac{\partial \xi^{i_p}}{\partial x^{l_p}}\right) =$$

$$= T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + t\left[T^{i_1\dots i_p}_{kj_2\dots j_q}\frac{\partial \xi^k}{\partial x_0^{j_1}} + \dots + T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x_0^{j_q}} - \right.$$

$$\left. - T^{li_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial x^l} - \dots - T^{i_1\dots i_{p-1}l}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial \xi^{i_p}}{\partial x^l}\right] + o(t). \quad (22)$$

Дифференцируя равенство (22) по t при $t=0$, получаем

$$L_\xi T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \xi^s\frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^s} + T^{i_1\dots i_p}_{kj_2\dots j_q}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^{j_1}} + \dots + T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_{q-1}k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^{j_q}} -$$

$$- T^{li_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial x^l} - \dots - T^{i_1\dots i_{p-1}l}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial \xi^{i_p}}{\partial x^l}. \quad (23)$$

Примеры. 1. Тензоры нулевого ранга, т. е. скаляры. Имеем

$$L_\xi f = \xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_\xi f. \quad (24)$$

Получаем формулу для производной функции f по направлению ξ (производной функции вдоль векторного поля). Если $L_\xi f = 0$, то функция f постоянна вдоль интегральных кривых поля ξ. Такая функция f называется *интегралом поля* ξ или интегралом соответствующей системы уравнений $\dot{x}^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n)$. Например, для поля, рассмотренного в п. 1, функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ будет интегралом.

Если f — интеграл поля ξ, то интегральные кривые поля целиком лежат на поверхностях уровня $f(x^1, \dots, x^n) = \text{const}$; само поле ξ, очевидно, касается этих поверхностей. Это позволяет понизить порядок исходной системы уравнений $\dot{x}^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n)$ от n до $n-1$, ограничив ее (т. е. ограничив векторное поле $\xi^i(x^1, \dots, x^n)$) на гиперповерхность $f(x^1, \dots, x^n) = \text{const}$. Напомним, что размерность этой гиперповерхности равна $n-1$. Именно эта простая геометрическая процедура ограничения поля ξ и соответствует известному в теории дифференциальных уравнений утверждению, что задание первого интеграла системы позволяет понизить ее порядок на единицу.

2. Тензоры типа (1, 0), т. е. векторы. Пусть $\eta = (\eta^i)$ — векторное поле. Тогда по формуле (23) получаем

$$L_\xi \eta^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \tag{25}$$

Отсюда следует

$$L_\xi \eta = -L_\eta \xi. \tag{26}$$

Выясним, как действует векторное поле $L_\xi \eta$ на функции. Имеет место важная

Теорема 1. $\partial_{L_\xi \eta} f = \partial_\xi (\partial_\eta f) - \partial_\eta (\partial_\xi f) = [\partial_\xi, \partial_\eta] f$. *Таким образом, коммутатор операторов ∂_ξ и ∂_η снова будет дифференциальным оператором первого порядка — т. е. векторным полем $L_\xi \eta = -L_\eta \xi$.*

Доказательство. Вычислим явно коммутатор $[\partial_\xi, \partial_\eta]$:

$$[\partial_\xi, \partial_\eta] f = \partial_\xi (\partial_\eta f) - \partial_\eta (\partial_\xi f) = \partial_\xi \left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) - \partial_\eta \left(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) =$$

$$= \xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \eta^j \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} =$$

$$= \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{L_\xi \eta} f;$$

здесь $\xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \xi^j \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = 0$ в силу соотношения $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$.
Теорема доказана.

Определение 3. Векторное поле $[\xi, \eta] = L_\xi \eta$ называется *коммутатором* полей ξ и η.

Отметим полезный аналог формулы Лейбница:

$$L_\xi (f\eta) = f L_\xi \eta + \eta (\partial_\xi f).$$

Доказательство получается прямым вычислением, использующим формулу (25).

Из этой формулы непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан набор гладких векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Для того чтобы существовала система координат $y^1, \ldots, y^n$ такая, что векторы ξ_j касаются координатных линий (y^j), $j = 1, \ldots, k$, необходимо следующее условие:*

$$[\xi_j, \xi_k] = f_{jk}^{(1)} \xi_j + f_{jk}^{(2)} \xi_k, \tag{27}$$

где $f_{jk}^{(i)}$ — скалярные функции точки.

Доказательство. Если поля ξ_j являются базисными ортами e_j системы координат, то $[\xi_j, \xi_k] = 0$, так как $\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y^k} = \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^j}$. Если же $\xi_j = f_j(y) e_j$, где e_j — базисные орты,

и $f_j(y)$ — гладкие функции точки, то

$$[\xi_{f_j}, \xi_{f_k}] = [f_j e_j, f_k e_k] = f_j \frac{\partial f_k}{\partial y^j} e_k - f_k \frac{\partial f_j}{\partial y^k} e_j.$$

Полагая $f^{(1)}_{jk} = f_j \frac{\partial f_k}{\partial y^j}$, $-f^{(2)}_{jk} = f_k \frac{\partial f_j}{\partial y^k}$, получим требуемое соотношение.

3. Тензоры T, типа (0, 1), т. е. ковекторы. Согласно формуле (23) будем иметь

$$(L_\xi T)_j = \xi^h \frac{\partial T_j}{\partial x^h} + T_h \frac{\partial \xi^h}{\partial x^j}. \tag{28}$$

Для дифференциала функции $T_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$ получим

$$(L_\xi T)_j = \xi^h \frac{\partial^2 f}{\partial x^h \partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^h} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^j}. \tag{29}$$

Вывод. *Взятие производной Ли L_ξ перестановочно со взятием дифференциала*:

$$L_\xi (df) = d(L_\xi f). \tag{30}$$

4. Тензоры g_{ij} типа (0, 2), т. е. билинейные формы. Имеем

$$L_\xi g_{ij} = \xi^s \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \equiv u_{ij}. \tag{31}$$

Тензор u_{ij} называется тензором (малой) деформации. Он описывает изменение метрики g_{ij} пространства при малой деформации F_t, определенной полем ξ. В частности, если метрика евклидова, $g_{ij} = \delta_{ij}$, то тензор u_{ij} примет вид (см. § 17)

$$u_{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}. \tag{32}$$

5. Вычислим производную Ли элемента объема $\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ (или $\sqrt{|g|}\,dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$), где $g = \det g_{ik}$. Согласно формуле (23)

$$L_\xi \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \xi^h \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^h} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} + \\ + \sqrt{|g|} \left(\varepsilon_{h i_2 \dots i_n} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^{i_1}} + \dots + \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1} h} \frac{\partial \xi^h}{\partial x^{i_n}} \right). \tag{33}$$

Выражение, стоящее в скобках в правой части формулы (33), равно $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ (см. задачу 3 к § 18). Поэтому правая часть

формулы (33) равна

$$L_\xi \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\left(\xi^k \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\left(\xi^k \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}\right).$$

Но в скобках стоит след тензора деформации $\mathrm{Sp}(u_{im}) = g^{im}u_{im}$, определенного формулой (31). Поэтому окончательно получаем выражение для производной Ли элемента объема

$$L_\xi\left(\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\right) = \frac{1}{2} g^{im}u_{im}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{i_1\ldots i_m}, \tag{34}$$

где в правой части стоит след тензора u_{im} — тензора деформации. В евклидовом случае, когда $g_{ij} = \delta_{ij}$, след тензора деформации равен

$$\frac{1}{2} g^{im}u_{im} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}.$$

Задачи. 1. Доказать формулу Лейбница для производной Ли:

$$L_\xi(T \otimes R) = (L_\xi T) \otimes R + T \otimes L_\xi R,$$

где T, R — любые тензоры.

2. Пусть ω_1, ω_2 — две дифференциальные формы. Доказать, что

$$L_\xi(\omega_1 \wedge \omega_2) = L_\xi\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_\xi\omega_2.$$

3. Пусть F — диффеоморфизм области U в область V, X_1, X_2 — векторные поля на U, $Y_i = F_*(X_i)$ — соответствующие векторные поля на V. Доказать, что $F_*[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2]$.

4. Пусть F_t, G_s — однопараметрические группы диффеоморфизмов, X, Y — соответствующие векторные поля. Доказать, что диффеоморфизмы F_t и G_s коммутируют при любых t, s тогда и только тогда, когда коммутатор полей X и Y равен нулю.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — линейно независимые векторные поля в n-мерной области, причем $[X_i, X_j] = 0$. Доказать, что существует (локально) система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ такая, что поле X_i касается i-й координатной оси: $\partial_{X_i}(x^k) = \delta_i^k$.

§ 24. Алгебры Ли

1. Алгебры Ли и векторные поля. Определение 1. Линейное пространство V, в котором задана кососимметрическая билинейная операция $[\,,\,]$, называется *алгеброй Ли*, если выполняется *тождество Якоби*

$$[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0. \tag{1}$$

Замечание. Для любого $\xi \in V$ введем оператор $\operatorname{ad}\xi$ — линейное отображение $\operatorname{ad}\xi$: $V \to V$,— полагая $\operatorname{ad}\xi(\eta) = [\xi, \eta]$. Тождество Якоби означает, что отображение $\operatorname{ad}\xi$, как говорят в алгебре, является «дифференцированием» алгебры Ли V (т. е. удовлетворяет формуле Лейбница):

$$\operatorname{ad}\xi([\eta, \zeta]) = [\operatorname{ad}\xi(\eta), \zeta] + [\eta, \operatorname{ad}\xi(\zeta)]. \tag{2}$$

Примеры. 1. Трехмерное евклидово пространство является алгеброй Ли относительно операции векторного умножения.

2. Пусть V — некоторая алгебра линейных операторов. Тогда V можно превратить в алгебру Ли, полагая

$$[A, B] = AB - BA. \tag{3}$$

Докажем справедливость тождества Якоби для такой скобки. Имеем

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= A[B, C] - [B, C]A = ABC - ACB - BCA + CBA, \\ [C, [A, B]] &= CAB - CBA - ABC + BAC, \\ [B, [C, A]] &= BCA - BAC - CAB + ACB. \end{aligned} \tag{4}$$

При сложении этих выражений получится нуль.

Замечание. Операция $[\ ,\ ]$ в алгебре Ли часто называется *коммутатором*.

Следствие 1. *Пространство $M(n, \mathbb{R})$ всех матриц порядка n является алгеброй Ли относительно коммутатора*

$$[A, B] = AB - BA. \tag{5}$$

Следствие 2. *Векторные поля в области пространства $\mathbb{R}^n$ образуют алгебру Ли относительно коммутатора*:

$$[\xi, \eta]^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \tag{6}$$

Следствие 2 вытекает из теоремы 23.1. Алгебра Ли векторных полей, разумеется, бесконечномерна.

Пусть в области пространства задана некоторая поверхность и векторные поля ξ, η касаются этой поверхности. Тогда имеет место

Теорема 1. *Если два поля ξ, η касаются некоторой гладкой поверхности, то их коммутатор также касается этой поверхности.*

Доказательство достаточно провести для гиперповерхности $f(x^1, \ldots, x^n) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхность задается уравнением

$$x^n = 0. \tag{7}$$

Касание полей ξ, η к этой поверхности означает, что

$$\partial_\xi f|_{f=0} = \partial_\eta f|_{f=0} = 0.$$

Для поверхности вида (7) условие касания имеет вид

$$\xi^n\big|_{x^n=0} = 0; \quad \eta^n\big|_{x^n=0} = 0. \tag{8}$$

Тогда для коммутатора $[\xi, \eta]$ будем иметь

$$[\xi, \eta]^n = \xi^h \frac{\partial \eta^n}{\partial x^h} - \eta^h \frac{\partial \xi^n}{\partial x^h}.$$

Но если $x^n = 0$, то $\frac{\partial \xi^n}{\partial x^h} = \frac{\partial \eta^n}{\partial x^h} = 0$ при $k \neq n$. Следовательно, $[\xi, \eta]^n\big|_{x^n=0} = 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Векторные поля, касающиеся некоторой гладкой поверхности, составляют подалгебру алгебры Ли всех векторных полей.*

2. Основные матричные алгебры Ли. С каждой рассмотренной выше группой линейных преобразований связана матричная алгебра Ли. Пространством этой алгебры является касательное пространство в единице группы; коммутатор — обычный коммутатор матриц.

Приведем список важнейших матричных групп и их касательных пространств в единице. Касательные пространства в единице будем обозначать так же, как и группы, но малыми буквами.

1) Специальная линейная группа $SL(n, \mathbb{R})$ (или $SL(n, \mathbb{C})$) — группа вещественных (комплексных) матриц n-го порядка с определителем 1. Касательное пространство $sl(n, \mathbb{R})$ (или $sl(n, \mathbb{C})$) в единице есть пространство матриц с нулевым следом.

2) Группа вращений $SO(n, \mathbb{R})$ (или $SO(n, \mathbb{C})$) — группа вещественных или комплексных ортогональных матриц с определителем 1:

$$A^\top A = 1, \quad \det A = 1, \quad A \in SO(n, \mathbb{R}), \quad SO(n, \mathbb{C}). \tag{9}$$

Тогда $so(n, \mathbb{R})$, $so(n, \mathbb{C})$ — алгебры кососимметрических матриц (вещественных или комплексных)

$$X^\top = -X, \quad X \in so(n, \mathbb{R}), so(n, \mathbb{C}). \tag{10}$$

3) Псевдоортогональные группы $SO(p, q)$. Пусть $G = (g_{ij})$ — псевдоевклидова метрика в пространстве $\mathbb{R}^n_{p,q}$, $p + q = n$. Группа $SO(p, q)$ есть группа вещественных матриц A (с определителем 1), сохраняющих форму $G = (g_{ij})$:

$$A^\top G A = G, \quad \det A = 1, \quad A \in SO(p, q). \tag{11}$$

В этом случае $so(p, q)$ — алгебра таких матриц $X = (x^i_j)$, что

$$GX + X^\top G = 0, \quad X \in so(p, q), \tag{12}$$

или

$$g_{ij}x_k^j + x_i^j g_{jk} = 0. \tag{13}$$

Последнее равенство означает, что матрица

$$u_{ik} = g_{ij}x_k^j \tag{14}$$

кососимметрична. Этим устанавливается изоморфизм между пространством $so(p, q)$ и пространством всех кососимметрических матриц (порядка $n = p + q$).

4) Унитарная группа $U(n)$ — группа унитарных матриц n-го порядка

$$\overline{A}^{\top} A = 1, \quad A \in U(n). \tag{15}$$

Алгебра $u(n)$ состоит из косоэрмитовых матриц

$$\overline{X}^{\top} = -X, \quad X \in u(n). \tag{16}$$

5) Специальная унитарная группа $SU(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1. Алгебра $su(n)$ состоит из косоэрмитовых матриц с нулевым следом

$$\overline{X}^{\top} = -X, \quad \operatorname{Sp} X = 0, \quad X \in su(n). \tag{17}$$

6) Псевдоунитарная группа $U(p, q)$ — группа линейных преобразований комплексного n-мерного пространства, где $n = p + q$, сохраняющих псевдоэрмитово скалярное произведение

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{p} x^i \overline{y}^i - \sum_{i=p+1}^{n} x^i \overline{y}^i = g_{ij} x^i \overline{y}^j; \tag{18}$$

$$\xi = (x^1, \ldots, x^n), \quad \eta = (y^1, \ldots, y^n); \quad n = p + q.$$

Если $G = (g_{ij})$ — матрица формы (18), то для матрицы A из группы $U(p, q)$ будем иметь

$$\overline{A}^{\top} G A = G; \quad A \in U(p, q). \tag{19}$$

Тогда пространство $u(p, q)$ образовано матрицами $X = (x_i^j)$ такими, что

$$GX + \overline{X}^{\top} G = 0. \tag{20}$$

Пространство $u(p, q)$ связывается изоморфизмом с пространством косоэрмитовых матриц: матрице $x_k^j \in u(p, q)$ отвечает косоэрмитова матрица (u_{ik}),

$$u_{ik} = g_{ij}x_k^j, \quad \overline{u}_{ki} = -u_{ik}. \tag{21}$$

7) Группа $SU(p, q)$ — это подгруппа группы $U(p, q)$, составленная из матриц с определителем 1; матрицы из $su(p, q)$ имеют

нулевой след:

$$x_i^i = 0 \Leftrightarrow g^{ik}u_{ik} = 0. \tag{22}$$

Теорема 2. *Пространства* $sl(n, \mathbb{R})$, $sl(n, \mathbb{C})$, $so(n, \mathbb{R})$, $so(n, \mathbb{C})$, $so(p, q)$, $u(n)$, $su(n)$, $u(p, q)$, $su(p, q)$ *являются алгебрами Ли относительно коммутирования матриц.*

Доказательство. Нужно проверить, что каждое из перечисленных пространств замкнуто относительно коммутатора. Докажем, что:

а) если $\operatorname{Sp} X = 0$, $\operatorname{Sp} Y = 0$, то $\operatorname{Sp}[X, Y] = 0$;

б) если X, Y удовлетворяют условию (12), то и $[X, Y]$ удовлетворяет этому условию;

в) если X, Y удовлетворяют условию (20), то и $[X, Y]$ ему удовлетворяет.

Имеем $\operatorname{Sp}[X, Y] = \operatorname{Sp}(XY) - \operatorname{Sp}(YX) = 0$ (для любых X, Y). Утверждение а) доказано.

Пусть матрицы X, Y удовлетворяют условию (12), т. е.

$$X^\top G = -GX, \quad Y^\top G = -GY.$$

Тогда

$$[X, Y]^\top G = Y^\top X^\top G - X^\top Y^\top G = GYX - GXY = -G[X, Y].$$

Утверждение б) доказано.

Аналогично доказывается и утверждение в). Теорема доказана.

Определение 2. Пусть G — одна из групп преобразований 1—7. Касательное пространство в единице группы G, снабженное операцией коммутирования матриц, называется *алгеброй Ли группы* G.

Пример 1. Алгебра Ли $so(3, \mathbb{R})$ группы вращений трехмерного пространства состоит из кососимметрических матриц третьего порядка. Введем базис X_1, X_2, X_3 в пространстве таких матриц, полагая

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Тогда будем иметь

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2. \tag{24}$$

Вывод. *Алгебра Ли группы* $SO(3, \mathbb{R})$ *изоморфна алгебре Ли векторов в трехмерном евклидовом пространстве относительно векторного произведения.*

Пример 2. Рассмотрим алгебру Ли $so(p, q)$. Пусть псевдоевклидова метрика имеет вид

$$g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_i = \pm 1. \tag{25}$$

Алгебра $so(p, q)$ реализуется кососимметрическими матрицами (см. формулу (14)), причем коммутатор имеет вид

$$[u, v]_{ij} = \sum_k \varepsilon_k (u_{ik}v_{kj} - v_{ik}u_{kj}),$$
$$u = (u_{ij}), \quad v = (v_{ij}), \quad u_{ji} = -u_{ij}, \quad v_{ji} = -v_{ij}. \tag{26}$$

Пример 3. Алгебра Ли $su(2)$. Выберем базис s_1, s_2, s_3 в пространстве косоэрмитовых 2×2-матриц со следом нуль, полагая

$$s_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Тогда будем иметь

$$[s_1, s_2] = 2s_3, \quad [s_2, s_3] = 2s_1, \quad [s_3, s_1] = 2s_2. \tag{28}$$

В силу леммы 14.6 эта алгебра Ли изоморфна алгебре Ли чисто мнимых кватернионов таких, что $\bar{x} = -x$, где коммутатор имеет вид $[x, y] = xy - yx$. При этом изоморфизме

$$i \leftrightarrow s_1, \quad j \leftrightarrow s_2, \quad k \leftrightarrow s_3. \tag{29}$$

Теорема 3. *Существует изоморфизм алгебр Ли*

$$su(2) \cong so(3, \mathbb{R}). \tag{30}$$

Доказательство. Поставим в соответствие матрице $X \in su(2)$ линейное преобразование $\operatorname{ad} X$ трехмерного пространства $su(2)$:

$$Z \mapsto \operatorname{ad} X(Z) = [X, Z], \quad X, Z \in su(2). \tag{31}$$

При этом

$$[\operatorname{ad} X, \operatorname{ad} Y] = \operatorname{ad}[X, Y] \tag{32}$$

в силу тождества Якоби. Это означает, что отображение (31) является гомоморфизмом алгебры Ли $su(2)$ в алгебру Ли линейных операторов в пространстве $su(2)$. Пространство $su(2)$ евклидово; длина вектора $z = bs_1 + cs_2 + ds_3 \leftrightarrow bi + cj + dk$ равна

$$|z|^2 = b^2 + c^2 + d^2 = \det z. \tag{33}$$

Преобразование вида

$$Z \mapsto AZA^{-1}, \quad A \in SU(2), \tag{34}$$

ортогонально в смысле скалярного произведения (33) (см. § 14): $\det AZA^{-1} = \det Z$.

Лемма 1. *Преобразование* $\operatorname{ad} X$, $X \in su(2)$, *кососимметрично в метрике* (33).

Доказательство. Пусть семейство преобразований $A = A(t)$ из группы $SU(2)$ таково, что

$$\frac{dA(t)}{dt}\Big|_{t=0} = X, \quad A(0) = 1. \tag{35}$$

Тогда производная по t семейства преобразований

$$Z \mapsto A(t)\, ZA(t)^{-1}$$

при $t = 0$ имеет вид

$$Z \mapsto XZ - ZX = \operatorname{ad} X(Z).$$

Следовательно, это преобразование кососимметрично (см. § 5, п. 3). Лемма доказана.

Итак, мы имеем гомоморфизм

$$su(2) \to so(3, \mathbb{R}), \quad X \mapsto \operatorname{ad} X. \tag{36}$$

Ядро его равно нулю (если $\operatorname{ad} X(Z) = 0$ для любого Z, то $X = 0$), а размерности пространств $su(2)$ и $so(3, \mathbb{R})$ совпадают (равны трем). Теорема доказана.

Замечание. Матрицы преобразований $\operatorname{ad} s_1$, $\operatorname{ad} s_2$, $\operatorname{ad} s_3$ в базисе s_1, s_2, s_3 (27) имеют вид

$$\operatorname{ad} s_1 = 2X_1, \quad \operatorname{ad} s_2 = 2X_2, \quad \operatorname{ad} s_3 = 2X_3, \tag{37}$$

где базис X_1, X_2, X_3 в пространстве $so(3, \mathbb{R})$ задается формулами (23).

Пример 4. Алгебра Ли $sl(2, \mathbb{R})$. Введем в этой алгебре базис из матриц Y_0, Y_1, Y_2, полагая

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Коммутаторы этих матриц имеют вид

$$[Y_0, Y_1] = -2Y_2, \quad [Y_0, Y_2] = 2Y_1, \quad [Y_1, Y_2] = 2Y_0. \tag{39}$$

Теорема 4. *Существует изоморфизм алгебр Ли*

$$sl(2, \mathbb{R}) \cong so(1, 2).$$

Доказательство. Как и в теореме 3, каждой матрице Y из $sl(2, \mathbb{R})$ поставим в соответствие линейное преобразование $\operatorname{ad} Y$ трехмерного пространства $sl(2, \mathbb{R})$. Преобразования пространства $sl(2, \mathbb{R})$ в себя вида

$$Y \to AYA^{-1} \tag{40}$$

сохраняют квадратичную форму

$$|Y|^2 = \det Y. \tag{41}$$

Поэтому (ср. лемму 1) преобразования вида $\operatorname{ad} Y$ кососимметричны в смысле метрики (41). Но эта метрика псевдоевклидова и имеет тип (1, 2):

$$\det Y = \det(y^0 Y_0 + y^1 Y_1 + y^2 Y_2) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 + y_0 \\ y_2 - y_0 & -y_1 \end{pmatrix} = y_0^2 - y_1^2 - y_2^2. \tag{42}$$

Теорема доказана.

3. Линейные векторные поля. Пусть $X = (X_k^i)$ — вещественная (или комплексная) матрица n-го порядка. Построим векторное поле T_X в пространстве $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), полагая его значение в точке $x \in \mathbb{R}^n$ (или $x \in \mathbb{C}^n$) равным

$$T_X(x) = -Xx \tag{43}$$

или в координатах

$$T_X^i(x) = -X_k^i x^k. \tag{44}$$

Определение 3. Поля вида (43) называются *линейными векторными полями.*

Найдем интегральные кривые линейного векторного поля (43). Для их определения имеем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (в векторной записи)

$$\dot{x} = -Xx. \tag{45}$$

Теорема 5. *Интегральная кривая $x(t)$ поля* (44), *задаваемая начальным условием*

$$x(0) = x_0,$$

имеет вид

$$x(t) = \exp(-tX)x_0. \tag{46}$$

Доказательство. Проверим, что кривая (46) удовлетворяет дифференциальному уравнению (45). Напомним (см. § 14, п. 2), что экспонента от матрицы определяется как сумма ряда

$$\exp(-tX) = 1 - \frac{tX}{1!} + \frac{t^2X^2}{2!} - \ldots \tag{47}$$

Дифференцируя этот ряд по t, получим

$$\frac{d}{dt}\exp(-tX) = -X + \frac{tX^2}{1!} - \ldots = -X\exp(-tX). \tag{48}$$

Поэтому

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\exp(-tX)x_0) = -X\exp(-tX)x_0 = -Xx,$$

т. е. соотношение (45) выполнено. После этого наша теорема вытекает из теоремы единственности решения дифференциального уравнения.

Из теоремы следует, что однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная линейным полем T_X,— это умножения на матрицу $\exp(-tX)$.

Пример. Матрицы X_1, X_2, X_3, образующие базис (23) в алгебре Ли $so(3)$, порождают три линейных векторных поля в трехмерном евклидовом пространстве. Они обозначаются обычно через L_x, L_y, L_z. Значения этих векторных полей в точке с координата-

ми (x, y, z) равны

$$L_x=(0,+z,-y),\quad L_y=(-z,0,+x),\quad L_z=(+y,-x,0). \tag{49}$$

Этим полям соответствуют три однопараметрические группы: вращения пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг осей x, y, z соответственно.

Пусть X и Y — две матрицы порядка n. Вычислим коммутатор двух линейных векторных полей T_X и T_Y.

Теорема 6. *Коммутатор векторных полей T_X и T_Y имеет вид*

$$[T_X, T_Y]=T_{[X, Y]}, \tag{50}$$

где $[X, Y]=XY-YX$ — коммутатор матриц X, Y.

Доказательство. Используем формулу (8) для коммутатора векторных полей в координатах. Будем иметь

$$[T_X, T_Y]^i=X_l^h x^l\frac{\partial\left(Y_m^i x^m\right)}{\partial x^h}-Y_l^h x^l\frac{\partial\left(X_m^i x^m\right)}{\partial x^h}=$$

$$=X_l^h x^l Y_h^i-Y_l^h x^l X_h^i=(-[X, Y]x)^i.$$

Но последнее выражение есть i-я компонента линейного векторного поля $T_{[X, Y]}$. Теорема доказана.

Следствие. *Линейные векторные поля образуют относительно обычного коммутирования конечномерную алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли всех матриц n-го порядка.*

Пусть G — одна из рассмотренных в п. 2 групп преобразований n-мерного пространства (вещественного или комплексного), $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Линейные векторные поля вида T_X, где матрица X лежит в $\mathfrak{g}$, образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы. Соответствующие однопараметрические группы диффеоморфизмов получаются умножениями на элементы однопараметрических подгрупп группы G.

Замечание. Соответствующие линейным векторным полям T_X, $X\in\mathfrak{g}$, дифференциальные операторы ∂_{T_X}, определенные на гладких функциях в $\mathbb{R}^n$, называются *генераторами действия* группы G. Зная генераторы, можно восстановить действие группы G на функциях, беря экспоненту от векторного поля $\xi=T_X$ (см. § 23):

$$f(F_t(x))=f(\exp(-tX)x)=\exp(-t\partial_\xi)f(x). \tag{51}$$

Пример. Генераторами группы вращений трехмерного пространства $SO(3)$ являются дифференциальные операторы

$$L_x=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},\quad L_y=x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x},\quad L_z=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}. \tag{52}$$

Согласно теореме 6 коммутаторы этих дифференциальных операторов вычисляются по формулам

$$[L_x, L_y]=L_z,\quad [L_y, L_z]=L_x,\quad [L_z, L_x]=L_y. \tag{53}$$

4. Левоинвариантные поля на группах преобразований. Пусть X — фиксированная матрица n-го порядка (для определенности вещественная). Ей соответствует линейное преобразование пространства матриц $\mathbb{R}^{n^2}$ вида

$$A \mapsto AX. \tag{54}$$

Соответствующее линейное векторное поле в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ матриц n-го порядка обозначим через L_X. Векторное поле L_X в точке ($n \times n$-матрице) A принимает значение, равное

$$L_X(A) = AX. \tag{55}$$

Интегральные кривые поля L_X находятся по теореме 5. Для их определения имеем систему дифференциальных уравнений (одно матричное уравнение)

$$\dot{A} = L_X(A) = AX. \tag{56}$$

Решение этой системы с начальным условием $A|_{t=0} = A_0$ имеет вид

$$A = A_0 \exp(tX). \tag{57}$$

Таким образом, однопараметрическая группа диффеоморфизмов, порожденная векторным полем L_X,— это умножения справа на матрицу $\exp(tX)$ (правые сдвиги на $\exp tX$).

Для коммутатора векторных полей вида L_X в силу теоремы 6 имеем выражение

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}. \tag{58}$$

Поля вида L_X обладают важным свойством *левоинвариантности* (инвариантность относительно левых сдвигов):

$$BL_X(A) = L_X(BA). \tag{59}$$

Пусть G — одна из рассмотренных в п. 2 групп преобразований, заданная как гладкая поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех матриц n-го порядка. Пусть $\mathfrak{g}$ — касательное пространство к группе G в единице. Напомним (§ 14, п. 2), что если $X \in \mathfrak{g}$, то матрица $\exp tX$ при любом t лежит в G (однопараметрическая подгруппа в G).

Лемма 2. *Если $X \in \mathfrak{g}$, то векторное поле L_X касается поверхности G, т. е. задает векторное поле на группе G.*

Доказательство. Вектор $L_X(A)$ в точке $A \in G$ есть начальный вектор скорости кривой $A \exp tX \in G$. Лемма доказана.

Ограничение векторного поля L_X, где X — матрица из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, на поверхность G будем также обозначать через L_X. Заметим, что значение векторного поля L_X в единице группы равно X; поле L_X на G обладает свойством инвариантности относительно левых сдвигов на элементы группы.

Определение 4. Векторные поля вида L_X на группе G, где $X \in \mathfrak{g}$ — элемент из алгебры Ли этой группы, называются *левоинвариантными полями на группе* G.

Из теоремы 1 и формулы (58) немедленно вытекает

Теорема 7. *Левоинвариантные векторные поля на группе* G *образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *группы* G.

Нам будет также полезна следующая

Лемма 3. *Значения левоинвариантных векторных полей в каждой точке группы* G *составляют все касательное пространство к группе* G *в этой точке.*

Доказательство. Если $X_1, \ldots, X_N$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то векторы $L_{X_1}(A), \ldots, L_{X_N}(A)$ линейно независимы в каждой точке $A \in G$ и образуют базис в касательном пространстве. Лемма доказана.

5. Метрика Киллинга. Введем сначала понятие метрики Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 5. Евклидово или псевдоевклидово скалярное произведение $\langle , \rangle_0$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется *метрикой Киллинга*, если все операторы вида $\operatorname{ad} X$ кососимметричны в этой метрике:

$$\langle \operatorname{ad} X(Y), Z\rangle_0 = -\langle Y, \operatorname{ad} X(Z)\rangle_0. \tag{60}$$

Примеры метрик Киллинга на алгебрах Ли $su(2)$ и $sl(2, \mathbb{R})$ мы видели в п. 2 (формулы (33) и (41)); там эти метрики были использованы для доказательства теорем 3 и 4. Отметим, что метрика Киллинга (33) для алгебры Ли $su(2)$ евклидова; метрика Киллинга (41) для $sl(2, \mathbb{R})$ псевдоевклидова (типа (1, 2)).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы преобразований G; пусть на $\mathfrak{g}$ задана метрика Киллинга $\langle , \rangle_0$. Используя построенные в предыдущем пункте левоинвариантные поля, можно построить метрику $\langle , \rangle$ на всей группе, полагая

$$\langle L_X, L_Y\rangle = \langle X, Y\rangle_0. \tag{61}$$

Таким образом, скалярное произведение двух левоинвариантных полей полагается тождественно равным скалярному произведению их значений в единице группы. Это соглашение полностью определяет метрику на G в силу леммы 3.

Определение 6. Метрика, определенная равенством (61), называется *метрикой Киллинга на группе* G.

Пример. Пусть $G = SO(n, \mathbb{R})$. Покажем, что метрика Киллинга на этой группе может быть индуцирована евклидовой метрикой в пространстве всех матриц $\mathbb{R}^{n^2}$. Эта евклидова метрика имеет вид

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i,j} x^i_j y^i_j, \quad X = (x^i_j), \quad Y = (y^i_j). \tag{62}$$

Заметим, что это выражение можно переписать в виде

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{Sp}(XY^{\top}), \tag{63}$$

где Sp — след матрицы; $\operatorname{Sp} A = a_i^i$, если $A = (a_j^i)$. Поверхность $SO(n, \mathbb{R})$ целиком лежит в сфере радиуса $\sqrt{n}$, так как для ортогональной матрицы A n-го порядка будем иметь

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{Sp}(AA^{\top}) = \operatorname{Sp}(1) = n.$$

Пусть $X, Y \in so(n, \mathbb{R}), A \in SO(n, \mathbb{R})$. Покажем, что в метрике, индуцированной евклидовой метрикой (67) на поверхности $SO(n, \mathbb{R})$, имеет место равенство

$$\langle L_X(A), L_Y(A)\rangle = \operatorname{Sp}(XY^{\top}) = \langle L_X(1), L_Y(1)\rangle. \tag{64}$$

По определению индуцированной метрики

$$\langle L_X(A), L_Y(A)\rangle = \operatorname{Sp}(AX(AY)^{\top}) =$$
$$= \operatorname{Sp}(AXY^{\top}A^{\top}) = \operatorname{Sp}(A^{\top}AXY^{\top}) = \operatorname{Sp}(XY^{\top})$$

(мы использовали то, что при циклической перестановке сомножителей след произведения не меняется, и условие ортогональности $A^{\top}A = 1$).

Осталось показать, что операторы вида $\operatorname{ad} X$ кососимметричны в этой метрике при $X \in so(n, \mathbb{R})$. Если $Y, Z \in so(n, \mathbb{R})$, т. е. $Y^{\top} = -Y$, $Z^{\top} = -Z$, то

$$\langle Y, Z\rangle = \operatorname{Sp}(YZ^{\top}) = -\operatorname{Sp}(YZ).$$

Следовательно,

$$\langle \operatorname{ad} X(Y), Z\rangle = \operatorname{Sp} XYZ - \operatorname{Sp} YXZ,$$
$$\langle Y, \operatorname{ad} X(Z)\rangle = \operatorname{Sp} YXZ - \operatorname{Sp} YZX.$$

Эти два выражения различаются только знаком. Итак, мы получили метрику Киллинга на группе $SO(n, \mathbb{R})$ (а значит, и на любой ее подгруппе) как ограничение евклидовой метрики в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Если группа G реализована как подгруппа в унитарной группе $U(n)$, то можно использовать операцию овеществления, дающую вложение $U(n) \subset SO(2n, \mathbb{R})$. Но можно и прямо написать вид метрики Киллинга для группы $U(n)$:

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{Re}\operatorname{Sp} X\bar{Y}^{\top} = -\operatorname{Re}\operatorname{Sp} XY.$$

6. Классификация трехмерных алгебр Ли. Пусть задана трехмерная алгебра Ли L; пусть векторы e_1, e_2, e_3 составляют ее базис. Правило коммутации в алгебре L задается тензором «структурных констант» c_{ij}^k, где полагаем по определению

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{65}$$

Очевидно,

$$c_{ij}^{h} = -c_{ji}^{h}. \tag{66}$$

Из тождества Якоби (см. выше) вытекает соотношение

$$c_{ij}^{h}c_{kl}^{m} + c_{ji}^{h}c_{ki}^{m} + c_{li}^{h}c_{kj}^{m} = 0. \tag{67}$$

Заменами базиса e_1, e_2, e_3 тензор c_{ij}^{h} приведем к простейшему виду. Для этого выразим его через компоненты симметричного тензора (b^{ij}) и компоненты вектора (a_i), полагая

$$c_{ij}^{h} = \varepsilon_{ijl}b^{lh} + \delta_j^h a_i - \delta_i^h a_j. \tag{68}$$

Условие антисимметричности уже выполнено, а из тождества Якоби (72) вытекает, что

$$b^{ij}a_j = 0, \tag{69}$$

т. е. что вектор (a_i) либо равен нулю, либо является собственным вектором тензора (b^{ij}) с собственным значением нуль. Приведем тензор b^{ij} к диагональному виду: $b^{ij} = b^{(i)}\delta^{ij}$, где $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ — собственные значения. Поскольку (a_i) — собственный вектор, можно считать, что $(a_i) = (a, 0, 0)$. Из (69) вытекает, что $b^{(1)}a = 0$, т. е. или a или $b^{(1)}$ равно нулю. Правила коммутации (65) в этом случае примут вид

$$[e_1, e_2] = ae_2 + b^{(3)}e_3, \quad [e_2, e_3] = b^{(1)}e_1; \quad [e_3, e_1] = b^{(2)}e_2 - ae_3.$$

Остался еще произвол в изменении знака векторов e_1, e_2, e_3, а также в умножении их на произвольные положительные числа. Учитывая эту возможность, получаем следующую таблицу трехмерных алгебр Ли (классификация Бьянки):

Тип	a	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	Тип	a	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$
I	0	0	0	0	V	1	0	0	0
II	0	1	0	0	IV	1	0	0	1
VII_0	0	1	1	0	VII	a	0	1	1
VI_0	0	1	−1	0	III ($a = 1$)				
IX	0	1	1	1	VI ($a \neq 1$)	a	0	1	−1
VIII	0	1	1	−1					

Тип I — абелева алгебра Ли (алгебра Ли группы трансляций). Тип IX — алгебра Ли группы $SO(3)$.

7. Алгебра Ли конформной группы. Разберем векторные поля, отвечающие конформным преобразованиям евклидова и псевдоевклидова пространства. Как было показано в § 15, конформных преобразований в размерностях $n \geqslant 3$ весьма мало. Они отвечают движениям пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$ (псевдовращениям и трансляциям), дилатациям, инверсиям относительно некоторого центра.

Введем следующие поля, записанные как дифференциальные операторы первого порядка:

$$1)\quad \Omega_{ab} = g_{ac}x^c\frac{\partial}{\partial x^b} - g_{bc}x^c\frac{\partial}{\partial x^a},$$

$$a, b = 1, \ldots, n \text{ (псевдовращения)},$$

$$2)\quad P_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \text{ (трансляции)}, \tag{70}$$

$$3)\quad D = x^a\frac{\partial}{\partial x^a} \text{ (дилатация)},$$

$$4)\quad K_a = 2g_{ac}x^cx^b\frac{\partial}{\partial x^b} - g_{bc}x^bx^c\frac{\partial}{\partial x^a} \text{ (инверсия)}.$$

Для евклидовой метрики мы имеем $g_{ac} = \delta_{ac}$ и преобразование $\exp(t\Omega_{ab})$ задает вращение в плоскости (a, b); для псевдоевклидовой метрики $g_{ac} = \lambda_a\delta_{ac}$, $\lambda_a = \pm 1$. В этом случае мы получим, что преобразование $\exp(t\Omega_{ab})$ задает либо вращение (если $\lambda_a = \lambda_b$), либо элементарное преобразование Лоренца в плоскости (a, b) (если $\lambda_a = -\lambda_b$). Преобразования $\exp\left(t\frac{\partial}{\partial x^a}\right)$ являются трансляциями вдоль оси x^a, а $\exp\left(tx^a\frac{\partial}{\partial x^a}\right)$ — дилатация $D(x) = tx$. Сложнее найти однопараметрическую группу преобразований $\exp(tK_a)$, поскольку поле K_a нелинейно. Позднее мы покажем, что все эти преобразования конформны на $\mathbb{R}^n_{p,q}$.

Замечание. Более того, любое конформное преобразование, близкое к тождественному на $\mathbb{R}^n$ или на сфере S^n, может быть представлено в виде $\exp(tA)$, где

$$A = \sum_{a,b=1}^{n}\lambda^{ab}\Omega_{ab} + \sum_{a=1}^{n}\mu^aP_a + \gamma D + \sum_{a=1}^{n}\delta^aK_a;$$

аналогично для всех $\mathbb{R}^n_{p,q}$.

Написанные выше векторные поля (70) образуют алгебру Ли. Без труда проверяются коммутационные соотношения

$$\begin{gathered}[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = g_{ac}\Omega_{bd} - g_{bc}\Omega_{ad} + g_{ad}\Omega_{cb} - g_{bd}\Omega_{ca},\\ [\Omega_{ab}, P_c] = g_{ac}P_b - g_{bc}P_a, \quad [\Omega_{ab}, K_c] = g_{ac}K_b - g_{bc}K_a,\\ [\Omega_{ab}, D] = [P_a, P_b] = [K_a, K_d] = 0,\\ [P_a, K_b] = 2(g_{ab}D + \Omega_{ab}); \quad [P_a, D] = P_a, \quad [K_d, D] = -K_a.\end{gathered} \tag{71}$$

Пусть теперь метрика g_{ab} евклидова, т. е. $g_{ab} = \delta_{ab}$. Рассмотрим алгебру Ли, отвечающую группе псевдовращений $SO(n+1, 1)$, заданную аналогичными векторными полями $\Omega_{\mu,\nu}$, где $\mu, \nu =$

$= 1, \ldots, n+2$. Установим соответствие

$$\begin{aligned} &\Omega_{a,b} \mapsto \Omega_{\mu,\nu}, \quad \mu = a = 1, \ldots, n; \quad \nu = b = 1, \ldots, n, \\ &P_a \mapsto \Omega_{a,n+1} - \Omega_{a,n+2}, \\ &K_a \mapsto \Omega_{a,n+1} + \Omega_{a,n+2}, \\ &D \mapsto \Omega_{n+1,n+2}. \end{aligned} \tag{72}$$

Непосредственно проверяется следующий важный факт.

Утверждение. *Соответствие* (72) *является изоморфизмом алгебр Ли.*

Таким образом, *в евклидовом случае алгебра Ли* (71) *изоморфна алгебре Ли группы* $SO(n+1, 1)$, *отвечающей псевдовращениям* (т. е. преобразования вида $\exp(tA)$ для A из алгебры Ли (71) являются псевдовращениями).

Замечания. 1. Хотя для $n = 2$ имеется много локальных конформных преобразований, среди них имеется подгруппа дробно-линейных преобразований сферы $S^2 \to S^2$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

различные подгруппы которой уже использовались для изучения движений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, плоскости Лобачевского L^2, сферы S^2 (см. §§ 9, 10, 13). Эта группа изоморфна $SL(2, \mathbb{C})/\pm 1$ (см. § 13) и порождается как раз вращениями, трансляциями, дилатациями и инверсиями на $\mathbb{R}^2$ после перехода к стереографической проекции. Изоморфизм (72) дает изоморфизм алгебры Ли всех бесследных комплексных 2×2-матриц с алгеброй Ли группы Лоренца $SO(3, 1)$, реализованной как группа псевдовращений (вида $\exp(tA)$). Этот изоморфизм называется «полуспинорным представлением» группы Лоренца $SO(3, 1)$ в виде комплексных 2×2-матриц. Имеется также комплексно сопряженное представление.

2. Алгебра Ли группы конформных преобразований псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$ изоморфна $so(p+1, q+1)$ (проверьте!).

Докажем, наконец, следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $g_{ab} = \delta_{ab}$ *и* $A = \lambda^{ab}\Omega_{ab} + \mu^a P_a + \gamma D + \delta^a K_a$. *Тогда преобразования вида* $S_t = \exp(tA)$ *являются конформными преобразованиями евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства нужно рассмотреть векторное поле A и показать, что определяемая им группа (локальных) преобразований $S_t = \exp(tA)$ является конформной (если мы хотим говорить не о локальных, а о глобальных преобразованиях, то следует рассматривать эти поля на сфере S^n, перейдя к сфере от $\mathbb{R}^n$ преобразованием, обратным к стереографической проекции, вводящей на S^n конформно евклидовы координаты; однако это несущественно). Если векторное поле (u^a) задает движение евклидовой

метрики, то должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial u^a}{\partial x^b} + \frac{\partial u^b}{\partial x^a} = 0.$$

Это означает, что «тензор деформации», измеряющий искажение расстояний, обращается в нуль (см. § 23). Для векторных полей u^a, задающих конформные преобразования евклидовой метрики, тензор деформации должен быть пропорционален самой метрике:

$$\frac{\partial u^a}{\partial x^b} + \frac{\partial u^b}{\partial x^a} = \gamma(x)\,\delta_{ab}, \tag{73}$$

где $\gamma(x)$ — гладкая функция. В этом случае, если $A = u^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, получим преобразование

$$S_t = \exp(tA),$$

и преобразование метрики будет иметь вид

$$S_t^*(g_{ab}) = S_t^*(\delta_{ab}) = [1 + t\mu(x)]\,\delta_{ab} + O(t^2).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что все поля (72) удовлетворяют условию (73). Нам осталось доказать, что из условия (73), наоборот, следует конформность преобразований S_t, определяемых векторным полем

$$\dot{x}^a = u^a(x^1, \ldots, x^n), \tag{74}$$

или, что то же самое, преобразований $\exp(tA)$. Доказательство этого факта таково (оно аналогично соответствующему доказательству для движений). Сдвиг на конечное время Δt можно разбить в последовательность (суперпозицию) сдвигов на время $\frac{\Delta t}{N}$, так как

$$S_{\Delta t} = S_{(\Delta t/N)} \circ \ldots \circ S_{(\Delta t/N)}.$$

Линейная часть преобразований S_τ при малых $\tau = \Delta t/N$ имеет вид

$$S_\tau = 1 + \tau A + O(\tau^2), \quad A = \frac{\partial u^a}{\partial x^b}.$$

Поскольку $\Delta t/N$ мало, для вектора ξ в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\xi_0^a = \xi^a \to \xi^a + \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\frac{\partial u^a}{\partial x^b}(x_0)\,\xi^b + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2 = \xi_1^a,\\
&\xi_1^a \to \xi_2^a = \xi_1^a + \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\frac{\partial u^a}{\partial x^b}(x_1)\,\xi_1^b + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi_{N-1}^a \to \xi_N^a = \xi_{N-1}^a + \left(\frac{\Delta t}{N}\right)\frac{\partial u^a}{\partial x^b}(x_{N-1})\,\xi_{N-1}^b + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2.
\end{aligned} \tag{75}$$

Точки x_q, $q=0, \ldots, N-1$, лежат на интегральной траектории $x^a(t)$ уравнения (74) такой, что

$$x^a(0) = x^a_{0},$$
$$x^a\left(\frac{\Delta t}{N}\right) = x^a_{1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^a\left((N-1)\frac{\Delta t}{N}\right) = x^a_{N-1}.$$

Для скалярного квадрата векторов ξ_t получаем из (75)

$$\langle \xi_1, \xi_1\rangle = \left(1+\mu(x_0)\frac{\Delta t}{N}\right)\langle \xi_0, \xi_0\rangle + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2,$$
$$\langle \xi_2, \xi_2\rangle = \left(1+\mu(x_1)\frac{\Delta t}{N}\right)\langle \xi_1, \xi_1\rangle + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\langle \xi_N, \xi_N\rangle = \left(1+\mu(x_{N-1})\frac{\Delta t}{N}\right)\langle \xi_{N-1}, \xi_{N-1}\rangle + O\left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2.$$

Так как шагов всего N, то

$$\langle \xi_N, \xi_N\rangle = \rho(x)\langle \xi_0, \xi_0\rangle + O\left(N\cdot\frac{\Delta t^2}{N^2}\right). \tag{76}$$

При фиксированном $\Delta t = \text{const}$ и $N\to\infty$ мы получаем конформность отображения $S_{\Delta t}$. Отсюда следует наше утверждение.

Замечания. 1. Из доказательства теоремы вытекает, что если тензор деформации поля равен нулю, то $S_t = \exp(tA)$ есть движение, где $A = u^a\frac{\partial}{\partial x^a}$. Это равносильно тому, что все линейные преобразования $S_t^{-1}dS_t$ являются кососимметрическими в любой точке:

$$S_t^{-1}dS_t = B(x) = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right), \quad B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\right) = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

2. Более того, возможна ситуация, когда преобразования $B(x) = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ во всех точках $x\in\mathbb{R}^n$ порождают подалгебру Ли L в алгебре Ли всех $n\times n$-матриц. Например, для четных n это может быть алгебра всех комплексных $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$-матриц.

Задачи. 1. Докажите, что в последнем случае преобразования S_t задают голоморфные преобразования $\mathbb{C}^{n/2}\to\mathbb{C}^{n/2}$. Для $n/2>1$ эти преобразования, вообще говоря, не конформны.

2. Докажите, что если все $B(x)$ имеют нулевой след, то все преобразования S_t сохраняют объем.

3. Доказать изоморфность следующих алгебр Ли:

а) $su(1, 1) \approx sl(2, \mathbb{R})$,

б) $su(2) \times su(2) \approx so(4)$,

в) $sl(2, \mathbb{C}) \approx so(1, 3)$,

г) $so(1, 2) \approx$ алгебре векторов в $\mathbb{R}^3_{1,2}$ относительно «векторного произведения» (см. задачу 1 к § 6).

4. Вычислить левоинвариантные векторные поля на группе единичных кватернионов.

5. Доказать, что метрика Киллинга на группах $SO(n)$ может быть записана в виде $dl^2(g) = \mathrm{Sp}(g^{-1}dg \cdot g^{-1}dg)$.

6. Пусть g^0_{ij} — метрика Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, записанная в базисе $X_1, \ldots, X_n$. Пусть $[X_i, X_j] = c^k_{ij}X_k$, $c_{kij} = g^0_{kl}c^l_{ij}$. Доказать, что тензор c_{kij} антисимметричен по всем трем индексам.

7. Для группы $SO(n, \mathbb{R})$ внутренние автоморфизмы $G \mapsto AGA^{-1}$ являются движениями метрики Киллинга.

8. Для группы $SO(p, q)$ можно получить метрику Киллинга как ограничение псевдоевклидовой метрики $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Sp}(GXGY^{\mathrm{T}})$ (G — матрица метрики типа (p, q)). Найти тип полученной псевдоримановой метрики.

9. Все описанные выше примеры метрик Киллинга получаются (с точностью до постоянного множителя) как $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, X \cdot \mathrm{ad}\, Y)$.

10. Группа $SL(2, \mathbb{R})$ действует как группа движений метрики Лобачевского (см. § 10). Каждой однопараметрической подгруппе в группе $SL(2, \mathbb{R})$ (см. задачу 14.5) соответствует однопараметрическая группа диффеоморфизмов плоскости Лобачевского. Найти соответствующие векторные поля на плоскости Лобачевского (в модели Клейна). Вычислить их коммутаторы.

11. Вычислить алгебру Ли аффинной группы в $\mathbb{R}^n$; группы движений n-мерного евклидова пространства, группы движений пространства Минковского $\mathbb{R}^3_{1,2}$ (см. задачу 4.3). Выписать соответствующие генераторы в $\mathbb{R}^n$, в $\mathbb{R}^3_{1,2}$.

12. Показать, что линейные векторные поля L_X, L_Y, L_Z в $\mathbb{R}^3$, соответствующие действию группы $SO(3, \mathbb{R})$, касаются любой сферы с центром в начале координат. Вычислить вид соответствующих дифференциальных операторов первого порядка на единичной сфере в сферических координатах.

13. Определим правоинвариантные поля на группе G как ограничение на группу векторных полей вида $R_X(A) = -XA$. Доказать, что $[R_X, R_Y] = R_{[X, Y]}$, $[L_X, R_Y] \equiv 0$.

14. Выяснить, к какому из описанных в п. 6 типов принадлежат алгебры Ли $so(1, 2)$ и $sl(2, \mathbb{R})$.

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

§ 25. Дифференциальное исчисление кососимметрических тензоров

1. Градиент кососимметрического тензора. Большинство физических законов записывается в виде дифференциальных соотношений между физическими величинами. Многие из этих величин представляют собой тензорные поля (в частности, векторные поля) в пространстве или в области пространства. Поэтому нас интересует вопрос: какие вообще существуют дифференциальные операции над тензорами, которые в определенном смысле не зависят от системы координат. (В каком смысле, позднее будет уточнено.) Например, простейшая из операций такова: если функция $f(x, \alpha)$ или тензорное поле $T^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q}(x, \alpha)$ зависит от точки пространства $x = (x^1, x^2, x^3)$ и некоторого параметра α, не связанного с пространством, то можно взять частную производную по параметру $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ или $\frac{\partial T^{i_1 \dots i_p}_{k_1 \dots k_q}(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ в каждой заданной точке. В классической механике таким параметром является время $t = \alpha$. Эта операция не связана с геометрией пространства (x^1, x^2, x^3) и производится отдельно в каждой точке. Другой общеизвестной дифференциальной операцией, не связанной с римановой метрикой, является взятие градиента функции (скалярного поля):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = \operatorname{grad} f.$$

Это — ковектор, инвариантным образом построенный из функции f в том смысле, что при заменах координат его числовая запись меняется согласно тензорному закону:

$$x = x(z), \quad \frac{\partial f}{\partial z^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial z^j}.$$

Часто встречается также следующее многомерное обобщение градиента на кососимметрические тензоры.

Определение 1. Пусть $T_{i_1 \dots i_k}$ — кососимметрический по всем индексам тензор в n-мерном пространстве с координатами

$x^1, \ldots, x^n$, $i_q = 1, \ldots, n$. Его *градиентом* $dT_{j_1 \ldots j_k j_{k+1}}$ называется кососимметрический тензор типа $(0, k+1)$ с компонентами

$$(dT)_{j_1 \ldots j_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{j_1 \ldots \widehat{j_q} \ldots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}} \tag{1}$$

(здесь значок $\widehat{j_q}$ означает, что индекс j_q пропущен).

Прежде чем проверить, что dT — тензор, рассмотрим примеры.

1) Если $k+1=1$ и $T = f(x)$ — функция, то согласно определению $(dT)_i = \dfrac{\partial T}{\partial x^i}$; таким образом, это — обычный градиент.

2) Если $T = (T_i)$ — ковектор, то $(dT)_{ij} = \dfrac{\partial T_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial T_i}{\partial x^j} = -(dT)_{ji}$. Этот тензор $(dT)_{ij}$ часто называется *ротором* ковекторного поля; для него употребляется обозначение $\operatorname{rot} T$. Ротор — это кососимметрический тензор типа $(0, 2)$.

Замечание. Если $n=3$, пространство и координаты x^1, x^2, x^3 евклидовы, то обычно тензору $(dT)_{ij}$ сопоставляют вектор $\eta^k = \operatorname{rot} T = *(dT)$ (см. § 19, п. 3), где $\eta^1 = \dfrac{\partial T_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial T_2}{\partial x^3} = (dT)_{23}$, $\eta^2 = \dfrac{\partial T_1}{\partial x^3} - \dfrac{\partial T_3}{\partial x^1} = (dT)_{31} = -(dT)_{13}$, $\eta^3 = \dfrac{\partial T_2}{\partial x^1} - \dfrac{\partial T_1}{\partial x^2} = (dT)_{12}$ или $\eta^i = \dfrac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (dT)_{jk}$.

3) Если $n=3$ и задан кососимметрический тензор $T_{ij} = -T_{ji}$, то кососимметрический тензор 3-го ранга dT имеет вид

$$(dT)_{123} = \frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1}.$$

Замечание. Если координаты (x^1, x^2, x^3) евклидовы и в соответствии с указанным правилом сопоставления вектора кососимметрическому тензору $\eta^1 = T_{23}$, $\eta^2 = -T_{13}$, $\eta^3 = T_{12}$ $\left(\eta^i = \dfrac{1}{2} \varepsilon^{ijk} T_{jk}\right)$, то

$$*(dT)_{123} = \frac{\partial \eta^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = \frac{\partial \eta^i}{\partial x^i}.$$

Операция, сопоставляющая в евклидовых координатах векторному полю $(\eta^i) = \eta$ число $\dfrac{\partial \eta^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} \eta$, называется *дивергенцией*.

Перейдем к проверке корректности предыдущего определения.

Теорема 1. *Градиент dT кососимметрического тензора ранга k типа $(0, k)$ является кососимметрическим тензором ранга $k+1$ типа $(0, k+1)$.*

Доказательство (для $k=0$, 1). Пусть задана замена

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

По определению

$$(dT)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_q (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \widehat{i_q} \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}} \tag{3}$$

в любой системе координат.

Пусть $T_{i_1 \ldots i_k}$ — компоненты тензора в координатах (x) и $T'_{i_1 \ldots i_k}$ — компоненты в координатах (x').

По определению

$$T'_{i_1 \ldots i_k} = T_{i_1 \ldots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i_k'}}. \tag{4}$$

Далее, по определению градиента тензора

$$(dT)_{i'_1 \ldots i'_{k+1}} = \sum_q (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i'_1 \ldots \widehat{i'_q} \ldots i'_{k+1}}}{\partial x^{i'_q}}, \tag{5}$$

$$(dT)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_p (-1)^{p+1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \widehat{i_p} \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_p}}. \tag{6}$$

Для доказательства теоремы необходимо подставить формулы (5) и (6) в (4) и убедиться после преобразований, что градиент $(dT)_{(i)}$ выражается через $dT_{(i)}$ по тензорному закону. Ввиду громоздкости выкладок мы проведем полное доказательство для $k=1$, $k+1=2$ (для $k=0$ справедливость утверждения теоремы была доказана в § 16).

Пусть T_i — ковектор; тогда

$$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}, \qquad T_{i'} = T_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

Имеем

$$(dT)_{l'k'} = \frac{\partial T_{k'}}{\partial x^{l'}} - \frac{\partial T_{l'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{l'}}\left(T_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(T_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\right) =$$

$$= \frac{\partial T_i}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} + T_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{l'} \partial x^{k'}} - \frac{\partial T_j}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} - T_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}} =$$

$$= \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}\right) \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} - \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} =$$

$$= \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} = (dT)_{ji} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}.$$

Итак, для этого случая теорема доказана.

2. Внешний дифференциал формы. Дадим другое определение операции градиента кососимметрического тензора, использующее связь с дифференциальными формами. Тензору $T_{i_1\dots i_k}$ соответствует форма

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} T_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \tag{7}$$

Определим форму $d\omega$ степени $k+1$, полагая

$$d\omega = \sum_{\substack{i_0 \\ i_1<\dots<i_k}} \frac{\partial T_{i_1\dots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \tag{8}$$

В частности, если $\omega = f$ (скаляр), то $d\omega = df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ — дифференциал функции.

Теорема 2. *Имеет место тождество*

$$d\omega = \sum_{i_1<\dots<i_{k+1}} (dT)_{i_1\dots i_{k+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Доказательство. Из определения dT имеем

$$\sum_{i_1<\dots<i_{k+1}} (dT)_{i_1\dots i_{k+1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_{k+1}} \sum_q (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i_1\dots \widehat{i_q}\dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}.$$

Заметим, что $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}} = (-1)^{q+1} dx^{i_q} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \overbrace{dx^{i_q}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}$. Переобозначим теперь индексы суммирования: в q-м слагаемом положим $i_0 = i_q$, $i_1 = i_1$, …, $i_k = i_{k+1}$. Ясно, что $i_1 < \dots < i_k$, причем индекс i_0 пробегает (учитывая все слагаемые) все значения от 1 до n. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема 3. *Дважды взятая операция градиента кососимметрического тензора дает тождественный нуль*:

$$d(dT) = 0 \quad \textit{или} \quad d(d\omega) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} T_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

$$d\omega = \sum_{\substack{p \\ i_1<\dots<i_k}} \frac{\partial T_{i_1\dots i_k}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k};$$

$$d(d\omega) = \sum_{\substack{p,q \\ i_1<\dots<i_k}} \frac{\partial^2 T_{i_1\dots i_k}}{\partial x^q\, \partial x^p} dx^q \wedge dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Но выражение $\dfrac{\partial^2 T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^q \partial x^p}$ симметрично по индексам q, p, а выражение $dx^q \wedge dx^p$ кососимметрично: $dx^p \wedge dx^q = -dx^q \wedge dx^p$, поэтому их свертка дает тождественный нуль. Теорема доказана.

Замечание. Формулу для дифференциала формы можно записать в таком виде:

$$d\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} (dT_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \quad (10)$$

где $T_{i_1 \ldots i_k}$ рассматривается как скалярная функция. Отсюда нетрудно получить другое доказательство того, что dT — тензор: так как дифференциал функции $dT_{i_1 \ldots i_k}$ — тензор, то и его внешнее произведение на $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ — тоже тензор.

Используя операцию коммутирования векторных полей, можно указать еще одно выражение для дифференциала формы (формула Картана).

Теорема 4. *Пусть ω — дифференциальная форма ранга k и $X_1, \ldots, X_{k+1}$ — гладкие векторные поля. Тогда значение формы $d\omega$ на полях $X_1, \ldots, X_{k+1}$ может быть найдено по формуле*

$$(k+1)\, d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \sum_i (-1)^{i-1} \partial_{X_i} \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1}). \quad (11)$$

Доказательство проведем для случая $k = 1$. Пусть $T_i dx^i = \omega$, тогда

$$2d\omega = \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}\right) dx^i \wedge dx^j.$$

Значение формы $d\omega$ на векторных полях $X = (X^i)$, $Y = (Y^i)$ равно

$$2d\omega(X, Y) = X^i Y^j \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}\right). \quad (12)$$

Формула (11) при $k = 1$ примет вид

$$2d\omega(X, Y) = \partial_X \omega(Y) - \partial_Y \omega(X) - \omega([X, Y]) = \partial_X (T_i Y^i) - \partial_Y (T_i X^i) - T_i \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x_k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right) = X^i Y^j \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}\right). \quad (13)$$

Правые части формул (12) и (13) совпадают. Теорема доказана.

Как действует дифференциал на внешнее произведение двух форм? Имеет место

Теорема 5. *Пусть* ω_1, ω_2 — *дифференциальные формы степеней* p *и* q *соответственно. Тогда*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \tag{14}$$

Доказательство достаточно провести для случая, когда формы ω_1, ω_2 — одночлены:

$$\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \quad \omega_2 = g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Тогда

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = fg\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}.$$

Поэтому

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^k} g\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} + f \frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right) \wedge (g\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}) +$$

$$+ (-1)^p (f\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}\right) =$$

$$= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

где мы использовали тождество

$$dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} =$$

$$= (-1)^p dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Теорема доказана.

В присутствии метрики g_{ij} можно определить другую важную дифференциальную операцию на формах, понижающую ранг формы на единицу и обозначаемую через δ (дивергенция кососимметрического тензора):

$$\delta = *^{-1} d *. \tag{15}$$

Явные формулы для оператора δ будут получены в § 29. Операция δ инвариантна относительно замен с положительным якобианом.

Перейдем к примерам. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство.

1. Для скалярного поля $f(x)$ дифференциал df представляет собой ковектор. Отождествляя верхние и нижние индексы, получим вектор $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

2. Пусть $\omega = T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3$. Тогда

$$d\omega = \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \\ + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1$$

— форма ранга 2. Используя оператор $*$, по форме $d\omega$ можно построить ковектор (1-форму) $* d\omega$ (см. § 19, п. 3):

$$*d\omega = \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\right) dx^1 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right) dx^2 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^3. \quad (16)$$

Если отождествить векторы и ковекторы, то эта операция превратится в переход от вектора T к вектору $*dT = \operatorname{rot} T$ — ротору векторного поля.

3. Пусть опять $\omega = T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3$. Вычислим форму $\delta\omega = *^{-1} d * \omega$. Это — форма нулевого ранга (т. е. скаляр), так как δ понижает ранг на 1. Имеем

$$\omega = T_1 dx^1 + T_2 dx^2 + T_3 dx^3 \xrightarrow{*} \\ \xrightarrow{*} T_1 dx^2 \wedge dx^3 + T_2 dx^3 \wedge dx^1 + T_3 dx^1 \wedge dx^2 \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{d} \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \xrightarrow{*^{-1}} \frac{\partial T_1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_3}{\partial x^3}.$$

Вывод.

$$\delta(T) = \operatorname{div} T = \frac{\partial T_1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_3}{\partial x^3}. \quad (17)$$

Эта формула для дивергенции справедлива лишь в евклидовых координатах.

4. Рассмотрим четырехмерное пространство-время с координатами $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 (c — скорость света) и псевдоевклидовой метрикой

$$dl^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

или

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Напомним (см. § 21), что электромагнитное поле является кососимметрическим тензором F_{ij} 2-го ранга, где $i, j = 0, 1, 2, 3$. Из теории электромагнитного поля известно, что тензор F_{ij} должен удовлетворять уравнениям Максвелла. Первая система, или, как

говорят, *первая пара* уравнений Максвелла имеет вид

$$(dF)_{ijk} = \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0, \tag{18}$$

или, короче, $dF = 0$, где $F = \sum_{i<j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$. По-другому эти уравнения можно записать, используя введенные в § 21 обозначения $\mathbf{E} = (E_\alpha)$, $E_\alpha = F_{0\alpha}$; $\mathbf{H} = (H^\alpha)$, $-H^1 = F_{23}$, $H^2 = -F_{13}$, $-H^3 = F_{12}$. Уравнение (18) с $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ примет в этих обозначениях вид

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{19}$$

а остальные уравнения вместе означают, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x^0} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{20}$$

Таким образом, система (18) эквивалентна системе двух уравнений: скалярного уравнения (19) и векторного уравнения (20), по этой причине и говорят: пара уравнений. Эти уравнения никак не связаны с наличием псевдоевклидовой метрики.

Вторая пара уравнений Максвелла для своего написания уже требует псевдоевклидовой метрики. Ее суммарный вид таков:

$$\delta F = *d*F = \frac{-4\pi}{c} j_{(4)}. \tag{21}$$

Здесь $j_{(4)}$ — четырехмерный (ко)вектор тока, $j_{(4)} = (\rho c, -\rho v^1, -\rho v^2, -\rho v^3) = (\rho, -\mathbf{j})$, где ρ — плотность электрического заряда в трехмерном пространстве, $v = (v^1, v^2, v^3)$ — обычная скорость зарядов в трехмерном пространстве. Формулы для оператора $*$ в псевдоевклидовых координатах, полученные в § 21, позволяют переписать уравнение (21) в виде системы («пары»)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{22}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{23}$$

снова составленной из одного скалярного и одного векторного уравнения.

Задачи. 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — линейно независимые в каждой точке n-мерной области векторные поля, $\omega^1, \ldots, \omega^n$ — дуальный базис 1-форм: $\omega^i(X_i) = \delta^i_j$. Доказать, что

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} c^k_{ij} \omega^i \wedge \omega^j,$$

где величины c^k_{ij} определены равенством

$$[X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k.$$

2. Доказать, что для гладкого отображения F и любой формулы ω справедливо равенство $F^*(d\omega) = dF^*(\omega)$ (см. § 22). Вывести отсюда, что $L_\xi(d\omega) = d(L_\xi\omega)$.

3. Для каждого векторного поля $X = (X^j)$ введем линейный оператор $i(X)$ на формах, полагая

$$[i(X)\omega]_{j_1 \ldots j_{k-1}} = X^j\omega_{jj_1 \ldots j_{k-1}};$$

здесь $\omega = (\omega_{j_1 \ldots j_k})$ — форма степени k.

а) Доказать, что $i(X)$ — антидифференцирование:

$$i(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge i(X)\omega_2,$$

где ω_1 — форма степени k.

б) Доказать формулу

$$i(X)d + di(X) = L_X,$$

L_X — производная Ли вдоль поля X.

§ 26. Кососимметрические тензоры и теория интегрирования

1. Интегрирование дифференциальных форм. Если в области U n-мерного пространства задана функция $f(z^1, \ldots, z^n)$, то определен интеграл функций f по области U:

$$\int \ldots \int f(z)\,dz^1 \ldots dz^n = \int\limits_U \ldots \int f(z)\,dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n. \qquad (1)$$

При этом, если задана замена координат

$$z = z(y), \qquad (2)$$

то имеет место формула замены переменных

$$\int\limits_U \ldots \int f(z)\,dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n = \int\limits_V \ldots \int Jf(z(y))\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n, \quad (3)$$

где $J = \det\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$ — якобиан, а V — прежняя область U, но записанная в координатах $y^1, \ldots, y^n$.

В этом параграфе мы будем рассматривать только замены переменных с положительным якобианом.

Заметим, что подынтегральное выражение является кососимметрическим тензором ранга n. В системе координат $z^1, \ldots, z^n$ компонента $T_{1\ldots n}$ этого тензора по определению равна $f(z) = T_{1\ldots n}$. Вспомним, что кососимметрические тензоры ранга n в n-мерном пространстве при замене координат $z = z(y)$ преобразуются по формуле $T'_{1\ldots n} = J \cdot T_{1\ldots n}$, где $J = \det\left(\frac{\partial z^i}{\partial y^j}\right)$. Таким образом, $T'_{1\ldots n} = Jf(z)$, что согласуется с формулой (3). Итак, подынтегральное выражение — это кососимметрический тензор.

Пример. Если задана риманова метрика (g_{ij}), то детерминант $g = \det(g_{ij})$ при заменах $z = z(y)$ ведет себя так:

$$g' = \det(g'_{ij}) = \det\left(g_{kl}\frac{\partial z^k}{\partial y^i}\frac{\partial z^l}{\partial y^j}\right) = J^2 g. \tag{4}$$

Поэтому выражение $\sqrt{g}$ при заменах координат с положительным якобианом ведет себя как кососимметрический тензор. Напомним, что площадь области на поверхности определялась так (§ 7, п. 4):

$$\sigma(U) = \int\int_U \sqrt{g}\, du\, dv; \quad u = z^1, \quad v = z^2, \quad n = 2; \tag{5}$$

мы видим теперь, что интеграл в правой части формулы не зависит от выбора координат.

Если в пространстве (x^1, x^2, x^3) с евклидовыми координатами задана поверхность $x^i = x^i(z)$, $i = 1, 2, 3$, и если мы хотим проинтегрировать по поверхности какую-нибудь скалярную функцию $f(x(z))$, определение которой существенно связано с этой поверхностью (например, ее гауссову кривизну), то этот интеграл определяется так: интеграл по области U на поверхности равен

$$\int\int_U f(x(z))\sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2, \tag{6}$$

где $\int\int_U \varphi(z)\, dz^1 \wedge dz^2$ — обычный кратный интеграл. Иногда выражение $\sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2$ называют мерой (элементом объема) на поверхности.

Итак, мы приходим к выводам:

1) В n-мерном пространстве для любой ограниченной области U определен интеграл $\int \ldots \int_U T$, где T — кососимметрический тензор типа $(0, n)$, $T = (T_{i_1 \ldots i_n})$.

2) В координатной записи этот тензор записывается так:

$$T = T_{1\ldots n} dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$$

(или $T_{1\ldots n} dz^1 \ldots dz^n$, если не писать значка $\wedge$).

3) $T_{1\ldots n} = f(z)$ есть скалярная функция точки, но при заменах координат $z = z(y)$ имеем

$$\int \ldots \int_U f(z)\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n = \int \ldots \int_V Jf(z)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

4) Если мы хотим интегрировать по пространству функцию $\varphi(z)$, то необходимо иметь заданный и отмеченный кососимметрический тензор T в пространстве (называемый элементом объема или мерой).

Тогда интегралом от функции $\varphi(z)$ по определению является интеграл от тензора $\varphi(z)T$:

$$\int\limits_U \dots \int \varphi(z)\, T = \int\limits_U \dots \int \varphi(z)\, T_{1\dots n} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n. \tag{7}$$

5) В случае, если фиксирована метрика (g_{ij}), такой отмеченный кососимметрический тензор $T = T_{1\dots n} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$ (относительно замен с положительным якобианом) задается в виде

$$T = d\sigma = \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n.$$

При этом интеграл от функции $\varphi(z)$ определяется как

$$\int\limits_U \dots \int \varphi(z)\, T = \int\limits_U \dots \int \varphi(z)\, \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n.$$

6) Значок $\wedge$ означает, что $dz^i \wedge dz^j = -dz^j \wedge dz^i$. При заменах переменных $z^i = z^i(y)$, ввиду равенств $dz^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial y^j} dy^j$ и $dy^i \wedge dy^j = -dy^j \wedge dy^i$, получаем

$$dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_k} = \sum_{j_1 < \dots < j_k} J^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}, \tag{8}$$

где $J^{(i)}_{(j)}$ — минор матрицы Якоби $\dfrac{\partial z^i}{\partial y^j}$. В частности, при $k = n$ имеем

$$dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = J dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n, \tag{9}$$

где J — якобиан.

7) В евклидовых координатах имеем $\sqrt{|g|} = 1$, и поэтому $d\sigma = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Необходимо различать два выражения:

а) «интеграл от кососимметрического тензора ранга n по области» — этот интеграл имеет смысл всегда («интеграл II рода»);

б) «интеграл I рода от функции по области»: для вычисления этого интеграла надо знать, по какому элементу объема (мере) ведется интегрирование; надо функцию умножить на этот элемент объема (кососимметрический тензор) и лишь затем проинтегрировать. Очевидно, этот интеграл сводится к первому.

Перейдем теперь к произвольным кососимметрическим тензорам ранга k типа $(0, k)$ в n-мерном пространстве. Рассмотрим сначала тензор T_j типа $(0, 1)$ (ковектор) в n-мерном пространстве. В § 18 каждому ковектору T_j мы поставили в соответствие дифференциальную форму $\omega = T_j dz^j$ первой степени.

С чем связано название «дифференциальная форма»? Оказывается, выражение $T_j dz^j$ можно проинтегрировать по любой кривой $z^i = z^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Действительно, рассмотрим выражение

$$\int\limits_a^b T_j \dot{z}^j dt = \int\limits_a^b T_j \xi^j dt, \tag{10}$$

где $\xi^j = \dot{z}^j = \dfrac{dz^j}{dt}$ — вектор скорости.

Это выражение называется интегралом дифференциальной формы по кривой (в анализе — «интеграл 2-го рода»).

Другое дело, когда задана кривая $z^i = z^i(t)$ и некоторая скалярная функция $f(z(t))$, существенно связанная именно с этой кривой,— например, ее кривизна или кручение. Тогда вводится мера на кривой — элемент длины $dl = |\dot{z}|dt$, и интегралом от функции $f(z(t))$ вдоль кривой называется выражение $\int_a^b f(z(t))\,dl$ (в анализе это «интеграл 1-го рода»). В сущности элемент длины на кривой $dl = |\dot{z}|dt$ — это одномерный вариант общего «элемента объема» $d\sigma = \sqrt{|g|}\,dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$, вводившегося ранее, так как для $n = 1$ $|\dot{g}| = |g_{11}|$ и $\sqrt{|g_{11}|}dt = dl$, где $g_{11} = |\dot{z}|^2$, $t = z^1$.

Что же касается интеграла 2-го рода — интеграла от ковекторного поля (дифференциальной формы) по любой кривой,— то этот интеграл обладает следующими свойствами: 1) он не зависит от того, как на кривой введен параметр:

$$\int_a^b T_\alpha \frac{dz^\alpha}{dt}\,dt = \int_{a'}^{b'} T_\alpha \frac{dz^\alpha}{d\tau}\,d\tau, \tag{11}$$

где $t = t(\tau)$ и τ меняется от a' до b', когда t меняется от a до b; 2) результат интегрирования не зависит также и от координат в пространстве: если $z = z(y)$ и $T'_\beta = T_\alpha \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\beta}$, причем $z^\alpha(t) = z^\alpha(y(t))$, то имеет место равенство

$$\int_a^b T_\alpha \frac{dz^\alpha}{dt}\,dt = \int_a^b T'_\beta \frac{dy^\beta}{dt}\,dt. \tag{12}$$

В самом деле, $T_\alpha dz^\alpha \equiv T'_\beta dy^\beta$ и оба интеграла берутся вдоль одной и той же кривой $z^\alpha = z^\alpha(t)$ или $y^\beta = y^\beta(t)$, где $z(t) = z(y(t))$; поэтому они совпадают.

Таким образом, мы уже определили интегрирование кососимметрического тензора ранга n по (n-мерной) области в n-мерном пространстве и интегрирование ковекторного поля по любой кривой.

Оказывается, кососимметрические тензоры ранга k (типа $(0, k)$) интегрируются по k-мерным поверхностям в n-мерном пространстве. Пусть k-мерная поверхность задана параметрически,

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

и пусть задана область U в k-мерном пространстве с координатами $z^1, \ldots, z^k$.

Как вводится интеграл от кососимметрического тензора $T = (T_{i_1 \ldots i_k})$ в n-мерном пространстве с координатами $x^1, \ldots, x^n$

по области U в k-мерном пространстве с координатами $z^1, \ldots, z^k$, если задано вложение (поверхность) $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$?

Мы будем в целях удобства использовать для кососимметрических тензоров язык дифференциальных форм.

В § 22 п. 1 было определено ограничение кососимметрического тензора $T_{i_1 \ldots i_k}$ на поверхность $x = x(z)$. Это уже тензор ранга k в k-мерном пространстве (на поверхности).

Определение 1. Обычный кратный интеграл по области от ограничения тензора $(T_{i_1 \ldots i_k}) = T$ на поверхность называется интегралом от кососимметрического тензора $(T_{i_1 \ldots i_k}) = T$, заданного в n-мерном пространстве, по области U на этой поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$. Он имеет вид

$$\int_U \ldots \int T = \int_U \ldots \int \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} J^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k} \right) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k. \quad (14)$$

Напомним, что выражение $\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ называется дифференциальной формой степени k; мы уже знаем, что это просто вид записи кососимметрических тензоров типа $(0, k)$. Этот интеграл от формы (тензора) по области на поверхности обладает двумя свойствами:

1) Этот интеграл не меняется при замене переменных на поверхности $z^q = z^q(z')$, $q = 1, \ldots, k$. В самом деле, ограничение

$$\left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} J^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k} \right) dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k$$

является тензором ранга k в k-мерном пространстве $z^1, \ldots, z^k$; при замене переменных $z^q = z^q(z'^1, \ldots, z'^k)$ произойдет обычная замена переменных в кратном интеграле по области U в k-мерном пространстве.

2) Этот интеграл не меняется при замене координат $x^i = x^i(x'^1, \ldots, x'^n)$ в самом n-мерном пространстве. Это немедленно следует, как и для $k = 1$, из того, что при замене $x = x(x')$ имеет место тождество

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j_1 < \ldots < j_k} T'_{j_1 \ldots j_k} dx'^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx'^{j_k}, \quad (15)$$

где $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j$ и компоненты $T'_{j_1 \ldots j_k}$ получаются из $T_{i_1 \ldots i_k}$ по обычному тензорному закону. В евклидовом пространстве на поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$, определяется римапова метрика: если $x^1, \ldots, x^n$ — евклидовы координаты, то $g_{ij} dz^i dz^j =$

$= \sum_{q=1}^{n} (dx^q)^2$, где $dx^q = \frac{\partial x^q}{\partial x^\alpha} dz^\alpha$ (см. § 7); при этом $g_{ij} = g_{ji}$ и $dz^i\, dz^j = dz^j\, dz^i$.

Элемент объема на поверхности задается, как всегда, в виде

$$d\sigma = \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k; \quad g = \det(g_{ij}). \tag{16}$$

Пусть задана какая-либо функция $f(z^1, \ldots, z^k)$ на поверхности.

Определение 2. Интегралом (I рода) от функции $f(z^1, \ldots, z^k)$ по поверхности называется интеграл от функции по элементу объема $d\sigma$ на поверхности:

$$\text{интеграл I рода} = \underset{\text{(на поверхности)}}{\int \ldots \int_U} f(z^1, \ldots, z^k) \sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k.$$

Важно отметить, что интеграл II рода не связан с римановой геометрией в пространстве и на поверхности, а интеграл I рода связан с ней через элемент объема $\sqrt{|g|}\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k$, который является кососимметрическим тензором ранга k (относительно замен с положительным якобианом), определенным лишь на данной поверхности по ее римановой метрике, сама же эта риманова метрика поверхности определяется по евклидовой метрике во всем пространстве.

2. Примеры дифференциальных форм. Пример 0. Тривиальным примером «интеграла» от тензора 0-го ранга — скаляра $f(z)$ — по поверхности размерности 0 (точке P) является по определению значение функции $f(x)$ в этой точке P: «интеграл» $= f(P)$. Это тривиальное замечание сделано намеренно — оно будет полезно при обсуждении общей формулы Стокса.

Пример 1. Интеграл ковекторного поля или дифференциальной формы степени 1 $(T_\alpha) = T_\alpha dx^\alpha$ по кривой $x^i = x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, обсуждался в предыдущем пункте.

$$\text{Интеграл (II рода) по кривой} = \int_a^b T_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt}\, dt. \tag{17}$$

Пример 2. Интеграл от тензорного поля $(T_{ij}) = \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j$ (дифференциальной формы степени 2) по поверхности $x^i = x^i(z^1, z^2)$, $i = 1, \ldots, n$, имеет следующий вид:

$$\text{интеграл по поверхности} = \underset{\text{(на поверхности)}}{\iint_U} \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j, \tag{18}$$

где $T_{ij} = T_{ij}(x(z))$ и $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz^j$, $dz^i \wedge dz^j = -dz^j \wedge dz^i$. В трех-

мерном пространстве ($n=3$) и евклидовых координатах x^1, x^2, x^3, в которых $(dl)^2=\sum (dx^i)^2$, эти интегралы обычно записывают так:

1) интеграл по кривой от ковекторного поля

$$\int\limits_a^b T_\alpha \frac{dz^\alpha}{dt}\,dt=\int\limits_P^Q T\xi dt, \tag{19}$$

где $\xi=\dot z$, $T=(T_\alpha)=(T^\alpha)$ (вектор и ковектор в евклидовых координатах — совпадающие понятия, и это инвариантно относительно вращений), $P=(z^1(a),\ z^2(a),\ z^3(a))$, $Q=(z^1(b),\ z^2(b),\ z^3(b))$, $a\leqslant t\leqslant b$, $T\xi=\langle T,\ \xi\rangle$ — скалярное произведение;

2) интеграл по поверхности («поток») от кососимметрического тензорного поля типа (0, 2) (или формы степени 2)

$$\int\int_U \sum_{i<j} T_{ij}dx^i\wedge dx^j=\int\int_U \sum_{i<j} T_{ij}(x(z))\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^p}dz^p\right)\wedge\left(\frac{\partial x^j}{\partial z^q}dz^q\right)=$$

$$=\int\int_U\left[\sum_{i<j}T_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^1}\frac{\partial x^j}{\partial z^2}-\frac{\partial x^j}{\partial z^1}\frac{\partial x^i}{\partial z^2}\right)\right]dz^1\wedge dz^2.$$

Заметим, что $\dfrac{\partial x^i}{\partial z^1}\dfrac{\partial x^j}{\partial z^2}-\dfrac{\partial x^j}{\partial z^1}\dfrac{\partial x^i}{\partial z^2}=J^{ij}_{12}$ — минор матрицы Якоби $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial z^q}\right)$, $i=1,\ 2,\ 3$; $q=1,\ 2$. Поэтому окончательно получаем

$$\int\int_U\sum_{i<j}T_{ij}dx^i\wedge dx^j=\int\int_U\left[\sum_{i<j}T_{ij}J^{ij}_{12}\right]dz^1\wedge dz^2. \tag{20}$$

В трехмерном евклидовом пространстве с евклидовыми координатами x^1, x^2, x^3 для поверхности $x^i=x^i(z^1,\ z^2)$ определены базисные касательные векторы в каждой точке поверхности:

$$\xi=(\xi^i)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^1}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial z^1}e_i,\qquad \eta=(\eta^i)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial z^2}e_i;$$

их векторное произведение $[\xi,\eta]$ нормально к поверхности. Векторное произведение — это в сущности тензор $T^{ij}=(\xi^i\eta^j-\xi^j\eta^i)$, которому сопоставляется «вектор»:

$$T^1=T^{23},\quad T^2=-T^{13},\quad T^3=T^{12};\quad T=(T^1,\ T^2,\ T^3).$$

При этом, очевидно, $T^{ij}=J^{ij}_{12}$.

Вектор $[\xi,\ \eta]$ нормален к поверхности. Его длина равна $\sqrt{g}$, где $g=\det(g_{ij})$,

$$g_{ij}dz^idz^j=\sum_{i=1}^3(dx^i)^2;\quad dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial z^j}dz^j$$

(см. § 7). Поэтому интеграл по области U на поверхности $x^i = x^i(z^1, z^2)$ в евклидовом пространстве и в евклидовых координатах (x^1, x^2, x^3) приводится к виду

$$\int\int_U \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \int\int_U \left(\sum_{i<j} T_{ij} J_{12}^{ij} \right) dz^1 \wedge dz^2 =$$

$$= \int\int_U \langle T, [\xi, \eta] \rangle \, dz^1 \wedge dz^2 = \int\int_U \langle T, n \rangle \sqrt{g} \, dz^1 \wedge dz^2,$$

где n — единичный вектор нормали,

$$n = \frac{[\xi, \eta]}{|[\xi, \eta]|} = \frac{[\xi, \eta]}{\sqrt{g}}.$$

Замечание. В четырехмерном пространстве ($n = 4$) интегралы от форм степени 2 по поверхностям ($k = 2$) не могут быть сведены к операциям над одними векторами даже и в евклидовом пространстве.

Что же касается трехмерного случая, то нами доказана

Теорема 1. *В евклидовом трехмерном пространстве интеграл от форм степени 2 по поверхностям совпадает с интегралом I рода следующего вида*:

$$\int\int_U \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \int\int_U \langle T, n \rangle \sqrt{g} \, dz^1 \wedge dz^2, \qquad (21)$$

где U — область на поверхности, заданной в евклидовых координатах (x_1, x_2, x_3) в виде $x^i = x^i(z^1, z^2)$, $i = 1, 2, 3$, n — единичный вектор нормали к поверхности, T — вектор, сопоставленный в евклидовых координатах (x^1, x^2, x^3) тензору (T_{ij}), $g_{ij} dz^i dz^j = \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz^j.$$

В трехмерном случае в евклидовых координатах (x^1, x^2, x^3) ввиду связи между кососимметрическими тензорами (формами) типа (0, 2) и векторами, а также ввиду связи между векторами и ковекторами говорят обычно об интегралах от векторного поля $T_\alpha = T^\alpha$

а) по замкнутой кривой: $\oint_\Gamma T_\alpha dx^\alpha$;

б) по замкнутой поверхности: $\int\int_U \langle T, n \rangle \sqrt{g} \, dz^1 \wedge dz^2$, где n — единичная нормаль к поверхности.

Напомним два определения из анализа:

1) Если кривая Г является замкнутой (т. е. Г имеет вид $x^i(t)$, где $a \leqslant t \leqslant b$, $x^i(a) = x^i(b)$, $i = 1, 2, 3$), то интеграл от ковектор-

ного поля

$$\oint_{\Gamma} T_\alpha \dot{x}^\alpha dt$$

называют *циркуляцией поля* вдоль кривой Г.

2) Если поверхность $U = \{f(x^1, x^2, x^3) = \text{const}\}$ является замкнутой в том смысле, что она является границей области $f(x^1, x^2, x^3) \leqslant 0$, которая ограничена в пространстве, то интеграл

$$\int\int_U \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

называется *полным потоком* через поверхность тензорного поля $(T_{ij}) = -(T_{ji})$ или, в евклидовом случае, потоком векторного поля $T = (T^1, T^2, T^3)$ через эту поверхность; $T^1 = T_{23}$, $T^2 = -T_{13}$, $T^3 = T_{12}$, если x^1, x^2, x^3 — евклидовы координаты.

Возможно, что поверхность в целом нельзя задать параметрически в виде $x^i = x^i(z^1, z^2)$, если она задана уравнением $f(x^1, x^2, x^3) = C$. Однако это можно сделать около каждой неособой точки (см. § 7). Интеграл не зависит от выбора координат на поверхности. Поэтому при вычислении интеграла по всей поверхности нужно разбить ее на куски так, чтобы каждый кусок по отдельности был представлен параметрически; затем надо взять сумму интегралов по кускам. Например, сферу $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ можно разбить на два таких куска — верхнюю и нижнюю полусферы.

Пример 3. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве задана гиперповерхность M^{n-1}:

$$F(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad \operatorname{grad} F \neq 0, \tag{22}$$

или локально $x^\alpha = x^\alpha(y^1, \ldots, y^{n-1})$. Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — евклидовы координаты. Определена «форма кривизны»

$$K d\sigma = K \sqrt{g}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}, \tag{23}$$

где K — кривизна (для $n = 2$ это — кривизна кривой на плоскости, для $n = 3$ это — гауссова кривизна, для случая $n > 3$ мы определения не приводим, поскольку этот случай для нас не важен).

Рассмотрим сферу S^{n-1}, задаваемую уравнением $\sum (x^\alpha)^2 = 1$. На сфере определен вращательно инвариантный элемент $(n-1)$-мерного объема Ω_{n-1}, который для $n = 2, 3$ имеет вид

$$\begin{aligned} &n = 2, \quad \Omega_{n-1} = d\varphi, \\ &n = 3, \quad \Omega_{n-1} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \end{aligned} \tag{24}$$

Определим гауссово сферическое отображение поверхности M^{n-1} в сферу S^{n-1} следующим образом: рассмотрим в точке P

поверхности M^{n-1} единичную нормаль n_P к поверхности и перенесем этот вектор n_P в начало координат. Конец вектора n_P — это точка сферы S^{n-1}. Соответствие $P \mapsto n_P$ определяет гауссово отображение

$$\psi\colon M^{n-1} \to S^{n-1} \tag{25}$$

(точка P переходит в конец вектора n_P, исходящего из начала координат).

Теорема 2. *Верна следующая формула:*

$$K\,d\sigma = \psi^*(\Omega_{n-1}),$$

$$\begin{cases} K dl = \psi^*(d\varphi) & \text{при } n=2, \\ K\sqrt{g}\,dy^1 \wedge dy^2 = \psi^*(\Omega), & \text{где } \Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \quad \text{при } n=3, \end{cases}$$

где $d\sigma = \sqrt{g}\,dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1}$ — *элемент* $(n-1)$*-мерного объема в локальных координатах* $y^1, \ldots, y^{n-1}$ *на поверхности.*

(Операция ψ^* на тензорах типа $(0, k)$ определена в § 22.)

Доказательство. Доказательство одинаково для всех $n \geqslant 2$. Мы проведем его для $n=3$. Выберем в $\mathbb{R}^3$ евклидовы координаты с началом P так, чтобы ось $z = x^3$ была ортогональна к поверхности в точке P, а оси $x = x^1$ и $y = x^2$ были касательны к поверхности. Тогда $y^1 = x$, $y^2 = y$, и поверхность задается около точки P уравнением $z = f(x, y)$ с $df|_P = 0$. Далее, $K = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$, $g_{ij} = \delta_{ij}$ в точке P ($f_x = f_y = 0$). На сфере $S^{n-1} = S^2$ выберем такие же координаты по отношению к точке $\psi(P) = Q$, так что ось $\bar{z}$ ортогональна S^2, а оси $\bar{x}$ и $\bar{y}$ касаются S^2; форма $\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ имеет в точке Q вид $\Omega = d\bar{x} \wedge d\bar{y}$, а сфера задается около точки Q уравнением $\bar{z} = \sqrt{1 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2}$; метрика сферы в точке Q имеет вид $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Координаты нормального вектора в точке P' около точки P имеют вид

$$\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right)$$

(причем $f_x = f_y = 0$ в точке P). Поэтому около точки P гауссово отображение ψ записывается в виде

$$\bar{x} = \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \bar{y} = \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \tag{26}$$

(точка P' с координатами x, y переходит в точку Q' с координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$).

По определению формы $\psi^*(\Omega)$ (см. § 22) имеем

$$\psi^*(\Omega)|_P = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)\Big|_P dx \wedge dy = J\,dx \wedge dy, \tag{27}$$

где J — якобиан отображения φ в точке P. Так как $f_x = f_y = 0$ в точке P, то, очевидно, $J = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = K$ (гауссова кривизна). Так как модуль $|g|$ в точке P равен 1, то окончательно в выбранной системе координат (в точке P) верна формула

$$K\sqrt{|g|}\,dx \wedge dy = \psi^*(\Omega_{n-1}), \quad n = 3. \tag{28}$$

Теорема доказана для $n = 3$. Для всех остальных n доказательство полностью аналогично.

Замечание. При $n = 2$ имеем $\Omega = d\varphi$ и форма $K\sqrt{|g|}d\varphi$ для кривой $x^1 = x^1(y)$, $x^2 = x^2(y)$ имеет вид $K\sqrt{|g|}dy = K\,dl$, где dl — элемент длины (натуральный параметр).

3. Общая формула Стокса. Примеры. Как было отмечено в предыдущем пункте, определение интеграла от формы степени k по k-мерной поверхности в n-мерном пространстве не обязательно требует параметризации этой поверхности целиком в виде $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$. Так как интеграл инвариантен относительно замен координат в пространстве и на поверхности и так как интеграл по сумме областей равен сумме интегралов, то можно разбить поверхность на несколько кусков, а затем на каждом куске можно отдельно ввести координаты. После этого, проинтегрировав по каждому куску, надо сложить результаты и получить интеграл по поверхности.

Другое замечание состоит в том, что часто на поверхностях можно ввести такие глобальные координаты $z^1, \ldots, z^k$, которые имеют особые точки (см. гл. 1 и 2) на множестве меньшей размерности, интеграл от формы степени k по которому не даст никакого вклада. Такими координатами часто пользуются в теории интегрирования. Например, такими являются полярные координаты (r, φ) на плоскости (особая точка $r = 0$) цилиндрические и сферические координаты в пространстве: (r, φ, z) — цилиндрические (особые точки составляют прямую $r = 0$), (r, θ, φ) — сферические (особые точки заполняют ту же прямую и отвечают значениям координат $r = 0$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$). На сфере имеются координаты (θ, φ) с особыми точками $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Сфера — это простейшая поверхность, на которой в принципе нельзя ввести координат (единой системы) без особых точек. Во всех этих примерах множество особых точек координатных систем было малым и оно не давало вклада в интегралы. Поэтому мы его «не замечали». Из анализа известно о существовании связи между интегралами по поверхности и по ее границе (формулы Грина для $n = 2$, Гаусса — Остроградского для $n = 3$, $k = 3$ и Стокса для $n = 3$, $k = 2$). Мы рассмотрим сейчас эти формулы с точки зрения теории кососимметрических тензоров (дифференциальных форм).

Ввиду аддитивности интеграла достаточно знать основные определения для кусков поверхности. Пусть задана область U в k-мерном пространстве $z^1, \ldots, z^k$ с помощью неравенства

$f(z^1, \ldots, z^k) \leqslant C$, и пусть Γ — это ее граница, определенная уравнением $f(z^1, \ldots, z^k) = C$. Пусть также задано вложение этой области с границей в n-мерное пространство с координатами $x^1, \ldots, x^n$:

$$x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Мы получим параметрически заданную поверхность, область U на ней и ее границу Γ — поверхность размерности $k-1$.

Какова связь между интегралами по области U и по ее границе Γ от всевозможных форм соответствующей степени в n-мерном пространстве $(x^1, \ldots, x^n)$?

Наиболее простой случай — это случай $k = 1$; в этом случае $x^i = x^i(t)$, $z^1 = t$ — кривая, область U — это отрезок $a \leqslant t \leqslant b$, граница Γ — это пара точек $t = a$ и $t = b$, причем (чисто формально) точка a берется со знаком $-$, а точка b со знаком $+$.

Специально упоминался тривиальный случай «интеграла» от скаляра («формы степени 0») по 0-мерной «поверхности», состоящей по определению из нескольких точек со знаками.

«Поверхность размерности 0» — это формальная сумма точек $\sum \pm P_i$, где P_i — точки пространства. «Интеграл» от функции $f(x)$ по «поверхности размерности 0» — это по определению сумма значений функции в этих точках с соответствующими знаками:

$$\text{интеграл} = \sum_i \pm f(P_i).$$

Если в пространстве задана кривая $x^i(t)$ и отрезок U на ней $(a \leqslant t \leqslant b)$ с границей $\Gamma = Q - P$, то мы знаем из анализа формулу (Ньютона — Лейбница)

$$\int_\Gamma f = f(Q) - f(P) = \int_U df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}\, dt, \tag{29}$$

$$P = x^i(a), \quad Q = x^i(b).$$

Это — простейшая «формула Стокса», связывающая интеграл по границе с интегралом по области.

В известном смысле многомерные формулы типа Стокса являются ее прямыми обобщениями и, более того, могут быть формально сведены к этой.

Вернемся к общему случаю области U в координатах $z^1, \ldots, z^k$ на поверхности $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$, с границей Γ, заданной уравнением $f(z^1, \ldots, z^k) = C$ (область U задается неравенством $f(z) \leqslant C$).

Если в пространстве $x^1, \ldots, x^n$ задана форма степени $k-1$ (т. е. кососимметрический тензор типа $(0, k-1)$), записанная в виде $T = \sum_{i_1 < \ldots < i_{k-1}} T_{i_1 \ldots i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$, то ее можно проинтегрировать по $(k-1)$-мерной поверхности Γ — границе области U на поверхности $x^i(z^1, \ldots, z^k)$, $i = 1, \ldots, n$.

Верна общая

Теорема 3. *Для любой дифференциальной формы*

$$T = \sum_{i_1<\ldots<i_{k-1}} T_{i_1\ldots i_{k-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}}$$

с гладкими коэффициентами $T_{i_1\ldots i_{k-1}}(x)$, *любой гладкой поверхности* $x^i(z^1, \ldots, z^k)$ *и ограниченной области* U *на ней с гладкой границей* Γ, *состоящей из одного куска, имеет место формула*

$$\pm \int_\Gamma T = \int_U dT. \tag{30}$$

Тривиальный вариант этой формулы для $k = 1$, $k - 1 = 0$ *был указан выше. Здесь* dT — *форма степени* k (*кососимметрический градиент тензора* $T_{i_1\ldots i_{k-1}}$ *или дифференциал формы степени* $k - 1$).

В двумерном и трехмерном случае эта формула для разных k носит имена Грина, Гаусса — Остроградского и Стокса; эти специальные случаи формулы (30) по отдельности доказываются в курсе анализа. Мы разберем эти случаи.

1. Плоский случай ($n = 2$). Задана замкнутая кривая Γ на плоскости $x^i = x^i(t)$, $x^i(a) = x^i(b)$. Пусть эта кривая ограничивает область U на плоскости. Для любого (ко)векторного поля $T_\alpha dx^\alpha$ — формы степени 1 — определен интеграл по кривой Γ. Если поле $T_\alpha dx^\alpha$ определено и не имеет особенностей внутри области U, то справедлива формула

$$\int_\Gamma T_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt}\, dt = \int_U \int \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

или

$$\int_\Gamma (T_1 dx + T_2 dy) = \int_U \int \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \tag{31}$$

Это — формула Грина (частный случай общей формулы Стокса).

Следующее дополнение относится к случаю, когда рассматриваемая плоскость есть плоскость комплексной переменной $z = x + iy$. Пусть $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ — комплекснозначная функция. Рассмотрим интеграл

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = \oint_\Gamma (u + iv)(dx + i\, dy) = \oint_\Gamma (u\, dx - v dy) + i \oint_\Gamma (v dx + u dy).$$

Применим формулу Грина

$$-\oint_\Gamma f(z)\, dz = \int_U \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \int_U \int \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \wedge dy.$$

Получаем вывод: если всюду внутри области U функция $f(z)$

является гладкой и выполнены условия Коши — Римана (см. § 12)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{32}$$

то форма $f(z)dz$ является замкнутой.

Из этого факта вытекает: если n — целое неотрицательное число, то $\oint_\Gamma z^n dz = 0$ для любого замкнутого контура Γ; если n отрицательно, то $\oint_\Gamma z^n dz = 0$ для контура Γ, не охватывающего 0, и $\oint_\Gamma z^n dz$ не зависит от Γ в случае, если Γ обходит 0, скажем, против часовой стрелки. Беря в качестве Γ единичную окружность $z(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, в результате простого вычисления получаем

$$\oint_\Gamma z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{если } n = -1. \end{cases}$$

Это лежит в основе важной *формулы вычетов*. Именно, для равномерно сходящихся рядов $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ имеет место формула (контур Γ охватывает точку a и лежит в области равномерной сходимости ряда)

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma f(z)\,dz &= 2\pi i c_{-1}, \\ \oint_\Gamma (z-a)^{-k} f(z)\,dz &= 2\pi i c_{k-1}. \end{aligned} \tag{33}$$

Эти формулы позволяют для аналитической функции $f(z)$ вычислить коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора (если все степени $n \geqslant 0$) или Лорана ($-\infty < n < \infty$) через интегралы.

2. Трехмерный случай. Пусть задано трехмерное пространство с координатами x^1, x^2, x^3. Здесь следует различать два случая: $k = 2$ и $k = 3$.

а) Пусть $k = 3$, U — область и Γ — ее граница. Тогда имеет место формула

$$\iint_\Gamma \sum_{i<j} T_{ij} dx^i \wedge dx^j = \iiint_U \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial T_{13}}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{34}$$

Если x^1, x^2, x^3 — евклидовы координаты, то можно определить вектор T, полагая $T^1 = T_{23}$, $T^2 = -T_{13}$, $T^3 = T_{12}$. Если, далее, n — единичный вектор нормали к поверхности, то согласно теореме 1

получаем

$$\int_\Gamma\int \sum_{i<j} T_{ij}dz^i \wedge dx^j = \int_\Gamma\int \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2, \tag{35}$$

где z^1, z^2 — координаты на поверхности, $d\sigma = \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2$ — элемент площади на ней.

Далее, $\dfrac{\partial T_{12}}{\partial x^3} - \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x^1} = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^i} = \operatorname{div} T.$

Окончательно получаем

$$\int_\Gamma\int \langle T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2 = \int_\Gamma\int \langle T, n\rangle\, d\sigma = \int_U\int\int (\operatorname{div} T)\, dx^1 \wedge \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{36}$$

Это формула Гаусса — Остроградского в трехмерном евклидовом пространстве.

б) Пусть $k = 2$, U — область на поверхности $x^i = x^i(z^1, z^2)$, $i = 1, 2, 3$, Γ — граница этой области (кривая). Имеем

$$\oint_\Gamma T_\alpha dx^\alpha = \int_U\int \left[\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3\right]. \tag{37}$$

В евклидовом случае, когда не надо различать векторы и ковекторы, а также можно сопоставить кососимметрическому тензору (T_{ij}) вектор $T = (T^i)$, получим (формула Стокса)

$$\oint_\Gamma T_\alpha dx^\alpha = \int_U\int \langle \operatorname{rot} T, n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2, \tag{38}$$

где $\operatorname{rot} T$ — вектор, сопоставленный кососимметрическому тензору $(\operatorname{rot} T)_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial T_\beta}{\partial x^\alpha} - \dfrac{\partial T_\alpha}{\partial x^\beta}$.

Итак, во всех этих случаях общая формула Стокса с помощью теоремы 1 преобразуется в разные интегральные формулы из курса анализа. Тем самым она доказана для трехмерного пространства.

В заключение мы отметим, что в формулировке общей теоремы Стокса не надо обязательно считать границу Γ состоящей из одного куска. Если граница Γ состоит из нескольких кусков (рис. 31), то интегралы по разным кускам войдут со знаками $+$ (или $-$), которые нужно выбирать правильно. Это отмечалось уже раньше для тривиального случая $k = 1$, в котором граница Γ отрезка кривой состоит из двух точек: одна (конечная) со знаком $+$, а вторая (начальная) со знаком $-$. Здесь следует отме-

тить, что выбор знака в выражении $\int\int_\Gamma \langle T,\ n\rangle \sqrt{g}\, dz^1 \wedge dz^2$ (или, как говорят, «ориентации» границы Γ) определяется направлением единичной нормали n.

Укажем теперь одно важное приложение общей формулы Стокса.

Рассмотрим четырехмерное пространство $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 с метрикой $g_{ij} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix}$, где c — скорость света, t — время.

Пусть $F_{ik} = -F_{ki}$ — тензор электромагнитного поля, $i, k = 0, 1, 2, 3$. Мы будем сейчас изучать свойства этого тензора при неизменном времени $x^0 = ct$, так что разрешается преобразовывать лишь пространственные координаты x^i, $i = 1, 2, 3$:

$$x'^0 = x^0,\ x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3).$$

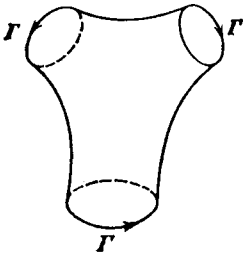


Рис. 31

В этом случае тензор (F_{ik}) в четырехмерном пространстве определяется ковектором электрического поля $E_\alpha = F_{0\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$, и тензором магнитного поля $H_{\beta\alpha} = -H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Если координаты x^1, x^2, x^3 евклидовы, то магнитное поле определяется вектором магнитного поля (§ 21)

$$H^1 = H_{23},\ H^2 = -H_{13},\ H^3 = H_{12}.$$

На языке дифференциальных форм имеем (см. § 25)

$$d\,(F_{ij}dx^i \wedge dx^j) = 0 \text{ (первая пара уравнений Максвелла)}$$

или в трехмерной евклидовой записи:

а) $\operatorname{div} \mathbf{H} = \dfrac{\partial H^i}{\partial x^i} = 0;$

б) $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$

Из уравнения а) и формулы Гаусса — Остроградского получаем (Γ — граница области U)

$$\int\int\int_U \operatorname{div} \mathbf{H}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int\int_\Gamma (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})\, d\sigma = 0$$

(«поток магнитного поля сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю»).

Из уравнения б) и формулы Стокса имеем

$$\int\int_U \langle \operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha$$

(Γ — граница области U на поверхности),

$$-\int\int_U \left\langle \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \boldsymbol{n} \right\rangle d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha$$

(«производная по времени от потока магнитного поля через поверхность со знаком минус равна циркуляции электрического поля по границе поверхности»).

Вторая пара уравнений Максвелла имеет вид (см. § 25)

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{\partial F^{i0}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j^i_{(4)},$$

где $j_{(4)} = (c\rho, j_1, j_2, j_3)$, ρ — плотность заряда, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ — трехмерный вектор тока (четырехмерная дивергенция тензора F_{ik} в метрике $\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix}$ равна (со знаком минус) четырехмерному вектору тока, умноженному на $4\pi/c$).

В трехмерной форме это дает:

а) $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$;

б) $\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$.

Из а) и формулы Гаусса — Остроградского имеем

$$\int\int\int_U 4\pi\rho \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int\int_\Gamma \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma$$

(«поток электрического поля через границу области равен с точностью до 4π полному заряду в этой области»). Из б) и формулы Стокса имеем

$$\frac{1}{c}\int\int_U \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{n}\, d\sigma + \int\int_U \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\mathbf{n}\, d\sigma = \oint_\Gamma H_\alpha dx^\alpha,$$

где Γ — граница области U на поверхности («полный ток через поверхность плюс производная от потока электрического поля через эту поверхность равен циркуляции магнитного поля по границе этой поверхности»).

Мы видим здесь различное геометрическое содержание первой и второй пар уравнений Максвелла. Первая пара уравнений Максвелла не связана ни с какой метрикой пространства; что же касается второй пары, то ее нельзя написать без метрики. Обыч-

ная форма этих уравнений тесно связана с евклидовыми координатами.

4. Доказательство общей формулы Стокса для куба. Выше было показано, что классические интегральные формулы Грина и Гаусса — Остроградского являются частными случаями общей формулы Стокса. В этом пункте мы докажем общую формулу Стокса для случая, когда областью интегрирования является k-мерный куб.

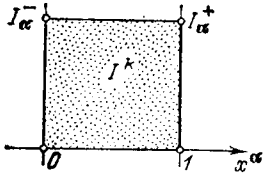


Рис. 32

Сингулярный куб σ пространства $\mathbb{R}^n$ определяется как гладкое отображение $\sigma\colon I^k \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant k$, где I^k — декартов куб размерности k:

$$I^k = \{(x^1, \ldots, x^k) \mid 0 \leqslant x^\alpha \leqslant 1\}.$$

Уравнения $x^\alpha = 0$ и $x^\alpha = 1$ определяют две $(k-1)$-мерные грани I_α^- и I_α^+ соответственно (рис. 32). Через ∂I^k обозначим границу куба I^k: $\partial I^k = \bigcup\limits_\alpha (I_\alpha^+ \cup I_\alpha^-)$. Пусть φ^{k-1} есть $(k-1)$-форма в $\mathbb{R}^n$ и $d\varphi^{k-1}$ — ее внешний дифференциал; пусть, далее, $\sigma\colon I^k \to \mathbb{R}^n$ — сингулярный куб.

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_{\sigma(\partial I^k)} \varphi^{k-1} = \int\limits_{\sigma(I^k)} d\varphi^{k-1}$$

(*мы считаем, что ориентация на границе ∂I^k индуцирована естественной ориентацией куба I^k, причем индуцирование осуществляется с помощью внешней нормали*).

Замечание. Здесь под интегралом $\int\limits_{\sigma(\partial I^k)} \varphi$ понимается сумма по всем граням куба.

Доказательство. Рассмотрим форму $\omega = \sigma^*(\varphi)$; в силу перестановочности σ^* с операцией d имеем $d\omega = d\sigma^*(\varphi) = \sigma^*(d\varphi)$, и, следовательно, требуемое утверждение достаточно доказать в следующем виде:

$$\int\limits_{\partial I^k} \omega = \int\limits_{I^k} d\omega.$$

Мы воспользовались здесь тем, что по определению

$$\int\limits_{\sigma(I^k)} d\varphi = \int\limits_{I_k} \sigma^*(d\varphi) \quad \text{и} \quad \int\limits_{\sigma(\partial I^k)} \varphi = \int\limits_{\partial I^k} \sigma^*(\varphi).$$

Пусть $\omega = a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k$, где $a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)$ — гладкие функции, а дифференциал dx^α пропущен. Тогда

$$d\omega = \sum_\alpha \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k = \sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha}\, d^k x,$$

где $d^k x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Для простоты дальнейших рассуждений предположим, что функции $a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)$ представлены в виде произведений:

$$a_\alpha(x^1, \ldots, x^k) = \prod_{q=1}^{k} b_\alpha^q(x^q),$$

где b_α^q — гладкие функции от одной переменной x^q. (Напомним, что в курсе анализа доказывается следующая теорема: любая гладкая функция равномерно аппроксимируется линейными комбинациями произведений гладких функций, зависящих от одной переменной; мы, конечно, не будем здесь это доказывать.)

Вычислим в явном виде выражение $\int\limits_{I^k} d\omega$:

$$\int\limits_{I^k} d\omega = \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\alpha} \right) d^k x =$$

$$= \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\prod_{q=1}^{k} b_\alpha^q(x^q) \right) \right) d^k x =$$

$$= \int\limits_{I^k} \left(\sum_\alpha (-1)^{\alpha-1} b_\alpha^1(x^1) \ldots \frac{\partial b_\alpha^\alpha(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} \ldots b_\alpha^k(x^k) \right) d^k x =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left((-1)^{\alpha-1} b_\alpha(x^1) \ldots b_\alpha^{\alpha-1}(x^{\alpha-1}) b_\alpha^{\alpha+1}(x^{\alpha+1}) \ldots \right.$$

$$\left. \ldots b_\alpha^k(x^k) \left[(-1)^{\alpha-1} \int\limits_{(x^\alpha)} \frac{\partial b_\alpha^\alpha(x^\alpha)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right] dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k \right) =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left(b_\alpha^1(x^1) \ldots \widehat{b}_\alpha^\alpha(x^\alpha) \ldots b_\alpha^k(x^k) \times \right.$$

$$\left. \times \left[b_\alpha^\alpha(1) - b_\alpha^\alpha(0) \right] \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left(b_\alpha^1(x^1) \ldots b_\alpha^\alpha(1) \ldots b_\alpha^k(x^k) - \right.$$

$$\left. - b_\alpha^1(x^1) \ldots b_\alpha^\alpha(0) \ldots b_\alpha^k(x^k) \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_\alpha \int\limits_{(x^1)} \ldots \int\limits_{(\widehat{x}^\alpha)} \ldots \int\limits_{(x^k)} \left(a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)\big|_{x^\alpha=1} - \right.$$

$$\left. - a_\alpha(x^1, \ldots, x^k)\big|_{x^\alpha=0} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \ldots \wedge dx^k = \int\limits_{\partial I^k} \omega.$$

Теорема доказана.

Задачи. 1. Вычислить объем групп $SO(3, \mathbb{R})$ и $SU(2)$ в метрике Киллинга.

2. Пусть X^i — векторное поле в четырехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$. Определим интеграл этого векторного поля по трехмерной гиперповерхности («поток» векторного поля через гиперповерхность) как интеграл от 3-формы $X^i dS_i$, где

$$dS_i = \frac{1}{6}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{jkli}dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l,$$

ε_{jkli} — антисимметричный тензор 4-го ранга. Вывести из общей формулы Стокса следующее равенство (в псевдоевклидовых координатах):

$$\int\limits_{\partial V} X^i dS_i = \int\limits_V \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\,dV.$$

3. Пусть U — ограниченная область с гладкой границей в пространстве с римановой метрикой g_{ij} и Ω^p_U — пространство всех гладких p-форм, обращающихся в нуль вне области U. Введем в пространство Ω^p_U скалярное произведение, полагая

$$\langle \omega_1, \omega_2\rangle = \int\limits_U \omega_1 \wedge *\omega_2$$

для p-форм ω_1, ω_2 из Ω^p_U.

а) Показать, что пространство Ω^p_U с введенным скалярным произведением евклидово (см. задачу 2 к § 19).

б) Оператор $*$ ортогонален:

$$\langle *\omega_1, *\omega_2\rangle = \langle \omega_1, \omega_2\rangle.$$

в) Операторы $\delta = (-1)^{np+n+1} * d *$ и d сопряжены, т. е.

$$\langle d\omega_1, \omega_2\rangle = \langle \omega_1, \delta\omega_2\rangle.$$

г) Квадрат оператора δ равен нулю: $\delta\delta = 0$.

д) Пусть $\Delta = d\delta + \delta d$. Показать, что оператор Δ в пространстве Ω^p_U самосопряжен: $\langle \Delta\omega_1, \omega_2\rangle = \langle \omega_1, \Delta\omega_2\rangle$. Проверить следующие соотношения перестановочности:

$$\Delta d = d\Delta, \quad \Delta\delta = \delta\Delta, \quad \Delta * = *\Delta.$$

§ 27. Дифференциальные формы в комплексных пространствах

1. Операторы d' и d''. Пусть D — область в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с комплексными координатами $z^1, \ldots, z^n$. Можно рассмотреть «овеществленную» область $D^{\mathbb{R}}$ с вещественными координатами $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$, где

$$z^k = x^k + iy^k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Базис в касательном пространстве к $D^{\mathbb{R}}$ (в любой точке) образуют векторы $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}$. Мы будем рассматривать комплексные касательные векторы, т. е. линейные комбинации

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^{n} b^k \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами. В пространстве таких векторов удобно ввести комплексный базис $\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, полагая

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Чтобы сделать дальнейшие формулы более ясными, примем такое соглашение. Тензорные индексы, отвечающие надчеркнутым координатам, мы всегда будем надчеркивать, делая исключение для тех обозначений, в которые черта уже входит. Например, запись $a_{k\bar{l}}z^k\bar{z}^l$ подразумевает суммирование по обоим индексам (см. также ниже формулы (4), (7), (9) и т. д.).

Любой комплексный вектор ξ имеет, таким образом, вид

$$\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \xi^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \quad \xi = (\xi^k, \xi^{\bar{k}}), \tag{4}$$

причем вектор ξ является вещественным в том и только в том случае, если $\xi^{\bar{k}} = \overline{\xi^k}$. Дуальный базис в пространстве комплексных ковекторов (1-форм) имеет вид

$$dz^k = dx^k + i\,dy^k, \quad d\bar{z}^k = dx^k - i\,dy^k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Любая комплексная k-форма ω, $1 \leqslant k \leqslant 2n$, представляется в виде линейной комбинации выражений $dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}$, $p + q = k$. Поэтому ω можно представить в виде

$$\omega = \omega_{k,0} + \omega_{k-1,1} + \ldots + \omega_{0,k}, \tag{6}$$

где в форму $\omega_{p,q}$, $p + q = k$, входят p дифференциалов вида dz^i и q дифференциалов вида $d\bar{z}^j$. Тогда

$$\omega_{p,q} = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\substack{i_1 \ldots i_p \\ \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}} T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge$$

$$\wedge\, d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}, \tag{7}$$

причем компоненты $T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}$ кососимметричны по индексам $i_1 \ldots i_p$ и $j_1, \ldots j_q$ в отдельности. Форма $\omega_{p,q}$ называется *формой типа* (p, q).

Разложение (6) не зависит от выбора комплексных координат. Если $w^1, \ldots, w^n$ — другие комплексные координаты в области D и функции $w^i = w^i(z^1, \ldots, z^n)$ комплексно аналитичны, то dw^i есть линейная комбинация форм $dz^1, \ldots, dz^n$, а $d\bar{w}^i$ — линейная комбинация форм $d\bar{z}^1, \ldots, d\bar{z}^n$.

Лемма 1. *Дифференциал d можно однозначно представить в виде*

$$d = d' + d'', \tag{8}$$

где для формы ω типа (p, q) дифференциал $d'\omega$ имеет тип $(p+1, q)$, а дифференциал $d''\omega$ — тип $(p, q+1)$. Операторы d', d'' инвариантны относительно комплексно аналитических замен координат.

Доказательство. Для формы $\omega_{p,q}$ вида (7) имеем

$$d\omega_{p,q} = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\substack{i, i_1, \ldots, i_p \\ \bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_q}} \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}}{\partial z^i}\, dz^i \wedge dz^{i_1} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q} +$$

$$+ \frac{(-1)^p}{p!\,q!} \sum_{\substack{i_1 \ldots i_p \\ j, \bar{j}_1, \ldots, \bar{j}_q}} \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_p \bar{j}_1 \ldots \bar{j}_q}}{\partial \bar{z}^j}\, dz^{i_1} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}. \tag{9}$$

Обозначим первое слагаемое в этой формуле через $d'\omega_{p,q}$, второе — через $d''\omega_{p,q}$. В силу однозначности разложения (6) формы в сумму форм типа (p, q) операторы d' и d'' корректно определяются равенством (9). Их инвариантность следует из инвариантности разложения (6) относительно комплексно аналитических замен. Лемма доказана.

Следствие. *Квадраты операторов d' и d'' равны нулю:*

$$(d')^2 = (d'')^2 = 0, \tag{10}$$

причем эти операторы антикоммутируют между собой:

$$d''d' = -d'd''. \tag{11}$$

Доказательство. Из равенств $d^2 = 0$ и $d = d' + d''$ вытекает, что

$$0 = d^2\omega_{p,q} = (d')^2\omega_{p,q} + (d'')^2\omega_{p,q} + (d'd''\omega_{p,q} + d''d'\omega_{p,q}).$$

В правой части первое слагаемое имеет тип $(p+2, q)$, второе — $(p, q+2)$, третье и четвертое — $(p+1, q+1)$. Следовательно, все эти три формы равны нулю. Следствие доказано.

Определение 1. Форма ω типа $(p, 0)$ называется *голоморфной*, если

$$d''\omega = 0. \tag{12}$$

Пример. Форма ω типа $(0, 0)$ — это комплекснозначная функция $f(z^1, \ldots, z^n, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^n)$. Условие $d''f = 0$ есть условие комплексной аналитичности функции f:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В общем случае форма ω типа $(p, 0)$ голоморфна, если все ее коэффициенты являются комплексно аналитическими функциями.

2. Кэлерова метрика. Форма кривизны. Эрмитова метрика в области D задается набором функций $g_{j\bar{k}}$, отнесенных к каждой системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$, таких, что

а) $g_{j\bar{k}} = \overline{g_{k\bar{j}}}$,

б) при заменах координат $z^j = z^j(z^{1'}, \ldots, z^{n'})$, где $\frac{\partial z^j}{\partial \bar{z}^{k'}} \equiv 0$, имеем

$$g_{j'\bar{k}'} = g_{j\bar{k}} \frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} \overline{\left(\frac{\partial z^k}{\partial z^{k'}}\right)};$$

в) форма $g_{j\bar{k}}\xi^j\bar{\xi}^k$ положительно определена.

Комплексное скалярное произведение комплексных касательных векторов $\xi = (\xi^k, \xi^{\bar{k}})$, $\eta = (\eta^k, \eta^{\bar{k}})$ задается формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = g_{j\bar{k}}\xi^j\eta^{\bar{k}}. \tag{13}$$

Скалярное произведение $\langle , \rangle_{\mathbb{C}}$ не зависит от выбора комплексных координат. Оно дает риманову метрику $\langle , \rangle_{\mathbb{R}}$ в вещественной области $D^{\mathbb{R}}$, где

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} \tag{14}$$

(см. § 11, п. 2).

Для вещественных векторов, т. е. для таких векторов ξ, η, что $\xi^{\bar{k}} = \overline{\xi^k}$, $\eta^{\bar{k}} = \overline{\eta^k}$, выполняется условие эрмитовости

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}_{\mathbb{C}}. \tag{15}$$

Поэтому выражение

$$\{\xi, \eta\} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} = \frac{i}{2}\left[\frac{\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}} - \overline{\langle \xi, \eta \rangle}_{\mathbb{C}}}{2}\right] \tag{16}$$

кососимметрично по ξ и η и дает дифференциальную форму Ω 2-го ранга на $D^{\mathbb{R}}$. Явный вид формы Ω таков:

$$\Omega = \frac{i}{2} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k, \tag{17}$$

поэтому Ω есть форма типа $(1, 1)$.

Определение 2. Эрмитова метрика $g_{j\bar{k}}$ называется *кэлеровой*, если соответствующая форма Ω замкнута:

$$d\Omega = 0.$$

Геометрический смысл условия кэлеровости будет выяснен в § 29, п. 4.

Пример. Пусть в области D на двумерной вещественной поверхности введены конформные координаты. Метрика в них имеет вид

$$ds^2 = g\,dz\,d\bar{z}. \tag{18}$$

Тогда форма Ω есть элемент площади поверхности. Здесь метрика всегда кэлерова, так как форма Ω замкнута по соображениям размерности.

Лемма 2. *Пусть* $g_{j\bar{k}}$ — *эрмитова метрика*, $g = \det(g_{j\bar{k}})$. *Положим*

$$\omega = \frac{1}{2\pi i} d''d' \ln g.$$

Тогда ω *есть форма типа* (1, 1).

Доказательство. Нужно лишь проверить, что определение формы ω не зависит от выбора комплексных координат. Сделаем комплексно аналитическую замену координат:

$$z^j = z^j(w^1, \ldots, w^n), \quad \frac{\partial z^j}{\partial \bar{w}^k} = 0. \tag{19}$$

Пусть $J = \det\left(\frac{\partial z^j}{\partial w^k}\right)$. Якобиан соответствующей вещественной замены координат равен $|J|^2$ (см. § 12, п. 2). Поэтому в координатах $w^1, \ldots, w^n$ детерминант $\tilde{g}$ матрицы эрмитовой формы имеет вид

$$\tilde{g} = |J|^2 g = J\bar{J}g.$$

Отсюда

$$d' \ln \tilde{g} = d' \ln J + d' \ln \bar{J} + d' \ln g = d' \ln J + d' \ln g,$$

где $d' \ln \bar{J} = 0$ в силу аналитичности функции J. Далее,

$$d''d' \ln \tilde{g} = d''d' \ln J + d''d' \ln g = -d'd'' \ln J + d''d' \ln g = d''d' \ln g,$$

где мы использовали равенства $d'd'' = -d''d'$ и $d''J = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим снова метрику $g\,dz\,d\bar{z}$ двумерной вещественной поверхности в конформных координатах. Имеет место

Теорема 1. *Форма* $\omega = \frac{1}{2\pi i} d''d' \ln g$ *имеет вид*

$$\omega = \frac{2}{\pi} K\Omega, \tag{20}$$

где K — гауссова кривизна поверхности, а форма $\Omega = \frac{i}{2} g dz \wedge d\bar{z}$ — *элемент площади.*

Доказательство. Имеем

$$d'd'' \ln g = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln g \; dz \wedge d\bar{z}.$$

Мы видели (в § 13, п. 1), что для поверхности, заданной в конформных координатах, величина $-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 \ln g}{\partial z \partial \bar{z}}$ равна гауссовой кривизне. Теорема доказана.

§ 28. Ковариантное дифференцирование

1. Евклидова связность. В § 25 была разобрана операция взятия градиента кососимметрического тензора (тензорного поля), которая приводила к кососимметрическому тензору ранга, на единицу большего. Эта операция в компонентах имела вид

$$(dT)_{i_1 \ldots i_{k+1}} = \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \frac{\partial T_{i_1 \ldots \widehat{i_q} \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}}. \tag{1}$$

В частности, при $k = 1$ мы имели

$$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_j}{\partial x^i} - \frac{\partial T_i}{\partial x^j}. \tag{2}$$

Указывалось, что dT снова является тензором (это было строго доказано для $k = 0, 1$). Указывалось также, что операция d — единственная не связанная ни с какой геометрией дифференциальная операция над тензорами в том смысле, что все остальные сводятся к ней и к чисто алгебраическим операциям, перечислявшимся ранее (перестановка индексов, сложение, произведение, след).

Что же касается обычного обобщения градиента функции на тензоры типа (p, q)

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q; k} = \frac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k} \tag{3}$$

в пространстве с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$, то уже говорилось, что результат этой операции не является тензором типа $(p, q+1)$. Так как эта операция встречается довольно часто, мы укажем класс преобразований, относительно которого ее результат преобразуется как тензор. Это — линейные преобразования.

Теорема 1. *Если в пространстве заданы координаты и тензорное поле* $T = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, *то поле*

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q;\,k} = \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k}$$

преобразуется как тензор типа $(p,\ q+1)$ *при всех линейных заменах координат*

$$x^i = a^i_j z^j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$
$$a^i_j = \text{const}, \quad z^i = b^i_j x^j, \quad b^i_j a^j_k = \delta^i_k.$$

Доказательство. Для линейных преобразований имеем

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = a^i_j = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^j\,\partial z^k} = 0,$$

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = b^i_j = \text{const}, \quad a^i_j b^j_k = \delta^i_k.$$

По определению тензора

$$\widetilde{T}^{h_1\dots h_p}_{l_1\dots l_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{\partial z^{h_1}}{\partial x^{i_1}}\dots\frac{\partial z^{h_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}} = T^{(i)}_{(j)}b^{(k)}_{(i)}a^{(j)}_{(l)}, \tag{4}$$

где $(i) = i_1 \dots i_p$, $(k) = k_1 \dots k_p$, $(j) = j_1 \dots j_q$, $(l) = l_1 \dots l_q$. Так как $a^i_j = \text{const}$, $b^j_k = \text{const}$, то при дифференцировании формулы (4) будем иметь

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(l);r} = \frac{\partial \widetilde{T}^{(k)}_{(l)}}{\partial z^r} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial z^r}b^{(k)}_{(i)}a^{(j)}_{(l)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}b^{(k)}_{(i)}a^{(j)}_{(l)} = T^{(i)}_{(j);s}a^s_r a^{(j)}_{(l)}b^{(k)}_{(i)}. \tag{5}$$

Это — закон преобразования тензора. Теорема доказана.

Мы существенно использовали в доказательстве то, что $\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^j\,\partial z^k} = 0$. Рассмотрим, например, тензоры типа (0, 1) или (1, 0):

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^k} = T_{i;k}, \quad \frac{\partial T^i}{\partial x^k} = T^i_{;k}.$$

В силу только что доказанной теоремы $T_{i;k}$ и $T^i_{;k}$ преобразуются как тензоры относительно линейных замен координат. При общих заменах координат $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $i = 1, \dots, n$, с $\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^k\,\partial z^j} \not\equiv 0$ получим

$$\widetilde{T}_{j;q} = \frac{\partial \widetilde{T}_j}{\partial z^q} = \frac{\partial}{\partial z^q}\left(T_i\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) = \frac{\partial T_i}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j} =$$

$$= \frac{\partial T_i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j} = T_{i;p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}.$$

Здесь $\widetilde{T}$ — компоненты в системе координат (z), а T — компоненты в системе координат (x). Итак, общая формула преобразования имеет вид

$$\frac{\partial \widetilde{T}_j}{\partial z^q} = \widetilde{T}_{j;q} = T_{i;p}\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}. \tag{6}$$

Слагаемое $T_i\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}$ не имеет тензорного характера. Как было показано в § 25, выражение

$$(d\widetilde{T})_{j;q} = \widetilde{T}_{j;q} - \widetilde{T}_{q;j} = (T_{i;p} - T_{p;i})\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}$$

является тензором. Но симметрическая часть

$$(\widetilde{T}_{j;q} + \widetilde{T}_{q;j}) = (T_{j;q} + T_{q;j})\frac{\partial x^p}{\partial z^q}\frac{\partial x^i}{\partial z^j} + 2T_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^q\,\partial z^j}$$

не является тензором относительно произвольных замен координат.

Аналогично для тензора T^i будем иметь

$$\widetilde{T}^j_{;l} = \frac{\partial \widetilde{T}^j}{\partial z^l} = \frac{\partial}{\partial z^l}\left(T^i\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial T^i}{\partial z^l}\frac{\partial z^j}{\partial x^i} + T^i\frac{\partial}{\partial z^l}\left(\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \frac{\partial T^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^l}\frac{\partial z^j}{\partial x^i} + T^i\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial z^l}. \tag{7}$$

Как видно, это — не тензор из-за второго слагаемого. Из формулы (7) вытекает, что

$$T^j_{;j} = \frac{\partial \widetilde{T}^j}{\partial z^j} = \frac{\partial T^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial z^l}\frac{\partial z^l}{\partial x^i} + T^i\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial z^q}\frac{\partial x^q}{\partial z^j} =$$

$$= T^i_{;p}\delta^p_i + T^i\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial z^j} = T^i_{;i} + T^i\frac{\partial x^q}{\partial z^j}\frac{\partial^2 z^j}{\partial x^i\,\partial x^q}. \tag{8}$$

Замечание. Выражение $\dfrac{\partial T^i}{\partial x^i} = T^i_{;i}$ (вычисленное в евклидовых координатах) часто называется дивергенцией векторного поля. Как видите, это выражение $T^i_{;i}$ не является скаляром по отношению к нелинейным заменам координат.

Обычно эту формулу используют лишь в евклидовых координатах $(x^1, \ldots, x^n)$, смысл дивергенции состоит в следующем: если заданы малые смещения точек пространства

$$x^i \to x^i + T^i(x^1, \ldots, x^n) = \bar{x}^i,$$

то элемент евклидова объема $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ после смещения области приобретает добавок $T^i_{;i}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ (см. § 22, п. 2).

Вернемся теперь к закону преобразования градиента

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q;k} = \frac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k}. \tag{9}$$

Ввиду доказанной теоремы мы условимся применять эту операцию только в евклидовых координатах $x^1, \dots, x^n$ и в координатах, отличающихся от евклидовых линейной заменой

$$x^i = a^i_j z^j, \qquad a^i_j = \text{const}.$$

Мы показали, что, применяя эту операцию по тем же формулам в другой системе координат, отличающейся от (x) нелинейной заменой, мы получим выражение $\widetilde{T}^{k_1\dots k_p}_{l_1\dots l_q;r}$ связанное с $T^{(i)}_{(j);s}$ нетензорным законом преобразования.

Подойдем теперь к вопросу с другой точки зрения: откуда мы знаем, что операцию взятия градиента надо всегда определять одной и той же формулой? Можно допустить следующее: а) эта операция существенно связана именно с евклидовой геометрией; б) что она применяется по формуле (9) лишь в евклидовых координатах x; в) что результат этой операции есть тензор.

Какие следствия вытекают из этих гипотез? По каким формулам эта операция должна применяться в других системах координат, связанных с евклидовыми нелинейной заменой? Для вывода следствий из этих гипотез мы должны, во-первых, вычислить результат применения этой операции к тензорному полю T в евклидовых координатах $x^1, \dots, x^n$ и лишь затем, согласно тензорному закону, преобразовать этот результат в другую систему координат $x^i = x^i(z^1, \dots, z^n)$, $i = 1, \dots, n$.

Проделаем это:

$$T^{(i)}_{(j);s} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^s}, \quad (i) = i_1, \dots, i_p, \quad (j) = j_1, \dots, j_q. \tag{10}$$

По определению считаем $T^{(i)}_{(j);s}$ тензором. Поэтому имеем

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(l);r} = T^{(i)}_{(j);s} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial z^{(l)}} \frac{\partial z^{(k)}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^s}{\partial z^r}, \tag{11}$$

где

$$\frac{\partial x^{(j)}}{\partial z^{(l)}} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}}, \quad \frac{\partial z^{(k)}}{\partial x^{(i)}} = \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}}.$$

Спрашивается, какой операцией в системе координат $(z^1, \dots, z^n)$ компоненты $\widetilde{T}^{(k)}_{(l);q}$ получаются из компонент $\widetilde{T}^{(k)}_{(l)}$?

Рассмотрим для простоты векторные поля (T^i) и ковекторные поля (T_j). В этом случае из (11) получим

$$\widetilde{T}^h_{;q} = T^i_{;s}\frac{\partial z^h}{\partial x^i}\frac{\partial x^s}{\partial z^q}; \quad \widetilde{T}_{l;r} = T_{j;s}\frac{\partial z^h}{\partial x^l}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}. \tag{12}$$

Так как $T^i_{;s} = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^s}$, то из формулы (12) вытекает

$$\widetilde{T}^h_{;q} = \frac{\partial T^i}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial z^q}\frac{\partial z^h}{\partial x^i} = \frac{\partial T^i}{\partial z^q}\frac{\partial z^h}{\partial x^i}. \tag{13}$$

Напомним, что $\widetilde{T}^h = T^i\dfrac{\partial z^h}{\partial x^i}$. Из формулы (13) вытекает равенство

$$\widetilde{T}^h_{;q} = \frac{\partial T^i}{\partial z^q}\frac{\partial z^h}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial z^q}\left(\widetilde{T}^h\right) - T^i\frac{\partial}{\partial z^q}\left(\frac{\partial z^h}{\partial x^i}\right). \tag{14}$$

Так как $T^i = \widetilde{T}^s\dfrac{\partial x^i}{\partial z^s}$, то получаем окончательное равенство

$$\widetilde{T}^h_{;q} = \frac{\partial \widetilde{T}^h}{\partial z^q} - \widetilde{T}^s\frac{\partial x^i}{\partial z^s}\frac{\partial^2 z^h}{\partial x^i\,\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial z^q}. \tag{15}$$

Введем теперь обозначение

$$\Gamma^h_{sq} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^s}\frac{\partial x^m}{\partial z^q}\frac{\partial^2 z^h}{\partial x^i\,\partial x^m}. \tag{16}$$

Формула (15) приобретает вид

$$\widetilde{T}^h_{;q} = \frac{\partial \widetilde{T}^h}{\partial z^q} + \Gamma^h_{sq}\widetilde{T}^s. \tag{17}$$

Нами доказана

Теорема 2. *Если градиент векторного поля (T^i) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовых координатах (x) вычисляется по обычной формуле*

$$T^i_{;h} = \frac{\partial T^i}{\partial x^h},$$

то в любой другой системе координат (z) градиент вычисляется следующим образом:

$$\widetilde{T}^h_{;r} = \frac{\partial \widetilde{T}^h}{\partial z^r} + \Gamma^h_{sr}\widetilde{T}^s,$$

где коэффициенты Γ^h_{sr} определяются формулой (16).

Аналогичным образом мы можем преобразовать выражение для ковекторного поля:

$$\widetilde{T}_{l;r} = T_{j;s}\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial x^s}{\partial z^r} = \frac{\partial T_j}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}\frac{\partial x^j}{\partial z^l} = \frac{\partial T_j}{\partial z^r}\frac{\partial x^j}{\partial z^l} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z^r}\left(\widetilde{T}_k\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\right)\frac{\partial x^j}{\partial z^l} = \frac{\partial \widetilde{T}_k}{\partial z^r}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\right) + \widetilde{T}_k\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^r}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \widetilde{T}_k}{\partial z^r}\delta^k_l +$$

$$+ \widetilde{T}_k\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^r}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial \widetilde{T}_l}{\partial z^r} + \widetilde{T}_k\left(\frac{\partial x^j}{\partial z^l}\frac{\partial x^s}{\partial z^r}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^j\,\partial x^s}\right) = \frac{\partial \widetilde{T}_l}{\partial z^r} - \Gamma^k_{lr}\widetilde{T}_k,$$

где $\Gamma^k_{lr} = -\dfrac{\partial x^j}{\partial z^l}\dfrac{\partial x^s}{\partial z^r}\dfrac{\partial^2 z^k}{\partial x^j\,\partial x^s}$.

Итак, нами доказана

Теорема 3. *Если градиент ковекторного поля (T_i) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат вычисляется по обычной формуле*

$$T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k},$$

то в любой другой системе координат (z) он вычисляется по формуле

$$\widetilde{T}_{i;k} = \frac{\partial \widetilde{T}_i}{\partial z^k} - \widetilde{T}_r\Gamma^r_{ik}, \tag{18}$$

где набор Γ^r_{ik} тот же, что и для векторов (T^i) в теореме 2, т. е. вычисляется по формуле (16).

Итак, при построении операции взятия градиента, исходящем из того требования, что ее результат ведет себя как тензор при любых заменах координат $x = x(z)$, мы приходим к разным формулам для векторов и ковекторов:

$$\widetilde{T}_{i;k} = \frac{\partial \widetilde{T}_i}{\partial x^k} - \Gamma^r_{ik}\widetilde{T}_r \quad \text{(для ковектора)},$$

$$\widetilde{T}^i_{;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk}\widetilde{T}^r \quad \text{(для вектора)}.$$

Однако набор Γ^i_{qk} общий для них.

Мы не будем здесь проводить вычисления для любых тензоров типа (p, q), но приведем без доказательства результат.

Теорема 4. *Если градиент $T^{(i)}_{(j);k}$ тензорного поля $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат вычисляется по формуле*

$$T^{(i)}_{(j);k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k},$$

то в любой другой системе координат $x = x(z)$ он вычисляется по формуле

$$\widetilde{T}^{(k)}_{(l);r} = \frac{\partial \widetilde{T}^{(k)}_{(l)}}{\partial x^r} + \sum_{s=1}^{p} \widetilde{T}^{k_1\ldots(k_s\to i)\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} \Gamma^{k_s}_{ir} - \sum_{s=1}^{q} \widetilde{T}^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots(l_s\to i)\ldots l_q} \Gamma^{i}_{l_s r} \quad (19)$$

(запись $k_1\ldots(k_s\to i)\ldots k_p$ означает, что в наборе $k_1\ldots k_p$ следует вместо k_s взять i), где набор функций Γ^p_{kq} вычисляется по той же формуле (16).

Например, для тензоров 2-го ранга получаем

$$\widetilde{T}^{i}_{j;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^{i}_{j}}{\partial x^k} + \widetilde{T}^{p}_{j}\Gamma^{i}_{pk} - \widetilde{T}^{i}_{p}\Gamma^{p}_{jk},$$

$$\widetilde{T}_{ij;k} = \frac{\partial \widetilde{T}_{ij}}{\partial x^k} - \widetilde{T}_{pj}\Gamma^{p}_{ik} - \widetilde{T}_{ip}\Gamma^{p}_{jk},$$

$$\widetilde{T}^{ij}_{;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^{ij}}{\partial x^k} + \widetilde{T}^{pj}\Gamma^{i}_{pk} + \widetilde{T}^{ip}\Gamma^{j}_{pk}.$$

Градиент тензора $T^{(i)}_{(j)}$ всегда обозначается через $T^{(i)}_{(j);k}$, $(i) = i_1 \ldots i_p$, $(j) = j_1 \ldots j_q$.

Следует подчеркнуть, что введенная нами операция существенно связана с евклидовой геометрией. Дело в том, что мы определяли эту операцию двумя требованиями:

а) результат операции есть тензор;

б) в евклидовых координатах она вычисляется по обычной формуле

$$T^{(i)}_{(j);k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}.$$

С точки зрения данной операции можно сказать также, что евклидовыми называются такие координаты, что градиент в них для любого тензора вычисляется по формуле

$$T^{(i)}_{(j);k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}.$$

Остается выяснить, каким образом набор $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(z)$ меняется при замене координат $z^i = z^i(z')$, $i = 1, \ldots, n$.

Если заданы евклидовы координаты

$$(x^1, \ldots, x^n), \quad x^i = x^i(z) = x^i(z(z')),$$

то, следуя формулам (16), полагаем

$$\Gamma^k_{pq} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^j}{\partial z^q}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^p\,\partial z^q}\frac{\partial z^k}{\partial x^m}. \quad (20)$$

В системе координат (z') будем иметь

$$\Gamma^{k'}_{p'q'} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}\frac{\partial^2 z^{k'}}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\frac{\partial z^{k'}}{\partial x^m}. \tag{21}$$

Из формул (20) и (21) получаем

$$\Gamma^k_{ij}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} = -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^j}{\partial z^q}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} =$$

$$= -\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}} = -\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} + \frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}},$$

так как

$$\frac{\partial^2\left[z^k(x(z'))\right]}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} = \frac{\partial}{\partial z^{p'}}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial z^{q'}}\right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\frac{\partial z^k}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\,\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}.$$

Поэтому

$$\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} = \frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{ij}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^q}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\right) = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\frac{\partial z^{k'}}{\partial x^j} = \Gamma^{k'}_{p'q'}.$$

Окончательно имеем формулу преобразования

$$\Gamma^{k'}_{p'q'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}} + \frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\,\partial z^{q'}}\right). \tag{22}$$

Полученные результаты мы используем как идейную основу для выработки более общего понятия ковариантного дифференцирования тензоров, которое уже не связано ни с какой первоначальной евклидовой системой координат.

Определение 1. Говорят, что задана *операция ковариантного дифференцирования (взятия градиента)* тензоров любого типа, если в любой системе координат $z^1, \ldots, z^n$ задан набор функций $\Gamma^k_{pq}(z)$, который при замене координат $z = z(z')$ преобразуется по формуле (22). Величины $\Gamma^k_{pq}(z)$ называются *символами Кристоффеля.*

Для векторов и ковекторов определим операцию ковариантного дифференцирования (градиента) формулами

$$T^i_{;k} = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}T^j,$$

$$T_{i;k} = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik}T_j,$$

а для общих тензоров — формулой (19). Оказывается, закон преобразования (22) для компонент Γ_{ij}^{k} определяется из того требования, что градиент тензора есть снова тензор (хотя сами Γ_{ij}^{k} не образуют тензора). Это будет доказано в следующем пункте.

Замечание 1. Операцию ковариантного дифференцирования (градиента) часто называют *дифференциально-геометрической связностью.*

Замечание 2. Связность называется евклидовой, если существуют такие координаты $x^1, \ldots, x^n$, что $\Gamma_{ij}^{k} = 0$ (или

$$T^{(i)}_{(j);k} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$$

в этих координатах). Такие координаты также называются евклидовыми.

Замечание 3. Операцию ковариантного дифференцирования часто обозначают символом ∇:

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = T^{(i)}_{(j);k}.$$

2. Ковариантное дифференцирование тензоров произвольного ранга. Итак, мы определили ковариантное дифференцирование векторных (ковекторных) полей как операцию, которая в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ записывается формулой

$$T^i_{;j} = \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k \quad \text{(векторы)}, \tag{23}$$

$$T_{i;j} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} T_k \quad \text{(ковекторы)}. \tag{24}$$

Здесь Γ^i_{kj}—некоторые функции в данной системе координат, при замене координат преобразующиеся по закону (22) (символы Кристоффеля).

Наоборот, пусть в каждой системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ заданы величины $\Gamma^i_{kj}(x)$. Зададим ковариантную производную векторных и ковекторных полей формулами (23), (24). Покажем, что закон преобразования (22) для величин Γ^i_{kj} при заменах координат $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ определяется, исходя из следующего требования: *результат операции ковариантного дифференцирования есть тензор.* Имеет место

Теорема 5. *При замене координат* $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ *величины* Γ^i_{kj} *преобразуются по формуле*

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}. \tag{25}$$

Доказательство. Так как выражение

$$\frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k = T^i_{;j}$$

является тензором, то имеем $\left(\text{используя равенство } T^i = T^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$

$$T^{i'}_{;j'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + \Gamma^{i'}_{k'j'} T^{k'} =$$

$$= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k\right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial T^i}{\partial x^{j'}} + \Gamma^i_{kj} T^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \left(T^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right) + \Gamma^i_{kj} T^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}}_{\delta^{i'}_{k'}} \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} + \Gamma^i_{kj} T^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + \left(\Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial x^{j'}}\right) T^{k'},$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

Следствие 1. *Символ Γ^i_{kj} преобразуется как тензор только при линейных или аффинных преобразованиях координат $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, где $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \equiv 0$ для всех i, k', j'.*

Следствие 2. *Альтернированное выражение*

$$T^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{[kj]} \tag{26}$$

образует тензор (тензор кручения).

Доказательство. Из формулы (25) видно, что при перестановке индексов k' и j' слагаемое $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}$ не изменится. Поэтому закон преобразования для $T^{i'}_{k'j'}$ вообще не будет содержать этого слагаемого, т. е. будет тензорным. Базируясь на результате следствия 2, введем

Определение 2. Связность Γ^i_{kj} называется *симметричной*, если тензор кручения $T^i_{kj} = \Gamma^i_{[kj]}$ тождественно равен нулю, или $\Gamma^i_k = \Gamma^i_{jk}$.

Пример. Если существуют евклидовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, где $\Gamma^i_{kj} \equiv 0$, то тензор кручения равен нулю и, следовательно, евклидова связность симметрична. В других координатах $x^{1'}, \ldots$

..., $x^{n'}$, где $x^i = x^i(x')$, символы $\Gamma^{i'}_{k'j'}$ имеют вид

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}.$$

Это выражение симметрично по k', j'.

Перейдем теперь к тензорам произвольного ранга. Ковариантное дифференцирование тензоров любого ранга однозначно определяется следующими требованиями:

а) ковариантное дифференцирование — линейная операция;

б) ковариантная производная тензора нулевого ранга (функции) есть обычная производная

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k}; \tag{27}$$

в) ковариантная производная векторного (ковекторного) поля задается формулами (23), (24);

г) ковариантная производная произведения тензоров вычисляется по формуле дифференцирования произведения:

$$\nabla_k T^{(i)(j)}_{(p)(q)} = \left(\nabla_k R^{(i)}_{(p)}\right) S^{(j)}_{(q)} + R^{(i)}_{(p)} \left(\nabla_k S^{(j)}_{(q)}\right), \tag{28}$$

где $T^{(i)(j)}_{(p)(q)} = R^{(i)}_{(p)} S^{(j)}_{(q)}$ — произведение тензоров.

В качестве основного примера мы рассмотрим тензоры 2-го ранга T^{ij}, T^i_j, T_{ij}. Имеет место

Теорема 6. *При выполнении перечисленных условий ковариантная производная тензоров 2-го ранга задается формулами*

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^{lj} + \Gamma^j_{lk} T^{il}, \tag{29}$$

$$\nabla_k T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^l_j - \Gamma^l_{jk} T^i_l, \tag{30}$$

$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il}. \tag{31}$$

Для тензора $T^{(i)}_{(j)}$, $(i) = i_1 \ldots i_p$, $(j) = j_1 \ldots j_q$, *типа* (p, q) *ковариантная производная вычисляется по формуле*

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k} - T^{(i)}_{jj_2 \ldots j_q} \Gamma^j_{j_1 k} - \ldots - T^{(i)}_{j_1 \ldots j} \Gamma^j_{j_q k} +$$

$$+ T^{ii_2 \ldots i_p}_{(j)} \Gamma^{i_1}_{ik} + \ldots + T^{i_1 \ldots i}_{(j)} \Gamma^{i_p}_{ik}. \tag{32}$$

Доказательство. Проведем его для тензоров T_{ij} типа $(0, 2)$, для остальных типов оно полностью аналогично.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базисные векторные поля; $e^1, \ldots, e^n$ — дуальный базис ковекторных полей: $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$. Компоненты этих

тензоров имеют вид

$$(e_i)^j = \delta_i^j = (e^j)_i.$$

Поэтому из формул (23), (24) получаем

$$\nabla_k e_i = \Gamma_{ik}^j e_j, \tag{33}$$

$$\nabla_k e^i = -\Gamma_{jk}^i e^j \tag{34}$$

(эти формулы можно взять за определение величин Γ_{jk}^i).

Любой тензор T с компонентами $T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$ имеет вид

$$T = T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}.$$

В частности, тензор типа (0, 2) имеет вид $T = T_{ij} e^i \otimes e^j$. Используя свойства операции ∇_k, тогда имеем

$$\nabla_k (T) = \nabla_k (T_{ij})\, e^i \otimes e^j + T_{ij} \nabla_k e^i \otimes e^j + T_{ij} e^i \otimes \nabla_k e^j =$$

$$= \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} e^i \otimes e^j - T_{ij} \Gamma_{lk}^i e^l \otimes e^j - T_{ij} e^i \otimes \Gamma_{lk}^j e^l =$$

$$= \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} - \Gamma_{jk} T_{il} \right) e^i \otimes e^j.$$

Следовательно, компоненты тензора $\nabla_k T$ имеют вид

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} - \Gamma_{jk}^l T_{il},$$

а это и есть $T_{ij;\,k}$ по определению. Теорема доказана.

Замечание. Если T^i — векторное поле, T_j — ковекторное поле, то определено скалярное поле $T^i T_i$ (след произведения тензоров). Согласно требованиям а) — г) имеет место формула

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (T^i T_i) = (\nabla_k T^i)\, T_i + T^i (\nabla_k T_i) =$$

$$= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i T^j \right) T_i + \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^j T_j \right) T^i =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k} (T^i T_i) + \underbrace{\Gamma_{jk}^i T^j T_i - \Gamma_{ik}^j T_j T^i}_{0}.$$

Из этой формулы мы видим, что компоненты Γ_{ik}^j ковариантного дифференцирования ковекторных полей должны быть противоположны по знаку (и совпадать по модулю) с компонентами для дифференцирования векторных полей, чтобы для скаляра $T^i T_i$ была верна формула

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (T^i T_i) = (\nabla_k T^i)\, T_i + T^i (\nabla_k T_i).$$

Задача. Пусть $\xi = \dot{\gamma}$ — вектор скорости кривой $\gamma = \gamma(t)$. Определим ковариантную производную векторного поля η вдоль кривой γ, полагая $\nabla_{\dot{\gamma}}\eta = \xi^i \nabla_i \eta$. Показать, что поле $\nabla_{\dot{\gamma}}\eta$ зависит только от значений поля η на кривой γ.

§ 29. Ковариантное дифференцирование и метрика

1. Параллельный перенос векторных полей. Если $\xi = (\xi^k)$ — любой вектор в точке P, то определена для любого тензора $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q) производная по направлению

$$\nabla_\xi T^{(i)}_{(j)} = \xi^k \nabla_k T^{(i)}_{(j)}. \tag{1}$$

Это — тензор того же типа (p, q) в точке P. Для скаляров (тензоров нулевого ранга) операция $\nabla_\xi f$ имеет вид

$$\nabla_\xi f = \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \equiv \partial_\xi f, \tag{2}$$

т. е. совпадает с производной функции f по направлению ξ (в данной точке). Напомним (см. § 23), что если мы двигаемся вдоль некоторой кривой в пространстве

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и если производная функции f по направлению вектора скорости этой кривой равна нулю, то функция не меняется вдоль кривой: если $\xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \equiv 0$, где $\xi^k = \frac{dx^k}{dt}$ — вектор скорости, то

$$f(x^1(t), \ldots, x^n(t)) = \text{const}.$$

Верно ли подобное для векторных и тензорных полей? Этот вопрос не имеет пока смысла, потому что вектор (или тензор) имеет разные компоненты в разных системах координат; поэтому мы не можем сравнивать два вектора или тензора, заданных в разных точках пространства. По крайней мере такое сравнение требует дополнительной геометрической структуры в пространстве; этой дополнительной структурой и является ковариантное дифференцирование (связность).

Пусть в пространстве заданы координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, ковариантное дифференцирование Γ^i_{kj} и произвольная кривая $x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Определение 1. Мы будем говорить, что векторное (тензорное) поле T является *ковариантно постоянным* или *параллельным* вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, если ковариантная производная поля T в точках кривой по направлению

вектора скорости кривой равна нулю:

$$\nabla_\xi T = \xi^k \nabla_k T = 0, \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{3}$$

$$\xi^k = \frac{dx^k}{dt}.$$

Для векторных полей мы имеем

$$\nabla_\xi T^i = \xi^k \nabla_k T^i = \xi^k \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} T^j \right) = 0. \tag{4}$$

Подчеркнем, что понятие параллельности, вообще говоря, зависит от кривой. Исключение представляет лишь евклидова геометрия: в евклидовых координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ мы определяем параллельные векторные поля как поля, имеющие постоянные компоненты в этих координатах (евклидовых). Эти поля, очевидно, параллельны вдоль любой кривой. Поскольку результат ковариантного дифференцирования не зависит от выбора координат, те же поля будут параллельны в любой системе координат $(z^1, \ldots, z^n)$, хотя у них в новой системе координат компоненты будут зависеть от точки.

Мы видим, что понятие параллельности векторов в разных точках зависит как от способа ковариантного дифференцирования (от дифференциально-геометрической связности), так и от пути, соединяющего эти две точки. Чтобы связать введенные геометрические представления с максимально наглядным школьным материалом, вспомним так называемый пятый постулат Евклида: «Если в точке P задана прямая, то через любую точку Q проходит лишь одна параллельная ей прямая». Для нас будет удобно такое понимание этого постулата (возможно, не совсем формальное): в евклидовой геометрии, если в точке P задан вектор $(T^i)_P$, то в любой точке Q существует, причем только один, параллельный ему вектор $(T^i_\parallel)_Q$.

Здесь уместно поставить вопрос: что такое вообще параллельные векторы, прикрепленные к разным точкам P и Q? По определению вектор прикреплен к данной точке (как и любой тензор).

Определим важное понятие параллельного переноса вектора T^i из точки $P = (x^1_0, \ldots, x^n_0)$ в точку $Q = (x^1_1, \ldots, x^n_1)$ вдоль кривой $x^i(t)$, где $x^i(0) = x^i_0$, $x^i(1) = x^i_1$.

Определение 2. *Параллельным переносом* вектора T^i_P из точки $P = (x^1_0, \ldots, x^n_0)$ в точку $Q = (x^1_1, \ldots, x^n_1)$ вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, ведущей из P в Q, называется векторное поле T^i, заданное во всех точках кривой и параллельное вдоль этой кривой: $\frac{dx^k}{dt} \nabla_k T^i = 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. При $t = 0$ векторное поле T^i в точке P должно совпадать с исходным вектором T^i_P. При $t = 1$ векторное поле T^i в точке Q есть вектор T^i_Q.

называющийся *результатом параллельного переноса* вектора T^i_P вдоль заданной кривой $x^i = x^i(t)$ из P в Q.

В координатах $x^1, \ldots, x^n$ получаем

$$\frac{dx^k}{dt}\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + T^j\Gamma^i_{jk}\frac{dx^k}{dt} = \frac{dT^i}{dt} + \left(\frac{dx^k}{dt}\Gamma^i_{jk}\right)T^j = 0. \qquad (5)$$

Это — уравнение параллельного переноса. Начальное условие (при $t = 0$):

$$T^i(0) = T^i_P, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Уравнение (5) линейно по T^i. Из теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений и теоремы о продолжаемости решения мы для любой гладкой кривой получим результат:

Теорема 1. *Вдоль любой фиксированной гладкой кривой результат параллельного переноса существует, однозначно определяется начальным вектором T^i_P и линейно зависит от начального вектора T^i_P.*

Итак, параллельный перенос вектора вдоль кривой зависит от связности Γ^i_{jk}. Если связность евклидова, т. е. $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ в евклидовых координатах, то получаем уравнение параллельного переноса в виде $\frac{dT^i}{dt} = 0$.

Следствие. *В евклидовой геометрии и в евклидовых координатах параллельными вдоль любой кривой являются векторы, исходящие из разных точек и имеющие одинаковые компоненты. В любых координатах результат параллельного переноса вектора вдоль кривой не зависит от кривой, если геометрия евклидова.*

Теперь уже ясно интуитивное различие между кривой и евклидовой геометриями: перенося параллельно один и тот же вектор вдоль разных кривых из P в Q, при наличии кривизны получим разные результаты.

К вопросу о численном измерении кривизны мы перейдем в следующем параграфе.

2. Геодезические. Мы переходим к рассмотрению линий, являющихся аналогом прямых для случая произвольной связности. Эти линии называются *геодезическими*.

Определение 3. Линия $x^i = x^i(t)$ называется геодезической, если ее вектор скорости $T^i = \frac{dx^i}{dt}$ параллелен вдоль нее самой:

$$\nabla_T(T) = 0. \qquad (7)$$

В координатах имеем

$$0 = \nabla_T(T)^j = \frac{dx^i}{dt}\nabla_i\left(\frac{dx^j}{dt}\right) = \frac{dx^i}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{dx^j}{dt}\right) + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\right] = \frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt}.$$

Итак, мы получили уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Если $\Gamma^j_{ki} = 0$, то решениями этого уравнения являются обычные прямые, как и должно быть в евклидовой геометрии.

Для произвольной связности уравнение (8) — это система дифференциальных уравнений второго порядка. В окрестности точки $(x^1_0, \ldots, x^n_0)$ существует единственное решение этого уравнения с начальными условиями

$$x^j|_{t=0} = x^j_0, \quad \left.\frac{dx^j}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}^j_0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

для любых x^j_0 и $\dot{x}^j_0$ (по теореме существования и единственности решений). Поэтому справедлива следующая

Теорема 2. *В некоторой окрестности любой точки P и для любого вектора T^i_P в этой точке существует единственная геодезическая связности (Γ^i_{jk}), начинающаяся в точке P с начальным вектором скорости T^i_P.*

Замечание. Из уравнения (8) видно, что геодезические данной связности зависят только от «симметричной части» связности $\Gamma^i_{(jk)} = \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}$.

3. Связности, согласованные с метрикой. В этом курсе мы имели два определения евклидовых координат:

1) координаты $x^1, \ldots, x^n$ евклидовы, если метрика g_{ij} имеет в них евклидов вид:

$$g_{ij} = \delta_{ij}; \tag{10}$$

2) координаты $x^1, \ldots, x^n$ евклидовы, если компоненты Γ^k_{ij} связности в этих координатах нулевые:

$$\Gamma^k_{ij} \equiv 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, n \tag{11}$$

(более общо, $\Gamma^k_{ij} = -\Gamma^k_{ji}$ для несимметричных связностей).

Каково взаимоотношение между этими двумя определениями евклидовых координат?

Следует сразу отметить, что понятие связности и понятие римановой метрики не связаны между собой. Это две независимые структуры в рассматриваемой области пространства, так что определения (10) и (11) — это определения разных понятий.

Однако существует способ сопоставить метрике связность, при котором определения 1) и 2) дают одно и то же с точностью до аффинного преобразования.

Определение 4. Связность Γ^k_{ij} называется *согласованной с метрикой g_{ij}*, если ковариантная производная метрического

тензора тождественно равна нулю:

$$\nabla_k g_{ij} \equiv 0, \quad k, i, j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Укажем два свойства связности, согласованной с метрикой.

1. *Если связность согласована с метрикой, то операция опускания любого тензорного индекса коммутирует с ковариантным дифференцированием.*

Доказательство. Из свойств операции ∇_k (формула Лейбница) и формулы (12) вытекает формула

$$\nabla_k \left(g_{lm} T^{(i)}_{(j)}\right) = g_{lm} \left(\nabla_k T^{(i)}_{(j)}\right)$$

для любого тензора $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q). Так как операция ковариантного дифференцирования линейна, то отсюда и вытекает требуемое утверждение.

2. *Если векторные поля $T^i(t)$ и $S^i(t)$ параллельны вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, то их скалярное произведение постоянно вдоль этой кривой.*

Доказательство. Докажем, что $\frac{d}{dt}\langle T, S\rangle = \frac{d}{dt}\left(g_{ij}T^iS^j\right) = 0$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ij}T^iS^j\right) = \frac{dx^k}{dt}\nabla_k\left(g_{ij}T^iS^j\right) = \frac{dx^k}{dt} g_{ij}\nabla_k\left(T^iS^j\right) =$$

$$= g_{ij}\left(\frac{dx^k}{dt}\nabla_k T^i\right)S^j + g_{ij}T^i\left(\frac{dx^k}{dt}\nabla_k S^j\right) = 0.$$

Другими словами, параллельный перенос векторов из точки P в точку Q вдоль данной кривой является ортогональным преобразованием касательного пространства в точке P в касательное пространство в точке Q, если связность согласована с метрикой.

Как описать связности, согласованные с данной метрикой? Имеет место важная

Теорема 3. *Если метрика g_{ij} невырождена* (*т. е.* $g = \det(g_{ij}) \neq 0$), *то существует и единственна связность, симметричная и согласованная с этой метрикой g_{ij}. Эта связность в любой системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ задается формулами*

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \tag{13}$$

(*формулы Кристоффеля*).

Доказательство. По определению имеем

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji},$$

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} g_{lj} - \Gamma^l_{jk} g_{il} = 0. \tag{14}$$

Попытаемся решить последнее уравнение относительно Γ_{ij}^k. По определению опускания индекса имеем

$$\Gamma_{k,ij} = g_{kl}\Gamma_{ij}^l.$$

Уравнения (14) примут вид

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

При этом $\Gamma_{i,jk} = \Gamma_{i,kj}$, $\Gamma_{j,ik} = \Gamma_{j,ki}$. Переставляя циклически индексы i, j, k, получим

$$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i},$$

$$\Gamma_{i,kj} + \Gamma_{k,ij} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}.$$

Если (a), (b), (c) — левые части этих формул, то в силу симметричности связности имеет место равенство $(b)+(c)-(a)=2\Gamma_{k,ij}$. Поэтому

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right) = g_{kl}\Gamma_{ij}^l.$$

Поднимая индекс k, получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

Следствие. *Если координаты выбраны так, что в данной точке все первые производные от g_{ij} равны нулю, то в этой точке символы Кристоффеля Γ_{ij}^k равны нулю (для симметричной связности, согласованной с метрикой).*

Пример 1. Рассмотрим случай поверхности, расположенной в трехмерном евклидовом пространстве, с координатами $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ (евклидовыми):

$$x^1 = x^1(z^1, z^2), \quad x^2 = x^2(z^1, z^2), \quad x^3 = x^3(z^1, z^2).$$

Предположим, как мы это уже делали в § 8, что ось x^3 перпендикулярна касательной плоскости к поверхности в точке P, а оси x^1, x^2 ей параллельны. Около точки P мы выберем в качестве параметров x^1 и x^2; тогда поверхность задается уравнением

$$x^3 = f(z^1, z^2), \quad z^1 = u = x^1, \quad z^2 = v = x^2,$$

причем $z^1 = x^1$, $z^2 = x^2$; более того, так как ось x^3 ортогональна к поверхности в точке $P = (0, 0)$, получаем

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z^1}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial z^2}\right|_{(0,0)} = 0 \text{ или } \operatorname{grad} f|_{(0,0)} = 0 \text{ в точке } P = (0, 0).$$

Для метрики g_{ij} имеем (§ 7, п. 3)

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j}.$$

В точке P, где $\frac{\partial f}{\partial z^i} = 0$, имеем $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(\frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^k}\frac{\partial f}{\partial z^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^j \partial z^k}\frac{\partial f}{\partial z^i} = 0.$$

Поэтому в этих координатах в точке P все символы Γ^q_{ik} равны нулю ($q, i, k = 1, 2$).

Пример 2. Для векторного поля (T^i) определялась дивергенция

$$\operatorname{div} T^i = \nabla_i T^i = T^i_{;i}. \tag{15}$$

Для симметричной связности, согласованной с римановой (псевдоримановой) метрикой, имеем $\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} T^k$ и

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2} g^{il}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\ln\left(\sqrt{|g|}\right),$$

где $g = \det(g_{ij})$. Итак,

$$\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} T^k = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}\, T^i\right). \tag{16}$$

Вывод. *Дивергенция векторного поля $\nabla_i T^i$ имеет обычную форму $\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i}$ в том и только в том случае, если элемент объема $\sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ совпадает с евклидовым: $\sqrt{|g|} = 1$, где $g = \det(g_{ij})$.*

Теперь уже мы имеем определенную связь между связностью (способом ковариантного дифференцирования) и римановой метрикой g_{ij}: любая риманова геометрия порождает определенный симметричный способ дифференцирования тензоров, при котором она сама считается постоянной.

4. Связности, согласованные с комплексной структурой. Рассмотрим область D в комплексном пространстве с комплексными координатами $z^1, \ldots, z^n$, $z^k = x^k + iy^k$, где $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^n$ — вещественные координаты в овеществленной области $D^{\mathbb{R}}$. Пусть в области D задана эрмитова метрика

$$ds^2 = h_{i\bar{k}} dz^i d\bar{z}^k, \quad h_{k\bar{i}} = \overline{h}_{i\bar{k}} \tag{17}$$

(напомним (см. § 27), что мы надчеркиваем индекс k, соответствующий $d\bar{z}^k$). Она определяет нам риманову метрику в области

$D^{\mathbb{R}}$ по формуле

$$ds^2_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\left(h_{i\bar{k}}\right)[dx^i\,dx^k + dy^i\,dy^k]. \tag{18}$$

В силу сказанного в предыдущем пункте в области $D^{\mathbb{R}}$ существует единственная симметричная связность, согласованная с метрикой $ds^2_{\mathbb{R}}$. Эта связность, вообще говоря, не будет согласована с комплексной структурой в D в том смысле, что параллельный перенос вектора вдоль пути не будет являться унитарным преобразованием. Имеет место

Теорема 4. *Симметричная связность, согласованная с метрикой ds^2, будет согласована с комплексной структурой в области D тогда и только тогда, когда метрика ds^2 кэлерова.*

Доказательство. Напомним (см. § 27), что эрмитова метрика ds^2 называется кэлеровой, если форма Ω, определяемая формулой

$$\Omega = \frac{i}{2}\, h_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k, \tag{19}$$

замкнута:

$$d\Omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial z^i} - \frac{\partial h_{i\bar{k}}}{\partial z^j} = 0, \quad \frac{\partial h_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^i} - \frac{\partial h_{j\bar{i}}}{\partial \bar{z}^k} = 0. \tag{20}$$

Введем в пространстве касательных векторов комплексный базис

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\,\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\,\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Любой вектор ξ имеет вид $\xi = (\xi^k, \xi^{\bar{k}})$:

$$\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \xi^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k},$$

причем $\xi^{\bar{k}} = \overline{\xi^k}$, если ξ — вещественный вектор. В таком базисе скалярное произведение $ds^2_{\mathbb{R}}$ задается матрицей $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}$:

$$g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0; \quad g_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}}, \quad g_{\bar{i}j} = \overline{h_{i\bar{j}}}, \tag{21}$$

т. е. матрица $G = (g_{\alpha\beta})$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & H \\ \overline{H} & 0 \end{pmatrix}, \quad H = (h_{i\bar{j}}). \tag{22}$$

Тогда обратная матрица G^{-1} будет иметь вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & H^{-1} \\ \overline{H}^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Вычислим компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ связности, согласованной с метрикой

$g_{\alpha\beta}$, используя формулы Кристоффеля. Из вида метрики $g_{\alpha\beta}$ будем иметь

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial z^k} + \frac{\partial g_{\bar{m}k}}{\partial z^j} \right),$$

$$\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{m\bar{i}} \left(\frac{\partial g_{\bar{k}m}}{\partial \bar{z}^j} + \frac{\partial g_{m\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} \right) = \overline{\Gamma^i_{jk}}.$$

Далее,

$$\Gamma^i_{j\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial g_{\bar{m}\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j} + \frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial z^k} - \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^m} \right) = 0;$$

по аналогичной причине $\Gamma^{\bar{i}}_{jk} = 0$. Наконец,

$$\Gamma^i_{j\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial g_{j\bar{m}}}{\partial z^k} - \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial \bar{z}^m} \right) = \frac{1}{2} g^{i\bar{m}} \left(\frac{\partial h_{jm}}{\partial z^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial z^m} \right) = 0$$

— это выражение равно нулю в силу условия кэлеровости. Аналогичным образом проверяется, что условие кэлеровости обеспечивает обращение в нуль компонент $\Gamma^i_{\bar{j}k}$, $\Gamma^{\bar{i}}_{jk}$, $\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}k}$.

Итак, мы показали, что среди величин $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ отличны от нуля только Γ^i_{jk} и $\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}}$, причем

$$\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = \overline{\Gamma^i_{jk}}.$$

Рассмотрим изменение вектора $\xi = (\xi^i, \xi^{\bar{i}})$ при бесконечно малом параллельном переносе вдоль $(\delta z^j, \delta \bar{z}^j)$, где $\delta \bar{z}^j = \overline{\delta z^j}$. В силу доказанного выше будем иметь

$$\begin{aligned} \xi^i &\to \xi^i - \xi^k \Gamma^i_{kj} \delta z^j, \\ \xi^{\bar{i}} &\to \xi^{\bar{i}} - \xi^{\bar{k}} \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{k}\bar{j}} \delta \bar{z}^j. \end{aligned} \tag{24}$$

Поэтому, если $A = (a^i_k)$ — матрица, имеющая вид

$$a^i_k = \Gamma^i_{kj} \delta z^j,$$

то для вещественных перемещений $(\delta z^j, \delta \bar{z}^j)$ (с $\delta \bar{z}^j = \overline{\delta z^j}$) матрица соответствующего параллельного переноса будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 - A & 0 \\ 0 & 1 - \bar{A} \end{pmatrix}, \tag{25}$$

что и означает комплексную линейность параллельного переноса (см. § 12).

Задачи. 1. Доказать, что связность согласована с метрикой тогда и только тогда, когда для любых векторных полей η, ξ_1, ξ_2

$$\partial_\eta \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \nabla_\eta \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \nabla_\eta \xi_2 \rangle.$$

2. Доказать, что при бесконечно малом параллельном переносе вектора ξ^i на δx^k его компоненты изменяются следующим образом (с точностью до малых более высокого порядка):

$$\xi^i \to \xi^i - \xi^j \Gamma^i_{jk} \delta x^k + o(|\delta x|).$$

3. Выразить тензор деформации из § 22 через ковариантные производные.

4. Пусть в области U задана связность; P — фиксированная точка этой области, $T = T_P$ — касательное пространство к U в этой точке. Определим отображение E: $T \to U$. Пусть ξ — вектор из T. Выпустим из точки P геодезическую $\gamma(t)$ с начальным вектором скорости ξ. Положим $E(\xi) = \gamma_\xi(1)$. а) Показать, что отображение E определено в некоторой окрестности начала координат в T и является в ней локальным диффеоморфизмом. б) Показать, что в координатах, определяемых отображением E, все символы Γ^k_{ij} обращаются в нуль в точке P.

5. Уравнение движения точечного электрического заряда в поле магнитного полюса имеет вид

$$\ddot{r} = a \frac{[r, \dot{r}]}{|r|^3}, \qquad a = \text{const}.$$

Доказать, что траектория заряда является геодезической линией кругового конуса.

6. Найти все геодезические на плоскости Лобачевского.

7. Доказать, что геодезическими на сфере являются большие круги и только они.

8. Используя геодезические, доказать, что движение, оставляющее на месте точку и репер в этой точке, является тождественным.

9. Доказать, что линии уровня функций

$$z(u, v) = \int \frac{du}{\sqrt{f(u) - a}} \pm \int \frac{du}{\sqrt{g(v) + a}}$$

являются геодезическими в метрике

$$dl^2 = (f(u) + g(v))(du^2 + dv^2), \quad f > 0, \quad g > 0.$$

10. Доказать, что внутренние автоморфизмы $X \mapsto AXA^{-1}$, где $A \in SO(3, \mathbb{R})$, — это все движения метрики Киллинга на $SO(3, \mathbb{R})$, оставляющие неподвижной единицу группы.

11. Для симметричной связности Γ^i_{jk}, согласованной с метрикой g_{ij}, доказать справедливость следующих тождеств:

а) $g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{|g|}\, g^{ik})$;

б) $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k}$.

12. Доказать, что две близкие точки в римановом пространстве можно связать геодезической, которая локально единственна.

13. Метрика имеет вид $dl^2 = g_{rr}\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2$. Показать, что линия $\varphi = \varphi_0$ из центра — геодезическая.

14. В n-мерном пространстве с метрикой (g_{ij}) получить следующую формулу:

$$\oint\limits_{\partial V} X^i dS_i = \int\limits_V \nabla_i X^i \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где

$$dS_i = \frac{1}{(n-1)!} \sqrt{|g|}\, \varepsilon_{i_1 \ldots i_{n-1} i}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{n-1}}$$

(ср. задачу 3 к § 26).

15. Пусть M — поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, π — линейный оператор, ортогонально проектирующий $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к поверхности M; X, Y — векторные поля в $\mathbb{R}^n$, касающиеся поверхности M. Показать, что связность, согласованная с метрикой, индуцированной на поверхности M, имеет вид

$$\nabla_X Y = \pi\left(X^k \frac{\partial Y}{\partial x^k}\right).$$

§ 30. Тензор кривизны

1. Общий тензор кривизны. В предыдущем параграфе объяснялось, что в неевклидовом пространстве параллельный перенос вектора зависит от пути. Вместе с тем результат параллельного переноса вектора T вдоль пути $x(t)$ определяется уравнением переноса

$$\frac{dT^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} T^k \frac{dx^j}{dt} = 0, \tag{1}$$

которое нужно уметь решать.

Гораздо удобнее, не решая этого уравнения, определить локальную характеристику отклонения связности (Γ^i_{jk}) от евклидовой. Что это за характеристика? Как узнать, существуют ли координаты $x^1, \ldots, x^n$, в которых $\Gamma^i_{jk} = 0$? Конечно, если связность несимметрична, то $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ есть ненулевой тензор; поэтому нельзя ввести координат таких, что $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$. В этом случае можно под евклидовыми понимать координаты, в которых $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} T^i_{jk}$, т. е. связность Γ^i_{jk} кососимметрична по нижним индексам (симметрическая часть $\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} \equiv 0$).

Как выяснить вопрос о существовании евклидовых координат? Нас этот вопрос будет интересовать для симметричных связно-

стей. Мы знаем такое важное свойство частных производных в обычном анализе:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Если связность допускает евклидовы координаты $x^1, \ldots, x^n$, то в этих координатах тензоры дифференцируются по обычным формулам:

$$\nabla_k T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}.$$

Поэтому

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\, T^{(i)}_{(j)} = 0$$

или

$$T^{(i)}_{(j);k;l} = T^{(i)}_{(j);l;k}.$$

Это — свойство, верное в любых координатах, так как $T^{(i)}_{(j);k;l}$ — тензор. Посмотрим общие связности.

Для векторных полей в любых координатах $x^1, \ldots, x^n$ имеем

$$\nabla_k \nabla_l T^i = \nabla_k \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ql} T^q \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ql} T^q \right) + \Gamma^i_{pk}\left(\frac{\partial T^p}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql} T^q \right) - \Gamma^p_{lk}\left(\frac{\partial T^i}{\partial x^p} + \Gamma^i_{qp} T^q \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^q}{\partial x^k}\Gamma^i_{ql} + \Gamma^i_{pk}\frac{\partial T^p}{\partial x^l} - \Gamma^p_{lk}\frac{\partial T^i}{\partial x^p} +$$

$$+ T^q \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} T^q - \Gamma^p_{lk}\Gamma^i_{qp} T^q.$$

Составим выражение $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i$. После сокращений получим в координатах

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\, T^i =$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} \right) T^q + \left(\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk} \right) T^q - \left(\Gamma^p_{lk} - \Gamma^p_{kl} \right) \frac{\partial T^i}{\partial x^p}.$$

Введем обозначение

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk}. \tag{2}$$

Тогда получим формулу

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\, T^i = -R^i_{qkl} T^q + T^p_{kl}\frac{\partial T^i}{\partial x^p}, \tag{3}$$

где T^p_{kl} — тензор кручения (см. § 28). Оказывается, R^i_{qkl} — это тензор; этот тензор называется *тензором Римана* или *римановой*

кривизной. Для симметричных связностей $T^p_{kl} \equiv 0$. Таким образом, в симметричном случае имеет место следующая

Теорема 1. *Для симметричных связностей и для любого векторного поля T выражение $(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)T^i$ имеет вид $-R^i_{qkl}T^q$, где R^i_{qkl} — тензор Римана, определяемый формулой*

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk}.$$

Если связность евклидова, то $R^i_{qkl} = 0$. В точках, где $\Gamma^l_{pq} = 0$, верно равенство

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}.$$

Выведем формулы для кривизны и кручения в инвариантных обозначениях. Если ξ, η, ζ — векторные поля, то положим

$$[T(\xi, \eta)]^i = T^i_{kl}\xi^k\eta^l, \tag{4}$$

$$[R(\xi, \eta)\zeta]^i = R^i_{jkl}\xi^k\eta^l\zeta^j. \tag{5}$$

Дадим явное выражение векторных полей $T(\xi, \eta)$ и $R(\xi, \eta)\zeta$ через поля ξ, η, ζ.

Лемма 1. *Для произвольных полей ξ, η, ζ верны равенства*

$$T(\xi, \eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi, \eta], \tag{6}$$

$$R(\xi, \eta)\zeta = \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta, \tag{7}$$

где $[\xi, \eta]$ — коммутатор векторных полей.

Доказательство. Проверим сначала, что в формулах (6), (7) $T(\xi, \eta)$ и $R(\xi, \eta)\zeta$ линейно зависят от координат полей ξ, η, ζ. Для $T(\xi, \eta)$ имеем: если $\xi \to f\xi$, где f — гладкая функция, то

$$T(f\xi, \eta) = \nabla_{f\xi}\eta - \nabla_\eta(f\xi) - [f\xi, \eta] =$$
$$= f[\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi, \eta]] - (\partial_\eta f)\xi + (\partial_\eta f)\xi = fT(\xi, \eta),$$

где $\partial_\eta f$ — производная функции f вдоль поля η. Для $R(\xi, \eta)$

$$R(f\xi, \eta) = \nabla_\eta\nabla_{f\xi} - \nabla_{f\xi}\nabla_\eta + \nabla_{[f\xi, \eta]} =$$
$$= f\nabla_\eta\nabla_\xi + (\partial_\eta f)\cdot\nabla_\xi - f\nabla_\xi\nabla_\eta + \nabla_{f[\xi, \eta] - (\partial_\eta f)\xi} = fR(\xi, \eta).$$

Аналогично проверяется, что $R(\xi, f\eta) = fR(\xi, \eta)$. Наконец,

$$R(\xi, \eta)(f\zeta) = \nabla_\eta[(\partial_\xi f)\zeta + f\nabla_\xi\zeta] -$$
$$- \nabla_\xi[(\partial_\eta f)\zeta + f\nabla_\eta\zeta] + (\partial_{[\xi, \eta]}f)\zeta + f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta =$$
$$= (\partial_\eta\partial_\xi f)\zeta + (\partial_\xi f)\nabla_\eta\zeta + (\partial_\eta f)\nabla_\xi\zeta + f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta -$$
$$- (\partial_\xi\partial_\eta f)\zeta - (\partial_\eta f)\nabla_\xi\zeta - (\partial_\xi f)\nabla_\eta\zeta - f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta +$$
$$+ (\partial_\xi\partial_\eta f - \partial_\eta\partial_\xi f)\zeta + f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta = fR(\xi, \eta)\zeta.$$

Теперь в силу доказанной линейности достаточно проверить равенства (6), (7) для базисных векторных полей $\xi = e_k$, $\eta = e_l$, $\zeta = e_j$, где $\xi^i = \delta^i_k$, $\eta^i = \delta^i_l$, $\zeta^i = \delta^i_j$. Но для таких полей требуемые равенства следуют из определения тензоров T^i_{kl} и R^i_{jkl}. Лемма доказана.

Приложение (тетрадный формализм). Пусть в области n-мерного пространства задана метрика g_{ij}. Квадратичную форму $g_{ij}\xi^i\xi^j$ на касательных векторах в каждой точке можно привести к постоянному виду. Такое приведение можно сделать гладко зависящим от точки. Это означает, что (локально) можно выбрать n линейно независимых гладких векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_n$ таких, что их попарные скалярные произведения не зависят от точки:

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle = h_{ij}, \qquad h_{ij} = \text{const}. \tag{8}$$

Например, в общей теории относительности бывает технически удобно выбрать четверку векторов ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 (тетраду), где векторы ξ_0 и ξ_1 изотропны, $\langle \xi_0, \xi_1 \rangle = 1$, а векторы ξ_2, ξ_3 пространственноподобны, $(\xi_2)^2 = (\xi_3)^2 = -1$, $\langle \xi_2, \xi_3 \rangle = 0$.

Рассмотрим попарные коммутаторы $[\xi_i, \xi_j]$ этих векторных полей. Их можно разложить по тому же базису $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$[\xi_i, \xi_j] = c^k_{ij}\xi_k, \tag{9}$$

где c^k_{ij} — коэффициенты разложения (переменные). Имеет место

Теорема 2. *Для симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ij}, справедливы формулы*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{iq} (c_{jqk} + c_{kqj} - c_{qjk}), \tag{10}$$

где $c_{ijk} \equiv h_{is}c^s_{jk}$, а компоненты связности Γ^i_{jk} определены равенством

$$\nabla_{\xi_k}\xi_j = \Gamma^i_{jk}\xi_i. \tag{11}$$

Доказательство. Из условия симметричности связности $T(\xi_i, \xi_j) = 0$ и формулы (6) имеем

$$\Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij} = c^k_{ij}. \tag{12}$$

Далее, обозначим через $\Gamma_{k,ij}$ величину $h_{ks}\Gamma^s_{ij}$. Из условия (11) и согласованности с метрикой получаем

$$0 = \nabla_{\xi_k} \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk}.$$

Циклически переставив индексы i, j, k, получим систему трех уравнений

$$\Gamma_{i,kj} + \Gamma_{k,ij} = 0,$$
$$\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki} = 0,$$
$$\Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk} = 0.$$

Решая эту систему совместно с уравнениями (12), получаем искомые формулы для коэффициентов связности. Теорема доказана.

Используя формулу (7), можно выразить тензор кривизны $\langle R(\xi_i, \xi_j)\xi_k, \xi_l\rangle$ через функции c^h_{ij} и их производные.

2. Симметрии тензора кривизны. Тензор кривизны, порожденный метрикой. Какими свойствами обладает тензор кривизны?

Теорема 3. 1. $R^i_{qhl} = -R^i_{qlh}$ *всегда.*

2. *Для симметричной связности имеет место тождество*

$$R^i_{qhl} + R^i_{hlq} + R^i_{lqh} = 0. \tag{13}$$

3. *Для связности, согласованной с метрикой* g_{ik}, *введем тензор* $R_{iqhl} = g_{ip}R^p_{qhl}$. *Тензор* R_{iqhl} *кососимметричен по индексам* i, q:

$$R_{iqhl} = -R_{qihl}. \tag{14}$$

4. *Для тензора кривизны симметричной связности, согласованной с метрикой* g_{ik}, *имеется симметрия вида*

$$R_{iqhl} = R_{hliq}. \tag{15}$$

Доказательство. Равенство 1 очевидно. Для доказательства формулы (13) вычислим выражение $[\nabla_k, \nabla_l]e_q + [\nabla_l, \nabla_q]e_k + [\nabla_q, \nabla_k]e_l$, где e_q — базисные векторы, и воспользуемся равенством $-R^i_{qhl}e_i = [\nabla_k, \nabla_l]e_q$. Будем иметь $[\nabla_k, \nabla_l]e_q + [\nabla_l, \nabla_q]e_k + [\nabla_q, \nabla_k]e_l = \nabla_k(\nabla_l e_q - \nabla_q e_l) + \nabla_l(\nabla_q e_k - \nabla_k e_q) + \nabla_q(\nabla_k e_l - \nabla_l e_k) = 0$ (каждая скобка равна нулю в силу симметричности связности).

Для доказательства третьей симметрии достаточно проверить, что $\langle[\nabla_k, \nabla_l]\xi, \xi\rangle = 0$ для любого векторного поля ξ. Имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^h \partial x^l}\langle\xi, \xi\rangle = \langle\nabla_h\nabla_l\xi, \xi\rangle + \langle\nabla_l\xi, \nabla_h\xi\rangle,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}\langle\xi, \xi\rangle = \langle\nabla_l\nabla_k\xi, \xi\rangle + \langle\nabla_k\xi, \nabla_l\xi\rangle,$$

так как связность согласована с метрикой. Вычитая второе равенство из первого, получим (14), поскольку $\frac{\partial^2}{\partial x^h \partial x^l} = \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k}$.

Наконец, для тензора кривизны, порожденного метрикой, выведем тождество (15). На рис. 33 сумма выражений, стоящих в вершинах каждой заштрихованной грани, равна нулю в силу симметрий (13) и (14). Сложим эти выражения для граней q и l и вычтем их для граней l и k, получим (15). Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 вытекает

Следствие. *Если тензор Римана не обращается в нуль, то нельзя ввести евклидовы координаты, в которых* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *и* $\Gamma^h_{ij} = 0$.

Замечание. Этот результат можно получить иначе. Рассмотрим закон преобразования компонент Γ^k_{ij}: если $x = x(x')$, то

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\left(\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right).$$

Пусть связность симметрична, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Мы ищем такие координаты x', что $\Gamma^{k'}_{i'j'} \equiv 0$. Для $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} = -\Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}},$$

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x).$$

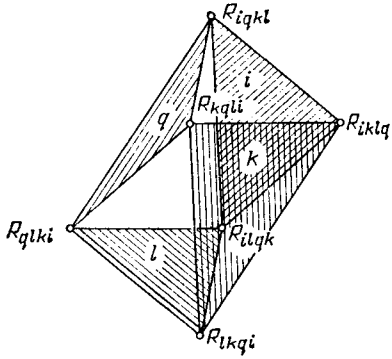


Рис. 33

Можно ли решить эти уравнения? Если они решаются, то

$$\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}\right) = 0.$$

Это — условие на правую часть уравнений, эквивалентное равенству

$$R^i_{qhl} \equiv 0.$$

3. Примеры: тензор кривизны двух- и трехмерных пространств, метрики Киллинга. Тензор кривизны — это тензор 4-го ранга. Естественным образом он получался как оператор на векторных полях, зависящий от пары (k, l) кососимметрическим образом:

$$-R^i_{qhl}T^q = R^i_{qlk}T^q = (\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)T^i - T^p_{kl}\frac{\partial T^i}{\partial x^p},$$

где $T^p_{kl} = \Gamma^p_{kl} - \Gamma^p_{lk}$ — тензор кручения.

В симметрическом случае $T^p_{kl} \equiv 0$. Если связность симметрична и согласована с метрикой g_{ij}, то компоненты Γ^k_{ij} и R^i_{qkl} выражаются через g_{ij} и их производные, причем имеют место симметрии:

1. $R^i_{qkl} = -R^i_{qlk}$,
2. $R_{iqkl} = g_{im}R^m_{qkl} = -R_{qikl}$,
3. $R_{iqkl} = R_{kliq}$,
4. $R^i_{qkl} + R^i_{lqk} + R^i_{klq} = 0$.

Сколько может быть компонент у тензора Римана?

1. Двумерный случай. Из симметрий $R_{iqkl} = -R_{iqlk} = -R_{qikl} = R_{klqi}$ вытекает, что имеется всего одна ненулевая ком-

понента тензора Римана — это R_{1212}. Все остальные либо получаются из нее перестановками, либо равны нулю.

Определение 1. *Тензором Риччи* называется выражение $R_{ql} = R^i{}_{qil}$ — след тензора Римана.

Определение 2. *Скалярной кривизной* называется след тензора Риччи:

$$R = g^{lq}R_{ql} = g^{lq}R^i{}_{qil}. \tag{16}$$

Имеет место важная

Теорема 4. *Для двумерных поверхностей в трехмерном пространстве скалярная кривизна R совпадает с удвоенной гауссовой кривизной. Поэтому гауссова кривизна, в отличие от средней кривизны поверхности, выражается через риманову метрику самой поверхности (является внутренним инвариантом).*

Доказательство. Пусть поверхность задается уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где x, y, z — евклидовы координаты пространства и $(u, v) = (z^1, z^2)$ — координаты на поверхности. Выберем в исследуемой точке $P = (0, 0)$, где ось z нормальна к поверхности, в качестве параметров $u = z^1 = x$, $v = z^2 = y$. Тогда поверхность около точки P запишется уравнением $z = f(x, y)$, где $\operatorname{grad} f|_P = 0$. Для компонент метрики на поверхности получим

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial z^i}\frac{\partial f}{\partial z^j}, \qquad z^1 = x, \quad z^2 = y.$$

В частности, в точке $P = (0, 0)$ все $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial z^h} = 0$. Поэтому в этой точке $\Gamma^h_{ij} = 0$. В такой точке имеем формулу (формула (2))

$$-R^i{}_{qhl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial z^h} - \frac{\partial \Gamma^i_{qh}}{\partial z^l},$$

$$R_{iqhl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial z^q \partial z^h} + \frac{\partial^2 g_{qh}}{\partial z^i \partial z^l} - \frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial z^q \partial z^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial z^i \partial z^h}\right).$$

Отсюда получаем $(z^1 = x, z^2 = y)$

$$R_{1212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2}\right).$$

При этом $g_{11} = f_x^2 + 1$; $g_{22} = f_y^2 + 1$; $g_{12} = f_x f_y$,

$$\left.\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2}\right|_P = 2f_{xy}^2, \quad \left.\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2}\right|_P = 2f_{xy}^2, \quad \left.\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x\, \partial y}\right|_P = f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2.$$

Окончательно имеем (в точке P)

$$R_{1212} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = K.$$

По определению $K = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ в точке P, где $\delta_{ij} = g_{ij}$ в выбранных координатах. Однако гауссова кривизна K — это скаляр, а R_{1212} — компонента тензора. Они равны лишь в данной, избранной, системе координат, где $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\det g_{ij} = 1 = g$. Легко видеть из определения R, согласно которому $R = g^{ql} R^i_{qil}$, что

$$R = 2 \det (g^{ql}) R_{1212} = \frac{2}{\det (g_{ij})} R_{1212} = \frac{2}{g} R_{1212} = R.$$

В нашей системе координат $g = 1$ и $R_{1212} = K$. Поэтому в нашей системе координат верно равенство $R = 2K$; так как R и K — оба скаляры, то это равенство верно всегда. Теорема доказана.

Замечание. Как это видно из доказательства, для компонент тензора Римана имеем формулу

$$\frac{R}{2} (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) = R_{1212} = \frac{Rg}{2} = Kg, \quad g = \det (g_{ij}). \tag{17}$$

Итак, гауссова кривизна K — это инвариант, для $n = 2$ равный $R/2$, где $R = g^{ql} R^i_{qil}$.

Рассмотрим примеры.

1) Евклидова метрика:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2, \quad R^i_{qkl} = 0, \quad K = \frac{R}{2} \equiv 0.$$

2) Сфера:

$$dl^2 = dr^2 + \sin^2 \frac{r}{R_0} d\varphi^2;$$

здесь $K = \frac{R}{2} = \frac{1}{R_0^2} > 0$ (кривизна положительна и постоянна).

3) Плоскость Лобачевского:

$$dl^2 = dr^2 + \operatorname{sh}^2 \frac{r}{R_0} d\varphi^2;$$

здесь $K = \frac{R}{2} = -\frac{1}{R_0^2} < 0$ (кривизна отрицательна и постоянна).

В § 8 объяснялся наглядный смысл кривизны — когда она бывает положительна или отрицательна.

II. Трехмерный случай. Здесь все сложнее. Тензор Римана

$$R_{iqkl} = -R_{qikl} = -R_{iqlk} = R_{kliq}$$

может здесь рассматриваться в каждой точке как квадратичная форма на трехмерном линейном пространстве кососимметрических тензоров 2-го ранга в силу его симметрий.

Если пару $[i, q] = -[q, i]$ обозначить через A, а пару $[k, l] = -[l, k]$ — через B, то

$$R_{[iq][kl]} = R_{AB} = R_{BA}.$$

Итак, здесь тензор Римана определяется шестью числами. Рассмотрим тензор Риччи $R^i_{qil} = R_{ql} = R_{lq}$. Это — симметрический тензор 2-го ранга. Он тоже определяется шестью числами R_{ql}, $q \geqslant l$. Скалярная кривизна R — это одно число

$$R = g^{ql}R_{ql} = g^{ql}R^i_{qil}.$$

В отличие от двумерного случая, скаляр R не определяет весь тензор R^i_{qkl}. Однако в трехмерном случае достаточно знать тензор Риччи, так как верна формула (проверьте)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + \frac{R}{2}(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}). \tag{18}$$

Скалярная кривизна — это след тензора Риччи $\mathrm{Sp}(R_{ql}) = g^{ql}R_{ql}$. Имеются еще инварианты — собственные значения λ_1, λ_2, λ_3, определяемые из уравнения

$$\det(R_{ql} - \lambda g_{ql}) = 0, \tag{19}$$

причем $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = R$.

(Когда произносят слово «пространство положительной кривизны», имеется в виду, что тензор Римана R_{AB} есть положительно определенная квадратичная форма на кососимметрических тензорах 2-го ранга.)

III. Четырехмерный случай. Здесь тензор Римана не определяется тензором Риччи. Тем не менее тензор Риччи очень важен. Например, в четырехмерном пространстве-времени считается, что гравитационное поле — это метрика (g_{ij}), $i, j = 0, 1, 2, 3$, а все другие свойства материи сосредоточены в «тензоре энергии-импульса» λT_{ij} (λ — это размерная константа).

Уравнения (Эйнштейна), определяющие метрику пространства-времени, имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \lambda T_{ij}, \quad \nabla_j T^j_i = 0. \tag{20}$$

В отсутствие материи имеем

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 0 \quad (\text{или } R_{ij} = 0). \tag{21}$$

При этом $\det(g_{ij}) \neq 0$, но метрика индефинитна (она имеет в диагональном виде три минуса и один плюс; см. § 36).

IV. Тензор кривизны метрики Киллинга. Пусть G — матричная группа преобразований, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, причем на $\mathfrak{g}$ задана метрика Киллинга. Введем связность на группе G,

полагая

$$\nabla_{L_X} L_Y = \frac{1}{2} L_{[X,Y]} = \frac{1}{2} [L_X, L_Y], \tag{22}$$

где $X, Y \in \mathfrak{g}$, L_X, L_Y — соответствующие левоинвариантные векторные поля.

Поля вида L_X, $X \in \mathfrak{g}$, образуют базис в касательном пространстве к G в каждой точке, поэтому формула (22) полностью определяет связность (при условии выполнимости формулы Лейбница; см. § 28).

Лемма 2. *Связность* (22) *симметрична и согласована с метрикой Киллинга.*

Доказательство. Проверим, что $T(L_X, L_Y) = 0$ для любых элементов X, Y алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Действительно (формула (6)),

$$T(L_X, L_Y) = \nabla_{L_X} L_Y - \nabla_{L_Y} L_X - [L_X, L_Y] =$$

$$= \frac{1}{2} L_{[X,Y]} - \frac{1}{2} L_{[Y,X]} - L_{[X,Y]} = 0.$$

Докажем теперь согласованность с метрикой Киллинга $\langle , \rangle$. Достаточно показать, что для любых векторных полей ξ, η, ζ имеет место следующее правило дифференцирования скалярного произведения:

$$\partial_\xi \langle \eta, \zeta \rangle = \langle \nabla_\xi \eta, \zeta \rangle + \langle \eta, \nabla_\xi \zeta \rangle.$$

Достаточно проверить это равенство, когда ξ, η, ζ — левоинвариантные поля. В этом случае будем иметь

$$\langle L_Y, L_Z \rangle = \langle Y, Z \rangle_0 = \text{const}, \quad \partial_{L_X} \langle L_Y, L_Z \rangle \equiv 0.$$

Здесь $\langle , \rangle$ — соответствующая метрика Киллинга на алгебре $\mathfrak{g}$. С другой стороны,

$$\langle \nabla_{L_X} L_Y, L_Z \rangle + \langle L_Y, \nabla_{L_X} L_Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle L_{[X,Y]}, L_Z \rangle + \langle L_Y, L_{[X,Z]} \rangle \} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle_0 + \langle Y, [X, Z] \rangle_0 \} = 0,$$

так как $\operatorname{ad} X$ есть кососимметрический относительно метрики Киллинга линейный оператор (см. § 24). Лемма доказана.

Отсюда уже легко вытекает

Следствие. *Кривизна симметричной связности, согласованной с метрикой Киллинга, дается формулой* (ср. формулу (7))

$$R(L_X, L_Y) L_Z = -\frac{1}{4} L_{[[X,Y]Z]},$$

$$\langle R(L_X, L_Y) L_Z, L_W \rangle = -\frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle. \tag{23}$$

Найдем еще геодезические для связности, согласованной с метрикой Киллинга. Так как сдвиги на группе G являются дви-

жениями, достаточно определить геодезические, проходящие через единицу группы. Имеет место

Теорема 5. *Геодезическими метрики Киллинга, проходящими через единицу группы, являются однопараметрические подгруппы и только они.*

Доказательство. Вектором скорости однопараметрической подгруппы вида $A(t)=\exp(tX)$, где $X\in\mathfrak{g}$, t — вещественный параметр, является левоинвариантное поле L_X (точнее, его ограничение на кривую $A(t)$). Поэтому

$$\nabla_{\dot{A}}\dot{A}=\nabla_{L_X}L_X=\frac{1}{2}L_{[X,X]}\equiv 0. \tag{24}$$

Следовательно, однопараметрические подгруппы являются геодезическими. Поскольку из единицы можно выпустить однопараметрическую подгруппу с любым начальным вектором скорости, то мы так получим все геодезические по теореме единственности. Теорема доказана.

4. Уравнения Петерсона — Кодацци. Поверхности постоянной отрицательной кривизны и уравнение «sin-gordon». Пусть $r=r(x^1, x^2)$ — поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, g_{ij} — индуцированная на поверхности метрика. На поверхности возникает также вторая квадратичная форма $b_{ij}\,dx^i\,dx^j$, где

$$b_{ij}=\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^i}\right), n\right\rangle, \tag{25}$$

n — единичный вектор нормали к поверхности, $\langle,\rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Как вычислить компоненты симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ij}?

Утверждение. *Компоненты симметричной связности, согласованной с метрикой g_{ij} на поверхности $r(x^1, x^2)$, вычисляются по формулам*

$$\Gamma_{ij}^k=\left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial x^i\partial x^j}, \frac{\partial r}{\partial x^l}\right\rangle g^{lk} \qquad (i, j, k=1, 2), \tag{26}$$

или

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j}=b_{ij}n+\Gamma_{ij}^k e_k, \quad e_i=\frac{\partial r}{\partial x^i}. \tag{27}$$

Доказательство. Симметричность этой связности очевидна. Достаточно проверить следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\langle e_j, e_m\rangle=\langle\nabla_i e_j, e_m\rangle+\langle e_j, \nabla_i e_m\rangle,$$

где можно считать, что скалярное произведение берется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Но векторы $\nabla_i e_j$ и $\dfrac{\partial e_j}{\partial x^i}$ отличаются на $b_{ij}n$,

а $\langle n, e_m\rangle = 0$; поэтому $\langle \nabla_i e_j, e_m\rangle = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial x^i}, e_m \right\rangle$. Требуемое равенство запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\langle e_j, e_m\rangle = \left\langle \frac{\partial e_j}{\partial x^i}, e_m \right\rangle + \left\langle e_j, \frac{\partial e_m}{\partial x^i} \right\rangle,$$

а в таком виде оно очевидно. Утверждение доказано.

Векторы (e_1, e_2, n) образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, гладко зависящий от точки поверхности. Вычислим еще производные $\frac{\partial n}{\partial x^i}$, $i = 1, 2$. Вектор n единичный, поэтому производная $\frac{\partial n}{\partial x^i}$ ему ортогональна (см. § 5). Из равенства $\langle n, e_j\rangle = 0$ вытекает

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^i}\langle n, e_j\rangle = \left\langle \frac{\partial n}{\partial x^i}, e_j \right\rangle + \left\langle n, \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial n}{\partial x^i}, e_j \right\rangle + b_{ij},$$

откуда

$$\frac{\partial n}{\partial x^i} = -b_i^j e_j, \quad b_i^j = g^{jl} b_{il}. \tag{28}$$

Из равенств (27) и (28) вытекают следующие условия совместности:

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} n - b_{ij} b_k^l e_l + \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} e_l + \Gamma_{ij}^s \left[b_{ks} n + \Gamma_{ks}^l e_l\right] =$$

$$= \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} n - b_{ik} b_j^l e_l + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} e_l + \Gamma_{ik}^s \left[b_{js} n + \Gamma_{js}^l e_l\right] = \frac{\partial^2 e_i}{\partial x^j \partial x^k},$$

или

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{ks}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l = b_{ij} b_k^l - b_{ik} b_j^l, \tag{29}$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ik}^s b_{js} - \Gamma_{ij}^s b_{ks}. \tag{30}$$

Уравнения (29) называются соотношениями Гаусса. Левая часть формул (29) совпадает с тензором кривизны R_{ijk}^l, и это равенство эквивалентно доказанной выше теореме о связи гауссовой и скалярной кривизны (проверьте!).

Формулы (30) называются соотношениями Петерсона — Кодацци.

Замечание. Уравнения Петерсона — Кодацци дают необходимое условие для того, чтобы форма $b_{ij}(x^1, x^2)$ могла быть второй квадратичной формой поверхности в $\mathbb{R}^3$ с метрикой $g_{ij}(x^1, x^2)$,

где величины Γ_{ij}^k вычисляются по метрике g_{ij}, исходя из формул Кристоффеля. Можно показать, что это условие является также и достаточным.

Пусть поверхность имеет отрицательную кривизну $K<0$. Тогда можно ввести (локально) такие координаты (p, q) на поверхности, в которых вторая квадратичная форма примет вид

$$b_{ij}\,dx^i\,dx^j = 2b_{pq}\,dp\,dq \tag{31}$$

(отсутствуют члены с dp^2 и dq^2). Если к тому же $K=\text{const}$ (например, $K=-1$), то из соотношений Петерсона — Кодацци следует

$$\frac{\partial g_{pp}}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial g_{qq}}{\partial p}=0 \tag{32}$$

(проверьте!). Выберем новые координаты (x, y) на поверхности, полагая

$$x=\int\limits_{p_0}^{p}\sqrt{g_{pp}}\,dp, \quad y=\int\limits_{q_0}^{q}\sqrt{g_{qq}}\,dq. \tag{33}$$

В координатах (x, y) первая и вторая квадратичные формы примут вид

$$ds^2=dx^2+2g_{xy}\,dx\,dy+dy^2, \quad b_{ij}\,dx^i\,dx^j=2b_{xy}\,dx\,dy. \tag{34}$$

Положим $g_{xy}=\cos\omega$, где ω — угол между координатными линиями (x, y) (асимптотические линии). Тогда уравнения Гаусса при $K\equiv -1$ дадут

$$\omega_{xy}=\sin\omega. \tag{35}$$

Это уравнение в физической литературе часто называют уравнением «sin-gordon». Полагая $x=\frac{\tau+\xi}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{\tau-\xi}{\sqrt{2}}$, приведем это уравнение к виду

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}=\sin\omega. \tag{36}$$

Задачи. 1. Докажите, что решения уравнения (36), не зависящие от ξ и убывающие при $\tau\to+\infty$, соответствуют поверхности вращения кривизны $K=-1$ вида $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ («псевдосфера Бельтрами»).

2. Доказать формулу (18).

3. Пусть задана кусочно гладкая кривая $x^i(t)$, $i=1, 2$, ограничивающая область U. Доказать, что $\Delta\varphi=\iint\limits_U K\sqrt{g}\,dx^1\wedge dx^2$

есть угол поворота вектора при параллельном обносе вдоль кривой $x^i(t)$ (K — гауссова кривизна).

4. Если эта кривая состоит из трех дуг геодезических и кривизна постоянна, то сумма углов такого геодезического треугольника равна $\pi + K\sigma$, где σ — площадь этого треугольника (доказать!). Рассмотреть случай сферы и плоскости Лобачевского.

5. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — векторные поля в римановом (или псевдоримановом) n-мерном пространстве; $g_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$, $[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$. Вычислить компоненты симметричной связности Γ_{ij}^k (где $\nabla_{\xi_j} \xi_i = \Gamma_{ij}^k \xi_k$), согласованной с этой метрикой.

6. Обнесем параллельно вектор $\xi = (\xi^k)$ вдоль контура квадрата со стороной ε, натянутого на координатные оси x^i, x^j (против часовой стрелки). Пусть $\tilde{\xi}(\varepsilon)$ — результат такого обноса. Доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{\xi}^k(\varepsilon) - \xi^k}{\varepsilon^2} = -R_{lij}^k \xi^l.$$

7. Доказать справедливость тождества Бьянки для тензора кривизны симметричной связности, согласованной с метрикой:

$$\nabla_m R_{ikl}^n + \nabla_l R_{imk}^n + \nabla_k R_{ilm}^n = 0.$$

8. Вывести из формулы предыдущей задачи следующее тождество для дивергенции тензора Риччи:

$$\nabla_l R_m^l = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m}.$$

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — ортонормированные векторные поля в n-мерном римановом пространстве и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — дуальный базис 1-форм: $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ (все индексы можно считать нижними). Определим 1-формы ω_{ij} и 2-формы Ω_{ij}, полагая

$$\omega_{ij} = \Gamma_{jk}^i \omega_k; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l.$$

Здесь $\nabla_{X_k} X_j = \Gamma_{jk}^i X_i$, $\langle R(X_k, X_l) X_j, X_i \rangle = R_{ijkl}$; суммирование по дважды повторяющимся индексам.

а) Доказать, что $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

б) Вывести следующие соотношения (структурные уравнения Картана):

$$d\omega_i = -\omega_j \wedge \omega_{ij},$$
$$d\omega_{ij} = \omega_{il} \wedge \omega_{lj} - \Omega_{ij},$$
$$d\Omega_{ij} = -\Omega_{il} \wedge \omega_{li} + \omega_{il} \wedge \Omega_{lj}.$$

10. В обозначениях предыдущей задачи определим формы $\Omega_{(k)}$ и форму Ω в случае четной размерности n, полагая

$$\Omega_{(k)} = \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{k-1} i_k} \wedge \Omega_{i_k i_1};$$

$$\Omega = \varepsilon^{i_1 \ldots i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n} \quad (n = 2m).$$

а) Доказать, что определение форм $\Omega_{(k)}$, Ω не зависит от выбора ортонормированного репера $X_1, \ldots, X_n$.

б) Формы $\Omega_{(k)}$, Ω замкнуты.

в) Получить выражения для этих форм в координатах.

г) Для $n = 2$ форма Ω имеет вид $\Omega = K \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2$, K — гауссова кривизна.

д) Вывести формулы, аналогичные формулам задач 9, 10, для псевдоримановых пространств.

Глава 5

ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 31. Одномерные вариационные задачи

1. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Мы определили в § 29 геодезические линии $x^i = x^i(t)$ уравнением $\nabla_T(T) = 0$, где $T^i = \frac{dx^i}{dt}$ — вектор скорости кривой, или

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{1}$$

Если связность Γ^i_{jk} симметрична и согласована с метрикой g_{ij}, то компоненты Γ^i_{jk} выражаются через g_{ij}, и поэтому геодезические определяются метрикой. Какими геометрическими свойствами они обладают кроме того, что параллельный перенос вектора скорости геодезической вдоль нее самой дает опять ее вектор скорости? Мы привыкли к тому, что геодезические линии (хотя бы локально) кратчайшие — их длина не больше длины любой другой кривой, соединяющей те же точки, достаточно близкие друг к другу. Выясним здесь этот вопрос.

Полезно подойти к нему с более общей точки зрения. Пусть $L(x, \xi, t)$ — какая-то функция точки $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и касательного вектора $\xi = (\xi^i)$ в этой точке. Рассмотрим фиксированную пару точек $P = (x^1_1, \ldots, x^n_1)$ и $Q = (x^1_2, \ldots, x^n_2)$, всевозможные гладкие кривые γ: $x^i = x^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ (с фиксированными a и b), соединяющие эти две точки: $x^i(a) = x^i_1$, $x^i(b) = x^i_2$.

Рассмотрим величину

$$S[\gamma] = \int_P^Q L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt. \tag{2}$$

На какой кривой γ величина $S[\gamma]$ будет минимальна? Величина (функционал) $S[\gamma]$ будет называться *действием*.

Пример 1. Пусть $L(x, \xi) = g_{ij}\xi^i\xi^j$. Тогда $S[\gamma] = \int_P^Q L(x, \dot{x})\, dt = \int_P^Q g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j dt = \int_P^Q |\dot{x}|^2\, dt$. На какой кривой $\gamma = \{x(t)\}$ функция $S[\gamma]$ минимальна?

Пример 2. Пусть $L(x, \xi) = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j} = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = |\xi|$ (длина вектора). Тогда $S[\gamma] = \int\limits_P^Q \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,dt$ есть длина кривой γ. У какой кривой γ между точками P и Q длина минимальна?

Пример 3. Пусть метрика евклидова; положим $L = \frac{m}{2}\delta_{ij}\xi^i\xi^j - U(x)$, где U — некоторая функция точки. Тогда $S[\gamma] = \int\limits_P^Q \left[\sum_i \frac{m}{2}(\dot{x}^i)^2 - U(x)\right] dt$. Кривые γ, вдоль которых $S[\gamma]$ минимально,— это траектории движения точки массы m в поле силы $f_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$.

Имеет место простая

Теорема 1. *Если величина* $S[\gamma] = \int\limits_P^Q L(x, \dot{x}, t)\,dt$ *достигает минимума на некоторой кривой* γ: $x^i = x^i(t)$ *среди всех гладких кривых, идущих из* P *в* Q, *то вдоль кривой* γ *выполнены уравнения*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L(x, \xi, t)}{\partial \xi^i}\Big|_{\xi=\dot{x}}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial t}\right)\Big|_{\xi=\dot{x}}$$

(*считается, что* $L = L(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n, t)$, *где* x *и* ξ *— независимые переменные, но затем подставляется* $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ *вдоль кривой* γ).

Доказательство. Пусть $\eta^i = \eta^i(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,— любая гладкая функция такая, что $\eta^i(a) = 0$ и $\eta^i(b) = 0$. Рассмотрим выражение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S[\gamma + \varepsilon\eta] - S[\gamma]}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Здесь $\gamma + \varepsilon\eta$ — это кривая $x^i = x^i(t) + \varepsilon\eta^i(t)$, также идущая из P в Q, близкая к кривой $\gamma(t)$ при малом ε.

Лемма 1. *Если* $S[\gamma]$ *минимально, то для любой гладкой вектор-функции* $\eta(t)$, *обращающейся в нуль на концах временного интервала,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{S[\gamma + \varepsilon\eta] - S[\gamma]}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Доказательство леммы очевидно.

Перейдем к теореме. Развернем выражение $\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0}$. Имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial x^i} \eta^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i(t) \right\} dt = 0, \tag{4}$$

где интеграл по определению вычислен вдоль кривой γ

$$x^i = x^i(t), \quad \xi^i = \dot{x}^i(t).$$

Это равенство верно для любой гладкой вектор-функции $\eta(t)$, обращающейся в нуль на концах временно́го интервала.

Заметим следующее тождество:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i dt = \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \eta^i|_{t=b} - \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \eta^i|_{t=a} - \int_a^b \eta^i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \right) dt$$

(интегрирование по частям). Так как $\eta^i(a) = \eta^i(b) = 0$, получаем: $\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \dot{\eta}^i dt = -\int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \right) \eta^i dt$. Подставляя это выражение в формулу (4), мы видим, что для любой гладкой вектор-функции $\eta^i(t)$, обращающейся в нуль на концах временно́го интервала, верно равенство

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\gamma + \varepsilon\eta]|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right] \eta^i dt = 0, \tag{5}$$

если, напомним, на кривой γ: $x^i = x^i(t)$ достигается минимум функции $S[\gamma]$ на множестве всех гладких кривых, соединяющих точки P и Q.

Отсюда следует равенство

$$\psi^i(t) = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Действительно, если $\psi^i(t) \neq 0$ для какого-либо i и какого-либо $t = t_0$ между a и b, то легко подобрать такую функцию $\eta^i(t)$, что интеграл (5) не будет равен нулю (например, полагая $\eta^i = \psi^i f(t)$ будем иметь под интегралом положительное число, если $f(t) \geqslant 0$ обращается в нуль на концах). Итак, теорема доказана.

Определение 1. Решения уравнений $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x^i}$ называют *экстралями* функционала S.

Дадим еще несколько определений.

1. Подынтегральная функция

$$L = L(x, \xi, t) = L(x, \dot{x}, t) \tag{6}$$

называется *лагранжианом*.

2. *Энергией* называется выражение

$$E = E(x, \dot{x}, t) = E(x, \xi, t) = \xi^i \frac{\partial L}{\partial \xi^i} - L = \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L. \tag{7}$$

3. *Импульсом* называется выражение

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \quad \text{(ковектор)}. \tag{8}$$

4. *Силой* называется выражение

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{(также ковектор)}. \tag{9}$$

5. *Уравнение Эйлера — Лагранжа* — это уравнение из теоремы 1 (уравнение экстремалей)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{или} \quad \dot{p}_i = f_i.$$

6. Выражение

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \tag{10}$$

называется *вариационной производной* функционала $S[\gamma]$. Из доказательства теоремы 1 вытекает другое определение вариационной производной: это величина $\frac{\delta S}{\delta x^i}$, определяемая равенством

$$\frac{d}{d\varepsilon} T[\gamma + \varepsilon\eta]\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{\delta S}{\delta x^i}\eta^i dt. \tag{11}$$

Следует сказать, что лагранжиан, энергия и импульс определены неоднозначно, с точностью до преобразований вида

$$L' = L + \frac{df(x, t)}{dt}, \quad E' = E - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad p' = p + \frac{\partial f}{\partial x}.$$

2. Основные примеры функционалов. Пример 0. Если $L = \frac{m}{2}\sum_i (\xi^i)^2 - U(x)$, где U — функция точки, то $f_i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$ и $p_i = m\dot{x}^i$. Имеем

$$\dot{p}_i = f_i \quad \text{или} \quad m\ddot{x}^i = -\frac{\partial U}{\partial x^i}. \tag{12}$$

Это уравнение (Ньютона) движения частицы массы m в потенциальном силовом поле $f = -\operatorname{grad} U$, известные из классической механики. Мы получим, что траектории движения такой частицы совпадают с экстремалями функционала

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \sum (\dot{x}^i)^2 - U(x) \right] dx$$

(*принцип наименьшего действия*).

Пример 1. Если $L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j$, то $p_i = g_{ij} \dot{\xi}^j$, $f_k = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j$. Получаем уравнение экстремалей $\frac{dp_k}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j$, где $p_k = g_{kj} \dot{x}^j$, т. е. $\frac{dp_k}{dt} = \ddot{x}^j g_{jk} + \dot{x}^j \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j$. Так как $g^{km} g_{jk} = \delta_j^m$, получаем $\ddot{x}^m + g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$. Заметим теперь следующее тождество: $g^{km} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{1}{2} \dot{x}^i \dot{x}^j g^{km} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right)$. Подставляя его в предыдущее уравнение, получим

$$\ddot{x}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \tag{13}$$

где

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \tag{14}$$

— симметрическая связность, согласованная с метрикой g_{ij}.

Итак, доказана

Теорема 2. *Если* $L = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle = |\dot{x}|^2$, $S[\gamma] = \int_P^Q |\dot{x}|^2 \, dt$, *то уравнение Эйлера — Лагранжа для экстремалей (в частности, минимумов) совпадает с уравнением геодезических.*

Пример 2. Если $L = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} = |\dot{x}|$, то выражение $S = \int_P^Q |\dot{x}| \, dt$ (длина) не зависит от параметра t. Уравнения Эйлера — Лагранжа в этом случае имеют вид $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x^k}$, или

$$\left(\frac{g_{kj} \dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}^j}} \right)^{\cdot} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}}.$$

Если отнести кривую к параметру, пропорциональному натуральному, $t = \text{const} \cdot l$, для которого $\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} = |\dot{x}| = \text{const}$, то получим

$$(g_{kj}\dot{x}^j)^{\cdot} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Это — то же самое уравнение, что и в примере 1, но оно получено нами лишь для кривых, отнесенных к параметру, пропорциональному натуральному.

Условимся в этой главе трактовать термин «натуральный параметр» расширительно: *параметр, пропорциональный натуральному, мы также будем называть натуральным.*

Заметим, что в примере 2 можно ограничиться рассмотрением кривых с натуральным параметром, поскольку значение длины кривой не зависит от параметра на кривой.

Итак, нами доказана

Теорема 3. *Уравнения Эйлера — Лагранжа для экстремалей (в частности, минимумов) функционала длины* $L = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}$ *совпадают с уравнением геодезических, если на кривой выбирается натуральный параметр. Таким образом, гладкая кривая, являющаяся кратчайшей среди кривых, соединяющих точки P и Q, удовлетворяет уравнению геодезических по отношению к натуральному параметру.*

Отметим некоторые свойства энергии и импульса произвольного лагранжиана.

Первое свойство («сохранение энергии»). *Если лагранжиан* $L = L(x, \xi)$ *не зависит явно от t, то полная производная энергии E вдоль экстремали равна нулю:*

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L\right) = \ddot{x}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + \dot{x}^i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i = \dot{x}^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i}\right) \equiv 0.$$

Второе свойство («сохранение импульса»). *Если координаты* $x^1, \ldots, x^n$ *выбраны так, что* $\dfrac{\partial L}{\partial x^i} \equiv 0$, *то вдоль любой экстремали имеет место равенство* $\dot{p}_i = \left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} \equiv 0$. Это следует из уравнений Эйлера — Лагранжа. Координата x^i называется в этом случае *циклической.*

Примеры. а) Если $L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, то $E = L = \frac{1}{2}|\dot{x}|^2$. Из закона сохранения энергии имеем $\frac{dE}{dt} = 0$ вдоль экстремалей функционала $S = \int L\,dt$. Итак, экстремали — это всегда геодезические, а скорость их пробегания постоянна (натуральный параметр).

Замечание. Если лагранжиан $L(x, \dot{x})$ является однородной функцией от $\xi = \dot{x}$ первой степени однородности, т. е. $L(x, \lambda\xi) = \lambda L(x, \xi)$ (например, $L = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$), то энергия E тождественно равна нулю и параметр на экстремали может быть взят любым.

б) Если поверхность в трехмерном евклидовом пространстве задана в цилиндрических координатах уравнением $f(z, r) = 0$ (поверхность вращения), то за одну из координат на поверхности мы можем взять угол φ, а за другую — r или z (локально). Метрика имеет вид

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\, d\varphi^2.$$

Если локально имеем $r = r(z)$, то

$$dl^2 = g_{zz} dz^2 + r^2(z)\, d\varphi^2, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{zz} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Лагранжиан для геодезических имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(g_{zz}\dot{z}^2 + r^2(z)\,\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}(g_{rr}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

причем энергия $E = L$ и импульс $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}$ сохраняются.

Локальные координаты на поверхности — это z и φ. Рассмотрим их орты e_z и e_φ. Скалярные произведения этих ортов таковы:

$$\langle e_z, e_z \rangle = g_{zz}, \quad \langle e_z, e_\varphi \rangle = 0, \quad \langle e_\varphi, e_\varphi \rangle = r^2(z).$$

Рассмотрим вектор скорости геодезической $v = (\dot{z}, \dot{\varphi})$ и вычислим угол ψ между v и e_φ:

$$\cos\psi = \frac{\langle v, e_\varphi \rangle}{\sqrt{\langle v, v \rangle \langle e_\varphi, e_\varphi \rangle}} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{E}r} = \frac{p_\varphi}{\sqrt{E}r}.$$

Поэтому $r\cos\psi = \dfrac{p_\varphi}{\sqrt{E}} = \text{const}$. Окончательно получается

Теорема 4 (Клеро). *Величина $r\cos\psi$ сохраняется вдоль геодезической на поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$.*

Так как $p_\varphi = r^2\dot{\varphi} = \text{const}$ и $2E = g_{zz}\dot{z}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \text{const}$, получаем $r\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{r}$, $2E = g_{zz}(z)\,\dot{z}^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2}$, где $r = r(z)$. Это позволяет полностью проинтегрировать уравнение геодезических на поверхности вращения:

$$d\varphi = \frac{p_\varphi}{r^2}\, dt, \quad dt = \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2E}{g_{rr}} - \dfrac{p_\varphi^2}{g_{rr}r^2}}}. \tag{15}$$

Задача. Пусть в лагранжиан L входят высшие производные:

$$L = L(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(k)});$$

$$S[\gamma] = \int_{\gamma} L(t, x, \ldots, x^{(k)})\, dt.$$

Доказать, что для экстремалей функционала $S[\gamma]$ имеем уравнение Эйлера — Лагранжа вида

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} - \ldots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} = 0.$$

§ 32. Законы сохранения

1. Группы преобразований, сохраняющих вариационную задачу. Полученному в предыдущем параграфе закону сохранения импульса можно придать более удобную инвариантную форму, используя однопараметрические группы преобразований (см. § 23).

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана (локальная) однопараметрическая группа локальных преобразований S_τ, $-\infty < \tau < \infty$, обладающая следующими свойствами:

1. Для любой точки P найдется число $\tau_0 > 0$ и окрестность U точки P в $\mathbb{R}^n$, где преобразование S_τ определено (и гладко) при $|\tau| < \tau_0$:

$$S_\tau : U \to \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

2. $S_0 = 1$ (тождественное преобразование),

$$S_{\tau_1+\tau_2} = S_{\tau_1} \circ S_{\tau_2}, \quad S_{-\tau} = S_\tau^{-1} \tag{2}$$

(всюду, где все эти отображения определены).

Напомним, что с каждой локальной однопараметрической группой связывается векторное поле, касающееся траекторий $S_\tau(x)$:

$$(X^i) = X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x)\Big|_{\tau=0}. \tag{3}$$

Векторное поле (X^i) определяет группу S_τ согласно теореме существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$, где (X^i) отличен от нуля, найдется окрестность U этой точки и координаты $y^1, \ldots, y^n$ в области U такие, что преобразование S_τ при малых τ имеет вид

$$S_\tau(y^1, \ldots, y^n) = (y^1 + \tau, y^2, \ldots, y^n). \tag{4}$$

Именно такую форму теоремы существования решений мы будем использовать далее.

Определение 1. Говорят, что однопараметрическая группа преобразований S_τ сохраняет лагранжиан $L(x, \xi, t)$, если

$$\frac{d}{d\tau} L(S_\tau(x), \quad S_{\tau *}\xi, t) = 0, \tag{5}$$

где $S_{\tau *}$ — отображение касательных пространств (см. § 22).

Вычисляя производную по τ в (5) при $\tau = 0$, получаем следующее соотношение:

$$\left.\frac{dL}{d\tau}\right|_{\tau=0} = X^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \xi^j \frac{\partial L}{\partial \xi^i} = 0 \tag{6}$$

(производная Ли функции $L(x, \xi, t)$ вдоль поля X^i равна нулю). Это и есть условие сохранения лагранжиана относительно группы преобразований S_τ.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если однопараметрическая группа преобразований S_τ сохраняет лагранжиан L, то имеет место закон сохранения компоненты импульса вдоль поля $X = (X^i)$:*

$$\frac{d}{dt}\left(X^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{d}{dt}(X^i p_i) = 0, \tag{7}$$

где $X(x) = \frac{d}{d\tau} S_\tau(x)|_{\tau=0}$.

Доказательство. Рассмотрим точку $x \in \mathbb{R}^n$, в которой $X(x) \neq 0$, и такую ее окрестность U, что в ней существуют координаты $(y^1, \ldots, y^n)$, в которых S_τ записывается указанным выше образом: $S_\tau(y^1, \ldots, y^n) = (y^1 + \tau, y^2, \ldots, y^n)$. В этих координатах имеем

$$\frac{\partial L(y, \dot{y})}{\partial y^1} \equiv 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^1}\right)^{\cdot} = 0.$$

Однако единичный вектор вдоль оси y^1 — это и есть векторное поле X. Поэтому в указанных координатах $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^1} = X^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$. Теорема доказана.

2. Некоторые примеры. Применение законов сохранения.

Пример 1. Релятивистская (свободная) частица ненулевой массы $m > 0$ определяется в пространстве Минковского с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3), $x^0 = ct$, одним из двух функционалов (действий) на времениподобных кривых:

$$S_1 = \frac{mc}{2} \int \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle \, d\tau, \quad \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle = (\dot{x}^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (\dot{x}^\alpha)^2; \tag{8}$$

$$S_2 = -mcl = -mc \int \sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle} \, d\tau = -mc \int dl. \tag{9}$$

Мировые линии массивных частиц в пространстве $\mathbb{R}^4_{1,3}$ являются экстремалями функционалов S_1 или S_2 (*релятивистский принцип наименьшего действия*). Легко проверить (как и в § 31), что экстремали этих двух функционалов совпадают. Как мы увидим, действие S_2 удобно при сопоставлении с классической механикой.

В случае (9) в качестве τ можно взять произвольный параметр, обычно он выбирается в виде $\tau = t = x^0/c$.

При такой параметризации имеем

$$S_2 = -mcl = -mc^2 \int \sqrt{1 - \left(\frac{w}{c}\right)^2}\, dt, \tag{10}$$

$$w^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

($w = |w^\alpha|$ — трехмерная скорость, l/c — собственное время). Следуя общим правилам, пишем $S_2 = \int L\, dt$, где $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$; заметим, что лагранжиан L записан в трехмерной форме. Энергия и импульс для такого лагранжиана имеют вид

$$E = pw - L = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}, \tag{11}$$

$$p_\alpha = \frac{mw^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}. \tag{12}$$

При $w/c \to 0$ имеем

$$E \sim mc^2 \left(1 + \frac{w^2}{2c^2} + \ldots\right),$$

$$p_\alpha \sim mw^\alpha (1 + \ldots),$$

т. е. для импульса получаем в первом приближении классическое выражение

$$p_\alpha \approx mw_\alpha \tag{13}$$

(см. § 31), и для энергии — с точностью до постоянной mc^2 — классическое выражение

$$E \approx mc^2 + \frac{mw^2}{2}. \tag{14}$$

Кроме того, имеет место тождество

$$E^2 - c^2p^2 = m^2c^4, \quad E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{15}$$

Если $E > 0$, то точки (E, cp) пробегают трехмерное пространство

Лобачевского (массовую поверхность) в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$ с координатами E, cp.

В рамках этого трехмерного формализма энергия и импульс неравноправны, время — выделенная координата.

Обратимся к функционалу действия $S_1 = \frac{mc}{2}\int \left\langle \frac{dx}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau} \right\rangle d\tau$. В силу результатов предыдущего параграфа параметр экстремалей здесь натуральный (закон сохранения формальной «энергии»). Определим 4-импульс $\tilde{p}_i = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, формулой

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x'^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \text{где} \quad x'^i = \frac{dx^i}{d\tau}.$$

Получаем

$$\tilde{p}_0 = \frac{\partial L}{\partial x'^0} = mcx'^0, \quad \tilde{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial x'^\alpha} = -mcx'^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Если поднять индекс ковектора $\tilde{p}_i$ в метрике Минковского, то получим вектор

$$\tilde{p}^i = mcx'^i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Поскольку вдоль экстремалей функционала S_1 параметр пробегания натуральный, то

$$dl = \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}\, dt, \quad x'^i = \frac{dx^i}{dl},$$

$$\tilde{p}^0 = mcx'^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = E, \tag{16}$$

$$\tilde{p}^\alpha = mcx'^\alpha = mc\frac{dx^\alpha}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = \frac{mcw^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = cp^\alpha.$$

Выводы. 1) *4-импульс $\tilde{p}^i$ связан с трехмерными энергией и импульсом соотношениями*

$$\tilde{p}^0 = E, \quad \tilde{p}^\alpha = cp^\alpha; \tag{17}$$

4-импульс называют также вектором энергии-импульса.

2) *При лоренцевых преобразованиях вектор энергии-импульса (E, cp) преобразуется как 4-вектор; 4-импульсы массивных частиц лежат на массовой поверхности, имеющей геометрию Лобачевского:*

$$E^2 - c^2p^2 = (\tilde{p}^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (\tilde{p}^\alpha)^2 = m^2c^4. \tag{18}$$

В частности, для перехода в равномерно движущуюся со скоростью v систему координат (вдоль оси x^1) имеем

$$(E,\ cp) \to (E',\ cp'),$$

где

$$E' = \frac{E + (cp)\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E' = \frac{E + pv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$cp_1' = \frac{E\frac{v}{c} + cp}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_1' = \frac{\frac{Ev}{c^2} + p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_2' = p_2, \quad p_3' = p_3. \tag{19}$$

При $v/c \to 0$ получаем: $E' = E + pv + \text{const}$, $p' = p + \text{const}$.

Пример 2. Основным постулатом общей теории относительности является тезис или гипотеза (Эйнштейна): гравитационное поле — это не что иное, как метрика g_{ij} на 4-мерном пространстве-времени (метрика сигнатуры $(+---)$ в каждой точке). При отсутствии всех других сил пробная частица в гравитационном поле любой массы $m > 0$ движется по времениподобным геодезическим, определяемым действием

$$S_1 = \frac{mc}{2}\int \langle \dot{x},\ \dot{x}\rangle\, d\tau. \tag{20}$$

Частица массы $m = 0$ движется по изотропным геодезическим, вдоль которых $\langle \dot{x},\ \dot{x}\rangle = 0$.

Слабое поле определяется классическим гравитационным потенциалом $\varphi(x^0,\ x)$, $x^0 = ct$. Оно представляет собой метрику, формально разложенную в ряд по $1/c$:

$$g_{ab} = g_{ab}^{(0)} + c^{-2}g_{ab}^{(2)} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad g_{00}^{(2)} = 2\varphi(x^0,\ x), \tag{21}$$

где $g_{ab}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ — метрика Минковского и члены порядка $1/c$ отсутствуют.

Определение 2. Времениподобная геодезическая $x^a = x^a(t)$, $t = \frac{x^0}{c}$, в слабом поле называется *медленной*, если $\frac{dx^\alpha}{dt} \ll c$.

Для натурального параметра (собственного времени) медленной геодезической в слабом поле будем иметь

$$d\tau = \frac{dl}{c} = \sqrt{\frac{1}{c^2}\, g_{ab}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}}\, dt \qquad \left(t = \frac{x^0}{c}\right)$$

или

$$d\tau = \left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right] dt. \tag{22}$$

Поэтому в уравнении геодезической

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0,$$

где параметр пробегания натуральный, можно с точностью до $O\left(\frac{1}{c^2}\right)$ заменить $d\tau$ на dt.

Утверждение. *Уравнение медленных геодезических в слабом поле имеет вид*

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c}\right), \tag{23}$$

т. е. совпадает с уравнением Ньютона для частицы в классическом гравитационном поле с потенциалом φ.

Доказательство. Для символов Кристоффеля, вычисляемых по формуле

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right),$$

будем иметь: 1) производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial g_{ab}}{\partial t}$ имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^3}\right)$ в силу (21) (метрика $g^{(0)}_{ab}$ постоянна, величина t считается конечной); 2) производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^2}\right)$ (величины x^α считаются конечными). Поэтому из слагаемых с символами Кристоффеля в уравнении геодезических максимальный по порядку величины член — это $\Gamma^\alpha_{00}\dot{x}^0\dot{x}^0 = -\Gamma^\alpha_{00}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$. Для Γ^α_{00} будем иметь

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$
$$\alpha = 1, 2, 3.$$

Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Пример 3. Система из n классических частиц с парным взаимодействием описывается лагранжианом (в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$)

$$L = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\dot{x}_i^2}{2} - U(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3), \tag{24}$$

где $U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}V(x_i, x_j)$.

Мы предположим, что эта система трансляционно инвариантна. Другими словами, при преобразованиях

$$x_i \to x_i + \xi, \quad \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3), \tag{25}$$

лагранжиан не меняется: $L \to L$. Для этого достаточно, чтобы V была функцией от разности аргументов:

$$V(x_i, x_j) = V(x_i - x_j). \tag{26}$$

Тогда из закона сохранения импульса следует, что *полный импульс сохраняется*:

$$P_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i, \qquad \frac{dP_{\text{полн}}}{dt} = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Мы имеем три группы S_τ^α ($\alpha = 1, 2, 3$), действующие в $\mathbb{R}^{3n}$ по правилу

$$S_\tau^\alpha\colon\ x_i^\alpha \to x_i^\alpha + \tau, \quad x_i^\beta \to x_i^\beta \text{ при } \beta \neq \alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2, 3. \tag{28}$$

Векторные поля $X^{(\alpha)} = \frac{d}{d\tau} S_\tau^\alpha(x)\big|_{\tau=0}$ имеют вид

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0), \\ X^{(2)} &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0), \\ X^{(3)} &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots, 0, 0, 1). \end{aligned} \tag{29}$$

Получается три закона сохранения:

$$P_{\text{полн}, \alpha} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

согласно общей теореме 1.

Рассмотрим случай $n = 2$, $L = m_1(\dot{x}_1)^2 + m_2(\dot{x}_2)^2 - 2V(x_1 - x_2)$. Перейдем к равномерно движущейся системе координат, в которой $P_{\text{полн}} = 0$. Тогда имеем

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0. \tag{30}$$

Выберем в качестве начала отсчета центр масс; тогда $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$. Следовательно,

$$x_2 = -\frac{m_1 x_1}{m_2}, \quad V(x_1 - x_2) = V\left(x_1 + \frac{m_1}{m_2} x_1\right).$$

Уравнения Ньютона имеют вид

$$m_1\ddot{x}_1^\alpha = -\frac{\partial V(x_1 - x_2)}{\partial x_1^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Пусть $m^* = m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$, $U(x_1) = V\left(x_1 + \frac{m_1}{m_2}x_1\right)$. Из (31) следует уравнение (в системе, связанной с центром масс)

$$m^*\ddot{x}_1^\alpha = -\frac{\partial U(x_1)}{\partial x_1^\alpha}. \tag{32}$$

Итак, имеет место

Теорема 2. *Задача о движении двух частиц с трансляционно инвариантным потенциалом в системе центра масс эквивалентна задаче о движении одной частицы с приведенной массой* $m^* = m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$ *в поле с потенциалом* $U(x_1) = V(x_1 - x_2)$, *где* $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$.

Итак, группа трансляций приводит к сохранению полного импульса и сведению двухчастичной задачи к одночастичной.

Пример 4. Перейдем теперь к использованию группы вращений $SO(3)$.

Определения 3. Лагранжиан $L(x, \dot{x})$ называется *сферически симметричным*, если он инвариантен относительно всех вращений в $\mathbb{R}^3$.

В группе $SO(3)$ мы имеем три различных однопараметрических подгруппы:

1) вращения вокруг оси x на угол $\varphi\left(S_\varphi^{(x)}\right)$;
2) вращения вокруг оси y на угол $\varphi\left(S_\varphi^{(y)}\right)$;
3) вращения вокруг оси z на угол $\varphi\left(S_\varphi^{(z)}\right)$.

Соответствующие векторные поля в $\mathbb{R}^3$ — это найденные в § 24, п. 3 линейные векторные поля L_x, L_y, L_z:

$$L_x = (0, -z, y), \quad L_y = (z, 0, -x), \quad L_z = (-y, x, 0). \tag{33}$$

Для сферически симметричных лагранжианов согласно общей теореме 1 имеются законы сохранения следующих величин:

$$M_x = L_x^\alpha p_\alpha, \quad M_y = L_y^\alpha p_\alpha, \quad M_z = L_z^\alpha p_\alpha$$

(угловые компоненты импульса для вращения вокруг осей x, y, z). Явный вид их таков:

$$M_x = yp_z - zp_y, \quad M_y = zp_x - xp_z, \quad M_z = xp_y - yp_x; \tag{34}$$
$$(M_x)^{\cdot} = (M_y)^{\cdot} = (M_z)^{\cdot} = 0.$$

Таким образом, сохраняется вектор

$$M = (M_x, M_y, M_z) = [x, p], \tag{35}$$

где $x=(x, y, z)$. Вектор $[x, p]$ называется *моментом импульса.*

Пусть имеется система двух частиц, инвариантная относительно полной группы движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. В этом случае $L=m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2-U(x_1-x_2)$, причем $U(x_1-x_2)=U(|x_1-x_2|)=U(r)$. Действительно, из инвариантности относительно всех вращений и отражений следует, что $U(x_1-x_2)$ есть функция от $r=|x_1-x_2|$. Используя группу трансляций (результат примера 3), перейдем к задаче об одной частице с массой $m^*=m$ в поле $U(r)$ с группой симметрии $SO(3)$. При этом имеет силу закон сохранения момента $M=[x, p]$. Поскольку U не зависит от времени, то сохраняется также энергия $E=pv-L=\frac{mv^2}{2}+U(r)$, $v=\dot{x}$.

Лемма 1. *Движение частицы происходит в плоскости, натянутой на векторы x и p.*

Доказательство. Так как момент сохраняется и $\dot{x}=p/m$, то направление вектора $[x, \dot{x}]=M/m$ неизменно. Это направление ортогонально плоскости (x, p). Лемма доказана.

Выберем направление M за ось z и перейдем к цилиндрическим координатам (z, r, φ). Получим

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(r)=m\left(\frac{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}{2}-U(r)\right),$$

$$p_\varphi=M=mr^2\dot{\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\text{const}, \quad \dot{\varphi}=\frac{M}{mr^2}, \tag{36}$$

$$E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+\frac{M^2}{m^2r^2}\right)+U(r),$$

или

$$E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+U_{\text{эфф}}(r), \tag{37}$$

где $U_{\text{эфф}}(r)=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}$.

Окончательный вывод таков: движение частицы сводится к одномерной задаче (по r) с потенциалом $U_{\text{эфф}}(r)$; решение дается формулами

$$\dot{r}^2=\frac{2}{m}(E-U_{\text{эфф}}),$$

$$t-t_0=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U_{\text{эфф}})}}, \tag{38}$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\frac{M\,dt}{mr^2}.$$

Исключая t, можно получить уравнение орбиты $\varphi = \varphi(r)$ или $r = r(\varphi)$. В двух важных известных случаях $U = \alpha/r$ и $U = \alpha r^2$ целая область пространства $(x, \dot{x})$ заполнена замкнутыми орбитами:

$$\text{область } E < 0 \quad \text{для} \quad U = \frac{\alpha}{r} \text{ с } \alpha < 0,$$

$$\text{область всех } E \geqslant 0 \quad \text{для} \quad U = \alpha r^2 \text{ с } \alpha > 0.$$

При этом область $E < 0$ для $U = \alpha/r$ есть область кеплеровских эллипсов. Замкнутость орбиты требует выполнения нетривиального равенства

$$r(\varphi + 2\pi n) \equiv r(\varphi), \tag{39}$$

где n — некоторое целое число.

Для других сферически симметричных аналитических потенциалов $U(r) \neq \alpha/r$, αr^2 равенство (39) не может выполняться на целой области фазового пространства (см. книгу [44]). Вообще говоря, замкнутые орбиты заполняют множество меры нуль. Движение происходит в конечной области пространства $(x, \dot{x})$ при всех $-\infty < t < \infty$, если неравенство

$$E - U_{\text{эфф}}(r) \leqslant 0$$

выделяет конечный отрезок $0 \leqslant r_{\min} \leqslant r \leqslant r_{\max} < \infty$ и начальное условие в нем содержится (здесь $U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$, M^2 — квадрат величины полного момента импульса).

Пример 5. Пусть в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4$ задан лагранжиан $L(x, \dot{x})$, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, инвариантный относительно группы Лоренца $O(3, 1)$. Группе $O(3, 1)$ в $\mathbb{R}^4$ соответствуют линейные векторные поля, определяющие однопараметрические подгруппы:

$$X^i(x) = x_k A^{ki} = g^0_{kl} x^l A^{ki}, \tag{40}$$

где $g^0_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & -1 & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix}$ — метрика Минковского, A^{ki} — любая постоянная кососимметрическая матрица (см. § 24). Тогда имеем закон сохранения

$$p_i X^i = p_i x_k A^{ki} = \text{const}, \tag{41}$$

где $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$ есть 4-импульс. Ввиду косой симметричности матрицы A^{ki} выражение (41) можно переписать в виде

$$p_i x_k A^{ki} = \frac{1}{2}(p_i x_k - p_k x_i) A^{ki} = \text{const}.$$

Так как матрица A^{kl} произвольна, то мы имеем целый тензор сохраняющихся величин

$$M_{ik} = x_i p_k - x_k p_i = \text{const}. \tag{42}$$

Этот антисимметричный тензор называется *4-тензором момента.*

Удобно рассмотреть соответствующий тензор M^{ik} с верхними индексами. Его пространственные компоненты $M^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, имеют вид

$$M^{\alpha\beta} = c(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha), \tag{43}$$

т. е. совпадают с компонентами трехмерного вектора момента

$$cM = c[x, p], \tag{44}$$

$$M^{23} = cM_x, \quad M^{31} = cM_y, \quad M^{12} = cM_z.$$

Компоненты M^{01}, M^{02}, M^{03} образуют трехмерный вектор

$$c^2 tp - Ex = (M^{01}, M^{02}, M^{03}). \tag{45}$$

Формулы (44), (45) сразу вытекают из вида 4-импульса

$$(p^i) = (E, cp),$$

где p — обычный трехмерный импульс.

Пусть теперь нам задана система из n релятивистских частиц $x_1, \ldots, x_n$, $x_i = (x_i^0, x_i^1, x_i^2, x_i^3)$. Пусть, далее, лагранжиан $L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ инвариантен относительно полной группы Пуанкаре — группы движений пространства Минковского. Тогда имеем следующие законы сохранения:

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i, \sum_{i=1}^n cp_i\right) = \text{const (полный 4-импульс сохраняется)},$$

$$\sum_{i=1}^n M_i^{kl} = \text{const } (M_i^{kl} \text{ — тензор момента } i\text{-й частицы}).$$

Из формул (45) вытекает, в частности,

$$\sum c^2 tp_i - \sum E_i x_i = \text{const}. \tag{46}$$

Так как полная энергия $\sum E_i$ тоже сохраняется, то имеем

$$\frac{\sum E_i x_i}{\sum E_i} = t \cdot \frac{\sum c^2 p_i}{\sum E_i} + \text{const}.$$

Следовательно, точка

$$x = \frac{\sum E_i x_i}{\sum E_i} \tag{47}$$

движется с постоянной скоростью v, равной

$$v = \frac{\sum c^2 p_i}{\sum E_i}. \tag{48}$$

Точка x есть релятивистский аналог центра масс. Если скорости частиц малы по сравнению с c, то можно приближенно положить $E_i \approx m_i c^2$, и формула (47) переходит в классическую формулу

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Заметим, что релятивистский центр масс не инвариантен относительно выбора системы отсчета.

§ 33. Гамильтонов формализм

1. Преобразование Лежандра. Напомним, что мы ввели энергию и импульсы для лагранжиана $L(x, \dot{x})$, положив

$$E = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L, \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}. \tag{1}$$

Определение 1. Лагранжиан L называется *невырожденным*, если

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta}\right) \neq 0, \tag{2}$$

и называется *сильно невырожденным*, если уравнения $p_\alpha = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\alpha}$ можно гладко и взаимно однозначно решить в виде $\dot{x}^\alpha = v^\alpha(x, p)$ для всех x, $\dot{x}$.

Определение 2. *Гамильтонианом* $H(x, p)$ называется энергия E, выраженная через x и p (для сильно невырожденных лагранжианов).

Пространство с координатами (x, p) называется *фазовым пространством*. Переход от координат $(x, \dot{x})$ к координатам (x, p) для сильно невырожденных лагранжианов обратим. Это и есть преобразование Лежандра от $L(x, v)$ к $H(x, p)$. При этом уравнения Эйлера — Лагранжа переходят в уравнения Гамильтона.

Теорема 1. *Пусть* $L(x, \dot{x})$ — *сильно невырожденный лагранжиан и* $H(x, p)$ — *гамильтониан,* $p = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$, $\dot{x} = v(x, p)$. *Уравнения Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{3}$$

эквивалентны уравнениям Гамильтона, в которых x и p считаются независимыми переменными:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{4}$$

в фазовом пространстве (x, p).

Доказательство. Пусть $L = L(x, v)$, где $v = \dot{x}$,

$$H = pv - L, \quad v = v(x, p) \text{ и } p = \frac{\partial L}{\partial v}\Big|_{x=\text{const}}.$$

Докажем следующие равенства:

а) $\dot{x} = v = \dfrac{\partial H}{\partial p}\Big|_{x=\text{const}}$;

б) $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}\Big|_{p=\text{const}} = \dfrac{\partial L}{\partial x}\Big|_{v=\text{const}}$,

где $H = H(x, p)$, $L = L(x, v)$.

Доказательство равенства а):

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(pv - L) = v + p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} = v,$$

так как $p = \dfrac{\partial L}{\partial v}$.

Доказательство равенства б):

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(pv - L) = -p\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} = \dot{p}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что $L = pv - H$, где $v = \dfrac{\partial H}{\partial p}$, или $L = p\dot{x} - H$. Действие $S = \int L\,dt$ для $L(x, \dot{x})$ записывается в виде

$$S = \int L\,dt = \int [p\dot{x} - H(x, p)]\,dt. \tag{5}$$

Если кривая γ имеет вид $x(t)$ и $p(t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x})$, то вдоль этой кривой выполнены «условия интегрируемости»

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \text{где} \quad v = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{6}$$

Рассмотрим в фазовом пространстве (x, p) лагранжиан $L = p\dot{x} - H(x, p)$ на всех кривых $x(t)$, $p(t)$ без условий интегрируемости $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$.

Лемма 1. *Уравнения Эйлера — Лагранжа для функционала $\int [p\dot{x} - H(x, p)]\,dt$ в $2n$-мерном пространстве (x, p) совпадают*

с уравнениями Гамильтона и автоматически влекут условие интегрируемости $v = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dx}{dt}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{L}(y, \dot{y}) = p\dot{x} - H(x, p)$, где y — это координаты (x, p). Мы имеем

$$\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^i}, \quad \text{или} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$0 = \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{p}_i}\right)^{\cdot} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_i} = \dot{x}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Мы выводили выше уравнения Эйлера — Лагранжа для кривых, являющихся экстремалями в классе кривых с закрепленными концами. В фазовом (x, p)-пространстве этому соответствует класс вариаций, где фиксированы лишь x-координаты концов (рис. 34).

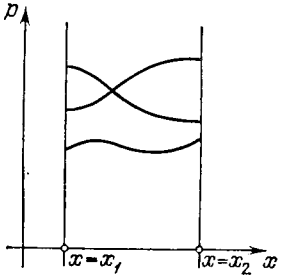


Рис. 34

2. Движущиеся системы координат. Рассмотрим теперь ситуацию, когда в $\mathbb{R}^n$ задан лагранжиан, меняющийся с течением времени: $L = L(x, \dot{x}, t)$. Выведем закон преобразования различных величин при заменах $x = x(x', t)$, $t = t'$.

Во-первых, по самому определению при таких преобразованиях величина $S = \int L dt$ не меняется, и L также не меняется (с точностью до полных производных). Поэтому имеем

$$L(x, \dot{x}, t) \to L(x(x', t), \dot{x}, t) + \frac{df(x, t)}{dt}. \tag{7}$$

Рассмотрим два случая:

1) замена не содержит времени: $x = x(x')$;

2) замена содержит время.

В первом случае

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'} \quad \text{или} \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} v^{i'}. \tag{8}$$

Вывод. *Скорость есть вектор.*

Далее, $\tilde{L}(x', \dot{x}', t) = L(x, \dot{x}, t)$. Поэтому

$$\tilde{L}(x', \dot{x}', t) = L\left(x(x'), \frac{\partial x}{\partial x'} v', t\right),$$

$$p_{i'} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v^{i'}} = \frac{\partial L}{\partial v^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = p_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{9}$$

т. е. импульс есть ковектор. Для энергии имеем $E = p_i v^i - L = p_{i'} v^{i'} - \tilde{L} = E'$. Поэтому энергия есть скаляр (не изменяется).

Перейдем теперь к заменам, содержащим время:

$$x = x(x', t), \quad t = t'. \tag{10}$$

В этом случае

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'} + \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'} + a^i(x', t). \tag{11}$$

Будем считать, что в данный момент времени $t = t_0$ произведена замена (не зависящая от времени) такая, что $x = x'$ при $t = t_0$. Тогда

$$v^i = v^{i'} + \frac{\partial x^i}{\partial t} = v^{i'} + a^i(x', t_0), \quad t_0 = t. \tag{12}$$

Такую систему координат назовем мгновенной. В результате перехода к движущейся системе координат получим

$$L \to L' = L, \quad L(x, v, t) = L(x', v' + a, t);$$

$$v \to v' = v - a(x', t);$$

$$p \to p' = p, \quad \text{так как} \quad \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L'}{\partial v'};$$

$$E \to E' = p'v' - L' = p_i(v^i - a^i) - L = E - p_i a^i(x', t).$$

Таким образом, импульс не меняется, а энергия сдвигается на величину, равную $-p_i a^i = (p, v' - v)$. Итак,

$$E = H(x, p) \to E' = H(x', p') - p_i' a^i(x', t) = H'(x', p', t), \tag{13}$$

где $x = x'$ при $t = t_0$, $p = p'$, $a = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=t_0}$. Выясним, как изменяются уравнения Гамильтона. Прежде мы имели $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$. Теперь имеем $\dot{x}' = \frac{\partial H'}{\partial p'}$, $\dot{p}' = \frac{\partial H'}{\partial x'}$ (при $t = t_0$). Так как $x' = x$, $p' = p$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \frac{\partial H'}{\partial p'} = \frac{\partial H}{\partial p} - a = \dot{x} - a, \\ \dot{p}' &= -\frac{\partial H'}{\partial x'} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p}. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, изменение уравнений Гамильтона весьма просто. Мы доказали такое утверждение.

Теорема 2. *При переходе в движущуюся систему координат (мгновенную) координата и импульс не меняются, а энергия (гамильтониан) изменяются на величину* $-(p, a)$, *где*

$$a = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{t=t_0}, \quad H \to H' - (p, a), \quad a = a(x', t).$$

Рассмотрим три важных примера.

Пример 1. Поступательное движение системы координат, при котором $a = a(t)$ не зависит от x', $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$.

В этом случае

$$p = mv, \quad p' = p = mv = m(v' + a) = mv' + ma,$$
$$H' = H - (p', a).$$

Для уравнений Ньютона

$$(mv)^{\cdot} = f = m\dot{v}' + m\dot{a}$$

или

$$m\dot{v}' = f - m\dot{a} = f'. \tag{15}$$

Таким образом, сила f приобретает инерционный добавок $-m\dot{a}$.

Пример 2. Вращение системы координат в $\mathbb{R}^3$, где $a = [\Omega, x']$, Ω — угловая скорость (постоянный вектор);

$$H' = H - (p', a) = H - (p', [\Omega, x']),$$
$$p' = p, \quad x' = x \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

Уравнения имеют вид

$$\dot{p}' = -\frac{\partial H'}{\partial x'} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(p', [\Omega, x]) = -\frac{\partial H}{\partial x} + [p', \Omega],$$
$$\dot{x}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p'}(p', [\Omega, x]) = \frac{\partial H}{\partial p} - [\Omega, x'].$$

Если лагранжиан имеет вид $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$, то

$$p = p' = m\dot{x} = m(\dot{x}' + [\Omega, x']) = m\dot{x}' + ma.$$

Имеем

$$\dot{p}' = m\ddot{x}' + m[\Omega, x']^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial x} + [(m\dot{x}' + ma), \Omega].$$

Окончательно получаем: если $\dot{\Omega} = 0$ (вращение постоянно), то

$$m\ddot{x} = 2m[\dot{x}', \Omega] + f_{\text{старое}} + m[[\Omega, x], \Omega]. \tag{16}$$

Последнее слагаемое есть малая сила, если скорость Ω мала, $|x|$ невелико. Сила $2m[\dot{x}', \Omega]$ называется *силой Кориолиса*. Получаем

$$m\dot{v}' = 2m[v', \Omega] + f_{\text{старое}} + O(\Omega^2). \tag{17}$$

Замечание. Если $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$, то переход в движущуюся систему координат имеет вид

$$H \to H - p_i a^i, \quad p_i = mv^i = p_i' = m(v^{i\prime} + a^i), \tag{18}$$

где

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x), \tag{19}$$

$$H' = \frac{p'^2}{2m} + U(x) - pa = \frac{(p' - ma)^2}{2m} + U(x) - \frac{ma^2}{2}.$$

Таким образом, переход в движущуюся систему координат равносилен двум операциям:

а) сдвигу импульса $p \to p' - ma$,

б) замене потенциала $U \to U_{\text{эфф}} = U(x) - \frac{ma^2}{2}$.

Пример 3 (включение электромагнитного поля). Пусть $L(x, \dot{x})$ — лагранжиан. Определим новый лагранжиан формулой $\tilde{L} = L + \frac{e}{c} A_i \dot{x}^i$, где A_i — вектор-потенциал электромагнитного поля, e — заряд, $S = \int L\,dt$, $\tilde{S} = \int \left(L\,dt + \frac{e}{c} A_i dx^i \right)$. Операцию добавления к лагранжиану слагаемого $\frac{e}{c} A_i \dot{x}^i$ называют «включением поля».

Если $H(x, p) = pv - L$ и $\tilde{H}(x, \tilde{p}) = \tilde{p}v - \tilde{L}$, где $p = \frac{\partial L}{\partial v}$, $\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}$, то

$$\tilde{p}_i = p_i + \frac{e}{c} A_i, \quad p_i = \tilde{p}_i - \frac{e}{c} A_i,$$
$$\tilde{H}(x, \tilde{p}) = H\left(x, \tilde{p} - \frac{e}{c} A\right). \tag{20}$$

Таким образом, включение поля равносильно сдвигу импульса в гамильтониане и этим похоже на переход к движущейся системе координат (без замены потенциала).

Заметим, что уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = f_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} \quad \text{(без поля)},$$

$$\dot{p}_i = f_i + \frac{e}{c} F_{ij} \dot{x}^j \quad \text{(с полем)}, \quad p = \tilde{p} - \frac{e}{c} A.$$

Здесь $F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ — тензор электромагнитного поля. В силу косой симметричности тензора F_{ij} выражение $F_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ есть тождественный нуль, поэтому

$$\dot{p}_i \dot{x}^i = \dot{p}_i v^i = f_i v^i, \tag{21}$$

где f — сила в отсутствие поля, $f = \frac{\partial L}{\partial x}$.

Замечание. В трехмерном формализме компонента $A_0 = c\varphi$ есть электрический потенциал, и (A_1, A_2, A_3) — вектор-потенциал. В этой записи добавок к лагранжиану имеет вид $e\varphi + \frac{e}{c} A_\alpha \dot{x}^\alpha$, где $x^0 = ct$, $\alpha = 1, 2, 3$.

3. Принципы Мопертюи и Ферма. Приложения. Разберем теперь вариационные принципы Мопертюи и Ферма.

Теорема 3 (принцип Мопертюи). *Если гамильтониан $H(x, p)$ не зависит от времени и фиксирован уровень энергии, то на траекториях движения величина $S_0 = \int p\,dx$ имеет экстремум среди всех кривых $x(t)$ с данной энергией E. При этом считается, что форма $p\,dx$ выражена через x^α, dx^α.*

Доказательство. Очевидно, на поверхности $H(x, p) = E$ исходный функционал $S = \int (p\,dx - H\,dt)$ достигает экстремума на всех исходных экстремалях (решениях гамильтоновой системы), поскольку мы рассматриваем экстремальную задачу в более узком, чем прежде, классе кривых: кривых, лежащих на поверхности $H(x, p) = E$. На этой поверхности $S = \int (p\,dx - E\,dt) = \int (p\,dx - d(Et))$. Поэтому в координатах $z^1, \ldots, z^{2n-1}$ на этой поверхности (размерности $2n-1$) лагранжианы $p\dot{x} = \tilde{L}(z, \dot{z})$ и $\tilde{L}(z, \dot{z}) - \frac{d}{dt}(Et)$ имеют одинаковые уравнения экстремалей. Следовательно, все экстремали исходного функционала в (x, p)-пространстве являются и экстремалями нового (укороченного) действия $S_0 = \int p\,dx$ на поверхности $H = E$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь важные примеры.

Пример 1. $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$; $H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x)$. Вдоль экстремалей выполняется уравнение

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Сузим функционал укороченного действия $S_0 = \int p\,dx$ на еще меньшее множество кривых на поверхности $H = E$, потребовав, чтобы вдоль этих кривых выполнялось соотношение $\dot{x} = p/m$. Тогда

а) $|p| = \sqrt{2m(E - U(x))}$ из условия $H(x, p) = E$;

б) $(p, \dot{x}) = p_\alpha \dot{x}^\alpha = |p| \cdot |\dot{x}|$ из условия $\dot{x} = p/m$.

Отсюда получаем

$$S_0 = \int p\,dx = \int (p, \dot{x})\,dt = \int |p|\,|\dot{x}|\,dt = \int |p|\,|dx| = \int \sqrt{2m(E - U(x))}\,|dx|.$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Кривые $x(t)$, отвечающие решениям гамильтоновой системы с $H = p^2/2m + U(x) = E$ при фиксированной энергии E, являются (непараметризованными) геодезическими новой метрики*

$$g_{ij} = 2m(E - U(x))\delta_{ij}. \tag{22}$$

Пример 2. Пусть $H = c(x) \cdot |p|$; этот гамильтониан описывает траектории света в изотропной среде с переменной скоростью света $c(x)$.

Рассмотрим укороченное действие $S_0 = \int p\,dx$ на множестве кривых таких, что

а) $H(x, p) = E$,

б) $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = c(x)\dfrac{p}{|p|}$ (очевидно, $|\dot{x}| = c(x)$).

Так как $c(x)|p| = E$, то $|p| = E/c(x)$. Так как $\dot{x} = c(x)p/|p|$, то $\langle p, dx\rangle = |p| \cdot |dx|$. Поэтому

$$\int \langle p, dx\rangle = \int |p| \cdot |dx| = \int \frac{E}{c(x)}|dx| = E\int \frac{|dx|}{c(x)} = E\int \sqrt{\frac{dx^2}{c^2(x)}}.$$

Заметим, что интеграл $\int\limits_\gamma \dfrac{|dx|}{c(x)}$ равен времени движения света вдоль пути γ. Итак, доказана

Теорема 5 (принцип Ферма). *Свет движется вдоль такой кривой, вдоль которой время движения имеет экстремум среди всех гладких кривых, соединяющих заданные точки P и Q. Эти кривые являются геодезическими новой метрики*

$$g_{ij} = \frac{1}{c^2(x)}\delta_{ij}.$$

Замечание. Обычно геодезические получаются из лагранжиана $L = g_{ij}v^iv^j$ или гамильтониана $H = g^{ij}p_ip_j$. Если взять гамильтониан $H'(x, p) = \sqrt{H} = \sqrt{g^{ij}p_ip_j}$, то он будет давать те же траектории движения, поскольку на постоянном уровне энергии $H = \text{const}$ соответствующие векторные поля гамильтонианов H и $\sqrt{H}$ будут пропорциональны с постоянным множителем, равным $\dfrac{1}{2\sqrt{H}} = \dfrac{1}{2\sqrt{E}} = \text{const}$. Действительно, $\left(\dot{p} = \dfrac{\partial H}{\partial x},\ \dot{x} = -\dfrac{\partial H}{\partial p}\right) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow 2\sqrt{H}\left(\dot{p} = \dfrac{\partial \sqrt{H}}{\partial x},\ \dot{x} = -\dfrac{\partial \sqrt{H}}{\partial p}\right)$.

В нашем случае $H' = c(x)|p|$ или $H' = \sqrt{c^2(x)|p|^2}$. Поэтому сразу можно сказать, что метрика имеет вид $g^{ij} = c^2(x)\delta^{ij}$ или $g_{ij} = \dfrac{1}{c^2(x)}\delta_{ij}$.

В анизотропной среде тензор g_{ij} (или g^{ij}), определяющий скорость, не будет иметь конформно евклидовой формы.

§ 34. Геометрическая теория фазового пространства

1. Градиентные системы. В любом пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами $(y^1, \ldots, y^m)$ и «метрикой» g^{ij} можно определить скалярное произведение ковекторов и поднятие индексов (см. § 19). Градиент ∇f функции $f(y^1, \ldots, y^m)$ имеет вид

$$(\nabla f)^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^j}. \tag{1}$$

При этом тензор g^{ij} не предполагается симметричным. Векторному полю ∇f соответствует система уравнений (см. § 23)

$$\dot{y}^i = (\nabla f)^i. \tag{2}$$

Система вида (2) называется *градиентной*. Имеет место простая

Лемма 1. *Для любой функции $h(y)$ ее производная в силу градиентной системы* (2) *имеет вид*

$$\dot{h} = \langle \nabla h, \nabla f\rangle = g^{ij}\frac{\partial h}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^j}. \tag{3}$$

Доказательство. По определению

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial y^i}\dot{y}^i = \frac{\partial h}{\partial y^i}(\nabla f)^i = \frac{\partial h}{\partial y^i}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^j}.$$

Лемма доказана.

Нас здесь будут интересовать невырожденные кососимметрические «метрики» g^{ij}, задаваемые формой

$$2\Omega = g_{ij}dy^i \wedge dy^j, \tag{4}$$

где g_{ij} — обратная матрица, $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, $g_{ij} = -g_{ji}$, $\det g_{ij} = g \neq 0$. Очевидно, размерность пространства четна, $i, j = 1, \ldots, 2n$.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$\frac{1}{n!}\underbrace{\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega}_{n} = \sqrt{g}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{2n}; \tag{5}$$

таким образом, $\sqrt{g}$ — многочлен от g_{ij}; он называется «пфаффианом».

Доказательство. Равенство (5) достаточно доказать в каждой точке отдельно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $g_{ij} = \text{const}$. Выберем новые координаты:

$$(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n) = (z^1, \ldots, z^{2n}), \tag{6}$$

такие, что $g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. В этом случае

$$\Omega = \sum_i dx^i \wedge dp_i, \tag{7}$$

$$\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega = n!\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^{2n}.$$

Таким образом, в данной системе координат лемма доказана, так как $\sqrt{g}=1$. Ввиду инвариантности формулы (5) лемма доказана в любой системе координат.

Замечание. Таким образом, условие невырожденности метрики g_{ij}, т. е. условие $g\neq 0$, равносильно условию $\Omega^n\neq 0$.

Определение 1. Пространство с кососимметрической метрикой g_{ij}, допускающее координаты (x, p) такие, что $g_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, называется *фазовым пространством*. Координаты (x, p), в которых метрика имеет вид (7), назовем каноническими. Градиентные системы в этой метрике назовем *гамильтоновыми*.

Гамильтоновы системы в канонических координатах имеют вид

$$\dot{y}^i=(\nabla H)^i, \quad i=1, \ldots, 2n,$$

или

$$\dot{x}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i=1, \ldots, n. \tag{8}$$

Из леммы 1 вытекает

Лемма 3. *Производная любой функции $f(x, p, t)$ в силу гамильтоновой системы* (8) *имеет вид*

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+\langle \nabla f, \nabla H\rangle, \tag{9}$$

где

$$\langle \nabla f, \nabla H\rangle = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right). \tag{10}$$

В частности, если $f=H=H(x, p, t)$, то

$$\dot{E}=\dot{H}=\frac{\partial H}{\partial t},$$

так как $\langle \nabla H, \nabla H\rangle=-\langle \nabla H, \nabla H\rangle=0$.

Важность класса гамильтоновых систем определяется доказанной в предыдущем параграфе теоремой об эквивалентности уравнений Эйлера — Лагранжа (для сильно невырожденных лагранжианов) и уравнений Гамильтона в фазовом пространстве.

Рассмотрим теперь систему $H=H(x, p, t)$, явно зависящую от времени t. Имеем уравнения Гамильтона

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{11}$$

их следствие $\dot{E}=\frac{\partial H}{\partial t}$ и очевидное равенство $\dot{t}=1$. Рассмотрим расширенное фазовое пространство с координатами (x, p, t, E),

где $x^{n+1}=t$, $p_{n+1}=E$, и кососимметрической метрикой

$$\hat{g}_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & -1 & 0 & & \\ & 0 & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

которой соответствует форма

$$\hat{\Omega}=\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i - dt \wedge dE. \tag{13}$$

Рассмотрим гамильтониан $\tilde{H}(x, p, t, E)=H(x, p, t)-E$ и градиентную систему (Гамильтона), которая имеет вид

$$\dot{x}=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, \quad \dot{t}=-\frac{\partial \tilde{H}}{\partial E}, \quad \dot{E}=\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}. \tag{14}$$

Из этих уравнений вытекает

Следствие. *Уравнения Гамильтона в расширенном фазовом пространстве* (x, p, t, E) *с метрикой* $\hat{g}_{ij}$ *(или формой* $\hat{\Omega}$*) с гамильтонианом* $\tilde{H}=H(x, p, t)-E$ *на поверхности* $\tilde{H}=0$ *совпадают с исходными уравнениями Гамильтона в пространстве* (x, p), *к которым добавлены соотношения* $\dot{t}=1$, $\dot{E}=\partial H/\partial t$.

Если исходный гамильтониан H не зависит явно от времени, $\partial H/\partial t=0$, то время $t=x^{n+1}$ является циклической координатой, и соответствующий импульс $p_{n+1}=E$ сохраняется.

2. Скобка Пуассона. Определение 2. *Скобкой Пуассона* (или *коммутатором*) двух функций $f(x, p)$ и $g(x, p)$ в фазовом пространстве с кососимметрической метрикой $g_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$ называется скалярное произведение их градиентов

$$\{f, g\}=\langle \nabla f, \nabla g\rangle = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}, \tag{15}$$

где $(\nabla f)^i=g^{ij}\dfrac{\partial f}{\partial y^j}$ и т. д. Имеет место следующая

Теорема 1. *Скобка Пуассона обладает следующими свойствами:*

1) $\{f, g\}=-\{g, f\}$, $\{\lambda f_1+\mu f_2, g\}=\lambda\{f_1, g\}+\mu\{f_2, g\}$,

где λ, μ *— константы;*

2) $$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \qquad (16)$$

(*тождество Якоби*);

3) $$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}; \qquad (17)$$

4) $$\nabla\{f, g\} = -[\nabla f, \nabla g],$$

где $[\ ,\ ]$ — *коммутатор векторных полей.*

Доказательство. Свойства 1) и 3) очевидны, а свойство 2) эквивалентно свойству 4). Докажем свойство 4). В координатах (x, p) имеем

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial p}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial p}, -\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Вычислим коммутатор этих векторных полей. Напомним (см. § 23), что коммутатор полей X и Y в координатах y^i определяется формулой

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial y^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial y^j}.$$

Используя это равенство для первой x-координаты коммутатора $[\nabla f, \nabla g]$, получаем

$$[\nabla f, \nabla g]^1 = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) -$$

$$- \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = (-\nabla\{f, g\})^1$$

здесь мы использовали равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Для p-координаты равенство 4) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие. *Функции* $f(x, p)$ *на фазовом пространстве образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона.*

Заметим, что в силу утверждения 4) теоремы 1 эта алгебра Ли изоморфна алгебре Ли градиентных векторных полей в кососимметрической метрике g_{ij}.

Пусть теперь g_{ij} — произвольная кососимметрическая метрика (невырожденная); $\Omega = g_{ij} dy^i \wedge dy^j$. Определим скобку Пуассона $\{f, g\}$ прежней формулой

$$\{f, g\} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial y^j} \quad (g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j). \qquad (18)$$

При каком условии на Ω гладкие функции образуют алгебру Ли относительно коммутатора $\{\ ,\ \}$? Ответ дает следующая

Теорема 2. *Гладкие функции составляют алгебру Ли относительно скобки Пуассона* (18) *в том и только в том случае, если форма* Ω *замкнута:* $d\Omega = 0$.

Доказательство. Нужно проверить лишь справедливость тождества Якоби. Оно эквивалентно (см. доказательство теоремы 1) тождеству

$$\nabla\{f, g\} = -[\nabla f, \nabla g]. \tag{19}$$

Левая часть равенства (19) имеет вид (k-я координата):

$$\nabla\{f, g\}^k = g^{kl}\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^l}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} + g^{kl}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} + \frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial^2 g}{\partial y^l \partial y^j}\right);$$

правая часть:

$$-[\nabla f, \nabla g]^k = g^{il}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^l}\frac{\partial f}{\partial y^j} -$$

$$- g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial g}{\partial y^l} + g^{ij}g^{kl}\frac{\partial g}{\partial y^j}\frac{\partial^2 f}{\partial y^l \partial y^i} - g^{ij}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial^2 g}{\partial y^j \partial y^l}.$$

Приравнивая эти выражения, получим после сокращения и переобозначения индексов суммирования: равенство (19) эквивалентно равенству

$$\left(g^{ki}\frac{\partial g^{jl}}{\partial y^i} + g^{li}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i} + g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i}\right)\frac{\partial f}{\partial y^j}\frac{\partial g}{\partial y^l} = 0.$$

Ввиду произвольности величин $\frac{\partial f}{\partial y^j}$, $\frac{\partial g}{\partial y^l}$ это равенство эквивалентно такому равенству:

$$g^{ki}\frac{\partial g^{jl}}{\partial y^i} + g^{li}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i} + g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i} = 0; \quad j, l, k = 1, \ldots, 2n. \tag{20}$$

Умножая равенство (20) на $g_{rk}g_{pj}g_{ql}$ и используя соотношение

$$g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial y^l} = -g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l},$$

получаем

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial y^r} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial y^p} + \frac{\partial g_{rp}}{\partial y^q} = 0,$$

а это и есть условие замкнутости формы Ω. Теорема доказана.

Выясним теперь вопрос: в каком случае невырожденную форму Ω 2-го ранга (т. е. такую, что $\Omega^n \neq 0$) можно привести заменой координат к каноническому виду (7)? Так как форма (7) замкнута, то условие замкнутости формы Ω необходимо для та-

кого приведения. Достаточность вытекает из следующего утверждения, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 3 (Дарбу). *Пусть* Ω *— дифференциальная форма 2-го ранга, причем* $\Omega^n = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega \neq 0$. *Если форма* Ω *замкнута, то существуют локальные координаты* $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$, *в которых форма* Ω *принимает канонический вид*:

$$\Omega = \sum_i dx^i \wedge dp_i.$$

Пусть мы имеем в фазовом пространстве гамильтонову систему с гамильтонианом H. Тогда производная любой функции $f = f(x, p)$ вдоль этой системы имеет вид

$$\dot{f} = \{f, H\}. \tag{21}$$

В частности, $\dot{x}^i = \{x^i, H\} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\partial H/\partial x^i$.

Вывод. *Функция* $f(x, p)$ *является интегралом гамильтоновой системы (интегралом движения), если она коммутирует с гамильтонианом* H: $\{f, H\} = 0$. *Совокупность интегралов гамильтоновой системы образует алгебру Ли, замкнутую также относительно перемножения функций.*

Предположим, что гамильтониан $H(x, p)$ не зависит явно от времени: $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$. Тогда энергия $E = H(x, p)$ сохраняется, и все траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x, p)$ лежат на поверхностях уровня $H(x, p) = E$. Пусть $f = f(x, p)$ — интеграл этой системы, $\{f, H\} = 0$. Но тогда и $\{H, f\} = 0$, т. е. функция $H(x, p)$ постоянна вдоль траекторий градиентной системы ∇f. Следовательно, векторное поле ∇f касается поверхности уровня $H(x, p) = E$. Так как векторные поля, касающиеся данной поверхности, образуют подалгебру алгебры Ли всех векторных полей (см. § 24, п. 1), то имеет смысл говорить об алгебре Ли интегралов гамильтоновой системы на данном уровне энергии $H(x, p) = E$.

Пример 1. Пусть лагранжиан $L(x, \dot{x})$ сферически симметричен. Как мы видели выше, трем однопараметрическим подгруппам в $SO(3)$ соответствуют три интеграла M_x, M_y, M_z (интегралы момента), где

$$M_x = L_x^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad M_y = L_y^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad M_z = L_z^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \tag{22}$$

L_x, L_y, L_z — соответствующие линейные векторные поля. Коммутаторы этих полей имеют вид (см. § 24)

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_y, L_z] = L_x, \quad [L_z, L_x] = L_y. \tag{23}$$

Из утверждения 4 теоремы 1 вытекает, что скобки Пуассона

компонент момента вычисляются по формулам

$$\{M_x, M_y\} = -M_z, \quad \{M_y, M_z\} = -M_x, \quad \{M_z, M_x\} = -M_y. \tag{24}$$

Вывод. *Функции M_x, M_y, M_z на фазовом пространстве сферически симметричной системы образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона, изоморфную алгебре Ли $so(3)$.*

Пример 2. В кеплеровой задаче гамильтониан $H(x, p)$ в $\mathbb{R}^6$ имеет вид

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{|x|}, \quad \alpha < 0. \tag{25}$$

В силу сферической симметричности здесь имеются три интеграла момента

$$M = (M_1, M_2, M_3) = [x, p] = \text{const}. \tag{26}$$

Оказывается, в этой задаче имеется еще три интеграла

$$W = (W_1, W_2, W_3) = \left[\frac{p}{m}, M\right] + \frac{\alpha x}{|x|} = \text{const} \tag{27}$$

(вектор Лапласа — Рунге — Ленца). Вычислим скобки Пуассона $\{M_i, W_j\}$, $\{W_i, W_j\}$. Для этого используем следующие выражения для скобок Пуассона функций $\{p_i, M_j\}$:

$$\{p_i, M_i\} = 0, \quad \{p_1, M_2\} = p_3, \quad \{p_1, M_3\} = -p_2, \quad \{p_2, M_1\} = -p_3, \tag{28}$$
$$\{p_2, M_3\} = p_1, \quad \{p_3, M_1\} = p_2, \quad \{p_3, M_2\} = -p_1$$

(проверьте!). Имеем

$$M_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2,$$

$$W_1 = \frac{1}{m}(p_2 M_3 - p_3 M_2) + \frac{\alpha x_1}{|x|}, \quad W_2 = \frac{1}{m}(p_3 M_1 - p_1 M_3) + \frac{\alpha x_2}{|x|}.$$

Используя свойства 1), 3) из теоремы 1, получаем

$$\{M_1, W_1\} = \frac{1}{m}\{M_1, p_2 M_3 - p_3 M_2\} + \alpha\left\{M_1, \frac{x_1}{|x|}\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}[\{M_1, p_2\} M_3 + \{M_1, M_3\} p_2 - \{M_1, p_3\} M_2 -$$

$$- \{M_1, M_2\} p_3] + \frac{\alpha}{|x|}\{M_1, x_1\} + \alpha x_1\left\{M_1, \frac{1}{|x|}\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}\{p_3 M_3 - M_2 p_2 + p_2 M_2 - p_3 M_3\} = 0,$$

$$\{M_1, W_2\} = \frac{1}{m}\{M_1, p_3 M_1 - p_1 M_3\} + \alpha\left\{M_1, \frac{x_2}{|x|}\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}[\{M_1, p_3\} M_1 - \{M_1, M_3\} p_1] + \frac{\alpha}{|x|}\{M_1, x_2\} =$$

$$= \frac{1}{m}[-p_2 M_1 + p_1 M_2] + \frac{\alpha x_3}{|x|} = W_3.$$

Точно так же вычисляются остальные скобки $\{M_i, W_j\}$. Получаем следующую таблицу скобок Пуассона:

$\{M_i, W_j\}$	W_1	W_2	W_3
M_1	0	W_3	$-W_2$
M_2	$-W_3$	0	W_1
M_3	W_2	$-W_1$	0

(29)

Аналогичное, но более длинное вычисление позволяет найти попарные скобки вида $\{W_i, W_j\}$ при постоянном уровне энергии $H(x, p) = E$. Будем иметь

$$\{W_1, W_2\} = -\frac{2E}{m} M_3, \quad \{W_2, W_3\} = -\frac{2E}{m} M_1,$$

$$\{W_3, W_1\} = -\frac{2E}{m} M_2. \tag{30}$$

Видно, что структура алгебры Ли функций W_i, M_j при постоянном уровне энергии $H = E$ существенно зависит от этого уровня энергии (см. задачу 3 ниже).

3. Канонические преобразования. Пусть имеется произвольная гамильтонова система с гамильтонианом $H(x, p)$:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 4. *Форма* $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i$ *сохраняется в силу гамильтоновой системы*:

$$\dot{\Omega} = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Чтобы вычислить производную формы Ω вдоль векторного поля ∇H (т. е. производную Ли $\dot{\Omega} = L_{\nabla H}\Omega$), нужно воспользоваться следующими фактами (см. § 23, п. 2):

$$(\Omega_1 \wedge \Omega_2)^{\cdot} = \dot{\Omega}_1 \wedge \Omega_2 + \Omega_1 \wedge \dot{\Omega}_2, \tag{32}$$

$$(dx^i)^{\cdot} = d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial x^j} dx^j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_j} dp_j, \tag{33}$$

$$(dp_i)^{\cdot} = -d\left(\frac{\partial H}{\partial x^i}\right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\, \partial x^j} dx^j - \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\, \partial p_j} dp_j. \tag{34}$$

Поэтому

$$\left(\sum_i dx^i \wedge dp_i\right)^{\cdot} = \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial x^j}\,dx^j \wedge dp_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_j}\,dp_j \wedge dp_i - \right.$$

$$\left. - dx^i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial x^j}\,dx^j - dx^i \wedge \frac{\partial^2 H}{\partial x^i\,\partial p_j}\,dp_j\right\} = 0,$$

так как внешнее произведение кососимметрично. Теорема доказана.

Следствие (Лиувилль). *Фазовый объем любой области в (x, p)-пространстве сохраняется гамильтоновой системой.*

Доказательство. Так как $\Omega = 0$, то из формулы (32) вытекает, что $(\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega)^{\cdot} = 0$. Согласно лемме 2 элемент объема в фазовом пространстве как раз имеет вид n-кратного внешнего произведения формы Ω на себя. Следствие доказано.

Определение 3. Преобразование $\Phi\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ фазового пространства (x, p) в себя называется *каноническим*, если оно сохраняет кососимметрическое скалярное произведение (т. е. если форма Ω переходит в себя).

Другими словами, канонические преобразования — это движения кососимметрической метрики. В силу теоремы 4 сдвиг вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x, p)$ дает однопараметрическую группу канонических преобразований. Верно и обратное. Пусть дана произвольная локальная однопараметрическая группа канонических преобразований $\Phi_t(x, p) = (x(t), p(t))$, и пусть $X = \left.\frac{d\Phi_t}{dt}\right|_{t=0}$ — соответствующее векторное поле.

Теорема 5. *Найдется локально однозначная гладкая функция Гамильтона $H(x, p)$, по отношению к которой векторное поле X гамильтоново, т. е. имеет вид*

$$X = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \quad -\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Доказательство. Пусть в координатах (x, p) поле X имеет вид $X = (A^i, B_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим сдвиг на малое время Δt. Имеем

$$\Phi_{\Delta t}\colon \begin{cases} x^i \to x^i + A^i(x, p)\,\Delta t + O(\Delta t^2) = x^{i'}, \\ p_i \to p_i + B_i(x, p)\,\Delta t + O(\Delta t^2) = p_i'. \end{cases}$$

Условия теоремы требуют сохранения кососимметрической метрики:

$$\sum_i dx^{i'} \wedge dp_i' = \sum_i dx^i \wedge dp_i.$$

Поэтому

$$(dx^i + (dA^i)\Delta t) \wedge (dp_i + (dB_i)\,\Delta t) = dx^{i'} \wedge dp_i' =$$

$$= dx^i \wedge dp_i + \Delta t \left[\frac{\partial A^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dp_i + \frac{\partial A^i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i + \frac{\partial B_i}{\partial p_j} dx^i \wedge dp_j + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial B_i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j \right] + O(\Delta t^2).$$

Отсюда

1) $\dfrac{\partial A^i}{\partial p_j} dp_i \wedge dp_j = 0 \leftrightarrow \dfrac{\partial A^i}{\partial p_j} = \dfrac{\partial A^j}{\partial p_i}$;

2) $\dfrac{\partial B_i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j = 0 \leftrightarrow \dfrac{\partial B_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial B_j}{\partial x^i}$;

3) $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dp_i = -\dfrac{\partial B_i}{\partial p_j} dx^i \wedge dp_j \leftrightarrow \dfrac{\partial A^i}{\partial x^j} = -\dfrac{\partial B^i}{\partial p_j}$.

Если $A^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $B_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}$, то эти условия выполнены. Обратно, из этих условий видно, что форма $A^i dp_i - B_i dx^i$ является полным дифференциалом (по теореме Грина), и можно положить $H(x, p) = \int\limits_{(x_0, p_0)}^{(x, p)} (-B_i dx^i + A^i dp_i)$. Теорема доказана.

Замечание. Явно зависящие от времени гамильтонианы $H(x, p, t)$ дают однопараметрические семейства Φ канонических преобразований, но не группу $(\Phi_{t_1+t_2} \neq \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2})$.

При $n = 1$ сохранение формы $\Omega = dx \wedge dp$ равносильно сохранению площади в (x, p)-плоскости. Поэтому класс канонических преобразований здесь сводится к классу преобразований, сохраняющих площадь. При $n > 1$ канонических преобразований меньше, чем сохраняющих объем (может оказаться, что форма $\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ сохраняется, а форма Ω не сохраняется).

Линейные канонические преобразования фазового (x, p)-пространства $\mathbb{R}^{2n}$ называются *симплектическими*. При $n = 1$ группа всех симплектических преобразований совпадает с $SL(2, \mathbb{R})$. Линейные канонические преобразования мы получим, если $H(x, p)$ — квадратичная форма:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} x^i x^j + b_{ij} x^i p_j + c_{ij} p_i p_j). \tag{35}$$

Соответствующая этой форме симметрическая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & C \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, где матрицы A и B сим-

метричны. Если $y=(x, p)$, то гамильтонова система имеет вид

$$\dot{y}=Ky, \quad K=\begin{pmatrix} B & C \\ -A & -B^{\top} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Таким образом, матрицы K из алгебры Ли группы симплектических преобразований имеют вид (36). Эта алгебра Ли совпадает с алгеброй Ли квадратичных гамильтонианов (35) относительно скобки Пуассона. Простейший пример квадратичного гамильтониана дает гармонический осциллятор, где $H=\frac{p^2}{2m}+m\omega^2x^2$, ω — частота. Поэтому квадратичные гамильтонианы называют также обобщенными осцилляторами.

Задачи. 1. Векторному полю X на конфигурационном пространстве поставим в соответствие функцию F_X на фазовом пространстве, полагая $F_X=p_iX^i$. Показать, что $\{F_X, F_Y\}=-F_{[X, Y]}$.

2. Пусть функция $f=f(x)$ на фазовом пространстве не зависит от импульсов p. Показать, что

$$\{f, F_X\}=\partial_X f.$$

3. Доказать, что в кеплеровой задаче алгебра Ли интегралов W_i, M_j при фиксированной энергии E изоморфна:

а) при $E<0$ — so (4),

б) при $E=0$ — алгебре Ли группы движений в $\mathbb{R}^3$,

в) при $E>0$ — so (1, 3).

4. Пусть $\Omega=g_{ik}dy^i\wedge dy^k$ — симплектическая метрика, $X=(X^k)$ — векторное поле. Проверить, что форма $g_{ik}X^k dy^i$ замкнута, если и только если производная Ли вдоль поля X формы Ω равна нулю: $L_X\Omega=0$.

5. Пусть M_x, M_y, M_z — определенные в п. 2 интегралы момента, $M^2=M_x^2+M_y^2+M_z^2$. Проверить, что

$$\{M^2, M_x\}=\{M^2, M_y\}=\{M^2, M_z\}=0.$$

6. Пусть $M=(M_1, M_2, M_3)=[x, p]$. Показать, что функции p_i, M_j образуют относительно скобки Пуассона алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства (см. задачу 9 к § 24).

7. Пусть $g_{ij}=-g_{ji}$ — невырожденная кососимметрическая матрица, задающая кососкалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Показать, что размерность линейного подпространства в $\mathbb{R}^{2n}$ с нулевым ограничением этого кососкалярного произведения не превосходит n.

8. Пусть в фазовом пространстве с каноническими координатами $x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n$ введены новые координаты $X^1, \ldots, X^n, P_1, \ldots, P_n$ так, что $p_i=\frac{\partial S(x, X)}{\partial x^i}$, $P_i=-\frac{\partial S(x, X)}{\partial X^i}$, $i=1, \ldots, n$

где $S(x, X)$ — некоторая гладкая функция переменных x^i, X^i (пусть $\det(\partial^2 S/\partial x^i \partial X^j) \neq 0$). Доказать, что новые координаты также канонические. (Функция $S(x, X)$ называется *производящей функцией* канонического преобразования $(x, p) \mapsto (X, P)$.)

§ 35. Лагранжевы поверхности

1. Пучки траекторий и уравнение Гамильтона — Якоби. Для различных целей существенно знать свойства не индивидуальной траектории гамильтоновой системы, а целого пучка траекторий. Более точно, постановка вопроса такова: рассмотрим при $t = 0$ поверхность Γ размерности n в $2n$-мерном фазовом пространстве (x, p), заданную как график:

$$p_i = f_i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Каждая точка поверхности Γ будет двигаться вдоль траекторий системы с гамильтонианом $H(x, p, t)$; в момент времени $t > 0$ получится сдвинутая поверхность Γ_t, а $\Gamma_0 = \Gamma$. Удобно рассматривать совокупность поверхностей Γ_t как $(n+1)$-мерную поверхность в расширенном фазовом пространстве (x, p, t, E); точки $(x(t), p(t), E(t), t)$, $E = H(x, p, t)$, дадут поверхность Γ^{n+1}, сечение которой уровнем $t = 0$ есть Γ и которая состоит целиком из траекторий, начавшихся в Γ. Нам, однако, понадобится несколько более широкий класс подобных поверхностей.

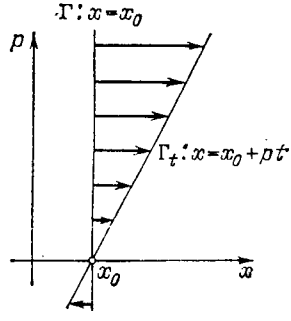


Рис. 35

Например: пусть $\Gamma = \Gamma_0$ есть поверхность $x = x_0$ (импульсы любые, рис. 35); мы получим в качестве Γ^{n+1} пучок всех траекторий, расходящихся из точки x_0 во все стороны. При $t = 0$ поверхность Γ_0 не задается как график функции $p = f(x)$, но при $t > 0$ она может быть таким графиком (хотя бы локально).

Определение 1. Поверхность Γ в фазовом пространстве (x, p) называется *лагранжевой*, если для всех кривых γ на поверхности Γ, начинающихся в любой точке $Q \in \Gamma$, укороченное действие $S = \int_\gamma p\,dx$ является локально однозначной функцией, зависящей лишь от конечной точки пути γ.

Определение 1′. Поверхность Γ^{n+1} в расширенном фазовом пространстве называется лагранжевой, если для всех путей γ на Γ^{n+1} с началом в точке Q действие $S = \int_\gamma (p\,dx - E\,dt)$ (где $E = H(x, p, t)$ на поверхности Γ^{n+1}) является локально однозначной функцией конечной точки.

Лемма 1. *Поверхность* Γ^n (*соответственно* Γ^{n+1}), *имеющая вид графика* $p_i = f_i(x)$, *где* $i = 1, \ldots, n$ (*или* $i = 0, 1, \ldots, n$ *для* Γ^{n+1}, $p_0 = E$, $x^0 = t$), *является лагранжевой в том и только в том случае, если*

$$\frac{\partial S(x)}{\partial x^i} = p_i \quad (\text{для } \Gamma^n), \tag{2}$$

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x^i} = p_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -H(x,p,t) \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = -H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) \quad (\text{для } \Gamma^{n+1}).$$

Доказательство. Пусть S — локально однозначная функция. Так как $S = \int p\,dx - H(x,p,t)\,dt$ по определению, то $dS = p\,dx - H\,dt$. Отсюда следует $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, $-H = \frac{\partial S}{\partial t}$. Обратно, если $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, $-H = \frac{\partial S}{\partial t}$, то функция S локально однозначна по теореме Грина. Лемма доказана.

Действие $S(x, t)$ мы назовем действием пучка траекторий, а уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0 \tag{4}$$

— *уравнением Гамильтона — Якоби.*

Если функция $S(x, t)$ известна, то поверхность Γ^{n+1} задается уравнениями $p = \frac{\partial S}{\partial x}$, $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$, а ее сечение $t = t_0$ есть поверхность Γ^n_t, получающаяся из $\Gamma = \Gamma_0$ движением по времени вдоль траекторий гамильтоновой системы $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$.

Дадим теперь другое определение лагранжевой поверхности в фазовом пространстве (x, p) (или в расширенном фазовом пространстве (x, p, E, t)).

Определение 2. Поверхность Γ размерности n в фазовом пространстве называется лагранжевой, если кососимметрическое скалярное произведение любых ее касательных векторов равно нулю (т. е. ограничение формы $\Omega = \sum_i dx^i \wedge dp_i$ на Γ равно нулю).

Это определение лагранжевой поверхности геометрически инвариантно и не требует, чтобы она была представлена в виде графика функции $p_i = f_i(x^1, \ldots, x^n)$.

Простейшие лагранжевы поверхности имеют вид:

а) $\Gamma_{x_0} = \{x = x_0$, импульсы любые$\}$;

б) $\Gamma_{p_0} = \{p = p_0$, координаты любые$\}$.

Очевидно, при канонических преобразованиях лагранжевы поверхности переходят в лагранжевы. Таково, например, преобразование $x \to p$, $p \to -x$:

$$\Omega = dx^i \wedge dp_i \to -dp_i \wedge dx^i = dx^i \wedge dp_i = \Omega.$$

При этом поверхности Γ_{x_0} и Γ_{p_0} поменяются местами.

Теорема 1. *Если лагранжева поверхность в смысле определения 2 задана в виде графика* $p_i = f_i(x)$, *то найдется функция* $S(x)$ *такая, что* $f_i = \dfrac{\partial S(x)}{\partial x^i}$, *и обратно.*

Доказательство. Если поверхность Γ задана уравнениями $p_i = f_i(x)$, то ограничение формы Ω на Γ имеет вид

$$\Omega|_\Gamma = \sum dx^i \wedge dp_i(x) = \sum_{i,j} dx^i \wedge \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\, dx^j.$$

Поэтому $\Omega|_\Gamma = \sum\limits_{i<j} \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial f_j}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j$. Если $\Omega|_\Gamma \equiv 0$, то $\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j} \equiv \dfrac{\partial f_j}{\partial x^i}$. Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы интеграл $S(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f_i(x)\, dx^i$ давал функцию, не зависящую от пути (формула Грина). Отсюда и следует наше утверждение.

Аналогичное утверждение, очевидно, имеет место и для расширенного фазового пространства (x, p, E, t).

Пусть $H = H(x, p)$ не зависит явно от времени. Тогда имеет место

Теорема 2. а) *Вектор* $\nabla H = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p}, -\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) = (\dot{x}, \dot{p})$ *касается поверхности* $H = E_0 = \text{const}$;

б) *вектор* ∇H *имеет нулевое скалярное произведение со всеми векторами, касательными к уровню энергии* $H = E_0$;

в) *любая n-мерная лагранжева поверхность, лежащая на уровне энергии* $H(x, p) = E_0$, *имеет вектор* ∇H *своим касательным вектором во всех своих точках. В частности, она целиком содержит траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом* H, *имеющие с ней хотя бы одну общую точку.*

Доказательство. Необходимое и достаточное условие касания вектора ξ к поверхности $H = E_0$ дается уравнением $\xi^i \dfrac{\partial H}{\partial y^i} = 0$, $y = (x, p)$. Поэтому

$$\langle \xi, \nabla H \rangle = \xi^i g_{ij} (\nabla H^j) = \xi^i g_{ij} g^{jk} \frac{\partial H}{\partial y^k} = \xi^i \frac{\partial H}{\partial y^i} = 0.$$

Утверждения а), б) доказаны. Докажем утверждение в). Пусть P — точка лагранжевой поверхности Γ (размерности n), лежащей целиком на уровне энергии $H(x, p) = E_0$, и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — базис касательного пространства к поверхности Γ в точке P. По условию лагранжевости имеем $\langle \xi_i, \xi_k \rangle = 0$. Рассмотрим вектор ∇H в точке P. Из б) следует, что $\langle \nabla H, \xi_i \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Скалярное произведение $\langle , \rangle$ невырождено ($\det g_{ij} \neq 0$). Поэтому $\nabla H = \sum_i \lambda_i \xi_i$. (Напомним, что линейное пространство с нулевым скалярным произведением имеет размерность не более n.) Следовательно, ∇H касается Γ. Это верно во всех точках поверхности Γ. Поэтому траектории гамильтониана H во всех точках из Γ ее касаются (и, значит, на ней лежат). Теорема доказана.

Следствие. *Рассмотрим любую лагранжеву поверхность S^{n-1} размерности $n-1$ на уровне $H(x, p) = E_0$. Из всех ее точек проведем траектории гамильтоновой системы в (x, p)-пространстве. Предположим, что получающаяся поверхность будет n-мерной. Тогда эта n-мерная поверхность Γ^n будет лагранжевой и будет лежать на уровне энергии E_0. Если (локально) поверхность Γ^n задается уравнением*

$$p_i = f_i(x) = \frac{\partial S_0}{\partial x^i}, \tag{5}$$

то функция $S_0(x)$ удовлетворяет укороченному уравнению Гамильтона — Якоби

$$E_0 = H\left(x, \frac{\partial S_0}{\partial x}\right). \tag{6}$$

При этом функция $S(x, t) = \int p\,dx - H\,dt$ имеет вид

$$S(x, t) = -E_0 t + S_0(x), \quad -\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right).$$

2. Случай гамильтонианов, являющихся однородными функциями первого порядка от импульсов. Следует отдельно остановиться на особенностях гамильтонова формализма для гамильтонианов $H(x, p)$, являющихся однородными функциями первого порядка от импульсов:

$$H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p), \quad \lambda > 0. \tag{7}$$

Например, для лучей света в изотропной среде мы имели гамильтониан $H(x, p) = c(x)|p|$. Такие гамильтонианы определены лишь при $p \neq 0$, и достаточно знать лишь траектории при одном уровне энергии $H = E_0$ (например, $E_0 = 1$). Остальные траектории получаются из них подобием $p \to \lambda p$, $H \to \lambda H$.

Заметим также, что геодезические в метрике $g_{ij}(x)$ мы обычно получали из лагранжиана $L = g_{ij} v^i v^j$, которому отвечает гамильтониан $H = g^{ij} p_i p_j$, но они получаются также из гамильто-

нпана $H' = \sqrt{H} = \sqrt{g^{ij}p_ip_j}$ (на уровне энергии $H = \text{const}$ соответствующие уравнения Гамильтона пропорциональны с постоянным множителем). Здесь также $H'(x, \lambda p) = \lambda H'(x, p)$, $\lambda > 0$.

Теорема 3. *Если (локальная) однопараметрическая группа преобразований Φ_t получена из гамильтониана $H(x, p)$ такого, что $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$ при $\lambda > 0$, то все преобразования Φ_t сохраняют форму $p\,dx = p_i\,dx^i$.*

Доказательство. Рассмотрим преобразования $\Phi_{\Delta t}$ при малых Δt. Имеем

$$p_i \to p_i' = p_i - \frac{\partial H}{\partial x^i}\Delta t, \quad x^i \to x^{i'} = x^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\Delta t,$$

$$dx^i \to dx^{i'} = dx^i + \Delta t\, d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Эти равенства верны с точностью до $O(\Delta t^2)$, так как (с той же точностью)

$$\Phi_{\Delta t}(p_i) = p_i' = p_i + \dot{p}_i\Delta t,$$

$$\Phi_{\Delta t}(x^i) = x^{i'} = x^i + \dot{x}^i\Delta t.$$

Для формы $p\,dx$

$$p_i'dx^{i'} = \left(p_i - \Delta t\,\frac{\partial H}{\partial x^i}\right)\left(dx^i + \Delta t\, d\left(\frac{\partial H}{\partial p^i}\right)\right) =$$

$$= p_i dx^i + \Delta t\left[-\frac{\partial H}{\partial x^i}dx^i + p_i d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right] + O(\Delta t^2).$$

Так как $p_i d\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = d\left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i$, то

$$p_i'dx^{i'} = p_i dx^i + \Delta t\left[-dH + d\left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right] + O(\Delta t^2)$$

или

$$p'\,dx' = p\,dx + \Delta t\,df + O(\Delta t_2),$$

где $f = p\frac{\partial H}{\partial p} - H = L$. Если $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$, то

$$p\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H(x, \lambda p)}{\partial \lambda} = H(x, p).$$

Таким образом, $p'\,dx' = p\,dx + O(\Delta t^2)$; это показывает, что производная Ли $\frac{d}{dt}(p\,dx)$ равна нулю, т. е. форма $p\,dx$ не меняется с течением времени. Теорема доказана.

Определение 3. Поверхность Γ в фазовом пространстве называется *конической лагранжевой поверхностью*, если ограничение формы $p\,dx$ на поверхность Γ тождественно равно нулю.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие. *Гамильтоновы системы, у которых* $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$, *сохраняют класс конических лагранжевых поверхностей.*

Поверхность Γ_{x_0} ($x = x_0$, импульсы любые) является конической, так как на ней $p\,dx = 0$. Наоборот, поверхность Γ_{p_0} ($p = p_0 \neq 0$, координаты любые) не является конической ($p\,dx \not\equiv 0$).

Для любого гамильтониана, удовлетворяющего соотношению $H(x, \lambda p) = \lambda H(x, p)$, с поверхностью Γ_{x_0} связывается важный пучок траекторий, выходящих из одной точки. Рассмотрим $(n-1)$-мерную поверхность $H = E_0$ внутри Γ_{x_0}; эту поверхность размерности $n-1$ мы обозначим через $S^{n-1}_{x_0}$. Рассмотрим все траектории с началом только в точках из $S^{n-1}_{x_0}$. В любой момент $t > 0$ получим поверхность $S^{n-1}_{x_0}(t)$.

Определение 4. *Фронтом волны* в момент $t > 0$ для пучка траекторий, выпущенного при $t = 0$ из точки x_0, называется проекция фазовой поверхности $S^{n-1}_{x_0}(t)$ в x-пространство (это — поверхность размерности $n-1$ в x-пространстве, зависящая от времени t).

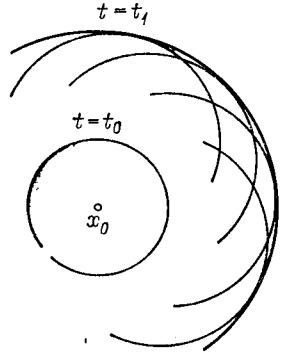


Рис. 36

Очевидно, в момент $t = 0$ проекция поверхности $S^{n-1}_{x_0}(0)$ в x-пространство есть одна точка x_0 (по определению).

Для поверхностей фронта волны имеет место «принцип Гюйгенса», позволяющий получить поверхность фронта при $t_1 > t_0 > 0$ из поверхности фронта в момент t_0. Оказывается, для этого нужно взять поверхность фронта при $t = t_0$; далее, с центрами (или началами) во всех ее точках нужно рассмотреть поверхности фронтов, отвечающие времени $t_1 - t_0$. Огибающая всех этих поверхностей и есть фронт волны в момент t_1 (рис. 36).

Пусть теперь имеется произвольная коническая поверхность Γ^n, т. е. поверхность, для которой $p\,dx|_{\Gamma^n} = 0$.

Лемма 2. *Проекция поверхности* Γ^n *в* x*-пространство имеет размерность* $\leqslant n-1$.

Доказательство. x-компоненты касательных векторов на Γ связаны линейным соотношением $p\,dx = 0$. Поэтому размерность касательного пространства к проекции не превосходит $n-1$. Лемма доказана.

Таким образом, поверхность Γ^n нельзя даже локально задать в виде графика $p_i = f_i(x)$ и связать с ней функцию $S(x)$. Поэтому

мы, как и для разобранного примера поверхности Γ_{x_0}, выделяем внутри Γ^n часть $H(x, p)=E_0$, обозначаемую S^{n-1}. Согласно лемме 2 мы можем выпустить пучок траекторий из S^{n-1} и получить лагранжеву поверхность $\widetilde{\Gamma}^n = \bigcup\limits_{-\infty<t<\infty} S^{n-1}(t)$ на поверхности уровня $H(x, p)=E_0$, целиком состоящую из траекторий. Поверхность $\widetilde{\Gamma}^n$ уже может иметь (локально) вид $p_i = \dfrac{\partial S_0(x)}{\partial x^i}$. Для функции $S_0(x)$ имеем укороченное уравнение Гамильтона — Якоби

$$E_0 = H\left(x, \frac{\partial S_0(x)}{\partial x}\right). \tag{8}$$

Эту операцию можно сделать, если гамильтониан не зависит от времени.

Поскольку поверхность Γ^n является конической, то форма $p\,dx$ равна нулю на S^{n-1}. Следовательно, эта форма равна нулю также на каждой поверхности $S^{n-1}(t)$ (в силу теоремы 3). Поэтому функция $S_0(P) = \int\limits_{P_0}^{P} p\,dx$, задающая лагранжеву поверхность $\widetilde{\Gamma}^n$, постоянна на поверхности $S^{n-1}(t)$ с любым t. Кроме того, $\widetilde{\Gamma}^n$ лежит на уровне энергии $H=E_0$. Поэтому $E_0 = H\left(x, \dfrac{\partial S_0}{\partial x}\right)$.

Таким образом, поверхности уровня $S_0(x)=\text{const}$ точно совпадают с проекциями поверхностей $S^{n-1}(t)$ в x-пространство. Итак, доказана

Теорема 4. *Поверхности уровня $S_0(x)=\text{const}$ определенной выше укороченной функции действия S_0 совпадают с поверхностями фронта волны.*

Задача. Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ заданы n независимых функций $f_1(x, p), \ldots, f_n(x, p)$, которые попарно коммутируют: $\{f_i, f_j\}=0$. Показать, что поверхность, задаваемая в $\mathbb{R}^{2n}$ системой уравнений $f_1=0, \ldots, f_n=0$, лагранжева.

§ 36. Вторая вариация для уравнения геодезических

1. Формула второй вариации. Мы вывели в § 31 уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

для экстремалей функционала

$$S[\gamma] = \int\limits_{\gamma} L(x, \dot{x})\,dt; \tag{2}$$

выполнение этих уравнений является необходимым условием того,

что вдоль некоторой кривой γ функционал $S[\gamma]$ имеет минимум среди всех кривых, начинающихся в точке P и кончающихся в точке Q. Как найти условие того, что кривая γ: $\{x^i = x^i(t)\}$ действительно дает минимум, если она удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа?

Как мы знаем, для функций многих переменных $f(x^1, \ldots, x^N)$ необходимым условием для того, чтобы точка P была минимумом, является условие

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_P = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

а достаточным, при соблюдении предыдущего условия,— положительная определенность квадратичной формы $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$ в той же точке P. Поэтому для нахождения минимума для $S[\gamma]$, где γ удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа, необходимо вычислить аналогичную второму дифференциалу билинейную форму (вторую вариацию)

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\mu} S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]\Big|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = G_\gamma(\xi, \eta) = G_\gamma(\eta, \xi), \tag{3}$$

где η, ξ — векторные поля, заданные на кривой $\gamma(t)$ и обращающиеся в нуль в точках $\gamma(a) = P$ и $\gamma(b) = Q$.

Лемма 1. *Если* γ: $\{x^i = x^i(t)\}$ *удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа, то имеет место формула*

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\frac{\partial^2 S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]}{\partial\lambda\,\partial\mu}\Big|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = -\int_a^b (J_{ij}\xi^j)\,\eta^i dt, \tag{4}$$

где

$$J_{ij}\xi^j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\xi^j\right) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\xi^j. \tag{5}$$

Доказательство. Используя формулу первой вариации (см. § 31), имеем

$$\frac{\partial^2 S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]}{\partial\lambda\,\partial\mu}\Big|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\mu} S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]\right)\Big|_{\mu=0}\right]\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)\eta^i dt\,\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}\xi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\xi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{\xi}^j\right)\right)\eta^i dt.$$

Лемма доказана.

Определение 1. Линейный оператор J, действующий на векторные поля $\xi(t)$, заданные вдоль кривой γ, называется *оператором Якоби.*

Мы разберем только один пример, когда уравнения Эйлера — Лагранжа совпадают с уравнениями геодезических. Здесь удобно брать действие в виде

$$S = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt \tag{6}$$

(а не функционал длины $l = \int \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\, dt$, хотя они и имеют одинаковые экстремали). Имеет место

Теорема 1. *Билинейная форма* $\left.\frac{\partial^2 S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} = G_\gamma(\xi, \eta)$ *для* $S = \int_a^b \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j dt$ *и любой геодезической* γ: $x^i = x^i(t)$ *имеет вид*

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\int_a^b \left(\nabla^2_{\dot{x}}\xi^i + \dot{x}^j\dot{x}^k\xi^l R^i{}_{jkl}\right)\eta^m g_{im}\, dt, \tag{7}$$

или

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\int_a^b \langle J\xi, \eta\rangle\, dt, \tag{8}$$

где

$$(J\xi)^i = \nabla^2_{\dot{x}}\xi^i + \dot{x}^j\dot{x}^k\xi^l R^i{}_{jkl}, \tag{9}$$

$R^i{}_{jkl}$ *— тензор кривизны,* t *— натуральный параметр вдоль геодезической* γ.

Доказательство. Для лагранжиана $L = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ формула первой вариации имеет вид (см. § 31)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} S[\gamma + \lambda\xi]\big|_{\lambda=0} = -\int_a^b \left(\ddot{x}^h + \Gamma^h_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right) g_{hl}\xi^l dt = -\int_a^b \left\langle \nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \xi\right\rangle dt.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\mu} S[\gamma + \lambda\xi + \mu\eta]\big|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_a^b \left\langle \nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \eta\right\rangle dt\Big|_{\lambda=0} = -\int_a^b \left\{\left\langle \nabla_\xi\nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \eta\right\rangle dt + \left\langle \nabla_{\dot{x}}\dot{x}, \nabla_\xi\eta\right\rangle\right\} dt.$$

Второе слагаемое под интегралом есть нуль на кривой γ в силу уравнения геодезических: $\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$. Преобразуем первое слагаемое. Имеем

$$\nabla_\xi \nabla_{\dot{x}} - \nabla_{\dot{x}} \nabla_\xi = R(\dot{x}, \xi), \quad \nabla_\xi \dot{x} = \nabla_{\dot{x}} \xi$$

в силу симметричности связности. Окончательно получаем

$$\nabla_\xi \nabla_{\dot{x}} \dot{x} = \nabla^2_{\dot{x}} \xi + R(\dot{x}, \xi)\dot{x},$$

откуда и вытекает наша теорема.

Пример. Рассмотрим двумерный случай. Введем около геодезической $\gamma(t)$ специальную систему координат (x, y), $x = x^1$, $y = x^2$, такую, что:

а) линия $(x, 0)$ есть сама геодезическая γ и x — натуральный параметр;

б) координата y ортогональна к геодезической, причем $g_{ij}(x, 0) = \delta_{ij}$.

В этом случае билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ для пары полей $\xi(t)$, $\eta(t)$, нормальных к $\gamma(t)$, имеет вид

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\int_a^b \left(\frac{d^2}{dt^2}\xi^i + K(t)\xi^i\right)\eta_i dt, \tag{10}$$

где K — гауссова кривизна. Заметим, что $G_\gamma(\xi, \eta) \equiv 0$, если хотя бы одно из полей пропорционально касательному вектору $\dot{x}(t)$ с постоянным множителем.

Замечание. Формулу второй вариации можно обобщить и на случай «ломаных векторных полей», для которых производная $\nabla_{\dot{x}}\xi$ может иметь разрыв.

Задача. Докажите, что в случае ломаных векторных полей билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ имеет вид

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\sum_{P_i} \langle \eta, \Delta_{P_i}(\nabla_{\dot{x}}\xi)\rangle - \int_a^b \langle J\xi, \eta\rangle\, dt, \tag{11}$$

где $\Delta_P(\nabla_{\dot{x}}\xi)$ — скачок ковариантной производной в точке P и суммирование ведется по всем точкам P_i разрыва величины $\nabla_{\dot{x}}\xi$.

2. Сопряженные точки и условие минимальности. Предположим, что метрика g_{ij} риманова. Условие минимальности геодезической γ состоит в том, что квадратичная форма $G_\gamma(\xi, \xi)$ положительно определена на векторных полях, обращающихся в нуль на концах геодезической γ. Выясним сначала, когда билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ невырождена.

Определение 2. Векторное поле ξ вдоль экстремали γ, идущей из P в Q, называется *якобиевым*, если оно есть решение уравнения Якоби $J\xi = 0$ и сбращается в нуль в концах P и Q. В частности, для изучаемого случая $S = \int \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle\, dt$ имеем

$$J\xi^i = \nabla^2_{\dot{x}} \xi^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \xi^l R^i_{jkl} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Определение 3. Точки P и Q называются *сопряженными* вдоль геодезической γ, идущей из P в Q, если существует ненулевое якобиево поле ξ вдоль кривой γ.

Лемма 2. *Билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ невырождена тогда и только тогда, когда концевые точки P и Q геодезической γ не сопряжены вдоль γ.*

Доказательство. Напомним, что билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ называется невырожденной, если не существует такого векторного поля ξ, что $G_\gamma(\xi, \eta) = 0$ для любого η (поля ξ и η обращаются в нуль на концах P и Q). Если поле ξ якобиево, то $G_\gamma(\xi, \eta) = 0$ при любом η. Наоборот, пусть форма G_γ вырождена на векторе ξ, т. е. $G_\gamma(\xi, \eta) = 0$ для любого η. Рассмотрим $\eta = \alpha(t) J\xi$, где функция $\alpha(t)$ неотрицательна и обращается в нуль на концах (при $t = a$ и $t = b$). Тогда из формулы второй вариации будем иметь

$$G_\gamma(\xi, \eta) = -\int_a^b \alpha(t) \langle J\xi, J\xi \rangle\, dt \equiv 0.$$

Отсюда следует $J\xi = 0$. Поэтому концы сопряжены. Лемма доказана.

Докажем теперь следующее важное необходимое условие минимальности.

Теорема 2. *Если геодезическая γ, идущая из точки P в точку Q, содержит внутри себя пару сопряженных точек P', Q', то эта геодезическая γ не минимальна.*

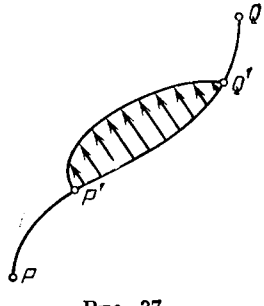


Рис. 37

Доказательство (для случая, когда точки P и Q не сопряжены вдоль γ). Тогда билинейная форма $G_\gamma(\xi, \eta)$ не вырождена. Поэтому для минимальной геодезической квадратичная форма $G_\gamma(\xi, \xi)$ должна быть положительно определенной: $G_\gamma(\xi, \xi) > 0$, если ξ не есть тождественный нуль. Покажем, что при наличии сопряженных точек это требование не выполняется. Пусть $\bar{\xi}$ — поле Якоби, отвечающее точкам P', Q'. Построим «ломаное поле» ξ между P и Q, равное $\bar{\xi}$ между P' и Q' и нулю вне отрезка $P'Q'$ (рис. 37). Тогда в силу формулы (11)

$$G_\gamma(\xi, \xi) = 0.$$

Это противоречит положительности формы G_γ. Теорема доказана.

Теорема 3. *На достаточно малом интервале длин геодезические дают минимум функционала действия $S[\gamma]$ среди всех гладких кривых, соединяющих те же точки. Поэтому каждая достаточно короткая геодезическая локально реализует кратчайшее расстояние между точками.*

Доказательство. Условие минимальности геодезической $\gamma(t)$ состоит в том, что квадратичная форма $G_\gamma(\xi, \xi)$ положительна для всех векторных полей ξ, обращающихся в нуль на концах. В силу формулы (8)

$$G_\gamma(\xi, \xi) = -\int_a^b \left[\langle \nabla_{\dot{x}}^2 \xi, \xi\rangle + \langle R(\dot{x}, \xi)\dot{x}, \xi\rangle\right] dt =$$

$$= \int_a^b \left[\langle \nabla_{\dot{x}} \xi, \nabla_{\dot{x}} \xi\rangle - \langle R(\dot{x}, \xi)\dot{x}, \xi\rangle\right] dt$$

(интегрирование по частям с учетом равенств $\xi(a) = \xi(b) = 0$). Для достаточно малого интервала длин Δl имеет место оценка

$$\left|\int_a^b \langle R(\dot{x}, \xi)\dot{x}, \xi\rangle\, dt\right| < c(\Delta l) \int_a^b \langle \nabla_{\dot{x}} \xi, \nabla_{\dot{x}} \xi\rangle\, dt, \qquad (13)$$

где $c(\Delta l)$ — некоторая константа, зависящая от метрики g_{ij} и длины Δl, причем $c(\Delta l)$ стремится к нулю при $\Delta l \to 0$. Поскольку

$$\int_a^b \langle \nabla_{\dot{x}} \xi, \nabla_{\dot{x}} \xi\rangle\, dt > 0,$$

из этого вытекает наше утверждение.

Задача. Доказать неравенство (13). *Указание.* Если $\xi(a) = \xi(b) = 0$, то $|\xi| < \text{const} \cdot \max_{[a,b]} |\nabla_{\dot{x}} \xi|\, \Delta l$, где $\Delta l = |b - a|$.

Глава 6

МНОГОМЕРНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. ПОЛЯ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 37. Простейшие многомерные вариационные задачи

1. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$ область D с гладкой (или кусочно гладкой) границей ∂D. Рассмотрим линейное пространство F гладких вектор-функций на D: $F = \{f(x^1, \ldots, x^n);\ f = \{f^1, \ldots, f^k\}\}$. Область D мы будем называть областью изменения параметров $x^1, \ldots, x^n$. Рассмотрим гладкую функцию $L(x^\beta; p^j; q^i_\alpha)$ от трех групп переменных: x^β, $1 \leqslant \beta \leqslant n$; p^j, $1 \leqslant j \leqslant k$; q^i_α, $1 \leqslant i \leqslant k$; $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. Функцию L назовем лагранжианом и построим функционал $I[f]$, определенный на F, следующим образом:

$$I[f] = \int\limits_D L(x^\beta; f^j(x^\beta); f^i_{x^\alpha}(x^\beta))\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где $\int\limits_D$ обозначает кратный интеграл $\int \ldots \int\limits_D$ по n-мерной области D (для простоты будем считать, что область D ограничена в $\mathbb{R}^n$); $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = d^n x$ есть n-мерная форма объема в $\mathbb{R}^n$; $f^i_{x^\alpha}(x^\beta) = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}(f^i(x^\beta))$. Сокращенно будем записывать $I[f]$ так: $I[f] = \int\limits_D L(x^\beta; f^j; f^i_{x^\alpha})\, d^n x$.

Простейший случай: $n = 1$ (одномерные вариационные задачи) был уже рассмотрен ранее: например, функционал длины дуги $l(\gamma) = \int\limits_0^1 \sqrt{g_{ij}(y)\, \dot{y}^i \dot{y}^j}\, dt$, и функционал действия пути $\gamma(t)$, $S(\gamma) = \int\limits_0^1 g_{ij}(y)\, \dot{y}^i \dot{y}^j\, dt$, определенные на кусочно гладких кривых $\gamma(t) = (y^1(t), \ldots, y^k(t))$ в римановом пространстве.

Нас будут интересовать в этой главе многомерные функционалы: $n > 1$. Простейшим примером служит функционал площади

на двумерной поверхности, $I[f]=\int\int_D \sqrt{EG-F^2}\,dxdy$, где $D\subset \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ — область изменения параметров x, y; $f(x, y)=(u^1(x, y), u^2(x, y), u^3(x, y))$ — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$ (u^1, u^2, u^3) с индуцированной метрикой $dl^2=E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2$;

$$L(x, y; f; f_x, f_y)=L(f_x, f_y)=\sqrt{EG-F^2}=$$
$$=\sqrt{\langle f_x, f_x\rangle\langle f_y, f_y\rangle-\langle f_x, f_y\rangle^2}.$$

Вернемся к рассмотрению функционалов общего вида.

Рассмотрим «точку» $f\in F$ (F — область определения функционала I). Пусть η — гладкая функция, заданная на области D и являющаяся финитной, т. е. равной нулю вне открытого множества, замыкание которого целиком содержится в D. В частности, будем считать, что $\eta=0$ на границе ∂D области D. Вообще для наших целей достаточно рассматривать функции с достаточно малым носителем. Назовем такие функции возмущениями функции f, если $f+\varepsilon\eta\in F$. Здесь ε — малый параметр. Теперь строим выражение $\frac{1}{\varepsilon}(I[f+\varepsilon\eta]-I[f])$ и, переходя к пределу (по ε), получаем функцию

$$\frac{dI[f+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int\frac{\delta I}{\delta f}\,\delta f\,d^nx,\quad \delta f=\eta. \tag{1}$$

которую естественно назвать «производной функционала I в точке f по направлению η». Вектор $\frac{\delta I}{\delta f}=\left(\frac{\delta I}{\delta f^i}\right)$, определяемый равенством (1), называется *вариационной производной* функционала $I[f]$.

Определение 1. Функцию $f_0\in F$ мы назовем *стационарной* (или *экстремальной, критической*) функцией для функционала I, если $\frac{\delta I[f_0]}{\delta f}\equiv 0$, т. е. выражение (1) обращается в нуль для любого финитного возмущения $\eta=\delta f$ такого, что $f+\varepsilon\eta\in F$.

Перейдем к аналитическому исследованию производной $\frac{\delta I[f_0]}{\delta f}$:

$$\delta I[f]=\int_D\left[L\left(x^\beta; f^j+\varepsilon\eta^j; f^i_{x^\alpha}+\varepsilon\eta^i_{x^\alpha}\right)-L\left(x^\beta; f^j; f^i_{x^\alpha}\right)\right]d^nx.$$

Разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора, получим

$$\delta I[f]=\int_D\left[\sum_{j=1}^k\frac{\partial L}{\partial f^j}\varepsilon\eta^j+\sum_{i=1}^k\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\varepsilon\eta^i_{x^\alpha}+o(\varepsilon)\right]d^nx=$$
$$=\varepsilon\int_D\sum_{i=1}^k\left[\frac{\partial L}{\partial f^i}\eta^i+\sum_{\alpha=1}^n\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i_{x^\alpha}\right]d^nx+\int_D o(\varepsilon)\,d^nx.$$

Проинтегрируем по частям. Получаем

$$\delta I[f] = \varepsilon \int_D \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d^n x + \\ + \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right)\eta^i d^n x + \int_D o(\varepsilon)\, d^n x.$$

В первом интеграле интегрирование по переменной x^α можно отделить от интегрирования по всем остальным переменным $x^1, \ldots, \widehat{x^\alpha}, \ldots, x^n$. Получаем

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d^n x = \int_{x^1,\ldots,\widehat{x^\alpha},\ldots,x^n}\left[\int_P^Q \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) dx^\alpha\right] d^{n-1}x$$

(P и Q зависят от $x^1, \ldots, \widehat{x^\alpha}, \ldots, x^n$; $d^{n-1}x = dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^\alpha} \wedge \wedge dx^n$). Поскольку во внутреннем интервале $\int_P^Q$ на переменные $x^1, \ldots, \overline{x^\alpha}, \ldots, x^n$ можно смотреть как на параметры, то получим

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\right) d^n x = \int_{x^1,\ldots,\widehat{x^\alpha},\ldots,x^n}\left[\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\Big|_Q - \frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\eta^i\Big|_P\right] d^{n-1}x \equiv 0,$$

так как $\eta^i(Q) = \eta^i(P) = 0$ (см. выше). Итак,

$$\delta I[f] = \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right]\eta^i d^n x + \int_D o(\varepsilon)\, d^n x.$$

Отсюда

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f^i} = \frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right) \tag{2}$$

$$\left(\text{так как } \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_D o(\varepsilon)\, d^n x = 0\right).$$

Если $f_0 \in F$ — стационарная (экстремальная) функция для $I[f]$, то для любого финитного возмущения η выполнено тождество

$$\int_D \sum_{i=1}^{k}\eta^i\left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right)\right]\Bigg|_{f=f_0} d^n x = 0,$$

откуда

$$\frac{\delta I[f]}{\delta f^i} = \frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^\alpha}}\right) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant k). \tag{3}$$

Система дифференциальных уравнений (3) называется системой уравнений Эйлера — Лагранжа для функционала I. Оформим предыдущие результаты в виде теоремы.

Теорема 1. *Функция $f_0 \in F$ является стационарной для функционала $I[f]$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе уравнений Эйлера — Лагранжа* (3).

2. Тензор энергии-импульса. Рассмотрим функционал вида $I[f] = \int\limits_D L\left(f^j, f^i_{x^k}\right) d^n x$, у которого лагранжиан L не зависит явно от переменных x^i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Экстремальные функции f (описывающие «движение системы») являются решениями системы уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial f^i} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^i_{x^k}}\right) = 0. \tag{4}$$

Поступая далее по аналогии с тем, как поступают в механике при выводе закона сохранения энергии, выполним следующие преобразования:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial f^k}\frac{\partial f^k}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\frac{\partial\left(f^\alpha_{x^k}\right)}{\partial x^i}.$$

Подставляя сюда (4), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\frac{\partial\left(f^\alpha_{x^k}\right)}{\partial x^i}.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f^\alpha_{x^k}\right) = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\,\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(f^\alpha_{x^i}\right)$, то

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\right)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}\left(f^\alpha_{x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}} f^\alpha_{x^i}\right).$$

В то же время $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \delta^k_i \frac{\partial L}{\partial x^k}$, а потому

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}\delta^k_i = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}} f^\alpha_{x^i}\right),$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta^k_i L - f^\alpha_{x^i}\frac{\partial L}{\partial f^\alpha_{x^k}}\right) = 0. \tag{5}$$

Введем обозначение

$$T_i^k = f_{x^i}^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial f_{x^k}^{\alpha}} - \delta_i^k L. \tag{6}$$

Тогда соотношение (5) примет вид

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{7}$$

Это уравнение означает, что дивергенция тензора T_i^k во всей области D равна нулю.

Замечание. Верхние и нижние индексы в евклидовых координатах неразличимы. В псевдоевклидовом пространстве с метрикой g_{ij} можно определить тензор T_{ik} следующим образом:

$$T_{ik} = g_{kl} f_{x^i}^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial f_{x^l}^{\alpha}} - g_{ik} L = g_{kl} T_i^l. \tag{8}$$

Определение 2. Тензор T_i^k называется *тензором энергии-импульса* данной системы (с лагранжианом $L(f, f_{x^\alpha})$).

Уравнение $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ не определяет однозначно тензор энергии-импульса. В самом деле, к тензору T_i^k, определенному формулой (6) или (8), можно добавить сумму вида $\frac{\partial}{\partial x^l} \psi_i^{kl}$, где ψ_i^{kl} — любой тензор, кососимметрический по индексам k, l. Тогда, очевидно, новый тензор $\widetilde{T}_i^k = T_i^k + \frac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^l}$ также удовлетворяет соотношению (7), поскольку $\frac{\partial^2 \psi_i^{kl}}{\partial x^k \partial x^l} = 0$.

Определенный выше тензор T_{ik}, вообще говоря, не симметричен, однако если рассматривать его с точки зрения уравнения (7), то его можно сделать симметрическим (с сохранением (7)) путем добавления соответствующего кососимметрического (по i, k) тензора вида $\sum_l \frac{\partial}{\partial x^l}(\psi_{ikl})$. (Достаточно потребовать, чтобы кососимметрическим по i, k был тензор ψ_{ikl}, т. е. чтобы этот тензор был кососимметрическим по всем своим индексам). Однозначное определение тензора энергии-импульса как симметрического тензора играет особую роль в некоторых физических вопросах (см. об этом ниже).

В дальнейшем основные приложения понятия тензора энергии-импульса будут у нас сосредоточены вокруг вариационных задач в четырехмерном псевдоримановом пространстве — в частности, пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$, отнесенном к координатам x^0, x^1,

x^2, x^3, где x^0 пропорционально t (времени), а x^1, x^2, x^3 — пространственные координаты.

Введем 4-мерный вектор импульса системы с лагранжианом L. Для этого мы воспользуемся тензором энергии-импульса T_{ik}.

Пусть $dS_k = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijmk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^m$ — стандартные 3-формы на координатных трехмерных гиперплоскостях (см. задачу 3 к § 26).

Определение 3. Вектор $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$, где

$$P_i = \lambda \int\limits_{x^0=\text{const}} T_i^k dS_k, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \lambda = \text{const},$$

называется *4-вектором импульса (с нижними индексами)* системы с лагранжианом L.

Замечание. Компоненту $T_0^0 = \dot{f}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{f}^\alpha} - L$ (точка обозначает производную по $x^0 = ct$) по аналогии с формулой для энергии (31.7) следует рассматривать как *плотность энергии*. Поэтому $\int T_0^0 d^3x$ ($d^3x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$) есть полная энергия системы. Но мы имеем для временной компоненты P_0 из определения 3 следующее выражение: $P_0 = \lambda \int\limits_{x^0=\text{const}} T_0^0 d^3x$. Обычно полагают $\lambda = 1/c$, тогда компонента P_0 совпадает с полной энергией системы, умноженной на $1/c$ (как и для 4-вектора импульса релятивистской частицы — см. § 32).

Утверждение 1. *Условие* $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ *эквивалентно условию сохранения вектора импульса* P.

Доказательство. Будем считать что рассматриваемые поля f — решения уравнений Эйлера — Лагранжа — равны нулю вне достаточно большого шара трехмерного пространства (x^1, x^2, x^3) (или стремятся к нулю быстрее чем $1/r^2$, где $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$). Рассмотрим цилиндр C в пространстве Минковского, основания D_1 и D_2 которого заданы уравнениями $x^0 = x_1^0$ и $x^0 = x_2^0$, а радиус R достаточно велик. Пусть Π — боковая поверхность цилиндра. Из условия $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ и формулы Стокса следует, что $\int\limits_C T_i^k dS_k = 0$ при каждом i. Поэтому

$$\left(\int\limits_{D_2} - \int\limits_{D_1} + \int\limits_{\Pi}\right) T_i^k dS_k = 0.$$

Интеграл по боковой поверхности Π можно не учитывать (стремится к нулю, когда радиус цилиндра R стремится к бесконеч-

ности). При $R \to \infty$ получаем

$$P_i(x_1^0) = \int\limits_{x^0=x_1^0} T_i^k dS_k = \int\limits_{x^0=x_2^0} T_i^k dS_k = P_i(x_2^0).$$

Утверждение доказано.

Лемма 1. *Вектор импульса системы не меняется при замене* T_i^k *на* $\tilde{T}_i^k = T_i^k + \sum\limits_l \frac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^l}$, *где* ψ_i^{kl} *— тензор, кососимметрический по* k, l.

Доказательство. Компоненты P_i имеют вид $\lambda \int\limits_{x^0=\text{const}} T_i^k dS_k$; следовательно, надо доказать, что $\int \frac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^l} dS_k = 0$.

В силу косой симметричности ψ_i^{kl} по k, l имеем

$$\int\limits_S \frac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2} \int\limits_S \left(dS_k \frac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi_i^{kl}}{\partial x^k} \right).$$

Справа стоит интеграл вида $\int\limits_S d\omega_i^{(2)}$, где $\omega_i^{(2)}$ есть 2-форма на трехмерной поверхности S, задаваемой уравнением $x^0 = \text{const}$. В силу формулы Стокса $\int\limits_S d\omega_i^{(2)} = \int\limits_{\partial S} \omega_i^{(2)}$, где ∂S — двумерная замкнутая поверхность в S (граница, «удаленная на бесконечность»), а потому $\int\limits_{\partial S} \omega_i^{(2)} = 0$. Лемма доказана.

Если нам дана система с лагранжианом L, то ее тензор энергии-импульса $T^{ik} = g^{is} T_s^k$ в физически интересных примерах можно сделать симметричным тензором, не меняя вектора импульса. Пусть тензор T^{ik} симметричен.

Выведем из симметричности тензора T^{ik} так называемый «закон сохранения момента импульса».

Определение 4. *Моментом импульса* называется тензор

$$M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int\limits_{x^0=\text{const}} (x^i T^{kl} - x^k T^{il})\, dS_l.$$

Здесь интегрирование выполняется по трехмерной области S. Эта формула является естественным обобщением классической формулы для момента импульса, вычисленного для системы частиц (см. § 32)

$$M^{ik} = \sum (P^k x^i - P^i x^k),$$

где суммирование выполняется по всем частицам системы.

Лемма 2. *Если тензор энергии-импульса T^{ik} симметричен, то тензор M^{ik} момента импульса сохраняется* *).

Доказательство. Как и выше, мы должны доказать, что

$$M^{ik}(x_1^0) = \frac{1}{c}\int\limits_{D_1}(x^iT^{kl} - x^kT^{il})\,dS_l$$

совпадает с

$$M^{ik}(x_2^0) = \frac{1}{c}\int\limits_{D_2}(x^iT^{kl} - x^kT^{il})\,dS_l,$$

где D_1 и D_2 задаются, например, уравнениями $x^0 = x_1^0$, $x^0 = x_2^0$. В силу сделанных ранее замечаний и формулы Стокса достаточно убедиться в том, что дивергенция подынтегрального выражения в M^{ik} равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^iT^{kl} - x^kT^{il}) = 0.$$

Вычисляя производные, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^iT^{kl} - x^kT^{il}) = T^{ki} - T^{ik} = 0$$

в силу симметричности тензора T^{ik} и уравнения $\dfrac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} = 0$. Лемма доказана.

Перейдем к конкретным примерам многомерных вариационных задач.

3. Уравнения электромагнитного поля. Уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для функционала действия $S = S_f + S_m + S_{mf}$, которое мы сейчас опишем. Слагаемое S_m — это та часть действия, которая определяется только самими частицами (зарядами), движущимися в поле (т. е. S_m — это действие частиц в отсутствие поля). Обычно это действие определяется так: $S_m = -\sum mc\int\limits_a^b dl$, где сумма берется по всем частицам, движущимся в поле, m — масса частицы, c — скорость света, интеграл $\int\limits_a^b dl$ берется вдоль мировой линии в $\mathbb{R}^4_{1,3}$ между двумя фиксированными событиями: нахождением частицы в начальном и ко-

*) Правильнее было бы сказать, что общефизическое определение сохраняющегося момента сведется к приведенной выше наглядной формуле, если тензор энергии-импульса симметричен.

нечном положениях в моменты времени t_1, t_2; l — длина дуги. Это действие можно представить в трехмерном виде: $S_m = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, где L — функция Лагранжа, $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, v — трехмерная скорость (см. § 32).

Слагаемое S_{mf} — это та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем. Обычно это действие определяется так: $S_{mf} = -\sum_{(j)} \frac{e_j}{c}\int A_h^{(j)} dx^h$, где сумма берется по всем частицам j, e_j — заряды, интеграл берется вдоль мировой линии частицы (как и предыдущий интеграл). Свойства поля характеризуются 4-вектором $\{A_i\}$, который обычно называется 4-потенциалом; его компоненты A_i зависят от времени и пространственных координат. В интеграле S_{mf} значения вектора $\{A_i\}$ вычисляются в точках мировой линии частицы j, вдоль которой ведется интегрирование. Свойства частицы j с точки зрения ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются только одним параметром — зарядом e_j, который и включен в действие S_{mf}. Итак, действие $S_m + S_{mf}$ для заряда в электромагнитном поле принимает вид

$$\int_a^b \left(-mc\, dl - \frac{e}{c} A_h dx^h\right).$$

Слагаемое S_f — это та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля; иными словами, S_f есть действие для поля в отсутствие зарядов. Слагаемое S_f несущественно, если мы интересуемся только движением зарядов в данном электромагнитном поле, но это слагаемое становится существенным, как только мы ставим задачу о нахождении уравнений, определяющих само поле.

Напомним, что три пространственные компоненты $\{A^1, A^2, A^3\}$ 4-вектора образуют трехмерный вектор $\mathbf{A}$, называемый *векторным потенциалом* поля. Временна́я компонента A^0 имеет вид $A^0 = \varphi$, где вещественная функция φ называется *скалярным потенциалом* поля. Здесь индексы поднимаются при помощи метрики Минковского.

Напомним также, что *напряженностью электрического поля* называется вектор $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}(\varphi)$ (это трехмерный вектор). Далее, *напряженностью магнитного поля* называется (по определению) трехмерный вектор $\mathbf{H} = \operatorname{rot}(\mathbf{A})$. Электромагнитное поле, у которого $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$, называется *электрическим полем*; если же $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$, то говорят о *магнитном поле*.

Как обычно, обозначим через $F_{ik}=\dfrac{\partial A_k}{\partial x^i}-\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ *тензор электромагнитного поля.* Тогда действие S_f (см. выше) принимается равным

$$S_f = a\int 2\,(E^2-H^2)\,d^4x,$$

где $H^2=\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle$, $E^2=\langle \mathbf{E}, \mathbf{E}\rangle$ — скалярные квадраты трехмерных векторов; a — некоторая постоянная; интеграл берется по всем пространственным координатам и по всему трехмерному пространству, а по переменной x^0 (пропорциональной времени) — между двумя фиксированными моментами. Напомним, что $F_{ik}^2\equiv F_{ik}F^{ik}=2\,(H^2-E^2)$ (F_{ik} — кососимметричный тензор). Постоянная a обычно выбирается равной $-1/16c\pi$. Тогда

$$S_f=\frac{1}{16c\pi}\int 2\,(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2)\,d^4x=-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2 d^4x.$$

Итак, полное действие S для электромагнитного поля с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S=-\sum\int mc\,dl-\sum\int\frac{e}{c}A_k dx^k-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2 d^4x.$$

До сих пор мы рассматривали заряды как точечные, однако иногда удобно считать заряд распределенным во всем пространстве непрерывным образом. Если ρ — плотность заряда, то тогда $\rho\,dV$ — заряд, находящийся в объеме $dV=d^3x$ (в трехмерном пространстве); ρ зависит от x^1, x^2, x^3 и времени t.

Рассмотрим мировые линии зарядов в $\mathbb{R}_1^4$, и пусть $\dfrac{dx^i}{dt}$ есть 4-вектор скорости зарядов. Тогда 4-вектор j^i, где $j^i=\rho\dfrac{dx^i}{dt}$, называется *4-вектором тока.*

Три пространственные компоненты j^1, j^2, j^3 этого 4-вектора образуют обычный трехмерный вектор тока $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость заряда в данной точке. Составляющая j^0 равна $c\rho$. Прямое вычисление показывает, что в терминах вектора тока j^i действие можно записать в виде

$$S=-\sum\int mc\,dl-\frac{1}{c^2}\int A_i j^i d^4x-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2 d^4x$$

(проверьте!).

Теперь перейдем к нахождению уравнений поля. При этом будем считать заданным движение зарядов. Это означает, что при выводе уравнений Эйлера варьированию должны подвергаться только потенциалы поля (т. е. 4-вектор потенциала A_i).

Итак, поскольку траектории зарядов не варьируются, то $\delta S_m=0$, а в слагаемом S_{mf} не должен варьироваться ток j^i, так

как $j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$. Имеем

$$\delta S = \delta (S_{mf} + S_f) = -\int \left(\frac{1}{c^2} j^i \delta A_i + \frac{1}{16c\pi} \delta (F_{ih}^2) \right) d^4x =$$

$$= -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ih} \delta F_{ih} \right\} d^4x = 0.$$

Так как $F_{ih} = \frac{\partial A_h}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^h}$, то

$$\delta S = -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ih} \delta \left(\frac{\partial A_h}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^h} \right) \right\} d^4x =$$

$$= -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{8\pi} F^{ih} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta A_h) - \frac{1}{8\pi} F^{ih} \frac{\partial}{\partial x^h} (\delta A_i) \right\} d^4x.$$

Поскольку $F_{ih} = -F_{hi}$, то

$$\delta S = -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i - \frac{1}{4\pi} F^{ih} \frac{\partial}{\partial x^h} (\delta A_i) \right\} d^4x.$$

Второй интеграл преобразуем путем интегрирования по частям:

$$\delta S = -\int \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{c} j^i \delta A_i + \frac{1}{4\pi} \delta A_i \frac{\partial F^{ih}}{\partial x^h} \right\} d^4x - \frac{1}{4\pi c} \int F^{ih} \delta A_i dS_h \Big|_P^Q.$$

В последнем слагаемом интегрирование выполняется по границе четырехмерной области; при этом границей области по пространственным координатам является «бесконечность», где поля аннулируются (а потому и $F^{ih} \equiv 0$); границей области по времени являются два фиксированных момента времени t_1, t_2; в этих точках аннулируются вариации потенциалов $\{\delta A_i\}$.

Таким образом, последнее слагаемое равно нулю. Итак, $\int \left(\frac{1}{c} j^i + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ih}}{\partial x^h} \right) \delta A_i d^4x = 0$. В силу произвольности вариаций δA_i получаем

$$\frac{\partial F^{ih}}{\partial x^h} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{9}$$

Это уравнения Эйлера — Лагранжа, возникающие при варьировании потенциалов полей в действии S. Запишем полученные четыре уравнения ($i = 0, 1, 2, 3$) в трехмерной форме. Напомним явный вид тензора F^{ih}:

$$(F^{ih}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

(тензор записан в координатах $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, см. § 21). Первое уравнение (при $i = 1$) имеет, следовательно, вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^1.$$

Отсюда $-\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} j_x$. Аналогично преобразуются и уравнения для $i = 2, 3$, что окончательно дает

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{10}$$

Нулевое уравнение (при $i = 0$) дает

$$\frac{\partial (E_x)}{\partial x} + \frac{\partial (E_y)}{\partial y} + \frac{\partial (E_z)}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} c\rho,$$

т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{11}$$

Уравнения (10), (11) и образуют вторую пару уравнений Максвелла. Напомним первую пару уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{13}$$

Уравнения (10)—(13) определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями электродинамики.

Найдем теперь явное выражение для тензора энергии-импульса электромагнитного поля при условии отсутствия заряда. Действие S, имеет вид $-\frac{1}{16c\pi}\int F_{ik}^2 d^4x$, поэтому в терминах п. 2 настоящего параграфа функция L имеет вид

$$L = -\frac{1}{16c\pi} F_{ik}^2 = -\frac{1}{16c\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right)^2.$$

Роль величин f^j (см. п. 2) играют здесь компоненты потенциала A_l. Следовательно, по определению тензора энергии-импульса T_j^k получаем

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)} - \delta_i^k L.$$

Найдем $\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)}$. Для этого вычислим дифференциал dL. Имеем

$$dL = -\frac{1}{8\pi c} F^{kl}\left(d\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - d\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi c}\left(F^{kl} d\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - F^{kl} d\frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right) = -\frac{1}{4\pi c} F^{kl} d\frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

Отсюда $\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)} = -\dfrac{1}{4\pi c} F^{kl}$; следовательно,

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi c}\delta_i^k F_{lm}F^{lm}.$$

Поднимая индекс i при помощи метрики Минковского g^{ik}, получим

$$T^{ik} = -\frac{g^{im}}{4\pi c}\frac{\partial A_l}{\partial x^m} F^{kl} + \frac{1}{16\pi c} g^{ik} F_{lm}F^{lm}.$$

Полученный тензор энергии-импульса пока что не симметричен. Выше мы предъявили один из рецептов удаления кососимметричной части тензора T^{ik}. Применив этот рецепт в нашем случае, вычтем из T^{ik} сумму вида $\dfrac{1}{4\pi c}\dfrac{\partial A^i}{\partial x^l} F^{kl}$, которую можно представить как $\dfrac{\partial}{\partial x^l}(\psi^{ikl})$ (см. выше). В самом деле,

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^l} F^{kl} = \frac{\partial}{\partial x^l}(A^i F^{kl}) - A^i\frac{\partial F^{kl}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}(A^i F^{kl}),$$

так как $\dfrac{\partial F^{kl}}{\partial x^l} = 0$ в силу уравнений Максвелла, описывающих поле в отсутствие зарядов ($j = 0$).

Как было показано в п. 2, величина $\dfrac{\partial}{\partial x^l}(\psi^{ikl})$ может быть добавлена к тензору энергии-импульса без изменения вектора импульса системы.

Так как $\dfrac{\partial A_l}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x^l} = F_{il}$, то окончательно для симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля получаем

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi c}\left(-F^{il}F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm}F^{lm}\right). \qquad (13')$$

Задача. Пусть плотность зарядов ρ равна нулю, вектор-потенциал электромагнитного поля A_i зависит от одной пере-

менной x и имеет вид $A_i(x-ct)$, $i=0, 1, 2, 3$. Если $A_i(x)$ — гладкая функция, при всех x ограниченная по модулю общей константой, то все алгебраические инварианты (собственные значения) электромагнитного поля тождественно равны нулю (доказать!). Это случай электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси x.

4. Уравнения гравитационного поля. Пусть в M^4 задана метрика g_{ij} и Γ^i_{jk} — симметричная связность, согласованная с этой метрикой. Через x^0, x^1, x^2, x^3 обозначим криволинейные координаты в M^4. В физике квадрат элемента длины dl^2 в M^4 отождествляют с гравитационным полем, $dl^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, $g_{ij}=g_{ji}$. Пусть $g=\det(g_{ij})$. В инерциальной системе отсчета при использовании евклидовых пространственных координат $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ и времени $x^0=ct$ получим $dl^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$ (напомним, что такие координаты называются псевдоевклидовыми). Пространство-время, в котором глобально введены такие координаты, называется *плоским*.

Мы будем в дальнейшем рассматривать в M^4, вообще говоря, переменную псевдоримانову метрику (такое пространство-время M^4 иногда называют *кривым*, в отличие от плоского). Однако в каждой отдельной точке $x_0\in M^4$ можно, конечно, привести g_{ij} к диагональному виду путем соответствующего преобразования координат в некоторой окрестности точки x_0. После приведения к диагональному виду матрица метрического тензора g_{ij} имеет одно положительное и три отрицательных собственных значения, а потому $g=\det(g_{ij})<0$.

Пусть $d\Omega=\sqrt{-g}\,d^4x$ — стандартная 4-форма объема. Через $R^i{}_{jkl}$ обозначим *тензор кривизны Римана*, построенный по аффинной связности Γ^i_{jk}, согласованной с g_{ij}. Напомним (см. § 30), что после опускания верхнего индекса у тензора $R^i{}_{jkl}$ получается следующая явная формула, выражающая R_{ijkl} через g_{ij} и производные метрического тензора:

$$R_{iklm}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right).$$

Для *тензора Риччи* $R_{ik}=R^q{}_{iqk}=g^{lm}R_{limk}$ легко получить следующее выражение:

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$$

(проверьте!). Напомним также, что *скалярной кривизной* R называется следующий инвариант:

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{il}g^{km}R_{iklm}.$$

Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля можно получить как уравнения Эйлера—Лагранжа при варьировании действия (Гильберта) этого поля. Опишем этот функционал действия S_g. Считается, что $S_g = \int R\, d\Omega$, где интеграл берется по всему трехмерному пространству (x^1, x^2, x^3) и по временной координате x^0 в пределах $x_1^0 \leqslant x^0 \leqslant x_2^0$.

Теорема 2. *Имеет место тождество*

$$\frac{\delta \int R \sqrt{|g|}\, d^4x}{\delta g^{ij}} = \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}\right) \sqrt{|g|},$$

так что

$$\delta S_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}\right) \delta g^{ik} \sqrt{|g|}\, d^4x.$$

Доказательство. Выражение для S_g можно несколько упростить, избавившись от вторых производных $\partial^2 g_{ik}/\partial x^p \partial x^q$, входящих в инвариант R. После этого упрощения (которое мы сейчас выполним) подынтегральное выражение будет содержать только тензор g_{ik} и символы Кристоффеля Γ^i_{jk}.

Имеем

$$R\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\, g^{ik} R_{ik} =$$

$$= \sqrt{-g}\left(g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik} \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} - g^{ik} \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km}\right).$$

Преобразуем первые две суммы:

$$\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^l_{ik} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right),$$

$$\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{il}\right) - \Gamma^l_{il} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right).$$

Полные производные (точнее, дивергенции) $\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{ik}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{il}\right)$ можно отбросить без ущерба для вариации δS_g. Дело в том, что интегралы

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{ik}\right) d^4x, \quad \int_D \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{il}\, d^4x$$

равны нулю. В самом деле, пользуясь формулой Стокса, эти интегралы можно преобразовать к интегралам по границе ∂D области D. Так как при варьировании S_g мы должны варьировать g_{ik} (рассматривая их как независимые переменные), то

вариации δg_{ik} должны быть равны нулю на ∂D (см. выше вывод уравнений Эйлера — Лагранжа); следовательно, $\delta\left(\int\limits_{\partial D}\right) = 0$. Итак, можно считать, что $\delta\left(\int R\, d\Omega\right) = \delta\left(\int G\sqrt{-g}\, d^4x\right)$, где

$$G\sqrt{-g} = \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right) - \\ - \left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) g^{il}\sqrt{-g}. \quad (14)$$

Поскольку связность Γ^i_{jh} согласована с метрикой, то имеет место тождество

$$g^{hl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, g^{ih}\right)$$

(проверьте!). Разделив (14) на $\sqrt{-g}$, получим

$$G = -\Gamma^l_{il}\Gamma^i_{kp}g^{kp} - \Gamma^l_{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right) - \left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) g^{ik}.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$-\Gamma^l_{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right) = \Gamma^l_{ik}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial x^l}g^{ik} - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = \\ = -\Gamma^l_{ik}g^{ik}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}$. Напомним далее, что $\frac{\partial g^{ih}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mh} - \Gamma^h_{ml}g^{im}$. Отсюда

$$-\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{lp}g^{ik} - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{lp}g^{ik} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{ml}g^{im} = \\ = -\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk} + \Gamma^i_{ml}\Gamma^l_{ki}g^{km} = \\ = -\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} + 2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk}.$$

Отсюда

$$G = 2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} - \Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl} - g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = \\ = g^{ik}\left(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ki}\right) - g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = \\ = 2g^{ik}\left(\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{il} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) - g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = \\ = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{mk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right).$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.

$$\delta\left(\int R\sqrt{|g|}\,d^nx\right)=\delta\left(\int g^{ih}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{mk}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)\sqrt{|g|}\,d^nx.\right.$$

Еще раз поясним, что гравитационное поле определяется метрическим тензором g_{ij}, а потому при вариации действия варьированию должны подвергаться компоненты g_{ij}, рассматриваемые как независимые переменные.

Найдем δS_g (варьированию подвергается только гравитационное поле, т. е. метрика). Имеем

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x=\delta\int g^{ih}R_{ih}\sqrt{-g}\,d^4x=$$
$$=\int\left(R_{ih}\sqrt{-g}\,\delta g^{ih}+R_{ih}g^{ih}\delta\left(\sqrt{-g}\right)+g^{ih}\sqrt{-g}\,\delta R_{ih}\right)d^4x.$$

Найдем δg^{ih}. Если Δ^{ih} — алгебраическое дополнение элемента g_{ih} в матрице $(g_{\alpha\beta})$, то $g=\sum\limits_i g_{ih}\Delta^{ih}$ (по определению g), где суммирование происходит только по i, а k фиксировано. Ясно, что $\delta g=(\delta g_{ih})\Delta^{ih}$ (суммирование по i, k), так как дифференциал δg_{ih} каждой компоненты g_{ih} нужно умножить (при приведении подобных членов) на коэффициент при этой компоненте в выражении для g, т. е. на Δ^{ih}. Так как $g^{ih}=\dfrac{\Delta^{ih}}{g}$, то $\Delta^{ih}=gg^{ih}$, откуда $\delta g=gg^{ih}\delta g_{ih}$. Так как $g^{ih}g_{ih}=\delta^i_i=4$, то $(\delta g^{ih})g_{ih}+g^{ih}(\delta g_{ih})=0$, т. е. $\delta g=-gg_{ih}\delta g^{ih}$. Таким образом,

$$\delta\left(\sqrt{-g}\right)=\frac{-1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,g\cdot g_{ih}\delta g^{ih}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ih}\delta g^{ih}.$$

Отсюда

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x=$$
$$=\int\left(R_{ih}-\frac{1}{2}Rg_{ih}\right)\delta g^{ih}\sqrt{-g}\,d^4x+\int g^{ih}(\delta R_{ih})\sqrt{-g}\,d^4x.$$

Найдем теперь δR_{ik}. Предварительно заметим, что вариации $\delta\Gamma^i_{jk}$ образуют тензор (напомним, что символы Кристоффеля Γ^i_{jk} тензора не образуют). Действительно, по определению операции $\nabla_\xi=\xi^i\nabla_i$ ковариантного дифференцирования вдоль векторного поля ξ получаем $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)=\Gamma^k_{ij}\partial_k$, где ∂_i — стандартные координатные векторные поля: $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Таким образом, Γ^i_{jk} — коэффициенты разложения вектора, перенесенного параллельно вдоль координатной линии. Выражение $\delta\Gamma^h_{ij}\partial_h$ является, следовательно, разностью двух векторов, полученных параллельным

переносом из точки Q в точку $\tilde{Q}$ вдоль координатной линии двумя способами: при помощи исходной связности Γ^k_{ij} и при помощи проварьированной связности $\Gamma^k_{ij} + \delta\Gamma^k_{ij}$. Так как разность двух векторов, вычисленная в одной и той же точке $\tilde{Q}$, есть вектор, то величины $\delta\Gamma^k_{ij}$ образуют тензор.

Для подсчета вариации δR_{ik} фиксируем произвольную точку и введем в некоторой окрестности этой точки систему координат, инерциальную в этой точке (см. задачу 4 из § 29). Это означает, что в этой точке $\Gamma^k_{ij} = 0$, так как $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(g^{ik}) = 0$ в выбранной точке. Имеем

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \delta\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right) g^{ik} =$$

$$= g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}(\delta\Gamma^l_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(\delta\Gamma^l_{il})\right) = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\delta\Gamma^l_{ik}) - g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}(\delta\Gamma^k_{ik}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l}(g^{ik}\delta\Gamma^l_{lk} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}) = \frac{\partial W^l}{\partial x^l},$$

$$W^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}.$$

Так как $\delta\Gamma^i_{jk}$ — тензор, то величины W^l также образуют тензор (вектор), а потому его дивергенция $\frac{\partial W^l}{\partial x^l}$ в нашей специальной системе координат (инерциальной в выбранной точке) не изменится при переходе к любой другой криволинейной системе координат. При этом, конечно, следует использовать инвариантное определение $\operatorname{div} T = \nabla_i T^i$, так как величина $\frac{\partial}{\partial x^i}(T^i)$ не носит тензорного характера (относительно произвольных замен). Напомним (см. § 29), что явная формула для $\operatorname{div} T$ в произвольной системе координат относительно римановой симметричной связности) такова:

$$\nabla_i T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^l\frac{\partial}{\partial x^l}(\ln\sqrt{-g}) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,T^l).$$

Получаем $g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,W^l)$. Таким образом, интеграл $\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d^4x$ преобразован нами к следующему виду: $\int\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,W^l)\,d^4x$. В силу формулы Стокса этот интеграл превращается в интеграл по границе четырехмерной области ∂D от W^l. Так как на ∂D вариация поля равна нулю, то этот интеграл

также равен нулю. Окончательно получаем

$$\delta S_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Теорема 2 доказана.

Обычно действие S_g записывают с коэффициентом λ специального вида $\lambda = \frac{c^3}{16\pi G}$, где c — скорость света, G — так называемая «гравитационная постоянная». Тогда

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Полное действие вместе с материей имеет вид $S_g + S_m = S_{\text{полное}}$.

Теперь рассмотрим вариацию δS_m. Действие S_m обычно записывается (в криволинейных координатах) в виде $\frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g}\, d^4x$, где Λ — функция, определяемая свойствами материи, зависящая от метрики и полей, определяющих материю. (Напомним, что интегрирование осуществляется по всему трехмерному пространству x^1, x^2, x^3, а по времени x^0 — между двумя фиксированными моментами, т. е. по бесконечной четырехмерной области, заключенной между двумя гиперповерхностями $x^0 = x_1^0$, $x^0 = x_2^0$; x_1^0, x_2^0 — некоторые постоянные.) Итак,

$$\frac{1}{\lambda \sqrt{|g|}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{ik}} = R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^3} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} \frac{2}{c\sqrt{|g|}}. \qquad (15)$$

Это уравнение гравитационного поля, если величина $-\frac{2}{c\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}}$ известна. Заметим, что эти уравнения нелинейны, а потому сумма двух решений (полей) не обязана быть решением.

В теории относительности принимается, что величина $-\frac{2}{c\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} = T_{ik}$ является тензором энергии-импульса системы. Для физически важных полей (например, электромагнитного) выражение

$$-\frac{2}{c\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ik}} \Bigg|_{g^{ik} = g^{ik}_{\text{Минковского}}}$$

совпадает с ранее введенным симметричным тензором энергии-импульса. Действительно,

$$cS_m = \int \Lambda \sqrt{|g|}\, d^4x = \lambda \int F_{ik} F^{ik} \sqrt{|g|}\, d^4x =$$

$$= \lambda \int F_{ik} g^{ip} g^{kj} F_{pj} \sqrt{|g|}\, d^4x = \int \Lambda (g_{ab};\ F_{ik}) \sqrt{|g|}\, d^4x.$$

Очевидно, имеем (проверьте!)

$$-\frac{2}{c}\delta S_m = \int \frac{1}{4\pi c}\left(-F_i^l F_{lk} + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm}\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x.$$

Подынтегральное выражение совпадает с выражением (13′).

В случае так называемого пустого пространства (в отсутствие материи) $T_{ik} = 0$, и тогда уравнения гравитационного поля принимают вид $R_{ik} = 0$. В самом деле, из (15) можно получить $g^{i\alpha} R_{ik} - \frac{1}{2} R\delta_k^\alpha = \frac{8\pi G}{c^4} g^{i\alpha} T_{ik}$, т. е. $R_k^\alpha - \frac{1}{2} R\delta_k^\alpha = \frac{8\pi G}{c^4} T_k^\alpha$. Сворачивая по (α, k), получаем $R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4} T$, где $T = T_\alpha^\alpha$, т. е. $R = -\frac{8\pi G}{c^4} T$, и уравнения нашего поля принимают вид $R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right)$. Если $T_{ik} = 0$, то и $R_{ik} = 0$. Из уравнения $R_{ik} = 0$ отнюдь не следует, что пустое пространство-время является плоским: равенства нулю тензора Риччи для этого недостаточно. Плоскость пространства-времени вытекала бы из равенства нулю всего тензора кривизны Римана R^i_{jkl}. Если бы пространство-время было трехмерно, то пустое пространство было бы обязательно плоским, поскольку в этом случае тензор Римана выражается через тензор Риччи (формула (30.18)). В двумерном случае из приведенных вычислений вытекает следующая

Теорема 3. *Величина* $S[g] = \int K dS$, *где* $dS = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2$, *а* K *— гауссова кривизна, не меняется при локальном изменении метрики* g_{ij}, $i, j = 1, 2$.

Доказательство. В двумерном случае имеем $K = R/2$, $R_{ij} = \frac{1}{2} R g_{ij} = K g_{ij}$. Вариация функционала S равна (см. выше)

$$\delta S = \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}\right) \delta g^{ij} dS = 0.$$

Теорема доказана.

Для замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^3$ локальность изменения метрики несущественна, поэтому получаем

Следствие (Гаусс — Бонне). *Интеграл от гауссовой кривизны по замкнутой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве не меняется при гладкой деформации поверхности:*

$$\int K\, dS = \text{const}.$$

Численное значение этой константы будет вычислено в части II.

5. Мыльные пленки. Рассмотрим гладкую гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, заданную, например, в виде графика $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Пусть областью определения функции f является ограниченная область D в $\mathbb{R}^{n-1}$; рассмотрим функционал площади $S[f]$, определенный на пространстве всех таких функций f: $S[f] = \int\limits_D \sqrt{|\det A|}\, d^{n-1}x$. Здесь $A = (g_{ij}(x))$, $x \in D$,— индуцированная риманова метрика на поверхности V^{n-1}, а $d^{n-1}x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$, где $x^1, \ldots, x^{n-1}$ — евклидовы координаты в D. Лагранжиан $\sqrt{|\det A|}$ можно записать в явном виде через функцию f.

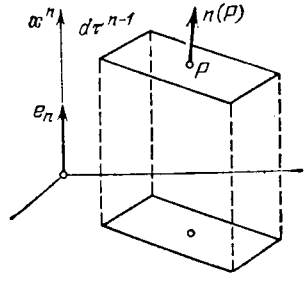


Рис. 38

Пусть $d\tau^{n-1}$ — форма $(n-1)$-мерного объема на V; тогда $S[f] = \int\limits_D d\tau^{n-1}$. Пусть $P \in V^{n-1}$; $n(P)$ — единичная нормаль к V^{n-1} в точке P, $\alpha(P)$ — угол между $n(P)$ и $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ (рис. 38); тогда

$$S[f] = \int\limits_D d\tau^{n-1} = \int\limits_D \frac{d^{n-1}x}{\cos\alpha(P)}.$$

Далее,

$$\cos\alpha(P) = \langle e_n, n(P)\rangle = \left\langle (0, \ldots, 0, 1), \right.$$

$$\left. \left(\frac{-f_{x^1}}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}}, \ldots, \frac{-f_{x^{n-1}}}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}} \right) \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}}.$$

Итак, $S[f] = \int\limits_D \sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$.

Рассмотрим экстремальные поверхности V^{n-1} для функционала площади $S[f]$ (т. е. графики экстремальных функций $x^n = f(x)$, $x \in D$). Уравнение Эйлера — Лагранжа (здесь $k = 1$) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} (f_{x^j})^2}} \right) = 0. \qquad (16)$$

Определение 5. Поверхности, являющиеся экстремальными для функционала площади S, называются *минимальными поверхностями.*

Замечание. Минимальные поверхности моделируются, например, в $\mathbb{R}^3$ с помощью мыльных пленок, затягивающих замкнутый проволочный контур (в отсутствие силы тяжести).

Для двумерной минимальной поверхности, заданной в виде графика $z=f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, уравнение (16) приобретает вид

$$(1+f_x^2)f_{yy}-2f_{xy}f_xf_y+(1+f_y^2)f_{xx}=0$$

(проверьте!).

Уравнение минимальной поверхности V^{n-1} допускает запись на языке локальных инвариантов вложения этой поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *Пусть $V^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ — гладкая гиперповерхность. Средняя кривизна H равна тождественно нулю тогда и только тогда, когда V^{n-1} можно представить в окрестности каждой своей точки в виде графика экстремальной функции для функционала площади (т. е. решения уравнения минимальной поверхности).*

Таким образом, условие $H\equiv 0$ и есть условие минимальности поверхности $V^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы сводится к прямому вычислению средней кривизны $H=\operatorname{Sp}(A^{-1}Q)$ для графика $x^n=f(x)$, где A, Q — матрицы первой и второй квадратичных форм соответственно, и проверке факта, что уравнение $H=0$ совпадает с уравнением Эйлера — Лагранжа (16).

Мы не будем проводить здесь это вычисление в общем случае, а рассмотрим только специальный случай: двумерная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Зададим поверхность $V^2\subset\mathbb{R}^3$ радиус-вектором $r=r(u, v)$ (по крайней мере локально). Тогда $S[r]=\int\limits_{D(u,v)}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$, где $\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}$ — матрица первой квадратичной формы:

$$E=\langle r_u, r_u\rangle;\quad F=\langle r_u, r_v\rangle;\quad G=\langle r_v, r_v\rangle.$$

Средняя кривизна H имеет вид

$$H=\operatorname{Sp}(A^{-1}Q)=\frac{1}{EG-F^2}(GL-2FM+EN),$$

где $\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}$ — матрица второй квадратичной формы:

$$L=\langle r_{uu}, n\rangle,\quad M=\langle r_{uv}, n\rangle,\quad N=\langle r_{vv}, n\rangle,$$

n — единичная нормаль к поверхности.

Выберем на V^2 (локально) конформные (изотермические) координаты. Существование таких локальных координат для вещественно аналитических метрик A было доказано нами ранее (см. § 13). Для простоты будем считать, что u, v — уже конформные координаты.

В конформных координатах $F=0$ и $E=G$; следовательно,

$$S[r]=\iint_D \sqrt{\langle r_u, r_u\rangle \langle r_v, r_v\rangle}\,du\,dv=$$
$$=\iint_D \sqrt{(x_u^2+y_u^2+z_u^2)(x_v^2+y_v^2+z_v^2)}\,du\,dv.$$

Далее, $H=\frac{1}{E}(L+N)=\frac{1}{E}\langle r_{uu}+r_{vv}, n\rangle=\frac{1}{E}\langle \Delta r, n\rangle$, где Δ — оператор Лапласа.

Рассмотрим уравнения Эйлера — Лагранжа для $S[r]$ в координатах u, v. При этом следует иметь в виду, что возможность записать уравнение Эйлера — Лагранжа в конформных координатах следует из того, что при варьировании функционала $S[r]$ с помощью возмущения η можно считать все функции $r(u, v)+\varepsilon\eta(u, v)$ отнесенными к конформным координатам. Для этого достаточно ввести конформные координаты u_ε, v_ε на каждой поверхности $r(u, v)+\varepsilon\eta(u, v)$ (дело в том, что координаты u, v, вообще говоря, уже не конформны на возмущенной поверхности $r+\varepsilon\eta$). Координаты $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ можно считать гладко зависящими от ε.

Уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}(x_u)+\frac{\partial}{\partial v}(x_v)=0,\\&\frac{\partial}{\partial u}(y_u)+\frac{\partial}{\partial v}(y_v)=0,\\&\frac{\partial}{\partial u}(z_u)+\frac{\partial}{\partial v}(z_v)=0\end{aligned}\right\},\quad \text{т. е. } \Delta r=0.$$

Радиус-векторы r, удовлетворяющие уравнению $\Delta r=0$, называются *гармоническими*. Таким образом, в конформных координатах «минимальность радиус-вектора» (т. е. его экстремальность для функционала площади) означает его гармоничность.

Замечание. Говорить о гармоничности радиус-вектора $r(u, v)$ можно только относительно какой-либо системы координат (в данном случае эти координаты конформны). При изменении координат свойство гармоничности, вообще говоря, разрушается.

Итак, поскольку $\Delta r=0$, то $H=\frac{1}{E}\langle \Delta r, n\rangle=0$, и мы доказали интересующее нас утверждение в одну сторону.

Обратно, пусть $II \equiv 0$, мы должны доказать, что $\Delta r = 0$ (в конформных координатах). Так как $\langle \Delta r,\ n\rangle = 0$, то достаточно проверить еще два равенства: $\langle \Delta r,\ r_u\rangle = 0$, $\langle \Delta r,\ r_v\rangle = 0$. Отсюда будет следовать, что $\Delta r = 0$. В самом деле, векторы n, r_u, r_v образуют репер в любой регулярной точке поверхности $r(u, v)$ (по определению поверхности). В силу выбора координат $E = G$ и $F = 0$, т. е. $\langle r_u,\ r_u\rangle = \langle r_v,\ r_v\rangle$ и $\langle r_u,\ r_v\rangle = 0$. Дифференцируя по u и v, получаем

$$\begin{aligned} \langle r_{uu},\ r_u\rangle &= \langle r_{uv},\ r_v\rangle, \\ \langle r_{uv},\ r_u\rangle &= \langle r_{vv},\ r_v\rangle, \\ \langle r_{uu},\ r_v\rangle + \langle r_u,\ r_{uv}\rangle &= 0, \\ \langle r_{uv},\ r_v\rangle + \langle r_u,\ r_{vv}\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Нам следует проверить тождества

$$\langle r_{uu},\ r_u\rangle + \langle r_{vv},\ r_u\rangle = 0,$$
$$\langle r_{uu},\ r_v\rangle + \langle r_{vv},\ r_v\rangle = 0.$$

Два последних уравнения, очевидно, вытекают из (17). Тем самым доказано

Утверждение 2. *Двумерная поверхность тогда и только тогда описывается минимальным радиус-вектором, когда $II \equiv 0$. В конформных координатах минимальный радиус-вектор становится гармоническим.*

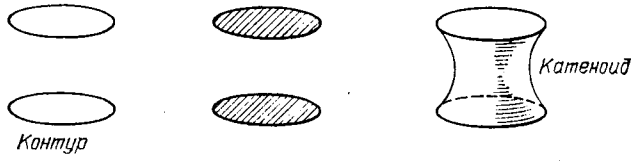


Рис. 39

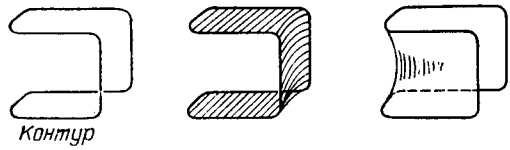


Рис. 40

Структура минимальных поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ довольно сложна; например, если фиксирован граничный контур $S^1 \subset \mathbb{R}^3$, то, вообще говоря, на него можно натянуть много «мыльных пленок» (т. е. нет теоремы единственности решения для дифференциального уравнения $H \equiv 0$ или $\Delta r = 0$). Примеры см. на рис. 39, 40.

Решения уравнений $H=0$, $\Delta r=0$ могут иметь особенности. Пример («тройной лист Мёбиуса») см. на рис. 41, 42.

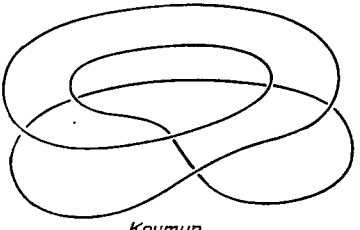


Рис. 41

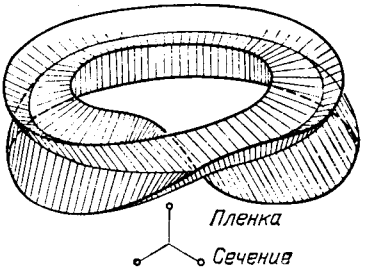


Рис. 42

Гармонические радиус-векторы являются решениями уравнения Эйлера — Лагранжа для еще одного многомерного (двумерного) функционала.

Функционал Дирихле. Рассмотрим трехмерный радиус-вектор $r(u, v)$ (координаты u, v произвольны). Функционалом Дирихле называется следующий функционал:

$$D[r]=\int\limits_{D(u,v)}\frac{E+G}{2}\,du\,dv,$$

где E, G — коэффициенты первой квадратичной формы для поверхности $r(u, v)$.

Здесь

$$L(r_u, r_v)=\frac{1}{2}(x_u^2+y_u^2+z_u^2+x_v^2+y_v^2+z_v^2),$$

а потому уравнение Эйлера — Лагранжа (в векторной записи) имеет вид $\Delta r=0$; решения — гармонические радиус-векторы.

Так как

$$\frac{E+G}{2}\geqslant\sqrt{EG-F^2},$$

то

$$D[r]\geqslant S[r]$$

для любого кусочно гладкого радиус-вектора $r(u, v)$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $E=G$; $F=0$, т. е. в конформной системе координат. Таким образом, любая экстремаль $D[r]$, для которой координаты u, v оказались конформными,

является экстремалью $S[r]$; обратное неверно. Для того чтобы получить все экстремали функционала $S[r]$, следует рассмотреть все экстремали функционала $D[r]$ (т. е. гармонические радиус-векторы), отобрать из них только те, для которых u, v оказываются конформными координатами, а затем подвергнуть u, v произвольной регулярной замене координат.

Гармонический радиус-вектор $r(u, v)$, для которого координаты u, v не конформны, не будет описывать минимальную поверхность. Пример: $r(u, v)=(u, v, \operatorname{Re} f(u+iv))$ — график вещественной (или мнимой) части нелинейной комплексно аналитической функции $f(u+iv)$.

Связь между функционалами $D[r]$ и $S[r]$ во многом аналогична связи между функционалами длины $l_a^b[\gamma]$ и действия $S_a^b[\gamma]=\int\limits_a^b |\dot\gamma|^2\,dt$ пути γ. Ясно, что $(l_a^b[\gamma])^2 \leqslant (b-a)S_a^b[\gamma]$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда параметр t на траектории $\gamma(t)$ пропорционален длине дуги (такие экстремали $l_a^b[\gamma]$ будут геодезическими, если параметр натуральный). Это обстоятельство связано с тем, что функционалы $l_a^b[\gamma]$ и $S[r]$ инвариантны относительно замены переменных, а функционалы $S_a^b[\gamma]$ и $D[r]$ не инвариантны.

6. Уравнение равновесия тонкой пластинки. Рассмотрим один частный случай равновесия деформируемых тел: равновесие изогнутой тонкой пластинки. Будем считать пластинку тонкой (т. е. будем предполагать, что ее толщина мала по сравнению с ее размерами в двух других направлениях). Будем считать, что в недеформированном состоянии пластинка является плоской. Деформацию будем считать малой, т. е. будем предполагать, что смещения точек пластинки малы по сравнению с ее толщиной. Уравнения равновесия пластинки получаются как уравнения Эйлера — Лагранжа при варьировании ее свободной энергии.

При изгибании пластинки в некоторых ее точках возникают растяжения, а в некоторых — сжатия. На выпуклой стороне происходит растяжение, на вогнутой — сжатие. По мере углубления в толщу пластинки растяжения и сжатия уменьшаются. Зоны растяжения и сжатия отделены друг от друга так называемой «нейтральной поверхностью», на которой растяжения или сжатия отсутствуют. Эта поверхность расположена на середине толщины пластинки.

Введем декартову систему координат x, y, z с началом в точке O на нейтральной поверхности и осью Oz, ортогональной к этой поверхности. Плоскость (x, y) совпадет с плоскостью недеформированной пластинки. Через $\zeta(x, y)$ обозначим вертикальное смещение точек нейтральной поверхности при изгибе (рис. 43).

Пусть h — толщина пластинки; тогда полная свободная энергия F изогнутой пластинки вычисляется по следующей формуле:

$$F = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \int\int \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx\, dy,$$

где интегрирование производится по всей области определения функции смещения $\zeta = \zeta(x, y)$, E — модуль растяжения (модуль Юнга), σ — коэффициент Пуассона, вычисляемые из соотношений

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu},$$

в которых K и μ — модуль всестороннего сжатия и модуль сдвига; эти постоянные K и μ определяются свойствами материала, из которого изготовлена пластинка.

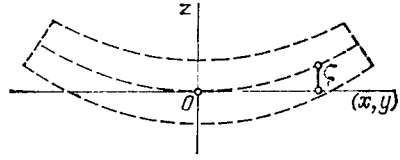


Рис. 43

Перейдем к выводу уравнений равновесия. Отметим, что ввиду малости деформаций можно считать, что $dx\, dy = dS$, где dS — элемент поверхности (на нейтральной поверхности). Проварьируем энергию F. Представим F в виде суммы двух интегралов:

$$F = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \left\{ \int\int (\Delta\zeta)^2\, dS + 2(1-\sigma) \int\int \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] dS \right\}$$

(здесь Δ — оператор Лапласа) и будем варьировать эти интегралы по отдельности.

$$\delta \frac{1}{2} \int\int (\Delta\zeta)^2\, dS = \int\int (\Delta\zeta)(\Delta\delta\zeta)\, dS = \int\int (\Delta\zeta)(\operatorname{div} \operatorname{grad} \delta\zeta)\, dS =$$

$$= \int\int \operatorname{div} (\Delta\zeta \operatorname{grad} \delta\zeta)\, dS - \int\int \langle \operatorname{grad} \delta\zeta, \operatorname{grad} \Delta\zeta \rangle\, dS.$$

Пусть $\gamma = \partial D$ — контур, ограничивающий область определения D функции $\zeta(x, y)$. Например, γ может быть контуром, охватывающим пластинку. Тогда интеграл $\int\int_D \operatorname{div} (\Delta\zeta \operatorname{grad} \delta\zeta)\, dS$ можно по формуле Стокса преобразовать к виду $\oint_\gamma \Delta\zeta \langle n, \operatorname{grad} \delta\zeta \rangle\, dl$, где dl — элемент длины дуги вдоль γ, n — вектор внешней нормали вдоль γ к γ. Ясно, что

$$\oint_\gamma \Delta\zeta \langle n, \operatorname{grad} \delta\zeta \rangle\, dl = \oint_\gamma \Delta\zeta \frac{\partial (\delta\zeta)}{\partial n}\, dl,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по направлению внешней нормали n к контуру γ. Аналогично

$$\iint_D \langle \operatorname{grad} \delta\zeta, \operatorname{grad} \Delta\zeta\rangle\, dS = \iint_D \operatorname{div}((\delta\zeta)\operatorname{grad}\Delta\zeta)\, dS - \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\, dS =$$

$$= \oint_\gamma \delta\zeta \langle n, \operatorname{grad}\Delta\zeta\rangle\, dl - \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\, dS =$$

$$= \oint_\gamma \delta\zeta \frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n}\, dl - \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\, dS$$

Итак, мы преобразовали первый интеграл в выражении для δF к виду

$$\delta\frac{1}{2}\iint_D (\Delta\zeta)^2\, dS = \iint_D (\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta dS - \oint_\gamma \delta\zeta \frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n}\, dl + \oint_\gamma \Delta\zeta \frac{\partial(\delta\zeta)}{\partial n}\, dl.$$

Перейдем ко второму интегралу в выражении для δF:

$$\delta\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right] \delta S =$$

$$= \iint_D \left[2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\gamma\zeta}{\partial y^2}\right] dS.$$

Подынтегральное выражение можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) = \operatorname{div} T.$$

Отсюда

$$\delta\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right] dS = \oint_\gamma \langle n, T\rangle\, dl =$$

$$= \int_\gamma \left[\cos\theta\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\right] dl,$$

где θ — угол между осью Ox и нормалью n (рис. 44). Выразим $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}$ и $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}$ через $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}$ и $\frac{\partial\delta\zeta}{\partial l}$, где $\frac{\partial}{\partial n} = \partial_n$. Так как $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial n} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial l}$; $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial n} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial l}$, то

$$\delta\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right] dS =$$

$$= \oint_\gamma \frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\left[2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right] dl +$$

$$+ \oint_\gamma \frac{\partial\delta\zeta}{\partial l}\left[\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\right] dl.$$

Второй интеграл можно взять по частям. Так как интегрирование выполняется по замкнутому контуру, то пределы интегрирования сливаются в одну точку, а потому интеграл принимает вид

$$-\int_\gamma \delta\zeta \frac{\partial}{\partial l}\left[\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]dl$$

(второй интеграл — интеграл от полной производной — обратился в нуль). Окончательно для вариации свободной энергии получаем

$$\delta F=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left\{\iint_D(\delta\zeta)\,\Delta^2\zeta\,dS-\right.$$
$$-\int_\gamma\delta\zeta\left[\frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n}+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+\right.\right.$$
$$+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\Bigg)\Bigg]dl+\oint\frac{\partial(\delta\zeta)}{\partial n}\Bigg[\Delta\zeta+$$
$$\left.+(1-\sigma)\left(2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\Bigg]dl\right\}.$$

Чтобы получить уравнения равновесия пластинки (уравнения Эйлера — Лагранжа), нужно приравнять нулю сумму $\delta F+\delta U$, где U — потенциальная энергия пластинки, связанная с наличием действующих на нее внешних сил. Вариация δU равна взятой с обратным знаком работе внешних сил при смещении пластинки.

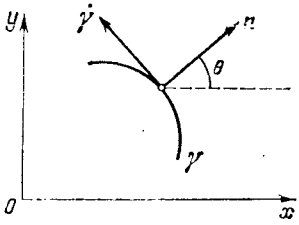


Рис. 44

Пусть P — действующая на пластинку внешняя сила, отнесенная к единице площади ее поверхности (имеется в виду нейтральная поверхность) и направленная по нормали к ней. Тогда работа, произведенная внешней силой при смещении точек пластинки на расстояние $\delta\zeta$, равна $\iint_D P\delta\zeta\,dS$. Отсюда в качестве условия минимальности (а точнее экстремальности) полной свободной энергии пластинки получаем уравнение

$$\delta F-\int P\delta\zeta\,dS=0. \tag{18}$$

В это соотношение входят как поверхностные, так и контурные интегралы. Поскольку вариация $\delta\zeta$ произвольна и может иметь сколь угодно малый носитель (в частности, носитель $\delta\zeta$ может не затрагивать контур γ), то, следовательно, по отдельно-

сти равны нулю как поверхностный, так и контурный интегралы. Поверхностный интеграл имеет вид

$$\iint_D \left(\frac{Eh^3}{12(1-\sigma)}\Delta^2\zeta - P\right)\delta\zeta dS = 0.$$

В силу произвольности $\delta\zeta$ имеем $H\Delta^2\zeta - P = 0$, где $H = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma)}$; эта величина называется *жесткостью* пластинки при изгибе (или *цилиндрической жесткостью*); H определяется свойствами материала. Итак, уравнение равновесия пластинки, изгибаемой действующими на нее внешними силами, имеет вид

$$H\Delta^2\zeta - P = 0.$$

Это уравнение нужно дополнить граничными условиями, получающими из обращения в нуль контурных интегралов в уравнении (18). Обычно при этом выделяется несколько важных частных случаев.

а) Пусть часть края пластинки $\gamma = \partial D$ свободна, т. е. на нее не действуют внешние силы. Тогда вдоль этой части границы вариации $\delta\zeta$ и $\delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right)$ произвольны, а потому должны аннулироваться коэффициенты при этих вариациях в соответствующих контурных интегралах. Это дает следующую систему граничных условий:

$$-\frac{\partial(\Delta\zeta)}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right) = 0;$$

$$\Delta\zeta + (1-\sigma)\left(2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0.$$

б) Пусть края пластинки жестко закреплены (например, жестко заделаны в материал). В этом случае края пластинки не могут испытывать никаких вертикальных смещений, а также не может измениться направление края пластинки; следовательно, $\delta\zeta \equiv 0$ и $\delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right) \equiv 0$ (отсюда следует, что все контурные интегралы тождественно равны нулю); граничные условия приобретают простой вид: $\zeta = 0$, $\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0$. Первое означает, что края не смещаются по вертикали при деформации, а второе означает, что направление края остается при деформации горизонтальным.

Задачи. 1. Показать, что для экстремалей функционала $S(F) = \int F \wedge *F = \int F_{ik}F^{ik}d^4x$ при условии $d(F_{ik}dx^i \wedge dx^k) = 0$

справедливы уравнения Максвелла (в пустоте). Здесь F_{ik} — кососимметрический тензор в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$.

2. Доказать, что:

а) $P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} d^3x, \quad d^3x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$

Вектор с составляющими $\frac{1}{c}T^{10}, \frac{1}{c}T^{20}, \frac{1}{c}T^{30}$ называется плотностью импульса системы, а величина T^{00} — плотность энергии.

б) $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V T^{00} d^3x = -c \oint\limits_{\partial V} T^{0\alpha} d\sigma_\alpha$

(здесь $T^{0\alpha} d\sigma_\alpha = T^{01} dx^2 \wedge dx^3 + T^{02} dx^3 \wedge dx^1 + T^{03} dx^1 \wedge dx^2$).

в) $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{1}{c} T^{\alpha 0} d^3x = -\oint\limits_{\partial V} T^{\alpha\beta} d\sigma_\beta.$

Трехмерный тензор $T^{\alpha\beta}$ называется тензором напряжений (тензором плотности потока импульса).

3. Рассмотрим функционал $S[\Gamma] = \int R \sqrt{|g|}\, dV$, где $R = g^{ik} R_{ik}$, $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l$ и метрика g_{ik} считается фиксированной. Показать, что для экстремалей $\Gamma = (\Gamma_{ij}^k)$ этого функционала справедливы формулы Кристоффеля, выражающие Γ_{ij}^k через компоненты метрического тензора.

4. Чему равен тензор энергии-импульса гравитационного поля (определенный по рецептам пп. 2—4)?

5. Пусть $F = F_{ik} dx^i \wedge dx^k$, $i, k = 0, 1, 2, 3$,— тензор электромагнитного поля в четырехмерном пространстве-времени с метрикой (g_{ij}). Показать, что уравнения Максвелла имеют в этом случае вид $dF = 0$, $\delta F = \frac{4\pi j}{c}$, где j — ток, $\delta = * d *$.

6. В четномерном римановом (или псевдоримановом) пространстве рассмотрим функционал $S[g] = \int \Omega$, где форма Ω определена в задаче 9 к § 30. Показать, что

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} \equiv 0.$$

§ 38. Примеры лагранжианов

1. Рассмотрим комплексное скалярное поле $\varphi(x)$ в пространстве $\mathbb{R}_1^4$ с метрикой g_{ab} и зададим действие в виде

$$S = \text{const} \cdot \int \left[\hbar^2 \left\langle \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle - m^2 c^2 \overline{\varphi(x)}\, \varphi(x) \right] d^4x = \int \Lambda d^4x, \quad (1)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, $\hbar$ — постоянная Планка (размерности действия), c — скорость света. Здесь $m \geqslant 0$ называется *массой* частицы, описываемой полем φ, $\Lambda = \Lambda\left(\varphi, \bar{\varphi}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}\right)$ — лагранжиан; формально $\bar{\varphi}$ и φ считаются независимыми переменными. Уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид «уравнения Клейна — Гордона»:

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta\bar{\varphi}} = 0, \quad (\hbar^2\Box + m^2c^2)\,\varphi = 0,$$
$$\Box = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{(\partial x^\alpha)^2} \tag{2}$$

($\delta\varphi$ и $\delta\bar{\varphi}$ считаются независимыми).

Тензор энергии-импульса имеет вид (см. § 37)

$$T^{ba} = T^{ab} = g^{ac}g^{bd}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^c}\frac{\partial\varphi}{\partial x^d} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^c}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^d}\right) - g^{ab}\Lambda. \tag{3}$$

Здесь $g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ — метрика Минковского. Плотность энергии такова:

$$T^{00} = \sum_c \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^c}\frac{\partial\varphi}{\partial x^c} + m^2\bar{\varphi}\varphi. \tag{4}$$

Действие (1) инвариантно относительно группы преобразований

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi, \quad \bar{\varphi} \to e^{-i\alpha}\bar{\varphi} \quad (\alpha = \text{const}). \tag{5}$$

Эта группа порождает сохраняющийся ток

$$J^a = ig^{ab}\left(\bar{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^b} - \varphi\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^b}\right). \tag{6}$$

Задача. Выведите равенство $\frac{\partial J^a}{\partial x^a} = 0$ из уравнений Эйлера — Лагранжа.

Величина $\int\limits_{t=\text{const}} J^0 d^3x = Q$ называется «зарядом» поля φ.

Включение внешнего электромагнитного поля производится по правилу $p \to p + \frac{e}{c}A$, где $p = i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$:

$$i\frac{\partial}{\partial x^a} \to i\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{e}{c\hbar}A_a(x), \tag{7}$$

где $A_a(x)$ — вектор-потенциал электромагнитного поля, e — заряд,

c и $\hbar$ — универсальные постоянные. Полный лагранжиан имеет вид (полагаем $\hbar = 1$)

$$\Lambda(\varphi, \bar{\varphi}, A) = \left\langle \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x^a} + \frac{ie}{c} A_a \bar{\varphi}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^a} - \frac{ie}{c} A_a \varphi \right\rangle - m^2 c^2 \bar{\varphi}\varphi - \frac{1}{16\pi c} F_{ab} F^{ab}. \tag{8}$$

Задача. Проверьте инвариантность этого действия относительно «калибровочных преобразований» ($\hbar = c = 1$)

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi, \quad \bar{\varphi} \to e^{-i\alpha}\bar{\varphi}; \quad A_a \to A_a + \frac{\partial \alpha}{\partial x^a}, \quad \alpha = \alpha(x), \quad S \to S. \tag{9}$$

Действительное скалярное поле является, как говорят, «нейтральным» ($\bar{\varphi} \equiv \varphi$); здесь

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle - m^2 c^2 \varphi^2, \quad (\Box + m^2 c^2)\varphi = 0, \tag{10}$$

вектор тока (6) обращается в нуль, $J^a = 0$. Включение электромагнитного поля невозможно, так как решения уравнений Эйлера — Лагранжа не будут вещественными.

Решения свободного уравнения (2) или (10) вида $\text{const} \cdot e^{i\langle k, x\rangle}$ обладают свойством

$$\langle k, k\rangle = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}. \tag{11}$$

Считается, что такое решение изображает свободную частицу массы m с импульсом $p = \hbar k$, пропорциональным вектору k. Поэтому импульс лежит на массовой поверхности $\langle p, p\rangle = m^2 c^2$.

2. Лагранжиан комплексного векторного поля φ с массой $m \neq 0$ в пространстве $\mathbb{R}_1^4$ имеет вид (пусть $\hbar = c = 1$)

$$\begin{gathered} -g^{bd} g^{ac} \frac{\partial \bar{\varphi}_a}{\partial x^b} \frac{\partial \varphi_c}{\partial x^d} + m^2 g^{ab} \bar{\varphi}_a \varphi_b = \Lambda, \\ \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad S = \int \Lambda d^4 x, \end{gathered} \tag{12}$$

причем наложены дополнительные условия на поле:

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^a} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}^a}{\partial x^a} = 0. \tag{13}$$

Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{ab} = T^{ba} = -g^{ac} g^{bd} g^{kl} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial x^c} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x^d} + \frac{\partial \bar{\varphi}_l}{\partial x^d} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^c} \right) - g^{ab} \Lambda. \tag{14}$$

Группа $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$, $\bar{\varphi} \to e^{-i\alpha}\bar{\varphi}$ порождает сохраняющийся ток

$$J^a = -ig^{ab} g^{cd} \left(\frac{\partial \varphi_c}{\partial x^b} \bar{\varphi}_d - \frac{\partial \bar{\varphi}_c}{\partial x^b} \varphi_d \right). \tag{15}$$

Задачи. 1. Проверьте сохранение тока $\frac{\partial J^a}{\partial x^a} = 0$ в силу уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \bar{\varphi}} = 0 \leftrightarrow (\Box + m^2)\varphi = 0. \tag{16}$$

2. Проверьте, что при отсутствии дополнительных условий (13) на векторное поле энергия $\int T^{00} d^3x$ не будет, вообще говоря, положительной величиной.

Включение электромагнитного поля производится снова по правилу

$$i\frac{\partial}{\partial x^a} \to i\frac{\partial}{\partial x^a} + eA_a \quad (\hbar = c = 1). \tag{17}$$

Решения типа плоской волны $\text{const}\, e^{i(k, x)}$ обладают (при $\hbar = c = 1$) свойством $\langle k, k\rangle = m^2$ (проверьте!). Тем самым k — импульс, лежащий на массовой поверхности.

Полный лагранжиан (вместе с электромагнитным полем) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\varphi \to e^{i\alpha(x)}\varphi, \quad \bar{\varphi} \to e^{-i\alpha(x)}\bar{\varphi}, \quad A_a \to A_a + \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^a}. \tag{18}$$

Особый случай представляет собой уже встречавшееся ранее векторное поле нулевой массы $m = 0$ (например, электромагнитное поле). В этом случае, если поле φ вещественно, лагранжиан эквивалентен лагранжиану электромагнитного поля:

$$\Lambda = \text{const}\, F_{ab}F^{ab}, \text{ где } F_{ab} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial x^b} - \frac{\partial \varphi_b}{\partial x^a}, \tag{19}$$

который инвариантен относительно калибровочной группы:

$$\varphi_a \to \varphi_a - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^a}, \quad S \to S. \tag{20}$$

Позднее (см. § 40) будет рассмотрен еще важный класс «спинорных» полей, где значения поля φ лежат в пространстве спиноров.

§ 39. Простейшие понятия общей теории относительности

1. Напомним сначала некоторые элементы специальной теории относительности Эйнштейна (СТО; интересно, что в создании этой теории кроме общеизвестных физиков — Эйнштейна и Лоренца — участвовали также крупнейшие геометры своего времени — Пуанкаре и Минковский). Согласно СТО «событию», происшедшему в одной точке пространства в некоторый момент времени, сопоставляется точка четырехмерного пространства-време-

ни $\mathbb{R}_1^4$ с метрикой Минковского $dl^2 = (dx^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (dx^\alpha)^2$ в псевдоевклидовых координатах x^a, $a = 0, 1, 2, 3$, где $x^0 = ct$, t — время, c — скорость света в пустоте ($c \approx 299793$ км/с). Определялись времениподобные, световые (или изотропные) и пространственноподобные векторы ξ, для которых соответственно $\langle \xi, \xi \rangle > 0$, $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ или $\langle \xi, \xi \rangle < 0$, а также кривые $\gamma(\tau)$ времениподобные, световые или пространственноподобные, у которых по определению вектор скорости $v = \frac{d\gamma}{d\tau}$ (в каждой точке) таков, что $\langle v, v \rangle > 0$, либо $\langle v, v \rangle = 0$, либо $\langle v, v \rangle < 0$ соответственно. Мировая линия массивной частицы (масса $m > 0$) времениподобна, а мировая линия безмассовой частицы (масса $m = 0$) световая. При изложении СТО можно пользоваться одним из двух лагранжианов свободной массивной частицы:

$$S^{(1)} = \int\limits_{\gamma(\tau)} L_{\text{св}}^{(1)} d\tau = \alpha \int\limits_{\gamma(\tau)} \langle v, v \rangle \, d\tau \quad \text{или} \quad S^{(2)} = \int\limits_{\gamma(\tau)} L_{\text{св}}^{(2)} d\tau = \beta \int\limits_{\gamma(\tau)} \sqrt{\langle v, v \rangle}\, d\tau.$$

Здесь $\gamma(\tau)$ — мировая линия частицы в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^4$, $v = \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}$ — вектор 4-скорости, α и β — константы, значение которых $\alpha = \frac{1}{2} mc$, $\beta = -mc$ (см. § 32). Обычно в физической литературе используют лагранжиан $L_{\text{св}}^{(2)} = \beta \sqrt{\langle v, v \rangle}$, для которого действие $S^{(2)} = \int L_{\text{св}}^{(2)} d\tau$ пропорционально четырехмерной длине мировой линии $\gamma(\tau)$. Функционал l или $S^{(2)}$ не зависит от параметра τ. Поэтому можно выбрать $\tau = \frac{x^0}{c} = t$ (мировое время). Окончательно получаем лагранжиан в трехмерном формализме, удобный для сопоставления с классической механикой:

$$L_{\text{св}}^{(2)} = \beta \langle v, v \rangle^{1/2} = \beta c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}}, \tag{1}$$

где $v = \frac{d\gamma}{dt}$ или $v^a = \frac{dr^a}{d(x^0/c)} = c \frac{dr^a}{dx^0}$,

$$v^0 = c, \quad v^\alpha = \frac{dr^\alpha}{dt} = w^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

(w^α — компоненты так называемого вектора трехмерной скорости $w = \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)$ в $\mathbb{R}^3$). Если $|w| \ll c$ (нерелятивистский случай), то

$$L_{\text{св}}^{(2)} = \beta \langle v, v \rangle^{1/2} = \beta c \sqrt{1 - \frac{|w|^2}{c^2}} \approx \beta c \left(1 - \frac{w^2}{2c^2} + O\left(\frac{w^4}{c^4}\right)\right). \tag{2}$$

Полагая $\beta = -mc$, мы приходим при $|w|/c \to 0$ к лагранжиану свободной частицы в классической механике с точностью до членов $O(w^4/c^4)$.

Энергия и импульс имеют вид для свободной частицы

$$E = w\frac{\partial L_{\text{св}}^{(2)}}{\partial w} - L_{\text{св}}^{(2)} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}, \quad p_\alpha = -\frac{mw^\alpha}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} = \frac{\partial L_{\text{св}}^{(2)}}{\partial w^\alpha}. \tag{3}$$

Полагая $E/c = p_0$, мы получим 4-вектор $p = (p^a)$, где $p^a = g^{ab}p_b$, g^{ab} — метрика Минковского. Непосредственно проверяется равенство, которому удовлетворяет 4-импульс свободной частицы массы m:

$$p^a p^b g_{ab} = \langle p, p\rangle = (p_0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}(p_\alpha)^2 = m^2c^2. \tag{4}$$

Уравнение (4) задает массовую поверхность в линейном (кокасательном) пространстве импульсов (p^a) с метрикой g_{ab}. Это — пространство Лобачевского (см. § 10), на котором элемент объема имеет вид $d\sigma = d^3p/p_0$.

При использовании лагранжиана $L_{\text{св}}^{(2)} = \alpha\langle v, v\rangle$ мы из результатов § 31 получаем: формальная величина $v\frac{\partial L_{\text{св}}^{(1)}}{\partial v} - L_{\text{св}}^{(1)} = L_{\text{св}}^{(1)} = \alpha\langle v, v\rangle$ сохраняется вдоль экстремалей (в силу уравнения Эйлера — Лагранжа). Поэтому $\langle v, v\rangle = \text{const}$; тем самым параметр τ на кривой $\gamma(\tau)$ должен быть натуральным: $dl = d\tau\,\text{const}$. Пусть $d\tau = dl/c$ (собственное время). Определим 4-вектор энергии-импульса $p_a = \frac{\partial L_{\text{св}}^{(1)}}{\partial v}$, где $v^a = \frac{dx^a}{d\tau}$, τ — натуральный параметр, $d\tau = dl/c$. Выбирая $\alpha = m/2$, получим то же самое значение 4-импульса $(p_0, p_\alpha) = p$, что и для лагранжиана $L_{\text{св}}^{(2)}$ (выше). Отсюда следует, в частности, что p^a — действительно 4-вектор при преобразованиях в $\mathbb{R}_1^4$. Величина $\langle v, v\rangle$ вдоль траекторий постоянна; при $d\tau = dl/c$ имеем $\langle v, v\rangle = c^2$. Величина v для параметра $\tau = l/c$ и называется обычно инвариантной 4-скоростью (v^a), в отличие от 3-скорости $\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$. Соответствие таково:

$$w^\alpha = c\frac{v^\alpha}{v^0}, \quad \langle v, v\rangle = (v^0)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}(v^\alpha)^2 = c^2. \tag{5}$$

Если в пространстве $\mathbb{R}_1^4$ имеется электромагнитное поле с вектор-потенциалом $A_a(x)$, то лагранжиан частицы во внешнем поле имеет вид

$$L^{(1)} = L_{\text{св}}^{(1)} + \frac{e}{c}A_a\frac{dx^a}{d\tau}, \quad \tau = \frac{l}{c}, \tag{6}$$

или

$$L^{(2)} = L^{(2)}_{\text{св}} + \frac{e}{c} A_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} + eA_0, \quad t = \frac{x^0}{c}. \tag{7}$$

Таким образом, включение внешнего поля $A_a(x)$ равносильно сдвигу 4-импульса (см. § 33)

$$p_a \to p_a + \frac{e}{c} A_a(x). \tag{8}$$

В гамильтоновом формализме гамильтониан свободной частицы имеет вид $H = E(p) = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = cp_0$, где $p^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (p_\alpha)^2$. При включении поля $A_a = (A_0, A_\alpha)$ имеем

$$E(p) \to H(x, p) = c \sqrt{\sum_\alpha \left(p_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha\right)^2 + m^2c^2} + eA_0(x) \tag{9}$$

(см. § 33). Тензор напряженности имеет вид $F_{ab} = \dfrac{\partial A_b}{\partial x^a} - \dfrac{\partial A_a}{\partial x^b}$, где $F_{0\alpha} = E_\alpha$ (электрическое поле) и $F_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$ (магнитное поле). Действие самого поля имеет вид

$$S\{A\} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F^{ab} d^4x. \tag{10}$$

При этом должны выполняться уравнения

1) $d\left(F_{ab} dx^a \wedge dx^b\right) = \left(\dfrac{\partial F_{ab}}{\partial x^c} - \dfrac{\partial F_{ac}}{\partial x^b} + \dfrac{\partial F_{bc}}{\partial x^a}\right) dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0$ (первая пара уравнений Максвелла),

2) при отсутствии частиц мы имеем $\dfrac{\partial F^{ab}}{\partial x^b} = 0$ (вторая пара уравнений Максвелла).

Если имеется набор частиц с зарядами $e_1, \ldots, e_N$, массами $m_1, \ldots, m_N$, мировыми линиями $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ в $\mathbb{R}^4_1$ и поле $A_a(x)$, то полное действие системы частиц и поля таково (два варианта):

$$S^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \alpha \int_{\gamma_i} \langle v_i, v_i \rangle \, d\tau + \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \frac{e_i}{c} \left(A_a(x) v_i^a\right) d\tau - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F^{ab} d^4x;$$

$$S^{(2)} = -\sum_{i=1}^{N} m_i c^2 \int_{\gamma_i} \sqrt{1 - \frac{w_i^2}{c^2}}\, dt + \tag{11}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \left[\frac{e_i}{c} A_\alpha(x) w_i^\alpha dt + e_i A_0(x)\, dt\right] - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F^{ab} d^4x, \tag{12}$$

где $\gamma_i(\tau) = x_i^a(\tau)$ — координаты i-й частицы, w_i и v_i — скорости

i-й частицы. Из вида лагранжиана частицы во внешнем поле (11) следует, что параметр вдоль экстремали во внешнем поле совпадает с натуральным параметром (или собственным временем):

$$v\frac{\partial L^{(1)}}{\partial v} - L^{(1)} = v\frac{\partial L^{(1)}_{\text{св}}}{\partial v} - L^{(1)}_{\text{св}} = \text{const}\cdot\langle v, v\rangle,\ \frac{d}{d\tau}\langle v,v\rangle = 0.$$

2. Включение гравитационных сил в СТО по указанной схеме невозможно. Точнее: чисто формально можно попытаться ввести «вектор-потенциал» гравитационных сил A^G_a, где заряды e_i заменены массами m_i («масса частицы есть ее гравитационный заряд»); вектор-потенциал $A^G_a(x)$ естественно взять таким, что в специальной системе координат, в которой мы определяли экспериментально гравитационные силы, он должен иметь вид $A^G = (\varphi, 0, 0, 0)$, где φ — обычный гравитационный потенциал, удовлетворяющий уравнению Даламбера вместо уравнения Лапласа. В этом случае движение частицы во внешнем поле A^G можно получить из лагранжиана (11), где A заменено на A^G и e на m. Однако (на это указал еще Пуанкаре) для смещения перигелия Меркурия получится неправильная поправка к закону Ньютона, численно не совпадающая с наблюдаемой (хотя и имеющая правильный порядок величины). Таким образом, следует искать другого пути для соединения гравитационного поля с теорией относительности. Основная гипотеза общей теории относительности Эйнштейна (ОТО) такова: гравитационное поле есть просто метрика g_{ab} сигнатуры $(+---)$ в четырехмерном пространстве-времени M^4 с координатами (x^0, x^1, x^2, x^3); при этом метрика g_{ab}, вообще говоря, имеет ненулевую кривизну (величина кривизны и характеризует степень нетривиальности гравитационного поля). Пробная частица во внешнем гравитационном поле — это просто «свободная частица в пространстве с метрикой g_{ab}», которая движется по времениподобной геодезической $\gamma(\tau) = \{x^a(\tau)\}$, задаваемой лагранжианом (здесь $m \neq 0$)

$$L^{(1)}_{\text{св}} = m\langle v, v\rangle = m\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau}g_{ab}. \tag{13}$$

Если $m = 0$, то частица движется по световой геодезической в метрике g_{ab}.

Собственное время вдоль линии $\gamma(\tau)$ — это $l/c = \tau$, $dl/c = d\tau$, $|v| = \text{const}$. Включение электромагнитного поля с вектор-потенциалом $A_a(x)$ производится как выше, только метрика Минковского заменяется метрикой g_{ab}:

$$S = \int\limits_{\gamma(\tau)} L^{(1)}d\tau = \int\limits_{\gamma(\tau)} L^{(1)}_{\text{св}}d\tau + \frac{e}{c}\int\limits_{\gamma(\tau)} A_a(x)\,dx^a. \tag{14}$$

Действие самого поля имеет вид

$$S_{\text{поля}} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ab}F^{ab}\sqrt{-g}\,d^4x, \quad F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b}, \tag{15}$$

где $d\sigma = \sqrt{-g}d^4x$ — элемент объема, $g = \det(g_{ab})$, $F^{ab} = g^{ac}g^{bd}F_{cd}$ — результат поднятия индексов у тензора F_{ab} в метрике g_{ab}. Уравнения Максвелла в метрике g_{ab} таковы:

$$\begin{gathered}\frac{\delta S_{\text{поля}}}{\delta A_a} = 0 \text{ (в отсутствие зарядов)},\\ d\left(F_{ab}dx^a \wedge dx^b\right) = 0 \text{ (1-я пара)},\\ \nabla_b F^{ab} = 0 \text{ (2-я пара)}.\end{gathered} \tag{16}$$

Не обсуждая пока уравнений для самого гравитационного поля g_{ab}, укажем одно простое следствие гипотезы Эйнштейна. Рассмотрим достаточно слабое гравитационное поле — метрику g_{ab} (пока мы не уточняем термин «слабое») и «медленную» массивную частицу в этом поле, движущуюся по геодезической

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0, \quad a, b, c = 0, 1, 2, 3, \tag{17}$$

где Γ^a_{bc} — символы Кристоффеля (коэффициенты связности, порожденной метрикой g_{ab}, — см. § 29). За время здесь взято собственное время вдоль геодезической — натуральный параметр $\tau = l/c$. Пусть $t = x^0/c$, как и в СТО. Будем предполагать, что «слабая» метрика g_{ab} представлена в виде формального ряда по $1/c$, причем $1/c$ считается малым параметром:

$$g_{ab} = g^{(0)}_{ab} + c^{-2}g^{(2)}_{ab} + c^{-3}g^{(3)}_{ab} + \ldots = g^{(0)}_{ab} + O(1/c^2) \tag{18}$$

(здесь предполагается, что $g^{(1)}_{ab} = 0$, а $g^{(0)}_{ab}$ — метрика Минковского). Мы считаем частицу медленной, т. е. $\frac{dx^\alpha}{dt} \ll c$ (величина $\frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{dt}$ имеет порядок $O(1/c)$ по определению «медленности»). Для собственного времени τ или натурального параметра имеем

$$d\tau = \frac{dl}{c} = \sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt}g_{ab}}\,dt \quad \left(t = \frac{x_0}{c}\right) \tag{19}$$

или

$$d\tau = \sqrt{1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)}\,dt = \left[1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right]dt. \tag{20}$$

Для символов Кристоффеля имеем (см. § 29)

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right). \tag{21}$$

Так как $x^0 = ct$ и t — конечная величина, то в силу (18) производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0}$ в формуле для Γ^a_{bc} имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^3}\right)$ (метрика Минковского $g^{(0)}_{ab}$ постоянна).

Производные вида $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\alpha}$ имеют порядок $O\left(\frac{1}{c^2}\right)$ при $\alpha = 1, 2, 3$, так как величины x^α считаются конечными. В уравнении (17) можно в силу (20) с той же точностью заменить $d\tau$ на dt; из слагаемых с символами Кристоффеля в этом уравнении при $a = 1, 2, 3$ наибольший порядок будет иметь $\Gamma^\alpha_{00}\dot{x}^0\dot{x}^0 \approx \Gamma^\alpha_{00}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$ так как величины $\dot{x}^\alpha$ при $\alpha = 1, 2, 3$ имеют порядок $O(1)$. Для Γ^α_{00} в силу (18) имеем

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha}\left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

или

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \tag{22}$$

Уравнение (17) приобретает вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\Gamma^\alpha_{00}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right), \tag{23}$$

где $\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}$. Для медленных частиц в слабом поле уравнение (23) должно совпадать с уравнением Ньютона частицы в классическом гравитационном поле с потенциалом $\varphi(x)$ с точностью до величин порядка $O\left(\frac{1}{c}\right)$. Поскольку $c^2\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}c^2 + O\left(\frac{1}{c}\right)$, то коэффициент метрики g_{00} должен иметь вид

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{24}$$

где φ — ньютоновский гравитационный потенциал. В этом случае уравнение (23) приобретет вид уравнения Ньютона

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c}\right). \tag{25}$$

Таким образом имеет место

Утверждение. *Если справедлива гипотеза Эйнштейна, то коэффициент метрики g_{00} должен зависеть от гравитационного потенциала (в слабом поле) так:*

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

В частности, собственное время $d\tau = dl/c$ отличается от мирового времени dt; для неподвижной частицы с мировой линией $x^\alpha = \text{const}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) получим

$$\begin{aligned} cd\tau &= \sqrt{g_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2}\, dt = c\sqrt{g_{00}}\, dt, \\ d\tau &\cong dt\left(1 + \frac{\varphi(x)}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Так как всегда $\varphi \leqslant 0$, мы имеем следствие: в слабом гравитационном поле время между двумя событиями уменьшается (для неподвижной частицы):

$$\tau < t, \quad \text{если} \quad \varphi < 0$$

(имеется в виду временной интервал между двумя событиями $(x^0 = x_1^0,\ x^\alpha = 0)$ и $(x^0 = x_2^0,\ x^\alpha = 0)$ вдоль мировой линии $x^\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$).

3. Рассмотрим теперь гравитационное поле (g_{ab}), т. е. метрику сигнатуры $(+---)$ в области четырехмерного пространства, где нет никаких других полей и частиц. Мы примем гипотезу, что теория гравитационного поля должна быть, как говорят, «общековариантной», т. е. уравнения самого гравитационного поля должны иметь одинаковый вид во всех системах координат и выражаться через тензор кривизны R^a_{bcd} метрики g_{ab}. Не входя в детальное обсуждение этого вопроса, укажем уравнение Эйнштейна для гравитационного поля в пустоте через кривизну Риччи $R_{bc} = R^a_{bac}$:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0 \tag{27}$$

$\left(\text{или } R_{ab} = 0, \text{ так как } \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R^a_a\right)$. Оператор Эйнштейна $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$ обладает важным свойством для любой метрики g_{ab}:

$$\nabla_a \left(R^a_b - \frac{1}{2} R \delta^a_b\right) \equiv 0 \tag{28}$$

(следствие тождеств Бьянки — см. § 30). Уравнение (27) на метрику g_{ab} обладает следующими свойствами:

1. Это уравнение имеет второй порядок.

2. Для слабых полей, где $g_{00} = 1 + 2\varphi(x)/c^2 + O(1/c^3)$, это уравнение приводит к уравнению Пуассона для потенциала φ:

$$\Delta\varphi = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{(\partial x^\alpha)^2} = 0 \tag{29}$$

(это будет показано ниже).

3. Это уравнение может быть записано как уравнение Эйлера — Лагранжа. Действие и лагранжиан (указанный Гильбертом) имеют вид

$$S = \int R\sqrt{-g}\,d^4x, \quad g = \det(g_{ab}), \quad R = R^a_a. \tag{30}$$

Вариация δS и вариационная производная $\frac{\partial S}{\partial g^{ab}}$ вычислялись в § 37 и имеют вид

$$\delta S = \int \left(R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}\right)\delta g^{ab}\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{31}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial S}{\partial g^{ab}} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}.$$

Задача. Покажите, что операторы вида $R_{ab} - \gamma R g_{ab}$ являются вариационными производными тогда и только тогда, когда $\gamma = 1/2$; в лагранжевом случае должно быть выполнено тождество (28).

Замечание. Требованиям 1—3 удовлетворяют также уравнения вида

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \lambda g_{ab}. \tag{32}$$

До настоящего времени нет оснований считать, что $\lambda \neq 0$ (λ называют «космологической постоянной»; пока считается, что $\lambda = 0$; по космологическим оценкам $\lambda < 10^{-56}$ см$^{-2}$).

Простейшим нетривиальным решением уравнения Пуассона $\Delta\varphi = 0$ (вне создающих поле масс) является стационарное сферически симметричное решение

$$\varphi = \frac{\text{const}}{r}, \quad r^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}(x^\alpha)^2, \tag{33}$$

причем константа может быть отождествлена с суммарной массой тела, создающего поле φ (тело сферически симметрично),

$$\varphi = -G\frac{M}{r}, \tag{34}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г $\cdot$ с^2 — гравитационная постоянная Ньютона. Найдем аналог ньютоновского потенциала $-G\frac{M}{r}$ в ОТО. Рассмотрим сферически симметричную метрику g_{ab}, не зависящую от времени $t = x^0/c$. Будем искать метрику в виде (пусть $c = 1$)

$$dl^2 = c^2dt^2g_{00} + g_{11}dr^2 - r^2d\Omega^2, \tag{35}$$

где $g_{00} = e^\nu$, $g_{11} = -e^\lambda$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2$ — элемент длины на единичной сфере в сферических координатах (θ, φ). При этом

из стационарности и сферической симметричности следует, что $g_{00}=g_{00}(r)$ и $g_{11}=g_{11}(r)$. Для коэффициентов Γ^a_{bc}, согласно формулам Кристоффеля (см. § 29) ($x^0=ct$, $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$), имеем $\left(a'=\frac{\partial a}{\partial r},\ \dot a=\frac{\partial a}{\partial t}\right)$

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^0_{10}=\frac{\nu'}{2},\quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^0_{11}=\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu},\quad \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda},\quad \Gamma^1_{00}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta,\quad \Gamma^0_{00}=\frac{\dot\nu}{2},$$

$$\Gamma^1_{10}=\frac{\dot\lambda}{2},\quad \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\lambda}.$$

Составляя уравнения Эйнштейна $R_{ab}=0$, окончательно получаем: $\dot\lambda=0$, $e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0$, $e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0$. Имеем интеграл $\lambda+\nu=f(t)$. Заменой $t'=\psi(t)$ можно сделать функцию f нулевой. Решение имеет вид

$$g_{00}=1-\frac{a}{r},\ g_{11}=\frac{1}{1-(a/r)},$$

где a — некоторая константа.

Это — *метрика Шварцшильда*

$$dl^2=\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2dt^2-\frac{1}{1-(a/r)}dr^2-r^2d\Omega^2. \tag{36}$$

При $r\to\infty$ метрика становится слабой, и мы имеем

$$g_{ab}\approx g^{(0)}_{ab}+\frac{1}{c^2}g^{(2)}_{ab}+O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{37}$$

где

$$g^{(2)}_{00}=-\frac{ac^2}{r}. \tag{38}$$

Отсюда получаем: $a=\frac{2MG}{c^2}$, где M — масса тела, создающего поле, G и c — константы. Величину $a=\frac{2GM}{c^2}$ для тела массы M называют *гравитационным радиусом Шварцшильда* (для массы Земли $a=0{,}44$ см, для массы Солнца $a=3$ км). Если тело столь плотно, что его размер порядка (или меньше чем) a, то из формулы (36) видно возникновение некоторых особенностей при $r\to a$. Более детально об этих особенностях будет сказано далее, в § 30 части II. Пока можно утверждать только, что формула (36) корректна в области $r>a$.

Ранее мы указали, что коэффициент g_{00} определяется потенциалом φ (с точностью до $O(1/c^3)$). Этого было достаточно для сопоставления уравнения медленных времениподобных геодезических с классическим уравнением Ньютона частицы в поле φ (см. выше). Зная метрику поля полностью, мы можем изучить также поправки к движению быстрых частиц при больших r, в частности безмассовых частиц. Уравнение световых геодезических в метрике (36) имеет вид

$$\frac{d^2x^a}{d\eta^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^a}{d\eta}\frac{dx^b}{d\eta} = 0, \quad a = 0, 1, 2, 3, \tag{39}$$

где $g_{ab}\dfrac{dx^a}{d\eta}\dfrac{dx^b}{d\eta} \equiv 0$. Не решая уравнения, мы приведем здесь формулу для световой геодезической в сферически симметричной метрике Шварцшильда (геодезическая лежит в плоскости с координатами r, φ). Уравнение световой геодезической имеет вид

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{r^2}\left(1 - \dfrac{a}{r}\right)}}, \quad \rho = \text{const}. \tag{40}$$

При $a \to 0$ в качестве предела получаем прямую $r\cos\varphi = \rho$. При малых a можно вычислить поправку к прямолинейности для светового луча, вытекающую из формулы для $\varphi(r)$.

4. С точки зрения ОТО предполагается, что взаимодействие всех видов полей и частиц (всех полей, кроме гравитационного!) с метрикой g_{ab} (гравитационным полем) происходит через так называемый тензор энергии-импульса T_{ab} следующим образом: полное уравнение Эйнштейна имеет вид

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \text{const}\cdot T_{ab} \tag{41}$$

или

$$R^b_a - \frac{1}{2}R\delta^b_a = \text{const}\cdot T^b_a. \tag{42}$$

При этом константа предполагается универсальной. Для уточнения ее значения следует рассмотреть слабую метрику вида (36) и тензор энергии-импульса пылевидного облака, где давление равно нулю и скорости вещества равны нулю. Тензор T_{ab} в этом случае имеет вид

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{43}$$

где ρ — плотность массы. Мы знаем, что $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2 + O(1/c^3)$, где φ — гравитационный потенциал, и выполнено уравнение

Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \tag{44}$$

Заметим, что $T_0^0 = \rho c^2$ и $T_a^a = \rho c^2$ для тензора (43). Нетривиальные по модулю $O(1/c^3)$ величины Γ_{bc}^a, нужные для вычисления R_0^0, таковы (см. выше):

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{c^3}\right),$$

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^{\alpha})^2}\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right) = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

Уравнение Эйнштейна имеет вид

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R\delta_0^0 = \text{const}\, T_0^0,$$

или

$$R_0^0 = \text{const}\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T_a^a\right) = \text{const}\cdot\frac{\rho c^2}{2}. \tag{45}$$

Для тензора энергии-импульса (43) имеем $R_0^0 = \Delta\varphi/c^2 = \text{const}\cdot\rho c^2/2$. Требование, что уравнение Эйнштейна (45) превращается в уравнение Пуассона (44), когда тензор энергии-импульса имеет вид (43), позволяет сделать вывод:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \tag{46}$$

предполагая размерную константу универсальной $\left(\text{const} = \frac{8\pi G}{c^4}\right)$.

Из соотношения (46) следует тождество

$$\nabla_b T_a^b = 0, \tag{47}$$

заменяющее в ОТО законы сохранения.

Укажем виды тензора энергии-импульса, которые у нас уже встречались и важны в первую очередь.

1. *Тензор энергии-импульса электромагнитного поля* (см. выше)

$$T^{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{ac}F_c^b + \frac{1}{4}g^{ab}F_{cd}F^{cd}\right) \quad (c = 1). \tag{48}$$

2. *Тензор энергии-импульса изотропной сплошной среды (гидродинамический тензор энергии-импульса)*

$$T_{ab} = (p + \varepsilon)u_a u_b - pg_{ab}, \tag{49}$$

где p и ε — давление и плотность энергии среды в «сопутствующей» системе координат (в данной точке), в которой среда покоится (или $u_0 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$). Здесь $u = v/c$ — вектор

4-скорости среды $\langle u,\ u\rangle = u_a u_b g^{ab} = 1$. В указанной сопутствующей системе отсчета T_{ab} имеет вид

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Для замыкания уравнений Эйнштейна необходимо знать уравнение состояния — связь между p и ε. Для пылевидного вещества $p = 0$, $\varepsilon = \rho c^2$. Для так называемого «ультрарелятивистского» уравнения состояния $p = \varepsilon/3$ или $T^a_a \equiv 0$.

Задача. Докажите, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$\frac{1}{2} T_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}},$$

где

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ab} F_{cd} g^{ac} g^{bd} \sqrt{-g}\, d^4x, \quad g = \det(g_{ab}).$$

Замечание. В изложении ОТО обычно определяют симметричный тензор энергии-импульса вещества T_{ab} следующим образом:

$$\frac{\delta S_{\text{материи}}}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, T_{ab}, \tag{51}$$

где действие для полей материи предполагается заданным явно в виде функционала как от полей материи, так и от метрики гравитационного поля.

Например, для лагранжианов скалярного и векторного полей (см. § 38) метрика явно входит в виде скалярного произведения градиента в лагранжиан. Для спинорного поля (см. § 40) дело обстоит сложнее. Введение спиноров в ОТО обсуждается в § 41. Тензор энергии-импульса сплошной среды, указанный в этом параграфе, содержит метрику очевидным образом. Полное действие гравитационного поля и материи имеет вид

$$S_{\text{полное}} = \int (R \sqrt{-g}\, d^4x + S_{\text{материи}}). \tag{52}$$

Например, если «материей» является электромагнитное поле F_{ab}, то

$$S_{\text{полное}} = \int (R \sqrt{-g}\, d^4x + \text{const}\, F_{ab} F^{ab} \sqrt{-g}\, d^4x). \tag{53}$$

Полная система уравнений (Максвелла и Эйнштейна) имеет вид

$$\frac{\delta S_{\text{полное}}}{\delta A_a} = 0, \quad \frac{\delta S_{\text{полное}}}{\delta g^{ab}} = 0. \tag{54}$$

Замечание. Многократно обсуждался вопрос о том, имеет ли точный смысл плотность энергии самого гравитационного поля (и весь тензор энергии-импульса как общековариантная величина). Из сказанного выше, принимая определение (51) как единственное общефизически верное, видим, что в этом отношении гравитационное поле отличается от всех остальных физических типов полей материи, у которых тензор энергии-импульса определяется по отношению к заданной метрике (конечно, считая верной основную гипотезу Эйнштейна, что гравитационное поле есть метрика, следствия которой сейчас уже успешно выдержали ряд экспериментальных проверок). Как итог всех обсуждений представляется наиболее вероятным, что никакого общековариантного тензора энергии-импульса, кроме правой части уравнений Эйнштейна, не существует. Имеется один важный случай, когда имеет смысл понятие «глобальной гравитационной энергии» (не плотности!): пусть рассматривается «локализованный» чисто гравитационный пакет на фоне метрики Минковского. Из сопоставления с классической нерелятивистской гравитацией следует, что компоненты метрики (точнее, их отклонение от метрики Минковского) должны убывать достаточно регулярно со скоростью порядка r^{-1} по пространственным направлениям при $r \to \infty$ (не быстрее!). В этом случае определяется полная «масса поля» через его асимптотику на пространственной бесконечности по рецепту, соответствующему определению массы тела через асимптотику потенциала в классической гравитации. Эта величина как функционал от трехмерной метрики и ее временных производных оказывается гамильтонианом системы и поэтому может рассматриваться как физическая энергия локализованного гравитационного пакета. Положительность этой величины лишь недавно строго доказана геометрами и физиками. Эта «гравитационная энергия» инвариантна относительно произвольных (внутри) замен координат, которые, однако, для корректности и однозначности этого определения должны достаточно быстро затухать на пространственной бесконечности. Уместно заметить, что в этом случае локализованный «гравитационный пакет» рассматривается по определению как новый объект на фоне метрики Минковского, и его энергия определяется согласно тем же общефизическим рецептам, но уже по отношению к метрике Минковского. На сегодня ни одного такого «локализованного» точного решения (без особенностей метрики, в отсутствие других сортов материи) не известно, хотя их существование, по-видимому, неэффективно можно извлечь из имеющихся в литературе математических теорем; такие «локализованные нелинейные гравитационные волны» не наблюдались пока и вряд ли скоро будут обнаружены; однако этот вопрос представляет собой большой формальный интерес и интенсивно обсуждается в современной литературе. Еще один случай представляет теория малых коле-

баний метрики около любого фона, которая рассматривается как теория поля, энергия которого определяется по отношению к фоновой метрике (хотя при построении такой теории необходимо быть осторожным и ввести соглашение о правиле устранения координатного произвола).

Эти вопросы в рамках данной книги подробно не рассматриваются.

§ 40. Спинорное представление групп $SO(3)$ и $O(3, 1)$. Уравнение Дирака и его свойства

1. Автоморфизмы алгебры матриц. Рассмотрим полную матричную алгебру $M(n, \mathbb{C})$ в n-мерном пространстве $\mathbb{C}^n$. Построение спинорного представления указанных групп основано на следующем свойстве матричной алгебры.

Лемма 1. *Любой автоморфизм ассоциативной алгебры* $M(n, \mathbb{C})$ *является внутренним* (напомним, что автоморфизмом $h\colon M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$ алгебры называется ее изоморфизм на себя; внутренним автоморфизмом алгебры $M(n, \mathbb{C})$ называется автоморфизм вида $h(x) = gxg^{-1}$, где g — матрица из группы $GL(n, \mathbb{C})$).

Доказательство. Напомним, что элемент P алгебры $M(n, \mathbb{C})$ называется *проектором*, если $P^2 = P$. Проекторы P, Q называются *ортогональными*, если $PQ = QP = 0$; очевидно, образы ортогональных проекторов имеют нулевое пересечение. Проектор P называется *одномерным*, если $P(\mathbb{C}^n)$ есть одномерное пространство. Одномерными попарно ортогональными проекторами являются, в частности, матрицы $P_1, \ldots, P_n$, определяемые формулой

$$(P_i)_l^k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l = i, \\ 0, & \text{если } k \neq i \text{ или } l \neq i. \end{cases} \tag{1}$$

Имеем

$$P_i^2 = P_i, \quad P_i P_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad P_1 + \ldots + P_n = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь автоморфизм $h\colon M(n, \mathbb{C}) \to M(n, \mathbb{C})$ и положим $h(P_i) = P_i'$. Так как, очевидно, $h(1) = 1$, соотношения (2) превращаются под действием h в соотношения

$$(P_i')^2 = P_i', \quad P_i' P_j' = 0 \text{ при } i \neq j, \quad P_1' + \ldots + P_n' = 1. \tag{3}$$

Таким образом, P_i' — проекторы; эти проекторы нетривиальны и попарно ортогональны, и $P_1'(\mathbb{C}^n) + \ldots + P_n'(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$. Поэтому все эти проекторы одномерны. Положим $P_i'(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}_i'$.

Обозначим через t_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, элемент алгебры $M(n, \mathbb{C})$, у которого $(t_{ij})_l^k = 1$ при $i = k$, $j = l$ и $(t_{ij})_l^k = 0$ для остальных значений k, l; иначе говоря, $t_{ij}(e_j) = e_i$ и $t_{ij}(e_r) = 0$

при $r \neq j$, где $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{C}^n$. Очевидно,

$$t_{ii} = P_i, \quad t_{ij}t_{rs} = 0 \text{ при } i \neq s, \quad t_{ij}t_{ri} = t_{rj}. \tag{4}$$

Полагая $h(t_{ij}) = t'_{ij}$ и применяя h к соотношениям (3), получаем соотношения

$$t'_{ii} = P'_i, \quad t'_{ij}t'_{rs} = 0 \text{ при } i \neq s, \quad t'_{ij}t'_{ri} = t'_{rj}. \tag{5}$$

Поскольку $P_k t'_{ij} = 0$ при $k \neq j$, образ $t'_{ij}(\mathbb{C}^n)$ одномерен и совпадает с $\mathbb{C}'_j$, более того, t'_{ij} изоморфно отображает $\mathbb{C}'_i$ на $\mathbb{C}'_j$.

Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $e'_1 \in \mathbb{C}'_1$ и положим $e'_i = t'_{1i}(e'_1)$. Векторы $e'_1, \ldots, e'_n$ отличны от нуля и лежат в $\mathbb{C}'_1, \ldots, \mathbb{C}'_n$; поэтому они составляют базис пространства $\mathbb{C}^n$. Определим преобразование $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ формулой

$$g(e_i) = e'_i \tag{6}$$

и покажем, что для любого $x \in M(n, \mathbb{C})$

$$h(x) = gxg^{-1}. \tag{7}$$

Прежде всего заметим, что

$$t'_{ij}(e'_i) = t'_{ij}t'_{1i}(e'_1) = t'_{1j}(e'_1) = e'_j,$$
$$t'_{ij}(e'_r) = t'_{ij}t'_{rr}(e'_r) = 0 \text{ при } r \neq i.$$

Из этого видно, что $t'_{ij}(e'_r) = gt_{ij}g^{-1}(e'_r)$ для любого r, т. е. что

$$h(t_{ij}) = gt_{ij}g^{-1}$$

при любых i, j. Но тогда $h(x) = gxg^{-1}$ при любом x, поскольку любая матрица x представляется как линейная комбинация матриц вида t_{ij}.

Лемма 1 доказана.

Далее нам будут важны некоторые специальные реализации матричных алгебр $M(2, \mathbb{C})$ и $M(4, \mathbb{C})$ с помощью образующих специального вида — так называемых матриц Паули и Дирака.

2. Спинорное представление группы $SO(3)$. Выберем в алгебре $M(2, \mathbb{C})$ следующую систему образующих:

$$1, \ \sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матрицы σ_j $(j = 1, 2, 3)$ называются матрицами Паули (см. § 14); вместе с матрицей 1 они дают аддитивный базис в алгебре $M(2, \mathbb{C})$ как линейном (четырехмерном) пространстве, поскольку они

линейно независимы. Они связаны соотношениями:

1) $\sigma_q\sigma_l - \sigma_l\sigma_q = 2i\sigma_k$, где (q, l, k) — четная перестановка;
2) $\sigma_q\sigma_l + \sigma_q\sigma_l = 2\delta_{ql}$.

Мы записываем их так:

1) $[\sigma_q, \sigma_l] = 2i\sigma_k$,
2) $\{\sigma_q, \sigma_l\} = 2\delta_{ql}$.

Соотношения 1) означают просто, что матрицы $\frac{i}{2}\sigma_j$ реализуют представление алгебры Ли группы $SO(3)$ (или $SU(2)$). Отметим важное свойство соотношений 2). Реализуем трехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ (x^1, x^2, x^3) как пространство бесследных 2×2-матриц с евклидовым базисом σ_j,

$$(x^1, x^2, x^3) \mapsto x^\alpha\sigma_\alpha.$$

Пусть $\Lambda \in O(3)$ — ортогональное преобразование

$$\Lambda\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x^{\alpha'} = \lambda^\alpha_\beta x^\beta. \tag{9}$$

Положим

$$\sigma'_q = \lambda^\alpha_q\sigma_\alpha. \tag{10}$$

Оказывается, соотношения 2) сохраняются при ортогональных преобразованиях вида (10)

$$\{\sigma'_q, \sigma'_l\} = 2\delta_{ql}.$$

Это очевидным образом выводится из определения ортогональности матрицы Λ.

Для соотношений 1) имеем

$$[\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta] = [\lambda^\gamma_\alpha\sigma_\gamma, \lambda^\delta_\beta\sigma_\delta] = \lambda^\gamma_\alpha\lambda^\delta_\beta[\sigma_\gamma, \sigma_\delta] = 2i(\lambda^\gamma_\alpha\lambda^\delta_\beta\varepsilon^t_{\gamma\delta}\sigma_t),$$

где

$$\varepsilon^t_{\gamma\delta} = \varepsilon_{\gamma\delta t} = \begin{cases} 1, & \text{если } (\gamma, \delta, t) \text{ — четная перестановка,} \\ -1, & \text{если } (\gamma, \delta, t) \text{ — нечетная перестановка,} \\ 0, & \text{если среди чисел } \gamma, \delta, t \text{ имеются совпадения.} \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$[\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma'_\gamma, \text{ если } \Lambda \in SO(3).$$

Таким образом, соотношения 1) также сохраняются при преобразованиях вида (10) для ортогональной матрицы Λ в $\mathbb{R}^3$ с определителем $+1$. Соотношения 1) и 2) полностью определяют матричную алгебру $M(2, \mathbb{C})$. Действительно, в силу этих соотношений все произведения $\sigma_i\sigma_j$ выражаются линейно через 1, σ_1, σ_2, σ_3. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Преобразование* (10) *для* Λ *из* $SO(3)$ *задает автоморфизм* $h(\Lambda)$: $M(2, \mathbb{C}) \to M(2, \mathbb{C})$. *Следовательно, по лем-*

ме 1 *найдется преобразование* $g = g(\Lambda)$: $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *такое, что* $h(x) = gxg^{-1}$ *для любой матрицы* x.

Определение 1. Сопоставление $\Lambda \mapsto g(\Lambda)$ называется *спинорным представлением* группы $SO(3)$ в группу $GL(2, \mathbb{C})$.

Это представление многозначно: матрица $g(\Lambda)$ определена с точностью до ненулевого множителя $\lambda \in \mathbb{C}$. Эту многозначность можно уменьшить, если потребовать, чтобы $g(\Lambda) \in SL(2, \mathbb{C})$. Тогда представление делается двузначным, и два значения $g(\Lambda)$ получаются одно из другого умножением на -1.

Задача. Показать, что образ последнего двузначного представления лежит в $SU(2)$ и что композиция этого двузначного представления с проекцией $SU(2) \to SU(2)/(\pm 1)$ осуществляет изоморфизм (см. §§ 13, 14)

$$SO(3) \to SU(2)/(\pm 1).$$

Проверьте, что вращению на угол φ вокруг оси с направляющим вектором $n = (n_x, n_y, n_z)$, $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, соответствует преобразование

$$g(n, \varphi) = \exp\left\{-i\frac{\varphi}{2}(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)\right\}.$$

3. Спинорное представление группы Лоренца. Перейдем к алгебре $M(4, \mathbb{C})$. Выберем в этой алгебре образующие $1, \gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab} \cdot 1, \tag{11}$$

где g^{ab} — метрика Минковского. Для этого достаточно положить

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

(это — 4×4-матрицы, записанные как блочные 2×2-матрицы с 2×2-блоками).

Лемма 2. *Все* 4×4*-матрицы* 1, γ^a, $\gamma^a\gamma^b$ $(a < b)$, $\gamma^a\gamma^b\gamma^c$ $(a < b < c)$ *и* $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ *линейно независимы; алгебра над полем* $\mathbb{C}$ *с образующими* $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ *и соотношениями* (11) *изоморфна матричной алгебре* $M(4, \mathbb{C})$.

Доказательство. Из соотношений (11) следует, что любое произведение элементов γ^a можно свести к линейным комбинациям элементов, указанных в лемме 2. Кроме того, число этих элементов равно 16, как и размерность $M(4, \mathbb{C})$. Таким образом, все утверждения леммы 2 будут доказаны, если проверить линейную независимость указанных в лемме произведений для матриц $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$, заданных формулами (12). Мы предлагаем

читателю выписать все эти 16 матриц и проверить непосредственно их линейную независимость (здесь сложных вычислений нет).

Перейдем теперь к построению спинорного представления группы $O(3, 1)$, используя лемму 1. Рассмотрим пространство Минковского $\mathbb{R}^4(x^0, x^1, x^2, x^3)$ и матрицу $\Lambda \in O(3, 1)$, $\Lambda = (\lambda_b^a)$. Определим матрицы

$$\gamma'^a = \lambda_b^a \gamma^b. \tag{13}$$

Из соотношений (11) и из того, что матрица Λ сохраняет метрику Минковского g_{ab}, следует, что матрицы γ'^a будут удовлетворять тем же соотношениям

$$\{\gamma'^a, \gamma'^b\} = 2g^{ab} \cdot 1.$$

В силу леммы 2 это показывает, что отображение $h = h(\Lambda)$: $M(4, \mathbb{C}) \to M(4, \mathbb{C})$, действующее по формулам $1 \mapsto 1$, $\gamma^a \mapsto \gamma'^a$, является автоморфизмом полной линейной алгебры $M(4, \mathbb{C})$. Поэтому существует такое $g = g(\Lambda) \in GL(4, \mathbb{C})$, что $h(x) = gxg^{-1}$. Сопоставление $\Lambda \mapsto g(\Lambda)$ называется *спинорным представлением* группы $O(3, 1)$ в группу $GL(4, \mathbb{C})$. Это представление многозначно: матрицы g и λg, где λ — отличное от нуля комплексное число, соответствуют одному и тому же $\Lambda \in O(3, 1)$. Переходя к группе $SL(4, \mathbb{C})$, получим двузначное представление

$$\Lambda \mapsto \pm g(\Lambda) \in SL(4, \mathbb{C}).$$

Определение 2. Четырехмерное пространство $\mathbb{C}^4$, на котором действует спинорное представление, называется *пространством спиноров* (4-компонентных). Элемент этого пространства $\psi \in \mathbb{C}^4$ называется спинором (пишется как столбец). По построению (см. формулы (12)) пространство $\mathbb{C}^4$ разложено в сумму: $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$,

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{C}^2, \quad \chi \in \mathbb{C}^2. \tag{14}$$

Очевидно, ограничение спинорного представления группы $O(3, 1)$ на подгруппу $SO(3)$ распадается в сумму двух изоморфных неприводимых (спинорных) представлений, описанных выше.

Замечание. Выбирая базис $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$, $\tilde{\gamma}^a = -i\gamma^a$, получим соотношение

$$\{\tilde{\gamma}^a, \tilde{\gamma}^b\} = 2\delta^{ab} \cdot 1. \tag{15}$$

С их помощью можно построить спинорное представление группы $SO(4)$, аналогичное спинорному представлению группы $O(3, 1)$.

Задачи. 1. Для вращений из $SO(3) \subset O(3, 1)$ на угол φ вокруг единичного вектора $n = (n_1, n_2, n_3)$ в $\mathbb{R}^3$ спинорное пред-

ставление имеет вид

$$g(\varphi, n) = \exp\left\{-i\frac{\varphi}{2}(n_1\Sigma_1 + n_2\Sigma_2 + n_3\Sigma_3)\right\},$$

где $\Sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}$.

2. Для гиперболического вращения на мнимый угол $i\varphi$ в плоскости (x^0, n), где n — трехмерный единичный вектор (элементарного преобразования Лоренца), спинорное представление имеет вид

$$g(\varphi, n) = \exp\left\{-\frac{\varphi}{2}(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3)\right\},$$

где $\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$.

3. Докажите, что представление пространственного отражения $P(x^0, x) = (x^0, -x)$, где x — трехмерный вектор, имеет вид

$$g(P) = \eta_P\gamma^0, \quad \text{где} \quad \eta_P = \pm i \quad \text{или} \quad \eta_P = \pm 1.$$

4. Покажите, что оператор отражения времени $T(x^0, x) = (-x^0, x)$ представляется в виде

$$g(T) = \eta_T\gamma^0\gamma^1\gamma^3, \quad \text{где} \quad |\eta_T| = 1.$$

В пространстве спиноров $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ можно перейти к новому базису

$$\eta = \frac{\varphi + \chi}{\sqrt{2}}, \quad \xi = \frac{\varphi - \chi}{\sqrt{2}}. \tag{16}$$

Из формул, задающих спинорное представление (задачи 1—3), следует, что «полуспиноры» η и ξ преобразуются независимо при преобразованиях из собственной группы Лоренца $SO(3, 1) \subset O(3, 1)$ и переходят друг в друга при пространственном отражении (проверьте):

$$g(P)\colon \ \eta \mapsto \xi, \quad \xi \mapsto \eta, \tag{17}$$

$$P(x^0, x) = (x^0, -x).$$

Определение 3. Действия группы $SO(3, 1)$ на η и ξ называются *полуспинорными представлениями* собственной группы Лоренца $SO(3, 1)$; обозначения: g_+ для η и g_- для ξ. (Другое описание полуспинорного представления будет дано в п. 3 § 41.)

Эти представления (по отдельности) не продолжаются на всю группу Лоренца $O(3, 1)$.

Заметим, что матрица γ^0 в базисе $\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ имеет вид (проверьте!)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Спинорное представление группы $O(3, 1)$ не является унитарным. Можно, однако, построить индефинитное скалярное произведение, инвариантное относительно спинорного представления: для этого достаточно положить $\langle \psi, \psi \rangle = \psi^* \gamma^0 \psi$. Здесь $\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ — вектор-строка, комплексно сопряженный к столбцу ψ.

Задача 5. Проверьте, что величина $\psi^* \gamma^0 \psi$ инвариантна относительно группы $O(3, 1)$.

Определение 4. Спинор (строка) $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$ называется *дираковски сопряженным* с ψ. Заметим, что форма $\bar{\psi}\psi$ инвариантна относительно спинорного представления.

Задача 6. Докажите, что величина $\bar{\psi}\gamma^a\psi$ преобразуется как вектор (относительно $O(3, 1)$), величина $\bar{\psi}\gamma^a\gamma^b\psi$ — тензор 2-го ранга, $\bar{\psi}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\psi$ — тензор 3-го ранга, $\bar{\psi}\gamma^5\psi = \bar{\psi}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi$ — тензор 4-го ранга (псевдоскаляр).

Задача 7. Докажите, что полуспинорные представления g_+ и g_- группы $SO(3, 1)$ в $GL(2, \mathbb{C})$ не обладают никаким инвариантным (ненулевым) скалярным произведением.

Указание. Отсутствие инвариантов у полуспинорного представления вытекает из изоморфности одного из них стандартному представлению группы $SL(2, \mathbb{C})$, а другого — сопряженному представлению. Изоморфизм между алгебрами Ли группы $SL(2, \mathbb{C})$ и группы Лоренца есть частный случай изоморфизма (24.72) при $n = 2$, где алгебра Ли конформных преобразований сферы S^2 реализуется как алгебра Ли группы $SO(3, 1)$.

В базисе $\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ форма $(\psi, \psi) = \bar{\psi}\psi$ имеет вид $\bar{\psi}\psi = \psi^* \gamma^0 \psi = \xi^* \eta + \eta^* \xi$ (проверьте!).

4. Уравнение Дирака. Алгебра γ-матриц с соотношениями (11) естественно возникает из следующего вопроса: пусть задан оператор Клейна — Гордона $\Box + m^2$. Можно ли разложить его в произведение операторов 1-го порядка так:

$$-(\Box + m^2) = \left(i\gamma^a \frac{\partial}{\partial x^a} + m\right)\left(i\gamma^b \frac{\partial}{\partial x^b} + (-m)\right)? \tag{19}$$

Задача. Докажите, что разложение (19) эквивалентно соотношениям

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2g^{ab} \cdot 1, \tag{20}$$

где $\square = g^{ab}\frac{\partial}{\partial x^a}\frac{\partial}{\partial x^b}$ (т. е. разложение (19) возможно, если в качестве коэффициентов взять элементы алгебры γ-матриц).

Определение 5. Уравнение

$$\left(i\gamma^b\frac{\partial}{\partial x^b} - m\right)\psi = 0 \tag{21}$$

на спинорное поле ψ называется *уравнением Дирака.*

Задача. Проверьте, что сопряженное уравнение имеет вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial x^a}\gamma^a + m\bar{\psi} = 0, \tag{22}$$

где $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$.

Уравнение Дирака получается из действия

$$S = \int\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^a\frac{\partial\psi}{\partial x^a} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^a}\gamma^a\psi\right) - m\bar{\psi}\psi\right]d^4x, \tag{23}$$

где ψ и $\bar{\psi}$ считаются независимыми. Тензор энергии-импульса и ток имеют вид

$$T^{ab} = \frac{i}{2}g^{ac}\left(\bar{\psi}\gamma^b\frac{\partial\psi}{\partial x^c} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^c}\gamma^b\psi\right) = T^{ba}, \tag{24}$$

$$J^a = \bar{\psi}\gamma^a\psi, \quad a = 0, 1, 2, 3. \tag{25}$$

Величина $J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^*(\gamma^0)^2\psi = \psi^*\psi$ есть плотность заряда. Заряд имеет вид

$$Q = \int\psi^*\psi d^3x = \int J^0 d^3x. \tag{26}$$

Очевидно, $Q > 0$. Напротив, плотность энергии T^{00} не является положительно определенной; это вызывает ряд трудностей, которые мы здесь обсуждать не будем.

Решения типа $\text{const}\cdot e^{i\langle k,\, x\rangle}$ имеют волновой вектор на массовой поверхности $\langle k, k\rangle = m^2$ ($\hbar = c = 1$). Их отождествляют с частицами, если $k^0 > 0$ (т. е. импульс лежит на верхней части массовой поверхности). Необходимость этого ограничения вытекает из требования положительности энергии частицы.

В базисе (η, ξ) уравнения Дирака приобретут вид

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \langle\sigma, p\rangle\eta + m\xi, \\ i\frac{\partial\xi}{\partial t} &= -\langle\sigma, p\rangle\xi + m\eta, \end{aligned} \tag{27}$$

где $p = i\frac{\partial}{\partial x}$ ($\hbar = c = 1$). Мы видим, что при нулевой массе $m = 0$ это уравнение распадается на два независимых уравнения (уравнения Вейля), описывающих частицы, законы движения которых

не инвариантны относительно пространственных отражений (полуспинорное представление группы $SO(3, 1)$ не продолжается на пространственное отражение) и которые имеют нулевую массу (полуспинорное представление не обладает инвариантным скалярным произведением, которое в лагранжиане могло бы дать члены типа массы).

5. Уравнение Дирака в электромагнитном поле. Оператор зарядового сопряжения. Включение внешнего электромагнитного поля производится по стандартному правилу $p_a \to p_a + eA_a$ ($\hbar = c = 1$). Поэтому мы должны сделать обычную замену в лагранжиане и уравнениях

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \to \frac{\partial}{\partial x^a} - ieA_a(x),$$

где e — заряд ($\hbar = c = 1$). Уравнения Дирака во внешнем поле принимают вид

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\gamma}^a\left(\frac{\partial}{\partial x^a} - ieA_a(x)\right) + m\right]\psi = 0, \\ \bar{\psi}\left[(\tilde{\gamma}^a)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial x^a} + ieA_a(x)\right) - m\right] = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$, $\tilde{\gamma}^a = -i\gamma^a$ (ср. замечание в п. 3) и T обозначает транспонирование. Рассмотрим матрицу $C = \tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^0$. Она обладает следующим свойством (проверьте):

$$C^{-1}\tilde{\gamma}^a C = -(\tilde{\gamma}^a)^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Из формулы (29) и уравнения Дирака вытекает

Теорема 2. *Если поля $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ удовлетворяют уравнениям Дирака (28) с зарядом e в поле $A_a(x)$, то поля $\psi^c(x) = C\bar{\psi}(x)$ и $\bar{\psi}^c(x) = C^{-1}\psi(x)$ удовлетворяют уравнениям (28) в том же поле $A_a(x)$, но с заменой $e \to -e$.*

Преобразование $\psi \mapsto \psi^c$ называют преобразованием зарядового сопряжения, так как оно меняет знак заряда у частицы, описываемой полем ψ. Отсюда вытекает важное следствие: спинорное представление и уравнение Дирака описывает сразу два сорта частиц: частицы с зарядом e и частицы с зарядом $-e$. Одно и то же решение $\psi(x)$ уравнений Дирака (28) определяет волновую функцию электрона $\psi(x)$ и волновую функцию позитрона $\psi^c(x)$.

Задача. Проверьте, что: а) оператор зарядового сопряжения коммутирует с собственной группой Лоренца; б) этот оператор коммутирует с пространственным отражением $g(P) = \eta_P\tilde{\gamma}^0$, если $\eta_P = \pm i$ (и не коммутирует, если $\eta_P = \pm 1$); в) этот оператор $\psi \to \psi^c$ коммутирует с временным отражением, если $\eta_T = \pm 1$ (см. задачи 3, 4 из п. 3).

§ 41. Ковариантное дифференцирование полей с произвольной симметрией

1. Калибровочные преобразования. Калибровочно инвариантные лагранжианы. Начнем с важного примера. Рассмотрим комплексное скалярное поле ψ и лагранжиан вида

$$L = L\left(\psi, \bar{\psi}, \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha}\right), \tag{1}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение, ψ и $\bar{\psi}$ считаются формально независимыми (см. § 38).

Пусть лагранжиан L инвариантен относительно группы зарядовых преобразований вида

$$\psi \to e^{i\varphi}\psi, \quad \bar{\psi} \to e^{-i\varphi}\bar{\psi} \qquad (\varphi = \text{const}): \tag{2}$$

$$L\left(e^{i\varphi}\psi, e^{-i\varphi}\bar{\psi}, e^{i\varphi}\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, e^{-i\varphi}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha}\right) = L\left(\psi, \bar{\psi}, \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{3}$$

Например, такой инвариантностью обладает рассмотренный в § 38 лагранжиан вида

$$L = \hbar^2 g^{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} - m^2c^2\bar{\psi}\psi. \tag{4}$$

Исходя из принципа локальности, потребуем инвариантности лагранжиана относительно более общих преобразований вида (2), а именно, допустим, что φ зависит от x. Это означает, что группа (2) действует в каждой точке независимо.

Оказывается, можно получить лагранжиан, инвариантный относительно таких преобразований

$$\psi \to e^{ie\varphi(x)}\psi, \qquad \bar{\psi} \to e^{-ie\varphi(x)}\bar{\psi}, \tag{5}$$

при помощи следующей процедуры:

1) вводим новое ковекторное поле A_α, которое при преобразованиях (5) преобразуется с помощью градиентных преобразований

$$A_\alpha \to A_\alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \quad (\hbar = c = 1); \tag{6}$$

2) вводим новый лагранжиан $\tilde{L}$, полагая

$$\tilde{L}\left(\psi, \bar{\psi}, \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\alpha}, A_\alpha\right) = L\left(\psi, \bar{\psi}, \nabla_\alpha\psi, \overline{\nabla_\alpha\psi}\right), \tag{7}$$

где

$$\nabla_\alpha\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + ieA_\alpha\psi; \tag{8}$$

выражение (7) является скаляром, поскольку $\nabla_\alpha\psi$ есть ковектор;

3) полный лагранжиан инвариантной теории должен иметь вид $L(\psi, \bar{\psi}, \nabla\psi, \overline{\nabla\psi}) + L_1\left(A, \frac{\partial A}{\partial x}\right)$, где член L_1 градиентно инвариантен. Вид члена L_1 будет обсуждаться в § 42.

Теорема 1. *Лагранжиан* (7) *инвариантен относительно* (*локальных*) *преобразований* (5), (6).

Доказательство. Вычислим, как преобразуется «ковариантная производная». Имеем $\nabla_\alpha\psi \to \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(e^{ie\varphi(x)}\psi\right) + ie\left(A_\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\right)\psi = e^{ie\varphi(x)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + ieA_\alpha\psi\right] = e^{ie\varphi(x)}\nabla_\alpha\psi$. Поэтому при преобразованиях (5), (6) новый лагранжиан не изменится:

$$L(e^{ie\varphi}\psi,\ e^{-ie\varphi}\bar{\psi},\ e^{ie\varphi}\nabla_\alpha\psi,\ e^{-ie\varphi}\overline{\nabla_\alpha\psi}) = L(\psi,\ \bar{\psi},\ \nabla_\alpha\psi,\ \overline{\nabla_\alpha\psi})$$

в силу инвариантности исходного лагранжиана. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\psi(x) = (\psi^1(x), \ldots, \psi^N(x))$ есть поле в пространстве $\mathbb{R}^n$ со значениями в (вещественном) векторном пространстве. Пусть задан лагранжиан $L\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\right)$, инвариантный относительно некоторой группы G матриц порядка N:

$$L\left(g\psi,\ g\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\right) = L\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\right), \quad g \in G. \tag{9}$$

Ковариантная производная поля $\psi(x)$ задается формулой

$$\nabla_\alpha\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + A_\alpha(x)\,\psi, \tag{10}$$

где $A_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ — набор матричнозначных функций в пространстве $\mathbb{R}^n$ со значениями в алгебре Ли группы G. Требуется, чтобы величины $A_\alpha(x)$ при заменах по x образовывали ковектор:

$$A_\alpha(x) = A_\beta(y)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad y = y(x). \tag{11}$$

Теорема 2. *При преобразованиях вида*

$$\psi(x) \to g(x)\,\psi(x), \tag{12}$$

$$A_\alpha(x) \to g(x)\,A_\alpha(x)\,g^{-1}(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha}\,g^{-1}(x) \tag{13}$$

ковариантная производная преобразуется по закону

$$\nabla_\alpha\psi \to g(x)\nabla_\alpha\psi. \tag{14}$$

Лагранжиан $\tilde{L}\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}, A_\alpha\right) = L(\psi, \nabla_\alpha\psi)$ *при указанных преобразованиях инвариантен.*

Доказательство. Из формул (10), (12), (13) имеем

$$\nabla_\alpha\psi(x) \to \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(g(x)\psi) + \left[gA_\alpha g^{-1} - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} g^{-1}\right] g\psi =$$

$$= g(x)\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + A_\alpha\psi\right] = g(x)\nabla_\alpha\psi.$$

Равенство (14) доказано. Заметим теперь, что ковариантная производная вектор-функции ψ образует ковектор:

$$\nabla_\alpha\psi(x) = \nabla_\beta\psi(y)\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}, \quad y = y(x),$$

так же, как и градиент $\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}$. Поэтому из равенства (14) и условия инвариантности (9) вытекает инвариантность нового лагранжиана:

$$L(g\psi, g\nabla_\alpha\psi) = L(\psi, \nabla_\alpha\psi).$$

Утверждение доказано.

Введенное поле A_α называют *калибровочным* (или *компенсирующим*) полем (или *связностью*), а преобразования вида (13) — *калибровочными преобразованиями*. Эти преобразования образуют *калибровочную группу*.

Требование инвариантности лагранжиана относительно группы локальных преобразований вида (12) определяет лагранжиан взаимодействия поля ψ с калибровочным полем, но не определяет лагранжиана самого калибровочного поля. Мы вернемся к этому вопросу в § 42.

Замечание. Частным случаем векторнозначных полей являются поля, принимающие значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Пусть $B(x)$ — такое поле. Калибровочное поле (связность) A_α определяет ковариантную производную поля $B(x)$ по формуле

$$\nabla_\alpha B = \frac{\partial B}{\partial x^\alpha} + [A_\alpha, B], \tag{15}$$

где $[A_\alpha, B] = A_\alpha B - BA_\alpha$ — коммутатор в алгебре Ли.

Задачи. 1. Проверьте, что при калибровочных преобразованиях вида

$$B(x) \to g(x)B(x)g(x)^{-1},$$

$$A_\alpha(x) \to g(x)A_\alpha(x)g^{-1}(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha}g^{-1}$$

ковариантная производная $\nabla_\alpha B$ преобразуется по закону

$$\nabla_\alpha B \to g(x)(\nabla_\alpha B)g^{-1}(x).$$

2. Проверьте, что бесконечно малые калибровочные преобразования могут быть представлены в виде

$$\psi(x) \to \psi(x) + B(x)\psi(x) + o(B),$$
$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \nabla_\mu B(x) + o(B),$$

где $B(x)$ — поле, принимающее значение в алгебре Ли.

2. Форма кривизны. Вычислим коммутатор двух ковариантных производных:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = \nabla_\mu\nabla_\nu\psi - \nabla_\nu\nabla_\mu\psi = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + A_\nu\psi\right) +$$
$$+ A_\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + A_\nu\psi\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + A_\mu\psi\right) - A_\nu\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + A_\mu\psi\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu]\right)\psi.$$

Введем обозначение

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu]. \tag{16}$$

Вывод. *Коммутатор операторов* ∇_μ, ∇_ν *есть оператор умножения на матрицу* $F_{\mu\nu}$.

Теорема 3. *При калибровочных преобразованиях* (13) *величины* $F_{\mu\nu}$ *преобразуются следующим образом*:

$$F_{\mu\nu} \to gF_{\mu\nu}g^{-1}. \tag{17}$$

Величины $F_{\mu\nu}$ *образуют антисимметричный тензор 2-го ранга (со значениями в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$*) и при заменах координат преобразуются по закону*

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\alpha\beta}(y)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}, \quad y = y(x). \tag{18}$$

Доказательство состоит в прямой подстановке формул (13) в выражение (16) для $F_{\mu\nu}$.

Форма $\Omega = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G называется *формой кривизны* связности A_μ.

Связность A_μ называется *тривиальной*, если существует такая функция $g_0(x)$ со значениями в группе G, что

$$A_\mu(x) = -\frac{\partial g_0(x)}{\partial x^\mu}g_0^{-1}(x). \tag{19}$$

Теорема 4. *Форма кривизны тривиальной связности равна нулю.*

Доказательство. Применяя к полю A_μ калибровочное преобразование $A_\mu \to \tilde{A}_\mu = gA_\mu g^{-1} - \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} g^{-1}$, $g = g_0^{-1}$, получим $\tilde{A}_\mu \equiv 0$. Согласно предыдущему утверждению форма кривизны $F_{\mu\nu}$ перейдет в форму $g_0^{-1} F_{\mu\nu} g_0$, которая есть нуль. Утверждение доказано.

Задачи. 1. Докажите обратное утверждение: если форма кривизны связности есть тождественный нуль, то связность тривиальна (локально).

2. Определим ковариантный дифференциал формы Ω, полагая

$$D\Omega = \sum_{\lambda<\mu<\nu} (\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda})\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (20)$$

Докажите, что если Ω — форма кривизны некоторой связности, то справедливо тождество Бьянки: $D\Omega \equiv 0$.

3. Основные примеры. а) $G = U(1) = SO(2)$. Мы уже знаем (см. § 38), что введение электромагнитного поля A_μ, взаимодействующего со скалярным комплексным полем ψ, эквивалентно замене в лагранжиане всех производных $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$ на ковариантные производные $\nabla_\alpha \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + ieA_\alpha \mu$. Именно с обсуждения этого примера мы и начали этот параграф. Здесь группа G — одномерная коммутативная группа $G = U(1) = \{e^{ie\varphi}\}$. Ее алгебра Ли также одномерна и коммутативна (т. е. имеет тождественно нулевой коммутатор) и состоит из чисто мнимых чисел. Связность — это вектор-потенциал самого электромагнитного поля $ieA_\mu(x)$. Форма кривизны этой связности — это тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ (члена с коммутаторами здесь нет). Тождество Бьянки — это условие замкнутости формы $\Omega = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = d(A_\mu dx^\mu)$.

Другие примеры связаны с некоммутативными калибровочными группами.

б) Линейная связность. $G = GL(n, \mathbb{R})$. Координаты $x^1, \ldots, x^n$ в некоторой области U задают базис $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ в пространстве векторов. Поэтому касательные векторные поля в области U можно рассматривать как векторнозначные функции $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ (со значениями в $\mathbb{R}^n$). Замена координат $x^\nu \to x^{\nu'} = x^{\nu'}(x)$ в области U определяет локальное преобразование вида

$$\xi^\nu \to \xi^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \xi^\nu = g(x)\, \xi. \quad (21)$$

Здесь матрица $g(x) = \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\right)$ обратима, т. е. лежит в группе

$GL(n, \mathbb{R})$. Обратная матрица имеет вид $g^{-1} = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}}\right)$. Алгебра Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$ образована всеми матрицами n-го порядка. Поэтому коэффициенты связности $A_\mu(x)$ сами являются матрицами n-го порядка. Обозначим их матричные элементы через $(A_\mu)^\nu_\lambda = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Ковариантная производная вектор-функции (т. е. касательного вектора) ξ имеет вид

$$(\nabla_\mu \xi)^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\lambda\mu}\xi^\lambda \leftrightarrow \nabla_\mu \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^\mu} + A_\mu \xi. \tag{22}$$

Калибровочное преобразование коэффициентов связности $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, задаваемое преобразованием координат, где $g(x) = \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\right)$, дает

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} \to \Gamma^{\nu'}_{\lambda'\mu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\lambda'}}\right). \tag{23}$$

Поскольку $A_\mu(x)$ есть ковектор, то $A_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A_\mu$, т. е.

$$\Gamma^{\nu'}_{\lambda'\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\lambda'}\partial x^{\mu'}}. \tag{24}$$

Мы получили выведенный в § 28 закон преобразования для символов Кристоффеля. Отметим, что матричнозначная форма кривизны этой связности имеет вид

$$(F_{\mu\nu})^\varkappa_\lambda = R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu}, \tag{25}$$

где $R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu}$ — тензор кривизны (см. § 30).

Пусть в области U задана риманова метрика $g_{\alpha\beta}(x)$. Построим (локально) нормированный базис попарно ортогональных касательных векторов $e_1, \ldots, e_n$:

$$\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

Ковариантные производные вида $\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \sum \Gamma_{\beta\alpha\gamma} e_\gamma$ для симметричной связности, согласованной с метрикой $g_{\alpha\beta}$, были вычислены в § 30. В этом случае калибровочные преобразования дают

$$\xi(x) \to g(x)\xi(x), \quad \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n),$$

где $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$ — касательное векторное поле, $g(x)$ — ортогональная $n \times n$-матрица при каждом x. Связность имеет вид $(A_\alpha)_{\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$, где при каждом α матрица $\Gamma_{\beta\alpha\gamma}$ антисимметрична по индексам β и γ и поэтому лежит в алгебре Ли ортогональной группы. Форма кривизны $(F_{\mu\nu})_{\varkappa\lambda} = R_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ также принимает значение в алгебре

Ли кососимметрических матриц:

$$R_{\varkappa\lambda,\ \mu\nu} = -R_{\lambda\varkappa,\ \mu\nu}$$

(см. § 30). Для псевдоримановой метрики все аналогично.

Для случая метрики на двумерной поверхности форма кривизны имеет вид

$$\Omega = K\sqrt{g}\,dx^1 \wedge dx^2, \tag{26}$$

где K — гауссова кривизна поверхности.

в) Картановская связность. G — аффинная группа (линейные преобразования и трансляции). Пусть задана любая линейная связность $\nabla_\mu \xi^\nu$ на касательных векторах. Определим «картановскую связность» формулой

$$\tilde{\nabla}_\mu \xi^\nu = \nabla_\mu \xi^\nu + \delta^\nu_\mu. \tag{27}$$

Задача. 1) Покажите, что связность $\tilde{\nabla}_\mu$ инвариантна относительно локальных аффинных преобразований вида

$$\xi \to g\xi + y, \tag{28}$$

где $g = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right)$ — матрица замены координат $x' = x'(x)$, а $y = (y^1(x), \ldots, y^n(x))$ — любой вектор.

2) Покажите, что форма кривизны этой связности (со значениями в алгебре Ли аффинной группы — см. §§ 4, 24) имеет вид

$$F_{\mu\nu} = (R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu},\ T^\lambda_{\mu\nu}). \tag{29}$$

Здесь $R^\varkappa{}_{\lambda,\mu\nu}$ — тензор кривизны связности, $T^\lambda_{\mu\nu}$ — тензор кручения.

г) Ковариантное дифференцирование спиноров и метрика. Пусть M^4 — пространственно-временной континуум с метрикой $g_{\alpha\beta}$ (типа (1, 3)). Связность, согласованная с этой метрикой, порождает ковариантное дифференцирование спиноров. Мы разберем подробно случай полуспинорного представления (см. § 40). Явная реализация этого представления такова. Представим произвольную эрмитову 2×2-матрицу U, $\overline{U}^{\mathrm{T}} = U$, в виде

$$U = \begin{pmatrix} u^0 + u^3 & u^1 + iu^2 \\ u^1 - iu^2 & u^0 - u^3 \end{pmatrix} = u^\alpha \sigma_\alpha, \quad \overline{U}^{\mathrm{T}} = U, \tag{30}$$

где $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — матрицы Паули (см. § 40); матрицы $\sigma_0, \ldots, \sigma_3$ образуют базис в (вещественном) пространстве эрмитовых матриц. Тогда определитель матрицы U имеет вид

$$\det U = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2.$$

Этот определитель сохраняется при преобразованиях вида $U \mapsto gU\bar{g}^{\mathrm{T}}$, где матрица g лежит в группе $SL(2, \mathbb{C})$. Таким образом, преобразование $U \mapsto gU\bar{g}^{\mathrm{T}}$ можно рассматривать как сохраняющее метрику преобразование пространства Минковского (с координатами u^0, u^1, u^2, u^3), т. е. как элемент группы $SO(3, 1)$. Мы получаем соответствие (гомоморфизм) $SL(2, \mathbb{C}) \to SO(3, 1)$, при котором матрицы g и $-g$ переходят в одну. Обратное отображение $SO(3, 1) \to SL(2, \mathbb{C})$ двузначно — это и есть полуспинорное представление.

Элементы пространства $\mathbb{C}^2$, в котором действует группа $SL(2,\mathbb{C})$, называем (двухкомпонентными) спинорами; поля со значениями в этом пространстве — спинорными полями. При действии группы $SL(2, \mathbb{C})$ они преобразуются по закону

$$\xi(x) \to g(x)\xi(x), \quad g(x) \in SL(2, \mathbb{C}). \tag{31}$$

Определено также сопряженное представление $\xi \to \bar{g}\xi$.

Ковариантная производная спинорного поля по определению имеет вид

$$\hat{\nabla}_\alpha \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} + A_\alpha \xi, \tag{32}$$

где A_α — комплексная бесследная 2×2-матрица (из алгебры Ли группы $SL(2, \mathbb{C})$). Мы требуем, чтобы сопряженные спиноры дифференцировались по правилу

$$\hat{\nabla}_\alpha \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x^\alpha} + \bar{A}_\alpha \xi. \tag{33}$$

Тем самым определена ковариантная производная от эрмитовых матриц (правило Лейбница). Эрмитовы матрицы U отождествляются с касательными векторами u^α посредством равенства $U = u^\alpha \sigma_\alpha$, где (u^α) — компоненты касательного вектора в «тетраде» векторов e_0, e_1, e_2, e_3, $e_0^2 = -e_1^2 = -e_2^2 = -e_3^2 = 1$ и векторы e_α попарно ортогональны. При таком отождествлении локальные преобразования спиноров вида (31) соответствуют локальным лоренцевым преобразованиям из группы $SO(3, 1)$. Наложим требование, чтобы ковариантная производная $\hat{\nabla}_\alpha U$, определенная по спинорной связности (32), (33), совпадала с выражением $\sigma_\beta \nabla_\alpha u^\beta$, где $\nabla_\alpha u^\beta$ — ковариантная производная вектора u^β относительно симметричной связности, согласованной с метрикой $g_{\mu\nu}$:

$$\hat{\nabla}_\alpha U = \sigma_\beta \nabla_\alpha u^\beta, \qquad U = u^\beta \sigma_\beta \tag{34}$$

(компоненты этой связности в тетраде были вычислены в § 30).

Задача. Доказать, что условиями (32)—(34) ковариантная производная спинорных полей определяется однозначно, причем

справедлива формула

$$A_\alpha = -\frac{1}{2}\Gamma^\nu_{\beta\alpha}\sigma_\nu\sigma_\beta \tag{35}$$

(суммирование по индексу β с учетом знака, т. е. слагаемое, отвечающее $\beta = 0$, берется с плюсом, остальные — с минусом).

Полное спинорное представление группы $SO(3, 1)$ разлагается в прямую сумму представления $SL(2, \mathbb{C})$ и комплексно сопряженного. Таким образом равенства (32)—(34) позволяют ковариантно дифференцировать также четырехкомпонентные спиноры.

Задача. Вывести вид уравнения Дирака в присутствии метрики.

Замечание. Каждому спинору $\xi = (\xi^0, \xi^1)$ соответствует эрмитова матрица $U = (\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta)$. Отвечающий ей вектор $u^h = \sigma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\bar{\xi}^\beta$ изотропен, поскольку матрица U вырождена (имеет нулевой детерминант).

Задача. Выберем базис $\xi = (\xi^0, \xi^1)$, $\eta = (\eta^0, \eta^1)$ в пространстве спиноров $\mathbb{C}^2$ такой, что $\xi^0\eta^1 - \xi^1\eta^0 = 1$. Показать что с этим базисом канонически связан репер в пространстве Минковского (тетрада), в котором метрика принимает вид

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 42. Примеры калибровочно инвариантных функционалов. Уравнения Максвелла и Янга — Миллса. Функционалы с тождественно нулевой вариационной производной (характеристические классы)

Лагранжиан $L = L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ калибровочного поля должен обладать следующими свойствами:

1) $L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ — скаляр,

2) $L(A_\mu, \partial A_\mu/\partial x^\nu)$ не меняется при калибровочных преобразованиях.

Простейший такой лагранжиан имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} g^{\mu\lambda}g^{\nu\varkappa}\langle F_{\mu\nu}, F_{\lambda\varkappa}\rangle, \tag{1}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu].$$

Здесь $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ — произвольная метрика в рассматриваемой области: через $\langle,\rangle$ обозначена форма Киллинга для алгебры Ли группы G (мы считаем, что она не вырождена).

Построенный лагранжиан является скаляром, поскольку он образован посредством алгебраических операций над тензорами.

Проверим его калибровочную инвариантность. При калибровочных преобразованиях (41.13) форма кривизны $F_{\mu\nu}$ перейдет в $gF_{\mu\nu}g^{-1}$. Ввиду инвариантности формы Киллинга (см. § 24) будем иметь

$$\langle gF_{\mu\nu}g^{-1},\ gF_{\lambda\varkappa}g^{-1}\rangle = \langle F_{\mu\nu},\ F_{\lambda\varkappa}\rangle;$$

отсюда получаем калибровочную инвариантность лагранжиана (1). Пусть метрика $g_{\mu\nu}$ евклидова или псевдоевклидова: $g_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu\delta_{\mu\nu}$, $\varepsilon_\mu = \pm 1$. Выведем уравнения Эйлера — Лагранжа для экстремалей функционала

$$S[A_\mu] = \int -\frac{1}{4}\langle F_{\mu\nu},\ F_{\mu\nu}\rangle\, d^n x \tag{2}$$

(по дважды повторяющимся индексам μ, ν суммирование с учетом знаков ε_ν, $\varepsilon_\mu = \pm 1$).

Теорема 1. *Для экстремалей функционала* (2) *имеем уравнения*

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

где $\nabla_\mu F_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + [A_\mu,\ F_{\mu\nu}]$ (*см.* § 41).

Доказательство. Для малой локальной вариации δA_μ будем иметь

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \langle F_{\mu\nu},\ \delta F_{\mu\nu}\rangle\, d^n x,$$

где $\delta F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu - \dfrac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu + [\delta A_\mu,\ A_\nu] + [A_\mu,\ \delta A_\nu]$. Интегрируя в выражении для δS по частям:

$$\int \left\langle F_{\mu\nu},\ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu \right\rangle d^n x = -\int \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu},\ \delta A_\nu \right\rangle d^n x,$$

и используя инвариантность формы Киллинга:

$$\langle F_{\mu\nu},\ [\delta A_\mu,\ A_\nu]\rangle = -\langle [F_{\mu\nu},\ A_\nu],\ \delta A_\mu\rangle,$$

получим

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \left\{ \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu},\ \delta A_\nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu},\ \delta A_\mu \right\rangle + \right.$$

$$\left. + \langle [F_{\mu\nu},\ A_\nu],\ \delta A_\mu\rangle - \langle [F_{\mu\nu},\ A_\mu],\ \delta A_\nu\rangle \right\} d^n x.$$

После переобозначения индексов получим

$$\delta S = \int \left\langle \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + [A_\mu,\ F_{\mu\nu}],\ \delta A_\nu \right\rangle d^n x = \int \langle \nabla_\mu F_{\mu\nu},\ \delta A_\nu\rangle d^n x,$$

причем δS равняется нулю на экстремалях при произвольной вариации δA_ν. Поэтому для экстремалей функционала (2) получаем уравнение $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0$. Утверждение доказано.

Замечание. Сами уравнения $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0$ и тождество Бьянки $\nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \nabla_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ могут быть написаны и без гипотезы невырожденности метрики Киллинга. Однако они не будут иметь (во всяком случае простого) лагранжева вида.

Задача. Для связности Картана аффинной группы эти уравнения после подстановки связи между метрикой и кривизной примут вид уравнений Эйнштейна (извлечение из современных работ)

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0. \tag{4}$$

Пример. В абелевом случае ($G = U(1)$ — электромагнитное поле) получаем лагранжиан вида

$$L = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)^2 = -\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu}, \tag{5}$$

т. е. стандартный лагранжиан электромагнитного поля (см. § 38). Уравнения (3) совпадают здесь с уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{6}$$

Замечание. Калибровочное поле A_μ для группы $G = SU(2)$ называется часто *полем Янга — Миллса.*

Задача. Вывести уравнения экстремалей $\frac{\delta S}{\delta A} = 0$ для лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4} g^{\mu\lambda} g^{\nu\varkappa} \langle F_{\mu\nu}, F_{\lambda\varkappa} \rangle,$$

где метрика $g_{\mu\nu}(x)$ произвольна и фиксирована (внешнее поле).

Действие вида

$$S[A] = \int \operatorname{Sp} F^2_{\mu\nu} d^4x$$

в четырехмерном пространстве обладает дополнительной симметрией — относительно группы всех конформных преобразований в $\mathbb{R}^4$ (или в $\mathbb{R}^4_{3,1}$) (см. описание этой группы в § 15). Дифференциал любого конформного преобразования сводится к дилатации и вращению (см. § 15), поэтому достаточно проверить конформную инвариантность только относительно дилатаций $x \to \lambda x$. При таких преобразованиях будем иметь

$$F_{\mu\nu} \to \lambda^{-2} F_{\mu\nu} \quad (F_{\mu\nu} \text{ — тензор}), \qquad d^4x \to \lambda^4 d^4x,$$

где d^4x — элемент объема. Отсюда, очевидно, имеем

$$\operatorname{Sp} F^2_{\mu\nu} d^4x \to \operatorname{Sp} F^2_{\mu\nu} d^4x.$$

Вывод. *Лагранжиан* (2) *и уравнения Максвелла — Янга — Миллса* (3) *в пространстве Минковского конформно инвариантны, т. е. имеют группу симметрий* $O(4, 2)$ (см. § 15).

Важную роль играют также калибровочно инвариантные дифференциальные формы со скалярными значениями, зависящие от A_μ. Например, форма (степени 2)

$$c_1 = \operatorname{Sp}\Omega = \sum_{\mu<\nu} \operatorname{Sp} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{7}$$

калибровочно инвариантна:

$$\operatorname{Sp}(g\Omega g^{-1}) = \operatorname{Sp}\Omega.$$

Здесь Sp обозначает след матрицы. Форма $c_1 = \operatorname{Sp}\Omega$ (локально) является точной (полным дифференциалом): $\operatorname{Sp}\Omega = d(\operatorname{Sp} A)$, где $A = A_\mu dx^\mu$. Действительно,

$$\operatorname{Sp}\Omega = \sum_{\mu<\nu} \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu]\right) dx^\mu \wedge dx^\nu =$$

$$= \sum_{\mu<\nu} \operatorname{Sp}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu = d \operatorname{Sp} A,$$

поскольку след коммутатора матриц равен нулю.

При локальной вариации связности $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$ форма $\operatorname{Sp}\Omega$ переходит в форму $\operatorname{Sp}\Omega + \operatorname{Sp}\delta\Omega$, где $\operatorname{Sp}\delta\Omega = d \operatorname{Sp}\delta A$ — точная форма. Поэтому функционал

$$S_1[A_\mu] = \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{Sp}\Omega$$

(для двумерного пространства) имеет тождественно нулевую вариационную производную

$$\delta S_1[A_\mu] = \int_{\mathbb{R}^2} d(\operatorname{Sp}\delta A) = 0 \tag{8}$$

в силу локальности вариации.

Определение 1. Замкнутые калибровочно инвариантные формы ω такие, что функционалы $\int \omega$ имеют тождественно нулевую вариационную производную, $\frac{\delta \int \omega}{\delta A} = 0$ будем называть (*дифференциально геометрическими*) *характеристическими классами.*

Другие характеристические классы строятся так:

$$c_i = \mathrm{Sp}\,(\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega) = \mathrm{Sp}\,\Omega^i, \quad i \geqslant 1, \tag{9}$$

c_i — это калибровочно инвариантная форма ранга $2i$; коэффициенты формы Ω в (9) перемножаются как матрицы.

Задача. а) Докажите, что формы c_i замкнуты при $i \geqslant 1$.

б) Докажите, что функционал

$$S_i[A_\mu] = \int\limits_{\mathbb{R}^{2i}} c_i$$

(для пространства размерности $2i$) имеет тождественно нулевую вариационную производную:

$$\frac{\delta S_i[A]}{\delta A_\mu} \equiv 0.$$

в) Докажите это также для функционалов вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^4} \alpha c_1 \wedge c_1 + \beta c_2, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^6} \alpha c_1^3 + \beta c_1 \wedge c_2 + \gamma c_3$$

и т. д. для любых многочленов от c_i.

Для группы $G = SO(2n)$ нетривиальными являются лишь $p_i = c_{2i}$; $c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = 0$. Кроме того, имеется еще один характеристический класс

$$\chi_n = \varepsilon^{i_1 \ldots i_{2n}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{2n-1} i_{2n}}, \tag{10}$$

где $\varepsilon^{i_1 \ldots i_{2n}}$ — знак перестановки $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 2n \\ i_1 & \ldots & i_{2n} \end{pmatrix}$, Ω_{ij} — матричные элементы формы кривизны

$$\Omega = \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Пример 1. При $n = 1$ получим для χ_1 выражение (см. предыдущий параграф)

$$\chi_1 = \varepsilon^{i_1 i_2} \Omega_{i_1 i_2} = 2K \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2. \tag{11}$$

Как известно (см. § 37), функционал вида

$$S[g_{ij}] = \int\limits_{\mathbb{R}^2} K \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} R \sqrt{g}\, dx_1 \wedge dx^2 \tag{12}$$

имеет тождественно нулевую вариационную производную по метрике (см. § 37).

Пример 2. При $n = 2$ имеем χ_2 и c_2. Для римановой метрики

$$\chi_2 = \varepsilon^{ijkl} R_{ij\mu\nu} R_{kl\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma,$$

$$c_2 = R_{ij\mu\nu} R^{ij}_{\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma.$$

Задача. Докажите, что все формы χ_n замкнуты и являются характеристическими классами.

Общий характеристический класс для $G = SO(2n)$ имеет вид многочлена от χ_n, c_2, c_4, ..., c_{2n-2}.

Задача. Покажите, что для $G = SO(4)$ функционалы

$$\int_{\mathbb{R}^4} \chi_2, \quad \int_{\mathbb{R}^4} c_2, \quad \int_{\mathbb{R}^8} \chi_2^2, \quad \int_{\mathbb{R}^8} \chi_2 c_2, \quad \int_{\mathbb{R}^8} c_2^2$$

имеют тождественно нулевую вариационную производную, т. е. все формы χ_2, c_2, χ_2^2, $\chi_2 c$, c_2^2 являются характеристическими классами.

Часть II

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ

Глава 1

ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ

§ 1. Понятие многообразия

1. Определение многообразия. Понятие многообразия представляет собой, в сущности, обобщение впервые математически описанного Гауссом процесса картографирования земной поверхности. Это обобщение оказывается чрезвычайно широким и применимо к громадному классу сложнейших геометрических фигур.

Напомним, в чем состоит сам процесс картографирования. Коллектив людей, которому поручено составить карту земной поверхности, разбивается на группы, исходя из следующих естественных требований.

1) Каждый кусок земной поверхности поручен какой-нибудь группе (с номером i).

2) Если области, порученные двум разным группам (с номерами i и j), пересекаются, то этим группам необходимо четко описать на своих картах правило соответствия их карт в общей области. Обычно это правило пересчета на реальных картах заключается в нанесении на карту достаточно подробного списка наименований географических пунктов, откуда сразу видно, какие точки на разных картах соответствуют друг другу.

Каждая из составленных карт, как мы помним, нанесена на плоский лист бумаги с какими-то координатами на нем. Совокупность этих листов, именуемых картами, называется атласом земной поверхности. Кроме того, на картах обычно указывается правило вычисления истинной длины любого пути, попавшего в данную карту; к этому мы вернемся позднее (понятие длины мы не включаем в понятие многообразия).

Исходя из этих соображений, вводится общее довольно пространное определение, к которому мы и переходим.

Определение 1. *Дифференцируемым n-мерным многообразием* называется произвольное множество точек M, в котором введена следующая структура: 1) множество M представлено в виде объединения конечного или счетного числа областей U_q; 2) в каждой области U_q заданы координаты x_q^α, $\alpha = 1, \ldots, n$,

называемые *локальными координатами* *). Сами области U_q при этом называют *координатными окрестностями* или *картами*. Пересечение $U_q \cap U_p$ каждой пары этих областей в множестве M, если оно не пусто, само является областью, в которой уже действуют две системы локальных координат (x_p^α) и (x_q^α). Требуется, чтобы каждая из этих систем локальных координат выражалась через другую дифференцируемым образом:

$$\begin{aligned} x_p^\alpha &= x_p^\alpha(x_q^1, \ldots, x_q^n), \quad \alpha = 1, \ldots, n; \\ x_q^\beta &= x_q^\beta(x_p^1, \ldots, x_p^n), \quad \alpha = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда якобиан $\det\left(\dfrac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ будет отличен от нуля. Функции (1) называются *функциями перехода* (от координат x_q^β к координатам x_p^α и обратно). Общий класс гладкости функций перехода для всех пересекающихся пар (p, q) называется классом гладкости самого многообразия M, заданного с помощью «атласа» $\{U_q\}$. Простейший пример многообразия — это само евклидово пространство или любая его область.

Область в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ является $2n$-мерной вещественной областью и также является многообразием.

По двум многообразиям $M = \bigcup\limits_q U_q$, $N = \bigcup\limits_p V_p$ можно построить их прямое произведение $M \times N$. Точками многообразия $M \times N$ по определению будут пары точек (m, n); покрытие координатными областями определяется так:

$$M \times N = \bigcup_{p,q} U_q \times V_p. \tag{2}$$

Если (x_q^α) — координаты в области U_q, (y_p^β) — координаты в области V_p, то координатами в области $U_q \times V_p$ будут (x_q^α, y_p^β).

В дальнейшем встретится ряд других примеров многообразий.

Следует отметить, что введенное нами общее понятие многообразия с чисто логической точки зрения излишне широко; его следует ограничить, и это будет в дальнейшем сделано (см. ниже). Однако формулировка этих логических ограничений будет произведена на языке общей топологии, который мы пока не вводили. Можно это обойти, требуя с самого начала, чтобы многообразие, по определению, располагалось как гладкая неособая поверхность в евклидовом пространстве какого-то (может быть, большого) числа измерений. Логически это неестественно; проще сначала абстрактно определить многообразия и затем доказать,

*) Иначе говоря, задано взаимно однозначное отображение φ_q: $U_q \to \mathbb{R}^n$, где образ $\varphi_q(U_q)$ есть открытая область в $\mathbb{R}^n$. Это отображение φ_q и вводит в U_q координатную систему $x_q^1, \ldots, x_q^n$, принося с собой координаты из $\mathbb{R}^n$.

что все они могут быть реализованы как поверхности в евклидовом пространстве.

Напомним некоторые понятия из общей топологии.

1. *Топологическое пространство* — это множество точек X, в котором указано, какие подмножества являются *открытыми*. При этом мы требуем, чтобы пересечение любых двух и, значит, любого конечного числа открытых множеств было открыто и чтобы объединение любого числа открытых множеств было открыто. Все X и пустое множество также должны быть открытыми.

Дополнение к открытому множеству называется *замкнутым* множеством.

Уже такое определение, как известно из курса математического анализа, дает возможность ввести непрерывные функции и отображения: отображение $f\colon X \to Y$ одного топологического пространства в другое непрерывно, если полный прообраз $f^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subset Y$ является открытым в X.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ вводится «евклидова топология», в которой открытыми множествами считаются обычные открытые области (см. часть I, § 1). «Индуцированная топология» на произвольном подмножестве $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет в качестве открытых множеств V пересечения $U \cap A = V$, где U есть обычная открытая область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Топология (или евклидова топология) на многообразии M определяется следующим семейством открытых множеств (областей): в каждой координатной области $U_q \subset M$ открытыми считаются открытые области в $\mathbb{R}^n$. Вся совокупность открытых множеств в M получается из этих множеств с помощью операции счетного объединения.

Непрерывными отображениями (функциями) при такой топологизации многообразия M оказываются отображения (функции), непрерывные в каждой координатной области U_q в обычном смысле.

Открытое подмножество V многообразия $M = \bigcup\limits_q U_q$ наследует от M структуру многообразия $V = \bigcup\limits_q V_q$, где области V_q имеют вид

$$V_q = V \cap U_q. \tag{3}$$

2. Важным классом топологических пространств являются *метрические пространства*. Для любых двух точек x, y метрического пространства X определено расстояние $\rho(x, y)$ между этими точками. Требуется, чтобы это расстояние обладало следующими свойствами:

1) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2) $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ («неравенство треугольника»).

Например, n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является метрическим относительно евклидова расстояния между точками $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n} (x^\alpha - y^\alpha)^2}.$$

В метрическое пространство вводится топология: открытыми множествами являются объединения (произвольных семейств) открытых шаров, где открытый шар с центром x_0 радиуса ε есть совокупность таких точек x, что $\rho(x_0, x) < \varepsilon$.

Для n-мерного евклидова пространства эта топология совпадает с введенной выше «евклидовой топологией».

Важный для нас пример — это многообразие, снабженное римановой метрикой (определение расстояния между точками многообразия с римановой метрикой см. в п. 2)).

3. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если любую пару его точек можно окружить непересекающимися друг с другом открытыми множествами.

В частности, метрическое пространство хаусдорфово: если $\rho(x, y) = 2\varepsilon$, то открытые шары радиуса ε с центрами в точках x и y не пересекаются в силу неравенства треугольника. *В дальнейшем мы будем всегда говорить только о хаусдорфовых пространствах.* В частности, в определение многообразия мы внесем еще один пункт: многообразие предполагается хаусдорфовым пространством.

4. Пространство X называется *компактным*, если из любой последовательности точек можно выбрать сходящую последовательность.

Эквивалентно: если X покрыто счетным числом открытых областей, то из них можно выбрать конечное число покрывающих X.

5. *Линейно связное* пространство обладает тем свойством, что любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

6. Другим важным для нас примером топологического пространства является *пространство отображений* $M \to N$ многообразия M в многообразие N, точное описание топологии которого будет дано ниже.

Понятие многообразия лишь на первый взгляд может показаться чересчур абстрактным. Фактически же даже в евклидовом пространстве или его областях мы зачастую бываем вынуждены делать замены координат и следить за законом преобразования тех или иных величин. Более того, часто удобно в разных областях пространства решать ту или иную задачу в разных координатах, затем следить, как решения «сшиваются» в общей области действия двух различных координатных систем. Кроме того, не все поверхности допускают возможность введения единой

системы координат без особых точек (например, сфера не допускает).

Важный класс многообразий составляют ориентируемые многообразия.

Определение 3. Многообразие M называется *ориентированным*, если якобианы функций перехода $J_{pq} = \det\left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)$ положительны для всех пересекающихся пар областей.

Например, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ по определению ориентировано. То же самое пространство $\mathbb{R}^n$ с другими координатами $(y^1, \ldots, y^n)$ также по определению ориентировано. При этом согласно сказанному выше якобиан замены $x^\alpha = x^\alpha(y^1, \ldots, y^n), J = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)$ отличен от нуля и потому имеет постоянный знак.

Определение 4. Мы скажем, что координаты (x) и (y) определяют одну и ту же ориентацию в $\mathbb{R}^n$ если $J > 0$, и противоположную, если $J < 0$.

Таким образом, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, обладает двумя ориентациями. В дальнейшем будет показано, что связное многообразие можно ориентировать двумя способами, если ориентация на нем вообще существует.

2. Отображения многообразий; тензоры на многообразии. Пусть заданы два многообразия: $M = \bigcup\limits_p U_p$ (координаты x_p^α) и $N = \bigcup\limits_q V_q$ (координаты y_q^β).

Определение 5. Отображение

$$f\colon M \to N$$

называется *гладким класса гладкости* k, если функции $y_q^\beta(x_p^1, \ldots, x_p^n)$ для всех пар (q, p), когда они определены, в областях, где они определены, являются гладкими класса гладкости k. При этом не имеет смысла говорить о классе гладкости отображения, более высоком, чем класс гладкости самих многообразий M, N.

В случае, если N есть действительная прямая, $N = \mathbb{R}$, отображение $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется числовой функцией $f(x)$, где x — точка многообразия M.

Возможна ситуация, когда гладкое отображение (или числовая функция) определено не на всем многообразии, а лишь на его части. Примером такой ситуации служат сами локальные координаты x_p^α, которые при любом α являются числовыми функциями и определены лишь в области U_p по самому своему смыслу.

Определение 6. Два многообразия M и N называются *гладко эквивалентными* (*диффеоморфными*), если найдется взаимно однозначное и гладкое в обе стороны отображение какого-то класса гладкости $k \geqslant 1$:

$$f\colon M \to N, \quad f^{-1}\colon N \to M.$$

В частности, якобиан локальных координат $J_{pq} = \det\left(\frac{\partial y_q^\beta}{\partial x_p^\alpha}\right)$ всюду отличен от нуля во всех тех областях, где эти функции $y_q^\beta = f(x_p^1, \ldots, x_p^n)^\beta$ определены.

Мы всегда будем предполагать, что класс гладкости как самих многообразий, так и их отображений таков, какой нужен для наших целей (всегда $\geqslant 1$; если нужны вторые производные, то не менее двух, и т. д.).

Пусть на многообразии M задана кривая $x = x(\tau)$, $a \leqslant \tau \leqslant b$, где x — точка многообразия. Пока кривая находится в области U_p действия локальной системы координат x_p^α, мы можем записать кривую в виде

$$x_p^\alpha = x_p^\alpha(\tau), \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

В этих координатах мы имеем вектор скорости

$$\dot{x} = \left(\dot{x}_p^1, \ldots, \dot{x}_p^n\right).$$

В области действия двух координатных систем $U_p \cap U_q$ мы имеем две записи: $x_p^\alpha(\tau)$ и $x_q^\beta(\tau)$, причем $x_p^\alpha\left(x_q^1(\tau), \ldots, x_q^n(\tau)\right) \equiv \equiv x_p^\beta(\tau)$.

Для скорости получим

$$\dot{x}_p^\alpha = \sum_\beta \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta} \dot{x}_q^\beta.$$

На основе этой формулы, как и в евклидовом пространстве, вводится

Определение 7. *Касательным вектором* к многообразию M в произвольной точке x называется вектор, записываемый в системе локальных координат (x_q^α) набором чисел ξ_q^α; записи одного и того же вектора в разных системах локальных координат, содержащих эту точку, связаны формулой

$$\xi_p^\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right)_x \xi_q^\beta.$$

Касательные векторы к n-мерному многообразию M в данной точке x образуют n-мерное линейное пространство $T_x = T_xM$ (касательное пространство). В частности, вектор скорости любой

гладкой кривой является касательным вектором. Выбор локальных координат (x^α) в окрестности точки x задает базис $e_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$ в касательном пространстве T_x.

Гладкое отображение f многообразия M в многообразие N определяет индуцированное линейное отображение

$$f_*\colon\ T_x \to T_{f(x)}.$$

При этом вектор скорости кривой $x = x(t)$ на многообразии M по определению переходит в вектор скорости кривой $f(x(t))$ на многообразии N. В локальных координатах (x^α) (в окрестности точки x) и (y^β) (в окрестности точки $f(x)$) отображение f имеет вид

$$y^\beta = f^\beta(x^1, \ldots, x^n), \qquad \beta = 1, \ldots, m.$$

Тогда индуцированное отображение f_* касательных пространств задается матрицей Якоби

$$\xi^\alpha \to \eta^\beta = \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha.$$

Для числовой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ на многообразии M индуцированное отображение f_* есть линейная числовая функция на каждом касательном пространстве к многообразию M (ковектор). Эта линейная функция совпадает с дифференциалом df функции f.

Определение 8. *Римановой* (*псевдоримановой*) метрикой на многообразии M называется положительная (невырожденная) квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке многообразия и гладко зависящая от локальных координат. В каждой области U_p действия локальных координат (x_p^α) метрика задается симметрической матрицей

$$g_{\alpha\beta}^{(p)}(x_p^1, \ldots, x_p^n), \quad |\xi|^2 = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\xi_p^\beta$$

(по повторяющимся индексам α, β подразумевается, как обычно, суммирование) для любого вектора ξ в точке x. Метрика задает симметрическое скалярное произведение двух векторов в одной и той же точке по обычной формуле

$$\langle \xi, \eta\rangle = g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\eta_p^\beta = \langle \eta, \xi\rangle,$$
$$|\xi|^2 = \langle \xi, \xi\rangle.$$

Это определение не зависит от выбора локальных координат:

$$g_{\alpha\beta}^{(p)}\xi_p^\alpha\eta_p^\beta = g_{\gamma\delta}^{(q)}\xi_q^\gamma\eta_q^\delta,$$

или

$$g_{\gamma\delta}^{(q)} = \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\gamma}\, g_{\alpha\beta}^{(p)}\, \frac{\partial x_p^\beta}{\partial x_q^\delta}.$$

Определение 9. *Тензор типа* (k, l) на многообразии задается в каждой системе локальных координат (x^α_β) набором функций ${}^{(p)}T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}(x)$. В других локальных координатах (x^β_q), содержащих точку x, этот же тензор задается величинами ${}^{(q)}T^{s_1\dots s_k}_{t_1\dots t_l}(x)$, причем справедлива формула

$$ {}^{(q)}T^{s_1\dots s_k}_{t_1\dots t_l} = \frac{\partial x^{s_1}_q}{\partial x^{i_1}_p}\cdots\frac{\partial x^{s_k}_q}{\partial x^{i_k}_p}\frac{\partial x^{j_1}_p}{\partial x^{t_1}_q}\cdots\frac{\partial x^{j_l}_p}{\partial x^{t_l}_q}\,{}^{(p)}T^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_l}. $$

Все определения и результаты гл. 3 части I, полученные для тензоров в области n-мерного пространства, переносятся автоматически на тензоры на многообразии.

Метрика $g_{\alpha\beta}$ на многообразии — пример тензора типа (0,2). На ориентированном многообразии метрика порождает элемент объема

$$ T_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \sqrt{|g|}\,\varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_n}, \qquad g = \det(g_{\alpha\beta}), $$

где $\varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ — антисимметричный тензор ранга n, $\varepsilon_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \pm 1$. Это выражение является тензором относительно замен с положительным якобианом и поэтому корректно определено для ориентированного многообразия. Элемент объема удобно записать в виде дифференциальной формы в любых локальных координатах (положительной ориентации)

$$ \Omega = \sqrt{|g|}\,dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. $$

Риманова метрика dl^2 на многообразии M задает на нем структуру метрического пространства, где расстояние $\rho(P, Q)$ между точками P, Q определяется формулой

$$ \rho(P, Q) = \min_\gamma \int_\gamma dl $$

(минимум берется по всем кусочно гладким кривым, соединяющим точки P и Q). Топология, определяемая этой структурой метрического пространства, совпадает с евклидовой топологией многообразия M (проверьте!).

В силу результатов части I любые близкие точки на многообразии можно соединить геодезической. Далекие точки уже нельзя, вообще говоря, соединить отрезком геодезической, но можно всегда соединить ломаной геодезической.

3. Вложения и погружения многообразий. Многообразия с краем.

Определение 10. Многообразие M размерности m называется подмногообразием многообразия N размерности $n > m$,

если задано взаимно однозначное гладкое отображение $f\colon M \to N$ такое, что индуцированное отображение f_* является вложением касательных пространств в каждой точке. Другими словами, ранг матрицы Якоби этого отображения в локальных координатах равен m. Отображение f называется вложением многообразий.

Если в этом определении отказаться от требования взаимной однозначности отображения f, то мы получаем *погружение* многообразия M в N (допускаются самопересечения).

Мы всегда будем ограничиваться подмногообразиями, заданными системой уравнений в каждой координатной окрестности или карте U_p:

$$\left.\begin{aligned} f_p^1(x_p^1, \ldots, x_p^n) &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\

§ 2. Простейшие примеры многообразий

1. Поверхности в евклидовом пространстве. Группы преобразований как многообразия. Поверхность размерности k в n-мерном евклидовом пространстве задается набором уравнений

$$f_i(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-k, \tag{1}$$

причем ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ равен $n-k$. Если в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^k)$, лежащей на этой поверхности, отличен от нуля минор $J_{j_1 \ldots j_{n-k}}$, составленный из столбцов матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$ с номерами $j_1, \ldots, j_{n-k}$, то локальными координатами $y^1, \ldots, y^k$ в окрестности этой точки будут

$$(y^1, \ldots, y^k) = \left(x^1, \ldots, \widehat{x^{j_1}}, \ldots, \widehat{x^{j_{n-k}}}, \ldots, x^n\right), \tag{2}$$

где крышка сверху означает, что этот номер пропущен (ср. часть I, § 7, п. 1). Вся поверхность покрыта областями вида $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ где $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ — совокупность точек, в которых отличен от нуля минор $J_{j_1 \ldots j_{n-k}}$.

Теорема 1. *Покрытие областями* $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{n-k}$, *с локальными координатами* (2) *задает на поверхности* (1) *структуру гладкого многообразия.*

Доказательство. В области $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ на поверхности (1) справедливы соотношения

$$x^{j_i} = \varphi^i(y^1, \ldots, y^k), \quad i = 1, \ldots, n-k,$$

где φ^i — гладкие функции. Аналогично в области $U_{s_1 \ldots s_{n-k}}$ с координатами

$$(z^1, \ldots, z^k) = \left(x^1, \ldots, \widehat{x^{s_1}}, \ldots, \widehat{x^{s_{n-k}}}, \ldots, x^n\right)$$

имеем

$$x^{s_i} = \psi^i(z^1, \ldots, z^k), \quad i = 1, \ldots, n-k,$$

где $\psi^i = \psi^i(z^1, \ldots, z^k)$ — гладкие функции. На пересечении областей $U_{j_1 \ldots j_{n-k}}$ и $U_{s_1 \ldots s_{n-k}}$ возникают гладкие функции перехода $(y) \to (z)$ и $(z) \to (y)$:

$$\begin{aligned}
y^1 &= z^1 && (= x^1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{j_1-1} &= z^{j_1-1} && \left(= x^{j_1-1}\right),\\
\varphi^1(y^1, \ldots, y^k) &= z^{j_1} && \left(= x^{j_1}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{j_1} &= z^{j_1+1} && \left(= x^{j_1+1}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
y^{s_1-2} &= z^{s_1-1} && \left(= x^{1_1-s}\right),\\
y^{s_1-1} &= \psi^1(z^1, \ldots, z^k) && \left(= x^{s_1}\right),\\
y^{s_1} &= z^{s_1} && \left(= x^{s_1+1}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
y^h &= z^h && \left(= x^n\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

(эта запись предполагает, что $1 < j_1 < s_1 < j_2 < \ldots$). Эти отображения взаимно обратны. Напомним, что у гладких отображений с гладким обратным якобиан всегда отличен от нуля. Теорема доказана.

Замечание 1. Нетрудно вычислить якобиан функций (3) перехода $(y) \to (z)$: он равен

$$J_{(y)\to(z)} = \pm \frac{J_{s_1 \ldots s_{n-k}}}{J_{j_1 \ldots j_{n-k}}} \neq 0.$$

Замечание 2. Касательное пространство в каждой точке к рассмотренному многообразию отождествляется с линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$, задаваемым системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha &= 0,\\
&\cdots\cdots\\
\frac{\partial f_{n-k}}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Векторы $\operatorname{grad} f_i = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^\alpha}\right)$, $i = 1, \ldots, n-k$, ортогональны к поверхности в каждой точке (относительно стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$).

Докажем, что на неособой поверхности возникает ориентация. Для этого мы приведем здесь еще одно определение ориентированного многообразия.

Рассмотрим в произвольной точке x n-мерного многообразия M произвольные невырожденные реперы τ из n касательных векторов. Любые два репера τ_1, τ_2 связаны невырожденным линейным преобразованием

$$\tau_1 = A\tau_2.$$

Будем говорить, что класс ориентации реперов τ_1, τ_2 одинаков, если детерминант $\det A$ положителен. Если $\det A < 0$, то будем

говорить, что реперы τ_1, τ_2 относятся к классам противоположной ориентации. Тем самым в каждой точке x многообразия M имеются два класса касательных невырожденных n-реперов. Поскольку репер τ можно непрерывно смещать из точки x в близкую точку многообразия, имеет смысл говорить о непрерывной зависимости классов ориентации от точки многообразия. Дадим теперь другое определение ориентации многообразия.

Определение 1. а) Многообразие называется *ориентированным*, если в каждой точке выбран один класс ориентации реперов, непрерывно зависящий от точки.

б) Если такой выбор вообще возможен, то многообразие называется *ориентируемым*. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

Утверждение. Определение 1.3 эквивалентно определению 1, данному в этом параграфе.

Доказательство. Если многообразие M ориентировано в смысле определения 1.3, то в каждой точке $x \in M$ в качестве ориентирующего репера можно взять репер $(e_{1j}, \ldots, e_{nj})$, состоящий из базисных ортов к координатным осям $(x_j^1, \ldots, x_j^n)$ области U_j, в которой находится точка x. Так как якобианы переходов положительны, то это определение не зависит от выбора окрестности U_j, в которой находится точка x (если она находится в двух областях U_j и U_k). Обратно, если многообразие ориентировано в смысле определения 1, то в каждой точке x задан ориентирующий класс реперов. Рассмотрим достаточно малую ε-окрестность точки x; введем координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ в этой ε-окрестности такие, что репер $(e_1, \ldots, e_n)$, составленный из касательных ортов к осям (x^i), определяет ту же ориентацию, что и ориентирующий репер, во всех точках ε-окрестности. Такое малое $\varepsilon > 0$ можно выбрать, так как ориентирующий класс реперов непрерывно зависит от точки x (хотя ε может зависеть от точки). Проделав эту процедуру для всех точек, получим покрытие многообразия областями, где якобианы перехода все положительны, так как в каждой точке знак касательного репера к выбранным системам координат положителен по отношению к ориентирующему классу реперов. Утверждение доказано.

Теорема 2. *Гладкая неособая поверхность M^k в n-мерном пространстве, заданная системой уравнений* (1), *ориентируема.*

Доказательство. Пусть τ — касательный репер к поверхности M^k. Очевидно, n векторов $\hat{\tau} = (\tau, \operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k})$ линейно независимы в каждой точке (векторы $\operatorname{grad} f_i$ ортогональны к поверхности и линейно независимы). Зададим в каждой точке поверхности M^k класс ориентации касательных реперов, требуя, чтобы класс ориентации репера $\hat{\tau}$ и стандартного репера $(e_1, \ldots, e_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ был одинаков. Этот класс, очевидно, непрерывно зависит от точки. Теорема доказана.

Простейший (отличный от гиперплоскости) пример неособой поверхности в $\mathbb{R}^{n+1}$ — это сфера S^n, задаваемая уравнением

$$x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1.$$

Это — компактное многообразие размерности n. Удобно ввести на сфере локальные координаты, задаваемые стереографической проекцией (см. часть I, § 9). Пусть U_N — вся сфера S^n без северного полюса $N=(0, \ldots, 0, 1)$, U_S — вся сфера S^n без южного полюса $S=(0, \ldots, 0, -1)$. Области U_N и U_S покрывают всю сферу. Локальные координаты $(u_N^1, \ldots, u_N^n)$ в области U_N задаются стереографической проекцией на плоскость $x^{n+1}=0$ из северного полюса; в области U_S нужно взять стереографическую проекцию из южного полюса (рис. 45) — получим координаты $(u_S^1, \ldots, u_S^n)$. Из рисунка видно, что в плоскости $x^{n+1}=0$ векторы $u_N(x)$ и $u_S(x)$ лежат на одном луче, выходящем из начала координат, причем их длины связаны соотношением

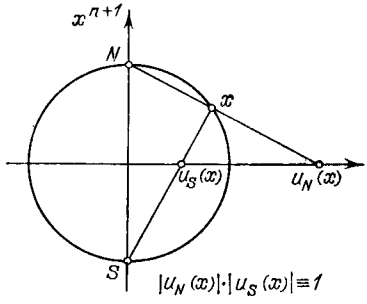


Рис. 45

$$|u_N(x)|\,|u_S(x)| \equiv 1.$$

Поэтому функции перехода от координат $(u_N^1, \ldots, u_N^n)$ к координатам $(u_S^1, \ldots, u_S^n)$ имеют вид

$$(u_S^1, \ldots, u_S^n) = \left(\frac{u_N^n}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (u_N^\alpha)^2}, \ldots, \frac{u_N^n}{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (u_N^\alpha)^2} \right) \tag{5}$$

(проверьте!). Обратные функции перехода задаются такой же формулой, только N и S нужно поменять местами.

Сфера ограничивает многообразие с краем D^{n+1} ($(n+1)$-мерный диск):

$$f(x) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 \leqslant 0.$$

Сфера S^n разделяет все пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ на две непересекающиеся части: $f(x)<0$ и $f(x)>0$.

Определение 2. Связное $(n-1)$-мерное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется *двусторонним*, если на нем существует однозначное непрерывное поле единичных нормалей.

Такое подмногообразие M мы будем называть также *двусторонней гиперповерхностью*.

Теорема 3. *Двусторонняя гиперповерхность в* $\mathbb{R}^n$ *ориентируема.*

Доказательство. Пусть ν — единичный вектор нормали к двусторонней гиперповерхности M. Класс ориентации касательных реперов τ к поверхности M можно задать, потребовав, чтобы ориентация репера (τ, ν) и стандартного репера $(e_1, \ldots, e_n)$ была согласована. Теорема доказана.

Замечание. В § 7 будет показано, что всякую замкнутую двустороннюю гиперповерхность в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно задать одним неособым уравнением $f(x) = 0$. Из этого совсем нетрудно вывести, что такая гиперповерхность всегда ограничивает многообразие с краем. В гл. 3 будет показано также, что любая замкнутая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ двусторонняя.

Важный пример многообразий, задаваемых системой уравнений в евклидовом пространстве,— это групповые многообразия (группы преобразований, рассмотренные в части I, § 14).

а) Группа $GL(n, \mathbb{R})$ матриц с определителем, отличным от нуля,— это область в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$.

б) Группа $SL(n, \mathbb{R})$ матриц с определителем 1 задается одним уравнением в пространстве всех матриц (гиперповерхность):

$$\det A = 1.$$

в) Группа $O(n, \mathbb{R})$ ортогональных матриц задается системой уравнений

$$AA^{\top} = 1.$$

г) Группа $U(n)$ унитарных матриц задается в пространстве размерности $2n^2$ всех комплексных матриц уравнениями

$$A\bar{A}^{\top} = 1,$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

В части I (§ 14 и др.) было проверено, что эти группы, а также другие группы, встречающиеся там, являются гладкими неособыми поверхностями в $\mathbb{R}^{n^2}$ $\left(\text{или } \mathbb{R}^{2n^2}\right)$ и поэтому являются гладкими многообразиями.

Замечание. Эти многообразия G обладают следующей дополнительной структурой: заданы гладкие отображения φ и ψ,

$$\varphi\colon G \to G, \quad \text{где} \quad \varphi(g) = g^{-1},$$
$$\psi\colon G \times G \to G, \quad \text{где} \quad \psi(g, h) = gh.$$

Определение 3. Многообразие G называется *группой Ли*, если оно является группой, причем отображения φ и ψ, задающие групповую структуру, являются гладкими.

Все рассмотренные в части I примеры групп преобразований — это группы Ли.

2. Проективные пространства. Рассмотрим совокупность всех ненулевых векторов пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ и будем считать, что векторы y и λy, $\lambda \neq 0$, задают одну и ту же точку. Такой класс эквивалентности называется точкой (вещественного) проективного пространства, обозначаемого через $\mathbb{R}P^n$.

Другое описание $\mathbb{R}P^n$: рассмотрим совокупность прямых в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. По определению каждая такая прямая задается своим направляющим вектором, определенным с точностью до ненулевого множителя и тем самым может рассматриваться как точка из $\mathbb{R}P^n$.

Каждая такая прямая пересекает сферу S^n, задаваемую уравнением $(y^0)^2+\ldots+(y^n)^2=1$, ровно в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому каждая точка из $\mathbb{R}P^n$ задается парой диаметрально противоположных точек сферы S^n. Говорят, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ получается из сферы S^n склейкой (отождествлением) пар диаметрально противоположных точек. Заметим, что функции на $\mathbb{R}P^n$ — это четные функции на сфере S^n: $f(y)=f(-y)$.

Пример 1. Проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ образована парами диаметрально противоположных точек окружности S^1. При этом каждая точка верхней полуокружности (где $y>0$) имеет парную на нижней полуокружности. Поэтому для получения $\mathbb{R}P^1$ нужно взять только нижнюю полуокружность (где $y\leqslant 0$) и склеить ее концевые точки 1 и -1. При этом мы снова получим окружность. Итак, мы построили взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}P^1$ и окружностью S^1 (рис. 46).

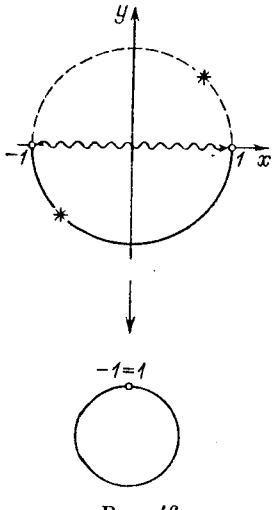


Рис. 46

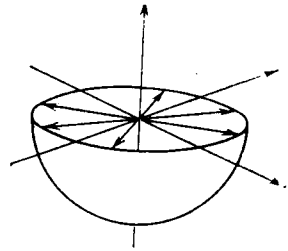


Рис. 47

В n-мерном случае мы аналогичным образом получаем следующую конструкцию для проективного пространства $\mathbb{R}P^n$: нужно взять диск D^n (нижнюю половину сферы S^n) и на его границе S^{n-1} склеить диаметрально противоположные точки (рис. 47 для $n=2$).

Пример 2. В § 14 части I был построен гомоморфизм групп $SU(2)$ на $SO(3)$, при котором матрицы A и $-A$ из группы $SU(2)$ переходят в одну точку многообразия $SO(3)$. Там же было показано, что $SU(2)$ — это трехмерная сфера S^3, причем матрицы A и $-A$ соответствуют диаметрально противоположным точкам сферы. Мы получаем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между многообразием $SO(3)$ и трехмерным проективным пространством $\mathbb{R}P^3$.

Введем теперь явными формулами структуру многообразия в проективное пространство $\mathbb{R}P^n$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}P^n$ область $U_q = \{y^q \neq 0\}$. В этой области введем локальные координаты

$$x_q^1 = \frac{y^0}{y^q}, \ldots, x_q^q = \frac{y^{q-1}}{y^q}, \quad x_q^{q+1} = \frac{y^{q+1}}{y^q}, \ldots, x_q^n = \frac{y^n}{y^q}. \tag{6}$$

Области U_q с $q = 0, 1, \ldots, n$ покрывают все проективное пространство. Вычислим явно функции перехода. В области U_0 имеем координаты $x_0^1, \ldots, x_0^n$, в которых

$$x_0^1 = \frac{y^1}{y^0}, \quad x_0^2 = \frac{y^2}{y^0}, \ldots, x_0^n = \frac{y^n}{y^0}.$$

В области U_1 для координат $x_1^1, \ldots, x_1^n$ имеем

$$x_1^1 = \frac{y^0}{y^1}, \quad x_1^2 = \frac{y^2}{y^1}, \ldots, x_1^n = \frac{y^n}{y^1}.$$

В общей части областей U_0, U_1, где $y^0 \neq 0$, $y^1 \neq 0$, мы получим функции перехода $(x_0) \to (x_1)$:

$$x_1^1 = \frac{1}{x_0^1}, \quad x_0^2 = \frac{x_0^2}{x_0^1}, \quad x_1^3 = \frac{x_0^3}{x_0^1}, \ldots, x_1^n = \frac{x_0^n}{x_0^1} \tag{7}$$

(заметим, что $x_0^1 = \frac{y^1}{y^0}$ в пересечении $U_0 \cap U_1$ не равно нулю)

Якобиан этих функций перехода имеет вид

$$J_{(x_0)\to(x_1)} = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x_0^1)^2} & 0 & \ldots 0 \\ -\frac{x_0}{(x_0^1)^2} & \frac{1}{x_0^1} & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = -\frac{1}{(x_0^1)^{n+1}} \neq 0.$$

Формулы для функций перехода для других пересечений $U_i \cap U_k$ получаются из (7) надлежащей заменой индексов.

Итак, мы проверили, что $\mathbb{R}P^n$ — гладкое многообразие. В случае $n=2$ мы получаем *проективную плоскость* $\mathbb{R}P^2$. Область U_0 в этом случае называется *конечной частью* проективной плоскости.

Заметим, что, как легко проверить, построенные выше взаимно однозначные соответствия $S^1 \to \mathbb{R}P^1$ и $SO(3) \to \mathbb{R}P^3$ являются в действительности диффеоморфизмами.

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ определяется как множество всех ненулевых векторов в комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевое комплексное число $\lambda \neq 0$. Локальные координаты на многообразии $\mathbb{C}P^n$ строятся так же, как и в вещественном случае. $\mathbb{C}P^n$ является $2n$-мерным гладким многообразием.

Пример. Рассмотрим комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$. Это — множество классов эквивалентности $(z^0, z^1) \sim (\lambda z^0, \lambda z^1)$, $\lambda \neq 0$, $|z^0|^2 + |z^1|^2 \neq 0$. Рассмотрим комплексную функцию $w_0(z^0, z^1) = \frac{z^1}{z^0}$ на $\mathbb{C}P^1$. В точке $(0, 1)$ эта функция не определена, но мы можем считать, что она принимает в ней значение ∞. Таким образом, $\mathbb{C}P^1$ — это «расширенная комплексная плоскость» (включающая бесконечно удаленную точку).

Теорема 4. *Комплексная проективная прямая* $\mathbb{C}P^1$ *диффеоморфна двумерной сфере* S^2.

Доказательство. Локальные координаты $u_0, v_0, u_0 + iv_0 = w_0 = \frac{z^1}{z^0}$, отображают область $U_0 = \{z^0 \neq 0\}$ проективной прямой на двумерную плоскость. Координаты $u_1, v_1, u_1 + iv_1 = w_1 = \frac{z^0}{z^1}$, действуют в области $U_1 = \{z^1 \neq 0\}$. Области U_0 и U_1 покрывают все $\mathbb{C}P^1$, причем функции перехода $(u_0, v_0) \to (u_1, v_1)$ имеют вид

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{u_0}{u_0^2 + v_0^2}, -\frac{v_0}{u_0^2 + v_0^2} \right)$$

или

$$u_1 + iv_1 = w_1 = \frac{1}{w_0} = \frac{u_0 - iv_0}{u_0^2 + v_0^2}.$$

Эти функции перехода совпадают (с точностью до знака) с функциями перехода для введенных выше стереографических координат на сфере S^2. Теорема доказана.

В соответствии с доказанной теоремой расширенная комплексная плоскость, диффеоморфная двумерной сфере, называется сферой Римана. Если $w = u + iv$ — локальные координаты в конечной части расширенной комплексной плоскости, то $1/w$ задает локальные координаты в окрестности «бесконечно удаленной» точки ∞.

Вернемся теперь к комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^n$. В классе эквивалентности вектора $z=(z^0, \ldots, z^n)\neq 0$ можно выбрать представителя, лежащего на единичной сфере S^{2n+1},

$$|z^0|^2+\ldots+|z^n|^2=1.$$

Для этого достаточно вектор z умножить на число $\lambda=\left(\sum_{\alpha=0}^{n}|z^\alpha|\right)^{-1/2}$. После этого вектор z можно еще умножать на числа вида $e^{i\varphi}$, по модулю равные единице.

Вывод. *Комплексное проективное пространство* $\mathbb{C}P^n$ *получается из сферы* $S^{2n+1}=\left\{\sum_{\alpha=1}^{n}|z^\alpha|^2=1\right\}$ *отождествлением точек*: $z\sim e^{i\varphi}z$.

Сопоставляя каждой точке сферы S^{2n+1} ее класс эквивалентности в $\mathbb{C}P^n$, получаем отображение

$$S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n. \tag{8}$$

Прообразом каждой точки из $\mathbb{C}P^n$ при этом отображении является окружность $S^1=\{e^{i\varphi}\}$. В частности, при $n=1$ получаем отображение

$$S^3\to S^2,\quad (z^0, z^1)\mapsto w=\frac{z^1}{z^0}\left(|z^0|^2+|z^1|^2=1\right).$$

Задачи. 1. Доказать, что нечетномерные проективные пространства $\mathbb{R}P^{2k+1}$ ориентируемы.

2. Доказать, что связная компонента единицы в группе Ли есть нормальный делитель.

3. Доказать, что связная группа Ли порождается сколь угодно малой окрестностью единицы.

4. Доказать, что любая группа Ли ориентируема.

5. Доказать, что проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ компактны.

6. Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как совокупность классов ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{H}^{n+1}$ с точностью до умножения слева на ненулевые кватернионы. Введите структуру многообразия на $\mathbb{H}P^n$. Проверьте, что $\mathbb{H}P^1=S^4$.

7. Постройте отображение $S^{4n+3}\to\mathbb{H}P^n$, аналогичное отображению (8). Что является прообразом точки при этом отображении?

§ 3. Необходимые сведения из теории групп Ли

1. Строение окрестности единицы группы Ли. Алгебра Ли группы. Полупростота. В любой группе Ли G имеется выделенная точка $g_0=1\in G$ (единица группы) и касательное пространство

$T = T_{(1)}$ в этой точке. Преобразование

$$G \to G, \quad g \to hgh^{-1}$$

называется *внутренним автоморфизмом,* производимым элементом h группы G. Это преобразование сохраняет единицу $g_0 = 1$ $(hg_0h^{-1} = g_0)$ и порождает линейное отображение касательного пространства

$$\mathrm{Ad}(h)\colon T \to T;$$

при этом $\mathrm{Ad}(h^{-1}) = [\mathrm{Ad}(h)]^{-1}$ и $\mathrm{Ad}(h_1h_2) = \mathrm{Ad}(h_1)\mathrm{Ad}(h_2)$. Другими словами, сопоставление $h \mapsto \mathrm{Ad}(h)$ есть *линейное представление*

$$\mathrm{Ad}: G \to GL(n, \mathbb{R}),$$

где n — размерность группы G.

Для коммутативной группы G представление Ad тривиально, т. е. $\mathrm{Ad}(h) = 1$ для любого $h \in G$.

Выберем координаты $x^1, \ldots, x^n$ в окрестности единицы $1 = g_0 = (0, \ldots, 0)$. В этих координатах можно записать групповые операции: произведение g_1g_2 элементов $g_1 = (x^1, \ldots, x^n)$, $g_2 = (y^1, \ldots, y^n)$ имеет координаты

$$\psi^\alpha(x, y) = \psi^\alpha(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

а обратный элемент $g^{-1} = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$ элемента $g = (x^1, \ldots, x^n)$ имеет координаты

$$\varphi^\alpha(x) = \varphi^\alpha(x^1, \ldots, x^n), \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Свойства функций $\psi(x, y)$ и $\varphi(x)$:

1) $\psi(x, 0) = \psi(0, x) = x$ (единица);
2) $\psi(x, \varphi(x)) = 0$ (обратный элемент);
3) $\psi(x, \psi(y, z)) = \psi(\psi(x, y), z)$ (ассоциативность).

Из гладкости функций $\psi(x, y)$ и $\varphi(x)$ и свойства 1) следует, что

$$\psi^\alpha(x, y) = x^\alpha + y^\alpha + b^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta y^\gamma + (\text{члены порядка } 3),$$

$$\psi^\alpha(y, x) = y^\alpha + x^\alpha + b^\alpha_{\beta\gamma}y^\beta x^\gamma + (\text{члены порядка } 3).$$

Пусть теперь x и y — касательные векторы к группе в единице, т. е. элементы пространства T; пусть, далее (x^α) и (y^β) — их координаты в нашей системе координат. Определим *коммутатор* $[x, y] \in T$, положив

$$[x, y] = \frac{1}{2}\left(b^\alpha_{\beta\gamma} - b^\alpha_{\gamma\beta}\right)x^\beta y^\gamma. \tag{1}$$

Из этого определения вытекают следующие свойства коммутатора:

а) $[x, y]$ — билинейная операция в $T = \mathbb{R}^n$, где n — размерность группы G;

б) $[x, y] = -[y, x]$;

в) составляя тейлоровские разложения левой и правой частей равенства 3) (свойство ассоциативности) и пренебрегая членами порядка 4, получаем тождество Якоби (проверьте!)

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0. \tag{2}$$

Таким образом, касательное пространство к G в единице по отношению к коммутированию является *алгеброй Ли* (см. часть I, § 24). Эту алгебру Ли обыкновенно называют *алгеброй Ли группы* G (ср. тот же параграф части I).

В координатах коммутатор задается набором величин $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ таких, что

$$[x, y]^{\alpha} = c^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\beta} y^{\gamma}. \tag{3}$$

Величины $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ антисимметричны по индексам β, γ и называются *структурными константами* алгебры Ли.

Однопараметрические подгруппы группы G определяются как (параметризованные) кривые $F(t) \subset G$ такие, что $F(0) = 1$ и $F(t_1 + t_2) = F(t_1)F(t_2)$, $F(-t) = F(t)^{-1}$. В матричных группах (см. часть I, § 14) они имеют вид

$$F(t) = \exp(At).$$

В абстрактной группе Ли G для кривой $F(t)$ определяется зависящий от t вектор

$$F^{-1}\dot{F} = F(t)^{-1}\frac{dF(t)}{dt} \in T.$$

Если $F(t)$ — однопараметрическая подгруппа, то этот вектор от t не зависит. Действительно, так как $F(t+\varepsilon) = F(t)F(\varepsilon)$, то

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF(t+\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = F(t)\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0},$$

т. е. $\dot{F}(t) = F(t)\dot{F}(0)$ и $F^{-1}(t)\dot{F}(t) = \dot{F}(0) = \text{const}$. С другой стороны, для всякого ненулевого $A \in T$ существует единственная однопараметрическая подгруппа $F(t)$ с

$$F^{-1}\dot{F} = A. \tag{4}$$

В самом деле, решая уравнение (4), в силу теорем существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений получаем однопараметрическую группу $F(\varepsilon)$ при малых ε. На все остальные значения t группа $F(t)$ продолжается как многократное произведение элементов из $F(\delta)$ при $|\delta| < \varepsilon$.

Для построенной этим способом однопараметрической подгруппы группы G употребляется, как и в матричном случае, обозначение $F(t) = \exp(At)$.

Задача. Пусть $F_1(t)$ и $F_2(t)$ — две однопараметрические подгруппы: $A_1 = \dot{F}_1(0)$, $A_2 = \dot{F}_2(0)$ или $F_1(t) = \exp(A_1 t)$, $F_2(t) =$

$= \exp(A_2 t)$. Докажите формулу

$$t^2 [A_1, A_2] = F_1(t) F_2(t) F_1^{-1}(t) F_2^{-1}(t) + O(t^3). \quad (5)$$

Пусть $F(t) = \exp(At)$ — однопараметрическая подгруппа группы G. Преобразование $g \mapsto FgF^{-1}$ порождает однопараметрическую группу преобразований алгебры Ли $T_{(1)} = \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Ad} F(t) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n.$$

Вектор $\frac{d}{dt} \operatorname{Ad} F(t)|_{t=0}$ лежит в алгебре Ли группы $GL(n, \mathbb{R})$, т. е. является линейным оператором.

Задача. Докажите, что $\frac{d}{dt} \operatorname{Ad} F(t)|_{t=0}$ имеет вид $B \mapsto [A, B]$, где $B \in \mathbb{R}^n$ — вектор из алгебры Ли. Преобразование $B \mapsto [A, B]$ обозначается через $\operatorname{ad} A$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — базис алгебры Ли $\mathbb{R}^n = T_{(1)}$ как касательного пространства к G в точке $g_0 = 1 \in G$. Однопараметрические группы $\exp A\tau = F(\tau)$ определены для любого вектора $A = \sum A_i x^i$. Положим

$$\exp A = F(\tau)|_{\tau=1} \quad (6)$$

и припишем точке $\exp A$ координаты $x^1, \ldots, x^n$; в результате получим систему координат в окрестности точки $1 \in G$, в которой сумма $\sum (x^i)^2$ достаточно мала. Это — «координаты 1-го рода».

Другие координаты: пусть $F_i = \exp(A_i t)$. Любая точка достаточно малой окрестности U точки $1 \in G$ имеет вид

$$g = F_1(t_1) \ldots F_n(t_n), \quad (7)$$

где $t_1, \ldots, t_n$ малы. Мы принимаем за координаты точки g числа $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$; это — «координаты 2-го рода».

Задачи. 1) Рассмотрим кривую $g(\tau) = F_1(\tau t_1) \ldots F_n(\tau t_n)$; докажите, что $\frac{dg}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \sum_{i=1}^{n} t_i A_i$. 2) Какие координаты для $G = SO(3)$ представляют собой «углы Эйлера» φ, ψ, θ?

Координаты 1-го рода удобны для доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. *Если функции ψ^α, задающие умножение в группе Ли G, вещественно аналитичны (т. е. разлагаются в сходящиеся степенные ряды), то алгебра Ли однозначна определяет умножение в группе G для некоторой окрестности единицы $1 \in G$.*

Замечание. Ограничение на аналитичность ψ (или, как говорят, на аналитичность группы) несущественно, но доказательство без гипотезы аналитичности ψ сложнее.

Доказательство. Введем вспомогательные функции $v_\beta^\alpha(x)$, положив

$$v_\beta^\alpha(x) = \frac{\partial \psi^\alpha(x, y)}{\partial x^\beta}\Big|_{y=\varphi(x)}, \quad v_\beta^\alpha(0) = \delta_\beta^\alpha,$$

где $\varphi(x)=x^{-1}$ — обратный элемент. Тогда для функций $\psi^\alpha(x, y)$ получаем систему дифференциальных уравнений по x

$$v_\beta^\alpha(\psi(x, y))\frac{\partial\psi^\beta(x, y)}{\partial x^\gamma}=v_\gamma^\alpha(x) \tag{8}$$

с начальным условием

$$\psi(0, y)=y.$$

Условия интегрируемости этой системы (см. ниже § 29) имеют вид $\frac{\partial^2\psi^\beta}{\partial x^\gamma\partial x^\delta}=\frac{\partial^2\psi^\beta}{\partial x^\delta\partial x^\gamma}$, т. е.

$$\frac{\partial v_\beta^\alpha}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial v_\gamma^\alpha}{\partial x^\beta}=2\,c_{\mu\nu}^\alpha v_\beta^\mu v_\gamma^\nu, \tag{9}$$

где $c_{\mu\nu}^\alpha$ — структурные константы алгебры Ли. Отметим, что уравнение однопараметрической подгруппы $x=x(t)$ с начальным вектором скорости $A=(A^i)$ имеет вид

$$A^\alpha=v_\beta^\alpha(x(t))\frac{dx^\beta(t)}{dt}$$

(проверьте!). В канонических координатах 1-го рода, где по определению $x^\alpha(t)=A^\alpha t$, будет

$$A^\alpha=v_\beta^\alpha(At)A^\beta,$$

или

$$x^\alpha=v_\beta^\alpha(x)x^\beta.$$

Покажем, что функции $v_\beta^\alpha(x)$ в канонических координатах определяются уже однозначно. Дифференцируя последнее равенство по x^β, получим

$$\delta_\beta^\alpha=x^\gamma\frac{\partial v_\gamma^\alpha}{\partial x^\beta}+v_\beta^\alpha.$$

Умножим теперь равенство (9) на x^β и просуммируем по β. Получим

$$x^\beta\frac{\partial v_\gamma^\alpha}{\partial x^\beta}+v_\gamma^\alpha(x)=\delta_\gamma^\alpha+c_{\mu\nu}^\alpha x^\nu v_\gamma^\mu.$$

Заменим в этом равенстве x на At. Будем иметь

$$tA^\beta\frac{\partial v_\gamma^\alpha}{\partial x^\beta}+v_\gamma^\alpha(At)=\delta_\gamma^\alpha+c_{\mu\nu}^\alpha A^\nu t v_\gamma^\mu. \tag{10}$$

Введем функцию $w_\gamma^\alpha(t)=tv_\gamma^\alpha(At)\equiv w_\gamma^\alpha(t, A)$. Равенство (10) означает, что

$$\frac{dw_\gamma^\alpha}{dt}=\delta_\gamma^\alpha+c_{\mu\nu}^\alpha A^\nu w_\gamma^\mu.$$

Для функций w_γ^α мы получили систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Начальные условия имеют вид $w_\gamma^\alpha(0) = 0$. Тем самым функции $w_\gamma^\alpha(t, A)$ для любого A однозначно определяются по структуре алгебры Ли. Отсюда однозначно определены и функции $v_\gamma^\alpha(x)$, а поэтому и закон умножения $\psi(x, y)$ как решение системы (8). Теорема доказана.

Следствие. *Если алгебра Ли связной аналитической группы G «коммутативна», т. е. $[A, B] \equiv 0$, то группа G коммутативна (в обычном смысле).*

Действительно, для окрестности единицы в группе это следует из теоремы 1. Чтобы охватить всю группу, достаточно заметить, что любой элемент может быть представлен как произведение большого числа элементов, близких к единице.

Определение 1. Алгебра Ли $L = \{\mathbb{R}^n, c_{jk}^i\}$ называется *простой*, если в ней нет идеалов, т. е. таких подпространств I, что $[I, L] \subset I$. Если алгебра Ли группы G проста, то G называется *простой группой Ли.* Алгебра Ли L называется *полупростой*, если $L = I_1 + \ldots + I_n$, где I_j — простые алгебры Ли, попарно коммутирующие ($[I_k, I_l] = 0$ при $k \neq l$) и сами некоммутативные. Группа G с полупростой алгеброй Ли называется *полупростой группой.* Для любой алгебры Ли определяется «форма Киллинга»

$$\langle A, B\rangle = -\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\, A\, \mathrm{ad}\, B), \tag{11}$$

где оператор $\mathrm{ad}\, A$ на L имеет вид

$$u \mapsto [A, u], \quad u \in L. \tag{12}$$

Теорема 2. 1) *Для простой алгебры Ли L группы G внутренние автоморфизмы $\mathrm{Ad}\, g$ дают неприводимое линейное представление группы G (т. е. не имеющее нетривиальных инвариантных подпространств в L).* 2) *Если форма Киллинга положительна, то алгебра Ли полупроста.*

Доказательство 1). Если представление $\mathrm{Ad}\, g$ имеет инвариантное подпространство $I \subset L$, т. е. если $gIg^{-1} \subset I$ для любого $g \in G$, то, устремляя g к 1, получим

$$[L, I] \subset I.$$

Поэтому I — идеал в L. Утверждение 1) доказано.

Доказательство 2). Пусть I — идеал алгебры L. Очевидно, ортогональное дополнение J к I по отношению к форме Киллинга также является идеалом, а если при этом форма положительно определена, то $L = I \oplus J$. Таким образом, алгебра Ли с положительной формой Киллинга разлагается в сумму простых, и эти простые слагаемые некоммутативны (сужение формы Киллинга на коммутативное слагаемое равно нулю).

Замечание. В теории алгебр Ли доказывается более сильное утверждение: *алгебра Ли полупроста в том и только том случае, если ее форма Киллинга невырождена.* Доказательство этой теоремы в дополнение к вышеприведенным аргументам использует то, что форма Киллинга некоммутативной простой алгебры Ли не может быть тождественным нулем. Это, в свою очередь, выводится из теоремы Энгеля, утверждающей, что форма Киллинга алгебры Ли равна нулю в том и только в том случае, если алгебра *нильпотентна*, т. е. если существует такое n, что

$$[[\ldots[A_1, A_2], \ldots], A_n] = 0$$

при любых $A_1, \ldots, A_n \in L$.

Задачи. 1. а) Докажите, что движения (изометрии) связного риманова многообразия M образуют группу Ли. б) Докажите аналогичное утверждение для группы всех конформных преобразований риманова многообразия (см. § 15 части I).

2. Выясните, какие из встречавшихся в части I (см. § 24) алгебр Ли являются полупростыми, а какие простыми?

2. Понятие (линейного) представления. Пример нематричной группы Ли. Определение 2. *Представлением* группы G называется гомоморфизм в некоторую группу матриц $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ или $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{C})$. Отображение $\chi_\rho\colon G \to \mathbb{R}$ $(G \to \mathbb{C})$, определяемое формулой $\chi_\rho(g) = \operatorname{Sp}\rho(g)$, $g \in G$, называется *характером* представления ρ.

Представление называется *неприводимым*, если в пространстве $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех матриц вида $\rho(g)$, $g \in G$. Имеет место простая, но важная

Теорема 3 («лемма Шура»). *Пусть заданы два неприводимых представления* $\rho_i\colon G \to GL(n_i, \mathbb{R})$ *группы* G, $i = 1, 2$. *Если* $A\colon \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ — *линейный оператор, переводящий* ρ_1 *в* ρ_2 (*т. е. такой, что* $A\rho_1(g) = \rho_2(g)A$), *то* A — *или нулевой оператор, или изоморфизм.*

Доказательство. Если A не есть нулевой оператор, то $Ax \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, иначе «ядро» $\{Ax = 0\}$ оператора A было бы нетривиальным инвариантным подпространством для представления ρ_1. Аналогично образ $A(\mathbb{R}^{n_1}) \subset \mathbb{R}^{n_2}$ инвариантен для представления ρ_2 и поэтому должен быть нулевым или совпадать с $\mathbb{R}^{n_2}$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть задано представление $\rho\colon G \to GL(N, \mathbb{R})$ группы G. Дифференциал ρ_* этого отображения в единице группы отображает алгебру Ли $\mathfrak{g} = T_{(1)}$ в пространство матриц:

$$\rho_*\colon \mathfrak{g} \to M(N, \mathbb{R}).$$

Отображение ρ_* задает *представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ (гомомор-

физм алгебр Ли), т. е. выполнено равенство

$$\rho_*[\xi, \eta] = [\rho_*\xi, \rho_*\eta]$$

для любых векторов ξ, η из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (проверьте!).

Представление $\rho\colon G \to GL(N, \mathbb{R})$ (или $\rho\colon G \to GL(N, \mathbb{C})$) называется *точным*, если оно не имеет ядра, т. е. если $\rho(g) \neq 1$ при $g \neq 1$. Любая матричная группа Ли обладает очевидным точным представлением, поскольку она уже реализована как группа линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$ (или $\mathbb{C}^N$). Однако не всякая группа Ли реализуется как группа линейных преобразований евклидова пространства. Рассмотрим, например, группу $G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ преобразований прямой вида

$$x \mapsto x + 2\pi a + \frac{1}{i} \ln \frac{1 - ze^{-ix}}{1 - \bar{z}e^{ix}}, \tag{13}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ и ln обозначает непрерывную ветвь натурального логарифма, определяемую условием: при $z=0$ этот логарифм равен нулю. (Под знаком логарифма стоит дробь, числитель и знаменатель которой комплексно сопряжены друг другу; поэтому эта дробь по модулю равна единице, логарифм является чисто мнимым числом, и вся правая часть вещественна.) Группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ является связной трехмерной группой Ли. Она содержит подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$, состоящую из преобразований (13) с $a \in \mathbb{Z}$, $z = 0$; элементы этой подгруппы коммутируют со всеми остальными элементами группы, или, как говорят, подгруппа содержится в *центре* группы (ниже мы увидим, что она совпадает с центром группы). Преобразования (13) с $z = 0$ и произвольным вещественным a составляют однопараметрическую подгруппу группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Всякое преобразование вида (13) обладает тем свойством, что если $x \mapsto y$, то $x + 2\pi k \mapsto y + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$; поэтому оно определяет преобразование окружности $|w| = 1$, именно, преобразование

$$w \mapsto \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} e^{2\pi i a}.$$

Таким образом, получаем проекцию (гомоморфизм) группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ в группу $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1 = SU(1, 1)/\pm 1$ дробно-линейных преобразований единичной окружности в $\mathbb{C}$. Очевидно, образом этой проекции служит вся группа $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$, а ее ядром как раз является выделенная выше группа $\mathbb{Z}$. Поскольку группа $SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ не имеет центра, из этого следует, что центр группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ исчерпывается нашей группой $\mathbb{Z}$.

Теорема 4. *Группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ не имеет ни одного точного линейного представления.*

Доказательство. Напомним, что группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ обладает однопараметрической подгруппой, которая имеет с ее центром бесконечное пересечение (изоморфное $\mathbb{Z}$), но не содержится в этом центре. Мы покажем, что уже это свойство группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ несовместимо с ее вложимостью в группу матриц.

Предположим, что группа $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ изоморфна $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Пусть H — однопараметрическая подгруппа группы G, соответствующая подгруппе, о которой шла речь выше; согласно § 14 части I $H = \{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$, где A — некоторая $n \times n$-матрица. Производя, если нужно, внутренний автоморфизм группы $GL(n, \mathbb{C})$, мы добиваемся того, чтобы матрица A имела нормальную жорданову форму, т. е. чтобы была блочно диагональной с блоками вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_k \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

где $a_i = 0$ или 1 (считаем, что разные блоки отвечают разным λ; порядки блоков равны кратностям собственных значений матрицы A). Матрица $\exp(tA)$ является блочно диагональной с блоками того же порядка, и ее блоки имеют вид $e^{\lambda t} B_\lambda(t)$, где

$$B_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 t & \frac{1}{2} a_1 a_2 t^2 & \frac{1}{6} a_1 a_2 a_3 t^3 & \dots & \frac{1}{k!} a_1 \dots a_k t^k \\ 0 & 1 & a_2 t & \frac{1}{2} a_2 a_3 t^2 & \dots & \frac{1}{(k-1)!} a_2 \dots a_k t^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & a_3 t & \dots & \frac{1}{(k-2)!} a_3 \dots a_k t^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из того, что бесконечное число матриц такого вида перестановочно с элементами группы G, следует, что и все элементы группы G являются блочно диагональными матрицами с блоками того же порядка.

Множество P всех (в том числе вырожденных) матриц, перестановочных со всеми матрицами из G, является линейным подпространством пространства $\mathbb{C}^{n^2}$ всех $n \times n$-матриц; пересечение $P \cap G$ есть центр группы G. Матрицы из P опять-таки являются блочно диагональными с блоками прежнего порядка, и условие принадлежности такой матрицы пространству P записывается как система линейных однородных уравнений относительно матричных элементов, причем каждое уравнение из этой системы относится к определенному блоку. Таким образом, условие принадлежности центру матрицы $\exp(tA)$ записывается в виде си-

стемы линейных уравнений относительно элементов матриц $B_\lambda(t)$, т. е. в виде системы алгебраических уравнений относительно t. Такие уравнения либо выполняются тождественно по t, либо имеют конечное число решений. Это противоречит тому, что группа $H = \{\exp(tA)\}$ не содержится в центре, но имеет с ним бесконечное пересечение. Теорема доказана.

Задачи. 1. Вычислить алгебру Ли группы $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

2. Проверить, что построенное выше отображение $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ является изоморфизмом в некоторой окрестности единицы.

§ 4. Комплексные многообразия

1. Определения и примеры. Введем понятие комплексного многообразия.

Определение 1. *Комплексно аналитическим многообразием комплексной размерности n* называется многообразие M размерности $2n$, на котором выбраны специальные области U_q локальных координат, $M = \bigcup_q U_q$, заданные в виде областей n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. В каждой области U_q тем самым заданы комплексные локальные координаты $z_q^\alpha = x_q^\alpha + iy_q^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$. В пересечении двух областей $U_q \cap U_p$ действуют две системы локальных координат (z_q^α) и (z_p^β). Требуется, чтобы функции перехода от координат (z_q^α) к координатам (z_p^β) и обратно были комплексно аналитическими:

$$\frac{\partial z_q^\alpha}{\partial \bar{z}_p^\beta} \equiv 0, \quad \frac{\partial z_p^\beta}{\partial \bar{z}_q^\alpha} \equiv 0. \tag{1}$$

Голоморфными отображениями комплексных многообразий будем называть комплексно аналитические (в любых локальных координатах) отображения. Голоморфные отображения в комплексную прямую $\mathbb{C}$ называются аналитическими (или голоморфными) функциями на многообразии.

Отображение называется *биголоморфным*, если оно изоморфно и имеет обратное, которое также является голоморфным. Комплексные многообразия, которые можно связать биголоморфным отображением, называются *биголоморфно эквивалентными* или *комплексно диффеоморфными*.

Важным геометрическим свойством комплексных многообразий является их ориентированность:

Теорема 1. *Комплексно аналитическое многообразие M является ориентированным многообразием.*

Доказательство. Пусть $z_q^\alpha = x_q^\alpha + iy_q^\alpha$ — комплексные координаты многообразия M в области U_q, $z_p^\beta = x_p^\beta + iy_p^\beta$ — в области U_p.

Вещественные якобианы функций перехода от координат (x_q^α, y_q^α) к координатам (x_p^β, y_p^β) имеют вид

$$J^{\mathbb{R}} = |J^{\mathbb{C}}|^2 = \left|\det\left(\frac{\partial z_q^\alpha}{\partial z_p^\beta}\right)\right|^2$$

(часть I, лемма 12.2). Все эти якобианы положительны. Теорема доказана.

Рассмотренное в § 2 комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ — пример комплексно аналитического многообразия. Локальные координаты на этом многообразии строятся как и в вещественном случае, причем функции перехода, задаваемые формулами (2.20), комплексно аналитичны. Все эти многообразия компактны (см. задачу 2.5).

При $n = 1$ получаем расширенную комплексную плоскость («сферу Римана»). При этом локальной координатой в окрестности бесконечно удаленной точки ∞ является $w = 1/z$.

Простейший пример комплексных многообразий — области в $\mathbb{C}^n$. Другой важный пример — неособые комплексные поверхности в $\mathbb{C}^n$. Они задаются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} f_1(z^1, \ldots, z^n) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_{n-k}(z^1, \ldots, z^n) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где все функции $f_1, \ldots, f_{n-k}$ комплексно аналитичны и ранг матрицы $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z^j}\right)$ максимален (равен $n - k$). Проверка того, что неособая комплексная поверхность является комплексно аналитическим многообразием, проводится здесь точно так же, как в вещественном случае, с использованием § 12 части I.

В отличие от вещественного случая комплексные подмногообразия пространства $\mathbb{C}^n$ не охватывают всех примеров комплексно аналитических многообразий. Чтобы убедиться в этом, докажем важную теорему.

Теорема 2. *Голоморфная функция на связном компактном комплексном многообразии постоянна.*

Доказательство. Пусть f — голоморфная функция на комплексно аналитическом связном компактном многообразии M. Тогда функция $|f|$ на компактном многообразии M достигает максимума в некоторой точке P_0:

$$|f(P)| \leqslant |f(P_0)|.$$

Поэтому функция $f(P)$ постоянна на всем многообразии M в силу связности этого многообразия и в силу следующего общего утверждения.

Лемма 1 (принцип максимума). *Пусть f — голоморфная функция в некоторой области U n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Если функция $|f|$ имеет локальный максимум в точке P_0 области U, т. е. $|f(P)| \leqslant |f(P_0)|$ для всех P из области U, достаточно близких к P_0, то функция f постоянна в окрестности точки P_0.*

Доказательство. Функция $|f|$ в силу условия леммы будет иметь локальный максимум и на любой комплексной прямой, проходящей через точку P_0. Поэтому достаточно доказать принцип максимума для $n = 1$. В этом случае можно считать, что $P_0 = 0$, $f(0) \neq 0$ (при $f(0) = 0$ утверждение леммы тривиально). Умножая функцию на подходящее число, можно считать, что $f(0)$ есть вещественное положительное число.

Для голоморфных функций комплексной переменной верна интегральная формула Коши (часть I, § 26)

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z},$$

где γ — окружность, охватывающая начало координат. Полагая $z = re^{i\varphi}$, $r = \text{const}$, получим

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\varphi}\right) d\varphi. \tag{3}$$

Соотношение (3) справедливо также для действительной и мнимой частей голоморфной функции.

Пусть $m(r) = \max\limits_{\varphi} |f(re^{i\varphi})|$. В силу условия леммы $f(0) \geqslant m(r)$. Но из формулы (3) вытекает, что $f(0) \leqslant m(r)$. Значит, $f(0) = m(r)$. Функция $g(z) = \operatorname{Re}(f(0) - f(z))$ неотрицательна на любой окружности $z = re^{i\varphi}$, где r достаточно мало. Действительно, $f(0) - |f(z)| \geqslant 0$, и $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant |f(z)|$.

Интеграл этой функции по окружности $z = re^{i\varphi}$ равен нулю в силу равенства (3). Поэтому на любой окружности $z = re^{i\varphi}$, где r достаточно мало, $\operatorname{Re}(f(0) - f(z)) = 0$, т. е. $\operatorname{Re} f(z) = f(0)$. В силу неравенства $|f(z)| \leqslant f(0)$ отсюда вытекает, что $f(z) = f(0)$ для всех z, близких к нулю. Лемма доказана.

Пусть теперь $\max\limits_{P \in M} |f(P)| = |f(P_0)|$ — максимум модуля голоморфной функции f на компактном комплексно аналитическом многообразии M. Пусть, далее, $M' \subset M$ — совокупность всех точек P многообразия, где $f(P) = f(P_0)$. Множество M' открыто в M в силу принципа максимума (каждая точка $P \in M'$ входит в M' вместе с некоторой своей окрестностью). Кроме того, M', очевидно, замкнуто и непусто. Поэтому $M' = M$ (M связно). Доказательство теоремы полностью завершено.

Следствие 1. *Комплексно аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ размерности больше нуля некомпактно.*

Доказательство. Допустим, что существует голоморфное вложение f компактного комплексного многообразия M в $\mathbb{C}^n$:

$$f\colon M \to \mathbb{C}^n.$$

Можно считать, что M связно. Тогда все координаты f^i этого отображения, будучи аналитическими функциями на M, постоянны, т. е. f отображает многообразие M в одну точку. Следствие доказано.

Важные примеры неособых комплексных поверхностей в $\mathbb{C}^n$ — это комплексные группы преобразований:

а) $GL(n, \mathbb{C})$ — совокупность невырожденных комплексных матриц n-го порядка, $\det A \neq 0$. Это — открытая область в пространстве $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ всех комплексных матриц.

б) $SL(n, \mathbb{C})$ — совокупность всех унимодулярных комплексных матриц n-го порядка, $\det A = 1$.

в) $O(n, \mathbb{C})$ — совокупность всех комплексных ортогональных преобразований, т. е. комплексных матриц A с $AA^{\mathrm{T}} = 1$.

Неособость этих поверхностей была проверена в § 14 части I. Все эти группы некомпактны согласно следствию 1.

Эти многообразия G являются группами Ли в смысле определения 2.3. Более того, отображения ψ и φ, определяющие групповую структуру:

$$\psi\colon G \times G \to G, \text{ где } \psi(g, h) = gh,$$
$$\varphi\colon G \to G, \text{ где } \varphi(g) = g^{-1},$$

комплексно аналитичны (голоморфны).

Определение 2. Группа Ли G называется *комплексной группой Ли*, если отображения φ и ψ, задающие групповую структуру, комплексно аналитичны.

Теорема 3. *Всякая компактная комплексная связная группа Ли G коммутативна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Рассмотрим представление Ad группы G на $\mathfrak{g}$. Это представление — комплексно аналитическое отображение группы в комплексное пространство $n \times n$-матриц: $G \to GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$. Если группа G компактна, то в силу доказанного выше это отображение является постоянным. Таким образом, $\mathrm{Ad}\, G = 1$ — единичная матрица. Устремляя g к 1 в равенстве $\mathrm{Ad}\, g = 1$, получаем, что алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативна, т. е. $[A, B] = 0$. Поэтому в силу следствия из теоремы 3.1 группа G коммутативна. Теорема доказана.

Группы $G = GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{C})$ — это матричные комплексные группы Ли.

Единственным примером компактной комплексной группы Ли является комплексный тор. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ задано $2n$ линейно независимых (над $\mathbb{R}$) векторов $e_1, \ldots, e_{2n}$. Комплексный тор T^{2n} мы получим, беря векторы из $\mathbb{C}^n$ с точностью до целочисленной линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_{2n}$:

$$z \sim z + \sum_{\alpha=1}^{2n} n_\alpha e_\alpha, \quad n_\alpha \text{ целые.}$$

Такие целочисленные линейные комбинации образуют подгруппу Γ в $\mathbb{C}^n$ (целочисленная решетка, натянутая на векторы $e_1, \ldots, e_{2n}$). Тор T^{2n} есть факторгруппа:

$$T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma.$$

Решетки Γ и Γ', задаваемые векторами $(e_1, \ldots, e_{2n})$ и $(f_1, \ldots, f_{2n})$, совпадают, если векторы f_i лежат в решетке Γ, а векторы e_j — в решетке Γ':

$$f_i = n_i^j e_j, \quad e_j = m_j^i f_i.$$

Матрицы (n_i^j) и (m_j^i) целочисленны и взаимно обратны. Поэтому $\det(n_i^j) = \det(m_j^i) = \pm 1$. Обратно, любые две системы векторов (e_j) и (f_i), связанные целочисленными линейными преобразованиями, дают одинаковые торы.

Структуру многообразия на торе T^{2n} мы получим, беря в качестве координатных окрестностей образы достаточно малых открытых множеств в $\mathbb{C}^n$ при естественном отображении

$$\mathbb{C}^n \to T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma.$$

Проверьте, что тор T^{2n} превращается в компактное комплексно аналитическое многообразие, являющееся комплексной группой Ли.

Функции на торе T^{2n} можно рассматривать как $2n$-периодические функции на $\mathbb{C}^n$:

$$f\left(z + \sum_{\alpha=1}^{2n} n_\alpha e_\alpha\right) = f(z).$$

Из теоремы 2 получаем

Следствие. *Голоморфная $2n$-периодическая функция в $\mathbb{C}^n$ постоянна.*

Пример. Пусть $n = 1$. Комплексный тор T^2 задается парой ненулевых комплексных чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \notin \mathbb{R}z_2$. Умножая все комплексные числа на z_1^{-1}, получим пару вида $(1, \tau)$, $\tau = z_2/z_1 \in \mathbb{C}$, причем мнимая часть $\operatorname{Im}\tau$ числа τ не равна нулю (векторы 1 и τ вещественно независимы). Торы, задаваемые векторами (z_1, z_2) и $(1, \tau)$, биголоморфно эквивалентны. Таким образом, каждый

комплексный одномерный тор T^2 задается комплексным числом τ с не равной нулю мнимой частью.

Лемма 2. *Если* τ и τ' *связны дробно-линейным преобразованием вида*

$$\tau' = \frac{m\tau + n}{p\tau + q},$$

где матрица $\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ *целочисленна и имеет определитель* ± 1, *то торы, задаваемые числами* τ *и* τ', *совпадают.*

Доказательство. Решетки в $\mathbb{C}$, определяемые векторами $(1, \tau)$ и $(p\tau + q \cdot 1, m\tau + n \cdot 1)$, совпадают. Тор, определяемый второй решеткой, как раз задается числом τ'. Лемма доказана.

Замечание. Можно показать (это требует привлечения аппарата эллиптических функций), что торы, определяемые достаточно близкими комплексными числами τ и τ', биголоморфно не эквивалентны.

С вещественной точки зрения тор T^2 диффеоморфен двумерному вещественному тору $S^1 \times S^1$, где каждая из окружностей получается отождествлением целых кратных z_1 (или z_2) на прямой, проходящей через z_1 (или через z_2); $2n$-мерный тор T^{2n} диффеоморфен $2n$-мерному вещественному тору $S^1 \times \ldots \times S^1$.

Пусть тор T^{2n} задается векторами $e_1, \ldots, e_{2n}$. Среди этих векторов имеются n линейно независимых над $\mathbb{C}$; без ограничения общности можно считать, что это $e_1, \ldots, e_n$. Разложим векторы $e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ по этому базису:

$$e_{n+k} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} e_j, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Комплексная матрица $B = (b_{kj})$ полностью определяет тор T^{2n}. Мнимая часть матрицы B должна быть невырожденной, иначе векторы $e_1, \ldots, e_{2n}$ были бы линейно зависимы над $\mathbb{R}$.

Определение 3. Тор T^{2n} называется *абелевым*, если для некоторого базиса $(e_1, \ldots, e_{2n})$ в решетке матрица B симметрична и ее мнимая часть $H = (h_{kj})$,

$$h_{kj} = \operatorname{Im} b_{kj},$$

положительно определена:

$$b_{jk} = b_{kj}, \quad h_{kj}\xi^k\xi^j > 0,$$

где $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — любой не равный нулю вещественный вектор.

Например, двумерный комплексный тор T^2, задаваемый числом τ с $\operatorname{Im}\tau > 0$, является абелевым. Так как торы, задаваемые числами τ и $-\tau$, совпадают, то любой двумерный тор является абелевым.

Уже среди четырехмерных торов T^4 (комплексная размерность два) есть неабелевы.

Задача. Покажите, что почти все торы T^4 неабелевы.

Для абелевых торов определена θ-функция (Якоби — Римана) $\theta(z_1, \ldots, z_n)$, где $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные переменные:

$$\theta(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n} \exp i \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{kj} m_k m_j + \sum_k m_k z_k \right\}, \qquad (4)$$

где суммирование ведется по всем наборам $(m_1, \ldots, m_n)$ целых чисел. Условие положительности мнимой части матрицы B гарантирует сходимость ряда.

2. Римановы поверхности как многообразия. Напомним (часть I, § 12, п. 3) определение римановой поверхности многозначной функции. В пространстве $\mathbb{C}^2$ двух комплексных переменных w, z для любой аналитической функции $f(z, w)$ (например, многочлена) берется поверхность ее нулей

$$f(z, w) = 0. \qquad (5)$$

Эта поверхность является одномерным комплексным многообразием (комплексной кривой), если выполняется условие неособости

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w} \right) \neq 0$$

на поверхности (см. § 12 части I).

Разрешая уравнение (5) относительно w, мы можем получить многозначную функцию, например:

а) $w = \sqrt{P_n(z)}$, $f(w, z) = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ — многочлен без кратных корней (гиперэллиптическая риманова поверхность);

б) $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi i n$, $f(w, z) = e^w - z$.

Многозначность функции $w(z)$ означает, что проекция поверхности (5) на z-плоскость вдоль w не взаимно однозначна.

Пусть функция $f(z, w)$ есть многочлен степени n по совокупности переменных. Сделаем подстановку

$$z = \frac{y^1}{y^0}, \quad w = \frac{y^2}{y^0}.$$

Тогда $f(z, w) = \frac{1}{(y^0)^n} Q_n(y^0, y^1, y^2)$, где Q_n — однородный многочлен. На проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ уравнение $f(z, w) = 0$ продолжается в виде

$$Q_n(y^0, y^1, y^2) = 0. \qquad (6)$$

Точки поверхности (6), где $y^0 = 0$, называются «бесконечно удаленными» точками римановой поверхности (5).

Лемма 3. *Риманова поверхность в $\mathbb{C}P^2$, задаваемая уравнением (6), компактна.*

Доказательство. Множество нулей функции Q_n замкнуто. Так как $\mathbb{C}P^2$ компактно, то замкнутое множество в нем тоже компактно. Лемма доказана.

Уравнение (6) в неособом случае задает двумерное компактное многообразие. Что это за многообразие?

Пример 0. Пусть $f(w, z) = w^2 - z$; $Q_2(y^0, y^1, y^2) = (y^2)^2 - y^1 y^0$. Рассмотрим точки $z = 0$, $z = \infty$ и соединим их линией a. На сфере S^2, диффеоморфной $\mathbb{C}P^1$, эта линия выглядит, как показано

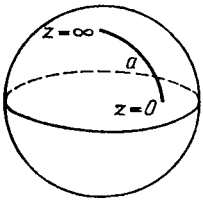
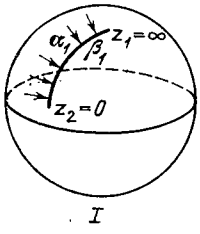


Рис. 48



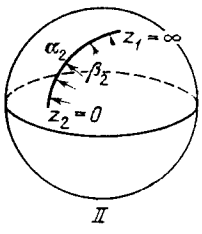


Рис. 49

на рис. 48. Интуитивно ясно, что вне этой линии риманова поверхность $f(z, w) = 0$ распадается на два связных куска, каждый из которых с помощью проекции эквивалентен внешности линии a на z-плоскости. Эти куски именуются «ветвями» многозначной функции. В точках 0 и ∞ значения этих двух ветвей функции $w(z) = \sqrt{z}$ сливаются. Чтобы получить поверхность, необходимо кусок границы α_1 области I отождествить с куском β_2 границы области II, а кусок границы β_1 области I — с куском границы α_2 области II (рис. 49).

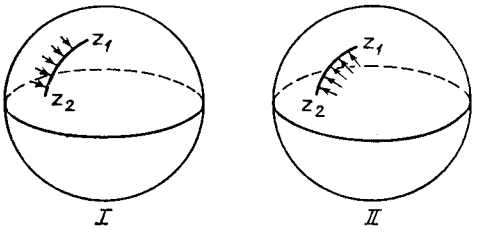


Рис. 50

Легко видеть, что после склейки снова получается поверхность, диффеоморфная сфере S^2.

Пример 1. $f(z, w) = w^2 - P_2(z)$, где $P_2(z)$ — многочлен 2-й степени с простыми корнями $z = z_1$, $z = z_2$, $z_1 \neq z_2$.

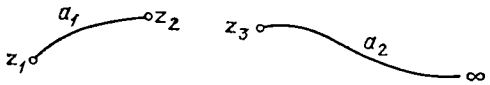


Рис. 51

Соединим отрезком корни z_1 и z_2. Вне этого отрезка поверхность $f(z, w) = 0$ распадается на две части, не связанные друг с другом. Над сферой $S^2 = \mathbb{C}P^1$ это выглядит точно так же, как в примере 0 (рис. 50). Отличие лишь в том, что здесь $z_1 \neq \infty$. По аналогии с примером 0, отождествляя $\alpha_1 \sim \beta_2$, $\beta_1 \sim \alpha_2$, получим сферу S^2.

Пример 2. $f(z, w) = w^2 - P_3(z)$, где P_3 — многочлен 3-й степени с попарно различными корнями z_1, z_2, z_3. Сделаем разрезы

a_1 и a_2 (рис. 51). Вне этих разрезов поверхность распадается на две несвязные части.

Отождествляя α_1 с β_2, γ_1 с δ_2, α_2 с β_1, γ_2 с δ_1 (рис. 52), получим тор (сфера с одной ручкой — см. рис. 53).

Пример 3. $f(z, w) = w^2 - P_4(z)$, где P_4 — многочлен 4-й степени с попарно различными корнями z_0, z_1, z_2, z_3. Рассуждая так же, как в примере 2, здесь снова получим тор.

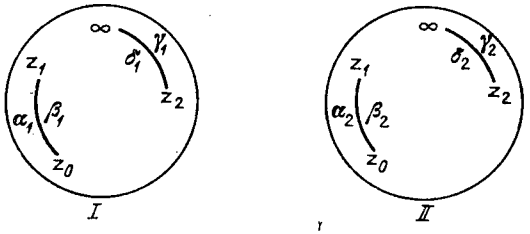


Рис. 52

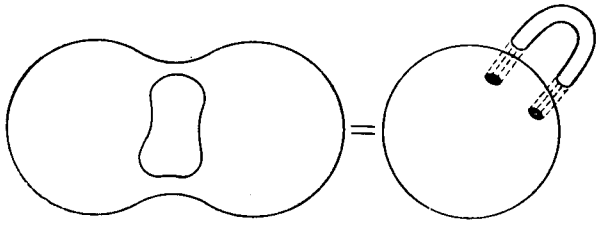


Рис. 53

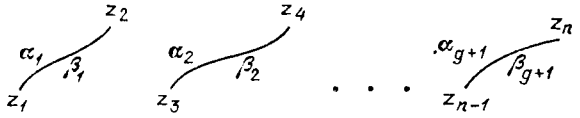


Рис. 54

Утверждение 1. *Риманова поверхность функции* $w = \sqrt{P_n(z)}$, *где* $P_n(z)$ *— многочлен степени* n *без кратных корней, представляет собой сферу с* g *ручками, где* $n = 2g + 1$ *или* $n = 2g + 2$. (Строго говоря, бесконечно удаленные точки этой поверхности являются особыми в $\mathbb{C}P^2$.)

Доказательство. Пусть n четно; положим $n = 2g + 2$. Разобьем корни многочлена $P_n(z)$ на пары и соединим каждую пару кривой $a_1, \ldots, a_{g+1}$, не пересекающейся с остальными (рис. 54).

Разрежем z-плоскость по отрезкам a_i. Мы убедились в том, что риманова поверхность распадается на две несвязные части U_1 и U_2 (обход вокруг двух корней не меняет ветви).

Берега разрезов обозначим буквами α_i, β_i. Они лежат соответственно на кусках U_1 и U_2 римановой поверхности. После этого произведем склейку берегов по правилу

$$(U_1, \alpha_i) \sim (U_2, \beta_i), \quad (U_1, \beta_i) \sim (U_2, \alpha_i).$$

Эта склейка соответствует тому, что мы должны с куска U_1, приближаясь к берегу α_i, перейти на кусок U_2 (берег β_i).

Для нечетных n построение то же самое, но за одну из точек ветвления берется $z_{n+1} = \infty$. После этого все повторяется.

§ 5. Простейшие однородные пространства

1. Действие группы на многообразии. Пусть G — группа Ли (например, одна из рассмотренных в части I групп преобразований).

Определение 1. Мы скажем, что группа G *представлена как группа преобразований многообразия* M (или *действует слева на многообразии* M), если для каждого ее элемента g задано преобразование (диффеоморфизм) многообразия M,

$$x \mapsto T_g(x), \quad x \in M,$$

и при этом $T_{gh} = T_g T_h$ и $T_1 = 1$, где g, h — любые элементы группы G, а 1 — ее единица. Преобразование $T_g(x)$ должно гладко зависеть от пары аргументов (g, x) (т. е. соответствие $(g, x) \mapsto T_g(x)$ должно быть гладким отображением $G \times M \to M$).

Группа G *действует справа* на многообразии M, если вместо соотношения $T_g T_h = T_{gh}$ выполняется соотношение $T_g T_h = T_{hg}$. Если G — одна из групп $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $O(p, q)$ или $GL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, ..., $U(p, q)$ $[p + q = n]$, то G естественно действует слева на $\mathbb{R}^n$ или на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, причем это действие задается линейными преобразованиями.

Замечание. Действие группы на векторном пространстве, задаваемое линейными преобразованиями, называется также (как нам уже известно) линейным представлением этой группы.

Мы говорим, что действие группы G на многообразии M *транзитивно*, если для любой пары точек x и y из M найдется такой элемент g группы G, что $T_g(x) = y$.

Определение 2. Многообразие M, на котором задано транзитивное действие группы G, называется *однородным пространством* этой группы.

Сама группа G, рассматриваемая как многообразие с действием группы левыми сдвигами $T_g(h) = gh$, называется *главным* однородным пространством (левым).

Аналогично определяется правое главное однородное пространство: $T_g(h) = hg^{-1}$

Пусть x — точка однородного пространства. *Группа изотропии* H_x точки x состоит по определению из всех элементов g группы G, оставляющих точку x на месте:

$$T_g(x) = x \leftrightarrow g \in H_x.$$

Лемма 1. *Для разных точек x однородного пространства группы изотропии H_x изоморфны друг другу.*

Доказательство. Пусть $x \neq y$ и $T_g(x) = y$. Тогда изоморфизм $H_x \to H_y$ определяется формулой

$$h \mapsto ghg^{-1}$$

(действие левое).

Теорема 1. *Имеется взаимно однозначное соответствие между точками однородного пространства M группы G и левыми смежными классами G/H, где H — группа изотропии (действие группы G левое).*

Доказательство. Фиксируем точку x_0 многообразия M. Нужное соответствие устанавливается так: смежному классу (gH) соответствует точка $T_g(x_0)$, где $H = H_{x_0}$ — группа изотропии точки x_0. Это соответствие не зависит от выбора представителя g в классе смежности и является взаимно однозначным. Теорема доказана.

Для правого действия группы нужно взять правые смежные классы.

2. Примеры однородных пространств. а) Сфера S^n в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ задается уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1,$$

и группа $O(n+1)$ естественно действует на сфере S^n. Это действие, очевидно, транзитивно. Тем самым сфера S^n является однородным пространством группы $O(n+1)$ ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Найдем группу изотропии точки $x = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$. Эта группа образована матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in O(n).$$

Поэтому $S^n = O(n+1)/O(n)$. Группа $G = SO(n+1)$ также транзитивна на сфере S^n, и группа изотропии есть $SO(n)$. Поэтому $SO(n+1)/SO(n) = S^n$.

б) Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ можно рассматривать как совокупность прямых в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Группа $O(n+1)$ транзитивно действует на многообразии $\mathbb{R}P^n$. Рассмотрим прямую с направляющим вектором $(1, 0, \ldots, 0)$. Ортогональные преобразования, переводящие

эту прямую в себя, имеют вид

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in O(n).$$

Таким образом, группа изотропии изоморфна прямому произведению $O(1) \times O(n)$, и имеет место равенство

$$\mathbb{R}P^n = O(n+1)/O(1) \times O(n).$$

в) Аддитивная группа всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с координатой t действует на окружности $S^1 = \{e^{2\pi i\varphi}\}$ следующим образом:

$$T_t(e^{2\pi i\varphi}) = e^{2\pi i(\varphi+t)}.$$

В силу соотношения $e^{2\pi i} = 1$ получаем: группа изотропии совпадает с группой всех целых чисел.

Более общо, на n-мерном торе $T^n = (S^1)^n$ транзитивно действует группа всех трансляций n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ (эту группу мы также будем обозначать через $\mathbb{R}^n$). Действие задается следующим образом: если $y = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $z = (e^{2\pi i\varphi_1}, \ldots, e^{2\pi i\varphi_n})$ — точка n-мерного тора, то

$$T_y(z) = (e^{2\pi i(\varphi_1+t_1)}, \ldots, e^{2\pi i(\varphi_n+t_n)}).$$

Группа изотропии состоит из всех векторов y с целочисленными координатами. Таким образом, группа изотропии этого однородного пространства — это целочисленная решетка Γ в $\mathbb{R}^n$:

$$T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma.$$

г) *Многообразие Штифеля* $V_{n,k}$. Точкой этого многообразия является упорядоченный ортонормированный набор из k векторов $x = (e_1, \ldots, e_k)$ в n-мерном евклидовом пространстве. Ортогональная матрица n-го порядка $A \in O(n)$ переводит точку x в точку $Ax = (Ae_1, \ldots, Ae_k)$ — репер $(Ae_1, \ldots, Ae_k)$ также ортонормирован. Это действие транзитивно (проверьте!).

Многообразие Штифеля $V_{n,k}$ можно задать как неособую поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{nk}$. Именно, пусть относительно некоторого ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ векторы $e_1, \ldots, e_k$ имеют координаты

$$e_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Величины x_{ij}, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, суть координаты точки в nk-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{nk}$. Это координаты связаны системой из $k(k+1)/2$ уравнений

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n} x_{is}x_{js} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, k, \ i \leqslant j. \qquad (1)$$

Лемма 2. *Многообразие Штифеля $V_{n,k}$ есть неособая поверхность размерности $nk - \frac{k(k+1)}{2}$ в пространстве $\mathbb{R}^{nk}$.*

Доказательство. Ввиду наличия группы, транзитивно действующей на $V_{n,k}$, достаточно доказать неособость в одной точке. Проверим неособость в окрестности точки $x_0 = (x_{ij})$, где $x_{ij} = \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$. Для этого докажем, что касательное пространство к поверхности $V_{n,k}$ в этой точке имеет размерность $nk - \frac{k(k+1)}{2}$ (т. е. ранг матрицы Якоби системы (1) равен $\frac{k(k+1)}{2}$). Пусть $x_{ij} = x_{ij}(t)$ — кривая на поверхности $V_{n,k}$, при $t = 0$ проходящая через точку x_0:

$$\sum_{s=1}^{n} x_{is}(t)\, x_{js}(t) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, k;$$

$$x_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k; \quad j = 1, \ldots, n.$$

Вектор скорости $\xi_{ij} = \left.\frac{dx_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$ этой кривой в точке x_0 удовлетворяет соотношению

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} x_{is}(t) x_{js}(t)\right)\Bigg|_{t=0} = \xi_{ij} + \xi_{ji}, \qquad i, j = 1, \ldots, k.$$

Итак, касательное пространство в точке x_0 к поверхности $V_{n,k}$ состоит из векторов ξ_{ij}, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\xi_{ij} = -\xi_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Размерность этого пространства как раз равна $nk - \frac{k(k+1)}{2}$. Лемма доказана.

Итак, $V_{n,k}$ — гладкое многообразие. Найдем группу изотропии этого однородного пространства. Дополним репер $e_1, \ldots, e_k$ до ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ во всем n-мерном евклидовом пространстве. Ортогональная матрица, не меняющая векторов $e_1, \ldots, e_k$, имеет в выбранной системе координат вид

$$\begin{matrix} k \\ n-k \end{matrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & 0 & & A \end{pmatrix}\right., \quad A \in O(n-k).$$

Значит, группа изотропии есть $O(n-k)$ и $V_{n,k} = O(n)/O(n-k)$.

Многообразие Штифеля $V_{n,k}$ при $k < n$ можно рассматривать и как однородное пространство группы $SO(n)$. В этом случае

группа изотропии совпадает с $SO(n-k)$:

$$V_{n,k} = SO(n)/SO(n-k).$$

В частности,

$$V_{n,n} = O(n), \quad V_{n,n-1} = SO(n), \quad V_{n,1} = S^{n-1}.$$

д) *Многообразие Грассмана* $G_{n,k}$. Точками грассманова многообразия являются k-мерные плоскости, проходящие через начало координат в n-мерном евклидовом пространстве. Естественное действие группы $O(n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ дает транзитивное действие на совокупности всех k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Фиксируем некоторую k-мерную плоскость π и найдем ее группу изотропии. Выберем ортонормированную систему координат в $\mathbb{R}^n$ следующим образом: первые k координатных осей лежат в плоскости π, а остальные $n-k$ ей ортогональны. Ортогональная матрица, переводящая плоскость π в себя, имеет в этих координатах блочный вид

$$\begin{matrix} k \\ n-k \end{matrix}\!\!\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right., \quad A \in O(k), \quad B \in O(n-k).$$

Мы получаем, таким образом,

$$G_{n,k} = O(n)/O(k) \times O(n-k).$$

Очевидно, имеется равенство

$$G_{n,k} = G_{n,n-k}.$$

Кроме того, грассманово многообразие $G_{n,1}$ совпадает с проективным пространством $\mathbb{R}P^{n-1}$.

е) Однородными пространствами унитарной группы $U(n)$ являются:

1) нечетномерная сфера S^{2n-1}, задаваемая в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ уравнением

$$|z^1|^2 + \ldots + |z^n|^2 = 1;$$

именно,

$$S^{2n-1} = U(n)/U(n-1) = SU(n)/SU(n-1);$$

2) комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$:

$$\mathbb{C}P^{n-1} = U(n)/U(1) \times U(n-1);$$

3) комплексное многообразие Грассмана

$$G^{\mathbb{C}}_{n,k} = U(n)/U(k) \times U(n-k)$$

k-мерных комплексных плоскостей в $\mathbb{C}^n$, проходящих через начало координат.

Задачи. 1. Пусть M — однородное пространство группы G с группой изотропии H. Доказать, что размерность многообра-

зия M равна разности размерностей G и H:

$$\dim M = \dim G - \dim H.$$

Вычислить размерность многообразия $G_{n,k}$.

2. Доказать компактность многообразий $V_{n,k}$ и $G_{n,k}$.

3. Пусть $m = (m_1, \ldots, m_k)$ — разбиение числа n, т. е.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Набор линейных подпространств $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется m-флагом, если:

а) $\dim \pi_i - \dim \pi_{i-1} = m_i$;

б) $\pi_0 = 0$, $\pi_k = \mathbb{R}^n$;

в) $\pi_{i-1} \subset \pi_i$.

Ввести на множестве m-флагов $F(n, m)$ структуру однородного пространства группы $O(n)$. Вычислить группу изотропии этого однородного пространства.

§ 6. Пространства постоянной кривизны (симметрические пространства)

1. Понятие симметрического пространства. Большой интерес представляют пространства — многообразия M с метрикой g_{ab}, у которых тензор кривизны R_{abcd} симметричной связности, согласованной с метрикой, удовлетворяет соотношению

$$\nabla_s(R_{abcd}) = 0, \tag{1}$$

где ∇_s — ковариантная производная. Мы знаем, что в силу тождеств Бьянки (см. часть I, § 30) часть ковариантных производных тензора кривизны всегда обращается в нуль. Однако требование (1) в его полном объеме является очень сильным. Оказывается, что при выполнении некоторых глобальных ограничений на многообразие M из (1) уже следует однородность метрики g_{ab}. Более точно, это справедливо для *односвязных* многообразий M (см. ниже § 17). Общие многообразия (неодносвязные), удовлетворяющие условию (1), получаются из односвязных многообразий M факторизацией по дискретной группе движений. При этом может оказаться, что эта дискретная группа Γ не коммутирует со всей группой движений многообразия M, и тогда фактор M/Γ не будет однороден. Такие пространства называют *локально однородными* или *локально симметрическими*.

Из (1) следует, в частности, что все скалярные характеристики кривизны постоянны:

$$R = R^a_a = \text{const}, \quad R_{abcd}R^{abcd} = \text{const}.$$

Мы будем пользоваться, однако, другим определением симметрических пространств.

Определение 1. Односвязное многообразие M с метрикой g_{ab} называется *симметрическим пространством,* если для любой точки $x \in M$ существует изометрия (движение) s_x: $M \to M$, имеющая точку x изолированной неподвижной точкой и такая, что все касательные векторы в точке x испытывают отражение: ξ переходит в $-\xi$. Это преобразование s_x называется «симметрией» в точке x.

Смысл требования односвязности многообразия M будет раскрыт ниже (см. §§ 17, 18). В утверждениях настоящего параграфа мы не будем использовать свойства односвязных многообразий. Читатель, еще не знакомый с этими свойствами, может вернуться к решению задач, приведенных в настоящем параграфе, после изучения гл. 4.

Лемма 1. *Симметрическое пространство M обладает свойством* (1).

Доказательство. Мы можем выбрать около данной точки $x \in M$ такие координаты (x^α), что в точке x

$$x^\alpha = 0, \quad g_{ab} = \delta_{ab}, \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\alpha} = 0.$$

При симметрии s_x тензоры g_{ab} и R_{abcd} перейдут в себя. Что касается тензора $\nabla_s(R_{abcd})$ в точке x, то он должен перейти в себя, поскольку s_x — изометрия (движение). С другой стороны, ввиду свойств s_x тензор $\nabla_s R_{abcd}$ должен перейти в $-\nabla_s R_{abcd}$. Таким образом, $\nabla_s R_{abcd} = 0$. Лемма доказана.

Замечание. Справедлива и обратная теорема, но ее доказательство технически более сложно, и мы его не приводим. Заметим, что в любом римановом многообразии M около любой точки $x \in M$ можно определить «локальную симметрию» s_x на некоторой области $U \ni x$ следующим образом: рассмотрим пучок геодезических, выходящих из точки x, и для геодезической γ с $\gamma(0) = x$ положим

$$s_x(\gamma(\tau)) = \gamma(-\tau),$$

где τ достаточно мало. Однако эти преобразования не являются, вообще говоря, изометриями (движениями).

Задача. Докажите, что локальные преобразования s_x в том и только в том случае являются изометриями для всех $x \in M$, если выполнено условие (1). (Простейшим случаем здесь является случай $n = 2$, в котором тензор кривизны определяется одной константой R. В общем случае проще сначала, анализируя сохранение уравнения Якоби вдоль геодезической, доказать сохранение тензора кривизны преобразованиями s_x.)

Наличие «симметрии» s_x для всех точек $x \in M$ дает достаточный запас движений для того, чтобы доказать однородность многообразия M.

Лемма 2. *Симметрическое многообразие M является локально однородным, т. е. для любой точки $\bar{x} \in M$, достаточно близкой к x, найдется движение $g \in M$ такое, что $g(x) = \bar{x}$. Если пару точек $x, y \in M$ можно соединить геодезической, то найдется движение g такое, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Возьмем геодезическую γ, параметризованную натуральным параметром $0 \leqslant \tau \leqslant T$ и такую, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$. Рассмотрим далее точку $z = \gamma(T/2)$. Очевидно, симметрия s_z переводит γ в γ и y в x, x в y. (Если метрика индефинитна и γ — изотропная геодезическая, то в качестве τ можно взять аффинный параметр, получающийся из решения уравнения геодезических,— см. § 29 части I.) Если x и $\bar{x}$ — близкие точки, то всегда имеется геодезическая, соединяющая x с $\bar{x}$, так как пучок геодезических, исходящих из x, заметает целую область вокруг x. Лемма доказана.

Замечание. В случае положительной (римановой) метрики любую пару точек можно соединить ломаной геодезической. Поэтому симметрические многообразия в этом случае всегда однородны.

2. Группа изометрий. Свойства ее алгебры Ли. Далее мы будем рассматривать однородные симметрические многообразия M с метрикой g_{ab}, удовлетворяющей условию (1); группу Ли движений многообразия M мы обозначаем через G, а изотропную подгруппу — через H, так что $M = G/H$.

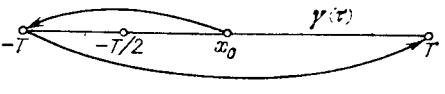


Рис. 55

Рассмотрим отображение

$$s_{x_0}^{-1} s_x = f_{T,\gamma}\colon M \to M, \quad (2)$$

где $\gamma = \gamma(\tau)$ — некоторая геодезическая, $x_0 = \gamma(0)$, $x = \gamma(-T/2)$. Преобразования $s_{x_0}^{-1} s_x = f_{T,\gamma}\colon M \to M$ обладают следующими важными свойствами (рис. 55):

а) $f_{T,\gamma}$ есть сдвиг точек геодезической γ на время T:

$$\gamma(\tau) \mapsto \gamma(\tau + T);$$

б) $f_{T,\gamma}$ является преобразованием параллельного переноса векторов вдоль этой геодезической;

в) для заданной геодезической γ преобразования $f_{T,\gamma}$ составляют однопараметрическую группу:

$$\begin{aligned} f_{T_1+T_2,\gamma} &= f_{T_1,\gamma} f_{T_2,\gamma}, \\ f_{-T,\gamma} &= (f_{T,\gamma})^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Все эти свойства очевидным образом вытекают из определения $f_{T,\gamma}$.

Согласно сказанному выше (см. § 3) однопараметрические подгруппы $f_{T,\gamma}$ группы G имеют вид

$$f_{T,\gamma} = \exp(TB_\gamma),$$

где B_γ — вектор из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Линейное подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное векторами $B_\gamma \in \mathfrak{g}$ для всех геодезических γ, исходящих из x_0, мы обозначим через L^1. Алгебру Ли стационарной подгруппы $H(x_0)$ группы G, отвечающей точке x_0, мы обозначим через L^0. Очевидно, что

$$\mathfrak{g} = L^0 + L^1. \tag{4}$$

Рассмотрим малое $\varepsilon \neq 0$ и две геодезические γ_1, γ_2, исходящие из точки x_0. Тогда последовательно производимые преобразования

$$f_{-\varepsilon,\gamma_2},\quad f_{-\varepsilon,\gamma_1},\quad f_{\varepsilon,\gamma_2},\quad f_{\varepsilon,\gamma_1}$$

переводят точку x_0 в близкую точку к ней (лежащую от нее на расстоянии порядка ε^3). В силу определения коммутатора в алгебре Ли это показывает, что коммутатор $[B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}]$ лежит в подалгебре, отвечающей стационарной подгруппе точки x_0, т. е. что $[B_{\gamma_1}, B_{\gamma_2}] \in L^0$. Далее, пусть однопараметрическая подгруппа $g_T = \exp(TA)$ группы G оставляет точку x_0 неподвижной (т. е. $A \in L^0$). Тогда, как легко видеть, при малых ε преобразование $g_{-\varepsilon} f_{T,\gamma} g_\varepsilon$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ представляет собой параллельный перенос вдоль геодезической γ, выходящей из точки x_0 по направлению $[B_\gamma, A]$. Таким образом,

$$[L^0, L^1] \subset L^1.$$

Итак, доказана

Лемма 3.

$$\begin{aligned} &[L^0, L^0] \subset L^0,\\ &[L^1, L^0] \subset L^1,\\ &[L^1, L^1] \subset L^0. \end{aligned} \tag{5}$$

Замечание. Алгебру Ли $\mathfrak{g} = L$, разложенную в сумму $L = L^0 + L^1$ с соотношениями (5), называют $\mathbb{Z}_2$-градуированной, так как (5) переписывается в виде

$$[L^i, L^j] \subset L^{(i+j) \pmod 2}. \tag{6}$$

Из леммы 3 вытекает

Следствие 1. *Линейный оператор*

$$\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

равный 1 *на* L^0 *и* -1 *на* L^1, *является автоморфизмом* (*т. е. сохраняет операцию умножения — коммутирования*). *При этом* $\sigma^2 = 1$ (σ *есть «инволюция»*).

Верно и обратное: при наличии у алгебры Ли $\mathfrak{g}$ инволютивного автоморфизма она получает $\mathbb{Z}_2$-градуировку $\mathfrak{g} = L^0 + L^1$ такую, что $\sigma = 1$ на L^0 и $\sigma = -1$ на L^1.

Локальная геометрия около точки $x_0 \in M$ в силу однородности определяется метрикой на касательном пространстве $\mathbb{R}^n_{x_0}$ в точке x_0 ($n = \dim M$). Касательное пространство $\mathbb{R}^n_{x_0}$ естественно отождествляется с пространством $L^1 \subset \mathfrak{g}$. В силу леммы 3 метрика на $\mathbb{R}^n_{x_0} = L^1$ должна быть инвариантна относительно внутренних автоморфизмов $\xi \mapsto g\xi g^{-1}$, где $g \in H$ и $\xi \in L^1$. Для $g_T = \exp(TA)$, $A \in L^0$, имеем преобразование $L^1 \to L^1$:

$$\xi \mapsto g_T \xi g_T^{-1} = \xi_T,$$

$$(\operatorname{ad} A)(\xi) = [A, \xi] = \left.\frac{d\xi_T}{dT}\right|_{T=0}.$$

Для скалярного произведения $\langle \xi, \eta \rangle$ на L^1 имеем

$$\begin{gathered} \langle \xi_T, \eta_T \rangle = \langle \xi, \eta \rangle, \\ \langle [A, \xi], \eta \rangle + \langle \xi, [A, \eta] \rangle = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Условие (7) накладывает ограничение на скалярное произведение — метрику — на $L^1 = \mathbb{R}^n_{x_0}$.

3. Симметрические пространства 1-го и 2-го типов. Лемма 3 дает алгебраическую модель симметрического пространства. В принципе все симметрические пространства можно классифицировать, как и компактные группы Ли. Мы рассмотрим наиболее важные примеры.

Простейшими примерами односвязного симметрического пространства (нулевой кривизны) являются, разумеется, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и псевдоевклидовы пространства $\mathbb{R}^n_{p,q}$. В этом случае группа G состоит из движений пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{R}^n_{p,q}$), подгруппа $H \subset G$ совпадает с группой $O(n)$ (или $O(p, q)$), и пространство $L^1 = \mathbb{R}^n$ состоит из трансляций. Мы имеем, как обычно, разложение

$$\mathfrak{g} = L^0 + L^1,$$

причем в этом случае $[L^1, L^1] = 0$; кроме того, как обычно, $[L^0, L^1] \subset L^1$ (структуру групп движений см. в § 4 части I). Неодносвязные симметрические (или, как их называли раньше, локально симметрические) пространства получаются факторизацией по дискретной группе Γ, состоящей из трансляций (возможно, в комбинации с некоторыми отражениями, как бутылка Клейна — см. § 18).

Во всех дальнейших примерах мы будем считать группу G полупростой (см. § 3, п. 1), т. е. скалярное произведение Киллинга

на алгебре $\mathfrak{g}$ должно быть невырождено. Напомним, что это скалярное произведение $\langle A, B\rangle$ имеет вид

$$\langle A, B\rangle = -\mathrm{Sp}\,(\mathrm{ad}\,A\,\mathrm{ad}\,B),$$
$$\mathrm{ad}\,A(\xi) = [A, \xi],\ \ \mathrm{ad}\,B(\xi) = [B, \xi].$$

Имеется два разных типа односвязных симметрических пространств (даже в случае, когда метрика положительна — риманова):

1-й тип: группа G компактна, и скалярное произведение Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ положительно.

2-й тип: группа G некомпактна, и скалярное произведение Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ индефинитно.

Рассмотрим простейшие примеры.

а) Сфера S^2 (1-й тип). Здесь $G=SO(3)$ (компактна), $H=SO(2)$.

б) Плоскость Лобачевского L^2 (2-й тип). Здесь $G = SO(2,1) = SL(2,\mathbb{R})$ и $H = SO(2)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из 2×2-матриц с нулевым следом. Скалярное произведение $\langle A, B\rangle$ имеет вид

$$\langle A, B\rangle = -\mathrm{Sp}(AB).$$

Базис алгебры таков:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$A_1^2 = A_2^2 = 0,\quad A_3^2 = 1.$$

Имеем

$$\langle A_1, A_2\rangle = -1,\quad \langle A_1, A_3\rangle = \langle A_2, A_3\rangle = 0,$$
$$\langle A_3, A_3\rangle = -2,\quad \langle A_1, A_1\rangle = \langle A_2, A_2\rangle = 0.$$

Матрицы из $H = SO(2)$ имеют вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Подалгебра $L^0 \subset \mathfrak{g}$ состоит из матриц вида $\lambda(A_1 - A_2)$. Подпространство $L^1 \subset \mathfrak{g}$ порождено векторами $A_1 + A_2$, A_3.

Проверьте соотношение

$$[L^1, L^0] \subset L^1.$$

Скалярное произведение Киллинга на подпространстве $L^1 \subset \mathfrak{g}$ является положительным. Поэтому метрика на симметрическом пространстве L^2 положительна.

Задача. Разберите самостоятельно случаи S^n и L^n.

4. Группы Ли как симметрические пространства. Рассмотрим теперь сами группы Ли Q как симметрические пространства. Группа движений G группы Q изоморфна $Q\times Q$; действие группы G в Q порождается правыми и левыми сдвигами:

$$(g_1, g_2)\colon\ q \mapsto g_1 q g_2^{-1};$$

подгруппа $H \subset G$ есть диагональ $Q = \{g,\ g\} \subset Q\times Q$: очевидно,

$H(1) = 1$. Симметрии определяются формулой (проверьте!)

$$s_q\colon\ x \mapsto qx^{-1}q.$$

В частности, $s_1(x) = x^{-1}$.

Разберем более детально случай 1-го типа, когда Q — односвязная и компактная группа. Кривизна метрики Киллинга уже вычислялась нами (см. § 30 части I). Здесь важно, что кривизна Риччи R_{ab} положительно определена. Геодезические линии получаются правыми и левыми сдвигами из однопараметрических подгрупп.

Построим изометрическое вложение $Q \subset S^N$, где N — большое число. Мы будем считать, что группа Q вложена в группу $SO(m)$. Далее, группа $SO(m)$ состоит из $m \times m$-матриц и вследствие этого лежит в пространстве $\mathbb{R}^{m^2}$. Введем евклидово скалярное произведение матриц A и B из $\mathbb{R}^{m^2}$:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Sp}(AB^{\mathrm{T}}), \tag{8}$$

где T обозначает транспонирование (ср. § 24 части I).

Задача. Проверьте, что это скалярное произведение совпадает с формой Киллинга при ограничении на $SO(m)$.

Для $A \in SO(m)$ имеем $AA^{\mathrm{T}} = 1$ и $\operatorname{Sp} 1 = m$. Таким образом, группа $SO(m)$ лежит на сфере $\langle A, A\rangle = m$ радиуса $\sqrt{m}$:

$$SO(m) \subset S^{m^2-1}.$$

Лемма 4. *Скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{m^2}$ инвариантно относительно правых и левых сдвигов на элементы $g \in SO(m)$.*

Доказательство. Пусть $A = g\bar{A}$, $B = g\bar{B}$. Тогда $\langle A, B\rangle = \operatorname{Sp}(g\bar{A}\bar{B}^{\mathrm{T}}g^{\mathrm{T}}) = \operatorname{Sp}(g\bar{A}\bar{B}^{\mathrm{T}}g^{-1}) = \operatorname{Sp}(\bar{A}\bar{B}^{\mathrm{T}}) = \langle\bar{A}, \bar{B}\rangle$. Аналогично для правых сдвигов: если $A = \bar{A}g$, $B = \bar{B}g$, то $\langle A, B\rangle = \operatorname{Sp}(\bar{A}gg^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{Sp}(\bar{A}\bar{B}^{\mathrm{T}}) = \langle\bar{A}, \bar{B}\rangle$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Метрика* (8) *на $\mathbb{R}^{m^2}$, ограниченная на любую подгруппу $Q \subset SO(m)$, инвариантна относительно правых и левых сдвигов*

$$q \mapsto q_1qq_2$$

(*биинвариантная* или *двусторонне инвариантная метрика*).

Лемма 5. *Всякая двусторонне инвариантная метрика на простой группе Ли Q пропорциональна метрике Киллинга с постоянным множителем.*

Доказательство. На алгебре Ли L группы Q двусторонне инвариантная метрика порождает ad-инвариантное скалярное произведение (здесь $A, B, C \in L$):

$$\langle[A, B], C\rangle + \langle B, [A, C]\rangle = 0 \tag{9}$$

или, если $g_T = \exp(AT)$,

$$\langle g_T B g_T^{-1},\ g_T C g_T^{-1}\rangle = \langle B, C\rangle. \tag{10}$$

Скалярное произведение Киллинга $\langle A, B\rangle$ удовлетворяет (9) и (10). Пусть g_{ab}, $\bar{g}_{ab}$ — две метрики, удовлетворяющие (9), (10). Метрика $g_{ab} - \lambda\bar{g}_{ab}$ также ad-инвариантна. Пусть λ_1 таково, что $\det(g_{ab} - \lambda_1\bar{g}_{ab}) = 0$; соответствующее собственное подпространство алгебры L обозначим через R_{λ_1}. Очевидно, подпространство R_{λ_1} инвариантно относительно внутренних автоморфизмов алгебры. Однако в силу простоты группы Q представление ad неприводимо (не имеет инвариантных подпространств). Поэтому $R_{\lambda_1} = L$ и $g_{ab} = \lambda_1\bar{g}_{ab}$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Всякая простая подгруппа Q группы $SO(m)$ с метрикой Киллинга изометрически вкладывается в сферу S^{m^2-1} с метрикой, пропорциональной обычной.*

Следствие 4. *Тензор Риччи R_{ab} также обладает свойством инвариантности* (9), (10). *Поэтому для простой группы $R_{ab} = \lambda g_{ab}$, $\lambda = \text{const}$.*

Для компактных групп G мы уже знаем, что $R_{ab} > 0$ (см. § 30 части I). Полупростая группа есть (локально) прямое произведение нескольких простых: $G = G_1 \times \ldots \times G_k$. Для каждой простой группы G_i этот результат очевиден, так как знак λ легко определяется.

5. Построение симметрических пространств. Примеры. Перейдем теперь к общим симметрическим пространствам. Пусть

$$M = G/H, \quad \mathfrak{g} = L = L^0 + L^1,$$

где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, слагаемые L^0 и L^1 удовлетворяют соотношению (5), L^0 — алгебра Ли группы H, пространство $L^1 = \mathbb{R}^n_{x_0}$ изоморфно касательному пространству к M в точке x_0, $H(x_0) = x_0$. Метрика на M будет получаться в дальнейших примерах из формы Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 6. *В метрике Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ подпространства L^0 и L^1 ортогональны.*

Доказательство. Так как $[L^0, L^0] \subset L^0$, $[L^0, L^1] \subset L^1$, $[L^1, L^1] \subset L^0$, то для $A \in L^0$, $B \in L^1$

$$\operatorname{ad} A(L^0) \subset L^0, \quad \operatorname{ad} A(L^1) \subset L^1,$$
$$\operatorname{ad} B(L^1) \subset L^0, \quad \operatorname{ad} B(L^0) \subset L^1.$$

Поэтому $\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A \operatorname{ad} B) = 0$. Лемма доказана.

Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ имеет вид (часто форму $g^{(1)}_{\gamma\delta}$ называют *формой Киллинга симметрического пространства*)

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} g^{(0)}_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g^{(1)}_{\gamma\delta} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где α, β — индексы базиса в L^0 и γ, δ — индексы базиса в L^1. Форма $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ на алгебре L^0 удовлетворяет соотношениям (9). Поэтому, если алгебра L^0 проста, то метрика $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ пропорциональна метрике Киллинга самой алгебры L^0. Однако в важных примерах алгебра L^0 не проста, а лишь полупроста, $L^0 = L^0_1 \oplus L^0_2$, где алгебры L^0_1 и L^0_2 уже просты. Тогда форма $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ в соответствии с леммой 6 может отличаться от формы Киллинга на один множитель λ_1 на L^0_1 и на другой множитель λ_2 на L^0_2.

Заметим следующее: если $A \in L^0$, группа H компактна и метрика $g^{(1)}_{\gamma\delta}$ положительна, то матрица $\operatorname{ad} A$ кососимметрична (как на L^0, так и на L^1). Для $\langle A, A\rangle$ имеем

$$-\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A)^2 = -\left[\operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A)^2_{L^0} + \operatorname{Sp}(\operatorname{ad} A)^2_{L^1}\right].$$

Поэтому

$$|\langle A, A\rangle|_{\mathfrak{g}} > |\langle A, A\rangle|_{L^0}. \tag{12}$$

Мы знаем, что у алгебры Ли L^0 компактной группы Ли H форма Киллинга неотрицательна. Что касается ограничения $g^{(0)}_{\alpha\beta}$ формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на L^0, то в силу неравенства (12) это ограничение положительно для компактных групп H (если метрика симметрического пространства положительна).

Мы видим следующее: для построения симметрического пространства достаточно задать подалгебру $L^0 \subset \mathfrak{g}$, ограничение на которую формы Киллинга с объемлющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырождено. После этого L^1 определится как ортогональное дополнение. Однако соотношения (12) дают сильные ограничения на выбор L^0. Если форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ индефинитна, то для симметрических пространств с положительной метрикой подалгебра $L^0 \subset \mathfrak{g}$ должна быть такой, что форма на ее ортогональном дополнении знакоопределена (2-й тип). При этом алгебра L^0 должна быть алгеброй Ли компактной группы — подгруппы группы $SO(n)$.

Замечание. Можно реализовать симметрическое пространство M как подмногообразие в группе G таким образом, чтобы геодезические многообразия M являлись геодезическими и в многообразии G. Вложение строится одним из следующих способов:

1) выпускаются все однопараметрические подгруппы из $1 \in G$ по направлениям векторов $B \in L^1$ (покажите, что эти геодезические заметают подмногообразие $M \subset G$);

2) рассматривается отображение φ: $M \to G$, действующее по формуле $\varphi(x) = S^{-1}_{x_0} S_x \in G$ (S_x — симметрия);

3) рассматривается инволюция $\bar{\sigma}$: $G \to G$ (антиавтоморфизм группы, $\bar{\sigma}(g_1 g_2) = \bar{\sigma}(g_2)\bar{\sigma}(g_1)$), которая на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяется равенствами $\bar{\sigma}|_{L_0} = 1$, $\bar{\sigma}|_{L_1} = -1$. Рассмотрим отображение $g \mapsto g\bar{\sigma}(g^{-1})$. Образ этого отображения и есть $M \subset G$.

Докажите совпадение вложений 1), 2), 3).

Основные примеры односвязных симметрических пространств 1-го типа (постройте разложение $\mathfrak{g} = L^0 + L^1$):

1) $SO(2n)/U(n)$,
2) $SU(n)/SO(n)$,
3) $SU(2n)/Sp(n)$,
4) $Sp(n)/U(n)$,
5) $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$,
6) $SU(p+q)/SU(p) \times U(q)$,
7) $Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$

грассмановы многообразия, в частности проективные пространства и сферы.

Некоторые примеры симметрических пространств 2-го типа (метрика положительна). Оказывается, что в односвязном случае они имеют топологию евклидова пространства $\mathbb{R}^n$:

1) $SO(p, q)/SO(p) \times SO(q)$ (при $q = 1$ это L^p — пространство Лобачевского),
2) $SU(p, q)/U(p) \times SU(q)$ (при $q = 1$ это — единичный шар в $\mathbb{C}^p$ как комплексное многообразие; при $p = 1$ это многообразие совпадает с $L^2 = SU(1, 1)/U(1)$),
3) $Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$,
4) $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$,
5) $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$,
6) $SO(n, \mathbb{C})/SO(n, \mathbb{R})$.

Задачи. 1. Для симметричных пространств 2-го типа с положительной метрикой покажите, что размерность подалгебры $L^0 \subset \mathfrak{g}$ совпадает с числом положительных квадратов формы Киллинга в $\mathfrak{g}$.

2. В частности, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ комплексна (например, $G = SL(n, \mathbb{C})$ или $SO(n, \mathbb{C})$), то числа отрицательных и положительных квадратов совпадают и $\dim L^0 = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}$. Найдите подалгебры L^0 в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы $G = SL(n, \mathbb{C})$.

3. Покажите, что для симметрических пространств 2-го типа с положительной метрикой всегда

$$M = G/H,$$

где H — максимальная компактная подгруппа группы G. Исследуйте случаи $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$.

4. Покажите, что односвязные симметрические пространства 2-го типа всегда имеют топологию пространства $\mathbb{R}^n$.

Далее, для кривизны симметрических пространств, как и для групп Ли, имеем

$$\langle R(\xi, \eta)\zeta, \tau\rangle|_{x_0} = \frac{1}{4}\langle [\xi, \eta], [\zeta, \tau]\rangle_{L^0},$$

$$\xi, \eta, \zeta, \tau \in \mathbb{R}^n_{x_0} = L^1.$$

5. Покажите, что для пространств 1-го типа $R_{ab} > 0$ и кривизна в двумерных направлениях $\langle R(\xi, \eta)\xi, \eta\rangle$ неотрицательна.

6. Для пространств 2-го типа покажите, что кривизна в двумерных направлениях неположительна. Выведите отсюда, что односвязное симметрическое пространство 2-го типа топологически есть $\mathbb{R}^n$ (предполагается, что метрика положительна).

7. Выясните, какие из вышеперечисленных симметрических пространств 1-го и 2-го типов имеют кривизну в двумерных направлениях, не обращающуюся в нуль. Исследуйте случаи S^n, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{R}P^n$ для 1-го типа и случаи L^n, $SU(n, 1)/U(n)$, $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$ для 2-го типа.

8. Докажите, что для размерностей $n = 2, 3$ все односвязные симметрические пространства с положительной метрикой исчерпываются случаями L^n, S^n, $\mathbb{R}^n$. Указание. Покажите, что стационарная подгруппа $H \subset G$ обязана совпадать с $SO(n)$ $(n = 2, 3)$. Выведите отсюда постоянство кривизны по всем двумерным направлениям для $n = 3$.

9. Докажите, что для полупростой группы $G = G_1 \times \ldots \times G_k$ (G_i — простые группы) любое односвязное симметрическое пространство M имеет вид

$$M = (G_1/H_1) \times \ldots \times (G_k/H_k),$$

где метрика распадается в прямое произведение. При этом метрика каждого $M_i = G_i/H_i$ пропорциональна метрике Киллинга на пространстве L_i^1 в алгебре Ли $\mathfrak{g}_i = L_i^0 + L_i^1$.

В заключение приведем список симметрических пространств размерности 4 с метрикой сигнатуры $(+---)$. Эти пространства могут представлять интерес для общей теории относительности, поскольку метрика g_{ab} удовлетворяет уравнению $R_{ab} - \lambda g_{ab} = 0$ (см. следствие 4 выше).

I. Пространства постоянной кривизны с группой изотропии $G = SO(1, 3)$.

1) Пространство Минковского $\mathbb{R}^4_{1,3}$.

2) Пространство де Ситтера $S_+ = SO(1, 4)/SO(1, 3)$; заметим, что S_+ гомеоморфно $\mathbb{R} \times S^3$. Тензор кривизны R есть тождественный оператор пространства бивекторов $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ в себя: $R = 1$.

3) Пространство де Ситтера $S_- = SO(2, 3)/SO(1, 3)$; пространство S_- гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^3$, его «универсальная накрывающая» (см. § 18) $\tilde{S}_- = \widetilde{SO}(2, 3)/\widetilde{SO}(1, 3)$ гомеоморфна $\mathbb{R}^4$. Тензор кривизны $R = -1$.

II. Приводимые пространства (произведение пространств постоянной кривизны).

1) $G = SO(3)$, $M = R_+ \times M^3_{---}$, где M^3_{---} — пространство постоянной кривизны сигнатуры $(---)$.

2) $G = SO(1, 2)$, $M = R_- \times M^3_{+--}$, где M^3_{+--} — пространство постоянной кривизны сигнатуры $(+--)$.

3) $G = SO(2) \times SO(1,1)$, $M = M^2_{--} \times M^2_{+-}$ — произведение двух двумерных пространств постоянной кривизны.

III. Симметрические пространства плоских волн M_t (группа изотропии G коммутативна, группа движений разрешима). В некоторой глобальной системе координат метрика имеет вид

$$dl^2 = 2dx_1dx_4 + \underbrace{[(\cos t)\, x_2^2 + (\sin t)\, x_3^2]}_{H} dx_4^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

$$\cos t \geqslant \sin t.$$

В тетраде (см. часть I, § 30), задаваемой 1-формами

$$p = dx_1, \quad q = dx_1 + H\, dx_4, \quad x = dx_3, \quad y = dx_4,$$

тензор кривизны постоянен и имеет вид

$$R = -4[\cos t\,(p \wedge x) \otimes (p \wedge x) + \sin t\,(p \wedge y) \otimes (p \wedge y)].$$

Замечания. 1. Односвязное симметрическое пространство однозначно определяется своим тензором кривизны в точке. Если R — тензор кривизны, R: $\Lambda^2(V) \to \Lambda^2(V)$, то обозначим через h алгебру Ли кососимметрических линейных операторов пространства V, порожденную операторами вида $R(x, y)$, $x, y \in V$ (h есть алгебра изотропии (L_0)). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, задаваемая в пространстве $V \oplus h$ формулами

$$[(u, a), (v, b)] = (av - bu, [a, b] + R(u, v)).$$

Тогда однородное пространство $M = G/H$, соответствующее паре $(\mathfrak{g}, h)$, естественным образом наделяется структурой симметрического пространства.

2. Описание всех тензоров кривизны симметрических пространств с данной группой изотропии H сводится к нахождению H-инвариантных тензоров R типа тензора кривизны, для которых $R(x, y) \in h$ для любых $x, y \in V$, h — алгебра Ли H.

§ 7. Линейные элементы и связанные с ними многообразия

1. Конструкции, связанные с касательными векторами. Пусть M есть n-мерное многообразие. По этому многообразию построим $2n$-мерное многообразие L, называемое *многообразием линейных элементов* многообразия M.

Определение. Точками многообразия линейных элементов $L(M)$ являются пары (x, ξ), где x — точка многообразия M, ξ — касательный вектор в этой точке к многообразию M.

Введем локальные координаты на многообразии $L(M)$. Пусть $U_q \subset M$ — область действия локальных координат (x_q^α). Тогда в каждой точке области U в касательном пространстве к M возникает базис $e_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_q^\alpha}$ и касательные векторы в этой точке полу-

чают координаты: $\xi = \xi_q^\alpha e_\alpha$. Пары вида (x, ξ), где $x \in U_q$, образуют область U_q^L в пространстве $L(M)$. Локальные координаты в области U_q^L имеют вид

$$(y_q^1, \ldots, y_q^{2n}) = (x_q^1, \ldots, x_q^n, \xi_q^1, \ldots, \xi_q^n).$$

Функции перехода на пересечении области U_q^L с областью U_p^L, где в области U_p действуют координаты (x_p^β), имеют вид

$$(y_p^1, \ldots, y_p^{2n}) = (x_p^\beta, \xi_p^\beta) = \left(x_p^\beta(x_q^1, \ldots, x_q^n), \frac{\partial x_p^\beta}{\partial x_q^\alpha}\xi_q^\alpha\right).$$

Матрица Якоби этих функций перехода имеет вид

$$\left(\frac{\partial y_p^i}{\partial y_q^j}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ H & A \end{pmatrix}, \quad A = \left(\frac{\partial x_p^\beta}{\partial x_q^\alpha}\right), \quad H = \frac{\partial^2 x_p^\beta}{\partial x_q^\alpha \partial x_q^\gamma}\xi_q^\alpha.$$

Якобиан (определитель этой матрицы) равен $(\det A)^2 > 0$.

Следствие. *Многообразие линейных элементов $L(M)$ — гладкое ориентируемое $2n$-мерное многообразие.*

Пример. Многообразие линейных элементов к области U в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ диффеоморфно прямому произведению $U \times \mathbb{R}^n$.

Пусть на многообразии M задана риманова метрика. Тогда в многообразии всех линейных элементов $L(M)$ выделяется подмногообразие $L_1(M)$ точек (x, ξ), для которых $|\xi| = 1$. Размерность многообразия L_1 равна $2n - 1$ (оно задается неособым уравнением $f(x, \xi) = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 1$).

Пример. Для n-мерной сферы S^n, задаваемой уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n} (x^\alpha)^2 = 1$, касательный вектор ξ ортогонален радиус-вектору x, проведенному в точку касания. Поэтому для сферы S^n многообразие пар (x, ξ) есть многообразие Штифеля $V_{n+1,2}$. В частности, для двумерной сферы S^2 многообразие всех единичных касательных векторов $L_1(S^2)$ совпадает с $V_{3,2} = SO(3) \approx \mathbb{R}P^3$.

Рассмотрим некоторые другие конструкции, связанные с линейными элементами:

а) Часто встречается многообразие $L_p(M)$, точками которого являются пары (x, τ), где τ — прямая в касательном пространстве в точке $x \in M$, проходящая через начало координат.

б) С любым n-мерным многообразием M можно связать новое многообразие E, точками которого являются пары (x, τ), где $x \in M$ и $\tau = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — базис касательного пространства в точке x.

в) Для ориентированного многообразия M определено многообразие E реперов, лежащих в одном классе ориентации.

г) Для римапова многообразия возникает многообразие E_0 ортогональных касательных реперов.

Другие примеры конструкций, связанных с линейными элементами, будут рассмотрены в гл. 6.

Гладкое отображение $f\colon M \to N$ многообразия M в многообразие N определяет гладкое отображение соответствующих многообразий линейных элементов:

$$L(M) \to L(N),\ (x, \xi) \mapsto (f(x), f_*\xi)$$

f_* — построенное в § 1 индуцированное отображение касательных пространств).

Определим теперь «пространство кокасательного расслоения» $L^*(M)$ как совокупность пар (x, p), где p — ковектор (1-форма на M) в точке x. Локальные координаты (x_p^α) в области U_p дают локальные координаты $(x_p^\alpha, p_{p\alpha})$ в многообразии $L^*(M)$, где (локально)

$$p = p_{p\alpha} dx_p^\alpha.$$

Функции перехода от координат $(x_p^\alpha, p_{p\alpha})$ к координатам $(x_q^\beta, p_{q\beta})$ имеют вид

$$(x_q^\beta, p_{q\beta}) = \left(x_q^\beta(x_p^1, \ldots, x_p^n), \frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta} p_{p\alpha}\right). \tag{1}$$

Матрица Якоби этих функций перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \widetilde{H} & A^{-1} \end{pmatrix}, \quad A = \left(\frac{\partial x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta}\right), \quad \widetilde{H} = \left(\frac{\partial^2 x_p^\alpha}{\partial x_q^\beta \partial x_q^\nu} p_{p\alpha}\right).$$

Ее определитель равен 1. Следовательно, многообразие $L^*(M)$ также ориентировано.

Метрика $g_{\alpha\beta}$ на многообразии M позволяет построить диффеоморфизм

$$L(M) \to L^*(M).$$

Здесь точка (x^α, ξ^α) переходит в точку $(x^\alpha, g_{\alpha\beta}(x)\xi^\beta)$ (изучавшаяся в § 19 части I операция опускания индексов).

Выражение $\omega = p_\alpha dx^\alpha$ при заменах вида (1) инвариантно. Следовательно, ω можно рассматривать как дифференциальную форму на многообразии $L^*(M)$. Ее дифференциал $\Omega = d\omega = \sum_{\alpha=1}^{n} dp_\alpha \wedge dx^\alpha$ — невырожденная кососимметрическая 2-форма, которая, очевидно, замкнута, $d\Omega = 0$.

Вывод. *Многообразие $L^*(M)$ симплектическое.*

Напомним, что в части I симплектическим называлось пространство с невырожденной замкнутой кососимметрической 2-формой Ω.

2. Нормальное расслоение к подмногообразию. Пусть M — римапово n-мерное многообразие, $g_{\alpha\beta}$ — метрика на нем. Пусть, далее, N — гладкое k-мерное подмногообразие многообразия M. Определим пространство $\nu_M(N)$ «нормального расслоения» к подмногообразию N в M. Точками этого пространства являются пары (x, ν), где x — точка из N, ν — вектор, касающийся M в точке x и ортогональный к подмногообразию N в этой точке. Под ортогональностью к подмногообразию N мы понимаем ортогональность к подпространству, касательному к N. Подмногообразие N можно считать локально заданным системой неособых уравнений $y^{k+1} = 0, \ldots, y^n = 0$, причем функции $y^{k+1}, \ldots, y^n$ включаются в локальную систему координат $(y^1, \ldots, y^n)$ на M, а $(y^1, \ldots, y^k)$ — локальные координаты на самом N (см. § 1). Тогда многообразие $\nu_M(N)$ локально выделяется в $L(M)$ системой уравнений

$$y^{k+1} = 0, \ldots, y^n = 0, \quad g_{\alpha\beta}(y)\nu^\beta = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, k.$$

Эта система неособа (проверьте!). Поэтому $\nu_M(N)$ — n-мерное подмногообразие в $L(M)$.

Примеры. 1. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, N задано в целом системой неособых уравнений

$$f_1(y) = 0, \ldots, f_{n-k}(y) = 0, \quad y = (y^1, \ldots, y^n).$$

Тогда векторы $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}$ ортогональны к поверхности N и всюду линейно независимы. Эти векторы задают в $\nu_{\mathbb{R}^n}(N)$ структуру прямого произведения:

$$\nu_{\mathbb{R}^n}(N) \approx N \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Более общо, если подмногообразие N задано в M в целом системой неособых уравнений

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_{n-k}(x) = 0,$$

то векторные поля $e_i(x) = \operatorname{grad} f_i(x) = \left(g^{lj}\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)$, $i = 1, \ldots, n-k$, ортогональны к N в каждой точке и линейно независимы. Любой вектор, нормальный к N в точке x, имеет вид

$$\nu = \nu^i e_i(x).$$

Получаем соответствие $(x, \nu) \leftrightarrow (x, \nu^1, \ldots, \nu^k)$, т. е.

$$\nu_M(N) \approx N \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Важный частный случай: пусть $A \subset M$ — многообразие с краем, задаваемое неравенством $f(x) \leqslant 0$; $N = \partial A$ — край многообразия A. Этот край имеет размерность $n-1$ и задастся одним неособым уравнением $f(x) = 0$; нормальное расслоение к краю

распадается в прямое произведение

$$\nu_M(\partial A) = \partial A \times \mathbb{R}.$$

2. Пусть $M = N \times N$, где N — риманово многообразие. Касательный вектор к многообразию M задается парой касательных векторов (ξ, η) к многообразию N. Введем в многообразии M риманову метрику, полагая

$$\langle(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)\rangle = \langle\xi_1, \xi_2\rangle + \langle\eta_1, \eta_2\rangle.$$

Расположим многообразие N в M как диагональ $\Delta = \{(x, x)\} \subset M$, где x — точки из N. Векторы, касающиеся диагонали Δ, имеют вид (ζ, ζ). Если вектор $\nu = (\xi, \eta)$ ортогонален диагонали Δ, то

$$0 = \langle(\zeta, \zeta), (\xi, \eta)\rangle = \langle\zeta, \xi + \eta\rangle.$$

Это равенство справедливо при любом векторе ζ, лишь если $\xi = -\eta$. Итак, векторы, нормальные к диагонали $N = \Delta$, имеют вид $\nu = (\xi, -\xi)$.

Вывод. $\nu_{N\times N}(\Delta) \approx L(N)$.

3. Определим отображение h пространства нормального расслоения $\nu_M(N)$ в многообразие M (геодезическое отображение). Пусть (x, ν) — точка из $\nu_M(N)$. Выпустим из точки x геодезическую $\gamma(t)$ в многообразии M с начальным вектором скорости ν: $\gamma(0) = \nu$. Положим $h(x, \nu) = \gamma(1)$.

Лемма. *Якобиан отображения h при $(x, \nu) = (x, 0)$ не равен нулю.*

Доказательство проведем для случая, когда M есть пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой метрикой, $N \subset \mathbb{R}^n$ — гиперповерхность, заданная параметрически $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Координаты точки $(x, \nu) \in \nu_{\mathbb{R}^n}(N)$ имеют вид $(u^1, \ldots, u^{n-1}, t)$, где $x = x(u)$, $\nu = tn(u)$, $n = n(u)$ — единичный вектор нормали к поверхности N в точке $x(u)$. Геодезическое отображение имеет вид

$$h(u^1, \ldots, u^{n-1}, t) = x(u) + tn(u).$$

Для его производных будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial u^i} = \frac{\partial x}{\partial u^i} + t\frac{\partial n}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = n.$$

При $t = 0$ получаем, очевидно, невырожденную матрицу Якоби $\left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial t}\right)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть многообразие N компактно, и пусть $\nu_M^\varepsilon(N) = \{(x, \nu), |\nu| < \varepsilon\}$. Тогда отображение h отображает область $\nu_M^\varepsilon(N)$ при достаточно малом ε диффеоморфно на некоторую окрестность $U_\varepsilon(N)$ многообразия N в M.*

Доказательство. В силу леммы 1 отображение h является диффеоморфизмом в окрестности любой точки $(x, 0)$ в $\nu_M(N)$. Выберем из этих окрестностей конечное их число, покрывающее множество $(N, 0)$ в $\nu_M(N)$. Многообразие N содержится в объединении этих окрестностей вместе с некоторой ε-окрестностью $\nu^{\varepsilon}_M(N)$. В этой ε-окрестности отображение является диффеоморфизмом.

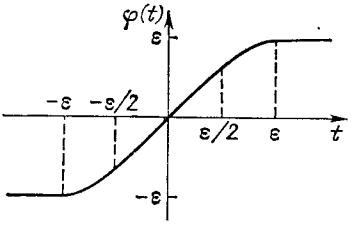


Рис. 56

Замечание. Пусть $U_\varepsilon(N)$ — диффеоморфный образ области $\nu^{\varepsilon}_M(N)$, описанный в следствии. Тогда из любой точки x из области $U_\varepsilon(N)$ можно опустить «геодезический перпендикуляр» γ на подмногообразие N, причем геодезическая γ локально единственна. Длину этого перпендикуляра мы будем называть расстоянием от точки x до многообразия N и обозначать через $\rho(x, N)$. Функция $\rho(x, N)$ гладко зависит от точки x в области $U_\varepsilon(N)$.

Теорема 1. *Пусть M — компактная двусторонняя гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$* (см. § 2). *Тогда M задается одним неособым уравнением*

$$f(x) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ — гладкая функция, график которой изображен на рис. 56. Построим функцию $f(x)$ в $\mathbb{R}$, полагая

$$f(x) = \begin{cases} \pm\varepsilon, & \text{если } x \text{ не лежит в } U_\varepsilon(M), \\ \varphi(\pm\rho(x, M)), & \text{если } x \in U_\varepsilon(M). \end{cases}$$

Здесь $U_\varepsilon(M)$ — описанная в следствии окрестность многообразия M. Знак $+$ выбирается для точек x, лежащих в каком-нибудь одном из кусков в $\mathbb{R}^n \setminus M$, знак $-$ берется для другого куска (поверхность лежит двусторонним образом). Уравнение $f(x) = 0$ как раз задает гиперповерхность M. Теорема доказана.

Глава 2

ВОПРОСЫ ОБОСНОВАНИЯ. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ. ТИПИЧНЫЕ ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Данная глава посвящена вопросам обоснования, необходимым в теории гладких многообразий. Доказательства теорем этой главы не играют ни малейшей роли в дальнейших главах при построении содержательной топологии и геометрии многообразий. Вследствие этого читатель может ознакомиться лишь с определениями и формулировками теорем этой главы без ущерба для понимания дальнейшего материала. Материал этой главы делится на две части: в первой части строится так называемое «разбиение единицы», с помощью которого доказывается ряд «теорем существования», которые в конкретных примерах часто самоочевидны: существование римановой метрики и связности на многообразии, строгое обоснование общей формулы Стокса, существование гладкого вложения компактного многообразия в евклидово пространство, аппроксимация непрерывных функций и отображений гладкими, обоснование оператора усреднения форм и метрик по компактной группе преобразований.

Вторая часть, начинающаяся с так называемой леммы Сарда, посвящена разработке точных представлений о «типичных» особенностях функций и отображений. Эта часть весьма полезна в дальнейших конкретных топологических конструкциях и заслуживает того, чтобы читатель более внимательно ознакомился с определениями и формулировками.

§ 8. Разбиение единицы и его применения

Мы будем в дальнейшем использовать следующие обозначения: $C^\infty(M)$ — пространство гладких функций на гладком многообразии M; $\sup(f(x))$ — точная верхняя грань значений функции $f(x)$; $\operatorname{supp}(f(x))$ — носитель функции $f(x)$, т. е. замыкание множества тех точек x, в которых $f(x) \neq 0$.

1. Разбиение единицы. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — два непересекающихся подмножества, причем A замкнуто и ограниченно, B замкнуто и*

$A \cap B = \varnothing$. Тогда существует C^∞-функция $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что $\varphi(x) \equiv 1$ на A и $\varphi(x) \equiv 0$ на B (рис. 57). *При этом всюду* $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$.

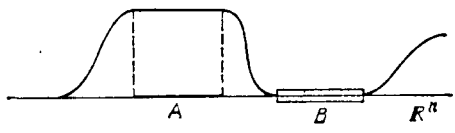


Рис. 57

Доказательство. Пусть $0 < a < b$ — два вещественных числа. Рассмотрим на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$ следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{x-a}\right) & \text{при } a < x < b, \\ 0 \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

Легко проверить, что $f(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^1$ (проверьте!).

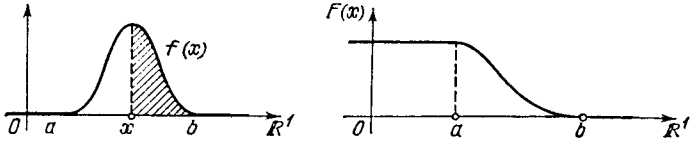


Рис. 58

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \left(\int_x^b f(t)\,dt\right) \Big/ \int_a^b f(t)\,dt$$

(рис. 58). Ясно, что $F(x)$ — гладкая функция и что

$$F(x) \begin{cases} = 0 \text{ при } x \geqslant b, \\ = 1 \text{ при } x \leqslant a, \\ \text{убывает от 1 до 0 при } a \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь функцию $\psi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, определенную формулой

$$\psi(x^1, \ldots, x^n) = F\left((x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2\right) = F\left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right).$$

Ясно, что $\psi(x)$ — гладкая функция на $\mathbb{R}^n$ и что

$$\psi(x) \begin{cases} = 0 \text{ при } r^2 \geqslant b, \\ = 1 \text{ при } r^2 \leqslant a, \\ \text{убывает от 1 до 0 при } a \leqslant r^2 \leqslant b. \end{cases}$$

Здесь $r^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$ (см. рис. 59). Итак, если S и S' — две кон-

центрические сферы в $\mathbb{R}^n$ и S охватывает S', то существует гладкая функция $\psi(x)$ такая, что $\psi(x) \equiv 0$ вне шара, ограничиваемого S, и $\psi(x) \equiv 1$ в шаре, ограничиваемом S'.

Теперь рассмотрим множества A и B (см. условие леммы). Так как A компактно, то существует набор сфер S_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ таких, что соответствующие открытые шары D_i $(\partial \overline{D}_i = S_i$; черта

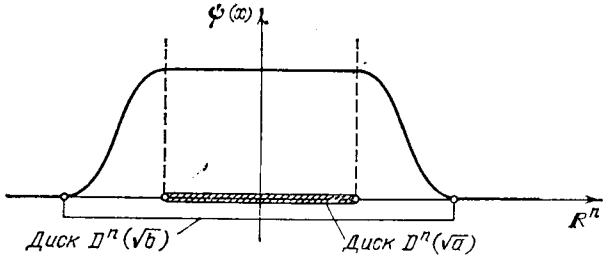


Рис. 59

обозначает замыкание) составляют покрытие множества A, т. е. $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_i$. Так как $A \cap B = \varnothing$, то можно считать, что $\overline{D}_i \cap B = \varnothing$ для любого i.

Любую сферу S_i можно уменьшить до сферы $S_i' \subset S_i$ такой, что набор сфер $\{S_i'\}$ все еще порождает покрытие A, т. е. $A \subset \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_i'$.

Рассмотрим функции $\psi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (гладкие функции на $\mathbb{R}^n$) такие, что

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ на } D_i', \\ 0 \text{ вне } D_i. \end{cases}$$

Положим $\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \psi_i(x))$. Ясно, что $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \equiv 1$ на A и $\varphi(x) \equiv 0$ на B. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть C — компактное подмножество гладкого многообразия M; пусть $C \subset V$, где V — открытое подмножество M. Тогда существует функция $\varphi(x) \in C^\infty(M)$ такая, что $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ на M, $\varphi(x) \equiv 1$ на C и $\varphi(x) \equiv 0$ вне V.*

Эта лемма уже доказана нами для случая $M = \mathbb{R}^n$ (см. лемму 1). Обратимся к общему случаю. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — локальная карта на M, φ_α: $U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Пусть $S_\alpha \subset U_\alpha$ — компактное подмножество в U_α. Рассмотрим множество $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$; это множество открыто в $\mathbb{R}^n$.

В силу леммы 1 на множестве $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ существует функция $f_\alpha(x)$ такая, что $f_\alpha(x) \equiv 1$ на $\varphi_\alpha(S_\alpha)$ и что $\operatorname{supp} f_\alpha(x) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$, т. е. $f_\alpha(U_\alpha) \equiv 0$ вне $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Рассмотрим функцию $F_\alpha(P)$ на M:

$$F_\alpha(P) = \begin{cases} f_\alpha(\varphi_\alpha(P)) & \text{при } P \in U_\alpha, \\ 0 & \text{при } P \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Ясно, что $F_\alpha \in C^\infty(M)$, $F_\alpha \equiv 1$ на S_α, $F_\alpha \equiv 0$ вне U_α. Теперь рассмотрим компактное подмножество C (см. выше), $C \subset V$, V открыто. В силу компактности C существует набор открытых координатных окрестностей $U_1, \ldots, U_N$ и компактных множеств $S_1, \ldots, S_N$ таких, что $C \subset \bigcup_{\alpha=1}^{N} S_\alpha, U_\alpha \supset S_\alpha, \bigcup_{\alpha=1}^{N} U_\alpha \subset V$. По доказанному ранее для каждого U_α существует функция $F_\alpha \in C^\infty(M)$ такая, что $F_\alpha \equiv 1$ на S_α и $F_\alpha \equiv 0$ вне U_α. Рассмотрим функцию $F = 1 - \prod_{\alpha=1}^{N} (1 - F_\alpha)$. Тогда $F \equiv 1$ на C и $F \equiv 0$ вне $\bigcup_\alpha U_\alpha$, в частности, $F \equiv 0$ вне V. Лемма доказана.

Теорема 1 (существование «разбиения единицы»). *Пусть M — компактное гладкое многообразие; пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное конечное покрытие многообразия M координатными областями (например, открытыми шарами).*

Тогда существует набор функций $\varphi_\alpha(x) \in C^\infty(M)$ таких, что:

1) $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ *для любого* α;
2) $1 \geqslant \varphi_\alpha(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in M$;
3) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$ *для всех* $x \in M$.

Доказательство. Рассмотрим систему $\{U_\alpha\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$. Можно построить такую новую «уменьшенную» систему открытых шаров $\{V_\alpha\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, что $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ и $\{V_\alpha\}$ по-прежнему является покрытием многообразия M.

Рассмотрим пары (U_α, V_α). Согласно лемме 2 существуют функции $\psi_\alpha(x) \in C^\infty(M)$ такие, что $0 \leqslant \psi_\alpha \leqslant 1$ на M, $\psi_\alpha \equiv 1$ на $\overline{V}_\alpha$ и $\psi_\alpha \equiv 0$ вне U_α. Положим $\psi(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha(x)$; очевидно, $\psi \in C^\infty(M)$ и $\psi(x) > 0$ для любого $x \in M$. Положим, далее, $\varphi_\alpha = \psi_\alpha/\psi$. Ясно, что функции φ_α удовлетворяют условиям теоремы. Теорема доказана.

Система функций $\{\varphi_\alpha(x)\}$ называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$.

Замечание. Компактность многообразия M не является обязательным ограничением. Как это видно, доказательство существования разбиения единицы дословно переносится на многообразия, допускающие так называемые «локально конечные» покрытия (т. е. любая точка обладает окрестностью, пересекающей-

ся только с конечным числом областей покрытия). Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Таким образом, приведенное нами доказательство существования разбиения единицы годится для любого открытого многообразия, которое является паракомпактным хаусдорфовым пространством.

2. Простейшие применения разбиения единицы. Интеграл по многообразию и формула Стокса. Теорема о существовании разбиения единицы на многообразии имеет полезные следствия. Укажем некоторые из них. Для простоты предположим, что многообразие компактно.

Следствие 1. *На любом компактном многообразии существует риманова метрика.*

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, многообразия M шарами U_α с локальными координатами (x^i_α). В координатах $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ задаем, например, метрику $g^{(\alpha)}_{ab} = \delta_{ab}$. Надо «склеить» между собой все построенные на шарах U_α метрики $g^{(\alpha)}_{ab}$. По определению положим

$$g_{ab} = \sum_{\alpha=1}^{N} g^{(\alpha)}_{ab}(x)\, \psi_\alpha(x),$$

где $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Гладкость g очевидна. Так как $\psi_\alpha(x) \geqslant 0$ для любого x и так как пространство римановых метрик образует выпуклый конус (т. е. если g_1, g_2 — две римановы метрики и c, d — положительные числа, то и $cg_1 + dg_2$ — риманова метрика), то определенная нами метрика (g_{ab}) является римановой.

Следствие 2. *На любом компактном многообразии существует риманова связность.*

Это вытекает из следствия 1.

Аналогичным приемом определяется интеграл от внешней формы ω степени $n = \dim M$ по многообразию M. В каждой отдельной карте U_α с локальными координатами $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ форма $\omega^{(n)}$ степени n имеет вид

$$\omega^{(n)}(x) = a_{12\ldots n}(x)\, dx^1_\alpha \wedge \ldots \wedge dx^n_\alpha,$$

интеграл от $\omega^{(n)}$ по области U_α определяется обычным образом:

$$\int\limits_{U_\alpha} \omega^{(n)} = \int\limits_{U_\alpha} a_{12\ldots n}(x)\, dx^1_\alpha \wedge \ldots \wedge dx^n_\alpha.$$

Для определения полного интеграла $\int\limits_{M^n} \omega^{(n)}$ следует «склеить»

между собой интегралы $\int\limits_{U_\alpha} \omega^{(n)}$. По определению положим

$$\int\limits_{M^n} \omega^{(n)} = \int\limits_{M^n} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha(x) \right) \omega^{(n)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega^{(n)}(x).$$

(При этом напомним, что $\psi_\alpha(x) \equiv 0$ вне U_α.) Здесь $\{\psi_\alpha\}$ — разбиение единицы.

Перейдем к другим примерам использования разбиения единицы.

Дадим строгое доказательство общей формулы Стокса.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей ∂D. Например, D может задаваться неравенством: $f(x^1, \ldots, x^n) \geqslant 0$, $\operatorname{grad} f|_{\partial D} \neq 0$, где $x^1, \ldots, x^n$ — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, $V^{n-1} = \partial D$ — гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Если в $\mathbb{R}^n$ задана ориентация, то фиксирован порядок координат $x^1, \ldots, x^n$ с точностью до четной перестановки. Это эквивалентно тому, что фиксирован порядок векторов репера $(e_1, \ldots, e_n)$, который можно гладко перемещать в $\mathbb{R}^n$. Пусть $n(P)$ (где $P \in \partial D$) — внешняя нормаль к ∂D. В окрестности любой точки $P \in \partial D$ можно ввести локальные гладкие координаты $y^1, \ldots, y^{n-1}$. Эти координаты определяют ориентацию границы ∂D; напомним, что эта ориентация считается согласованной с ориентацией D, если репер $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}, n(P) \right)$ получается из репера $(e_1, \ldots, e_n)$ линейным преобразованием с положительным детерминантом.

Теорема 2. *Пусть ω — внешняя дифференциальная форма степени $n-1$ на D. Тогда*

$$\int\limits_D d\omega = \int\limits_{\partial D} i^*(\omega),$$

где i: $\partial D \to D$ — вложение, $i^*(\omega)$ — ограничение формы ω с D на ∂D (определение см. в части I, § 22); *ориентация на ∂D согласована с ориентацией в D.*

Замечание. Порядок координат $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^{n-1}$, задаваемый ориентацией, необходим для вычисления интегралов от форм.

Доказательство. Рассмотрим конечное покрытие области D шарами U_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, достаточно малого радиуса и фиксируем координатные отображения h_α: $B^n \to \mathbb{R}^n$; $h_\alpha(B^n) = U_\alpha$, где B^n — стандартный шар в $\mathbb{R}^n$, а отображение h_α есть просто введение локальных координат в U_α. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — фиксированные координаты в B^n.

Можно считать (это следует из теоремы о неявных функциях), что покрытие $\{U_\alpha\}$ устроено так: либо $\partial D \cap U_\alpha = \varnothing$, либо

$\partial D \cap U_\alpha \neq \varnothing$ и пересечение $\partial D \cap U_\alpha$ определяется уравнением $x^n = 0$, где $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты в U_α.

Пусть $\{\varphi_\alpha(x)\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, т. е.:

1) $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ для любого α;
2) $\varphi_\alpha(x) \geqslant 0$ для любого $x \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$;
3) $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$ для любого $x \in \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

Тогда

$$\int\limits_{\partial D} i^*(\omega) = \sum_\alpha \int\limits_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha \omega), \qquad \int\limits_D d\omega = \sum_\alpha \int\limits_D d(\varphi_\alpha \omega).$$

Следовательно, достаточно доказать, что для любого α, $1 \leqslant \alpha \leqslant N$ (N — число областей покрытия), выполнено равенство

$$\int\limits_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha \omega) = \int\limits_D d(\varphi_\alpha \omega).$$

Так как $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$, то $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha \omega) \subset U_\alpha$. Пусть $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$ — локальные координаты в U_α; запишем в этих координатах

$$\varphi_\alpha \omega = \widetilde{\omega}_\alpha = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k(x)\, dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n,$$

$a_k(x) \in C^\infty(D)$. Отсюда

$$d\widetilde{\omega}_\alpha = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_\alpha^k} \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n.$$

Случай 1. $U_\alpha \cap \partial D = \varnothing$. Тогда $\int\limits_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha \omega) = 0$, так как $\varphi_\alpha \equiv 0$ на ∂D. Так как $U_\alpha \cap \partial D = \varnothing$, то либо $U_\alpha \subset D$, либо $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \setminus D$. Если $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \setminus D$, то $\int\limits_D d(\varphi_\alpha \omega) = 0$, и формула Стокса доказана.

Пусть теперь $U_\alpha \subset D$. Надо доказать, что $\int\limits_D d(\varphi_\alpha \omega) = 0$, т. е. что

$$\int\limits_{U_\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = 0.$$

Координаты (x_α^i) позволяют отождествить U_α с шаром $B^n \subset \mathbb{R}^n$. Продолжим выражение под интегралом

$$\int\limits_{U_\alpha = B^n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n$$

на все пространство $\mathbb{R}^n$ нулем (у нас $\operatorname{supp}(a_k) \subset B^n$). Пусть $C^n = \{|x_k| \leqslant R,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ — куб в $\mathbb{R}^n$ такой, что $C^n \supset B^n$; число $2R$ — сторона куба C^n. Тогда

$$\int\limits_{B^n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}\right)dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{C_n}\frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{C^{n-1}}(-1)^\alpha\left(\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}dx_\alpha^k\right)dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_\alpha^k}\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n.$$

Далее,

$$\int\limits_{C^{n-1}}\left(\int\limits_{-R}^{R}\frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}dx_\alpha^k\right)dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_\alpha^k}\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n=$$

$$=\pm\int\limits_{C^{n-1}}\{a_k(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^{k-1},R,x_\alpha^{k+1},\ldots,x_\alpha^n)-$$

$$-a_k(x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^{k-1},-R,x_\alpha^{k+1},\ldots,x_\alpha^n)\}\,dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_\alpha^k}\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n=0,$$

так как $a_k(x_\alpha^1,\ldots,\pm R,\ldots,x_\alpha^n)=0$.

Итак, случай 1 полностью разобран.

Случай 2. $U_\alpha\cap\partial D\neq\varnothing$. Мы должны показать, что $\int\limits_{\partial D} i^*(\varphi_\alpha\omega)=\int\limits_D d(\varphi_\alpha\omega)$. Достаточно проверить, что $\int\limits_{\partial D\cap U_\alpha} i^*(\tilde{\omega}_\alpha)=\int\limits_{U_\alpha} d\tilde{\omega}_\alpha$. Запишем форму $\tilde{\omega}_\alpha=\varphi_\alpha\omega$ в координатах $x_\alpha^1,\ldots,x_\alpha^n$:

$$\tilde{\omega}_\alpha=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_\alpha^k}\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n.$$

Имеем

$$i^*(\tilde{\omega}_\alpha)=(-1)^{n-1}a_n i^*(dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^{n-1}),$$

$$\int\limits_{\partial D} i^*(\tilde{\omega}_\alpha)=\int\limits_{\partial D}(-1)^{n-k}a_n dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^{n-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_D\frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n.$$

Как и в случае 1, заменяем область интегрирования шаром B^n и продолжаем функции a_k нулем на все $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int\limits_{B^n} d\tilde{\omega}_\alpha=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{C^n}\lambda\frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k}dx_\alpha^1\wedge\ldots\wedge dx_\alpha^n,$$

где

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_\alpha^n > 0, \\ 0, & \text{если } x_\alpha^n \leqslant 0. \end{cases}$$

Далее,

$$\int\limits_{C^n} \lambda \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n =$$

$$= \int\limits_{C^{n-1}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \lambda \frac{\partial a_k}{\partial x_\alpha^k} dx_\alpha^k \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_\alpha^k} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = 0,$$

если $k \neq n$, так как $a_k(x_\alpha^1, \ldots, R, \ldots, x_\alpha^n) - a_k(x_\alpha^1, \ldots, -R, \ldots, x_\alpha^n) = 0$. В случае $k = n$ ситуация меняется:

$$\int\limits_{C^n} \frac{\partial a_n}{\partial x_\alpha^n} dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^n = (-1)^{n-1} \int\limits_{C^{n-1}} \left(\int\limits_{-R}^{R} \lambda \frac{\partial a_n}{\partial x_k^n} dx_\alpha^n \right) dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{n-1}.$$

Далее, $\int\limits_{-R}^{R} \lambda \frac{\partial a_n}{\partial x_\alpha^n} dx_\alpha^n = a_n|_{\partial D}$ (функция $\lambda(x)$ разрывна на ∂D). Последняя формула есть прямое следствие формулы $\int\limits_a^b df(x) = f(b) - f(a)$. Итак,

$$\int\limits_{B^n} d\widetilde{\omega}_\alpha = \int\limits_{C^{n-1}} (-1)^{n-1} a_1 dx_\alpha^1 \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{n-1},$$

что и требовалось. Случай 2 полностью разобран. Теорема доказана. (C^{n-1} всюду в этом доказательстве обозначает куб размерности $n-1$.)

Замечание. При доказательстве была использована «согласованность ориентации» области D и ее границы ∂D: дело в том, что при использовании формулы $\int\limits_a^b df(x) = f(b) - f(a)$ следует иметь в виду, что $b > a$, а это и дает направление внешней нормали $n(p)$ к ∂D; при изменении направления нормали интеграл изменил бы знак. Функция $a_n(k)$ при фиксированных $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{n-1}$ устроена так, как показано на рис. 60.

Задача. Докажите формулу Стокса для компактных многообразий с краем:

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Здесь ∂M — край многообразия M, ориентация которого согласована с ориентацией самого многообразия (см. § 1, п. 3).

3. Инвариантные метрики. Существование разбиения единицы позволяет доказывать существование римановых метрик (на многообразиях), инвариантных относительно действия компактных групп преобразований.

Рассмотрим сначала действие конечной группы G на гладком компактном связном замкнутом многообразии M.

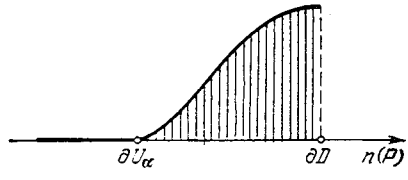


Рис. 60

Теорема 3. *На многообразии M существует риманова метрика, инвариантная относительно действия группы G.*

Доказательство. Как было доказано выше, на M существует некоторая риманова метрика $g_{ab}(x)$. Искомую инвариантную метрику построим из метрики $g_{ab}(x)$ посредством усреднения по группе G. Обозначим через $\langle,\rangle_x$ скалярное умножение в T_x, порожденное метрикой $g_{ab}(x)$. Пусть N — порядок группы G. Построим на M новое скалярное умножение $(,)_x$ (а тем самым и новую риманову метрику), произведя «усреднение по группе»:

$$(a, b)_x = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \langle g(a), g(b) \rangle_{g(x)},$$

где $a, b \in T_x$. Эта формула, очевидно, задает такое скалярное произведение, что $(g(a), g(b))_{g(x)} = (a, b)_x$ для любых $x \in M$, $a, b \in T_x$, $g \in G$, т. е. $(,)_x$ задает риманову метрику, инвариантную относительно действия группы G. Теорема доказана.

Аналогичная процедура приводит нас к римановым метрикам, инвариантным относительно действия непрерывных групп Ли. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть G — связная компактная группа Ли, и пусть $t = (t^1, \ldots, t^m)$ — локальные координаты на G в окрестности единицы. Эти координаты порождают (например, с помощью правых сдвигов) локальные координаты в окрестности любой точки $\alpha \in G$. В силу гладкости умножения на G эта система окрестностей задает атлас (набор координатных окрестностей) на группе G. Поэтому можно считать, что координаты $(t^1, \ldots, t^m)$ обслуживают (с помощью правых сдвигов) все точки группы G.

Лемма 3. *На группе Ли G существует элемент объема, инвариантный относительно правых сдвигов и представимый в виде $d\mu(x) = \Omega\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^m$, где $x \in G$, Ω — постоянная, а $t^1, \ldots, t^m$ — локальные координаты в окрестности точки x, полученные правым сдвигом на x из системы координат в окрестности единицы.*

Замечание. Иногда говорят, что такая дифференциальная форма на G задает «правоинвариантную меру» на G.

Доказательство. Форму объема в единичной точке $1 \in G$ мы можем задать с помощью обычного определителя. Применяя правые сдвиги, «разносим» эту форму по всей группе G. Единственность (с точностью до постоянного множителя) следует из того, что кососимметрический тензор ранга m в m-мерном линейном пространстве $T_1(G)$ определен однозначно с точностью до постоянного множителя. Лемма доказана.

Существует стандартная символика, с помощью которой выражают свойство правой инвариантности для меры $d\mu(\alpha)$: $d\mu(gg_0) = d\mu(g)$ (замена переменных порождает умножение на якобиан замены). Иногда свойство правой инвариантности меры $d\mu(\alpha)$ выражают в интегральных терминах:

$$\int_G f(gg_0\ d\mu(g) = \int_G f(g)\, d\mu(g),$$

где $f(g)$ — произвольная функция на G, для которой этот интеграл существует.

Аналогично строится левоинвариантная мера на группе G.

Пусть теперь компактная группа Ли G гладко действует на гладком многообразии M.

Теорема 4. *На многообразии M существует риманова метрика, инвариантная относительно группы G.*

Замечание. Если G действует на M не транзитивно, то таких инвариантных метрик на M будет, вообще говоря, много.

Доказательство. Построение искомой метрики копирует уже описанную нами процедуру усреднения метрики по действию конечной группы G. Рассмотрим на M какую-нибудь риманову метрику $g_{ab}(x)$, и пусть $\langle , \rangle_x$ — соответствующее ей скалярное произведение в T_x. Построим на M новое скалярное произведение $(,)_x$ в T_x (а тем самым и новую риманову метрику), положив по определению

$$(a, b)_x = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \langle g(a), g(b)\rangle_{g(x)}\, d\mu(g),$$

где $x \in M$, a, $b \in T_x$, $d\mu(g)$ — правоинвариантная мера на G, $g \in G$, $\mu(G)$ — объем группы G. Ясно, что

$$(g_0(a), g_0(b))_{g_0(x)} = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \langle gg_0(a),\ gg_0(b)\rangle_{gg_0(x)} d\mu(gg_0) =$$

$$= \frac{1}{\mu(G)} \int_G \langle g'(a),\ g'(b)\rangle_{g'(x)} d\mu(g') = (a, b)_x,$$

т. е. построенная метрика инвариантна относительно действия G на M. Теорема доказана.

§ 9. Реализация компактных многообразий как поверхностей в $\mathbb{R}^N$

Рассмотрим гладкие многообразия M и N размерностей n и p. Напомним, что гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется погружением, если ранг отображения $df|_x\colon T_x \to T_{f(x)}$ при любом x равен n. Это означает, что линейное отображение $df|_x$ касательных пространств является вложением для всех $x \in M$; в частности, отсюда следует, что $p \geqslant n$. Из теоремы о неявных функциях вытекает, что локально такое отображение f устанавливает диффеоморфизм между некоторой окрестностью $U(x)$ точки $x \in M$ и ее образом $f(U(x))$ в многообразии N. Однако, «в целом» отображение f вовсе не обязано быть взаимно однозначным.

Погружение $f\colon M \to N$ будем называть вложением, если f взаимно однозначно (т. е. устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$).

Теорема. *Любое компактное гладкое многообразие может быть гладко вложено в $\mathbb{R}^n$ для достаточно большого N.*

Доказательство. Зафиксируем конечное покрытие $\{U_i\}$ многообразия M окрестностями, диффеоморфными $\mathbb{R}^n$ ($n = \dim M$) и для каждого α построим отображение $\varphi_i\colon M \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, наворачивающее U_i на дополнение в S^n к одной точке и переводящее $M - U_i$ в эту точку. Ясно, что это отображение можно сделать гладким и имеющим невырожденный дифференциал в точках множества U_i. Отображения φ_i составляют отображение $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^N$, где $N = (n+1)k$, k — число элементов покрытия:

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)),$$

и это отображение является вложением. Действительно, дифференциал $d_x\varphi$ мономорфен, потому что уже дифференциал $d_x\varphi_i$ мономорфен, если $x \in U_i$; далее, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ при $x \neq y$, потому что уже $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)$, если $x \in U_i$. Теорема доказана.

Верхнюю оценку на размерность объемлющего евклидова пространства можно свести к числу $2n+1$. Более того, всякое отображение $M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ аппроксимируется гладким вложением (см. ниже). При $n = 1$ этот факт наглядно очевиден.

§ 10. Некоторые свойства гладких отображений многообразий

1. Аппроксимация непрерывных отображений гладкими. Докажем сначала возможность аппроксимации непрерывных отображений гладкими. Рассмотрим для простоты непрерывные отображения $f\colon M \to N$, где M, N — связные гладкие компактные многообразия без края. Как было доказано в предыдущих пунктах, M и N можно считать римановыми многообразиями, в частности,

можно считать M и N метрическими пространствами; пусть ρ — метрика (расстояние) на многообразии N.

Тогда можно ввести естественное понятие расстояния между отображениями M в N, положив

$$\rho(f, g) = \max_{x \in M} \rho(f(x), g(x)).$$

Таким образом, непрерывные отображения $M \to N$ для компактных M и N образуют метрическое пространство.

Воспользуемся теперь следующим фактом, известным из курса анализа.

Предложение. *Пусть $f(x^1, \ldots, x^n)$ — непрерывная функция на открытой области $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого открытого множества $V \subset U$ такого, что $\overline{V} \subset U$, существует функция $g(x^1, \ldots, x^n)$ такая, что: 1) функция $g(x^1, \ldots, x^n)$ является гладкой на V; 2) $g|_{U \setminus V} = f|_{U \setminus V}$; 3) $\max\limits_{x \in \overline{V}} |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$; 4) функция $g(x^1, \ldots, x^n)$ является гладкой во всех точках, где была гладкой функция $f(x^1, \ldots, x^n)$.*

Доказательство мы опускаем. Докажем теперь следующую важную аппроксимационную теорему.

Теорема 1. *Любое непрерывное отображение $f\colon M \to N$ можно сколь угодно близко аппроксимировать гладкими отображениями: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое гладкое отображение $g\colon M \to N$, что $\rho(f, g) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $U \subset N$ — открытое подмножество, гомеоморфное области V, $V \subset \mathbb{R}^n$ ($\dim N = n$); пусть $\varphi\colon U \to V$ — соответствующий гомеоморфизм (например, в качестве U можно взять любую координатную окрестность гладкого многообразия N,

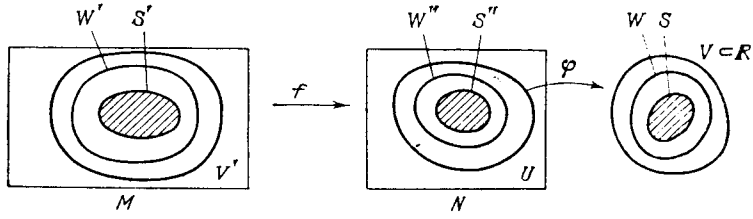


Рис. 61

а в качестве φ — соответствующее координатное отображение). Пусть $S \subset \overline{S} \subset W \subset \overline{W} \subset V \subset \mathbb{R}^n$. Положим $W'' = \varphi^{-1}(W)$, $S'' = \varphi^{-1}(S)$, $V' = f^{-1}(U)$, $W' = f^{-1}(W'')$, $S' = f^{-1}(S'')$ (см. рис. 61). Так как $\overline{S}'' \subset \overline{W}'' \subset U$, то существует положительное $\eta < \varepsilon$ такое, что $\rho(W'', N \setminus U) > \eta > 0$, $\rho(S'', N \setminus W'') > \eta > 0$. Согласно сформулированному выше предложению существует такое непрерывное отображение $\tilde{g}\colon V' \to \mathbb{R}^n$, гладкое на S' и во всех точках,

где было гладко f, что $\tilde{g}|_{V'\setminus W'} \equiv (\varphi\circ f)|_{V'\setminus W'}$ и $\rho(f, \varphi^{-1}\circ\tilde{g}) \leqslant \eta < \varepsilon$. Тогда $(\varphi^{-1}\circ\tilde{g})V' \subset U$. Таким образом, мы получили отображение $g' = \varphi^{-1}\circ\tilde{g}$: $V' \to U$, гладкое на $S' \subset M$. В то же время можно считать (см. выше), что $g'|_{V'\setminus W'} \equiv f|_{V'\setminus W'}$, а потому g' можно непрерывно продолжить на все многообразие M, положив $f = g$ на $M\setminus W'$ и $g = g'$ на V'. Таким образом, построено непрерывное отображение g: $M \to N$, гладкое на S' и во всех точках, где было гладко f, такое, что $\rho(f, g) < \varepsilon$. Покрывая многообразие M открытыми областями, гомеоморфными областям в M, и повторяя описанный выше процесс достаточное число раз, получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Из доказательства теоремы виден локальный характер аппроксимации: отображение f последовательно аппроксимируется гладким на картах многообразия M. Поэтому, если отображение f было уже гладким на открытой области U, $U \subset M$, то для любого замкнутого множества $V \subset U$ можно считать, что $f \equiv g$ на V.

Замечание 2. В дальнейшем мы покажем, что если M, N — гладкие связные замкнутые многообразия, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что из неравенства $\rho(f, g) < \varepsilon_0$ (где f, g: $M \to N$ — два непрерывных отображения) следует, что f и g гомотопны. В частности, в доказанной выше теореме можно считать, что гладкое отображение g, аппроксимирующее f, гомотопно f (определение гомотопии см. ниже).

2. Теорема Сарда. Рассмотрим гладкое отображение f: $M \to N$. Пусть $C = C(f) \subset M$ — множество таких $x \in M$, что дифференциал df_x: $T_x \to T_{f(x)}$ имеет ранг, меньший $n = \dim N$. Множество $C \subset M$ будем называть *множеством критических точек* отображения f, $f(C)$ — *множеством критических значений* отображения f.

Напомним определение множества меры нуль. Говорят, что множество $B \subset \mathbb{R}^n$ имеет (n-мерную) меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ множество B можно покрыть счетным числом n-мерных кубов таких, что их суммарный объем меньше ε. Из курса анализа известно, что дополнение $\mathbb{R}^n\setminus B$ — всюду плотное множество в $\mathbb{R}^n$. Это определение распространяется на подмножества n-мерных многообразий: множество $B \subset N$ имеет меру нуль, если для любого координатного отображения φ: $U \to \mathbb{R}^n$, где U — открытое множество в N, образ $\varphi(U \cap B)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2 (Сард). *Пусть f: $M \to N$ — гладкое (класса C^∞) отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N. Тогда множество критических значений $f(C)$ имеет меру нуль в N.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать эту теорему в следующей формулировке: пусть f: $U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^m$; тогда мера множества $f(C)$ равна нулю. Доказательство проведем индукцией по

размерности m. При $m=0$ и при $n=0$ утверждение очевидно; поэтому будет считать, что $m, n \geqslant 1$.

Обозначим через C_i подмножество области U, составленное из таких x, что все частные производные от f порядка $\leqslant i$ равны нулю в точке x. Получаем убывающую последовательность замкнутых множеств: $C \supset C_1 \supset C_2 \ldots$

Лемма 1. *Мера множества $f(C \backslash C_i)$ равна нулю.*

Доказательство. Можно считать, что $n \geqslant 2$, так как $C = C_i$ при $n=1$. Нам потребуется следующий частный случай теоремы Фубини (доказательство см. в курсе анализа): множество $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ имеет n-мерную меру нуль, если оно пересекается с каждой гиперплоскостью $q \times \mathbb{R}^{n-1}$ $(q \in \mathbb{R}^1)$ по множеству $(n-1)$-мерной меры нуль.

Пусть $x' \in C \backslash C_i$. Мы укажем такую открытую окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$, что множество $f(V \cap C)$ имеет меру нуль. Так как $C \backslash C_i$ можно покрыть счетным числом таких окрестностей, то отсюда получим, что и вся разность $C \backslash C_i$ имеет меру нуль.

Так как $x' \notin C_i$, то по крайней мере одна из частных производных, например $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^1}$, отлична от нуля в точке x'. Определим отображение $h\colon U \to \mathbb{R}^m$ формулой $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$. Так как ранг g отображения dh_x равен m, то h — диффеоморфизм некоторой открытой окрестности $V = V(x') \subset U$ точки x' на некоторую открытую окрестность V' точки $h(x')$. Рассмотрим композицию $g = f \circ h^{-1}\colon V' \to \mathbb{R}^n$. Множество C' критических точек отображения g совпадает с $h(V \cap C)$, т. е. $g(C') = f(V \cap C)$ есть множество критических значений для g (рис. 62).

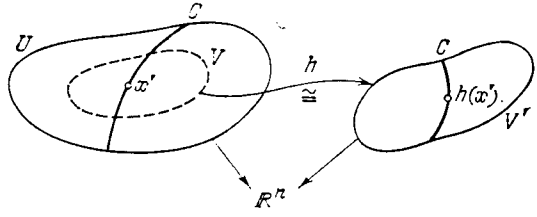


Рис. 62

Каждая точка $(t, x_2, \ldots, x_m) \in V'$ переходит при отображении g в точку $g(t, x_2, \ldots, x_m)$ гиперплоскости $t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Отсюда получаем, что g переводит гиперплоскости в V' в гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. (Впрочем, можно было бы не вводить диффеоморфизм h и работать непосредственно с криволинейными гиперповерхностями.)

Рассмотрим семейство гладких отображений $g^t\colon (t \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Точка $\alpha \in t \times \mathbb{R}^{m-1}$ является критической точкой

отображения g^t тогда и только тогда, когда α есть критическая точка отображения g. В самом деле,

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & \dfrac{\partial g_i^t}{\partial x^j}\end{pmatrix}.$$

В силу предположения индукции мера множества критических значений отображения g^t имеет меру нуль в $t\times\mathbb{R}^{n-1}$. Следовательно, мера пересечения $g(C')\cap(t\times\mathbb{R}^{n-1})$ равна нулю при всех t, и из теоремы Фубини следует, что $g(C')$ имеет меру нуль, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Мера множества $C_i\backslash C_{i+1}$ равна нулю при $i\geqslant 1$.*

Доказательство. Рассуждения частично аналогичны схеме доказательства леммы 1. Пусть $x'\in C_i\backslash C_{i+1}$, т. е. в этой точке все частные производные координатных функций отображения f порядка $\leqslant i$ равны нулю и существует набор индексов r; s_1, s_2, ..., ..., s_{i+1} такой, что $\dfrac{\partial^{i+1}f_r}{\partial x_{s_1}\dots\partial x_{s_{i+1}}}\neq 0$ в точке x'. Обозначим через W функцию $\dfrac{\partial^i f_r}{\partial x_{s_2}\dots\partial x_{s_{i+1}}}$. Тогда

$$W(x')=0;\ \left.\frac{\partial W}{\partial x_{s_1}}\right|_{x'}\neq 0.$$

Можно считать, что $s_1=1$. Определим отображение $h\colon U\to\mathbb{R}^m$ формулой $h(x)=(W(x),\ x_2,\ \dots,\ x_n)$. Тогда h — диффеоморфизм некоторой окрестности V точки x на некоторое окрытое множество $V'\subset\mathbb{R}^m$. Рассмотрим образ множества $C_i\cap V$ при отображении h. Так как в качестве координаты $W(x)$ взята одна из производных i-го порядка, то множество $h(C_i\cap V)$, в точках которого все такие производные равны нулю, содержится в гиперплоскости $W(x)=0$. Итак, h отображает $C_i\cap V$ в $0\times\mathbb{R}^{m-1}$.

Как и в лемме 1, рассмотрим композицию $g=f\circ h^{-1}\colon V'\to\mathbb{R}$ и ее ограничение $g'\colon(0\times\mathbb{R}^{m-1})\cap V'\to\mathbb{R}^n$. В силу предположения индукции мера множества критических значений для g' равна нулю. Далее, любая точка множества $h(C_i\cap V)$ является критической для g', так как в этих точках все производные порядка $\leqslant i$ равны нулю (в частности, ранг f меньше n). Итак, мера множества $g'\circ h(C_i\cap V)=f(C_i\cap V)$ равна нулю в $\mathbb{R}^n$. Покрывая $C_i\backslash C_{i+1}$ счетным числом таких окрестностей V, мы и получаем утверждение леммы.

Второй шаг отличался от первого шага тем, что в лемме 1 мы не могли, вообще говоря, поместить множество C в гиперплос-

кость $0\times\mathbb{R}^{m-1}$, так как определение множества C как множества, где ранг f меньше n, не позволяет выделить никакой гиперплоскости, как в лемме 2.

Лемма 3. *Мера множества $f(C_k)$ равна нулю при достаточно большом k.*

Доказательство. Покроем C_k счетным числом кубов с ребром δ, где δ достаточно мало. Возьмем один из этих кубов $I^m\subset U$ и покажем, что мера множества $f(C_k\cap I^m)$ равна нулю. Из определения C_k и формулы Тейлора получаем: $f(x+h)=$ $=f(x)+R(x,\ h)$, где $\|R(x,\ h)\|\leqslant\alpha\cdot\|h\|^{k+1}$; $x\in C_k$, $x+h\in I^m$. Постоянная α зависит только от f и I^m. Разделим I^m на r^m кубов с ребром δ/r. Обозначим через I_1 куб разбиения, содержащий точку $x\in C_k$. Любая точка куба I_1 имеет вид $x+h$, где $\|h\|\leqslant$ $\leqslant\sqrt{m}\cdot(\delta/r)$. Следовательно, $f(I_1)$ лежит в кубе с ребром a/r^{k+1} с центром в точке $f(x)$, где $a=2\alpha(\sqrt{m}\delta)^{k+1}$. Тогда $f(C_k\cap I^m)$ содержится в объединении r^m кубов разбиения, имеющих суммарный объем $\leqslant r^m(a/r^{k+1})^n=a^nr^{m-n(k+1)}$. Если $k+1>m/n$, то этот объем стремится к нулю при $r\to\infty$. Лемма доказана.

Сопоставляя леммы 1, 2, 3, мы получаем утверждение теоремы Сарда.

Следствие 1. *Множество $N\backslash f(C)$ (где $f\colon M\to N$ — гладкое отображение, а C — множество критических точек) всюду плотно в N.*

Следствие 2. *Если $f\colon M\to N$ — гладкое отображение и $\dim M<\dim N$, то мера множества $f(M)$ равна нулю в N. В частности, образ $f(M)$ не заполняет все N.*

Ниже мы применим теорему Сарда к доказательству теорем Уитни о вложении и погружении гладких многообразий.

Определение 1. Точку $x\in M$ назовем *регулярной* для гладкого отображения $f\colon M\to N$, если она не является критической, т. е. если ранг отображения df_x равен $n=\dim N$. Точку $g\in N$ назовем *правильным* (*регулярным*) значением гладкого отображения $f\colon M\in N$, если все ее прообразы — регулярные точки в M (если $f^{-1}(y)=\varnothing$, то точка y также является правильным значением). Если y есть правильное значение отображения f, то само отображение f называют *правильным по отношению к точке y.*

Таким образом, дополнение в M к множеству регулярных точек совпадает с множеством критических точек отображения f, а дополнение в N к множеству правильных значений совпадает с множеством критических значений отображения f.

Напомним, что если $f\colon M\to N$ — гладкое отображение и $y\in$ $\in N$ — правильное значение, то $f^{-1}(y)$ — гладкое подмногообразие в M (это следует из теоремы о неявной функции).

Для дальнейшего нам будет полезно следующее утверждение, которое легко выводится из теоремы Сарда.

Следствие. *Множество гладких отображений* $f\colon M \to N$, *для которых* $y \in N$ — *правильное значение, всюду плотно в пространстве всех гладких отображений.*

Доказательство. Надо доказать, что сколь угодно близко от отображения f найдется гладкое отображение $g\colon M \to N$, для которого $y \in N$ — правильное значение. В силу теремы Сарда множество регулярных значений отображения $f\colon M \to N$ всюду плотно в N, т. е. в любой открытой окрестности $U \subset N$ точки y найдется регулярное значение y' для f. Предположим, что U диффеоморфно диску D^n, и рассмотрим координатное отображение $\varphi\colon U \to D^n$; положим $z = \varphi(y)$, $z' = \varphi(y')$. Тогда существует диффеоморфизм $h\colon D^n \to D^n$, тождественный вблизи границы диска и такой, что $h(z') = z$ и $|h(t) - t| < \varepsilon = \rho(z, z')$ при $t \in D^n$. Построим, далее, соответствующий диффеоморфизм $h'\colon N \to N$ и положим $g = h' \circ f$; очевидно, y — регулярное значение для g.

Для дальнейшего нам потребуется несколько более сильное утверждение, чем предыдущее следствие. А именно: построенный выше диффеоморфизм $h'\colon N \to N$ можно выбрать таким образом, что отображение $g = h' \circ f$ будет близко к f не только в прежнем смысле (т. е. $\rho(f, g) = \max |f(x) - g(x)| < \varepsilon$), но и будет близко к f вместе со всеми первыми производными. Доказательство существования такого диффеоморфизма оставляем читателю в качестве упражнения.

3. Трансверсальная регулярность. Перейдем к изучению важного понятия t-регулярности (трансверсальной регулярности).

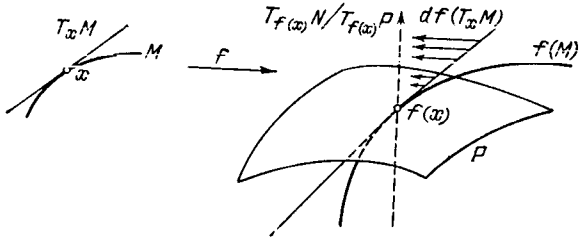


Рис. 63.

Определение 2. Пусть $P \subset N$ — гладкое подмногообразие коразмерности k (коразмерность по определению есть $\dim N - \dim P$) гладкого многообразия N и $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Отображение f называется *трансверсально регулярным вдоль* P, если ранг отображения $df\colon T_x \to T_{f(x)}N/T_{f(x)}P$ равен k (ранг df равен k по модулю векторов, касательных к P). Иначе говоря, подпространства $df(T_x)$ и $T_{f(x)}P$ порождают все касательное пространство $T_{f(x)}N$; как говорят, «образ $f(M)$ трансверсален к P в точке $f(x)$» (рис. 63).

Отметим важное свойство t-регулярных отображений: полный прообраз $f^{-1}(P) \subset M$ является гладким подмногообразием в M той

же коразмерности k, т. е. размерности $-n+(m+p)$, где $n=\dim N$, $m=\dim M$, $p=\dim P$. Доказательство следует из теоремы о неявной функции.

Теорема 3. *Пусть M, $N\supset P$ — гладкие многообразия. Тогда множество отображений $g\colon M\to N$, t-регулярных вдоль P, всюду плотно в пространстве всех гладких отображений $f\colon M\to N$, т. е. в любой окрестности произвольно гладкого отображения существует t-регулярное вдоль P отображение.*

Доказательство. Пусть дано отображение $f\colon M\to N$; требуется доказать, что сколь угодно близко от f найдется отображение g, t-регулярное вдоль P. Отметим сначала следующее утверждение, непосредственно вытекающее из определения t-регулярности.

Пусть $f\colon M\to N$ — гладкое отображение, $x\in M$; U — открытая окрестность точки x в M, V — открытая окрестность точки $f(x)$ в N; предположим, что отображение $f\colon U\to V$ t-регулярно вдоль $P\subset N (P\cap V\subset V)$; тогда это свойство выполнено и для гладких отображений, достаточно близких к f вместе со всеми первыми производными.

Из этого замечания следует, что утверждение теоремы достаточно доказать локально, т. е. достаточно рассмотреть случай $U=\mathbb{R}^m$, $V=\mathbb{R}^n$; $P=\mathbb{R}^p\subset\mathbb{R}^n$; тогда f можно записать в виде $f(x_1, \ldots, x_m)=(f_1(x), \ldots, f_p(x), f_{p+1}(x), \ldots, f_n(x))$. В этой записи t-регулярность f вдоль P эквивалентна утверждению, что для отображения $\alpha\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n-p}$, определяемого формулой $\alpha(x)=(f_{p+1}(x), \ldots, f_n(x))$, точка 0 является регулярным значением. По доказанному ранее множество отображений, для которых 0 есть регулярное значение, всюду плотно в пространстве всех гладких отображений, т. е. существуют гладкие функции $g_{p+1}, \ldots, g_n$, задающие отображение $\alpha'\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{n-p}$, близкое к отображению α вместе со всеми первыми производными (см. следствие выше) и такое, что отображение

$$g(x_1, \ldots, x_m)=(f_1(x), \ldots, f_p(x), g_{p+1}(x), \ldots, g_n(x))$$

t-регулярно вдоль P. Если исходное отображение $f\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ было t-регулярно вдоль P около границы ∂V, то, взяв гладкую функцию

$$\varphi=\begin{cases}0 \text{ на } \partial V,\\ 1 \text{ на } K,\end{cases}$$

где $K\subset V$ — компактное множество, мы можем положить $\rho=f(1-\varphi)+\varphi\cdot g$. Ясно, что $\rho(x)$ t-регулярно вдоль P и $\rho(x)\equiv f(x)$ на ∂V; $\rho(x)\equiv g(x)$ на K. Здесь мы использовали то, что отображения f и g близки не только в том смысле, что $\rho(f, g)=\max\limits_{(x)}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$, но близки также и все их первые произ-

водные. Эта близость обеспечивает t-регулярность отображения $f(1-\varphi)+\varphi g = f+\varphi(f-g)$ около границы V в силу малости самого возмущения $\varphi(f-g)$ и малости производных этого возмущения около границы V. Теорема доказана.

Понятие t-регулярности позволяет ввести важное понятие трансверсально пересекающихся подмногообразий. Пусть M и P — два гладких подмногообразия гладкого многообразия N. Будем говорить, что M и P *пересекаются трансверсально*, если включение i_M: $M \to N$ t-регулярно вдоль P. Это означает, что в каждой точке x пересечения $M \cap P$ касательные пространства T_xM и T_xP порождают все T_xN. Отношение трансверсальности пересечения симметрично, т. е. в приведенном выше определении можно было бы вместо i_M рассмотреть включение i_P: $P \to N$ (проверьте!).

Пересечение $M \cap P$ двух трансверсально пересекающихся подмногообразий является гладким подмногообразием.

Доказанная выше теорема Сарда (и следствие из нее) показывает, что трансверсально регулярных отображений настолько много, что их можно обнаружить в сколь угодно малой окрестности любого гладкого отображения; в этом смысле t-регулярные отображения «типичны». Теорема Сарда позволяет путем сколь угодно малых шевелений исходного отображения (в классе всех гладких отображений) привести его «*в общее положение*» (сделать t-регулярным). Теоремы такого сорта являются обоснованиями, как говорят, *приведения в общее положение.*

Замечание. В проведенных нами до сих пор конструкциях «малые шевеления» осуществлялись в классе всех гладких отображений. Однако иногда бывает полезно приводить отображение в общее положение только с помощью вариаций (шевелений) из довольно узкого класса. Полезна также следующая

Теорема 4. *Пусть A, M, N, P — гладкие многообразия, причем P — подмногообразие многообразия N, и пусть f: $A \times M \to N$ — гладкое отображение, t-регулярное вдоль P. Тогда множество всех точек $a \in A$, для которых $f_a = f(a, x)$: $M \to N$ t-регулярно вдоль P, всюду плотно в A.*

Замечание. Многообразие A можно рассматривать как «многообразие параметров», с помощью которых может осуществляться приведение исходного отображения $f(a_0, x)$: $M \to N$ в общее положение.

Доказательство теоремы 4. Пусть f: $A \times M \to N$ t-регулярно вдоль P; рассмотрим $Q = f^{-1}(P) \subset A \times M$. Если слой $a \times M$ пересекает Q трансверсально, то $T(A \times M) = T(Q) \oplus H$, где $H \subset T(a \times M)$ (рис. 64).

Отсюда следует, что df отображает H на плоскость, дополняющую $T(P)$ до $T(N)$ в $T(N)$, т. е. $f(a, *)$ t-регулярно вдоль P. Верно и обратное: если $f(a, *)$ t-регулярно вдоль P, то подмногообразия $a \times M$ и Q пересекаются трансверсально. Наконец, $a \times M$ пересекает Q трансверсально тогда и только тогда, когда

при ограничении проекции p: $A \times M \to A$ на подмногообразие Q точка $a \in A$ является регулярным значением проекции p: $Q \to A$. В силу теоремы Сарда множество таких точек всюду плотно в A. Теорема доказана.

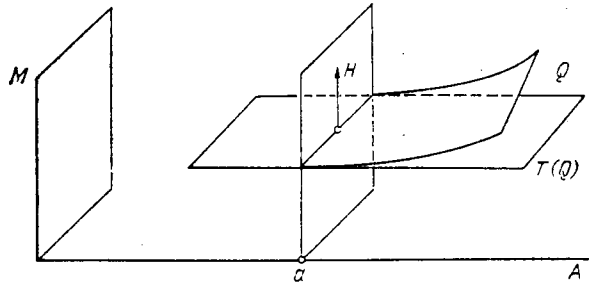


Рис. 64

Из теоремы 4 извлекаются полезные следствия. Пусть, например, f: $M \to N$ — гладкое отображение. Дадим новое описание множества регулярных значений для f в N. Рассмотрим отображение F: $M \times N \to N \times N$, где $F(x, y) = (f(x), y)$. Легко видеть, что $n \in N$ является регулярным значением для f тогда и только тогда, когда отображение $F(x, y)$: $M \times N \to N \times N$ t-регулярно вдоль диагонали $\Delta \subset N \times N$. Следовательно, в силу теоремы 4 множество регулярных значений $n \in N$ всюду плотно в N.

Замечание. Важный случай трансверсального пересечения — случай, когда подмногообразия M и P имеют в многообразии N дополнительные размерности, т. е. когда $m + p = n$, где $m = \dim M$, $p = \dim P$, $n = \dim N$. Тогда эти подмногообразия пересекаются по отдельным изолированным точкам. Если же $m + p < n$, то приведением подмногообразий M и P в общее положение можно добиться устранения их пересечений — «развести» M и P в N.

4. Функции Морса. Выше мы ввели для гладких отображений f: $M \to N$ важное понятие критических точек. Рассмотрим частный случай, когда $N = \mathbb{R}^1$ — вещественная прямая. В этом случае отображение f можно интерпретировать как гладкую скалярную функцию на M; так как $\dim T_{f(x)}\mathbb{R}^1 = 1$, то точка $x \in M$ является критической (т. е. ранг df_x меньше 1) тогда и только тогда, когда $df_x = 0$. Критические точки x гладкой скалярной функции $f(x)$ на M находятся из системы уравнений $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, т. е. $\operatorname{grad} f(x) = 0$ (это было очевидно заранее).

Определение 3. Критическая точка $x_0 \in M$ гладкой функции $f(x)$ называется *невырожденной*, если матрица $\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ не

вырождена. Функция f на многообразии M называется *функцией Морса*, если все ее критические точки не вырождены.

Замечание. Определение невырожденной критической точки корректно в том смысле, что свойство невырожденности матрицы билинейной формы $\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ (эта матрица называется *гессианом* функции f в точке x_0) не зависит от выбора локальной системы координат в окрестности критической точки x_0. Можно трактовать d^2f как симметричную билинейную форму на $T_x(M)$. Пусть $a, b \in T_{x_0}(M)$; включим векторы a и b в гладкие локальные (в окрестности точки x_0) векторные поля A и B соответственно и положим $d^2f(a, b) = \partial_A \partial_B (f)_{x_0}$, где через $\partial_B(f)$ обозначена производная от f по направлению векторного поля B. Легко видеть, что форма d^2f симметрична и ее матрица относительно базиса $e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, e_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$ в $T_{x_0}(M)$ имеет вид $\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j}\right)$.

Определение 4. *Индексом* невырожденной критической точки x_0 для функции f называется максимальная размерность подпространств $V \subset T_{x_0}(M)$, на которых гессиан d^2f отрицательно определен (т. е. число отрицательных квадратов после приведения d^2f к диагональному виду).

Возникает естественный вопрос: существуют ли на многообразии функции Морса и как много их? Например, будут ли они всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии M? Ответ на оба вопроса положительный; мы извлечем его из теоремы 5. Тем самым мы продемонстрируем, что существование и всюду плотность функций Морса является фактом «общего положения», т. е. эти функции «типичны» в пространстве всех гладких функций.

Теорема 5. 1) *На любом гладком компактном многообразии существуют функции Морса.* 2) *Функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии.* 3) *Каждая функция Морса имеет на компактном многообразии только конечное число критических точек (в частности, все они изолированы) $x_1, \ldots, x_N$.* 4) *Существует всюду плотное подмножество R в множестве функций Морса такое, что у любой функции $f \in R$ каждому ее критическому значению отвечает только одна критическая точка на M (т. е. $f(x_i) \neq f(x_j)$, если $i \neq j$).*

Доказательство. Для компактного многообразия M изолированность (и, следовательно, конечность) невырожденных критических точек очевидна из определения невырожденности d^2f (см. выше). Рассмотрим теперь произвольную гладкую функцию f на M; докажем, что сколь угодно близко от f найдется функция Морса g (близость понимается в пространстве гладких функций на M). Для этого нужно рассмотреть «шевеления» (возмущения)

функции f и обнаружить среди этих возмущенных функций функцию Морса.

Рассмотрим отображение α_f: $M \to T^*M$, определенное формулой $\alpha_f(x) = df_x$. Здесь через T^*M обозначено пространство кокасательного расслоения к многообразию M, т. е. $2m$-мерное гладкое многообразие, точками которого являются пары (x, ξ), где ξ — ковектор, т. е. $\xi \in T_x^* M$. Линейный функционал df_x: $T_x(M) \to \mathbb{R}^1$ принадлежит $T_x^*(M)$. Включим отображение α_f в s-параметрическое семейство отображений A, являющихся возмущениями отображения α_f. Для этого покроем M конечным числом открытых шаров $\{U_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, и каждый шар включим в больший шар V_j, так что $\overline{U}_j \subset V_j$. На каждом V_j построим набор из m линейных независимых функций $\left\{l^1_{V_j}(x), \ldots, l^m_{V_j}(x)\right\}$; например, в качестве таких функций можно взять локальные координаты на шаре V_j. Для каждой пары (V_j, U_j) построим гладкую функцию $\varphi_j(x)$ на M такую, что $\varphi_j(x) \equiv 1$ на $\overline{U}_j$, $\varphi_j(x) \equiv 0$ вне V_j и $0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant 1$ в $V_j \backslash U_j$ (существование таких функций нами доказано выше). Продолжим функции $l^i_{V_j}(x)$ гладко на все многообразие M, положив $\overline{l}^i_{V_j}(x) = l^i_{V_j}(x)\varphi_j(x)$. Рассмотрим линейное пространство A гладких функций на M следующего вида:

$$f(x) + \sum_{V_j, i} a^i_{V_j} \overline{l}^i_{V_j}(x)\varphi_j(x) = g(x, a).$$

Здесь $f(x)$ — исходная функция, $a^i_{V_j}$ — вещественные числа. Координатами в этом линейном пространстве A служат числа $a^i_{V_j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $1 \leqslant j \leqslant n$. Ясно, что $\dim A = mk$, где k — число элементов открытого покрытия многообразия M. Рассмотрим отображение ψ: $A \times M \to T^*M$, положив $\psi(g, x) = dg_x \in T_x^* M$. Очевидно, что ψ — гладкое отображение. Выделим в многообразии T^*M m-мерное подмногообразие $P = \{(x, 0)\}$, $x \in M$, диффеоморфное M (так называемое «нулевое сечение кокасательного расслоения»). Мы утверждаем, что отображение ψ гладкого многообразия $A \times M$ t-регулярно вдоль P. Для доказательства достаточно убедиться в том, что при проекции π_x: $T_{(x,0)}(T^*M) \to T_x^* M$ образ плоскости $d\psi T_{(x,0)}(A \times M)$ эпиморфно накрывает $T_x^* M$ (рис. 65). Но это очевидно из построения многообразия A: линейные возмущения $l(x)$ функции $f(x)$ накрывают своими градиентами всю плоскость $T_x^* M$, поскольку все они были выбраны линейно независимыми в каждом шаре V_j. В силу теоремы 4 свойством t-регулярности будут обладать тогда и почти все индивидуальные отображения $\psi(a_0, x)$: $M \to T^*M$ (при фиксированных a_0). Более того (см. теорему 4), отсюда следует, что сколь угодно близко к исходному отображению α_f: $M \to T^*M$ (имеющему вид $\alpha_f(x) =$

$= \psi(0, x)$ и соответствующему нулевым значениям параметров $\left\{a^i_{V_j}\right\}$ найдется отображение $\psi(g, x) = dg_x = \alpha_g(x)$, t-регулярное вдоль P (нулевого сечения T^*M). Итак, мы нашли функцию $g(x)$ на M (малое возмущение функции f с помощью линейных функций) такую, что α_g: $M \to T^*M$ t-регулярно вдоль P (рис. 66).

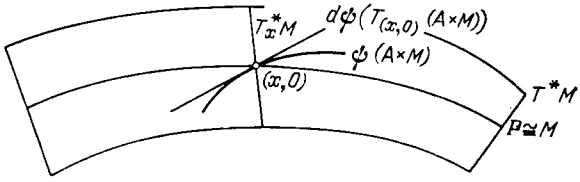


Рис. 65

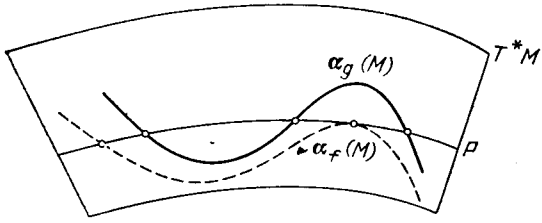


Рис. 66

Рассмотрим пересечение $a_g(M) \cap P$. Ясно, что оно состоит в точности из критических точек функции $g(dg_x \equiv 0)$. Далее, критическая точка $x_0 \in M$ является невырожденной для функции $g(x)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_g(M)$ и P пересекаются трансверсально в этой точке $(x_0, 0) \in P$. В самом деле, условие трансверсальности P и $\alpha_g(M)$ в точке $(x_0, 0)$ означает, что проекция касательной плоскости к $\alpha_g(M)$ в точке $(x_0, 0)$ на плоскость $T^*_{x_0}M$ (трансверсальную к P в T^*M) является изоморфизмом и совпадает с гессианом функции g. Изоморфность этой проекции и невырожденность гессиана, таким образом, эквивалентны.

Итак, нами доказаны как существование, так и всюду плотность функций Морса. Осталось доказать всюду плотность таких функций Морса, у которых на каждом критическом уровне (т. е. на каждом прообразе критического значения) находится ровно одна критическая точка.

Рассмотрим произвольную функцию Морса $f(x)$ на M, и пусть $x_1, \ldots, x_N$ — ее критические точки. Предположим, что функция $f(x)$ на M принимает значения, лежащие между 0 и 1. Пусть U, W — две открытые окрестности точки x_1 такие, что $\overline{U} \subset W$, $\overline{W}$ компактно и что $x_i \notin \overline{W}$ при $i > 1$. Построим на M гладкую функ-

цию $\lambda(x)$ такую, что $\lambda \equiv 1$ на $\overline{U}$, $\lambda \equiv 0$ вне W и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ на $W \setminus U$. Можно считать, что на M задана риманова метрика; выберем две постоянные a и b такие, чтобы на компактном множестве $\operatorname{supp}\lambda \cap \operatorname{supp}(1-\lambda) = K$ выполнялись неравенства $0 \leqslant a \leqslant |\operatorname{grad} f|$, $|\operatorname{grad}\lambda| \leqslant b$. Возьмем положительное $\eta < a/b$, не равное ни одной из разностей $f(x_i) - f(x_1)$. Тогда $f_1 = f + \eta\lambda$ есть функция Морса такая, что $f_1(x_i) \neq f_1(x_1)$, $i > 1$, и критические точки у f и у f_1 одни и те же. В самом деле, на K выполнено соотношение

$$|\operatorname{grad}(f+\eta\lambda)| \geqslant |\operatorname{grad} f| - |\eta \operatorname{grad}\lambda| > a - \eta b > 0.$$

Ясно, что $|\operatorname{grad}\lambda| = 0$ вне K, т. е. там $|\operatorname{grad} f_1| = |\operatorname{grad} f|$; в окрестности U имеем $f_1 = f + \eta$ (сдвиг на постоянную).

Продолжая это построение для всех критических точек, получаем доказательство последнего утверждения теоремы. Теорема доказана.

§ 11. Применения теоремы Сарда

1. Существование вложений и погружений. Выше мы доказали возможность вложения любого связного гладкого компактного замкнутого многообразия M в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, где N — достаточно большое число. Сейчас мы докажем так называемую «слабую теорему Уитни».

Теорема 1 (Уитни). *Любое связное гладкое замкнутое n-мерное многообразие M можно гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$. Всякое непрерывное отображение $M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ $(M \to \mathbb{R}^{2n})$ аппроксимируется гладким вложением (погружением).*

Доказательство. Рассмотрим любое гладкое вложение $M \to \mathbb{R}^N$ (см. § 9). Идея доказательства состоит в последовательном проектировании вложенного многообразия $M \subset \mathbb{R}^N$ на гиперплоскости; на каждом шаге будем понижать размерность объемлющего пространства на единицу. Фиксируем в $\mathbb{R}^N$ начало координат O и рассмотрим пучок прямых, проходящих через O; эти прямые составляют проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$. Каждой прямой $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$ поставим в соответствие ортогональную проекцию π_l пространства $\mathbb{R}^n$ на гиперплоскость $\mathbb{R}_l^{N-1}$, ортогональную l и проходящую через O.

Наша цель: выбрать такую прямую l, чтобы проекция $\pi_l(M)$ по-прежнему оставалась гладким подмногообразием в $\mathbb{R}_l^{N-1}$. Выясним сначала вопрос о погружении M. Нас удовлетворит любая проекция вида π_l, для которой дифференциал $d\pi_l$: $T_xM \to \mathbb{R}_l^{N-1}$ ни при каком $x \in M$ не имеет ненулевого ядра. Те направления $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$, для которых $d\pi_l$ имеет ненулевое ядро, назовем *запрещенными направлениями первого типа*. Например, при проекти-

ровании гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ на двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль запрещенного направления возникает особенность, обычно называемая «*клювом*» (рис. 67).

Ясно, что запрещенными являются те и только те направления $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$, для которых существует точка $x \in M$ такая, что $l \subset T_xM$ после подходящего параллельного переноса (рис. 68).

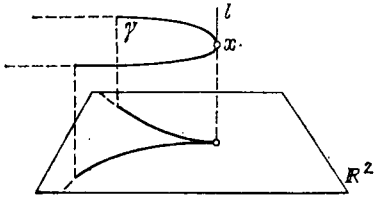


Рис. 67

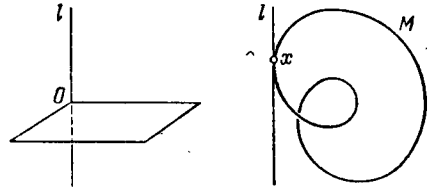


Рис. 68

Множество всех запрещенных направлений образует $(2n-1)$-мерное гладкое многообразие Q, точками которого являются пары (x, l), где $x \in M$, l — прямая (из $\mathbb{R}P^{N-1}$), параллельная прямой, лежащей в T_xM. Точка $x \in M$ задается n параметрами, а прямая l задается $n-1$ параметром: $2n-1 = n+(n-1)$. (Докажите, что Q — гладкое многообразие!) Построим отображение $\alpha: Q \to \mathbb{R}P^{N-1}$ положив $\alpha(x, l) = l$. Очевидно, $\alpha(Q)$ и есть множество всех запрещенных направлений. Так как исходное вложение $M \subset \mathbb{R}^N$ гладко, то и отображение α гладко. В силу леммы Сарда $(N-1)$-мерная мера множества $\alpha(Q)$ равна нулю, если $N-1 > 2n-1$, т. е. $2n < N$. В частности, множество $\alpha(Q)$ всех запрещенных направлений в $\mathbb{R}P^{N-1}$ не покрывает все многообразие $\mathbb{R}P^{N-1}$ и существует $l_0 \notin \alpha(Q)$. Осуществив ортогональную проекцию $\pi_{l_0}: M \to \mathbb{R}^{N-1}_{l_0}$, получаем гладкое погружение M в $\mathbb{R}^{N-1}_{l_0}$ (если $2n < N$). Ясно, что это рассуждение пройдет и в случае, если с самого начала M было не вложено, а погружено в $\mathbb{R}^N$. Поэтому описанную процедуру проектирования можно применить и к полученному погружению $M \to \mathbb{R}^{N-1}$ и вообще продолжать до тех пор, пока $2n < N-k$, где число k указывает номер проектирования. Последним шагом будет тот, на котором $N-k = 2n+1$; тогда мы можем осуществить последнее проектирование $\pi_{l_0}: M \to \mathbb{R}^{2n}$, после чего процедура проектирования прекращается. Тем самым часть теоремы Уитни, относящаяся к возможности погружения M в $\mathbb{R}^{2n}$, доказана. Перейдем к вложениям.

Теперь нам нужно гарантировать отсутствие самопересечений у проекции $\pi_l(M)$ в $\mathbb{R}^{N-1}_l$. Рассмотрим *запрещенные направления второго типа*, проекция вдоль которых порождает самопере-

сечения $\pi_l(M)$ в $\mathbb{R}^{N-1}_l$. Например, при проектировании гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ на двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$, вдоль такого запрещенного направления возникает ситуация, показанная на рис. 69.

Ясно, что запрещенными направлениями второго типа являются те и только те направления $l \in \mathbb{R}P^{N-1}$, для которых существует пара точек x, $y \in M$, $x \neq y$, одновременно принадлежащих прямой l после подходящего параллельного переноса.

Множество всех запрещенных направлений второго типа образует $2n$-мерное гладкое открытое многообразие P, точками которого являются пары (x, y), x, $y \in M$, $x \neq y$; x и y независимо друг от друга пробегают M. Иными словами, $P = (M \times M) \setminus \Delta$, где $\Delta = \{(x, x)\}$ — диагональ в прямом произведении $M \times M$. Рассмотрим отображение β: $P \to \mathbb{R}P^{N-1}$, где $\beta(x, y)$ есть прямая, проходящая через начало координат и параллельная отрезку с концами x, y. Ясно, что β — гладкое отображение и, следовательно, по лемме Сарда множество $\beta(P)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}P^{N-1}$, если $2n < N-1$, т. е. $2n+1 < N$.

Заметим, что замыкание множества $\beta(P)$ в $\mathbb{R}P^{N-1}$ совпадает с объединением $\beta(P) \cup \alpha(Q)$.

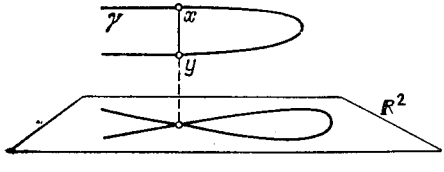


Рис. 69

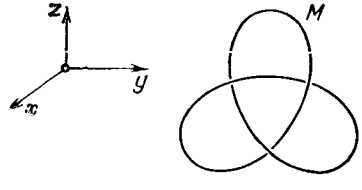


Рис. 70

Итак, множество $\overline{\beta(P)}$ всех запрещенных направлений как первого, так и второго типов не покрывает все многообразие $\mathbb{R}P^{N-1}$, если $N > 2n+1$, и существует $l_0 \neq \overline{\beta(P)}$. Осуществив ортогональное проектирование π_{l_0}: $M \to \mathbb{R}^{N-1}_{l_0}$, получаем гладкое вложение M в $\mathbb{R}^{N-1}_{l_0}$. К этому вложению применяем такую же процедуру и т. д. Последним из таких последовательных проектирований будет проекция M в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Теорема доказана полностью.

Ясно, что в общем случае дальнейшее проектирование (с сохранением вложения) невозможно. Действительно, пусть окружность $M = S^1$ вложена в $\mathbb{R}^3$, образуя в $\mathbb{R}^3$ нетривиальный узел (см., например, рис. 70). Здесь $n = 1$, $N = 3 = 2n+1$. Очевидно, что ортогональное проектирование этой заузленной окружности на любую двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ будет давать кривую с самопересечениями. Это указывает на то, что использованный при доказательстве «слабой» теоремы Уитни «метод проекций» не позволяет продвинуться дальше по пути уменьшения размерности

объемлющего евклидова пространства. Тем не менее оказывается, что использование более тонкой методики позволяет улучшить полученные нами выше оценки (мы не будем здесь излагать эту более тонкую методику).

Замечание. Известна более сложная теорема (мы ее не доказываем), что любое n-мерное многообразие M можно гладко вложить в $\mathbb{R}^{2n}$, но вложения $M \to \mathbb{R}^{2n}$ уже не плотны в пространстве отображений $M \to \mathbb{R}^{2n}$. В общем случае эта оценка уже неулучшаема. Так, например, замкнутое двумерное неориентируемое многообразие нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$ (докажите!).

В некоторых частных случаях эти оценки можно улучшить. Так, например, любое двумерное ориентируемое многообразие реализуется в $\mathbb{R}^3$, что следует из классификации таких многообразий.

2. Построение функций Морса как функций высоты. Покажем теперь, как с помощью вложения $M \to \mathbb{R}^N$ можно дать новое доказательство существования функций Морса на гладких компактных многообразиях. Мы докажем, что функции Морса могут быть обнаружены среди довольно узкого класса функций на многообразии M, так называемых «функций высоты».

Если многообразие M гладко вложено в $\mathbb{R}^N$ и если задана прямая $\xi_l(t)$, идущая в направлении вектора l через начало координат в $\mathbb{R}^N$, то значение функции $h_l(x)$ (*функции высоты*) в точке $x \in M$ положим равным ортогональной проекции точки x на прямую $\xi_l(t)$ (мы считаем эту прямую числовой вещественной прямой).

Следующие свойства функции высоты $h_l(x)$ очевидны (проверьте их!):

1) множество функций высоты находится во взаимно однозначном соответствии с парами диаметрально противоположных точек сферы S^{N-1} или с точками проективного пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$;

2) точка $x_0 \in M$ является критической точкой для функции высоты $h_l(x)$ тогда и только тогда, когда вектор l ортогонален подмногообразию M в точке x_0 (т. е. $l \perp T_{x_0}M$).

Выясним, когда критическая точка $x_0 \in M$ для функции $h_l(x)$ является невырожденной. Рассмотрим частный случай: когда многообразие M вложено в $\mathbb{R}^{m+1}$, где $m = \dim M$ (как гиперповерхность).

Напомним, что для гиперповерхностей $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ определено гауссово отображение $r\colon M \to S^m \to \mathbb{R}P^m$; а именно: $r(x) = n(x)$, где $n(x) \perp T_xM$ — единичный вектор нормали к M в точке x (вектор $n(x)$ перенесен параллельно в начало координат $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$).

Лемма 1. *Точка $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ является невырожденной критической точкой для функции высоты $h_l(x)$ тогда и только*

тогда, когда она является регулярной точкой для гауссова отображения $r\colon M \to \mathbb{R}P^m$; *здесь* $l \perp T_{x_0}M$.

Доказательство. Направим вдоль вектора l координатную ось x^{m+1}, а координаты $x^1, \ldots, x^m$ направим ортогонально к l; тогда плоскость $\mathbb{R}^m$ $(x^1, \ldots, x^m)$ можно считать касательной плоскостью к M в точке x_0. Около точки $x_0 \in M$ многообразие M можно задать уравнением $x^{m+1} = \varphi(x^1, \ldots, x^m)$, причем $d\varphi|_{x_0} = 0$. В достаточно малой области U около точки x_0 можно считать, что $x^1, \ldots, x^m$ — локальные координаты на гиперповерхности M, а «высота» $h_l(x)$ — это и есть функция $x^{m+1} = \varphi(x^1, \ldots, x^m)$. Аналогичные координаты $y^1, \ldots, y^m$ выберем на сфере в окрестности точки l. Повторяя вычисления, сделанные нами ранее при выводе формулы $Kd\sigma = f^*\Omega$, получаем, что в локальных координатах $x^1, \ldots, x^m$ и $y^1, \ldots, y^m$ в точке x_0 выполнено равенство

$$\left(\frac{\partial^2 h_l(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) = \left(\frac{\partial^2 \varphi(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\bigg|_{x_0}\right), \qquad \det\left(\frac{\partial^2 h_l(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) = K.$$

Здесь K — гауссова кривизна гиперповерхности в точке x_0, $y^\alpha = r^\alpha(x^1, \ldots, x^m)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$,— гауссово отображение, записанное в локальных координатах (x) и (y). Итак, условие регулярности гауссова отображения r в точке x_0, $\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\Big|_{x_0}\right) \neq 0$, в точности эквивалентно невырожденности гессиана функции высоты $h_l(x_0)$, $\det\left(\frac{\partial^2 h_l(x_0)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right) \neq 0$. Лемма доказана.

Важное замечание. Если имеется вложение $M \subset \mathbb{R}^q$, где $q > m+1$ $(m = \dim M)$, то тогда можно определить $(q-1)$-мерное гладкое многообразие N — «границу трубчатой окрестности» подмногообразия M. Для этого нужно рассмотреть множество $(q-m)$-мерных дисков D_x^{q-m}, ортогональных подмногообразию M, имеющих центры в точках $x \in M$ и имеющих радиус $\varepsilon > 0$ (где ε достаточно мало). Объединение этих шаров (при малом $\varepsilon > 0$) дает q-мерное многообразие (называемое иногда трубчатой окрестностью подмногообразия M), граница (край) которого и обозначается через N. Это подмногообразие (вложенное в $\mathbb{R}^q$, если ε мало) отображается гауссовым отображением r в сферу S^{q-1}. Пусть $h_l(x)$ — функция высоты на M и N. Легко усмотреть (проверьте!), что каждая критическая точка $x_0 \in M$ для функции $h_l(x)$ порождает ровно две критические точки y_0 и y_0' на N, являющиеся двумя точками пересечения прямой l, проходящей через x_0 ортогонально многообразию M (рис. 71).

Далее, можно проверить, что критическая точка $x_0 \in M$ для функции $h_l(x)$ является невырожденной тогда и только тогда,

когда точки y_0, y_0' не вырождены для $h_l(x)$ (y_0 и y_0' всегда одновременно вырождены или не вырождены). Таким образом, если $h_l(x)$ — функция Морса на N, то эта же функция является функцией Морса и на M. Отсюда следует, что все утверждения относительно существования и всюду плотности функций Морса среди множества функций высоты, доказанные для N, автоматически переносятся на многообразие M. Таким образом, то, что в доказанной выше лемме мы ограничились рассмотрением гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, не ограничивает общности наших рассуждений.

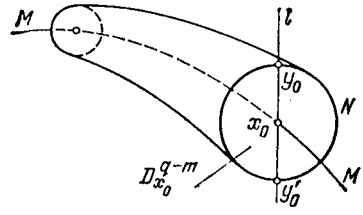


Рис. 71

Теорема 2. *Функция высоты $h_l(x)$ на гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $m = \dim M$, является функцией Морса тогда и только тогда, когда точка $(\pm l) \in \mathbb{R}P^m$ является регулярным значением для гауссова отображения $r\colon M \to \mathbb{R}P^m$. В частности, почти все функции высоты $h_l(x)$ являются функциями Морса.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из леммы 1. Второе утверждение следует из теоремы Сарда, так как регулярные значения гауссова отображения $r\colon M \to \mathbb{R}P^m$ всюду плотны в $\mathbb{R}P^m$. Теорема доказана.

Замечание. В силу сделанных выше дополнений для случая $M \subset \mathbb{R}^q$, $q > m+1$, теорема автоматически переносится на случай любого гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^q$ произвольной коразмерности (т. е. с любым $q - m > 0$).

3. Фокальные точки. Существуют и другие способы строить богатый запас весьма просто конструируемых функций Морса на гладких многообразиях. Не вдаваясь в подробности, опишем один такой способ.

Рассмотрим гладкое многообразие M и произвольное гладкое его вложение в $\mathbb{R}^q$. Фиксируем произвольную точку $p \in \mathbb{R}^q$ и свяжем с ней гладкую функцию L_p на вложенном подмногообразии M^m, положив $L_p(x) = |p-x|^2$, где $x \in M$, $|p-x|$ — длина вектора $p-x$. Можно доказать, что почти для всех точек $p \in \mathbb{R}^q$ функция $L_p(x)$ является функцией Морса на M. Множество функций вида $L_p(x)$ не совпадает с множеством функций высоты $h_l(x)$.

Выясним, при каких p функция $L_p(x)$ будет функцией Морса. Для этого мы обозначим через N совокупность пар (x, v), где $x \in M$ и $v \in \mathbb{R}^q$ — вектор, ортогональный M в точке x. Очевидно, N есть гладкое q-мерное многообразие (проверьте!). Рассмотрим гладкое отображение $f\colon N \to \mathbb{R}^q$, относящее паре $(x, v) \in N$ конец вектора v, отложенного из точки x.

Определение 1. Точка $p \in \mathbb{R}^q$ называется *фокальной точкой кратности* $\mu > 0$ для M, если $p = f(x, v)$ и якобиан отображения f в точке (x, v) имеет ранг $q - \mu$.

В силу теоремы Сарда почти все точки $p \in \mathbb{R}^q$ не являются фокальными точками для вложения $M \subset \mathbb{R}^q$; в частности, мера множества фокальных точек $p \in \mathbb{R}^q$ равна нулю.

Рассмотрим теперь «вторую квадратичную форму вложения $M \subset \mathbb{R}^q$». Будем считать, что многообразие M (локально) задано в $\mathbb{R}^q$ параметрически: $x = x(u^1, \ldots, u^m)$, где u^α, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$,— локальные координаты на M, $x = (x^1, \ldots, x^q)$. Рассмотрим вектор $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = x_{ij}$, и пусть v — нормаль к M в точке $x \in M$. Тогда можно составить скалярное произведение $\langle v, x_{ij}\rangle = \langle v, n_{ij}(x)\rangle$, где $n_{ij}(x)$ — нормальная компонента вектора x_{ij} в точке x (т. е. ортогональная проекция вектора x_{ij} на плоскость, нормальную к M в точке x). Обозначим через Q_v матрицу $\langle v, x_{ij}\rangle$; ее называют матрицей второй квадратичной формы многообразия M вдоль вектора v. Пусть $G = (g_{ij})$ — матрица первой квадратичной формы, т. е. метрика на M (эта метрика индуцирована вложением $M \subset \mathbb{R}^q$; в $\mathbb{R}^q$ рассматривается евклидова метрика). Можно считать, что локальные координаты $u^1, \ldots, u^m$ выбраны так, что $G(x) = E$ (единичная матрица) в некоторой точке x. Тогда в точке x имеем $G^{-1}Q_v = Q_v$; пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения формы $G^{-1}Q_v = Q_v$ в точке x, т. е. λ_α — «главные кривизны» подмногообразия M вдоль направления v. Рассмотрим прямую, задаваемую уравнением $x + tv$ (т. е. прямую, определяемую вектором v в точке x).

Лемма 2. *Фокальными точками на прямой $x + tv$ являются те и только те точки, для которых $t = \lambda_i^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.*

Доказательство. Локально N устроено как произведение $M \times \mathbb{R}^{q-m}$; поэтому на N можно ввести локальные координаты $x = x(u^1, \ldots, u^m)$, $t^1, \ldots, t^{q-m}$. Отображение f вблизи рассматриваемой точки устроено так: $f(x(u), t) = x(u) + \sum\limits_\alpha t^\alpha a_\alpha(u)$, где $\{a_\alpha(u)\}$ — репер в плоскости, нормальной к M в точке $x(u)$, гладко зависящий от u. Ясно, что df в этих координатах задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u^i} + \sum\limits_{\alpha=1}^{q-m} t^\alpha \dfrac{\partial a_\alpha(u)}{\partial u^i} \\ a_\alpha(u) \end{pmatrix}.$$

В касательной плоскости $T_x(M)$ выберем базис $\left\{\dfrac{\partial x}{\partial u^\alpha}\right\}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant m$. Найдем параллелепипед, натянутый на образы базисных векторов (из N) после применения df. Тем самым мы вычис-

лим якобиеву матрицу отображения f (т. е. $\det(df)$). Искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle + \sum_{\alpha=1}^{q-m} t^\alpha \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle & \sum_{\alpha=1}^{q-m} t^\alpha \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, a_\beta \right\rangle \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранг этой матрицы определяется рангом матрицы $A = \left(\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle + \sum_\alpha t^\alpha \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle \right)$. С другой стороны, $0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \left\langle a_\alpha, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle + \left\langle a_\alpha, \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle$, т. е. $A = \left(g_{ij} - \sum_\alpha t^\alpha \left\langle a_\alpha, \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial u^j} \right\rangle \right) = \left(g_{ij} - t \left\langle v, \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle \right)$. Таким образом, ранг матрицы (df) равен рангу матрицы $(g_{ij} - t\langle v, x_{ij}\rangle)$, что и требовалось. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим точку $p \in \mathbb{R}^q$ и функцию $L_p(x) = |x-p|^2 = \langle x-p, x-p\rangle$. Тогда $\frac{\partial L_p(x)}{\partial u^i} = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x \right\rangle - 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, p \right\rangle = 2\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x-p \right\rangle$. Пусть $\left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, x-p \right\rangle = 0$; это эквивалентно тому, что вектор $x-p$ ортогонален $T_x(M)$. Далее,

$$\frac{\partial^2 L_p(x)}{\partial u^i \partial u^j} = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, x-p \right\rangle + \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, tv \right\rangle + g_{ij},$$

где $p = x + tv$. Таким образом, вырождение критической точки для функции $L_p(x)$ происходит тогда и только тогда, когда p — фокальная точка. Итак, если p — не фокальная точка, то $L_p(x)$ — функция Морса на $M \subset \mathbb{R}^q$.

Важное следствие. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^q$ — гладкое замкнутое подмногообразие. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что трубчатая окрестность $N_\varepsilon(M) = \{y \in \mathbb{R}^q \mid \rho(y, M) < \varepsilon\}$ является гладким q-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^q$ с краем $\partial N_\varepsilon(M)$, являющимся гладким $(q-1)$-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^q$. В частности, $N_\varepsilon(M)$ расслаивается на $(q-m)$-мерные диски $D_\varepsilon^{q-m}(x)$, $x \in M$, радиуса ε с центрами на M; аналогично многообразие $\partial N_\varepsilon(M)$ расслаивается на сферы $S_\varepsilon^{q-m-1}(x)$.*

Доказательство. Достаточно взять $\varepsilon < \min_{i,x} \lambda_i^{-1}(x)$, где $x \in M$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда в $N_\varepsilon(M)$ нет фокальных точек многообразия $M \subset \mathbb{R}^q$ и, следовательно, все утверждения теоремы выполнены.

Это следствие обычно называется «теоремой о существовании трубчатой окрестности».

Глава 3

СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНДЕКС ПЕРЕСЕЧЕНИЯ. ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 12. Понятие гомотопии

1. Определение гомотопии. Аппроксимация отображений и гомотопий гладкими. Рассмотрим два гладких (пусть класса C^∞) многообразия N и M и гладкое отображение $f\colon N \to M$.

Определение 1. *Гладкой* (*кусочно гладкой*, *непрерывной*) *гомотопией* (или *деформацией*) отображения f называется гладкое (кусочно гладкое, непрерывное) отображение цилиндра

$$F\colon N \times I \to M \quad (I = [0, 1])$$

такое, что $F(x, 0) = f(x)$ при любом $x \in N$. Говорят, что отображения $f_t\colon N \to M$, $f_t(x) = F(x, t)$, *гомотопны* исходному отображению $f = f_0$, а все отображение цилиндра F есть *гомотопия* или «процесс гомотопии».

Всевозможные отображения, гомотопные данному отображению f, образуют класс попарно гомотопных отображений (или гомотопический класс отображений). Само собой разумеется, возможно определение классов гладкой гомотопии любой степени гладкости l. В частности, при $l = 0$ получим класс непрерывных и непрерывно гомотопных отображений. Однако, как мы сейчас увидим, из теоремы аппроксимации непрерывных отображений гладкими отображениями вытекают следующие элементарные свойства гомотопии:

1) всякое непрерывное отображение аппроксимируется близким и гомотопным ему гладким отображением любого класса гладкости (в частности, C^∞);

2) два гладких отображения гладко гомотопны, если они непрерывно гомотопны.

Перейдем к подробностям.

Теорема 1. *Пусть M, N — гладкие компактные многообразия; f, g: $M \to N$ — непрерывные отображения. Тогда для любой римановой метрики на многообразии N существует такое число $\varepsilon > 0$, что из условия $\rho(f, g) < \varepsilon$ (здесь ρ — расстояние между отображениями; см. выше) следует, что отображения f и g гомотопны.*

Доказательство. Предположим, что на M задана риманова метрика; через ρ_0 мы обозначаем соответствующее расстояние. Ввиду компактности N существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $p, q \in N$ и $\rho_0(p, q) < \varepsilon$, то существует единственная кратчайшая геодезическая, соединяющая p и q (см. § 29 части I). Пусть теперь $f, g\colon M \to N$ — непрерывные отображения такие, что $\rho(f, g) < \varepsilon$. Построим гомотопию $F\colon M \times I \to N$ с $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$. Для этого нужно задать значение $F(x, t)$ для произвольной точки $(x, t) \in M \times I$. Рассмотрим точки $f(x)$, $g(x) \in N$. Так как $\rho_0(f(x), g(x)) < \varepsilon$, то их можно соединить единственной кратчайшей геодезической $\gamma_{f(x), g(x)}(\tau)$. Так как, кроме точки x, нам еще задано значение t, то отрезок геодезической $\gamma_{f(x), g(x)}$ от $f(x)$ до $g(x)$ можно разделить в отношении $t : (1-t)$, и получившуюся точку мы и отнесем точке $(x, t) \in M \times I$ (рис. 72).

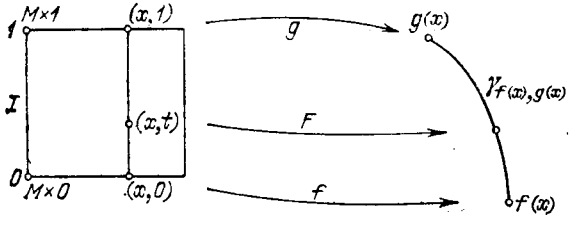


Рис. 72

Непрерывность построенного отображения $F(x, t)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных (для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, каковой является система уравнений для геодезических). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть f — произвольное непрерывное отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие N. Тогда f гомотопно гладкому отображению $g\colon M \to N$.*

Доказательство. Ранее мы доказали, что любое непрерывное отображение $f\colon M \to N$ может быть сколь угодно близко аппроксимировано гладким. Утверждение теоремы вытекает из предыдущей теоремы.

Задача. Докажите, что если отображение f уже является гладким на некотором подмногообразии $X \subset M$, то гомотопная ему гладкая аппроксимация g может быть выбрана так, что ограничения функций g и f на X совпадают.

Теорема 3. *Если гладкие отображения $f, g\colon M \to N$ непрерывно гомотопны, то они и гладко гомотопны.*

Эта теорема вытекает из существования гладкой аппроксимации для любого непрерывного отображения (в данном случае для исходной гомотопии $F\colon M \times I \to N$) и из предыдущих теорем этого пункта.

Аналогично доказывается следующее утверждение: *любое непрерывное отображение гладкого многообразия M в гладкое многообразие достаточно большого числа измерений гомотопно гладкому вложению. Если исходное отображение было гладким, то и гомотопия к вложению может быть сделана гладкой.*

Определение 2. Два гладких вложения $f, g\colon M \to N$ называются (гладко) *изотопными*, если существует гладкая гомотопия $F\colon M \times I \to N$ между отображениями f и g такая, что отображение $f_t\colon M \to N$, определенное по формуле $f_t(x) = F(x, t)$, является для каждого $t \in [0, 1]$ гладким вложением.

Теорема 4. *Любые два гладких вложения f, g гладкого многообразия M размерности n в евклидово пространство $\mathbb{R}^q$ достаточно большого числа измерений q (на самом деле $q \geqslant 2n+2$) изотопны.*

Доказательство. Если q достаточно велико, то вложения f и g можно связать непрерывной (а следовательно, и гладкой) гомотопией $F\colon M \times I \to \mathbb{R}^q$ (например, оба отображения f и g гомотопны отображению в точку). После этого гладкая гомотопия $F\colon M \times I \to N$ может быть превращена во вложение гладкой деформацией (деформация неподвижна на «основаниях» цилиндра $M \times 0$ и $M \times 1$). Это и дает искомую изотопию между f и g.

Доказанные теоремы позволят нам не делать различия между непрерывными и гладкими гомотопиями. В дальнейшем мы будем рассматривать классы непрерывной, кусочно гладкой или гладкой гомотопии класса C^∞ — той, которая в данном рассуждении более удобна.

Гомотопический класс отображения f обозначается через $[f]$; множество всех гомотопических классов отображений $N \to M$ обозначается через $[N; M]$.

2. Относительные гомотопии. В дальнейшем нам придется рассматривать гомотопии и гомотопические классы отображений, на которые наложены дополнительные ограничения. Приведем важнейшие из таких ограничений:

а) В многообразиях N и M отмечено по одной точке $x_0 \in N$ и $y_0 \in M$. Требуется, чтобы при всех отображениях $f\colon N \to M$ отмеченная точка x_0 переходила в точку y_0 (и при всех гомотопиях также). Такой класс отображений и гомотопий называется *связанным в точке*.

б) Многообразия N и M имеют края $\Gamma = \partial N$ и $\Delta = \partial M$. Требуется, чтобы при всех отображениях $f\colon N \to M$ и при их гомотопиях край Γ переходил в край Δ. Такой класс отображений называется *относительным* (относительно краев).

в) Многообразия N и M могут быть и некомпактны (открыты). Требуется, чтобы полный прообраз любой точки при отображении $f\colon N \to M$ был компактен. Это же требуется и для процессов гомотопии $F\colon N \times I \to M$. Такой класс отображений и гомотопий называется *собственным*.

г) Наиболее общий класс относительных отображений таков: пусть в N и M отмечено по множеству $A \subset N$ и $B \subset M$. Требуется, чтобы при всех отображениях f и гомотопиях F множество A отображалось в множество B. Совокупность соответствующих гомотопических классов обозначается $[(N, A); (M, B)]$.

§ 13. Степень отображения

1. Определение степени. Основной целью этого параграфа является изучение гомотопических классов отображений замкнутых ориентированных многообразий N и M одной размерности n, особенно в том случае, когда многообразие M является сферой. Рассмотрим гладкое отображение $f\colon N \to M$ и выберем точку $y_0 \in M$. Предположим, что отображение f является правильным по отношению к точке $y_0 \in M$. Это означает, что полный прообраз точки y_0 состоит из конечного числа точек x_i $(i = 1, \ldots, m)$ многообразия N с локальными координатами (x_i^β) около точек x_i и (y_0^α) около y_0, причем якобианы отображения $\det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$ не равны нулю, $i = 1, \ldots, m$. Напомним, что в многообразиях N и M задана ориентация, т. е. все якобианы переходов от локальных координат одной окрестности к другой положительны.

Определение 1. *Степенью* гладкого отображения связных ориентированных замкнутых многообразий $f\colon N \to M$ в правильной точке по отношению к правильному значению $y_0 \in M$ называется число

$$\deg f = \sum_{f(x_i)=y_0} \operatorname{sgn} \det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$$

(знаки якобианов отображений в точках x_i корректно определяются).

Имеет место важная

Теорема 1. *Степень отображения не зависит от выбора правильного значения y_0 и не меняется при гомотопиях.*

Доказательство. Сначала покажем, что степень не зависит от выбора правильного значения. Для близких к y_0 правильных значений это очевидно — прообразов столько же и знаки те же.

Пусть y_0 и y_1 — два правильных значения отображения f. Соединим эти точки y_0 и y_1 гладким несамопересекающимся путем в многообразии M с невырожденной касательной. Этот путь представляет собой одномерное многообразие γ. Согласно лемме о t-регулярности (см. § 10) путь γ можно выбрать таким образом, чтобы отображение f было t-регулярно на всем γ и правильно в концевых точках y_0, y_1. Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}(\gamma)$,

который в силу t-регулярности является гладким одномерным многообразием в N с краем, состоящим из двух частей: $f^{-1}(y_0)$ и $f^{-1}(y_1)$ (см. рис. 73 для $n=2$; точки (x_{i0}) — это прообраз $f^{-1}(y_0)$, а точки (x_{i1}) — прообраз $f^{-1}(y_1)$). (Около каждой точки на рис. 73 указан ее знак; обратите внимание, что у разных точек отрезка γ может быть разное число прообразов.) Поскольку у отрезка ровно две концевые точки, которые входят в край с противоположными знаками, мы непосредственно из рисунка усматриваем справедливость утверждения теоремы.

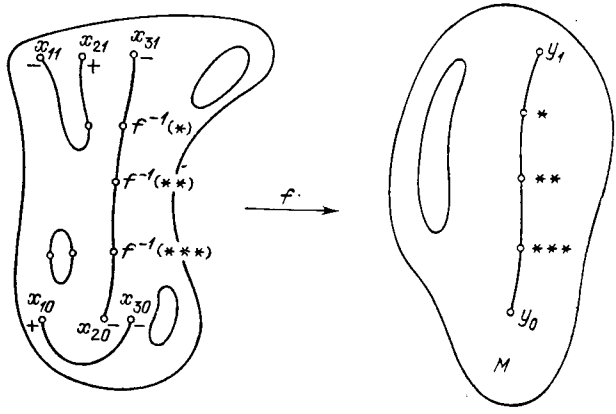


Рис. 73

Докажем теперь аналогичным образом утверждение теоремы об инвариантности степени относительно гомотопии отображения f. Пусть задана гладкая гомотопия $F\colon N\times I\to M$, где $f=F(x,0)$. Можно считать, что весь процесс гомотопии — отображение F — правильно в точке y_0. Рассмотрим полный прообраз $F^{-1}(y_0)$ (см. рис. 74 для $n=1$; число прообразов точки y_0 для разных моментов t может быть различным, но алгебраическая сумма знаков постоянна).

Картинка здесь полностью аналогична рис. 73, так как $F^{-1}(y_0)$ есть одномерное неособое многообразие в $N\times I$ с двумя частями края, соответствующими $t=0$ (это — $f^{-1}(y_0)$) и $t=1$. Указанное в теореме целое число, очевидно, одинаково для $t=0$ и $t=1$. Теорема доказана.

2. Обобщения основного определения. Укажем полезные расширения определения степени:

А) Обобщение понятия степени отображения на класс относительных отображений между многообразиями с краем производится очевидным образом. Пусть задано отображение

$$f\colon (N,\partial N)\to(M,\partial M),$$

где M и N — компактные многообразия (с краем) одной размерности n. Так как край переходит в край, то полный прообраз внутреннего правильного значения $y_0 \in M$ лежит целиком во внутренней части N, и то же верно для ее прообраза при гомотопиях. Поэтому определена степень отображения $\deg f$, не зависящая от выбора правильного значения y_0 внутри M и не меняющаяся при гомотопиях в этом классе отображений,— доказательство этого факта копирует доказательство теоремы 1. Заметим, что края $\partial N = \Gamma$ и $\partial M = \Delta$ являются замкнутыми ориентированными многообразиями размерности $n-1$ (N и M ориентированы). Предположим, что края связны (в действительности это не очень существенно). Отображение f на краях также имеет степень $\deg f|_{\partial N}$. Имеет место

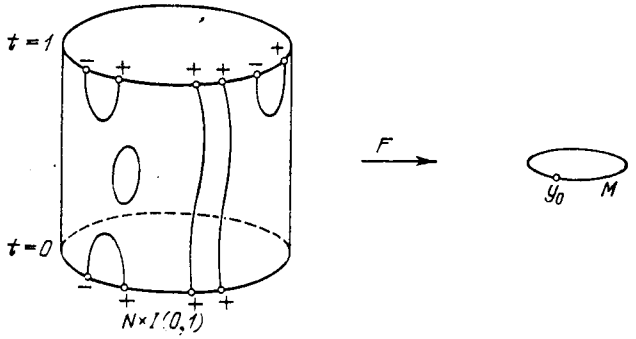


Рис. 74

Теорема 2. *Степень отображения края совпадает со степенью отображения самого многообразия*: $\deg f|_{\partial N} = \deg f$.

Доказательство. Прежде всего мы малой гладкой гомотопией изменим относительное отображение f: $N \to M$ таким образом, чтобы ни одна внутренняя точка из N не отображалась в точку края ∂M. Это делается так. Рассмотрим в малой ε-окрестности U_ε края ∂M нормальное единичное векторное поле $n(y)$, смотрящее внутрь многообразия M, и числовую C^∞-функцию $\varphi(y) \geqslant 0$ в той же ε-окрестности U_ε края ∂M, равную ε на крае ∂M, равную нулю на другом крае ε-окрестности и монотонно убывающую с удалением от края. Эту функцию φ мы продолжаем нулем на все M. Рассмотрим область $V = f^{-1}(U_\varepsilon) \subset N$. На V сосредоточена функция $\varphi^* = \varphi(f(x)) \geqslant 0$, причем максимум лежит на полном прообразе края. Определим другую C^∞-функцию $\psi(x) \geqslant 0$ на многообразии N, равную нулю на крае $\partial N = \Gamma$, равную единице за пределами малой δ-окрестности края и монотонно возрастающую с удалением от края.

Гомотопию отображения f мы определяем так: пусть образ точки $x \in N$ сдвинется по многообразию M от края по траекториям векторного поля $n(y)$ на расстояние $\psi(x)\varphi(f(x))$. Очевидно, точки края Γ не сдвинутся ($\psi(x) \equiv 0$) и точки вне V_ε также не сдвинутся ($\varphi(f(x)) \equiv 0$). Все остальные точки сдвинутся на положительное (но малое) расстояние.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ правильной точки отображения f, лежащей на крае ∂M. Весь этот полный прообраз содержится в крае ∂N. Заметим, что, сдвигая правильную точку внутрь многообразия N на достаточно малое расстояние, мы не изменим числа прообразов и их знаков (ориентации краев и многообразий согласованы) — все они изменятся непрерывно до прохода через вырождение. Поэтому числа $\deg f$ для края и для самого N совпадают. Теорема доказана.

Б) Второе расширение понятия степени отображения относится к классу собственных отображений. Очевидно, все определения и теорема 1 вместе с ее доказательством при этом полностью сохраняются.

В) Степень отображения определяется и в неориентируемом случае, но здесь знаки якобианов не имеют инвариантного смысла. Поэтому степень определяется только как вычет mod 2.

3. Гомотопическая классификация отображений многообразия в сферу. В том случае, когда многообразие M есть n-мерная сфера S^n, степень отображения является полным гомотопическим инвариантом. Имеет место

Теорема 3. *Два гладких отображения $f, g\colon N \to S^n$ замкнутого n-мерного ориентированного многообразия в n-мерную сферу гомотопны в том и только в том случае, если их степени совпадают.*

Доказательство. Сначала мы рассмотрим простой случай, когда имеется правильное значение $y_0 \in S^n$, числа прообразов которого при отображениях f и g точно равны степени $\deg f = \deg g$ (и равны друг другу). В этом случае гомотопию между f и g мы составим из следующих элементарных шагов:

Шаг 1. Деформируем отображение f так, чтобы прообразы $f^{-1}(y_0)$ и $g^{-1}(y_0)$ точно совпали.

Шаг 2. Так как знаки якобианов по условию все совпадают, деформируем f к отображению, дифференциал которого совпадает с дифференциалом отображения g в каждой точке полного прообраза $f^{-1}(y_0) = g^{-1}(y_0)$.

Шаг 3. Выберем малое $\varepsilon > 0$ и деформируем оба отображения f и g около всех прообразов точки y_0 так, чтобы в их ε-окрестностях по отношению к некоторым локальным системам координат отображения f и g стали линейными; при этом пусть образы ε-окрестностей диффеоморфно наложатся на сферу S^n, а их края перейдут в точку, противоположную точке y_0. Можно счи-

тать, что все дополнение к ε-окрестностям также переходит в эту точку, так как дополнение к точке y_0 в сфере S^n есть евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

После этих деформаций отображения f и g совпадут.

Рассмотрим теперь общее отображение f, правильное в точке $y_0 \in S^n$. К этому отображению можно применить шаг 3 предыдущей деформации (хотя число прообразов больше степени $\deg f = m$). В результате мы приведем это отображение к каноническому виду: точка y_0 имеет $m+2q$ прообразов $x_1, \ldots, x_{m+2q}$; ε-окрестности этих прообразов линейно наворачиваются на сферу S^n, а дополнение этих окрестностей отображается в точку, противоположную y_0; знаки якобианов отображения f в точках $x_1, \ldots, x_m$ одинаковы, а знаки якобианов в точках x_{m+i}, x_{m+q+i} $(i = 1, \ldots, q)$ противоположны. Построим отображение окрестности пути γ в $N^n \times I$ такое, что край переходит в точку y^* (рис. 75). Очевидно, это возможно ввиду знаков якобианов в точках (x_{m+i}, x_{m+q+i}). На ε-окрестностях остальных прообразов считаем гомотопию тождественной. Всю остальную часть многообразия $N^n \times I$ отправим в точку. Отображение F, уничтожающее пару прообразов, построено. Теорема доказана.

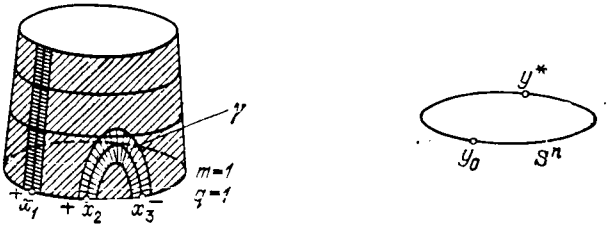


Рис. 75

Задача. Для отображений замкнутых неориентируемых n-мерных многообразий в сферу S^n определена степень по модулю 2. Докажите неориентируемый аналог теоремы 3.

Замечание. Построение гомотопии F при $n = 1$ отличается от общего случая. Предлагаем читателю разобрать этот случай самостоятельно.

4. Простейшие примеры. Пример 1. Всякий многочлен степени n с вещественными коэффициентами задает собственное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (так как уравнение $f(x) = c$ имеет не более n решений). Степень этого отображения равна 1, если n нечетно, и 0, если n четно (рис. 76 *а* и *б* соответственно). Отсюда следует, в частности, что многочлен нечетной степени всегда имеет вещественный корень: если имеется точка, прообраз которой пуст, то степень равна нулю.

Пример 2. Рассмотрим отображение $f\colon S^1 \to S^1$ окружности в окружность. Мы будем представлять себе окружность как прямую, у которой точки $x + 2\pi n$ склеены между собой при целых n. Аналогично отождествлены между собой все точки $y + 2\pi n$ в образе. Функция $y = f(x)$ задает отображение окружности в окружность, если для всякого x выполнено условие $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi k$, где k — целое число. Из рассмотрения графика (см. рис. 77, на котором $k = 2$) видно, что $\deg f = k$.

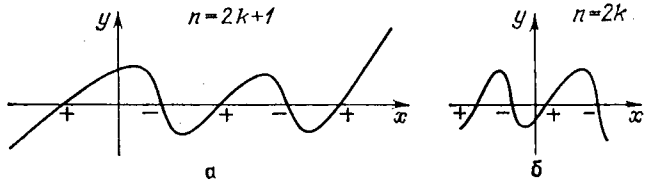


Рис. 76

Таким образом, для степени отображения получаем

$$k = \deg f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{dx}\right) dx.$$

Можно представлять себе окружность как кривую $|z| = 1$ в комплексной плоскости. Тогда всякое отображение $S^1 \to S^1$ гомотопно каноническому, имеющему вид $z \mapsto z^n$, где n — степень.

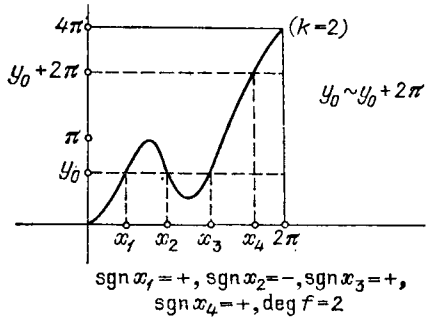


Рис. 77

Пример 3. Комплексный многочлен $w = f(z)$ степени n задает собственное отображение комплексной плоскости $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ или отображение между римановыми сферами $S^2 = \mathbb{C}P^1$,

$$f\colon S^2 \to S^2$$

(если добавить точку ∞). В частном случае, когда $f(z) = a_0 z^n$ $(a_0 \neq 0)$, это отображение, очевидно, имеет степень n. Заметим далее, что все многочлены степени n с ненулевым старшим членом задают гомотопные отображения. Гомотопия очевидна:

$$F(z, t) = a_0 z^n + (1 - t)[a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n],$$

где $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$; $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, $F(z, 0) = f(z)$ и $F(z, 1) = a_0 z^n$, $a_0 \neq 0$.

Следствие 1 (теорема Гаусса). *Многочлен степени $n \neq 0$ имеет корень.*

Действительно, если уравнение $f(z)=0$ не имеет решений, то полный прообраз $f^{-1}(0)$ пуст и степень $\deg f=0$. Пришли к противоречию.

Проверьте, что степень рационального отображения $S^2 \to S^2$ равна максимуму степеней числителя и знаменателя.

Более общим примером является голоморфное (комплексно аналитическое) отображение между замкнутыми комплексными многообразиями

$$f\colon N \to M.$$

Имеет место простая

Теорема 4. *Если степень f равна q, то $q \geqslant 0$ и правильное значение $y_0 \in M$ отображения f имеет ровно q прообразов, причем знак якобиана для каждого прообраза положителен.*

Доказательство. Детерминант комплексного линейного отображения A всегда положителен (см. часть I, § 12):

$$\det_{\mathbb{R}} A = |\det_{\mathbb{C}} A|^2 \geqslant 0.$$

Применяя это к якобианам в прообразах регулярного значения y_0, получаем утверждение теоремы, так как по определению

$$\deg f = \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sgn} \det_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta} \right)_{f(x_i)=y_0} = \sum_{i=1}^{q} (+1) = q.$$

Теорема доказана.

В рассмотренном выше примере 3 уравнение $f(z)=c$ имеет в общем случае ровно n решений — это видно из теоремы 4.

Другим примером голоморфного отображения является проекция римановой поверхности алгебраической n-значной функции на плоскость z, над которой определена эта n-значная функция (или на риманову сферу $S^2 = \mathbb{C}P^1$). Здесь степень равна, очевидно, числу листов n.

Пример 4. Рассмотрим отображение f замкнутого n-мерного многообразия N в $\mathbb{R}^n$. Это отображение является, очевидно, собственным, как и любое отображение замкнутого многообразия N куда угодно. Поэтому определена степень f, и эта степень равна нулю. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что в силу компактности N в $\mathbb{R}^n$ имеются точки y_0, полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ которых пуст,— достаточно удаленные точки в $\mathbb{R}^n$.

Отсюда следует, что прообраз любой точки $y \in \mathbb{R}^n$, если она является правильным значением, состоит из четного числа точек.

Пример 5. Рассмотрим отображение между ориентированными многообразиями с краем $f\colon (N, \partial N) \to (M, \partial M)$, сужение которого на край является диффеоморфизмом: $\partial N \approx \partial M$; предположим также, что этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию. В этом

случае в силу теоремы 2 $\deg f = 1$. В частности, если задана замена координат $y = f(x)$ в области U в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\Gamma = \partial U$ и эта замена взаимно однозначна на границе, то f имеет степень 1 и внутри.

§ 14. Некоторые применения степени

1. Степень и интеграл. Изучим поведение интеграла от дифференциальной формы ранга n по n-мерному замкнутому ориентированному многообразию при отображениях конечной степени. Пусть $f\colon N \to M$ — гладкое отображение степени $q = \deg f$ и Ω — дифференциальная форма ранга $n = \dim M = \dim N$ на M, имеющая вид $\varphi_i(y)\, dy_i^1 \wedge \ldots \wedge dy_i^n$ в локальной системе координат (y_i^α) на M с номером i. Определены интегралы $\int\limits_M \Omega$ по многообразию M от формы Ω, а также $\int\limits_N f^*\Omega$ по многообразию N от формы $f^*\Omega$, имеющей (локально) вид

$$f^*\Omega = \varphi_i(f(x))\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n \det\left(\frac{\partial y_i^\alpha}{\partial x_i^\beta}\right)$$

в области на N с координатами (x_j^α), точнее, в той ее части, которая попадает в область с координатами (y_i^α) при отображении f.

Теорема 1.

$$\int\limits_N f^*\Omega = (\deg f) \int\limits_M \Omega.$$

Доказательство. Рассмотрим область $U \subset M$, целиком состоящую из правильных значений отображения f и лежащую в достаточно малой окрестности правильного значения $y_0 \in M$. Полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$. Полный прообраз $f^{-1}(U)$ окрестности U точки y_0 есть объединение

$$f^{-1}(U) = U_1 \cup \ldots \cup U_m$$

непересекающихся множеств U_j с координатами (x_j^α), $j = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, n$. Координаты в U обозначим через (y_0^α), $\alpha = 1, \ldots, n$. Все точки областей U_j регулярны, так как область U состоит лишь из правильных значений отображения f. В каждой области U_j отображение f взаимно однозначно:

$$y_0^\alpha = f_{(j)}^\alpha(x_j^1, \ldots, x_j^n).$$

По формуле замены переменных в кратном интеграле имеем

$$\int\limits_{U_j} \varphi(y(x))\, dx_j^1 \wedge \ldots \wedge dx_j^n = \operatorname{sgn} \det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right) \int\limits_U \varphi(y)\, dy_0^1 \wedge \ldots \wedge dy_0^n.$$

Из этой формулы, суммируя по всем U_j, получаем

$$\int\limits_{f^{-1}(U)} f^*\Omega = \left(\sum_j \operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right)\right)\int\limits_U \Omega = (\deg f)\int\limits_U \Omega.$$

Далее, если на некотором множестве $V \subset N$ якобиан отображения f обращается в нуль, то на множестве V форма $f^*\Omega$ также обращается в нуль. По лемме Сарда (см. § 10) множество правильных точек в M является открытой всюду плотной областью; теорема тем самым доказана в силу выведенной выше формулы, так как интеграл является аддитивной функцией области.

Замечание. Теорема 1 верна также для собственных отображений, если форма Ω финитна (имеет компактный носитель на M) и для отображений многообразий с краем.

Следствие 1 (см. пример 5 в § 13). Если имеется замена переменных, взаимно однозначная на гладкой границе компактной области в $\mathbb{R}^n$, то $|\deg f| = 1$ и интегралы от форм Ω и $f^*\Omega$ совпадают по модулю (хотя замена может и не быть взаимно однозначной во внутренних точках).

2. Степень векторного поля на гиперповерхности. Рассмотрим теперь гладкое векторное поле $(\xi^\alpha(x)) = \xi$, $\alpha = 1, \ldots, n$, заданное в некоторой области U n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x^1, \ldots, x^n$ и обращающееся в нуль в этой области. В этом случае в области U определено единичное векторное поле $n(x) = \frac{\xi(x)}{|\xi(x)|}$. Тем самым определено сферическое (гауссово) отображение f области U на сферу S^{n-1}:

$$f(x) = n(x),$$

где вектор $n(x)$ в правой части исходит из начала координат. Если Q — любая замкнутая гиперповерхность, лежащая целиком в U, то определена степень $\deg f|_Q$ отображения f на Q. Эта степень называется степенью векторного поля на гиперповерхности Q. Предположим, что гиперповерхность Q локально задана в параметрическом виде

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \ldots, u^{n-1}), \qquad \alpha = 1, \ldots, n.$$

На сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ и даже на всей области $\mathbb{R}^n \setminus 0$ определена замкнутая дифференциальная форма Ω ранга $n-1$ (форма объема на S^{n-1}), имеющая вид

$$\Omega = \frac{1}{\gamma_n} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i x^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n}{((x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2)^{n/2}}$$

(где значок $\widehat{dx^i}$ означает, что этот дифференциал пропущен).

Нормировочный коэффициент γ_n подобран из условия

$$\int_{S^{n-1}} \Omega = 1.$$

Для плоскости $\mathbb{R}^2_-$ с координатами x, y имеем $(n=2)$

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\right)$$

или $\Omega = \frac{d\varphi}{2\pi}$ в полярной системе координат. Для $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z имеем $(n=3)$

$$\Omega = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{x\,dy\wedge dz - y\,dx\wedge dz + z\,dy\wedge dx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

или $\Omega = \frac{1}{4\pi}|\sin\theta|\,d\theta\,d\varphi$ в сферической системе координат.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Для любого векторного поля $\xi(x)$ и замкнутой гиперповерхности Q степень поля ξ на Q равна $\int_Q f^*\Omega$, где f — гауссово сферическое отображение*:

$$\deg f = \deg_Q \xi = \frac{1}{\gamma_n}\int_Q \frac{1}{|\xi|^n}\det\begin{Vmatrix} \xi^1 & \cdots & \xi^n \\ \frac{\partial\xi^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial\xi^n}{\partial u^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\xi^1}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial\xi^n}{\partial u^{n-1}} \end{Vmatrix} du^1\wedge\ldots\wedge du^{n-1}.$$

Это следствие вытекает из определения $f^*(\Omega)$ и вида формы Ω, указанного выше. При $n=2$ имеем

$$\deg f = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dt}{|\xi|^2}\left(\xi^1\frac{d\xi^2}{dt} - \xi^2\frac{d\xi^1}{dt}\right),$$

где t — параметр на кривой, а $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$ — координаты векторного поля на кривой. При $n=3$ имеем $\gamma_3 = 4\pi$,

$$\deg f = \frac{1}{4\pi}\int_Q\int \frac{du\,dv}{|\xi|^3}\det\begin{Vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \frac{\partial\xi^1}{\partial u} & \frac{\partial\xi^2}{\partial u} & \frac{\partial\xi^3}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi^1}{\partial v} & \frac{\partial\xi^2}{\partial v} & \frac{\partial\xi^3}{\partial v} \end{Vmatrix} = \frac{1}{4\pi}\int_Q\int \frac{du\,dv}{|\xi|^3}\left\langle \xi, \left[\frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\xi}{\partial v}\right]\right\rangle.$$

Рассмотрим особо случай, когда векторное поле $\xi(x)$ единично ($|\xi|=1$) и направлено ортогонально к поверхности Q во внешнюю сторону.

В этом случае мы знаем (см. часть I, § 26), что форма $f^*\Omega$ имеет вид

$$f^*\Omega = Kd\sigma = K\sqrt{g}\,du^1 \wedge \ldots \wedge du^{n-1},$$

где K — гауссова кривизна гиперповерхности (произведение главных кривизн), $d\sigma = \sqrt{g}\,du^1 \wedge \ldots \wedge du^{n-1}$ — стандартный элемент объема, порожденный метрикой на поверхности Q, индуцированной вложением Q в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой. Для $n=2$ имеем $d\sigma = dl$ (натуральный параметр) и $K = k$ (кривизна кривой). При $n=3$ K — это обычная гауссова кривизна поверхности и $d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,du \wedge dv$ — обычный элемент площади.

Мы получили следующее утверждение.

Теорема 2. *Интеграл от кривизны K по замкнутой поверхности с точностью до множителя γ_n (площадь единичной сферы в n-мерном пространстве) совпадает со степенью гауссова отображения.*

3. Число Уитни. Формула Гаусса — Бонне. Нашей задачей теперь является вычисление степени гауссова отображения. Мы проделаем это лишь для наиболее важных случаев $n=2$, 3 (кривые и поверхности).

Случай $n=2$ (кривые). Пусть имеется замкнутая кривая $\gamma = (x(t), y(t))$ в $\mathbb{R}^2$ общего положения. Последнее означает, что $x(t+2\pi) = x(t)$, $y(t+2\pi) = y(t)$, вектор $(\dot{x}, \dot{y})$ отличен от нуля при всех t и все самопересечения кривой в $\mathbb{R}^2$ двойные, причем касательные векторы к ветвям линейно независимы в точке их пересечения (рис. 78).

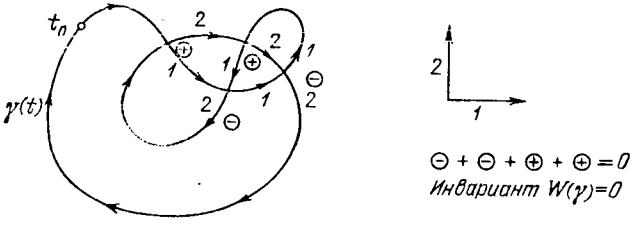


Рис. 78

Зафиксируем на кривой точку t_0, не являющуюся точкой самопересечения. Числом Уитни $W(\gamma)$ или алгебраическим числом точек самопересечения называется сумма $\sum(\pm 1)$ знаков всех точек самопересечения для плоской кривой общего положения. Знак точке самопересечения приписывается так: в плоскости задан ориентирующий репер [1, 2] (см. рис. 78). Мы идем по направленной кривой γ от точки t_0; когда мы первый раз встречаем точку самопересечения, то на касательном векторе этой ветви ставим номер *1*; когда второй раз встречаем эту же точку, то на

этой ветви ставим номер *2*. Таким образом, каждой точке самопересечения отвечает репер, знак которого либо совпадает с ориентирующим репером в $\mathbb{R}^2$, либо противоположен ему (см. рис. 78). В первом случае точка имеет знак +, во втором — знак −. Для четности числа Уитни, т. е. для четности числа точек самопересечения кривой, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Четность числа точек самопересечения кривой противоположна четности числа* $\deg f$.

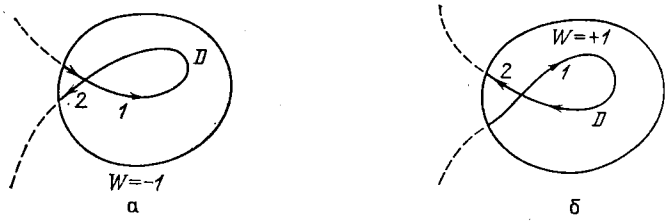


Рис. 79

Доказательство. Для несамопересекающейся кривой $W(\gamma)=0$ и $\deg f=+1$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы правильно. Докажем теорему индукцией по числу точек самопересечения. Предположим сначала, что у регулярной кривой общего положения γ можно найти «минимальный» замкнутый кусок около одной точки самопересечения, не содержащий внутри себя ни одной точки кривой и не содержащий на себе начальной точки t_0 (рис. 79). Окружим этот кусок кривой γ областью D, внутри которой нет других точек кривой, где мы будем

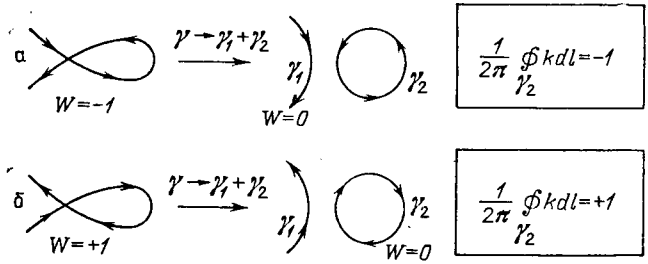


Рис. 80

производить все перестройки кривой. Перестройки кривой с сохранением направления производятся естественным образом (рис. 80, *а*, *б*): $\gamma \to \gamma_1+\gamma_2$. В результате обеих перестроек в случаях *а*) и *б*) число точек самопересечения уменьшается на 1. При отбрасывании образовавшегося замкнутого несамопересекающегося куска интеграл (т. е. степень $\deg f$) увеличивается на 1 в слу-

чае *а*) и уменьшается на 1 в случае *б*). Точно так же ведет себя и число $W(\gamma)$. В этом частном случае теорема доказана.

В общем случае мы будем действовать точно так же, выбирая каждый раз точку самопересечения таким образом, чтобы кривая γ_2 (рис. 81) была несамопересекающейся (допускается ее пересечение с кривой γ_1). Мы совершаем перестройку кривой, следуя рис. 80, *а* или *б*. Кривые γ_1 и γ_2 могут пересечься, однако число точек их пересечения четно. Поэтому приведенное выше рассуждение остается полностью неизменным. Теорема доказана.

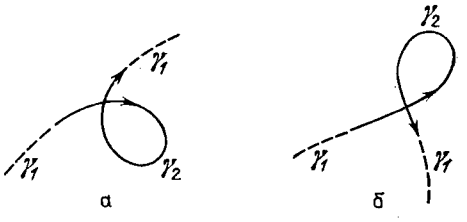


Рис. 81

Замечание. Если на отрезке γ_2 нет точки t_0, то оба целых числа $W(\gamma)$ и $\deg f$ ведут себя одинаково при перестройке (как целые числа, а не только mod 2). При выборе t_0 на внешнем контуре γ можно показать, что такой отрезок γ_2 найдется, и перестройка всегда возможна. Используя это, можно получить уточнение теоремы: число $W(\gamma)$ равно либо $\deg f + 1$, либо $\deg f - 1$, причем это может зависеть от выбора t_0 на внешней части γ (вне точек пересечения) (рис. 82).

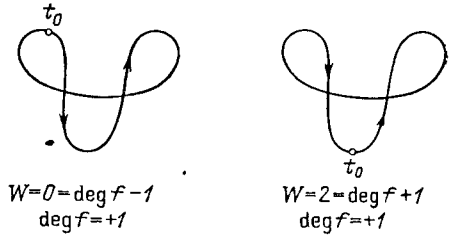


Рис. 82

Случай $n = 3$ (поверхности). Вычислим теперь степень гауссова отображения $f\colon Q \to S^2$ для гладкой замкнутой ориентированной поверхности Q в $\mathbb{R}^3$. По определению степень отображения равна числу прообразов регулярного значения $y_0 \in S^2$ отображения f. Можно предположить, что эта точка y_0 есть верхний полюс сферы с координатами (0, 0, 1) (сфера задана в пространстве $\mathbb{R}^3$). Мы будем предполагать (без ограничения общности), что противоположный полюс $y_0^* = (0, 0, -1)$ также является правильной точкой. Одновременная правильность пары противоположных точек сферы равносильна правильности точки проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ при сквозном отображении

$$Q \xrightarrow{f} S^2 \to \mathbb{R}P^2.$$

При этих условиях имеет место

Лемма 1. *Рассмотрим функцию высоты* φ *на поверхности* Q, *значение которой в точке* $P \in Q$ *совпадает с координатой* $z = \varphi(P)$.

Все критические точки этой функции невырождены, и множество критических точек совпадает с объединением двух прообразов: $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_0^*)$.

Доказательство. Градиент функции $\varphi(P) = z$ обращается на Q в нуль там, где ось z ортогональна к Q. Эти точки и являются объединением прообразов $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_0^*)$ обоих полюсов. Якобиан отображения $Q \xrightarrow{f} S^2$ в точках прообраза $f^{-1}(y_0)$, как устанавливалось в части I (см. § 26), в точности совпадает в специальных координатах с определителем гессиана функции $z = \varphi$, совпадающим с гауссовой кривизной. Для прообразов $f^{-1}(y_0^*)$ то же самое верно для функции $z = -\varphi$. Тем самым невырожденность прообразов $f^{-1}(y_0^*) \cup f^{-1}(y_0)$ равносильна условию $K \neq 0$ или условию неравенства нулю гессиана функции φ или $-\varphi$. Лемма доказана.

Заметим теперь, что имеет место очевидное равенство

$$\det\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j}\right) = (-1)^{n-1} \det\left(\frac{\partial^2 (-\varphi)}{\partial u^i \partial u^j}\right),$$

где $u^1, \ldots, u^{n-1}$ — локальные координаты около любой точки на поверхности Q. Это и различает случаи четного и нечетного значений n. Для нашего случая $n - 1 = 2$. Отсюда следует, что знаки якобианов отображения f во всех точках объединения $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_0^*)$ те же самые, что знаки гауссовой кривизны K в этих точках. При определении знаков нет нужды различать направления внешней и внутренней нормали к поверхности Q или функции φ и $-\varphi$. Суммированием вкладов всех точек со знаками получается

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$2 \deg f = \sum_{P_j} (-1)^{\alpha(P_j)},$$

здесь суммирование распространяется на множество критических точек функции высоты $\varphi = z$, $\alpha(P_i) = 0$ *для минимумов и максимумов, где* $\operatorname{sgn} K = +1$, *и* $\alpha(P_i) = 1$ *для седел, где* $\operatorname{sgn} K = -1$.

Покажем теперь, что для поверхностей с g ручками число, стоящее в правой части, есть в точности $2 - 2g$. Легко предъявить вложение поверхности в $\mathbb{R}^3$, где функция высоты φ будет иметь 1 минимум, 1 максимум и ровно $2g$ седел (рис. 83; на нем отмечены стационарные точки). Для этих вложений поверхностей с g ручками получаем

$$2 \deg f = \frac{1}{2\pi} \int_Q K d\sigma = 2 - 2g.$$

Конечно, возможны другие вложения поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Однако

мы знаем, что $K = R/2$, где R — скалярная кривизна (см. часть I, § 30). Кроме того, мы знаем, что величина $\int\limits_Q R d\sigma$ не меняется при малой вариации метрики на двумерном многообразии Q, так

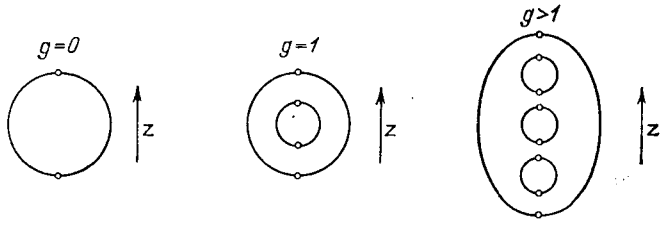


Рис. 83

как $\delta \int R d\sigma = 0$ (см. часть I, § 37). Пусть $g_{ij}^{(0)}$ и $g_{ij}^{(1)}$ — две римановы метрики на поверхности Q. Рассмотрим семейство метрик

$$g_{ij}(t) = t g_{ij}^{(1)} + (1-t) g_{ij}^{(0)}.$$

Очевидно, метрика $g_{ij}(t)$ положительна при всех $t \in [0, 1]$, $g_{ij}(0) = g_{ij}^{(0)}$ и $g_{ij}(1) = g_{ij}^{(1)}$. Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_Q R d\sigma$ одинаков для метрик $g_{ij}^{(0)}$ и $g_{ij}^{(1)}$. Тем самым доказана

Теорема 4 (Гаусс — Бонне). *Для поверхности Q с g ручками и любой римановой метрики на ней верна формула*

$$\frac{1}{4\pi} \int\limits_Q R d\sigma = 2 - 2g.$$

4. Индекс особой точки векторного поля. Рассмотрим теперь гауссово отображение в окрестности изолированной особой точки векторного поля. Пусть $\xi = \xi(x)$ — векторное поле, заданное в окрестости некоторой точки x_0 пространства $\mathbb{R}^n$. Следуя принятой терминологии, мы говорим, что x_0 есть *особая точка* поля ξ, если $\xi(x_0) = 0$; особая точка x_0 называется *изолированной*, если ξ не обращается в нуль в отличных от x_0 точках достаточно малой окрестности точки x_0; особая точка x_0 называется невырожденной, если

$$\det \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x=x_0} \right) \neq 0.$$

Лемма 3. *Невырожденная особая точка всегда изолирована.*

Доказательство. Уравнение $\xi^\alpha(x) = 0$ имеет решение $x = x_0$. Так как $\det \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \neq 0$ при $x = x_0$, то утверждение леммы следует из теоремы о неявных функциях.

Корнями невырожденной особой точки называются собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\left(\left.\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right)$.

Индексом невырожденной особой точки x_0 называется знак

$$\operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right) = \operatorname{sgn}(\lambda_1 \ldots \lambda_n).$$

Для градиентных полей $\xi^\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ индекс особой точки совпадает со знаком гессиана:

$$\operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right) = \operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right) = (-1)^{i(x_0)},$$

где $i(x_0)$ равно числу отрицательных квадратов в каноническом виде квадратичной формы $d^2 f|_{x=x_0}$.

Рассмотрим сферу $Q_\varepsilon = S^{n-1}$ малого радиуса $\varepsilon > 0$, окружающую изолированную особую точку x_0, так что поле ξ не обращается на сфере Q_ε в нуль. Согласно сказанному в п. 2 определено сферическое гауссово отображение

$$f_{x_0} : Q_\varepsilon \to S^{n-1}.$$

Определение. *Индексом* изолированной особой точки x_0 векторного поля ξ называется степень гауссова отображения:

$$\operatorname{ind}_{x_0}(\xi) = \deg f_{x_0}.$$

Оказывается, что если точка x_0 не вырождена, то это определение совпадает с предыдущим.

Теорема 5. *Для невырожденной особой точки x_0 поля $\xi(x)$ имеет место равенство*

$$\deg f_{x_0} = \operatorname{sgn}\det\left(\left.\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right|_{x=x_0}\right).$$

Доказательство. В достаточно малой окрестности точки x_0 векторное поле $\xi(x)$ гомотопно линейному векторному полю $\xi^{(1)\beta}(x) = \left.\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\right|_{x=x_0}(x^\nu - x_0^\nu)$, причем в процессе гомотопии поле $\xi(x, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ обращается в нуль только в точке x_0 при всех t и $\xi(x, 0) = \xi(x)$, $\xi(x, 1) = \xi^{(1)}(x)$. Действительно, поле ξ имеет вид

$$\xi(x) = \xi^{(1)}(x) + \xi^{(2)}(x),$$

где $|\xi^{(2)}(x)| = o(|\xi^{(1)}|)$. Мы полагаем

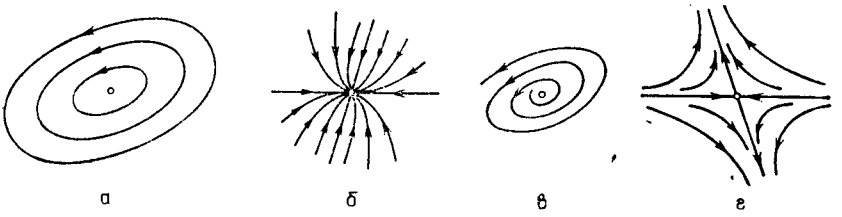
$$\xi(x, t) = \xi^{(1)}(x) + (1-t)\xi^{(2)}(x).$$

Эта гомотопия обладает нужными свойствами в достаточно малой

окрестности точки x_0. В процессе этой гомотопии отображение f_{x_0}: $Q_\varepsilon \to S^{n-1}$ испытывает гладкую гомотопию, и линейная часть поля не меняется. Поэтому обе части равенства $\deg f_{x_0}$ и $\operatorname{sgn}\det\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\beta}\Big|_{x=x_0}\right)$ остаются неизменными. Нам остается вычислить степень для линейного отображения $\xi^{(1)}$:

$$f^{(1)}_{x_0}(x) = \frac{\xi^{(1)}(x)}{|\xi^{(1)}(x)|}.$$

В линейном случае поле $\xi^{(1)}$ дает линейный изоморфизм окрестности точки x_0 на окрестность нуля в $\mathbb{R}^{n-1}$ и является взаимно однозначным на сфере радиуса ε, $Q_\varepsilon \to S^{n-1}$. Каждая точка y_0 на сфере S^{n-1} является правильным значением и имеет ровно один прообраз. Знак детерминанта указывает на сохранение или обращение ориентации при этом отображении. Теорема доказана.



а б в г

Рис. 84

Пример 1 ($n=2$). Невырожденные особые точки векторного поля на плоскости могут быть такими:

	Индекс
центр (корни чисто мнимые; рис. 84, *а*)	+1
узел (корни вещественные и одного знака; рис. 84, *б*)	+1
фокус (корни комплексно сопряжены; рис. 84, *в*)	+1
седло (корни вещественные и разных знаков; рис. 84, *г*)	−1

Индекс особой точки не зависит от направления поля.

Если поле является градиентом некоторой функции f, то возможны такие особенности:

		Индекс
минимум	f	+1
седло	f	−1
максимум	f	+1

Пример 2 ($n=3$). Градиенты $\left(\xi^\alpha = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right)$:

	Индекс
минимум f	+1
седло 1-го типа (один отрицательный квадрат формы d^2f)	−1
седло 2-го типа (два отрицательных квадрата формы d^2f)	+1
максимум f	−1

Общие поля (все $\lambda_i \neq 0$):

	Индекс
выталкивающая особая точка ($\operatorname{Re}\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$)	$+1$
седло 1-го типа ($\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant 0$, λ_3 вещественно, $\lambda_3 < 0$)	-1
седло 2-го типа (λ_1 вещественно, $\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 \leqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda_3 \leqslant 0$)	$+1$
всасывающая особая точка ($\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, 3$)	-1

(либо все три корня вещественны, либо один вещественный и два комплексно сопряжены).

Теорема 6. *Пусть $\xi = \xi(x)$ — векторное поле в $\mathbb{R}^n$ с изолированными особенностями $x_1, \ldots, x_m$, и пусть Q — замкнутая ориентированная гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, не проходящая через особые точки и ограничивающая область D в $\mathbb{R}^n$. Тогда степень векторного поля $\xi(x)$ на поверхности Q, т. е. степень гауссова отображения $Q \to S^{n-1}$, равна сумме индексов всех особых точек $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, лежащих в области D.*

Доказательство. Рассмотрим сферы $Q_{j\varepsilon}$ достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$ около особых точек x_j и выкинем из области D ограничиваемые этими сферами шары (вместе с точками x_j). Останется область $\widetilde{D}$, граница которой имеет вид

$$\partial\widetilde{D} = Q \cup Q_{i_1\varepsilon} \cup \ldots \cup Q_{i_k\varepsilon}.$$

Рассмотрим в $\widetilde{D}$ гауссово отображение $f\colon \widetilde{D} \to S^{n-1}$ и форму $f^*\Omega$, где Ω — форма, определенная в п. 2. Так как $d\Omega = 0$ на сфере S^{n-1} по соображениям размерности и $df^*\Omega = f^*(d\Omega) = 0$, по общей формуле Стокса (см. § 8) получаем

$$0 = \int\limits_{\widetilde{D}} df^*\Omega = \int\limits_{\partial\widetilde{D}} f^*\Omega = -\int\limits_{Q} f^*\Omega + \sum_{q=1}^{k} \int\limits_{Q_{i_q\varepsilon}} f^*\Omega,$$

где минус стоит потому, что внешняя поверхность Q входит в границу $\partial\widetilde{D}$ с противоположной ориентацией по сравнению со сферами $Q_{i_q\varepsilon}$. Наше утверждение следует теперь из теоремы 1 и определения индексов особых точек.

5. Трансверсальная поверхность векторного поля. Теорема Пуанкаре — Бендиксона. Особый интерес представляет случай, когда поверхность Q сама является сферой большого радиуса и поле $\xi(x)$ на этой сфере Q ее нигде не касается. Такую поверхность Q мы назовем *трансверсальной поверхностью* поля ξ. В этом случае верна простая

Лемма 4. *Степень поля ξ на трансверсальной поверхности равна (нормированному) интегралу от (гауссовой) кривизны этой поверхности. Если поверхность является сферой, то этот интеграл равен единице.*

Доказательство. Трансверсальное поле на Q гомотопно (в классе полей, не касающихся Q) нормальному единичному

полю к этой поверхности. Степень есть инвариант гомотопии. Для нормального поля $n(x)$ к поверхности Q форма $f^*\Omega$ совпадает с $\frac{1}{\gamma_n} K\, d\sigma$, где K — кривизна и γ_n — нормировочный коэффициент, зависящий только от размерности (см. п. 2). Для сферы S^{n-1} этот интеграл равен единице: $\frac{1}{\gamma_n}\int K\, d\sigma = 1$. Лемма доказана.

Следствие 3. *Векторное поле $\xi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, трансверсальное какой-либо сфере S^{n-1} (например, окружности S^1 в $\mathbb{R}^2$), обладает хотя бы одной особой точкой внутри этой сферы.*

Для доказательства следствия достаточно сопоставить теорему 6 с замечанием, что индекс любой неособой точки есть нуль.

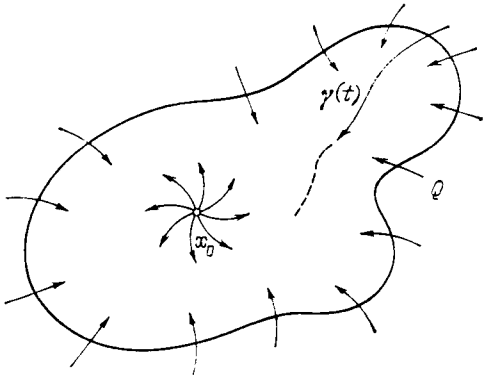


Рис. 85

Замечание. Для случая плоскости ($n=2$) уместно отметить еще случай периодической (замкнутой) интегральной траектории Q поля $\xi(x)$, если она существует. Очевидно, степень поля ξ на Q равна единице и из теоремы 6 вытекает, что внутри Q обязательно есть особая точка поля ξ. Информация об особых точках и трансверсальных поверхностях может быть очень важной при описании качественной картины поведения интегральных траекторий векторного поля $\xi(x)$, особенно в плоскости. Рассмотрим, например, случай, когда поле ξ направлено внутрь трансверсальной замкнутой кривой Q в плоскости $\mathbb{R}^2$ и в области, ограничиваемой этой кривой Q, поле имеет ровно одну — при этом выталкивающую — особую точку x_0 (узел или фокус) (рис. 85).

При этих условиях интегральная траектория $\gamma = (x(t), y(t))$ поля ξ, начавшаяся в точках Q, не может дойти до точки x_0, поскольку точка x_0 является выталкивающей. Рассмотрим предельное множество $\omega^+(\gamma)$ этой траектории, точками которого являются предельные точки в $\mathbb{R}^2$ последовательностей $\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots\}$, где $t_i \to +\infty$ при $i \to \infty$. Множество $\omega^+(\gamma)$ компактно, замкнуто и не содержит особых точек поля ξ. При этих условиях имеет место.

Теорема (Пуанкаре — Бендиксон). *Множество $\omega^+(\gamma)$ является периодической интегральной кривой поля ξ, на которую кривая γ наматывается извне («предельный цикл»).*

Доказательство теоремы разобьем на леммы.

Лемма 5. *Множество* $\omega^+(\gamma)$ *вместе с любой точкой* A *содержит всю интегральную траекторию* $\tilde{\gamma}$, *проходящую через* A.

Доказательство. Если $A = \lim\limits_{i\to\infty} \gamma(t_i)$, то все другие точки траектории γ получатся как $A_t = \lim\limits_{i\to\infty} \gamma(t_i + t)$, $-\infty < t < \infty$.

Лемма 6. *Если множество* $\omega^+(\tilde{\gamma})$ *компактно и не содержит особых точек поля* ξ, *а сама траектория* $\tilde{\gamma}$ *не периодична, то через траекторию* $\tilde{\gamma}$ *можно провести замкнутую трансверсальную кривую поля* ξ.

Доказательство. Пусть $\tilde{\gamma}(t_1)$ и $\tilde{\gamma}(t_2)$ — близкие точки в $\mathbb{R}^2_\xi$, но далекие по t: $|t_1 - t_2| \gg 1$. Такая пара t_1, t_2 всегда имеется по условию леммы. Соединим пару точек $\tilde{\gamma}(t_1)$, $\tilde{\gamma}(t_2)$ малым трансверсальным отрезком l и рассмотрим замкнутую кривую $S = l \cup [\tilde{\gamma}(t_1, t_2)]$. Очевидно, кривая S аппроксимируется замкнутой трансверсалью $\tilde{S}$, пересекающей $\tilde{\gamma}$ (рис. 86, пунктирная кривая). Лемма доказана.

Лемма 7. *При условиях теоремы через интегральную траекторию* $\tilde{\gamma}$ *в множестве* $\omega^+(\gamma)$ *нельзя провести замкнутую трансверсаль.*

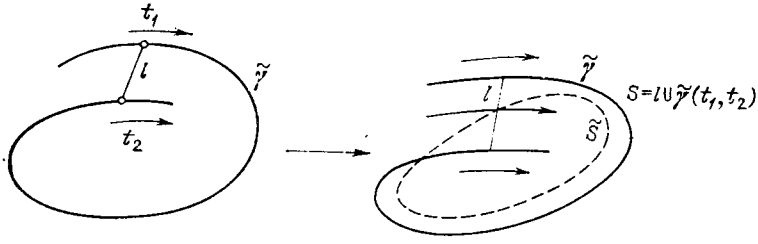


Рис. 86

Доказательство. Предположим противное: для $\tilde{\gamma}$ существует замкнутая трансверсаль $\tilde{S}$. Кривая $\tilde{\gamma}$ входит внутрь кривой $\tilde{S}$ при $t \to +\infty$. Тем самым исходная кривая $\gamma(t)$ также входит внутрь $\tilde{S}$. Отсюда следует, что часть кривой γ, оставшаяся вне трансверсали $\tilde{S}$, не может принадлежать множеству $\omega^+(\gamma)$, поскольку γ прошла через трансверсаль $\tilde{S}$. Это противоречит лемме 5.

Тем самым теорема доказана: $\tilde{\gamma}$ является периодической траекторией (в силу леммы 6), и $\gamma(t)$ подходит к ней извне.

Пример. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(\dot{x}),$$
$$-f(\dot{x}) = f(-\dot{x}),$$
$$a > 0, \quad b > 0.$$

Пусть функция $f(y)$ монотонна и имеет вид, указанный на рис 87. На фазовой плоскости $(x,\ \dot{x}=y)$ имеем векторное поле $\xi(\dot{x}=y,\ \dot{y}=-ay-bx-f(y))$. Окружность S^1 достаточно большого радиуса трансверсальна полю ξ, и поле ξ направлено внутрь этой окружности. В конечной части плоскости (x, y) поле ξ имеет одну особую точку $(x=0,\ y=0)$. Матрица $\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a+f'(0) \end{pmatrix}$$

и корни таковы:

$$\lambda_{1,2}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-b},$$

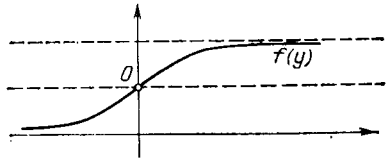


Рис. 87

где $p=f'(0)-a$.

Отсюда следует, что особая точка (0, 0) будет выталкивающей, если $\operatorname{Re}\lambda_i>0$ или $f'(0)>a$. Поэтому применима теорема Пуанкаре — Бендиксона; уравнение (или поле ξ) имеет предельный цикл.

§ 15. Индекс пересечения и его применения

1. Определение индекса пересечения. Рассмотрим n-мерное многообразие N (например, $\mathbb{R}^n$) и два его замкнутых подмногообразия P и Q размерностей p и q.

Напомним (см. § 10 п. 3), что подмногообразия P и Q называются трансверсально пересекающимися (или, как мы будем иногда говорить, находящимися *в общем положении*), если в любой точке $x\in P\cap Q$ касательные пространства P и Q линейно порождают касательное пространство к N.

Основным свойством общего положения является то, что пересечение $P\cap Q$ есть гладкое $(p+q-n)$-мерное подмногообразие многообразия N.

Нас особенно будет интересовать случай, когда $p+q=n$. В этом случае пересечение $P\cap Q$ состоит из конечного числа точек $x_1, \ldots, x_m$. Если многообразия N, P, Q ориентированы, то каждой точке x_j приписывается знак по следующему правилу. Пусть $\tau^p_{(j)}$ — ориентирующий касательный репер к P в точке x_j и $\tau^q_{(j)}$ — ориентирующий касательный репер к Q в точке x_j; точке x_j приписывается знак $+$, если репер $\tau=(\tau^p_{(j)}, \tau^q_{(j)})$ (его невырожденность следует из определения трансверсальности) является ориентирующим для N в точке x_j, и знак $-$ в противном случае; этот знак обозначается через $\operatorname{sgn} x_j(P\circ Q)$.

Определение 1. *Индексом пересечения многообразий* P, Q называется целое число

$$P \circ Q = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{sgn} x_j (P \circ Q);$$

в неориентированном случае $P \circ Q$ определяется как вычет $\bmod 2$ числа m точек пересечения.

Лемма 1. *Имеет место равенство* $P \circ Q = (-1)^{pq} Q \circ P$.

Доказательство. Если τ^p и τ^q — реперы и (τ^p, τ^q) — невырожденный n-репер, то знак детерминанта перехода от (τ^q, τ^p) к (τ^p, τ^q) есть как раз $(-1)^{pq}$. Утверждение леммы вытекает, таким образом, из определения знака точки пересечения.

Теорема 1. *Если подмногообразия* Q_1, $Q_2 \subset N$ *гомотопны, т. е. являются образами гомотопных вложений* $Q \to N$, *то их индексы пересечения с любым* P *совпадают*:

$$Q_1 \circ P = Q_2 \circ P.$$

Доказательство. Рассмотрим гомотопию F: $Q \times I \to N$ такую, что $F(Q \times 0)$ есть Q_1 и $F(Q \times 1)$ есть Q_2. Можно считать, что F — гладкое отображение, t-регулярное на подмногообразии P. Полный прообраз $F^{-1}(P)$ есть гладкое одномерное подмногообразие цилиндра $Q \times I$ с краем $\partial F^{-1}(P) = [Q_1 \cap P] \cup [Q_2 \cap P]$, причем $Q_1 \cap P$ лежит на нижнем основании цилиндра $Q \times 0$, а $Q_2 \cap P$ — на верхнем основании $Q \times 1$, и $F^{-1}(P)$ трансверсально подходит к краям цилиндра $Q \times I$. Эта картинка на $Q \times I$ (рис. 88) совпадает с той, которая появлялась в § 13 при доказательстве инвариантности степени отображения относительно гомотопии. Теорема 1 доказана.

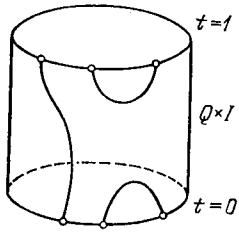


Рис. 88

Следствие 1. *Индекс пересечения двух замкнутых подмногообразий* P *и* Q *евклидова пространства всегда равен нулю.*

Доказательство. Трансляцией на вектор $a \in \mathbb{R}^n$ сдвинем Q так далеко, что $Q_2 = Q + a$ не будет пересекаться с P (это можно сделать ввиду компактности P и Q). Тогда $Q_2 \circ P = 0$ и $Q \circ P = 0$ в силу теоремы 1.

Следствие 2. *Замкнутое связное* $(n-1)$*-мерное подмногообразие* M *пространства* $\mathbb{R}^n$ *всегда разделяет* $\mathbb{R}^n$ *на две части* (*и поэтому ориентируемо*).

Доказательство. Предположим противное: M не разделяет $\mathbb{R}^n$. Возьмем две точки y_1, y_2 в $\mathbb{R}^n$ около точки $x \in M$ с двух сторон от M в $\mathbb{R}^n$ — локально это имеет смысл. Соединим точки y_1 и y_2 путем γ в $\mathbb{R}^n$, не пересекающимся с M. Замкнем путь γ до окружности (цикла) C в $\mathbb{R}^n$ с помощью малого отрезка,

нормального к M в $\mathbb{R}^n$ и пересекающегося с M равно в одной точке. Индекс пересечения $C \circ M$ равен ± 1 (ровно одна точка пересечения общего положения). Это противоречит следствию 1. Следствие доказано.

Замечание 1. При выводе следствия 2 мы применяем теорему 1 к возможно неориентированным многообразиям M; однако теорема 1 справедлива и в этом случае для вычетов mod 2.

Замечание 2. Следствие 2 перестанет быть верным, если в нем заменить подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ образом погружения $M \to \mathbb{R}^n$, т. е. допустить самопересечение. Имеются, например, погружения $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$ (см. [25]), имеющие самопересечения.

2. Суммарная особенность векторного поля. Пусть задано касательное векторное поле ξ на гладком замкнутом многообразии P размерности p. Рассмотрим пространство линейных элементов N размерности $n = 2p$. Точками многообразия N являются пары (x, η), где x — точка из P и η — касательный вектор в точке x (см. § 7). Векторное поле ξ определяет вложение $f\colon P \to N$ по правилу $f_\xi(x) = (x, \xi(x))$. Обозначим образ этого вложения через $P(\xi)$. Многообразие $P(0)$, отвечающее нулевому векторному полю, как обычно, отождествляем с P.

Определение 2. Векторное поле ξ называется *полем общего положения*, если многообразия $P(\xi)$ и $P = P(0)$ находятся в общем положении в N.

Векторное поле общего положения имеет лишь изолированные особые точки $\xi(x_j) = 0$ в силу t-регулярности. Если многообразие P ориентировано с помощью репера τ^p в точке x, то N также ориентировано с помощью репера (τ^p, τ^p) во всех точках вида (x, η).

Лемма 2. *Все особые точки x_j поля общего положения невырождены. Знак особой точки x_j, как точки пересечения $P(0) \cap P(\xi)$, входящий в определение индекса пересечения $P(0) \circ P(\xi)$, совпадает с индексом особой точки* $\operatorname{sgn} \det \left(\dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\Big|_{x=x_j} \right)$.

Доказательство. Касательное пространство к $P = P(0)$ имеет вид $(\tau^p, 0)$. Касательное пространство к $P(\xi)$ в особой точке x_j, в которой $\xi = 0$, состоит из всех векторов $\left(\eta^\alpha, \dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_j^\beta} \eta^\beta \right)$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ (в локальной системе координат (x_j^β) около точки x_j). Пусть $J = \left(\dfrac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_j^\beta}\Big|_{x=x_j} \right)$. Имеем два репера $\tau_1^p = \tau^p \times 0$ и $\tau_2^p = \tau^p J(\tau^p)$. По определению знака индекса пересечения нужно составить репер (τ_1^p, τ_2^p) в N и подсчитать знак детерминанта матрицы перехода к нему от ориентирующего репера в N. Ориентирующим является репер $\tau^{2p} = (\tau_1^p, \tau_1^p)$. Репер (τ_1^p, τ_2^p) отлича-

ется от τ^{2p} второй группой векторов, и матрица перехода есть $J = \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$. Таким образом, знак совпадает со знаком $\det J$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любого замкнутого ориентированного многообразия P сумма индексов особых точек любого векторного поля ξ общего положения совпадает с индексом пересечения $P(0) \circ P(\xi)$ в многообразии N линейных элементов и не зависит от векторного поля ξ.*

Доказательство. Совпадение индекса пересечения $P(0) \circ P(\xi)$ с суммой индексов особых точек векторного поля ξ непосредственно вытекает из леммы 2. Два векторных поля $\xi(x)$ и $\eta(x)$ всегда гомотопны, так как любое поле $\xi(x)$ может быть связано с нулевым векторным полем гомотопией $\xi(x, t) = t\xi(x)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому вложения $P \to P(\xi)$ и $P \to P(\eta)$ для полей ξ и η гомотопны. Из теоремы 1 следует, что индексы пересечения $P(0) \circ P(\xi)$ и $P(0) \circ P(\eta)$ совпадают. Теорема доказана.

Следствие 3. *Если p нечетно, то сумма индексов особых точек векторного поля на замкнутом ориентируемом p-мерном многообразии P равна нулю.*

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем $P(0) \circ P(\xi) = (-1)^{p^2} P(\xi) \circ P(0) = -P(\xi) \circ P(0)$. С другой стороны, так как векторные поля 0 и ξ гомотопны, то $P(0) \circ P(\xi) = P(\xi) \circ P(0)$. Таким образом,

$$P(0) \circ P(\xi) = -P(0) \circ P(\xi) = 0.$$

Следствие доказано.

Следствие 4. *Для любой гладкой функции f с невырожденными особыми точками x_j на замкнутом ориентируемом p-мерном многообразии P выражение $\sum\limits_{x_j} (-1)^{i(x_j)}$ не зависит от функции f и равно нулю, если p нечетно. Здесь $i(x_j)$ — индекс особой точки x_j, т. е. число отрицательных квадратов формы $d^2 f|_{x=x_j}$.*

Это следует из совпадения чисел $(-1)^{i(x_j)}$ с индексами особых точек поля $\xi = \operatorname{grad} f$ (см. § 14).

Число $\sum\limits_{x_j} (-1)^{i(x_j)}$ называется *эйлеровой характеристикой* многообразия P. Эйлерову характеристику можно определить по-другому через так называемую триангуляцию многообразия P. Мы рассмотрим здесь лишь случай $n = 2$. Предположим, что замкнутая ориентированная поверхность P разбита на треугольники со следующими условиями: а) каждая точка поверхности P принадлежит хотя бы одному треугольнику; б) два треугольника могут пересекаться только по одной вершине или по целому ребру.

Определение 3. *Эйлеровой характеристикой* поверхности P называется число $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$, где α_0 — число вершин, α_1 — число ребер и α_2 — число самих треугольников.

Имеет место

Теорема 3 (Хопф). *Эйлерова характеристика поверхности P, разбитой на треугольники, совпадает с суммой индексов особых точек векторного поля общего положения на этой поверхности.*

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно предъявить одно гладкое векторное поле $\xi(x)$ на поверхности P, для которого теорема верна. Укажем такое поле. В центрах треугольников «посадим» выталкивающие особые точки типа узла. В вершинах мы поместим «всасывающие» особые точки. В центре каждого ребра поместим по седлу.

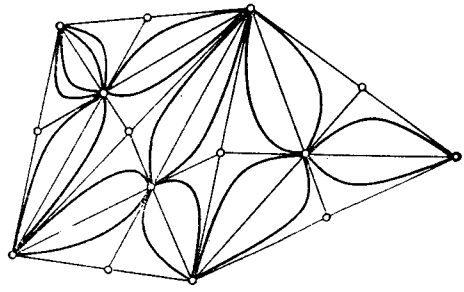


Рис. 89

Легко построить векторное поле именно с такими особенностями (рис. 89; на рисунке указаны интегральные траектории искомого поля, которое отдельно строится в каждом треугольнике). Всасывающая и выталкивающая особые точки имеют индексы $+1$ для $n = 2$, а седло имеет индекс -1.

Это построение и доказывает нашу теорему.

Для поверхности с g ручками эйлерова характеристика равна $2 - 2g$ (проверьте!). Полагая $g = 0$, получаем, что эйлерова характеристика сферы равна 2.

3. Алгебраическое число неподвижных точек. Теорема Брауэра. Пусть задано гладкое отображение $f\colon M \to M$ замкнутого ориентированного n-мерного многообразия M в себя. Будем изучать неподвижные точки отображения f, т. е. решения уравнения $f(x) = x$. Пусть x_j — неподвижная точка и (x^α_j) — локальные координаты около этой точки; отображение f имеет вид $x^\alpha_j = f^\alpha(x^1_j, \ldots, x^n_j)$.

Определение 4. Неподвижная точка x_j называется *невырожденной*, если матрица

$$\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}\bigg|_{x=x_j}\right) = (1 - df)\,|_{x=x_j}$$

невырождена. Знак $\operatorname{sgn}\det(1 - df)\,|_{x=x_j}$ называется *знаком неподвижной точки* x_j. Сумма $\sum\limits_j \operatorname{sgn}\det(1 - df)\,|_{x=x_j} = L(f)$ называется *алгебраическим числом неподвижных точек* (*числом Лефшеца*), если все они невырождены. Отображение f называется *отображе-*

нием общего положения, если все его неподвижные точки невырождены.

Рассмотрим прямое произведение $M \times M$ и выделим в нем два подмногообразия:

1) диагональ Δ, состоящую из точек вида (x, x);

2) график $\Delta(f)$ отображения f, состоящий из точек $(x, f(x))$.

Диагональ Δ и график $\Delta(f)$ представляют собой гладкие подмногообразия произведения $M \times M$, диффеоморфные M.

Теорема 4. *Индекс пересечения $\Delta(f) \circ \Delta$ совпадает с алгебраическим числом неподвижных точек отображения f.*

Доказательство. Точки пересечения $\Delta \cap \Delta(f)$ соответствуют точкам $x_j \in M$ с $f(x_j) = x_j$. Пусть τ^n — ориентирующий репер многообразия M в точке x_j; тогда (τ^n, τ^n) — ориентирующий репер для $M \times M$ в точке (x_j, x_j) диагонали Δ. Ориентирующим репером для Δ служит $\tau^n \times \tau^n$. Ориентирующий репер для $\Delta(f)$ есть $\tau^n \times df(\tau^n)$, где df — дифференциал отображения f в точке x_j. Матрица перехода от репера (τ^n, τ^n), ориентирующего $M \times M$, к составному реперу $(\tau^n \times df(\tau^n), \tau^n \times \tau^n)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ df & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ df & 1-df \end{pmatrix},$$

и ее определитель равен $\det(1 - df)$. Теорема доказана.

Следствие 5. *Если отображение $f\colon M \to M$ гомотопно нулю (отображению в одну точку), то $L(f) = \pm 1$ и отображение f имеет хотя бы одну неподвижную точку.*

Доказательство. По теореме 2 индекс пересечения не изменится, если отображение f подвергать гомотопии. Если же отображение $f\colon M \to M$ переводит все в одну точку $x_0 = f(M)$, то индекс пересечения $\Delta(f) \circ \Delta$ равен ± 1, так как пересечение диагонали Δ с сомножителем $\Delta(f) = M \times x_0$ есть ровно одна точка (x_0, x_0) общего положения. Следствие доказано.

Следствие 6 (теорема Брауэра). *Всякое непрерывное отображение $f\colon D^n \to D^n$ диска (или шара) в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Представим диск как нижнюю полусферу на сфере S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим отображение складки $\psi\colon S^n \to D^n$, неподвижное на нижней полусфере и проектирующее верхнюю полусферу на нижнюю, и суперпозицию

$$S^n \xrightarrow{\psi} D^n \xrightarrow{f} D^n \xrightarrow{\varphi} S^n.$$

Эта суперпозиция есть отображение $S^n \to S^n$, гомотопное нулю. Оно имеет неподвижную точку и эта точка лежит в D^n и является неподвижной точкой отображения f. Следствие доказано.

Пример 1. Отображение f окружности в себя вида $z \mapsto z^n$ (или $\varphi \to n\varphi$) имеет степень $\deg f = n$ и ровно $n - 1$ неподвижных точек $z^n = z$, $|z| = 1$. Эти точки суть корни из единицы, $z^{n-1} = 1$.

Отсюда в силу гомотопической инвариантности числа $L(f)$ получаем, что для отображений $S^1 \to S^1$ степени n число $L(f)$ равно $n-1$.

Пример 2. Отображение $S^2 \to S^2$ вида $z \mapsto z^n$ в комплексных координатах имеет ровно n конечных неподвижных точек в $\mathbb{C}^1 = \mathbb{R}^2$ и одну бесконечно удаленную. Проверьте, что все эти точки не вырождены и имеют знак $+1$. Отсюда следует, что $L(f) = n+1$.

Задачи. 1. Показать, что для отображения $S^m \to S^m$ степени n число $L(f)$ равно $n-1$ при нечетном m и равно $n+1$ при четном m. (В частности, антиподальное отображение сферы $\xi \mapsto -\xi$, не имеющее неподвижных точек, имеет степень $(-1)^{m-1}$.)

2. Вычислить число $L(f)$ для линейного отображения f m-мерного тора T^m в себя, задаваемого целочисленной матрицей A порядка m. (Тор представляется как фактор пространства $\mathbb{R}^m$ по целочисленной решетке.)

4. Коэффициент зацепления. Рассмотрим теперь пару гладких замкнутых регулярных направленных кривых γ_1 и γ_2 в $\mathbb{R}^3$, не пересекающихся друг с другом. Пусть кривые γ_i задаются в виде $\gamma_i(t) = r_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, где r — радиус-вектор точки в $\mathbb{R}^3$.

Определение 5. *Коэффициентом зацепления* двух кривых γ_1 и γ_2 называется число («интеграл Гаусса»)

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\langle [dr_1, dr_2], r_{12} \rangle}{|r_{12}|^3}, \tag{1}$$

где $r_{12} = r_2 - r_1$.

Интуитивно, коэффициент зацепления представляет собой алгебраическое число витков, с которым один контур (например, провод) охватывает другой. Выражением этого является

Теорема 5. а) *Коэффициент зацепления является целым числом и не меняется при деформациях замкнутых кривых γ_1 и γ_2, при которых они попарно не пересекаются.*

б) *Рассмотрим отображение диска $F\colon D^2 \to \mathbb{R}^3$, совпадающее с γ_1 на границе $S^1 = \partial D^2$ и находящееся в общем положении (t-регулярное) на кривой γ_2. Тогда индекс пересечения $F(D^2) \circ \gamma_2$ совпадает с коэффициентом зацепления $\{\gamma_1, \gamma_2\}$.*

Доказательство. Замкнутые кривые $\gamma_i(t) = r_i(t)$, $i = 1, 2$, определяют двумерную замкнутую ориентированную поверхность $\gamma_1 \times \gamma_2$: $(t_1, t_2) \mapsto (r_1(t_1), r_2(t_2))$ в пространстве $\mathbb{R}^6$. Пусть кривые γ_1 и γ_2 не пересекаются. Тогда определено отображение φ поверхности $\gamma_1 \times \gamma_2$ в сферу S^2:

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{r_1(t_1) - r_2(t_2)}{|r_1(t_1) - r_2(t_2)|}.$$

Степень такого отображения как раз дается интегралом (1). Следовательно, этот интеграл — целое число. При деформациях

замкнутых кривых γ_1 и γ_2, при которых они попарно не пересекаются, отображение φ меняется на гомотопное. Поэтому коэффициент зацепления $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \deg \varphi$ при таких деформациях не меняется.

Если кривые не зацеплены, т. е. их можно растащить по разные стороны от одной двумерной плоскости, то $\deg \varphi = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ есть нуль (напомним, в процессе деформации кривых γ_1 и γ_2 не должны взаимно пересекаться). Поэтому при помощи гомотопии, указанной на рис. 90, *а*, *б*, задачу вычисления коэффициента зацепления можно свести к простейшему случаю, изображенному на рис. 90, *в*. Это вычисление становится особенно простым,

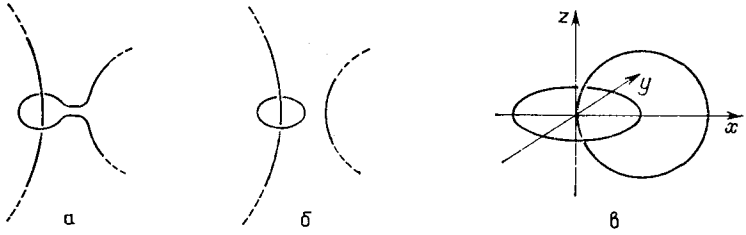


Рис. 90

если радиус одной окружности устремить к бесконечности. Таким образом, кривые γ_1, γ_2 имеют вид $r_1(t_1) = (0, 0, t_1)$, $-\infty < t_1 < \infty$, $r_2(t_2) = (\cos t_2, \sin t_2, 0)$, $0 \leqslant t_2 \leqslant 2\pi$. «Коэффициент зацепления» таких кривых равен

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \frac{dt_1 \wedge dt_2}{(1 + t_1^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1}{(1 + t_1^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{1}{2} \operatorname{th} z \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1,$$

где мы сделали подстановку $t_1 = \operatorname{sh} z$.

Итак, для простейшего зацепления (рис. 90, *в*) коэффициент $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ равен 1; для незацепленных кривых — нулю. Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Глава 4

ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ МНОГООБРАЗИЙ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА. НАКРЫТИЯ (РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ДИСКРЕТНЫМ СЛОЕМ)

§ 16. Ориентируемость и гомотопия замкнутых путей

1. Перенос ориентации вдоль пути. Простейшее определение ориентации на многообразии, данное выше (см. § 1), состояло в том, что многообразие M покрыто системой областей U_j с координатами (x_j^α), причем все замены координат во всех пересечениях $U_j \cap U_k$ имеют положительный якобиан:

$$\det\left(\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}\right) > 0.$$

Другое определение (см. § 2), эквивалентное первому, состояло в том, что на многообразии в каждой точке $x \in M$ указан класс ориентирующих касательных реперов (невырожденных n-реперов, $n = \dim M$), отличающихся друг от друга линейным преобразованием с положительным детерминантом. При этом класс ориентирующих реперов должен непрерывно меняться вместе с точкой многообразия M.

Эти определения были удобны для доказательства ориентируемости некоторых классов многообразий, например комплексных многообразий и поверхностей в $\mathbb{R}^n$, заданных неособой системой уравнений $f_1 = 0, \ldots, f_{n-k} = 0$. Нашей целью теперь является доказательство неориентируемости некоторых многообразий. Для удобства мы введем на многообразии M риманову метрику g_{ab}. Кроме того, многообразие M будем считать связным.

Определим операцию переноса ориентации вдоль путей. Пусть задан кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma(t)$ в многообразии M и невырожденный касательный n-репер $\tau^n(t)$ во всех точках пути γ, непрерывно зависящий от t, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. При этих условиях введем

Определение 1. Класс ориентации репера $\tau^n(t)|_{t=1}$ в точке $\gamma(1)$ мы будем называть *переносом класса ориентации репера* $\tau^n(0)$ *в точке* $\gamma(0)$ *вдоль пути* γ.

Операция переноса ориентации вдоль путей обладает следующими свойствами:

а) *Из любой точки x можно однозначно перенести ориентацию во все достаточно близкие точки многообразия вдоль малых путей, целиком находящихся в окрестности точки x.*

Это свойство очевидно, так как вся малая окрестность точки x находится в пределах одной координатной системы.

б) *Для любого кусочно гладкого пути γ перенос ориентации существует и не зависит от выбора невырожденного реперного поля $\tau^n(t)$ вдоль кривой.*

Существование вытекает из возможности параллельного переноса репера вдоль гладких и кусочно гладких кривых. Независимость от выбора реперного поля доказывается так: пусть $\tau_1^n(t)$ и $\tau_2^n(t)$ — два реперных поля вдоль одной кривой $\gamma(t)$, имеющие одинаковые ориентации при $t=0$. Матрица перехода от τ_1^n к τ_2^n в момент t дает матричную функцию $A(t)$ с $\det A(t)\neq 0$ при всех t и $\operatorname{sgn}\det A=+1$ при $t=0$. Тогда $\operatorname{sgn}\det A=+1$ и при всех t.

в) *Если два кусочно гладких пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ соединяют одни и те же точки и могут быть переведены один в другой кусочно гладкой гомотопией, закрепленной в концах $x_0=\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$, $x_1=\gamma_1(1)=\gamma_2(1)$, то переносы ориентации вдоль этих путей совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим гомотопию $F(t, \tau)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, $F(t, 0)=\gamma_1(t)$, $F(t, 1)=\gamma_2(t)$, и все пути $F(t, \tau)$ с любым $t=\text{const}$ кусочно гладкие. Пусть $\tau^n(t)$ — реперное поле вдоль кривой $\gamma_1(t)=F(t, 0)$. Совершим параллельный перенос реперов $\tau^n(t)$ вдоль кривых $F(t, \tau)$ по параметру $0\leqslant\tau\leqslant 1$. Заметим, что точки $x_0=F(0, \tau)$ и $x_1=F(1, \tau)$ неподвижны при гомотопии. В силу непрерывности операции параллельного переноса в римановой геометрии (см. часть I, § 29) получаем непрерывное реперное поле вдоль кривой $\gamma_2(t)=F(t, s)$ как результат параллельного переноса реперов $\tau^n(t)$ вдоль кривых $F(t, \tau)$, $t=\text{const}$.

Из этих свойств вытекает

Теорема 1. *Связное многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда параллельный перенос вдоль любого замкнутого (начинающегося и кончающегося в одной точке) пути сохраняет ориентацию.*

Доказательство. Если имеется замкнутый путь γ, начинающийся и кончающийся в точке x_0, который обращает ориентацию (т. е. перенос репера τ^n вдоль пути γ из x_0 в x_0 приводит к реперу другой ориентации), то ориентировать многообразие невозможно. Действительно, если в каждой точке указана одна ориентация, непрерывно зависящая от точки, то любой замкнутый путь сохраняет ориентацию репера. Докажем обратное ут-

верждение. Пусть все замкнутые пути из x_0 в x_0 сохраняют ориентацию. Зададим первоначально ориентацию (класс реперов) в точке x_0. Ориентация в любой точке x_1 получается из ориентации в точке x_0 путем переноса вдоль кусочно гладкого пути γ из x_0 в x_1. Если точки x_0 и x_1 соединяют два разных пути γ_1 и γ_2, то они дают одинаковый перенос ориентации из x_0 в x_1, поскольку иначе путь $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 = q(\tau)$ из x_0 в x_0 обращал бы ориентацию. Здесь путь γ_2^{-1} есть путь γ_2, пройденный в обратную сторону, а суперпозиция путей $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ есть путь $q(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 2$, где $q(\tau) = \gamma_1(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и $q(\tau) = \gamma_2(2-\tau)$ при $1 \leqslant \tau \leqslant 2$. Теорема доказана.

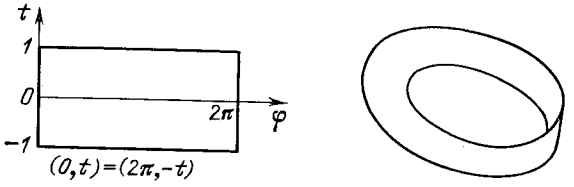


Рис. 91. Лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ («односторонняя поверхность»).

2. Примеры неориентируемых многообразий. Пример 1. *Лист Мёбиуса* с координатами φ, t, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, и отождествлением $(0, t) \approx (2\pi, -t)$ (рис. 91). Непосредственно очевидно, что кривая $\gamma = (\varphi, 0)$ обращает ориентацию (проверьте!).

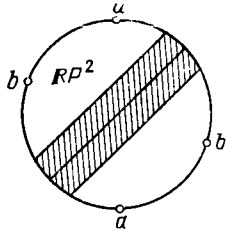


Рис. 92

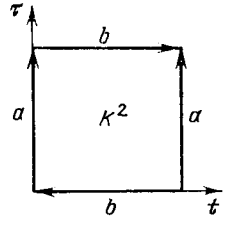


Рис. 93

Пример 2. *Проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$. Реализуем $\mathbb{R}P^2$ в виде диска D^2, у которого на границе $S^1 = \partial D^2$ противоположные точки отождествлены. Окрестность проективной прямой $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$, реализованной на рис. 92 как диаметр, проходящий через начало координат, есть лист Мёбиуса (проверьте!). Поэтому $\mathbb{R}P^1$ обращает ориентацию и $\mathbb{R}P^2$ — неориентируемая поверхность.

Задача. Докажите, что многообразие $\mathbb{R}P^n$ неориентируемо при четных n и ориентируемо при нечетных n.

Пример 3. *Бутылка Клейна.* Рассмотрим квадрат $\{(t, \tau), 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$ и произведем отождествление $(t, 0) \approx (1-t, 1)$ и $(0, \tau) \approx (1, \tau)$ (на рис. 93 отождествляемые стороны обозначены одной буквой). Проверьте, что бутылка Клейна неориентируема.

§ 17. Фундаментальная группа

1. Определение фундаментальной группы. Рассмотрим произвольное линейно связное многообразие M (или даже более общо — линейно связное топологическое пространство M) и отметим в нем некоторую точку $x_0 \in M$. Непрерывные (или кусочно гладкие) пути $\gamma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\gamma_2(t)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, можно «перемножать» в том случае, если конец пути γ_1 совпадает с началом пути γ_2.

Определение 1. *Произведением* путей γ_2 и γ_1 называется путь $\gamma_2 \circ \gamma_1 = q(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, такой, что

$$q(t) = \gamma_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$q(t) = \gamma_2(t), \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Определение 2. *Обратным путем* $\gamma^{-1}(t)$ называется тот же самый путь $\gamma(t)$, но пройденный в обратную сторону: $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, если $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Определение 3. Мы назовем пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ *эквивалентными*, если они отличаются монотонной заменой переменной $t = t(\tau)$: $\gamma_1(t(\tau)) = \gamma_2(\tau)$, $\frac{dt}{d\tau} > 0$. В дальнейшем мы будем называть *направленным путем* класс эквивалентных путей и выбирать наиболее удобного представителя (например, делать удобные нам сдвиги параметра).

Рассмотрим совокупность всех замкнутых направленных путей, начинающихся и кончающихся в одной и той же точке $x_0 \in M$. Это множество путей обычно обозначается через $\Omega(x_0, M)$. Совокупность всех направленных путей из точки x_0 в x_1 обозначается через $\Omega(x_0, x_1, M)$. Пути из $\Omega(x_0, M)$ можно перемножать. В этой совокупности имеется единица e — это постоянный путь $e(t) \equiv x_0$ при всех t.

Заметим, что гомотопический класс произведения двух направленных путей не изменится, если заменить сомножители гомотопными. Поэтому можно говорить о произведении гомотопических классов направленных путей.

Теорема 1. *Гомотопические классы направленных путей из $\Omega(x_0, M)$ образуют группу относительно операции умножения, причем обратным элементом является гомотопический класс обратного пути, а единицей — гомотопический класс единичного пути.*

Эта группа обозначается через $\pi_1(M, x_0)$ и называется *фундаментальной группой* в точке x_0. (Предполагается, что в процессе гомотопии пути начало и конец все время находятся в точке x_0.)

Доказательство. Покажем, что путь $\gamma^{-1}\circ\gamma$ гомотопен единице e (рис. 94). Гомотопия (деформация) пути $\gamma^{-1}\circ\gamma$ к единице осуществляется только по телу самого пути γ. Достаточно произвести эту деформацию на самом отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим отображение q отрезка $0\leqslant\tau\leqslant 2$ в отрезок $[0, 1]$, складывающее отрезок $[0, 2]$ пополам в точке $\tau=1$:

$$q(\tau)=\tau, \qquad \tau\leqslant 1,$$
$$q(\tau)=2-\tau, \quad \tau\geqslant 1.$$

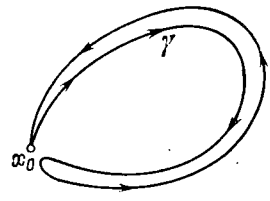


Рис. 94

Отображение $q(\tau)$ очевидной деформацией по отрезку превращается в постоянное отображение, причем в процессе деформации концы $\tau=0$ и $\tau=2$ все время отображаются в точку 0 (точка $\tau=1$ не является концом). Если задано отображение $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, то путь $\gamma^{-1}\circ\gamma$ получается как $\gamma(q(\tau))$ по определению. Деформируя $q(\tau)$ к единице, получим деформацию пути $\gamma^{-1}\circ\gamma$ к единице в M.

Докажем ассоциативность умножения. Пусть заданы три пути γ_1, γ_2, γ_3. Определим их произведение $\gamma_1\circ\gamma_2\circ\gamma_3$ как путь $q(\tau)$ для $0\leqslant\tau\leqslant 3$, где $q=\gamma_1$ при $\tau\leqslant 1$, $q=\gamma_2$ при $1\leqslant\tau\leqslant 2$ и $q=\gamma_3$ при $\tau\geqslant 2$. Это произведение с точностью до (монотонной) замены параметра совпадает как с $(\gamma_1\circ\gamma_2)\circ\gamma_3$, так и с $\gamma_1\circ(\gamma_2\circ\gamma_3)$. Таким образом, произведение гомотопических классов ассоциативно. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $f\colon M\to N$, где $f(x_0)=y_0$. Каждый путь $\gamma(t)$ в M переходит в путь $f(\gamma(t))$ в N, причем произведение переходит в произведение и гомотопные пути переходят в гомотопные. Если задана гомотопия $F(x, t)=f_t$ отображения $f=f_0$ такая, что $F(x_0, t)\equiv x_0$, то гомотопия замкнутых путей, начинающихся и кончающихся в точке x_0, также сохраняется. Итак, доказана

Теорема 2. *При непрерывных отображениях пространств (многообразий) $f\colon M\to N$ таких, что $f(x_0)=y_0$, фундаментальная группа испытывает гомоморфизм*

$$f_*\colon \pi_1(M, x_0)\to\pi_1(N, y_0),$$

который не меняется при гомотопии отображения f, оставляющей неподвижной точку x_0. В частности, если $M=N$ и отображение f гомотопно постоянному отображению $M\to x_0$, то гомоморфизм f_* тривиален (любой элемент переходит в 1). Если отображение f гомотопно тождественному отображению 1_M, то гомоморфизм f_* является изоморфизмом.

2. Зависимость от начальной точки. Выясним теперь зависимость фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ от точки x_0. Определим операцию *переноса* группы $\pi_1(M, x_0)$ в группу $\pi_1(M, x_1)$ вдоль пути γ из x_0 в x_1.

Теорема 3. *Всякий путь γ, идущий из x_0 в x_1, определяет изоморфизм γ^*: $\pi_1(M, x_1) \to \pi_1(M, x_0)$. Этот изоморфизм зависит лишь от гомотопического класса пути γ (в процессе гомотопии концы стоят на месте в точках x_0 и x_1, т. е. гомотопия происходит среди путей из $\Omega(x_0, x_1, M)$). Если начало и конец совпадают: $x_0 = x_1$, то путь γ сам представляет элемент $\pi_1(M, x_0)$; изоморфизм γ^* является в этом случае внутренним*:

$$\gamma^*(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma.$$

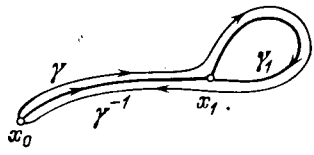


Рис. 95

Доказательство. Если γ_1 — путь, представляющий элемент $\pi_1(M, x_1)$, то путь $\gamma^*(\gamma_1)$, представляющий элемент $\pi_1(M, x_0)$, определяется как $\gamma^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma$ (рис. 95). Произведение $\gamma_1 \circ \gamma_2$ переходит при этом в $\gamma^*(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \gamma^{-1} \circ \gamma_1 \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ \gamma_2 \circ \gamma$ и гомотопно $\gamma^*(\gamma_1) \circ \gamma^*(\gamma_2)$. Таким образом, отображение γ^* является гомоморфизмом

$$\gamma^*\colon \pi_1(M, x_1) \to \pi_1(M, x_0).$$

Рассмотрим обратный путь γ^{-1} из x_1 в x_0. Получим гомоморфизм

$$(\gamma^{-1})^*\colon \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(M, x_1).$$

Обе суперпозиции $\gamma^* \circ (\gamma^{-1})^*$ и $(\gamma^{-1})^* \circ \gamma^*$ дают тождественные изоморфизмы групп $\pi_1(M, x_0)$ и $\pi_1(M, x_1)$. Поэтому γ^* и $(\gamma^{-1})^*$ являются взаимно обратными изоморфизмами. Если $x_0 = x_1$, то из определения гомоморфизма γ^* очевидно, что $\gamma^*(\alpha) = \gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma$ для любого элемента α из $\pi_1(M, x_0)$. Теорема доказана.

3. Свободные гомотопические классы отображений окружности. Рассмотрим теперь задачу о классификации «свободных» гомотопических классов отображений окружности S^1 в линейно связное многообразие M (или топологическое пространство). При этом начальная точка на окружности S^1 не отмечена.

Теорема 4. *Множество $[S^1, M]$ гомотопических классов отображений $S^1 \to M$ находится в естественном взаимно однозначном соответствии с классами сопряженных элементов в группе $\pi_1(M, x_0)$ (при любой точке x_0).*

Доказательство. Отметим на окружности S^1, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, начальную точку $\varphi_0 = 0$. Докажем сначала, что всякое отображение $\gamma\colon S^1 \to M$ гомотопно такому, при котором точка φ_0 переходит в заданную точку x_0 из M. Рассмотрим образ $\gamma(\varphi_0) = x_1$ и соединим точки x_1 и x_0 путем γ_1. Рассмотрим путь $q(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 3$,

$q = \gamma_1^{-1}\gamma\gamma_1$, из x_0 в x_0:

$$q = \gamma_1, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$
$$q = \gamma, \quad 1 \leqslant \tau \leqslant 2,$$
$$q = \gamma_1^{-1}, \quad 2 \leqslant \tau \leqslant 3.$$

Путь q гомотопен пути γ как отображение окружности и переводит точку φ_0 в x_0.

Таким образом, каждому гомотопическому классу отображений $S^1 \to M$ соответствует элемент из $\pi_1(M, x_0)$, но, возможно, не один. Рассмотрим два элемента α_1 и α_2 из $\pi_1(M, x_0)$, гомотопные как отображения окружности $S^1 \to M$, где в процессе гомотопии $F(\varphi, t)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, начальная точка $\varphi = 0$ движется по замкнутому пути p из x_0 в x_0:

$$F(\varphi, 0) = \alpha_1, \quad F(\varphi, 1) = \alpha_2, \quad F(\varphi_0, t) = p(1-t).$$

Наглядно очевидно, что путь α_1 определяет в группе $\pi_1(M, x_0)$ тот же элемент $p^{-1}\alpha_2 p$ (рис. 96). Обратно, пути α_1 и $\alpha_2 = p\alpha_1 p^{-1}$ свободно гомотопны (как отображения $S^1 \to M$ — рис. 97). На

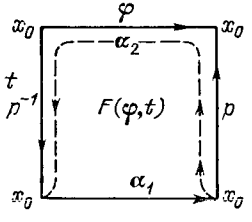


Рис. 96

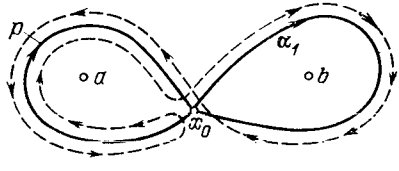


Рис. 97

рис. 97 показана плоская область с двумя выколотыми точками a и b. Пути p и α_1 охватывают точки a и b. Путь $\alpha_2 = p\alpha_1 p^{-1}$ показан пунктирной линией. Наглядно очевидно, что этот путь можно снять с точки a и перевести деформацией в путь α_1, двигая начало вдоль пути p (можно проделать с ниткой). Теорема доказана.

4. Гомотопическая эквивалентность. Во многих случаях открытое многообразие M размерности n (например, область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) можно стянуть по себе к подмножеству меньшей размерности (вообще говоря, не к подмногообразию), для которого вычисление фундаментальной группы π_1 и других инвариантов значительно проще. Чтобы это аккуратно сформулировать, введем важное понятие гомотопической эквивалентности. Пусть заданы два многообразия (топологических пространства) M и N и два непрерывных отображения (гладких

или кусочно гладких в случае многообразий)

$$f\colon M \to N,$$
$$g\colon N \to M.$$

Суперпозиции $f \circ g\colon N \to N$ и $g \circ f\colon M \to M$ отображают многообразия N и M в себя. Для каждого из них имеется тождественное отображение: $1_M\colon M \to M$ и $1_N\colon N \to N$.

Определение 4. Многообразия (пространства) M и N называются *гомотопически эквивалентными* друг другу, если найдутся такие отображения f и g, что суперпозиции $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям 1_N и 1_M соответственно. Если M и N гомотопически эквивалентны, то будем писать $M \sim N$.

Основное свойство гомотопически эквивалентных пространств M и N состоит в следующем: *для любого многообразия (пространства) K множества гомотопических классов отображений $[K, M]$ и $[K, N]$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.*

Доказательству этого факта мы предпошлем следующее замечание. Понятие гомотопической эквивалентности можно слегка модифицировать, введя отмеченные точки. Именно, будем считать, что в M и N отмечены точки x_0 и y_0 соответственно, и потребуем, чтобы отображения f, g и гомотопии, связывающие $f \circ g$ и $g \circ f$ с 1_N и 1_M, переводили отмеченные точки в отмеченные. Можно показать, что для достаточно хороших пространств, как, скажем, многообразий, новое понятие гомотопической эквивалентности не отличается от старого.

Сформулированное выше свойство гомотопически эквивалентных пространств также имеет модифицированную формулировку: *если пространства с отмеченной точкой M и N гомотопически эквивалентны, то для любого пространства K с отмеченной точкой k_0 множества гомотопических классов отображений $K \to M$ и $K \to N$, переводящих отмеченную точку в отмеченную, находятся в естественном взаимно однозначном соответствии.*

Доказательство. Отображения f и g естественным образом порождают отображения множеств гомотопических классов

$$f_*\colon [K, M] \to [K, N] \text{ и } g_*\colon [K, N] \to [K, M].$$

Очевидно, $(fg)_* = (gf)_* = 1$ и $(fg)_* = f_*g_*$, $(gf)_* = g_*f_*$. Отсюда следует, что отображения f_* и g_* взаимно обратны и $[K, M] \approx \approx [K, N]$.

При наличии отмеченных точек доказательство дословно такое же.

5. Примеры. Пример 1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (как и любая стягиваемая область в нем) гомотопически эквивалентно одной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n \sim x_0$.

Доказательство. Вложение $f\colon x_0 \to \mathbb{R}^n$ и постоянное отображение $g\colon \mathbb{R}^n \to x_0$ таковы, что $g \circ f = 1_{x_0}$, а отображение $f \circ g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее все $\mathbb{R}^n$ в x_0, гомотопно тождественному отображению $1_{\mathbb{R}^n}$. Действительно, гомотопия $F(x, t)$ задается формулой $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) = x_0$ и $F(x, t) = (1-t)(x - x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, которое по себе стягивается к точке $x_0 \in A$, доказательство аналогично (проведите его!).

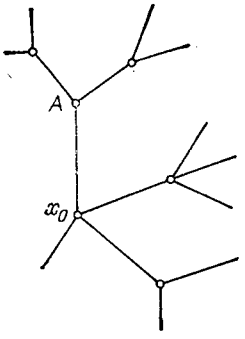


Рис. 98. Дерево $A \sim x_0$.

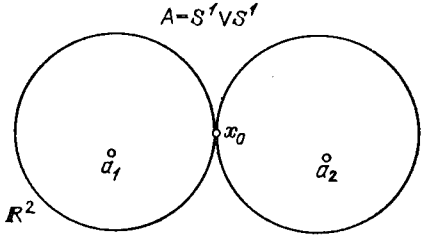


Рис. 99. Букет двух окружностей.

Примеры таких областей дает единичный шар D^n и любая гомеоморфная ему область. Стягиваемым является также дерево A (т. е. граф или одномерный комплекс, не имеющий циклов) (рис. 98). Все эти объекты гомотопически эквивалентны точке и имеют тривиальную фундаментальную группу

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 1, \quad \pi_1(D^n, x_0) = 1, \quad \pi_1(A, x_0) = 1.$$

Пример 2. Рассмотрим область на плоскости $\mathbb{R}^2$, из которой выколото несколько точек $a_1, \ldots, a_n$. Область $\mathbb{R}^2 \setminus (a_1 \cup \ldots \cup a_n)$ гомотопически эквивалентна «букету» окружностей, скрепленных в одной точке (см. рис. 99; на этом рисунке деформация $\mathbb{R}^2 \setminus (a_1 \cup a_2)$ к букету A наглядно очевидна). В частности, для одной точки $a \in \mathbb{R}^2$ область $\mathbb{R}^2 \setminus a$ гомотопически эквивалентна окружности S^1 (задайте гомотопию формулой!).

Пример 3. Область, получающаяся из $\mathbb{R}^3$ удалением одной точки a, гомотопически эквивалентна сфере S^2. Область, получающаяся из $\mathbb{R}^3$ удалением целого набора точек $a_1, \ldots, a_k$, гомотопически эквивалентна букету k сфер S^2 (проверьте!). Область $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1$ гомотопически эквивалентна окружности S^1 (проверьте!).

Пример 4. Рассмотрим сферу $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ и область U в S^3, полученную удалением некоторой окружности S^1 (несамопересекающейся): $S^3 \setminus S^1$.

Задача. Если окружность S^1 незаузлена (т. е. задается, например, уравнением $x^2+y^2=1$ в плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \cup S^3$), то область $U = S^3 \setminus S^1$ гомотопически эквивалентна окружности S^1; область $V = U \setminus (\text{точка}) = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ гомотопически эквивалентна букету окружности S^1 и двумерной сферы S^2 (рис. 100).

Используя полученные результаты, получаем для фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$:

а) $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(D^n) = \pi_1(A) = 1$ (где A — любое стягиваемое по себе к точке множество);

б) $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел или циклическая группа с одной образующей; это следует из гомотопической классификации отображений $S^1 \to S^1$, данной в § 13;

в) $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus a_1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^1)$;

г) $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus (a_1 \cup \ldots \cup a_n)) = \pi_1(S^1_1 \vee \ldots \vee S^1_n)$ (букет окружностей; для $n=2$ — «восьмерка»);

д) $\pi_1(S^3 \setminus S^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (см. пример 4).

Задача. $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) = \mathbb{Z}$ (если окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ незаузлена).

е) Легко доказывается следующее утверждение:

$$\pi_1(S^n, x_0) = 1 \quad \textit{при} \quad n > 1.$$

Доказательство. Рассмотрим кусочно гладкое отображение $f\colon S^1 \to S^n$ при $n>1$. У правильной точки $y_0 \in S^n$ полный прообраз пуст, так как $n>1$. Поэтому образ $f(S^1)$ лежит в $\mathbb{R}^n$ и стягивается к точке. Утверждение доказано.

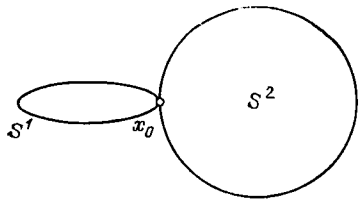


Рис. 100. Букет $S^1 \vee S^2$.

Замечание. Аналогичное рассуждение показывает, что для любого многообразия K размерностей $<n$ множество гомотопических классов $[K, S^n]$ тривиально (состоит из одного элемента).

В дальнейшем мы вычислим фундаментальную группу ряда конкретных многообразий (и пространств): букетов окружностей и тем самым областей на плоскости $\mathbb{R}^2$, замкнутых поверхностей, областей $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$, где окружность S^1 может быть и заузлена.

6. Фундаментальная группа и ориентируемость. Из результатов § 16 следует, что каждый гомотопический класс замкнутого пути на многообразии M с началом и концом x_0 (т. е. элемент из $\pi_1(M, x_0)$) сохраняет или обращает ориентацию репера при переносе, т. е. имеет знак $+1$ или -1. Возникает гомоморфизм

$$\sigma\colon \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2$$

в группу $\mathbb{Z}_2$ из двух элементов: $\sigma(\gamma) = \operatorname{sgn}\gamma = \pm 1$. Для ориентируемых многообразий гомоморфизм σ тривиален; для неориенти-

руемых нетривиален, так как имеются пути, обращающие ориентацию. Получаем

Следствие. *Фундаментальная группа неориентируемого многообразия нетривиальна и имеет ненулевой гомоморфизм* σ *в группу из двух элементов.*

Для листа Мёбиуса имеем $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$, так как лист Мёбиуса стягивается к центральной окружности S^1. Для проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \neq 1$. Ниже будет показано, что $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$.

§ 18. Накрытие и накрывающая гомотопия

1. Определение и фундаментальные свойства накрытий. Понятие накрытия возникает из рассмотрения графиков многозначных функций, у которых число значений постоянно и ветви нельзя разделить.

Рассмотрим регулярное отображение $f\colon M \to N$ многообразий одинаковой размерности, обладающее следующими свойствами.

а) Якобиан отображения f отличен от нуля во всех точках x многообразия M:

$$\det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right) \neq 0,$$

где y^α — координаты около точки $y \in N$, x^β — координаты около точки $x \in M$.

б) Каждая точка $y \in N$ обладает окрестностью $U_j \subset N$, полный прообраз которой $f^{-1}(U_j)$ представляет собой объединение непересекающихся областей: $f^{-1}(U_j) = V_{1j} \cup V_{2j} \cup \ldots$, причем на каждой области V_{kj} отображение $f\colon V_{kj} \to U_j$ является диффеоморфизмом между V_{kj} и U_j. Будем считать, что все многообразие N покрыто конечным или счетным числом таких областей U_j, причем каждая точка $y \in N$ (и даже каждое компактное множество в N) принадлежит лишь конечному числу этих областей. Аналогичное требование накладывается на покрытие многообразия M областями V_{kj}.

Определение 1. Отображение $f\colon M \to N$, обладающее свойствами а) и б), называется *накрытием*. Фактически для определения накрытия достаточно лишь свойства б). Многообразие N называется *базой накрытия*, а M называется *пространством накрытия* (*накрывающим пространством*). *Слоем* накрытия F называется полный прообраз любой точки $F = f^{-1}(y)$. Число областей V_{kj} в полном прообразе $f^{-1}(U_j)$ (или число точек слоя) называется *числом листов*. Если это число конечно и равно m, то накрытие называется m-листным.

Пусть многообразие N связно; накрытие называется *неприводимым*, если многообразие M также связно. Накрытие называется

тривиальным, если многообразие M есть прямое произведение $M = N \times F$, где слой дискретен (совокупность конечного или счетного множества изолированных точек).

Имеет место

Лемма 1. *Число листов накрытия не зависит от выбора точки $y \in N$, если N связно.*

Доказательство. Соединим две точки y_0 и y_1 кусочно гладким несамопересекающимся путем $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на K равных кусков δ_k длины $\frac{1}{K}$, где $\frac{k}{K} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{K}$ в отрезке δ_k, $k = 0, \ldots, K-1$. Число K выберем столь большим, что каждый отрезок пути $\gamma(\delta_k)$ целиком попадает в одну область U_j, указанную в определении накрытия. По определению накрытия полный прообраз $f^{-1}(\gamma(\delta_k))$ есть набор отрезков,

$$f^{-1}(\gamma(\delta_k)) = \delta_{jk,1} \cup \delta_{jk,2} \cup \ldots,$$

где отрезки $\delta_{jk,q}$ лежат целиком в областях $V_{jk,q}$ и изоморфно проектируются в отрезок пути $\gamma(\delta_k)$ при отображении f. Таким образом, в пределах отрезка δ_k полный прообраз каждой точки пути γ меняется непрерывно с временем t, причем его точки не сливаются друг с другом. Поэтому у всех точек пути $\gamma(\delta_k)$ прообразы одинаковы. Дойдя до конца отрезка δ_k, повторим это рассуждение с отрезком δ_{k+1} уже в области U_{jk+1} и т. д. (всего K раз) до конца отрезка $[0, 1]$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 1 вытекает также

Лемма 2. *Полный прообраз кусочно гладкого несамопересекающегося пути γ (с разными концами y_0 и y_1) является прямым произведением отрезка γ на слой F, т. е. объединением непересекающихся отрезков в количестве, равном числу точек слоя: $f^{-1}(\gamma) = \gamma \times F$. Каждый из этих отрезков изоморфно проектируется при отображении f на путь γ в базе N.*

Доказательство. Если точки слоя при $t = 0$, $\gamma(0) = y_0$, занумерованы индексами 1, 2, ..., то введем в множество $F = f^{-1}(\gamma)$ координаты t, n, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, так: при $t = 0$ точкам слоя $F = f^{-1}(y_0) = f^{-1}(\gamma(0))$ придадим координаты $(0, n)$ согласно нумерации точек слоя. Двигаясь вдоль γ, переносим нумерацию точек слоя $F = f^{-1}(\gamma(t))$ по непрерывности, как в доказательстве леммы 1, и придаем им координаты (t, n). Лемма 2 доказана.

Определение 2. Мы скажем, что путь $\mu(t)$ в M *накрывает* путь $\gamma(t)$ в N, если $f(\mu(t)) = \gamma(t)$. Из леммы 2 вытекает

Следствие 1. *Для любого кусочно гладкого пути $\gamma(t)$ в N накрывающий путь $\mu(t)$ в M существует и однозначно определяется одной своей точкой $\mu(t_0) \in M$, где $f\mu(t_0) = \gamma(t_0)$.*

Для доказательства достаточно разбить $\gamma(t)$ на несамопересекающиеся куски и применить лемму 2.

Пусть K — любое многообразие (топологическое пространство), q: $K \to M$ — его отображение на базу накрытия N (пусть кусочно гладкое) и F: $K \times I \to N$ — гомотопия (кусочно гладкая) этого отображения q, т. е. $F(x, 0) = q(x)$ при $x \in K$. Имеет место

Теорема 1 (теорема о накрывающей гомотопии). *Если отображение q накрыто отображением $\tilde{q}$: $K \to M$, т. е. если $f\tilde{q} = q$, то гомотопия F: $K \times I \to N$ отображения q в базе N однозначно накрывается гомотопией $\tilde{F}$: $K \times I \to M$, т. е. $f\tilde{F} = F$ и $\tilde{F}(x, 0) = \tilde{q}(x)$ при $x \in K$.*

Доказательство. При гомотопии F отображения q в базе N каждая точка $q(x)$ движется по пути $\gamma_x(t) = F(x, t)$. При $t = 0$ эта точка $\gamma_x(0) = q(x)$ накрыта точкой $\tilde{q}(x)$. Теорема следует теперь из леммы 2 и следствия 1 вместе с замечанием, что рецепт накрытия пути непрерывно (даже гладко) зависит от начальной точки. Теорема доказана.

2. Простейшие примеры. Универсальное накрытие.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^1$ (прямая) и $N = S^1$. Накрытие определяется так: $f(t) = e^{2\pi i t}$, где t — координата на прямой $\mathbb{R}^1$. Здесь число листов равно ∞.

Пример 2. Пусть $M = S^1$ и $N = S^1$, а накрытие определяется формулой $f(z) = z^n$, где $|z| = 1$. Это накрытие имеет $|n|$ листов. Та же формула $z \mapsto z^n$ определяет накрытие области $M = \mathbb{R}^2 \setminus 0 = \mathbb{C}^*$ над той же областью.

Пример 3. Пусть $M = S^n$ и $N = \mathbb{R}P^n$. Накрытие определяется отображением f: $S^n \to \mathbb{R}P^n$, склеивающим противоположные точки сферы x и $-x$. Здесь число листов равно 2.

Частным случаем этого накрытия является групповой гомоморфизм

$$SU(2) = S^3 \to SO(3) = \mathbb{R}P^3,$$

изучавшийся в части I (см. § 14). Другим примером двулистного накрытия является групповой гомоморфизм

$$S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2) \to SO(4),$$

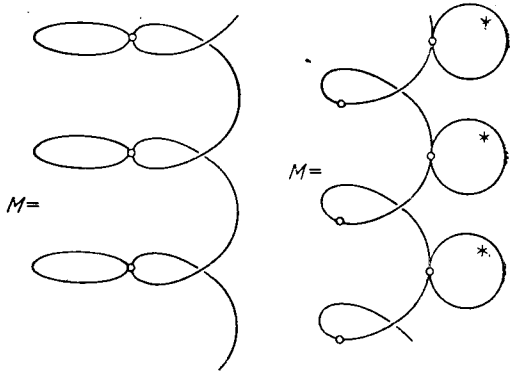
ядро которого состоит из элементов (1, 1) и (−1, −1) (см. часть I, § 14).

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим подгруппу группы $\mathbb{R}^n$ (по сложению), состоящую из векторов с целочисленными координатами. Эта подгруппа обозначается через $\mathbb{Z}^n$. Факторгруппа $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ есть тор T^n (при $n = 1$ — окружность). Отображение f: $\mathbb{R}^n \to T^n$ есть накрытие (проверьте!).

Пример 5. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ и подгруппу G в группе движений плоскости (x, y), порожденную преобразованиями

$$T_1(x, y) = (x, y + 1), \quad T_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right).$$

При отождествлении всех точек, получающихся друг из друга преобразованиями из группы G, получится бутылка Клейна K^2; проекция $f\colon \mathbb{R}^2 \to K^2$ является бесконечнолистным накрытием. Бутылка Клейна K^2 строится склейками, как указано на рис. 101. Проверьте, что образующие группы G связаны соотношением $T_2^{-1}T_1T_2T_1 = 1$. В группе G лежит подгруппа $G' = \mathbb{Z}^2$ индекса 2, порожденная преобразованиями T_1, $T_2^2 \in G$. Подгруппа G' определяет тор T^2 из примера 4, так как $T_2^2(x, y) = (x + 1, y)$. Факторгруппа $\mathbb{R}^2/G'$ есть тор T^2, который накрывает двулистно бутылку Клейна, поскольку в каждой орбите группы G на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеется ровно две орбиты группы $G' = \mathbb{Z}^2$.



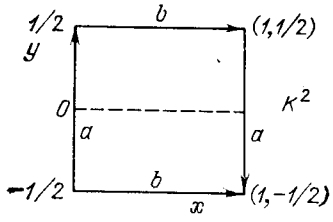


Рис. 101

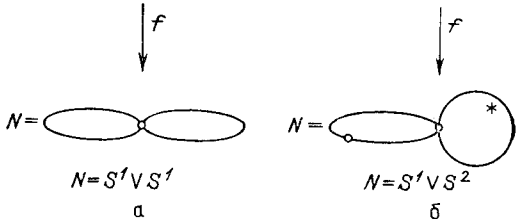


Рис. 102

Пример 6. Укажем наглядно накрытие над восьмеркой (букетом двух окружностей) и над букетом $S^1 \vee S^2$ окружности и сферы (рис. 102, *а* и *б*; отображение f выглядит в обоих случаях как проекция вниз на рисунке). Как видно из рисунка, накрытие над $N = S^1 \vee S^2$ имеет вид (топологически) набора сфер S^2, прикрепленных к прямой $\mathbb{R}^1$ (нарисованной как винтовая линия) в целых точках.

Пример 7. Укажем наглядно еще одно («универсальное») накрытие над восьмеркой $S^1 \vee S^1$ (рис. 103). Здесь M — это бесконечное дерево из «крестов», не имеющее циклов (и поэтому стягиваемое). Из каждой вершины («креста») выходит ровно четыре ребра. Центры крестов (вершины графа) суть прообразы точки $x_0 \in S^1 \vee S^1$. Каждое из ребер переходит либо в цикл a, либо в цикл b. В каждой вершине креста из четырех ребер два переходят в a и два в b.

Для целей вычисления фундаментальной группы мы введем важное

Определение 2. Накрытие $f\colon M \to N$ называется *универсальным*, если $\pi_1(M) = 1$ (т. е. пространство M односвязно).

Из числа приведенных примеров универсальными накрытиями являются:

а) $\mathbb{R}^1 \to S^1$ (пример 1);

б) $S^n \to \mathbb{R}P^n$ при $n \geqslant 2$ (пример 3);

в) $SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$;

г) $\mathbb{R}^n \to T^n$ (пример 4);

д) $\mathbb{R}^2 \to K^2$ (пример 5);

е) $M \to S^1 \vee S^2$ (пример 6, рис. 102, *б*);

ж) дерево $M \to S^1 \vee S^1$ (пример 7).

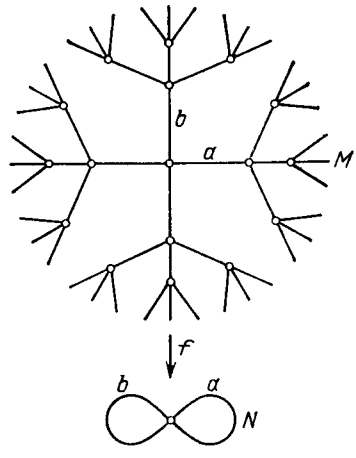


Рис. 103. M — бесконечное дерево из «крестов», не имеющее циклов (и поэтому стягиваемое). Из каждой вершины «креста» выходит ровно четыре ребра.

Остальные накрытия, указанные в примерах, не являются универсальными ввиду неодносвязности накрывающего пространства.

3. Разветвленные накрытия. Римановы поверхности. Продолжим рассмотрение примеров накрытий. Введем следующий класс накрытий.

1. Пусть сначала M и N — замкнутые гладкие многообразия одной размерности n и отображение f *регулярно* (т. е. якобиан отображения f во всех точках отличен от нуля). При этих условиях верна

Теорема 2. *Отображение $f\colon M \to N$ является конечнолистным накрытием.*

Доказательство. По теореме об обратной функции у каждой точки x многообразия M имеется окрестность V_x, в которой отображение f является диффеоморфизмом. В силу компактности многообразия M отсюда вытекает, что прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in M$ состоит из конечного числа точек. Поэтому у точки y многообразия N можно выбрать такую окрестность U_y, что для любой точки $x_i \in f^{-1}(U_y)$ отображение f ее окрестности V_i в U_y является диффеоморфизмом. Таким образом, полный прообраз некоторой окрестности U_y любой точки $y \in N$ распадается в объединение непересекающихся окрестностей $f^{-1}(U_y) = V_1 \cup \ldots \ldots \cup V_m$, и отображение f — диффеоморфизм на каждой из окрестностей V_i. Теорема доказана.

2. Пусть M и N — по-прежнему замкнутые гладкие многообразия одной размерности n, но гладкое отображение $f\colon M \to N$ не

всюду регулярно: на некотором множестве $A \subset M$ якобиан этого отображения обращается в нуль. Вообще говоря, размерность множества A равна $n-1$. Однако бывает, что размерность множества A меньше $n-1$. Важным случаем такого рода является случай, когда n четно, оба многообразия M и N являются комплексными, а отображение $f\colon M \to N$ комплексно аналитично (голоморфно). В этом случае условие обращения в нуль якобиана отображения f задается одним комплексным (аналитическим) уравнением в комплексных локальных координатах. Поэтому размерность множества особенностей A не превышает $n-2$ и множество A не разделяет M на куски.

При этих условиях имеет место

Теорема 3. *Пусть размерность множества A нулей якобиана отображения $f\colon M \to N$ одного гладкого замкнутого связного n-мерного многообразия в другое не превышает $n-2$ ($и$, значит, множество $f(A)$ не разделяет многообразия N). Положим $N' = N \setminus f(A)$ и $M' = M \setminus f^{-1}(f(A))$. Отображение $f\colon M' \to N'$ является накрытием с конечным числом листов, причем M' связно.*

Замечание. Само исходное отображение $f\colon M \to N$ называется *накрытием с ветвлением вдоль $f(A)$*, а множество $f(A)$ называется множеством *точек ветвления*.

Доказательство. Рассмотрим достаточно малое $\varepsilon > 0$ и удалим из N открытую ε-окрестность U_ε множества $f(A)$, а из M ее прообраз $f^{-1}(U_\varepsilon)$. Оставшееся многообразие с краем $M_\varepsilon = M \setminus f^{-1}(U_\varepsilon)$ отображается в $N_\varepsilon = N \setminus U_\varepsilon$, и оба многообразия M_ε, N_ε связны и компактны. Для отображения $f\colon M_\varepsilon \to N_\varepsilon$ доказательство теоремы 2 повторяется буквально. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем теорему 3.

Связность N, M есть единственное использованное в этом доказательстве следствие предположения размерности множества особенностей A.

Важный класс примеров дают неособые римановы поверхности Γ, заданные неособым комплексно аналитическим, в частности алгебраическим, уравнением в (z, w)-плоскости $\mathbb{C}^2$:

$$\Phi(z, w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — многочлены от z. Это уравнение задает риманову поверхность Γ n-значной функции $w(z)$.

Проекция $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$ продолжается до проекции замкнутой римановой поверхности $\widehat{\Gamma}$ (вместе с бесконечно удаленными точками в $\mathbb{C}P^2$) на сферу $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Положим $M = \widehat{\Gamma}$ и $N = S^2$. Множество $f(A)$ есть множество точек ветвления римановой поверхности $\widehat{\Gamma}$. Это — набор точек плоскости $\mathbb{C}$ и, возможно, точка ∞. Обозначим через N' плоскость $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = S^2 \setminus \infty$ с выброшенными точками ветвления z_α. Полный прообраз $f^{-1}(z_\alpha)$ состоит из точек $(z_\alpha, w_{\alpha j}) = P_{\alpha j}$ поверхности Γ таких, что $\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial w}\right|_{z=z_\alpha, w=w_{\alpha j}} = 0$.

Удалим из $\hat{\Gamma}$ полный прообраз $f^{-1}(z_\alpha)$ для всех α и $f^{-1}(\infty)$. Оставшееся многообразие обозначим через M'. Имеем n-листное накрытие $f\colon M' \to N'$.

Замечание. Мы видим, что для отыскания полного прообраза точек ветвления на поверхности Γ нужно решить совместно систему уравнений

$$\Phi(z, w) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(z, w)}{\partial w} = 0.$$

Пример 8. $\Phi(w, z) = w^2 - P_n(z) = 0$ (гиперэллиптическая поверхность). Если корни $P_n(z_\alpha) = 0$ некратны, то Γ — неособая гиперэллиптическая риманова поверхность (см. § 17, а также часть I, § 12). Здесь $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha \right)$, $M' = \Gamma \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha f^{-1}(z_\alpha) \right)$ и $f\colon M' \to N'$ — двулистное накрытие.

Пример 9. $\Phi(w, z) = w^k - P_n(z) = 0$. Здесь все аналогично, но мы получаем над областью $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha \right)$ k-листное накрытие $f\colon M' \to N'$.

Пример 10. Рассмотрим общий многочлен степени n от z, w

$$\Phi(z, w) = w^n + \sum_{i>1} a_i(z)\, w^{n-i},$$

где при каждом i степень многочлена $a_i(z)$ (по z) не превосходит i. В общем случае для многочлена Φ имеется ровно $n(n-1)$ точек ветвления z_α, получающихся из решения системы уравнений $\Phi = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0$ в $\mathbb{C}^2$. (Предполагается, что система уравнений $\Phi = 0$, $\Phi_w = 0$ не вырождена; тогда число точек ветвления равно $n(n-1)$.) Полагая $N' = \mathbb{C}^2 \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha \right)$ и $M' = \Gamma \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha f^{-1}(z_\alpha) \right)$, получаем n-листное накрытие $f\colon M' \to N'$.

Пример 11. Функция $\Phi(z, w)$ является комплексно аналитической (но не алгебраической), и поверхность $\Phi = 0$ неособа в $\mathbb{C}^2$. Точки ветвления z_α в z-плоскости образуют, вообще говоря, счетное множество. Потребуем, чтобы эти точки ветвления были достаточно далеки друг от друга в $\mathbb{C}$. Накрытие над областью $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha z_\alpha \right)$ будет, вообще говоря, бесконечнолистным. Простейший пример дает уравнение $z - e^w = 0$. В этом случае $w = \ln z$, $z_\alpha = 0$; над областью $\mathbb{C} \setminus 0 = N'$ возникает накрытие (логарифмическое ветвление)

$$f\colon M' \to N' = \mathbb{C} \setminus 0.$$

Покажите, что M' диффеоморфно плоскости $\mathbb{C}$.

4. Накрытия и дискретные группы преобразований. Следующий важный класс накрытий связан с так называемыми дискретными группами преобразований многообразий.

Пусть M — гладкое многообразие (топологическое пространство) и G — группа, действующая в M посредством диффеоморфизмов (гомеоморфизмов для общих пространств).

Определение 3. Группа G называется *дискретной группой преобразований*, если для любой точки y многообразия (или пространства) M орбита группы $G(y)$ представляет собой множество точек в M, расположенное дискретно. Это означает, что любая точка $y \in M$ обладает малой окрестностью U такой, что образы $g(U)$ для всех элементов g группы G либо совпадают, либо не пересекаются. Мы потребуем дополнительно, чтобы дискретная группа действовала свободно. Это означает следующее: для любой точки $y \in M$ уравнение $g(y) = y$ имеет единственное решение $g = 1$; при этом указанные выше окрестность U точки y и окрестность $g(U)$ точки $g(y)$ не пересекаются при $g \neq 1$.

Для многообразий часто (хотя и не всегда) будем рассматривать дискретные группы G преобразований, являющиеся движениями некоторой римановой метрики (g_{ab}).

Определение 4. Скажем, что накрытие $f\colon M \to N$ определяется свободно действующей дискретной группой G преобразований $M \to M$, если для любой точки базы $y \in N$ слой $F = f^{-1}(y)$ является орбитой группы G. В этом случае говорят, что N есть факторпространство многообразия M по группе G, и пишут $N = M/G$. Такое накрытие называют *регулярным* или *главным расслоением* с дискретной группой G; ниже, в главе 6, будут изучаться главные расслоения и с недискретными группами G.

Рассматривавшиеся выше примеры 1—9 были накрытиями, определявшимися различными дискретными группами преобразований. Напротив, накрытия примера 10 (общие алгебраические римановы поверхности) и примера 11 (кроме простейшего логарифмического ветвления), вообще говоря, не определяются свободно действующими дискретными группами.

§ 19. Накрытия и фундаментальная группа. Вычисление фундаментальной группы некоторых многообразий

1. Монодромия. Введем важное понятие — группу монодромии накрытия («дискретная группа голономий») или «представление монодромии» σ. Рассмотрим точку y_0 базы N накрытия $f\colon M \to N$ и занумеруем произвольным образом точки слоя $F = f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Рассмотрим замкнутый путь γ на N с началом и концом y_0, представляющий элемент $\gamma \in \pi_1(N, y_0)$. Используя следствие 1 из леммы 18.2, накроем движение точки y_0 вдоль пути γ по параметру t, отправляясь из некоторой точки слоя $x_j \in F$. Пройдя вдоль пути γ и вернувшись снова к точке $y_0 = \gamma(1)$, получим в качестве конечной точки накрывающего пути $\mu(t)$ некоторую точку $x_{\sigma(j)} = \mu(1)$ того же слоя F. Получаем

соответствие $\gamma \mapsto \sigma(\gamma)$, где $\sigma(\gamma)$ есть некоторая перестановка точек слоя F:

$$\sigma(\gamma)\colon x_j \mapsto x_{\sigma(j)}.$$

Из теоремы 18.1 получаем, что перестановка $\sigma(\gamma)$ зависит только от гомотопического класса $\gamma \in \pi_1(N, y_0)$. Очевидно, $\sigma(\gamma^{-1}) = \sigma(\gamma)^{-1}$ и $\sigma(\gamma_1\gamma_2) = \sigma(\gamma_1) \circ \sigma(\gamma_2)$. Таким образом, σ является гомоморфизмом (представлением) фундаментальной группы $\pi_1(N, y_0)$ в группу перестановок точек слоя F (считаем их занумерованными целыми числами). Представление σ называется «монодромией» или дискретной голономией накрытия, а его образ $\sigma(\pi_1(N, y_0))$ — «группой монодромии».

Укажем группу (представление) монодромии накрытий в простейших примерах 1—4 из § 18.

Пример 1. $\mathbb{R}^1 \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Группа $\pi_1(S^1)$ изоморфна $\mathbb{Z}$; обозначим через a естественную образующую этой группы. Прообраз точки $\varphi_0 = 0$ окружности S^1 состоит из целых точек прямой ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Точки слоя $F = f^{-1}(0)$, таким образом, естественно занумерованы целыми числами. Монодромия $\sigma(a)$ представляет собой сдвиг:

$$\sigma(a)\colon n \mapsto n + 1.$$

Пример 2. $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$, $|z| = 1$. Прообраз точки состоит из точек $z_k = \exp(2\pi k/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Преобразование монодромии $\sigma(a)$ есть циклическая перестановка:

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \ldots n-1 \\ 1 & 2 \ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. $S^n \to \mathbb{R}P^n$. Точка $y_0 \in \mathbb{R}P^n$ имеет два прообраза x_1 и x_2. Преобразование $\sigma(a)$ переставляет их: $x_1 \mapsto x_2$, $x_2 \mapsto x_1$. Здесь $a \in \pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ — класс замкнутого пути в $\mathbb{R}P^n$, получающегося проекцией из сферы пути $\tilde{\gamma}$, соединяющего две противоположные точки сферы S^n.

Аналогично $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$ с образующей a, и $\sigma(a)$ есть перестановка двух точек в накрывающем пространстве $SU(2) \times SU(2)$. Аккуратное вычисление этих фундаментальных групп будет проведено ниже.

Пример 4. Группа $\pi_1(T^n)$ изоморфна $\mathbb{Z}^n$ с образующими $a_1, \ldots, a_n$. Образующая a_j получается при отображении $f\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ из прямолинейного отрезка $\tilde{\gamma}_j$, соединяющего точку 0 с точкой $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где координата x^j равна 1, а остальные — нули. Путь $a_j = f(\tilde{\gamma}_j)$ определяет монодромию

$$\sigma(a_j) = \begin{pmatrix} m_1 \ldots & m_j \ldots m_n \\ m_1 \ldots m_j + 1 \ldots & m_n \end{pmatrix},$$

где точки прообраза $F = f^{-1}(0)$ занумерованы целочисленными векторами $(m_1, \ldots, m_n)$.

Мы оставим читателю исследование монодромии в довольно простых примерах 5 и 6 и опишем монодромию в примерах 7 и 10 (см. § 18).

Пример 7. Универсальное накрытие над восьмеркой $N = S^1 \vee S^1$ с образующими $a_1 = a \in \pi_1(S^1 \vee S^1)$, $a_2 = b \in \pi_1(S^1 \vee S^1)$ обладает свободной группой монодромии. Это означает, что все слова вида

$$a_{i_1}^{n_1} a_{i_2}^{n_2} \ldots a_{i_k}^{n_k}$$

для любых k, целых $n_q \neq 0$ и при условии $i_q \neq i_{q+1}$ различны в группе монодромии: преобразование $\sigma(a_1)$ сдвигает все вершины и ребра на единицу «вправо», а $\sigma(a_2)$ — на единицу «вверх». Легко проверить с помощью рис. 103, изображающего это накрытие, что два разных слова в свободной группе переведут начальную вершину x_0 в разные вершины этого дерева.

Пример 10. Для многочлена общего типа $\Phi(z, w)$ суммарной степени n по z, w имеется ровно $n(n-1)$ невырожденных точек ветвления $z_{(jk)}$, j, $k = 1, \ldots, n$, где $k \neq j$. Удалим из $\mathbb{C}$ все точки $z_{(jk)}$ и выберем начальную точку $y_0 \in N'$, где $N' = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{j,k} z_{(jk)} \right)$. Выберем базисные пути $a_{(jk)}$, однократно обходящие точки ветвления $z_{(jk)}$ (рис. 104). Оказывается, что путь $a_{(jk)}$ производит перестановку ровно двух точек слоя $F = f^{-1}(y_0) = x_1 \cup \ldots \cup x_n$. При подходящей нумерации $\sigma(a_{(jk)})$ и $\sigma(a_{(kj)})$ переставляют точку x_j с точкой x_k, оставляя остальные точки неподвижными, причем $\sigma(a_{(jk)})\sigma(a_{(kj)}) = 1$. Таким образом, группа монодромии оказывается полной группой перестановок точек слоя F, состоящей из $n!$ элементов. Тот факт, что $\sigma(a_{(jk)})$ переставляет лишь пару листов, следует из того, что для римановой поверхности общего типа проекция $\Gamma \to \mathbb{C}$ имеет вырождение низшего порядка в точках вырождения (образы их — точки ветвления). Мы оставляем эти утверждения в виде задач.

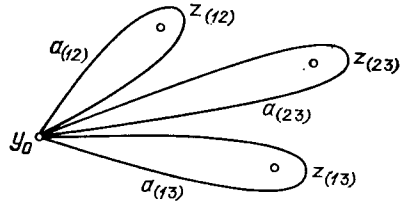


Рис. 104

Что группа монодромии для общих римановых поверхностей Γ совпадает с группой всех перестановок точек слоя, оказывается очень важным. Мы рекомендуем читателю самостоятельно доказать следующее утверждение: *если риманова поверхность* Γ_1 *построена по многозначной алгебраической функции* $w = w(z)$, *являющейся алгебраическим выражением, содержащим только радикалы* $\sqrt[k]{\ }$ *для разных* k (*и, возможно, их суперпозиции с опера-*

циями сложения и умножения), *то группа монодромии поверхности* Γ_1 *разрешима. Напомним, что разрешимая группа содержит абелев* (*коммутативный*) *нормальный делитель* G, *факторгруппа по которому также разрешима.*

Группа перестановок из пяти элементов и более не является разрешимой. Ее единственным нормальным делителем является подгруппа из четных перестановок, которая неабелева. Отсюда следует

Теорема (Абель). *Не существует никакой алгебраической формулы в радикалах, выражающей корни общего многочлена степени* $\geqslant 5$ *через его коэффициенты.*

2. Вычисление фундаментальной группы с помощью накрытий. Рассмотрим накрытие $f\colon M \to N$, точку $y_0 \in N$ и точки ее прообраза $f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Представление монодромии σ заставляет группу $\pi_1(N, y_0)$ действовать в слое $F = f^{-1}(y_0)$ посредством перестановок его точек:

$$\sigma(\alpha)\colon x_j \mapsto x_{\sigma(j)} \qquad (\alpha \in \pi_1(N, y_0)).$$

Рассмотрим группу $\pi_1(M, x_j)$, которая гомоморфно отображается в группу $\pi_1(N, y_0)$ при проекции $f\colon M \to N$. Имеет место

Теорема 1. *Гомоморфизм* $f_*\colon \pi_1(M, x_j) \to \pi_1(N, y_0)$, *индуцированный проекцией* f, *является вложением группы* $\pi_1(M, x_j)$ *в* $\pi_1(N, y_0)$ (*мономорфизмом*). *Подгруппа* $f_*\pi_1(M, x_j)$ *группы* $\pi_1(N, y_0)$ *состоит из тех элементов* $\alpha \in \pi_1(N, y_0)$, *для которых монодромия* $\sigma(\alpha)$ *оставляет на месте точку* x_j. *Для разных точек* x_j, x_k *подгруппы* $f_*\pi_1(M, x_j)$ *и* $f_*\pi_1(M, x_k)$ *сопряжены с помощью любого элемента* $\gamma \in \pi_1(N, y_0)$, *для которого монодромия* $\sigma(\gamma)$ *обладает тем свойством, что* $\sigma(\gamma)\colon x_j \mapsto x_k$, *т. е.* $\gamma^{-1} f_*\pi_1(M, x_j)\,\gamma = f_*\pi_1(M, x_k)$.

Доказательство. Если $\alpha \in \pi_1(M, x_j)$ и $f_*(\alpha) = 1$ в группе $\pi_1(N, y_0)$, то $\alpha = 1$. Действительно, пусть замкнутый путь $\alpha(t)$ с началом и концом в x_j таков, что его проекция $f(\alpha(t)) = \gamma(t)$ стягивается в точку по многообразию N, причем концы пути $\gamma(t)$ в процессе гомотопии все время стоят в точке y_0 (при всех τ); гомотопию обозначим через $F = F(t, \tau)$. Поскольку $f(\alpha(t)) = \gamma(t) = F(t, 0)$, мы находимся в условиях теоремы о накрывающей гомотопии (теорема 18.1). В качестве накрывающей гомотопии, даваемой этой теоремой, получим деформацию в M пути $\alpha(t)$ в точке x_j. Таким образом, гомоморфизм f_* есть вложение (мономорфизм) группы $\pi_1(M, x_j)$ в $\pi_1(N, y_0)$.

Согласно теореме 17.3 перенос начала из x_j в x_k можно осуществить, выбрав путь $\tilde{\gamma}(t)$ с началом $x_k = \tilde{\gamma}(0)$ и $x_j = \tilde{\gamma}(1)$ и полагая $\alpha \mapsto \tilde{\gamma}^*(\alpha) = \tilde{\gamma}^{-1}\alpha\tilde{\gamma}$ (для $\alpha \in \pi_1(M, x_j)$ имеем $\tilde{\gamma}^*(\alpha) \in \pi_1(M, x_k)$). Проекция $\tilde{f}(\gamma)$ в N дает замкнутый путь $\gamma(t) = f(\tilde{\gamma}(t))$, представляющий элемент группы $\pi_1(N, y_0)$, и $\sigma(\gamma)$:

$x_j \mapsto x_k$. Очевидно, после применения проекции f_* наш перенос превратится в изоморфизм $f_*\pi_1(M, x_j) \to f_*\pi_1(M, x_k)$, действующий по формуле

$$f_*(\alpha) \mapsto \gamma^{-1} f_*(\alpha)\,\gamma \in f_*\pi_1(M, x_k),$$

где $f_*(\alpha) \in f_*\pi_1(M, x_j)$. Теорема доказана.

Задачи. 1. Доказать, что для любой подгруппы H фундаментальной группы $\pi_1(N)$ произвольного многообразия N существует накрытие $f\colon M \to N$ с $f_*\pi_1(M) = H$: в частности, у всякого многообразия есть универсальное накрытие.

2. Доказать, что если для накрытий $f\colon M \to N$, $f'\colon M' \to N$ над многообразием N группы $f_*\pi_1(M)$ и $f'_*\pi_1(M')$ совпадают, то накрытия эквивалентны (т. е. существует гомеоморфизм $\varphi\colon M \to M'$ такой, что $f' \circ \varphi = f$).

Замечание. В обеих задачах требование, чтобы N было многообразием, может быть значительно ослаблено. Например, как мы видели выше, универсальным накрытием обладают такие пространства, как восьмерка и букет окружности и двумерной сферы (см. рис. 102 и 103).

Теорема 2. *Если накрытие $f\colon M \to N$ определяется свободно действующей дискретной группой Γ преобразований $M \to M$ и многообразие (пространство) M односвязно (т. е. $\pi_1(M) = 1$), то*

$$\pi_1(N, y_0) \approx \Gamma.$$

Доказательство. Выберем точку $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ и установим взаимно однозначное соответствие между точками слоя $f^{-1}(y_0)$ (они имеют вид gx_0 с $g \in \Gamma$ и элементами группы $\pi_1(N, y_0)$). Для этого накроем произвольный путь $\gamma_1 \in \pi_1(N, y_0)$, взяв в качестве начала накрывающего пути точку x_0. Конец накрывающего пути лежит в точке $x_1 \neq x_0$, и $\sigma(\gamma_1)\colon x_0 \mapsto x_1$. Рассмотрим элемент $g_1 \in \Gamma$ такой, что $g_1(x_0) = x_1$. Установим соответствие $\gamma_1 \leftrightarrow g_1$. Это соответствие взаимно однозначно (если $\gamma_1 \to g_1$ и $\gamma_2 \to g_1$, то путь $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ таков, что $\sigma(\gamma_1^{-1}\gamma_2)\colon x_0 \mapsto x_0$; поэтому ввиду односвязности M и теоремы 1 этого параграфа $\gamma_1 = \gamma_2$). Установленное выше взаимно однозначное соответствие $\Gamma \leftrightarrow \pi_1(N)$ сохраняет закон умножения в обеих группах, поскольку преобразование $\sigma(\gamma)$ точек слоя в точности совпадает с действием группы Γ на слое. Теорема доказана.

Обобщением теоремы 2 является

Теорема 3. *Если накрытие $f\colon M \to N$ регулярно, т. е. определяется свободно действующей дискретной группой Γ преобразований $M \to M$ («главное расслоение»), то группа Γ перестановок слоя $F = f^{-1}(y_0)$ совпадает с группой монодромии $\sigma(\pi_1(N, y_0))$, действующей на слое F. При этом $f_*\pi_1(M, x_j)$ есть нормальный делитель группы $\pi_1(N, y_0)$ и группа монодромии («дискретная группа голономии») совпадает с факторгруппой $\pi_1(N, y_0)/f_*\pi_1(M, x_j)$ для любой точки x_j слоя F.*

Доказательство. Совпадение группы Γ с группой монодромии вытекает из рассуждения, идентичного доказательству теоремы 2. При этом устанавливается соответствие между элементами группы Γ, точками слоя F и элементами группы $\sigma(\pi_1(N, y_0))$. Отсюда следует, что образ $f_*\pi_1(M, x_j)$ не зависит от $x_j \in F$ и потому является нормальным делителем в $\pi_1(N, y_0)$ согласно теореме 1 этого параграфа. По определению монодромии слой F совпадает с $\pi_1(N, y_0)/f_*\pi_1(M, x_j)$ как множество. В данном случае $F \approx \Gamma$ и F является группой $\pi_1(N, y_0)/f_*\pi_1(M, x_j)$, совпадающей с группой монодромии. Теорема доказана.

Задача. Докажите, что для общих (нерегулярных) накрытий группа монодромии изоморфна факторгруппе $\pi_1(N, y_0)/P$ по нормальному делителю $P = \bigcap\limits_j f_*\pi_1(M, x_j)$.

Примеры.

1. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ действует сдвигами $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ на целые числа (см. пример 1 из § 18), поскольку S^1 является базой накрытия $\mathbb{R}^1 \mapsto S^1$, определяемого действием дискретной группы $\Gamma = \mathbb{Z}$.

2. $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ при $n > 1$ ввиду наличия накрытия $S^n \to \mathbb{R}P^n$ с группой $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, ненулевой элемент которой есть отражение $x \mapsto -x$ сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (при $n > 1$ сфера односвязна; см. пример 3 из § 18).

3. $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ ввиду наличия накрытия $\mathbb{R}^n \to T^n$ с группой Γ параллельных переносов на целочисленные векторы (см. пример 4 из § 18).

4. $\pi_1(K^2)$ имеет две образующие T_1 и T_2, удовлетворяющие соотношению

$$T_2^{-1}T_1T_2T_1 = 1.$$

Здесь подразумевается накрытие $\mathbb{R}^2 \to K^2$, а группа Γ порождена движениями $T_1(x, y) = (x, y+1)$, $T_2(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right)$ (см. пример 5 из § 18).

5. $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ — свободная группа с двумя образующими. Это устанавливается с помощью универсального накрытия, описанного в примере 7 из § 18. Аналогично можно показать, что $\pi_1(S^1 \vee \ldots \vee S^1)$ для букета k окружностей есть свободная группа с k образующими. Следовательно, фундаментальные группы плоских областей вида $\mathbb{R}^2 \setminus (x_1 \cup \ldots \cup x_k)$ (из плоскости выколото k точек $x_1, \ldots, x_k$) являются свободными. Эти области стягиваются к (гомотопически эквивалентны) букетам окружностей $S^1 \vee \ldots \vee S^1$ (k штук).

6. $\pi_1(S^1 \vee S^2) = \mathbb{Z}$. Это доказывается с помощью универсального накрытия, описанного в примере 6 из § 18. Пространство M имеет вид прямой $\mathbb{R}^1$, у которой в целых точках прикреплены сферы $S^2_{(n)}$. Группа Γ действует сдвигами по прямой на целое

число, переводящими сферы $S^2_{(n)}$ друг в друга. Пространство $S^1 \vee S^2$ гомотопически эквивалентно области $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$, если окружность незаузлена (или $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup x_0)$).

3. Простейшая гомологическая группа. Определение 1. *Одномерной группой гомологий* многообразия (пространства) M называется факторгруппа его фундаментальной группы по коммутанту (коммутированная группа π_1). Эта группа обозначается через $H_1(M)$:

$$H_1(M) = \pi_1(M)/[\pi_1, \pi_1].$$

Групповой закон в группе $H_1(M)$ обычно записывается как сложение: $a \to [a]$, $ab \to [a]+[b]$ при гомоморфизме $\pi_1 \to H_1$.

Рассмотрим интегралы от замкнутых 1-форм на многообразии N. Если форма ω замкнута, $d\omega = 0$, то интеграл по замкнутому пути γ с началом и концом в точке y_0 одинаков для гомотопных замкнутых путей. Следовательно, интеграл от замкнутой формы ω дает линейную функцию на группе π_1:

$$\gamma \mapsto \oint_\gamma \omega.$$

Очевидные свойства интеграла показывают, что

$$\oint_{\gamma_1\gamma_2} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega + \oint_{\gamma_2} \omega = \oint_{\gamma_2\gamma_1} \omega,$$

$$\oint_{\gamma^{-1}} \omega = -\oint_\gamma \omega.$$

Отсюда следует, что интеграл есть линейная функция на группе $H_1(N) = \pi_1(N)/[\pi_1, \pi_1]$ с вещественными или комплексными значениями, а известная процедура вычисления интеграла путем «деформации контура» есть фактически замена контура γ на эквивалентный ему в группе гомологий. Пусть в группе $H_1(N)$ есть периодический элемент («класс гомологий») $[\gamma] \in H_1(N)$, для которого найдется целое число m такое, что $m[\gamma] = 0$ в группе $H_1(M)$. Тогда интеграл $\oint_{[\gamma]} \omega$ равен нулю для замкнутой формы ω.

Действительно,

$$\oint_{m[\gamma]} \omega = m \oint_\gamma \omega = 0.$$

Поэтому $\oint_{[\gamma]} \omega = 0$.

Вследствие этого интегралы от замкнутых форм определены как линейные функции на группе $\tilde{H}_1(N)$, полученной из $H_1(N)$ факторизацией по кручению (приравниванием нулю всех элемен-

тов конечного порядка). Группа $\tilde{H}_1$ называется *приведенной группой гомологий.*

Примеры.

а) Для плоской области $N = \mathbb{R}^2 \setminus (x_1 \cup \ldots \cup x_k)$: группа $\pi_1(N)$ свободна, а группа $H_1(N)$ не имеет кручения и тем самым есть свободная абелева группа (решетка) $\mathbb{Z}^k$.

б) Для $\mathbb{R}P^n$: группа $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ есть $\mathbb{Z}_2$, группа $H_1(\mathbb{R}P^n)$ есть также $\mathbb{Z}_2$ и группа $\tilde{H}_1(\mathbb{R}P^2)$ тривиальна.

в) Для бутылки Клейна K^2: группа $\pi_1(K^2)$ имеет образующие T_1, T_2, удовлетворяющие соотношению $T_2^{-1}T_1T_2T_1 = 1$; в группе $H_1(K^2)$ это соотношение принимает вид

$$2[T_1] = 0,$$

и потому элемент $[T_1] \sim 0$ в группе $\tilde{H}_1(K^2)$; группа $\tilde{H}_1(K^2)$ изоморфна $\mathbb{Z}$.

Итак, интеграл от замкнутой формы дает линейную функцию на «приведенной группе гомологий» $\tilde{H}_1(N)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Иногда полезны линейные функции с другими значениями, например так называемые «характеры» со значениями в вещественных числах mod 1, т. е. в окружности. Здесь уже группы $\tilde{H}_1(N)$ недостаточно — приходится рассматривать всю группу гомологий $H_1(N)$. Примером может служить гомоморфизм ориентации (в мультипликативной записи)

$$[\sigma\colon \pi_1(N) \to (\pm 1) = \mathbb{Z}_2$$

(см. § 17). Фактически этот гомоморфизм сводится к $H_1(N)$. Для $\mathbb{R}P^2$ и K^2 этот гомоморфизм нетривиален, как и для всех неориентируемых многообразий (см. конец § 17).

а) Для $\mathbb{R}P^2$ имеем $\pi_1 = \mathbb{Z}_2$ и $\sigma(a) = -1$ при $a \neq 1$.

б) Для K^2 группа $\pi_1(K^2)$ порождается элементами T_1, T_2 и $2[T_1] = 0$ в группе $H_1(K^2)$. Гомоморфизм ориентации таков:

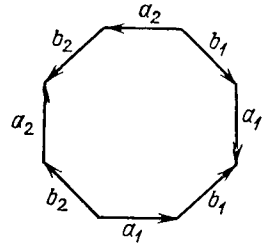
$$\sigma(T_1) = +1, \quad \sigma(T_2) = -1.$$

Вычисление фундаментальных групп дополнений в $\mathbb{R}^3$ к заузленным окружностям будет дано ниже (см. § 26).

Задачи. 1. Ориентируемая замкнутая поверхность M_g^2 (сфера с g ручками) получается из $4g$-угольника склеиванием пар противоположных сторон (см. рис. 105 для $g = 2$). Доказать, что группа $\pi_1(M_g^2)$ задается образующими a_1, b_1, ..., a_g, b_g и соотношением

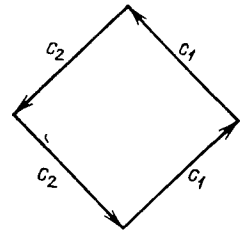
$$\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = 1.$$

2. Неориентируемая поверхность N^2_μ клеится так, как указано на рис. 106. Доказать, что $\pi_1(N^2_\mu)$ задается образующими $c_1, \ldots, c_\mu$ и соотношением $c_1^2 c_2^2 \ldots c_\mu^2 = 1$.



$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1$

Рис. 105



$c_1^2 c_2^2 = 1$

Рис. 106

3. Вычислить фундаментальную группу многообразия единичных линейных элементов поверхности M^2_g.

§ 20. Дискретные группы движений плоскости Лобачевского

Выше (в части I) мы описали дискретные группы движений евклидовой плоскости и дискретные группы вращений трехмерного евклидова пространства. Мы указали на тесную связь этих групп с кристаллическими решетками на плоскости и в пространстве. Аналогичную классификацию можно провести и для дискретных групп движений плоскости Лобачевского, снабженной стандартной метрикой. В настоящем параграфе мы предъявим это описание, опустив доказательства ввиду большей сложности рассуждений, чем это имело место в евклидовом случае. Описание дискретных групп движений трехмерного пространства Лобачевского — это еще более сложная задача, которой мы не будем здесь касаться. Интерес к дискретным группам движений плоскости Лобачевского обусловлен для нас тем, что эти группы тесно связаны с двумерными замкнутыми многообразиями и их фундаментальными группами. При описании двумерных поверхностей мы отметили, что тор, например, можно представить как факторпространство плоскости (пространства нулевой кривизны) по действию дискретной группы $\mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$, где образующие a и b определяют трансляции на векторы вида $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Поскольку эта группа свободно действует на $\mathbb{R}^2$, то она изоморфна фундаментальной группе тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Отметим, что сфера S^2 не может быть представлена как факторпространство плоскости по действию какой-либо дискретной группы. Это связано, в частности, с тем, что сфера — односвязное многообразие,

и ее гауссова кривизна положительна. Оказывается, что, например, ориентируемые поверхности рода >1 можно представить в виде факторпространства плоскости Лобачевского по действию дискретной группы, изоморфной фундаментальной группе поверхности. При этом указанная дискретная группа будет действовать как подгруппа группы изометрий стандартной метрики Лобачевского, а потому фактормногообразие (действие группы будет свободным, без неподвижных точек) автоматически снабжается индуцированной метрикой постоянной отрицательной кривизны. В случае тора фундаментальная группа $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ также действовала на евклидовой плоскости как подгруппа группы изометрий.

Начнем с геометрической классификации дискретных групп движений плоскости Лобачевского и связи этих групп с выпуклыми многоугольниками на плоскости Лобачевского.

Основными моделями плоскости Лобачевского, которыми мы будем пользоваться, будут следующие две модели: верхняя полуплоскость (на комплексной плоскости), снабженная метрикой $dl^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, и единичный круг, снабженный метрикой $dl^2 = \dfrac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1 - r^2)^2}$. Напомним, что Γ называется дискретной группой преобразований (в нашем случае — плоскости Лобачевского), если для любой пары точек $x, y \in L_2$ (через L_2 мы обозначаем плоскость Лобачевского) существуют такие открытые окрестности этих точек (например, диски с центром в точках x и y), что множество преобразований из группы Γ, переводящих окрестность точки x в множество, имеющее непустое пересечение с окрестностью точки y, конечно. Напомним, что мы считаем все преобразования из Γ диффеоморфизмами плоскости Лобачевского. Если Γ_x — стационарная подгруппа точки x (т. е. множество всех преобразований группы Γ, оставляющих на месте точку x), то Γ_x — конечная подгруппа в Γ. Верно и обратное утверждение: если Γ — некоторая группа изометрий плоскости Лобачевского, действующая так, что все орбиты этого действия дискретны и для любой точки плоскости ее стационарная подгруппа конечна, то тогда Γ — дискретная группа.

Определение 1. Пусть Γ — дискретная группа преобразований плоскости Лобачевского, являющаяся подгруппой группы изометрий. Подмножество D плоскости Лобачевского называется *фундаментальной областью* для группы Γ, если: (1) D — замкнутое множество; (2) орбита $\Gamma(D)$ подмножества D совпадает со всей плоскостью Лобачевского; (3) покрытие плоскости L_2 множествами $\gamma(D)$, $\gamma \in \Gamma$, таково, что с достаточно малой окрестностью произвольной точки плоскости L_2 пересекается лишь конечное число множеств вида $\gamma(D)$; (4) образ множества внутренних точек фундаментальной области D при действии любого пре-

образования из Γ, отличного от единичного, не пересекается с множеством внутренних точек фундаментальной области. Формально это свойство можно записать так: $\gamma(\operatorname{Int} D) \cap \operatorname{Int} D = \varnothing$ при $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$, где $\operatorname{Int} D$ — множество внутренних точек области D, т. е. $\operatorname{Int} D = D \setminus \partial D$, где ∂D — граница D.

Легко доказать, что в качестве фундаментальной области на плоскости Лобачевского для произвольной дискретной группы Γ можно выбрать выпуклый многоугольник с конечным числом сторон (проверьте это!).

Наша цель — дать описание дискретных групп движений плоскости Лобачевского. Так как мы уже выяснили, что группа изометрий плоскости Лобачевского изоморфна $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, то, следовательно, эта задача эквивалентна перечислению дискретных подгрупп в группе $SL(2, \mathbb{R})$, т. е. в группе матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с вещественными элементами и определителем, равным единице: $ad - bc = 1$. Напомним, как действует группа $SL(2, \mathbb{R})$ на L_2. Если $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ и z — точка плоскости Лобачевского L_2, реализованной как верхняя полуплоскость, то $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Так как $\operatorname{Im} g(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}$, то L_2 переходит в себя при этих преобразованиях. Что все преобразования указанного вида — изометрии L_2, проверяется непосредственно; поэтому группа $SL(2, \mathbb{R})$ гомоморфно отображается в группу изометрий L_2; ядром этого отображения служит центр $\{\pm 1\} \approx \mathbb{Z}_2$ группы $SL(2, \mathbb{R})$, а образом — связная компонента единицы группы изометрий L_2; следовательно, эта компонента изоморфна факторгруппе $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$.

Группы, дискретно действующие на плоскости Лобачевского, естественно возникают при классификации одномерных комплексно аналитических многообразий. Любое связное комплексно аналитическое многообразие X представляется в виде $X = \tilde{X}/\Gamma$, где $\tilde{X}$ — односвязное аналитическое многообразие (универсальная накрывающая), а группа Γ дискретно и свободно действует на многообразии $\tilde{X}$ как группа его комплексных автоморфизмов; при этом группа Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(X)$ многообразия X. Во всех таких представлениях многообразия X группы Γ сопряжены в группе всех автоморфизмов многообразия $\tilde{X}$.

Оказывается, что с точностью до биголоморфной эквивалентности имеется всего три связных односвязных одномерных аналитических многообразия. Это: 1) проективная прямая $\mathbb{C}P^1$, т. е. одномерное комплексное проективное пространство; 2) аффинная прямая $\mathbb{C}^1$, т. е. плоскость комплексной переменной z; 3) внутренность единичного круга $\{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| < 1\}$ на комплексной плоскости.

Таким образом, задача сводится к описанию групп автоморфизмов, дискретно и свободно действующих на этих трех перечисленных выше многообразиях. Преобразования группы Γ будем считать комплексно аналитическими преобразованиями, т. е. автоморфизмами комплексной структуры, заданной на многообразии X.

Предложение. 1) *Любой автоморфизм многообразия* $\mathbb{C}P^1$ *имеет неподвижную точку.* 2) *Дискретно и свободно действующая группа* Γ *автоморфизмов многообразия* $\mathbb{C}^1$, *для которой многообразие* $\mathbb{C}^1/\Gamma$ *компактно, состоит из трансляций* $z \mapsto z + a$, *где* a *пробегает векторы некоторой двумерной решетки на* $\mathbb{C}^1$. 3) *Все автоморфизмы единичного круга имеют следующий вид:* $z \mapsto \theta \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, *где* $|\theta| = 1$, $|\alpha| < 1$; *в частности, это — группа движений метрики Лобачевского в модели Пуанкаре.*

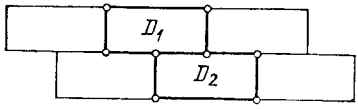
Пусть $X = L_2$ — плоскость Лобачевского и Γ — произвольная дискретная группа движений L_2; пусть D — выпуклый фундаментальный многоугольник действия группы Γ. Рассмотрим многоугольники вида $\{\gamma D\}$, $\gamma \in \Gamma$; они не накладываются друг на друга (см. выше) и покрывают всю плоскость Лобачевского. Элементы этого разбиения плоскости Лобачевского на многоугольники обычно называются «ячейками». Две ячейки называются смежными, если их пересечение есть одномерное подмножество, т. е. кривая на плоскости. Можно считать, что если D_1 и D_2 — две смежные ячейки, то $D_1 \cap D_2$ есть общая сторона этих двух многоугольников. Для того чтобы этого добиться, достаточно добавить в фундаментальном многоугольнике некоторое число вершин, угол при которых равен π; этим можно добиться того, что пересечение любых смежных ячеек происходит в точности по общей стороне (рис. 107). Для любой стороны a ячейки D существует и единственна ячейка D_1, смежная с D по стороне a; при этом ячейка D_1 получается из ячейки D применением преобразования $\gamma \in \Gamma$; обозначим это преобразование через $\gamma(a)$. Так как при преобразовании $\gamma(a)$ область D переходит в D_1, то, следовательно, существует некоторая сторона $a' \in D$ такая, что $\gamma(a)a' = a$ (область D пересекается со своим образом при действии $\gamma(a)$). Отсюда имеем $\gamma(a') = (\gamma(a))^{-1}$ и, в частности, $a'' = (a')' = a$ (рис. 108).

Сопоставим каждой стороне a соответствующую ей при указанном отображении сторону a'; возникает инволютивное преобразование (т. е. преобразование, квадрат которого есть тождественное преобразование) множества сторон области D. Конечно, при этом может оказаться, что $a' = a$, но тогда $(\gamma(a))^2 = e$ и $\gamma(a)$ есть, следовательно, отражение области D относительно стороны a или поворот на угол, равный π, относительно середины стороны a. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Ячейки* $\gamma_1 D$ *и* $\gamma_2 D$ *являются смежными тогда и только тогда, когда* $\gamma_2 = \gamma_1 \gamma(a)$.

Последовательность ячеек $D = D_0, D_1, \ldots, D_k$ таких, что ячейки D_{i-1} и D_i являются смежными при $i = 1, 2, \ldots, k$, называется *цепью* ячеек.

Для ячейки D_i существует и единственно движение γ_i такое, что $\gamma_i D = D_i$. При этом возникает индуцированное отображение сторон фундаментального многоугольника на стороны ячейки; следовательно, стороны ячейки D_i можно обозначать так же, как и стороны многоугольника $D_0 = D$.



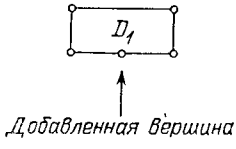


Рис. 107

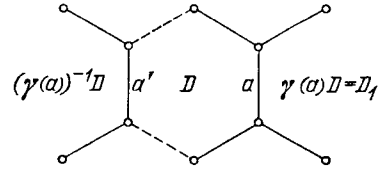


Рис. 108

В цепи ячеек $D = D_0, D_1, \ldots, D_k$ (пусть $D_i = \gamma_i D_0$) многоугольники D_{i-1} и D_i смежные, а потому в силу леммы имеем $\gamma_i = \gamma_{i-1}\gamma(a_i)$ и $\gamma_k = \gamma(a_1)\gamma(a_2)\ldots\gamma(a_k)$. Итак, цепи ячеек соответствует последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ сторон ячейки D. Итак, доказана

Теорема 1. *Группа* Γ *порождается элементами* $\gamma(a)$, *где* a *пробегает все стороны фундаментального многоугольника.*

Теперь мы опишем соотношения в этой группе. Пусть $\gamma(a_1)\ldots\gamma(a_k) = e$; рассмотрим соответствующую цепь; тогда последним элементом ее будет сама ячейка D — исходный фундаментальный многоугольник (рис. 109). Итак, соотношениям в группе Γ соответствуют замкнутые цепи, которые обычно называются *циклами*. Соотношения типа $\gamma(a)\gamma(a') = e$ будем называть *элементарными соотношениями первого типа*. Эти соотношения порождают цикл D_0, D_1, D_0.

Рассмотрим некоторую вершину ячейки D и рассмотрим все ячейки, содержащие эту вершину; тогда последовательность этих ячеек образует цикл (рис. 110). Такой цикл называется элементарным циклом второго типа, а соответствующее ему соотношение — элементарным соотношением второго типа.

Теорема 2. *Элементарные соотношения первого и второго типов составляют определяющую систему групповых соотношений для образующих* $\gamma(a)$ *дискретной группы* Γ, *т. е. всякое соотношение является их следствием.*

Мы полностью описали структуру любой дискретной группы сохраняющих ориентацию движений плоскости Лобачевского (такие группы называются *фуксовыми*).

Теперь рассмотрим обратную задачу: как восстановить дискретную группу Γ по данному фундаментальному многоугольнику. Пусть на плоскости Лобачевского задан выпуклый многоугольник с конечным числом сторон, не имеющий пока бесконечно удаленных вершин. Это означает следующее. Многоугольник может быть

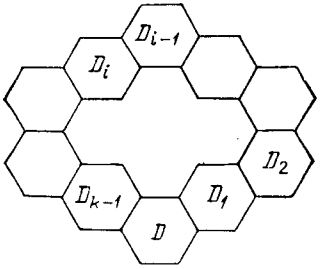


Рис. 109

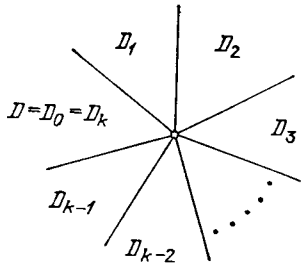


Рис. 110

неограниченным, «выходя на бесконечность» (см., например, рис. 111). Поскольку точки абсолюта не принадлежат плоскости Лобачевского, то в том случае, когда прямая выходит на абсолют так, как это показано на рис. 111 для прямой AB, мы считаем, что на ней нет вершины, расположенной «на бесконечности». С другой стороны, если две прямые выходят на бесконечность и попадают в одну точку абсолюта (рис. 112), то тогда будем говорить, что у многоугольника есть бесконечно удаленная вершина.

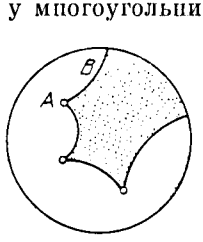


Рис. 111

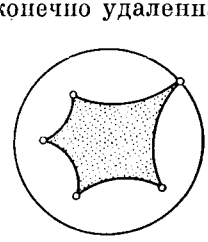


Рис. 112

Возможно, что углы при некоторых вершинах многоугольника равны π.

Пусть задана инволютивная перестановка сторон этого многоугольника: $a \mapsto a'$. Для любой стороны a существует единственное движение $\gamma(a)$ такое, что $\gamma(a)a' = a$, $\gamma(a)D \cap D = a$. Пусть выполняются следующие два условия: 1) $\gamma(a)\gamma(a') = e$; 2) для любой вершины A многоугольника D существует такая последовательность сторон $a_1, \ldots, a_k$, что $\gamma(a_1)\gamma(a_2) \ldots \gamma(a_k) = e$, и последовательность многоугольников D, $\gamma(a_1)D$, $\gamma(a_1)\gamma(a_2)D, \ldots, \gamma(a_1)\ldots\gamma(a_k)D$ образует обход вокруг этой вершины A в том смысле, что все они содержат вершину A и каждый элемент этой цепи

смежен с предыдущими; кроме того, они не перекрываются и покрывают (в совокупности) некоторую окрестность точки A.

Теорема 3. *Если выполняются указанные выше условия* 1), 2), *то движения* $\gamma(a)$ *порождают дискретную группу движений плоскости Лобачевского, для которой область* D *является фундаментальной областью.*

Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. Пусть D есть многоугольник, вообще не имеющий вершин (см., например, рис. 113). Рассмотрим движения $\gamma(a)$, $\gamma(a')$ такие, что $\gamma(a)a' = a$, $\gamma(a)\gamma(a') = e$, $\gamma(a)D \cap D = a$. Такие движения всегда существуют: прямая переходит в прямую и данная полуплоскость — в данную полуплоскость. Эти движения порождают дискретную подгруппу в группе изометрий. Если никакая сторона многоугольника без вершин не соответствует самой себе, то получается, очевидно, свободная группа. Наличие сторон, соответствующих самим себе (например, такая сторона изображена на рис. 113), дает нетривиальное соотношение в группе.

Пример 2. Группа, порожденная отражениями; $a' = a$ для любого a и $\gamma(a)$ — отражение относительно стороны a. Эти элементы имеют порядок два.

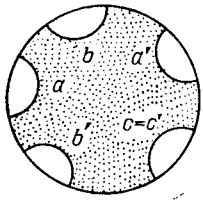


Рис. 113

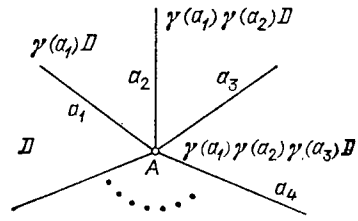


Рис. 114

Рассмотрим теперь случай, когда фундаментальный многоугольник содержит бесконечно удаленную вершину (оставаясь при этом конечным, т. е. имеющим конечное число вершин). Пусть D — такой конечный многоугольник и $a \mapsto a'$ — инволютивное преобразование его сторон; $\gamma(a)$ — такие движения плоскости Лобачевского, что $\gamma(a)a' = a$; $\gamma(a)D \cap D = a$; $\gamma(a)\gamma(a') = e$. Пусть A — вершина многоугольника D; тогда из рис. 114 видно, как получить последовательность сторон $a_1, \ldots, a_q, \ldots$ При этом, конечно, возникает и последовательность вершин, так как вершина A смещается при указанных преобразованиях. Таким образом, возникают две последовательности: $a_1, a_2, \ldots$ и $A, A_1, A_2, \ldots$ (здесь A_1 — образ вершины A при отображении $\gamma(a_1)$ и т. д.). Будем говорить, что эти две последовательности порождены вершиной A. Так как рассматриваемый многоугольник конечный (т. е. имеет конечное число сторон; см. выше), то обе эти после-

довательности содержат конечное число элементов и обе они оказываются периодическими. Пусть p — наименьший период последовательности сторон; тогда число p также будет периодом последовательности вершин A, A_1, A_2, ...; число p называется периодом вершины A.

Эти две последовательности можно продолжить и в другую сторону, поскольку они порождены действием элементов группы. При этом свойство периодичности, конечно, сохраняется.

Пусть p — период вершины A; это означает, что последовательность вершин содержит в себе вершину A_p, которая совпадает с A. Скажем, что вершины A_1, A_2, ..., A_{p-1} составляют цикл вершин (порожденный вершиной A). Все это можно проделать, конечно, и для бесконечно удаленной вершины.

Предположим теперь, что движения $\gamma(a)$ порождают дискретную группу, для которой многоугольник D является фундаментальным. Пусть A — обычная вершина многоугольника (т. е. не бесконечно удаленная); тогда цепь ячеек, обходящая вершину A, должна замкнуться, а потому существует такое натуральное число m, что $[\gamma(a_1)\gamma(a_2)\dots\gamma(a_p)]^m = e$. (Период p может быть еще недостаточен для того, чтобы ячейки обошли вокруг вершины A, так как возвращение вершины A в исходное положение при последовательных сдвигах указанного выше типа еще не гарантирует того, что мы обошли все ячейки, примыкающие к вершине A.)

Число m называется кратностью вершины (не путать с периодом вершины!). Кроме того, чтобы обойти вершину A один раз, необходимо выполнение следующего условия: $\sum_{i=1}^{p}(\angle A_i) = \frac{2\pi}{m}$, где $\angle A_i$ — величина угла многоугольника D при вершине A_i. Если потребовать, чтобы преобразование $[\gamma(a_1)\gamma(a_2)\dots\gamma(a_p)]^m$ сохраняло ориентацию, то соотношение $[\gamma(a_1)\gamma(a_2)\dots\gamma(a_p)]^m = e$ вытекает из указанного выше соотношения для углов. Легко проверяется, что соотношения, соответствующие вершинам одного и того же цикла (или противоположному обходу вокруг вершины A), эквивалентны.

С бесконечно удаленной вершиной никакой обход вокруг нее не связан (что очевидно), и соотношения поэтому не возникает. Но имеет место

Лемма 2. *Для бесконечно удаленной вершины преобразование $\gamma(a_1)\gamma(a_2)\dots\gamma(a_p)$ является параболическим движением, т. е. таким, что соответствующая матрица (дробно-линейного преобразования) второго порядка с вещественными коэффициентами подобна матрице* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Теорема 4. *Пусть задан конечный многоугольник D, а также инволютивная перестановка его сторон, и пусть заданы*

движения $\gamma(a)$ *для каждой стороны* a *такие, что* $\gamma(a)a' = a$, $(\gamma(a)D) \cap D = a$. *Пусть также для каждой вершины* A *этого многоугольника выполняется условие* $\sum_{i=1}^{p}(\angle A_i) = \frac{2\pi}{m}$ *и преобразование* $[\gamma(a_1)\dots\gamma(a_p)]^m$ *сохраняет ориентацию* (*напомним: отсюда вытекает соотношение* $[\gamma(a_1)\dots\gamma(a_p)]^m = e$); *предположим далее, что для любой бесконечно удаленной вершины преобразование* $\gamma(a_1)\dots\gamma(a_p)$ *является параболическим движением плоскости Лобачевского; тогда оказывается, что группа, порожденная всеми элементами* $\gamma(a)$, *дискретна и область* D *является ее фундаментальной областью* (*фундаментальным многоугольником*).

Пример 1. Группа, порожденная отражениями (рис. 115, *а*). Здесь период вершины A равен 2; кратность этой вершины равна m.

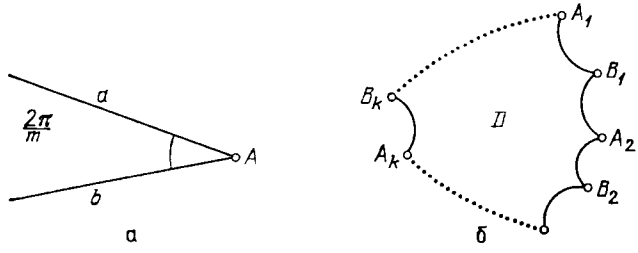


Рис. 115

Пример 2. Группа, порожденная поворотами (рис. 115, *б*). Пусть $\angle A_s = \frac{2\pi}{m_s}$ с целыми m_s; пусть стороны, примыкающие к вершине A_s, равны. Предположим, что $\sum_{i=1}^{k}(\angle B_i) = \frac{2\pi}{m}$. Пусть γ_s — поворот на угол $\frac{2\pi}{m_s}$ вокруг точки A_s по часовой стрелке. Условия теоремы 4 выполнены, а потому получаем дискретную группу. Эта группа имеет соотношения: для вершины A соотношение имеет вид $(\gamma(a))^m = e$; для вершины B оно имеет вид $(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_k)^m = e$.

Заметим, что в евклидовой геометрии таких многоугольников мало, так как выполняется соотношение $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m} = k-1$, откуда следует, что $k \leqslant 4$. (Мы опускаем доказательство.) На плоскости Лобачевского таких многоугольников (и, следовательно, таких групп) бесконечно много.

Пример 3. Рассмотрим $4k$-угольник на плоскости Лобачевского, изображенный на рис. 116, *а*. Предположим, что сумма

всех его углов равна 2π и что при каждом i сторона a_i равна стороне a_i', а сторона b_i равна стороне b_i'.

Утверждение. *Сохраняющие ориентацию движения* α_i, β_i *плоскости Лобачевского, однозначно определяемые условием* α_i: $a_i \to a_i'$, β_i: $b_i \to b_i'$, *порождают дискретную группу, действующую без неподвижных точек, в которой выполнено соотношение*

$$\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \dots \alpha_k\beta_k\alpha_k^{-1}\beta_k^{-1} = e$$

и фундаментальный многоугольник которой совпадает с исходным.

Группа эта изоморфна фундаментальной группе римановой поверхности рода k, т. е. сферы с k ручками, а наш многоугольник будет многоугольником, задающим каноническую запись этой поверхности (см. задачу 1 из § 19).

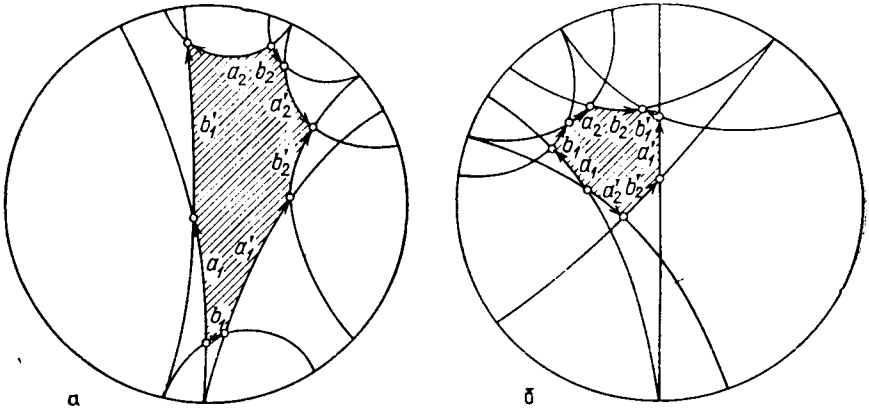


Рис. 116

Следствие. *Универсальная накрывающая замкнутой ориентируемой поверхности рода* $g > 1$ (*сферы с* g *ручками* M_g^2) *есть плоскость Лобачевского.*

Задача. Доказать, что если в примере 3 вместо рис. 116, *а* взять рис. 116, *б*, то получим ту же самую поверхность.

В заключение приведем без доказательства одну теорему конечности для дискретных групп.

Теорема 5. *Всякий выпуклый фундаментальный многоугольник дискретной группы движений плоскости Лобачевского конечной площади имеет конечное число сторон* (*если же имеются выходы на бесконечность, то их конечное число*).

Перейдем теперь к рассмотрению так называемой группы Мёбиуса и к классификации дробно-линейных преобразований.

Наши рассмотрения мы начнем с дробно-линейных преобразований на сфере Римана $\mathbb{C}P^1 \approx \mathbb{C} \cup (\infty) = S^2$, т. е. на пополнен-

ной комплексной прямой. Множество невырожденных дробно-линейных преобразований (с комплексными коэффициентами) образует группу, которая иногда называется группой Мёбиуса и обозначается в литературе так: Möb. Имеет место следующий очевидный изоморфизм: $\mathrm{M\ddot{o}b} \approx SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ (матрицы ± 1 составляют центр группы $SL(2, \mathbb{C})$). Из теории жордановой нормальной формы известно, что любая матрица σ из группы $SL(2, \mathbb{C})$ сопряжена с одной из следующих матриц: 1) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, т. е. $z \mapsto z + \frac{1}{\lambda}$; 2) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, т. е. $z \mapsto cz$. В первом случае преобразование σ называется *параболическим*, во втором случае — *эллиптическим*, если $|c| = 1$, и *гиперболическим*, если $c \in \mathbb{R}$ и $c > 0$; все остальные случаи объединяются под общим названием *локсодромические преобразования*. Тождественное преобразование из этой классификации исключается. Эта терминология относится как к матрицам (указанного вида), так и к элементам группы Möb, представляемым этими матрицами. Если выбран представитель преобразования σ (т. е. некоторая матрица) такой, что $\det \sigma = 1$, то имеет место следующая

Лемма 3. *Пусть* $\sigma \in SL(2, \mathbb{C})$, $\sigma \neq \pm 1$. *Тогда*: 1) *матрица* σ *является параболической тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Sp}\,\sigma = \pm 2$; 2) *матрица* σ *является эллиптической тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Sp}\,\sigma \in \mathbb{R}$ *и* $|\mathrm{Sp}\,\sigma| < 2$; 3) *матрица* σ *является гиперболической тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Sp}\,\sigma \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{Sp}\,\sigma| > 2$; 4) *матрица* σ *является локсодромической тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Sp}\,\sigma \notin \mathbb{R}$.

Здесь $\mathrm{Sp}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ — обычный след матрицы.

Из этой леммы видно, что группа $SL(2, \mathbb{R})$ не содержит локсодромических элементов. Дадим характеристику преобразований из группы $SL(2, \mathbb{R})$ на языке неподвижных точек этих преобразований. Заметим, что преобразование из $SL(2, \mathbb{R})$ (как и из $SL(2, \mathbb{C})$), отличное от 1, имеет на расширенной комплексной прямой две неподвижные точки, которые могут слиться.

Лемма 4. *Пусть* $\sigma \in SL(2, \mathbb{R})$, $\sigma \neq \pm 1$. *Тогда*: 1) *матрица* σ *является параболической в том и только в том случае, когда* σ *имеет ровно одну неподвижную точку на расширенной прямой* $\mathbb{R} \cup \infty$; 2) *матрица* σ *является эллиптической в том и только в том случае, когда* σ *имеет одну неподвижную точку на верхней полуплоскости* $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ *и вторую неподвижную точку на нижней полуплоскости*; 3) *матрица* σ *является гиперболической в том и только в том случае, когда* σ *имеет две неподвижные точки на расширенной прямой* $\mathbb{R} \cup (\infty)$.

Пусть Γ — дискретная подгруппа группы $SL(2, \mathbb{R})$. Тогда $z \in H$ называется эллиптической точкой группы Γ, если суще-

ствует преобразование $\sigma \in \Gamma$ такое, что $\sigma(z) = z$, где σ — эллиптический элемент. Аналогично точка $z \in \mathbb{R} \cup (\infty)$ называется параболической точкой группы Γ, если существует преобразование $\tau \in \Gamma$ такое, что $\tau(s) = s$ и τ — параболический элемент группы. Перечислим теперь некоторые простейшие свойства преобразований указанных выше типов.

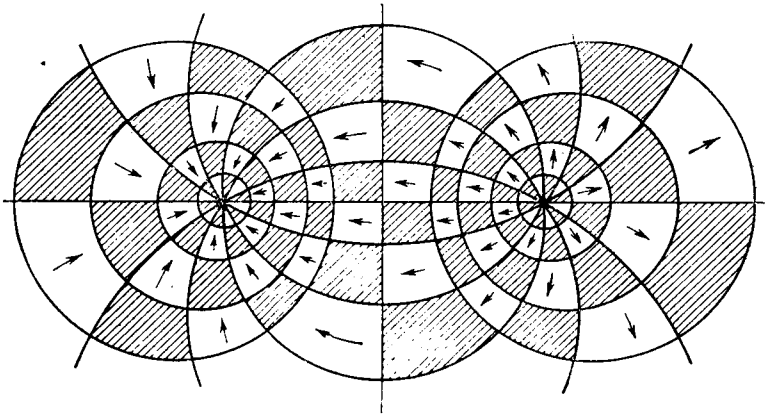


Рис. 117

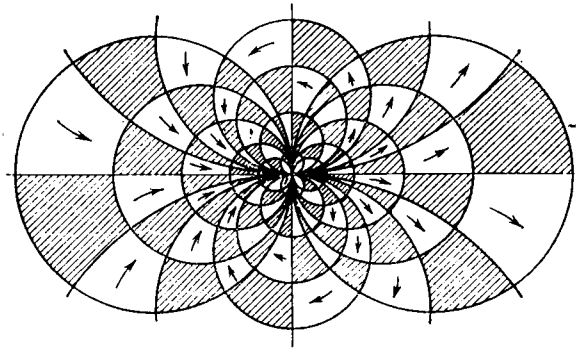


Рис. 118

1. Гиперболический тип. а) Каждая окружность, проходящая через неподвижные точки этого преобразования, переводится этим преобразованием в себя; каждая из двух частей, на которые окружность разбивается двумя неподвижными точками, также переходит при этом в себя.

б) Внутренность окружности, проходящей через неподвижные точки этого преобразования, переходит в себя.

в) Каждая окружность, ортогональная к окружности, проходящей через неподвижные точки, переходит в окружность, обладающую тем же свойством.

г) Неподвижные точки сопряжены относительно любой такой окружности, т. е. ортогональной к окружности, проходящей через неподвижные точки. (Сопряженность точек определяется так: точки A, B сопряжены относительно окружности радиуса R с центром в точке O, если точки O, A, B лежат на одном луче, выходящем из точки O и $|OA| \cdot |OB| = R^2$.)

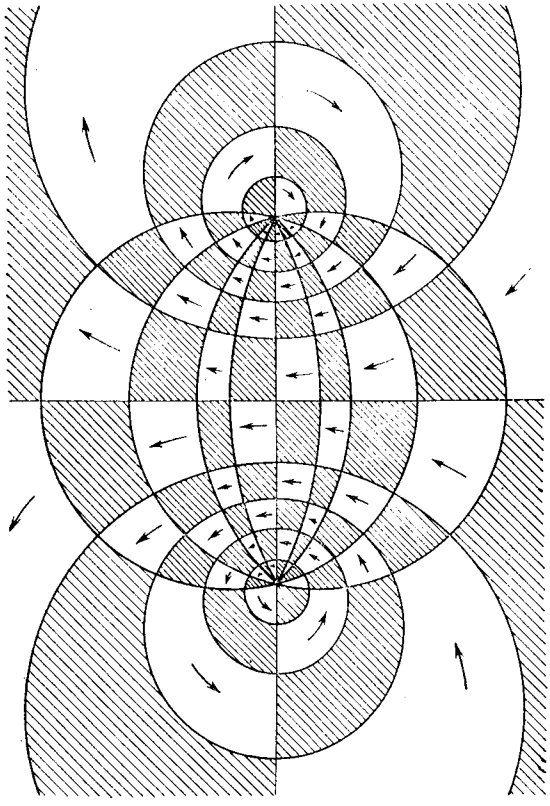


Рис. 119

На рис. 117 построены два семейства указанных выше окружностей и показано, каким образом преобразуются области, на которые изображенные семейства окружностей разбивают плоскость; каждая заштрихованная область переходит в следующую (незаштрихованную) область в направлении, показанном стрелкой.

2. Параболический тип. а) Каждая окружность, проходящая через неподвижную точку, переходит в окружность, касающуюся первой окружности в неподвижной точке.

б) Имеется зависящее от одного параметра семейство окружностей, касающихся друг друга в неподвижной точке, каждая из которых переходит сама в себя.

в) Внутренность каждой неподвижной окружности переходит сама в себя.

На рис. 118 показано, как преобразуется плоскость при параболическом преобразовании. Каждая заштрихованная область переходит при параболическом преобразовании в следующую (незаштрихованную) область в направлении, указанном стрелкой.

3. Эллиптический тип. а) Дуга окружности, соединяющая неподвижные точки, переходит в дугу окружности, соединяющую неподвижные точки.

б) Каждая окружность, ортогональная окружностям, проходящим через неподвижные точки, переходит сама в себя.

в) Внутренность каждой такой окружности переходит сама в себя.

г) Неподвижные точки сопряжены по отношению к каждой из окружностей, ортогональных окружностям, проходящим через неподвижные точки (рис. 119).

В заключение этого параграфа укажем конкретный пример дискретной группы движений плоскости Лобачевского, имеющей фундаментальной областью $4g$-угольник с суммой углов 2π (см. выше пример 3). В качестве такой фундаментальной области возьмем правильный $4g$-угольник (с углами $\pi/2g$) с центром, например, в центре единичного круга (в модели Пуанкаре; рис. 120). Разобьем стороны этого $4g$-угольника на пары, беря просто пары противоположных сторон. Пусть $A_1, \ldots, A_{2g}$ — «сдвиги» плоскости Лобачевского, меняющие местами пары противоположных сторон (см. рис. 120). Каждое последующее преобразование A_{k+1} получается из предыдущего A_k поворотом направления «сдвига» на $\pi - \frac{\pi}{2g}$ (т. е. сопряжением с помощью матрицы B_g поворота на угол $\pi - \frac{\pi}{2g}$). Преобразования $A_1, \ldots, A_{2g}$ связаны соотношением $A_1 \ldots A_{2g} A_1^{-1} \ldots A_{2g}^{-1} = e$ (проверьте!).

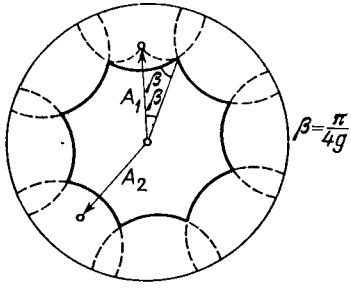


Рис. 120

Легко получить явные формулы для матриц преобразований $A_1, \ldots, A_{2g}$ из $SL(2, \mathbb{R})$ (т. е. уже в реализации геометрии Лобачевского на верхней полуплоскости). Можно считать, что в этой реализации движение A_1 переводит мнимую полуось в себя. Тогда оно имеет вид $w \mapsto \lambda\omega$, $\lambda = e^l$, где l — удвоенный катет треугольника с углами $\pi/2$, $\pi/4g$, $\pi/4g$ (это видно из рис. 120).

Указанный катет легко вычисляется; для величины l получаем

$$l = 2 \ln \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta}}{\sin \beta}, \quad \beta = \frac{\pi}{4g}$$

(проверьте!). Матрицы $A_2, \ldots, A_{2g}$, как уже говорилось, получаются из матрицы A_1 сопряжением: $A_k = B_g^{-k+1} A_1 B_g^{k-1}$, где B_g — матрица поворота на угол $\pi \frac{2g-1}{2g}$ вокруг точки i:

$$B_g = \begin{pmatrix} \cos \pi \frac{2g-1}{4g} & \sin \pi \frac{2g-1}{4g} \\ -\sin \pi \frac{2g-1}{4g} & \cos \pi \frac{2g-1}{4g} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-k+1} \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta}}{\sin \beta} & 0 \\ 0 & \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta}} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{k-1},$$

$$\alpha = \pi \frac{2g-1}{4g}, \quad k = 1, \ldots, 2g.$$

Задача. Докажите, что группа с образующими $A_1, \ldots, A_{2g}$ и соотношением $A_1 \ldots A_{2g} A_1^{-1} \ldots A_{2g}^{-1} = 1$ изоморфна группе с образующими $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ и соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

Глава 5

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

§ 21. Определение абсолютных и относительных гомотопических групп. Примеры

1. Основные определения. Гомотопические группы, к определению которых мы сейчас перейдем, представляют собой важнейшие из инвариантов многообразий или топологических пространств, как будет видно из дальнейшего текста. Одномерная гомотопическая группа по определению совпадает с фундаментальной группой $\pi_1(M, x_0)$. Нульмерной гомотопической группы, вообще говоря, нет; нульмерным аналогом гомотопической группы является множество $\pi_0(M, x_0)$ компонент линейной связности пространства M, в котором отмечен «тривиальный» элемент — компонента отмеченной точки x_0. Лишь в отдельных случаях множество $\pi_0(M, x_0)$ обладает естественной групповой структурой; укажем основные примеры такого рода.

А. Пространство M является группой Ли. В этом случае связная компонента единицы $x_0 = 1$, обозначаемая через $M_0 \subset M$, является нормальным делителем; факторгруппа $M/M_0 = \pi_0(M, x_0)$ имеет естественную групповую структуру.

Например: 1) для $M = O(n)$ имеем $\pi_0(M, x_0) = \mathbb{Z}_2$ (компоненты соответствуют знакам детерминанта); 2) для $M = O(n, 1)$ имеем $\pi_0(M, x_0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (разделение группы на компоненты производится по знаку детерминанта и по тому, сохраняется или обращается направление времени).

Б. M есть пространство петель $\Omega(x_0, N)$ некоторого пространства N; это пространство $\Omega(x_0, N)$ состоит из путей γ, начинающихся и кончающихся в точке x_0. Как доказывалось в § 15 (см. теорему 1), множество компонент линейной связности $\pi_0(M, e)$ пространства M (e есть единица, т. е. постоянный путь $\gamma(t) \equiv x_0$) совпадает с группой $\pi_1(N, x_0)$ (по определению последней).

Дадим теперь определение «высших» гомотопических групп $\pi_i(M, x_0)$. Рассмотрим диск D^i с граничной сферой S^{i-1} и отображения $f\colon D^i \to M$, при которых сфера S^{i-1} переходит в точку x_0.

Определение 1. Элементом гомотопической группы $\pi_i(M, x_0)$ называется гомотопический класс отображений диска $D^i \to M^n$, причем граница S^{i-1} переходит в точку x_0 при всех

отображениях и гомотопиях. Эквивалентным образом элемент из $\pi_i(M, x_0)$ задается гомотопическими классами отображений сферы $S^i \to M$, при которых избранная точка сферы $s_0 \in S^i$ переходит в точку x_0.

(Можно сказать, что элементы группы $\pi_i(M, x_0)$ — это компоненты связности пространства отображений $S^i \to M$, при которых $s_0 \mapsto x_0$.)

Произведение элементов гомотопической группы определяется так: рассмотрим сферу S^i с экватором $S^{i-1} \subset S^i$ и точкой s_0 на экваторе S^{i-1}. Рассмотрим стандартное отображение ψ сферы S^i в букет двух сфер $S_1^i \vee S_2^i$, при котором экватор целиком переходит в одну точку s_0, в которой скреплен букет (рис. 121).

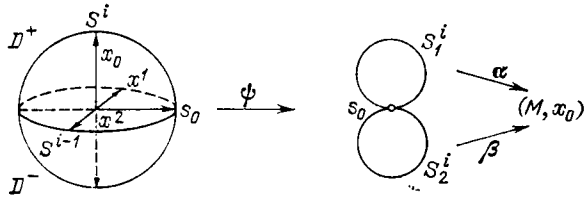


Рис. 121

При этом отображение ψ взаимно однозначно и сохраняет ориентацию во всех точках, кроме экватора S^{i-1}. Если заданы отображения α: $S_1^i \to M$, $\alpha(s_0) = x_0$ и β: $S_2^i \to M$, $\beta(s_0) = x_0$, то мы определяем произведение $\alpha\beta$ как отображение $S^i \to M$, совпадающее с $\alpha(\psi(x))$ для полусферы D^+ и с $\beta(\psi(x))$ для полусферы D^-:

$$\alpha\beta(x) = \begin{cases} \alpha\psi & \text{при } x \in D^+, \\ \beta\psi & \text{при } x \in D^-. \end{cases}$$

Очевидно, $\alpha\beta(s_0) = x_0$. Гомотопический класс произведения $\alpha\beta$ называется *произведением* гомотопических классов α и β в гомотопической группе $\pi_i(M, x_0)$.

Теорема 1. *Операция умножения гомотопических классов превращает множество $\pi_i(M, x_0)$ в группу, коммутативную при $i > 1$.*

Доказательство. Для $i = 1$ теорема 1 сводится к теореме 17.1. Рассмотрим случай $i > 1$.

а) *Коммутативность*: $\alpha\beta$ *гомотопно* $\beta\alpha$. Пусть α задано на верхней полусфере $D^+(x^0 \geqslant 0)$, β — на нижней полусфере $D^-(x^0 \leqslant 0)$; считаем, что сфера S^i вложена в $\mathbb{R}^{i+1}(x^0, \ldots, x^i)$ как гиперповерхность $\sum_{j=0}^{i} (x^j)^2 = 1$. Пусть точка s_0 на экваторе имеет

координаты $s_0 = (x^0 = 0, x^1 = 1, \ldots, x^i = 0)$. Рассмотрим семейство вращений сферы S^i по себе вокруг ортогонального дополнения к плоскости (x^0, x^2) на углы $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. При $\varphi = 0$ это отображение тождественно. При $\varphi = \pi$ это отображение меняет местами D^+ и D^-. Точка s_0 неподвижна при всех вращениях. Мы получили гомотопию, меняющую местами α и β. Таким образом, $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ гомотопны.

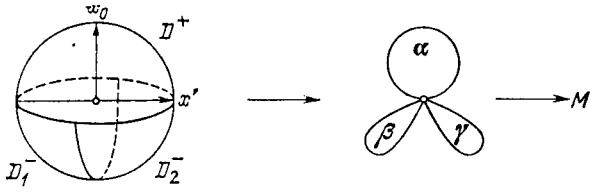


Рис. 122

б) *Ассоциативность*: $(\alpha\beta)\gamma$ *гомотопно* $\alpha(\beta\gamma)$. Пусть α задано на верхней полусфере $D^+(x^0 \geqslant 0)$, а нижняя полусфера $D^-(x^0 \leqslant 0)$ разделена пополам, $D^- = D_1^- \cup D_2^-$: $x^1 \leqslant 0$ на D_1^- и $x^1 \geqslant 0$ на D_2^-. Пусть β задано как отображение диска D_1^- и γ — как отображение диска D_2^- (рис. 122). Легко видеть, что эта модель реализует как $\alpha(\beta\gamma)$, так и $(\alpha\beta)\gamma$. Утверждение доказано.

в) *Обратный элемент.* Пусть задано отображение сферы α: $(S^i, s_0) \to (M, x_0)$, задающее элемент $\alpha \in \pi_i(M, x_0)$; покажем, что отображение $S^i \to M$, определяемое формулой $(x^0, x^1, \ldots, x^i) \mapsto \alpha(-x^0, x^1, \ldots, x^i)$, определяет элемент $-\alpha \in \pi_i(M, x_0)$. Рассмотрим знакомое нам отображение ψ: $S^i \to S^i \vee S^i$, при котором экватор $x^0 = 0$ переходит в точку s_0 (рис. 123). Считаем, что отображение α: $S^i \to M$ определено на верхней полусфере $D^+(x^0 \geqslant 0)$. Отображение $(-\alpha)$: $D \to M$, рассматриваемое как отображение нижней полусферы $D^-(x^0 \leqslant 0)$, действует по формуле $(-\alpha)(x^0, x^1, \ldots, x^n) = \alpha(-x^0, x^1, \ldots, x^n)$. Вместе α и $-\alpha$ составляют отображение f: $S^i \to M$, при котором точки $y = (x^0, \ldots, x^n)$ и $y^* = (-x^0, \ldots, x^n)$ переходят в одну и ту же точку, $f(y) = f(y^*)$. Следовательно, отображение f представляется в виде суперпозиции $f = g \circ \pi$, где π — проекция, π: $S^i \to D^i$, $\pi(y) = \pi(y^*)$ (рис. 124), и $g = \alpha$: $D^i \to M$. Поэтому отображение f гомотопно постоянному, и точку s_0 можно сделать неподвижной при гомотопии. Теорема доказана.

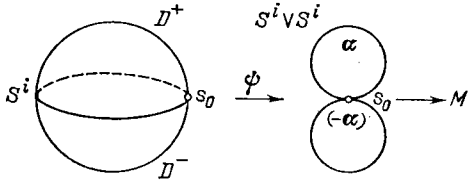


Рис. 123

Пока нам известны гомотопические группы лишь весьма малого количества пространств (не считая группы π_1):

а) $\pi_i(M, x_0) = 0$ для любого стягиваемого многообразия или пространства M (например, $M = \mathbb{R}^n$, D^n, дерево и др.);

б) $\pi_i(S^n) = 0$ при $i < n$, $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ (см. § 13).

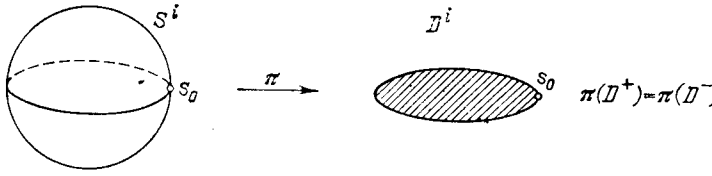


Рис. 124

Из определения гомотопических групп немедленно вытекает

Утверждение. *Для прямого произведения $M \times N$ имеем*

$$\pi_i(M \times N) = \pi_i(M) \times \pi_i(N).$$

Доказательство. Любое отображение f: $S^i \to M \times N$ есть просто пара отображений: $f = (f_1, f_2)$, где f_1: $S^i \to M$ и f_2: $S^i \to N$. При гомотопиях f составляющие f_1, f_2 деформируются независимо. Утверждение доказано.

Таким образом, мы можем расширить круг примеров, где мы знаем гомотопические группы, составляя их произведения.

2. Относительные гомотопические группы. Точная последовательность пары. Относительные гомотопические группы $\pi_i(M, A, x_0)$ определяются для пространства M, его подмножества A и точки $x_0 \in A$. Элементы $a \in \pi_i(M, A, x_0)$ представляются отображениями диска

$$\alpha\colon D^i \to M,$$

при которых граница S^{i-1} переходит в A и избранная точка s_0 на границе S^{i-1} переходит в x_0. По определению элементы из $\pi_i(M, A, x_0)$ — это гомотопические классы таких отображений

$$\alpha\colon (D^i, S^{i-1}, s_0) \to (M, A, x_0).$$

$\pi_i(M, A, x_0)$ определяется для $i \geqslant 1$ и является группой для $i \geqslant 2$. Группы $\pi_i(M, A, x_0)$ коммутативны при $i \geqslant 3$. Групповая структура в $\pi_i(M, A, x_0)$ при $i \geqslant 2$ вводится в полной аналогии с абсолютными группами $\pi_i(M, x_0)$. Если $\alpha, \beta \in \pi_i(M, A, x_0)$, то произведение $\alpha\beta$ реализуется (рис. 125) на диске D^i, представленном в виде $\sum_{j=1}^{i} (x^j)^2 \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^i$.

Рассматривается отображение ψ: $D^i \to D_1^i \vee D_2^i$, стягивающее диск D^{i-1} $(x^1 = 0)$ в точку s_0. На диске D_1^i реализуется α, а на диске D_2^i реализуется β. Суперпозиция $D^i \xrightarrow{\psi} D_1^i \vee D_2^i \to M$ дает

$\alpha\beta$. При $i=1$ мы имеем множество гомотопических классов отображений $\pi_1(M, A, x_0)$ — групповой операции нет. При $i=2$ граница $\partial D^i = S^{i-1}$ одномерна. Поэтому относительная группа $\pi_2(M, A, x_0)$ может быть некоммутативна, как и абсолютная группа $\pi_1(M, x_0)$. При $i \geqslant 3$ дословное повторение доказательства теоремы 1 дает коммутативность группы $\pi_i(M, A, x_0)$. Доказательство того, что $\pi_i(M, A, x_0)$ — группы при $i \geqslant 2$, также полностью аналогично теореме 1, и мы его не приводим.

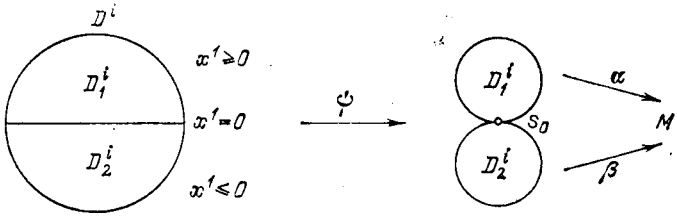


Рис. 125

Если $A = x_0$, то относительные группы $\pi_i(M, A, x_0)$ не отличаются от «абсолютных» групп $\pi_i(M, x_0)$.

При непрерывных отображениях многообразий (пространств)

$$f\colon M \to N,$$
$$A \to B,$$
$$x_0 \mapsto y_0,$$

по аналогии с группой π_1 (см. § 17) получаем естественные гомоморфизмы $\left[D^i \to M \xrightarrow{f} N\right]$

$$f_*\colon \pi_i(M, A, x_0) \to \pi_i(N, B, y_0).$$

Эти гомоморфизмы не меняются при гомотопиях отображения f, при которых A переходит в B и x_0 в y_0.

Всякое отображение $D^i \to M$, при котором сфера $\partial D^i = S^{i-1}$ переходит в точку x_0, представляет собой как элемент группы $\pi_i(M, x_0)$, так и элемент группы $\pi_i(M, A, x_0)$. Таким образом, получаем гомоморфизм

$$j\colon \pi_i(M, x_0) \to \pi_i(M, A, x_0),$$

поскольку гомотопия отображения в классе $\alpha \in \pi_i(M, x_0)$ может считаться и гомотопией в классе $\pi_i(M, A, x_0)$ (но не обратно!).

Кроме того, всякое отображение $f\colon D^i \to M$, представляющее элемент $\alpha \in \pi_i(M, A, x_0)$, определяет отображение границы

$$f|_{\partial D^i}\colon S^{i-1} \to A,$$

при котором $s_0 \mapsto x_0$. При гомотопиях отображения f в классе $\alpha \in \pi_i(M, A, x_0)$ отображение границы меняется в классе из $\pi_{i-1}(A, x_0)$. Произведение в группе $\pi_i(M, A, x_0)$ порождает на границах произведение в группе $\pi_{i-1}(A, x_0)$ по определению. Таким образом, возникает «граничный гомоморфизм»

$$\partial\colon \pi_i(M, A, x_0) \to \pi_{i-1}(A, x_0).$$

Кроме того, включение $A \subset M$, рассматриваемое как непрерывное отображение $i\colon A \to M$, порождает «гомоморфизм вложения»

$$i_*\colon \pi_i(A, x_0) \to \pi_i(M, x_0).$$

Напомним, что ядром группового гомоморфизма $\varphi\colon G \to H$ называется подгруппа $\operatorname{Ker}\varphi$ группы G, состоящая из элементов $\alpha \in \operatorname{Ker}\varphi$ таких, что $\varphi(\alpha) = 1$. Образ гомоморфизма φ, обозначаемый через $\operatorname{Im}\varphi$, есть просто $\varphi(G) \subset H$.

Теорема 2. *Гомоморфизмы j, i_*, ∂ обладают «свойством точности»:*

$$\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i_*,$$
$$\operatorname{Ker} i_* = \operatorname{Im} \partial,$$
$$\operatorname{Ker} \partial = \operatorname{Im} j.$$

Желая выразить это одним словом, обычно говорят, что последовательность групп и гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_i(M, x_0) \xrightarrow{j} \pi_i(M, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(A, x_0) \to \ldots$$

точна.

Доказательство. а) $\operatorname{Ker} j = \operatorname{Im} i_*$. Действительно, всякий элемент группы $\pi_i(M, x_0)$ представляется отображением $\alpha\colon D^i \to M$ с $\alpha(\partial D^i) = x_0$. Если же этот элемент лежит в $\operatorname{Ker} j$, то существует гомотопия α_t отображения $\alpha = \alpha_0$, в процессе которой все время $s_0 \mapsto x_0$, $\partial D^i \to A$, а в конце гомотопии получим $\alpha_1(D^i) \subset A$. Это есть определение $\operatorname{Ker} j$. Гомотопия α_t определяет отображение $(\partial D^i, t) \to A$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем $\alpha_0(\partial D^i) = x_0$. Поэтому семейство отображений $\alpha_t\colon (\partial D^i, t) \to A$ задает отображение диска $D^i \to A$. Сопоставляя композицию этого отображения с отображением $\alpha_1\colon D^i \to A$, получаем отображение $S^i \to A$, при котором $s_0 \to x_0$. Поэтому $\operatorname{Ker} j$ содержится в образе $\operatorname{Im} i_*$. Обратно, если задано отображение диска $f\colon D^i \to A$ с $f(\partial D^i) = x_0$, то в группе $\pi_i(M, A, x_0)$ это отображение f дает нулевой элемент, поскольку диск по себе стягивается к точке по множеству A. Поэтому $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j$.

б) $\operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Im} j$. Если $\alpha \in \operatorname{Ker}\partial$, то α представляется отображением $\alpha\colon D^i \to M$ с $S^{i-1} \to A$, $s_0 \mapsto x_0$, для которого отображение границы $\alpha\colon S^{i-1} \to A$ гомотопно нулю, т. е. существует гомотопия $\alpha_t\colon S^{i-1} \to A$ с $\alpha_0 = a$, $\alpha_t(s_0) = x_0$, $\alpha_1(S^{i-1}) = x_0$. Отображение

α: $D^i \to M$ вместе с отображением $\{\alpha_t\}$: $S^{i-1} \times I \to A$, переводящим $S^{i-1} \times 1$ в x_0, составляет отображение $S^i \to M$, при котором отмеченная точка $s_0 = [S^{i-1}, 1]$ переходит в x_0. Таким образом, ядро $\operatorname{Ker} \partial$ содержится в образе $\operatorname{Im} j$. Обратное очевидно, поскольку при отображениях диска α: $D^i \to M$ из $\operatorname{Im} j$ вся граница переходит в точку и, значит, $\partial(\alpha) = 0$.

в) $\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i_*$. Пусть $\alpha \in \operatorname{Ker} i_* \subset \pi_i(A, x_0)$ и α представлено отображением α: $S^i \to A$ с $s_0 \mapsto x_0$. Тогда имеется гомотопия α_t: $S^i \to M$ с $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_t(s_0) = x_0$ и $\alpha_1(S^i) = x_0$. Эта гомотопия задает отображение диска $D^{i+1} \to M$, так как $\alpha_1(S^i, 1) = x_0$. При этом граница $\partial D^{i+1} = S^i$ при отображении α_0 переходит в A и s_0 переходит в x_0. Мы получаем отображение F тройки $D^{i+1} \to M$, $S^i \to A$, $s_0 \mapsto x_0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} i_*$ содержится в образе $\operatorname{Im} \partial$, так как $\alpha = \alpha_0 = \partial(F)$. Обратно, если $\alpha = \partial F$, то отображение α: $S^i \to A$ гомотопно отображению в точку (по M), и в процессе гомотопии $s_0 \mapsto x_0$. Теорема доказана.

Пример. Пусть $M = D^n$, $A = S^{n-1}$. Тогда $\pi_n(D^n, S^{n-1}, x_0) = \mathbb{Z}$ и $\pi_i(D^n, S^{n-1}, x_0) = 0$ при $i < n$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$\pi_n(D^n) \xrightarrow{j} \pi_n(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(D^{n-1}).$$

Если $n > 1$, то

$$\pi_n(D^n) = \pi_{n-1}(D^{n-1}) = 0,$$

так как шар D^n стягиваем. Поэтому $\operatorname{Im} j = 0$ и $\operatorname{Im} i_* = 0$. Так как $\operatorname{Im} j = \operatorname{Ker} \partial$, то $\operatorname{Ker} \partial = 0$. Поэтому гомоморфизм ∂: $\pi_n(D^n, S^{n-1}) \to \pi_{n-1}(S^{n-1})$ не имеет ядра (является вложением). Так как $\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i_* = \pi_{n-1}(S^{n-1})$, то гомоморфизм ∂ есть на самом деле изоморфизм между $\pi_n(D^n, S^{n-1})$ и $\pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$. Утверждение доказано.

Аналогично, если M стягиваемо, то $\pi_j(M) = 0$ $(j \geqslant 0)$ и $\pi_n(M, A) = \pi_{n-1}(A)$ при $n \geqslant 1$ (проверьте!).

§ 22. Накрывающая гомотопия. Гомотопические группы накрытий и пространств петель

1. Понятие расслоения. Пусть X и Y — два топологических пространства и f: $X \to Y$ — непрерывное отображение. В некоторых примерах (ниже) X будет бесконечномерным функциональным пространством — пространством путей. Рассмотрим любое гладкое многообразие (или пространство) K и два отображения

$$\varphi\colon K \to Y, \quad \tilde{\varphi}\colon K \to X;$$

говорят, что $\tilde{\varphi}$ накрывает φ, если $f\tilde{\varphi} = \varphi$.

Определение 1. Мы скажем, что отображение f: $X \to Y$ есть *расслоение* (или *расслоение Серра*), если любая гомотопия

$\Phi=\{\varphi_t\}$: $K\times I\to Y$ произвольного отображения $\varphi=\varphi_0$ в базу Y накрывается некоторой гомотопией $\widetilde{\Phi}=\{\widetilde{\varphi}_t\}$: $K\times I\to X$, т. е. $f\widetilde{\varphi}_t=\varphi_t$ для всех $t\geqslant 0$, и при этом в момент $t=0$ отображение $\widetilde{\varphi}_0$ совпадает с заданным отображением $\widetilde{\varphi}$, удовлетворяющим условию $f\widetilde{\varphi}=\varphi$. При этом требуется, чтобы накрывающая гомотопия $\widetilde{\varphi}_t$ была «стационарной» вместе с φ_t: если точка $k\in K$ неподвижна на некотором отрезке δ гомотопии, $\varphi_t(k)=\text{const}$ при $t\in\delta$, то и $\widetilde{\varphi}_t(k)=\text{const}$ при $t\in\delta$.

Практически во всех случаях, когда имеется свойство накрывающей гомотопии, вводится однозначный рецепт накрывать в X движение точек по базе Y; этот рецепт должен непрерывно и мультипликативно зависеть от пути точки по базе Y и от начального положения этой точки в X. Точно это означает следующее.

1. Всякому непрерывному пути $\gamma(t)$: $I\to Y$ в базе Y, $0\leqslant t\leqslant 1$, и начальной точке $x_0\in X$ такой, что $f(x_0)=y_0=\gamma(0)$, однозначно сопоставляется непрерывный путь $\widetilde{\gamma}(t,\ x_0)$: $I\to X$ такой, что $\widetilde{\gamma}(0,\ x_0)=x_0$ и $f\widetilde{\gamma}(t,\ x_0)=\gamma(t)$. Путь $\widetilde{\gamma}(t,\ x_0)$ должен непрерывно зависеть от пути $\gamma(t)$ и от начальной точки x_0.

2. Мультипликативность: произведению путей γ_1, γ_2 в базе Y должно отвечать при накрытии произведение путей $\widetilde{\gamma}_1(t,\ x_0)\circ\widetilde{\gamma}_2(\tau,\ x_1)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $1\leqslant\tau\leqslant 2$, если $x_1=\widetilde{\gamma}_1(1,\ x_0)$.

3. Если путь γ постоянен (сводится к точке y_0), то и путь $\widetilde{\gamma}$ постоянен (сводится к точке x_0). Заметим, что если задан путь $\gamma(t)$ из y_0 в y_1, то совокупность путей $\widetilde{\gamma}(t,\ x)$ для всех $x\in f^{-1}(y_0)$ определяет отображение «переноса» слоев $\widetilde{\gamma}$: $f^{-1}(y_0)\to f^{-1}(y_1)$, причем $\widetilde{(\gamma_1\circ\gamma_2)}=\widetilde{\gamma}_1\circ\widetilde{\gamma}_2$, а отображение $\widetilde{\gamma}_1\circ\widetilde{\gamma}_1^{-1}$ слоя $F=f^{-1}(y_0)$, в себя гомотопно тождественному $1_F\sim\widetilde{\gamma}\circ\widetilde{\gamma}^{-1}$: $f^{-1}(y_0)\to f^{-1}(y_0)$.

Задача. Докажите, что слои расслоения гомотопически эквивалентны и, более того, отображения переноса слоев являются гомотопическими эквивалентностями.

Определение 2. Пространство Y называется *базой*, X — *пространством расслоения:* полные прообразы $F_y=f^{-1}(y)$ называются *слоями*, отображение f называется *проекцией*. Однозначный рецепт накрывать гомотопию, удовлетворяющий перечисленным выше требованиям, мы назовем *гомотопической связностью* в расслоении f: $X\to Y$.

Пример 1. Накрытие является расслоением, у которого все слои дискретны. Свойство накрывающей гомотопии и движение слоев из точки в точку были изучены в § 18.

Пример 2. Рассмотрим гладкое многообразие (или пространство) M и точку $x_0\in M$. Обозначим через $X=E(x_0)$ пространство всех путей $\gamma(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, начинающихся в точке x_0 и кончающихся в любой точке $\gamma(1)\in M$ (не фиксированной). Через Y мы обозначим само многообразие M. Имеется отображе-

ние f: $E(x_0) \to Y$, действующее по формуле $f(\gamma) = \gamma(1)$. Слои $f^{-1}(y)$ представляют собой пространства путей $\Omega(x_0, y, M)$, встречавшиеся в гл. 4.

Лемма 1. *Отображение f: $E(x_0) \to M$ является расслоением.*

Доказательство. Построим для отображения f гомотопическую связность. Пусть задан путь $\gamma(t)$ в M, ведущий из $y_0 = \gamma(1)$ в $y_1 = \gamma(2)$. Точка y_0 «накрыта» при $t = 1$. Это означает, что задан путь $\gamma_1(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, начинающийся в точке x_0 и кончающийся в точке $y_0 = \gamma_1(1)$. Накрытие пути $\gamma(t)$ в пространстве $X = E(x)$ определяем очевидным образом: $\widetilde{\gamma}_t(t')$ есть точка в пространстве $E(x_0)$, представленная для любого $1 \leqslant t \leqslant 2$ путем $\widetilde{\gamma}_t(t') \in \Omega(x_0, \gamma(t))$, $0 \leqslant t' \leqslant t$, определяемым формулами $\widetilde{\gamma}_t(t') = \gamma_1(t')$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\widetilde{\gamma}_t(t') = \gamma(t')$ при $1 \leqslant t' \leqslant t$ (рис. 126; путь $\widetilde{\gamma}_t(t')$ показан пунктирной линией).

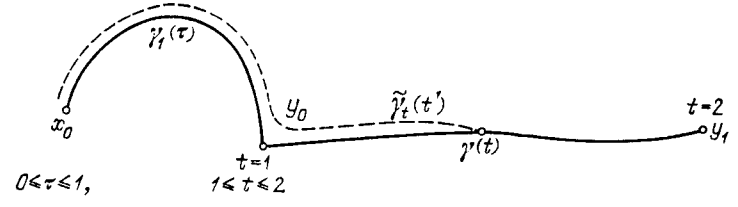


Рис. 126

Для пути $\widetilde{\gamma}_t(t')$ можно ввести параметр $t'' = \dfrac{t'}{1+t}$; тогда $0 \leqslant t'' \leqslant 1$. Накрытие $\widetilde{\gamma}_t$ в пространстве $E(x_0) = X$ пути $\gamma(t)$ в $Y = M$ непрерывно зависит от начальной точки, т. е. от пути $\gamma_1(\tau)$, и от пути $\gamma(t)$ в базе $Y = M$.

Лемма доказана.

2. Точная последовательность расслоения. Рассмотрим расслоение f: $X \to Y$, точку $y_0 \in Y$ и слой $F = f^{-1}(y_0)$. В слое F выберем точку $f_0 \in F$. Определены гомотопические группы $\pi_i(X, f_0)$, $\pi_i(F, f_0)$, $\pi_i(X, F, f_0)$ и точная последовательность пары

$$\ldots \to \pi_i(F) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X) \xrightarrow{j} \pi_i(X, F) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

При отображении f: $X \to Y$ слой $F = f^{-1}(y_0)$ переходит в одну точку $F \to y_0$. Поэтому определен гомоморфизм

$$f_*: \pi_i(X, F, f_0) \to \pi_i(Y, y_0).$$

Теорема 1. *Гомоморфизм f_* является изоморфизмом $\pi_i(X, F, f_0) \approx \pi_i(Y, y_0)$. Поэтому имеется «точная последовательность расслоения»*

$$\ldots \to \pi_i(F) \xrightarrow{i_*} \pi_i(X) \xrightarrow{f_*} \pi_i(Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \pi_i(X, F, f_0)$ и $f_*(\alpha) = 0$, где α представлено отображением α: $D^i \to X$, $\partial D^i \to F$, $s_0 \mapsto f_0$. Обозначим через β образ $\beta = f(\alpha)$: $D^i \to Y$, $\partial D^i \to y_0$. Так как $\beta = 0$ в группе $\pi_i(Y, y_0)$, существует гомотопия β_t: $D^i \to Y$ с $\beta_t(\partial D^i) \to y_0$, $\beta_0 = \beta$ и $\beta_1(D^i) = y_0$. Накроем гомотопию β_t гомотопией α_t: $D^i \to X$ такой, что $\alpha_0 = \alpha$ и $\alpha_t(s_0) = f_0$. Тогда $\alpha_t(\partial D^i) \subset F$ при всех t, и $\alpha_1(D^i) \subset \Gamma$. Поэтому $\alpha = 0$ в группе $\pi_i(X, F)$. Пусть теперь задан элемент $\beta \in \pi_i(Y, y_0)$. Найдем такое $\alpha \in \pi_i(X, F, f_0)$, что $f_*\alpha = \beta$. Для любого отображения β: $D^i \to Y$ с $\beta(\partial D^i) = y_0$ можно построить гомотопию β_t: $D^i \to Y$ с $\beta_0 = \beta$, $\beta_t(s_0) = y_0$, $\beta_1(D^i) = y_0$, так как диск стягиваем (эта гомотопия не дает эквивалентности в группе $\pi_i(Y, y_0)$, так как $\beta_t(\partial D^i) \neq y_0$) (рис. 127). Отображение β_1: $D^i \to y_0$ можно накрыть отображением α_1: $D^i \to f_0$. Накроем теперь всю гомотопию α_t, $1 \geqslant t \geqslant 0$, начиная с отображения α_1: $D^i \to f_0$. В конце гомотопии мы получим отображение α_0: $D^i \to X$ такое, что $s_0 \mapsto f_0$ и $f(\alpha_0) = \beta_0 = \beta$. Так как $\beta(\partial D^i) = y_0$, мы получаем, что $\alpha_0(\partial D^i)$ лежит в слое F. Отображение α_0 дает элемент $\alpha \in \pi_i(X, F, f_0)$ такой, что $f_*\alpha = \beta$. Теорема доказана.

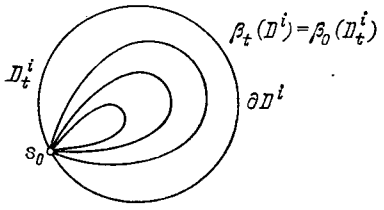


Рис. 127

Замечание. Групповая структура в множестве $\pi_i(X, F, f_0)$ вводится посредством изоморфизма $\pi_1(X, F, f_0) \overset{f_*}{\approx} \pi_1(Y, y_0)$. В конечном отрезке точной последовательности

$$\ldots \to \pi_1(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, f_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F),$$

где X и Y считаются связными, образ гомоморфизма $f_*: \pi_1(X, f_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ может не быть нормальным делителем, и поэтому в множестве смежных классов $\pi_0(F) \approx \pi_1(Y, y_0)/f_*\pi_1(X, f_0)$ нет естественной групповой структуры.

Следствие 1. *Для накрытий, у которых слой $F = f^{-1}(y_0)$ дискретен, имеется изоморфизм*

$$\pi_i(X, F, f_0) = \pi_i(X, f_0) \text{ при } i \geqslant 2.$$

Поэтому $\pi_i(X, f_0) \approx \pi_i(Y)$, $i \geqslant 2$.

(Группа π_1 изучена для накрытий в гл. 4.)

Следствие 2. *Для расслоения путей*

$$f\colon E(x_0) \to M$$

со слоем $\Omega(x_0, y, M) = f^{-1}(y)$ *получаем* $\pi_i(E(x_0)) = 0$,

$$\pi_i(\Omega(x_0, y, M)) = \pi_{i+1}(M).$$

Доказательство. Пространство $E(x_0)$ стягиваемо по себе к точке с помощью гомотопии

$$\varphi_t\colon E(x_0) \to E(x_0),$$

$$\varphi_t(\gamma(\tau)) = \gamma_t(\tau),$$

где γ_t — отрезок пути γ от 0 до t (с параметром $\tau' = \tau/t$, $0 \leqslant \tau' \leqslant 1$). При $t = 0$ получим путь $\gamma_0(\tau) = \gamma(0) = x_0$. Поэтому $\varphi_0(E(x_0))$ — точка.

Из стягиваемости $E(x_0)$ следует, что $\pi_i(E(x_0), x_0) = 0$ для всех $i \geqslant 0$. В точной последовательности расслоения $E(x_0) \to M$ имеем

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_i(E(x_0)) & \xrightarrow{f_*} & \pi_i(M, y) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{i-1}(\Omega(x_0, y, M)) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{i-1}(E(x_0)). \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

Из точности следует, что гомоморфизм ∂ является изоморфизмом, так как $\operatorname{Im} f_* = \operatorname{Ker} \partial = 0$ и $\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} i_* = \pi_{i-1}(\Omega(x_0, y, M))$. Следствие доказано.

Из следствия 1 вместе с примерами накрытий (см. примеры 1—7 из § 18) получаем, что при $i > 1$:

1) $\pi_i(S^1, s_0) = \pi_i(\mathbb{R}^1, x_0) = 0$ (пример 1);

2) $\pi_i(\mathbb{R}P^2, x_0) = \pi_i(S^2, s_0)$, в частности $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$ (пример 3);

3) $\pi_i(T^n; x_0) = 0$ (пример 4);

4) $\pi_i(K^2; x_0) = 0$ (пример 5);

5) $\pi_i(S^1 \vee S^1) = 0$ (пример 7). Аналогично $\pi_i(S^1 \vee \ldots \vee S^1) = 0$ при $i > 1$, поскольку универсальная накрывающая является деревом и потому стягиваема. Если U — область плоскости, $U = \mathbb{R}^2 \setminus (a_1 \cup \ldots \cup a_k)$, где a_j — точки, то U стягивается к букету $S^1 \vee \ldots \vee S^1$, и потому $\pi_i(U) = 0$ при $i > 1$.

6) Из примера 6 следует, что $\pi_i(S^2 \vee S^1) = \pi_i(\ldots \vee S^2 \vee S^2 \vee \ldots)$ при $i > 1$. Действительно, универсальная накрывающая является прямой, в целых точках которой нанизаны сферы S^2. Это же относится к группам $\pi_i(V)$ для области $V = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$, где окружность S^1 незаузлена, так как V стягивается к $S^2 \vee S^1$.

7) Для всех поверхностей (замкнутых и открытых), кроме $\mathbb{R}P^2$ и S^2, универсальная накрывающая есть (топологически) $\mathbb{R}^2$. Для сферы с g ручками это было показано в § 20. Поэтому $\pi_i = 0$ для всех $i > 1$.

3. Зависимость гомотопических групп от начальной точки. Разберем теперь вопрос о зависимости гомотопических групп $\pi_i(M, x_0)$ от точки $x_0 \in M$. Пусть x_0 и x_1 — точки из M и $\gamma(t)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$,— путь из $x_0 = \gamma(2)$ в $x_1 = \gamma(1)$. Пусть элемент $\alpha \in \pi_i(M, x_1)$ представлен отображением единичного диска $\alpha\colon D_1^i \to M$, $s_0 \to x_1$. Мы сейчас определим отображение $\gamma^*(\alpha)\colon D_2^i \to M$

диска радиуса 2 (рис. 128). Область $1 \leqslant \sum_{j=1}^{i} (x_j)^2 \leqslant 2$ представляет собой $S^{i-1} \times [1, 2]$, т. е. сферу S^{i-1}, умноженную на единичный отрезок $[1, 2]$. Определим отображение $\tilde{\gamma}$: $S^{i-1} \times [1, 2] \to M$, полагая $\tilde{\gamma}(y, t) = \gamma(t)$, где $1 \leqslant t \leqslant 2$. Отображение γ^* (α): $D_2^i \to M$ определяется так:

$$\gamma^*(\alpha) = \alpha \text{ на } D_1^i \subset D_2^i,$$

$$\gamma^*(\alpha) = \tilde{\gamma} \text{ на области } \{1 \leqslant \sum (x_j)^2 \leqslant 2\} = S^{i-1} \times [1, 2].$$

Имеет место

Теорема 2. 1) *Преобразование* $\alpha \mapsto \gamma^*(\alpha)$ *зависит лишь от гомотопического класса пути* γ, *ведущего из* x_0 *в* x_1, *и определяет изоморфизм*

$$\gamma^*\colon \pi_i(M, x_1) \to \pi_i(M, x_0).$$

В частности, для односвязных пространств этот изоморфизм не зависит от пути.

2) *Для замкнутого пути* $\gamma \in \pi_1(M, x_0)$ *сопоставление* $\alpha \mapsto \gamma^*(\alpha)$ *определяет действие группы* $\pi_1(M, x_0)$ *на* $\pi_i(M, x_0)$ *посредством групповых изоморфизмов. Если* f: $X \to M$ — *универсальное накрытие, определяемое свободным действием дискретной группы* Γ *на* X, *то* $\Gamma = \pi_1(M, x_0)$, *и группа* Γ *действует на группе* $\pi_i(X) = \pi_i(M)$ *движениями* $X \to X$. *Это действие совпадает с действием фундаментальной группы* $\pi_1(M, x_0)$ *на* $\pi_i(M, x_0)$ *как группы операторов. При этом ввиду односвязности* X $(\pi_1(X) = 1)$ *группа* $\pi_i(X, x)$ *не зависит от выбора точки* x *в том смысле, что для двух точек* x', $x'' \in X$ *изоморфизм* $\pi_i(X, x') \to \pi_i(X, x'')$ *не зависит от пути* γ, *соединяющего* x' *и* x''.

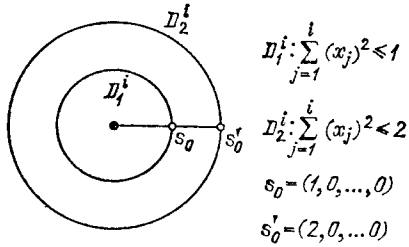


Рис. 128

3) *Классы свободной гомотопии отображений сферы* $S^i \to M$ *(без требования* $s_0 \mapsto x_0$*) находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с орбитами операторов из* $\pi_1(M, x_0)$, *действующей на* $\pi_i(M, x_0)$. *(Если* $\pi_1 = 1$, *то классы свободной гомотопии соответствуют элементам* $\alpha \in \pi_i(M, x_0)$.)

Доказательство утверждений 1), 3) и первой части утверждения 2) в точности аналогично доказательству теоремы 17.4 для фундаментальной группы π_1 (здесь нет разницы между случаем $i = 1$ и случаем $i > 1$). Существенно новой является лишь часть утверждения 2), относящаяся к универсальному накрытию f: $X \to M$ и действию группы Γ на группах $\pi_i(X) = \pi_i(M, x_0)$.

Совпадение группы Γ с группой $\pi_1(M, x_0)$ было доказано ранее — см. теорему 19.2. Движение $g\colon X \to X$ из группы Γ порождает изоморфизм $\pi_i(X, x') \xrightarrow{g^*} \pi_i(X, x'')$, где $x'' = g(x')$. Однако имеется канонический изоморфизм $\pi_i(X, x') \approx \pi_i(X, x'')$, не зависящий от соединяющего эти точки пути. В силу следствия 1 $\pi_i(X) \approx \pi_i(M, x)$ при $i > 1$. Рассмотрим элемент $\alpha \in \pi_i(X, x')$, представленный отображением диска радиуса 1:

$$\alpha\colon D_1^i \to X, \quad \partial D_1^i \to x'.$$

Образ $g(\alpha)$ есть отображение

$$g(\alpha)\colon D_1^i \to X; \quad \partial D_1^i \to x'' = g(x').$$

Рассмотрим диск D_2^i радиуса 2 и путь γ, ведущий из x' в x''. Строим отображение $\gamma^* g(\alpha)\colon D_2^i \to X$ как выше (см. рис. 95), перенося вдоль пути γ элемент g^*a из точки x'' в x'. Проекция отображения $\gamma^* g(\alpha)$ в M по определению совпадает с $g^*(\alpha) \in \pi_i(M, x_0)$; здесь $\alpha \in \pi_i(M, x_0)$, где $x_0 = f(x') = f(x'')$ и α соответствует α при изоморфизме $\pi_i(X, x) = \pi_i(M, x_0)$, порожденном проекцией $f\colon X \to M$. Элемент $g \in \Gamma$ отождествляется с элементом из $\pi_1(M, x_0) = \Gamma$. Тем самым теорема доказана.

Примеры. 1. Для накрытия $f\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ имеем $\Gamma = \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, где образующая есть преобразование $g\colon S^2 \to S^2$, $g(x) = -x$, меняющее ориентацию. Поэтому действие элемента g на группе $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ с образующей $1 \in \mathbb{Z}$ таково:

$$g^*(1) = -1.$$

Заметим, что для $\mathbb{R}P^3 = SO(3)$ имеем также $\Gamma = \pi_1 = \mathbb{Z}_2$ с образующей g ($g^2 = 1$). Далее $\pi_3(\mathbb{R}P^3) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ с образующей $1 \in \mathbb{Z}$. Однако здесь $g(1) = 1$ (проверьте!).

2. Для универсального накрытия $X \to S^2 \vee S^1$ пространство X реализовано в виде прямой $\mathbb{R}^1$, $-\infty < t < +\infty$, у которой в целых точках $t = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, приколоты сферы S_n^2. Группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ порождена образующей g, действующей так:

$$g\colon t \mapsto t + 1,$$

$$g\colon S_n^2 \to S_{n+1}^2,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Очевидно, группа $\pi_2(X)$ есть прямая сумма групп $\mathbb{Z}$ в бесконечном количестве с образующими

$$a_n\colon S^2 \to S_n^2 \text{ (степень } a_n \text{ равна 1).}$$

По определению имеем

$$g(a_n) = a_{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Так как $\Gamma = \pi_1(S^2 \vee S^1)$, $\pi_2(X) = \pi_2(S^2 \vee S^1)$, имеем типичный элемент из группы $\pi_2(S^2 \vee S^1)$

$$a = \sum_{i \geqslant m}^{n} \lambda_i g^i (a_0),$$

где λ_i — целые числа, $n \geqslant m$. Букет $S^2 \vee S^1$ гомотопически эквивалентен области $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^2$, где окружность S^1 незаузлена.

Задача. Пусть U — область в $\mathbb{R}^3$, полученная из заполненного тора выкалыванием одной внутренней точки. Найти группы π_1, π_2 и действие π_1 на π_2.

4. Случай групп Ли. Если многообразие M является группой Ли, то имеет место

Теорема 3. *Группа $\pi_1(M)$ коммутативна; действие $\pi_1(M)$ на всех группах $\pi_i(M)$ тривиально.*

Доказательство. Два любых отображения f, g: $K \to M$ можно перемножать, используя групповую структуру в M: $fg(k) = f(k)g(k)$. Если f и g таковы, что $f(k_0) = g(k_0) = 1$, то это же верно и для произведения fg. Кроме того, если f гомотопно f', а g гомотопно g', то fg гомотопно $f'g'$. Таким образом, гомотопические классы $[K, M]$ образуют группу. Пусть $K = S^1$ и f, g представляют элементы из $\pi_1(M, 1)$; покажем, что их произведение $fg(x) = f(x)g(x)$ совпадает с их обычным произведением в π_1.

Можно гомотопией привести эти отображения к виду:

$$f(x) = 1 \text{ для всех } x \in D^-,$$

$$g(x) = 1 \text{ для всех } x \in D^+.$$

Здесь S^1 задается в виде $x^2 + y^2 = 1$, отрезок D^+ выделяется неравенством $y \geqslant 0$, отрезок D^- — неравенством $y \leqslant 0$. Точка $s_0 \in S^1$ имеет координаты $(1, 0)$.

Произведение fg в группе $\pi_1(M, 1)$ совпадает при указанном выборе представителей с групповым произведением отображений f и g

$$fg(x) = f(x)\,g(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D^-, \\ f(x), & x \in D^+. \end{cases}$$

Ясно также, что при таком выборе представителей $f(x)g(x) = g(x)f(x)$. Таким образом, произведение не зависит от порядка сомножителей, т. е. группа $\pi_1(M, 1)$ коммутативна.

Введем теперь групповой эквивалент действия π_1 на π_i $(i > 1)$. Рассмотрим диск $D_2^i = \left\{ \sum_{j=1}^{i} (x^j)^2 \leqslant 4 \right\}$ радиуса 2 и в нем диск $D_1^i = \left\{ \sum_{j=1}^{i} (x^j)^2 \leqslant 1 \right\}$ радиуса 1. Область $1 \leqslant \sum (x^j)^2 \leqslant 4$ есть кольцо $S^{i-1} \times I$. Рассмотрим два отображения диска D_2^i в M:

1. Если $\gamma(t)$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, представляет элемент из $\pi_1(M, 1)$, то имеется отображение

$$S^{i-1} \times I \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{\gamma} M,$$

$$\varphi(s, t) = t.$$

Так как $\gamma\varphi(s, 1) = 1 \in M$, то можно продолжить это отображение до отображения диска $\psi_\gamma\colon D_2^i \to M$, положив $\psi_\gamma(D_1^i) = 1$. Отображение $\psi_\gamma\colon D_2^i \to M$ переводит край ∂D_1^i в точку $1 \in M$ и стягивается к тривиальному отображению, причем в процессе гомотопии край ∂D_1^i все время переходит в точку (заметим, что образ $\psi_\tau(x) \subset M$ одномерен; см. рис. 129).

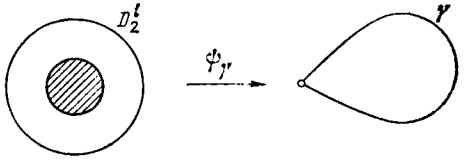


Рис. 129

2. Зададим отображение $\alpha\colon D_1^i \to M$, $\alpha(\partial D_1^i) = 1$, представляющее элемент $\alpha \in \pi_i(M, 1)$ на диске D_1^i. Продолжим α до отображения $\tilde{\alpha}\colon D_2^i \to M$, положив $\tilde{\alpha}(D_2^i - D_1^i) = 1$. Рассмотрим произведение $\tilde{\alpha}\psi_\tau(x) = \tilde{\alpha}(x)\psi_\tau(x) = \psi_\tau(x)\tilde{\alpha}(x)$, $x \in D_2^i$. Это произведение по геометрической конструкции представляет элемент $\gamma^*\alpha$ из $\pi_i(M, 1)$, так как $\tilde{\alpha}\psi_\tau$ совпадает с α на диске D_1^i и проектирует кольцо в путь γ вне диска D_1^i. Однако отображение $\psi_\gamma\colon D_2^i \to M$ стягивается к точке, как было указано выше (рис. 129). Обозначим эту гомотопию через ψ_τ, где $\psi_0 = \psi_\gamma$, $\psi_1(x) = 1$ и $\psi_\tau(\partial D_2^i) = 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Произведение $\tilde{\alpha}\psi_\tau(x) = \tilde{\alpha}(x)\psi_\tau(x)$ дает гомотопию, из которой следует равенство элементов α и $\gamma^*\alpha$ в группе $\pi_i(M, 1)$.

Теорема доказана.

Задачи. 1. Докажите, что если M — группа Ли, то произведение в группах $\pi_i(M)$ можно эквивалентным образом задать формулой $fg(x) = f(x)g(x)$.

2. Распространите теорему 3 на случай *H-пространств*; так называются пространства, которые обладают непрерывным умножением $\psi\colon H \times H \to H$ с единицей $1 \in H$, т. е. таким элементом, что $\psi(x, 1) = \psi(1, x) = x$.

В действительности достаточно, чтобы умножение обладало «гомотопической» единицей, т. е. чтобы отображения $H \to H$, определяемые формулами $x \mapsto \psi(x, 1)$ и $x \mapsto \psi(1, x)$, были гомотопны тождественному. Таким, например, является пространство петель $H = \Omega(x_0, M)$ (проверьте!). Более того, H-пространство $\Omega(x_0, M) = H$ является, как говорят, «H-группой»: а) умножение $\psi\colon H \times H \to H$, $\psi(h, g) = hg$, обладает «гомотопически

обратным» элементом $h^{-1} = \varphi(h)$ таким, что отображение $H \to H$, переводящее h в hh^{-1}, гомотопно постоянному отображению со значением 1; б) умножение ψ: $H \times H \to H$ «гомотопически ассоциативно», т. е. отображения $H \times H \times H \to H$, определяемые формулами

$$(h_1, h_2, h_3) \mapsto \psi(\psi(h_1, h_2), h_3) = (h_1 h_2) h_3,$$

$$(h_1, h_2, h_3) \mapsto \psi(h_1, \psi(h_2, h_3)) = h_1 (h_2 h_3),$$

гомотопны.

Обратным к $h = \gamma(t)$ является путь $\gamma^{-1}(t)$ в $\Omega(x_0, M)$, а гомотопическая ассоциативность вытекает из следующего утверждения.

Задача. Множество (группа) всех гомеоморфизмов отрезка $I(0, 1)$ на себя с неподвижными концами (т. е. монотонных замен параметра на пути) стягиваемо.

Уже был установлен изоморфизм (см. выше п. 2)

$$\pi_i(M, x_0) = \pi_{i-1}(\Omega(x_0, M), e), \quad i > 1.$$

Группа связных компонент $\pi_0(\Omega(x_0, M)) = \pi_1(M, x_0)$ действует на группах $\pi_j(\Omega, e)$, $\Omega = \Omega(x_0, M)$, посредством преобразований

$$\alpha \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma, \quad \alpha \in \pi_j(\Omega, e),$$
$$\gamma \in \pi_0(\Omega) = \pi_1(M, x_0).$$

Задача. Доказать, что действие $\alpha \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma$ группы $\pi_0(\Omega)$ на $\pi_j(\Omega, e)$ совпадает с введенным ранее стандартным действием группы $\pi_1(M)$ на $\pi_{j+1}(M)$.

Для групп Ли и H-пространств с гомотопической единицей в силу доказанных выше фактов зависимость π_i и π_j от начальной точки несущественна, так как переносы вдоль замкнутых путей тождественны. Это же относится к любым односвязным пространствам M. Во всех этих случаях классы свободной гомотопии отображений сферы $[S^i, M]$ точно соответствуют элементам группы $\pi_i(M)$, причем начальной точки можно явно не указывать (она несущественна).

5. **Умножение Уайтхеда.** В гомотопических группах имеется еще одна интересная операция — *произведение Уайтхеда*.

Рассмотрим прямое произведение сфер $M = S^i \times S^j$ и лежащий в нем букет («координатный крест») $A = S^i \vee S^j = (S^i \times s_0') \cup (s_0'' \times S^j)$, где $s_0' \in S^i$, $s_0'' \in S^j$ — отмеченные точки сфер S^i, S^j. В произведении $S^i \times S^j$ отмечена точка $s_0 = (s_0', s_0'')$. Определено естественное отображение

$$D^{i+j} = D^i \times D^j \xrightarrow{f} S^i \times S^j,$$

где f есть прямое произведение стандартных отображений α: $D^i \to S^i$, $\partial D^i \to s_0'$ и β: $D^j \to S^j$, $\partial D^j \to s_0''$, каждое из которых имеет степень $+1$. Отображения α и β представляют базисные элементы групп $\alpha \in \pi_i(S^i, s_0') = \mathbb{Z}$, $\beta \in \pi_j(S^j, s_0'') = \mathbb{Z}$. Отображение f переводит границу $\partial D^{i+j} = \partial(D^i \times D^j) = (\partial D^i) \times D^j \cup D^i \times (\partial D^j)$ в координатный крест $A = S^i \vee S^j \subset M = S^i \times S^j$, так как $\alpha(\partial D^i) = s_0'$, $\beta(\partial D^j) = s_0''$.

Таким образом, отображение f представляет элемент группы $\pi_{i+j}(S^i \times S^j, S^i \vee S^j, s_0)$. Имеется гомоморфизм ∂, введенный в § 21:

$$\partial\colon \pi_{i+j}(S^i \times S^j, S^i \vee S^j, s_0) \to \pi_{i+j-1}(S^i \vee S^j, s_0).$$

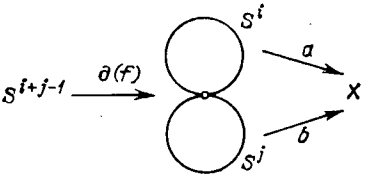


Рис. 130

С помощью элемента $\partial(f)$ в группе $\pi_{i+j-1}(S^i \vee S^j, s_0)$ мы определим так называемое *произведение Уайтхеда* в гомотопических группах любого пространства X: произведением элементов $a \in \pi_i(X, x_0)$, $b \in \pi_j(X, x_0)$ будет служить некоторый элемент $[a, b] \in \pi_{i+j-1}(X, x_0)$. Конструкция: пусть a: $(S^i, s_0') \to (X, x_0)$ и b: $(S^j, s_0'') \to (X, x_0)$ — отображения, представляющие одноименные элементы гомотопических групп. Рассмотрим букет $S^i \vee S^j$, скрепленный в точке $s_0 = s_0' = s_0''$. Мы имеем отображение $a \vee b$: $S^i \vee S^j \to X$, переводящее s_0 в x_0 (рис. 130). Элемент $\partial(f)$ определяет стандартное отображение (композицию)

$$[a, b]\colon S^{i+j-1} \xrightarrow{\partial f} S^i \vee S^j \xrightarrow{a \vee b} X.$$

Тем самым построен элемент $[a, b] \in \pi_{i+j-1}(X, x_0)$. Ориентация в $D^i \times D^j$, определяемая репером (τ^i, τ^j), отличается от ориентации в $D^i \times D^j = D^j \times D^i$ с репером (τ^j, τ^i) знаком $(-1)^{ij}$. Отсюда вытекает следующее свойство произведения Уайтхеда:

$$[a, b] = (-1)^{ij}[b, a].$$

Мы будем в основном рассматривать произведения $[a, b]$ в случае $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$, когда группы π_i, π_j абелевы и записываются аддитивно и произведение Уайтхеда билинейно по a, b. Отметим два особых случая.

Случай $i = 1$, $j = 1$: произведение $[a, b]$ совпадает с коммутатором $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ в группе $\pi_1(x, x_0)$ (докажите!).

Случай $i = 1$, $j \geqslant 2$: произведение $[a, b]$ сводится к действию $\pi_1(X, x_0)$ на $\pi_i(X, x_0)$:

$$[a, b] = a^*(b) - b,$$

где $a \in \pi_1$, $b \in \pi_i$ (докажите!).

Рассмотрим теперь абелевы группы (записываемые аддитивно)

$$\Gamma_0 = \pi_3(X) + \pi_5(X) + \pi_7(X) + \ldots + \pi_{2q+1}(X) + \ldots,$$
$$\Gamma_1 = \pi_2(X) + \pi_4(X) + \pi_6(X) + \ldots + \pi_{2q}(X) + \ldots$$

По определению для произведения Уайтхеда имеем

$$[\Gamma_0, \Gamma_0] \subset \Gamma_0,$$
$$[\Gamma_0, \Gamma_1] \subset \Gamma_1,$$
$$[\Gamma_1, \Gamma_1] \subset \Gamma_0.$$

При этом для $a \in \Gamma_m$, $b \in \Gamma_n$, $m, n = 0, 1$, закон коммутирования таков:

$$[a, b] = (-1)^{(m+1)(n+1)}[b, a].$$

Задача. Показать, что для трех элементов $a \in \Gamma_m$, $b \in \Gamma_n$, $c \in \Gamma_p$, $m, n, p = 0, 1$, имеет место обобщенное тождество Якоби

$$(-1)^{(p+1)(m+1)}[[a, b], c] + (-1)^{(m+1)(n+1)}[[c, a], b] + (-1)^{(n+1)(p+1)}[[b, c], a] = 0.$$

$\mathbb{Z}_2$-градуированные пространства $\Gamma_0 \oplus \Gamma_1$, обладающие умножением с подобными свойствами, стали называться в современной литературе «супералгебрами Ли» после того, как они появились в аппарате квантовой физики.

Вычисление произведения Уайтхеда в конкретных случаях бывает затруднительно. Рассмотрим сферу S^{2n} ($n \geqslant 1$) и группу $\pi_{2n}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$ с базисным элементом $a \in \pi_{2n}(S^{2n})$. Квадрат $[a, a]$ оказывается элементом бесконечного порядка в группе $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ (для $n = 1$ он будет указан в § 23). Для нечетномерных сфер S^{2n-1} базисный элемент a группы $\pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}$ имеет квадрат Уайтхеда порядка 2 (или нулевой):

$$[a, a] = (-1)^{(2n-1)(2n-1)}[a, a] = -[a, a],$$
$$2[a, a] = 0 \text{ в группе } \pi_{4n-3}(S^{2n-1}).$$

Утверждение. *Для групп Ли и H-пространств с единицей произведение Уайтхеда тривиально*: $[a, b] = 0$ *для любых* $a \in \pi_i(M)$, $b \in \pi_j(M)$.

Доказательство. Если хотя бы одно из чисел i, j (скажем, i) равно единице, то утверждение следует из теоремы о коммутативности $\pi_1(M)$ и тривиальности действия $\pi_1(M)$ на всех $\pi_j(M)$. Пусть $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$. Элементы a и b представлены отображениями α: $D^i \to M$, $\partial D^i \to 1$, β: $D^j \to M$, $\partial D^j \to 1$. Рассмотрим произведение

$$\alpha\beta\colon D^i \times D^j \to M,$$

полагая $\alpha\beta(x, y)=\alpha(x)\beta(y)$. На границе $\partial(D^i\times D^j)=S^{i+j-1}$ отображение $\alpha\beta$ индуцирует элемент $[a, b]\in\pi_{i+j-1}(M)$ по определению последнего. Поэтому $[a, b]=0$. Утверждение доказано.

§ 23. Сведения о гомотопических группах сфер. Оснащенные многообразия. Инвариант Хопфа

1. Оснащенные многообразия и гомотопические группы сфер. Изучение особых точек векторных полей и связанных с ними инвариантов приводило нас к использованию степени отображения $S^n\to S^n$, т. е. группы $\pi_n(S^n)$. Все группы $\pi_i(S^n)$ с $i<n$, как доказывалось, тривиальны. Рассмотрим теперь задачу о гомотопической классификации не обращающихся в нуль векторных полей n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $n(x)\to n_0$ при $|x|\to\infty$. Потребовав дополнительно, чтобы $|n|=1$, мы получаем непрерывное отображение

$$\mathbb{R}^n\cup\infty\to S^{n-1},$$

причем $(\infty)\mapsto n_0\in S^{n-1}$. Однако $\mathbb{R}^n\cup(\infty)=S^n$. Поэтому мы приходим к задаче о вычислении группы $\pi_{n+1}(S^n)$. Более общо: если поле $n(x)$ представляет собой произвольную векторнозначную функцию $n(x)=(\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x))\neq 0$, $m\neq n$, то, считая, что $|n|=1$, получим отображение $S^n\to S^{m-1}$. Тем самым задача сводится к вычислению групп $\pi_n(S^{m-1})$.

До сих пор из гомотопических групп сфер мы нашли только группы $\pi_i(S^1)=0$, $i>1$; $\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$ и $\pi_i(S^n)=0$, $i<n$. Мы укажем здесь геометрический метод изучения гомотопических групп, основанный на изучении полных прообразов регулярной точки.

Рассмотрим отображение f: $S^{n+k}\to S^n$; мы будем считать его гладким. Пусть точка $s_0\in S^n$ является правильной точкой отображения f. Выберем на сфере S^n локальную систему координат в окрестности точки s_0, т. е. зададим в той окрестности n функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ таких, что уравнения $\varphi_1=0, \ldots, \varphi_n=0$ выделяют только точку s_0 и градиенты $\operatorname{grad}\varphi_i$ линейно независимы в точке. Из правильности отображения f в точке s_0 следует, что полный прообраз $f^{-1}(s_0)$ является гладким k-мерным замкнутым многообразием

$$f^{-1}(s_0)=W^k\subset S^{n+k}.$$

Более точно, прообразы функций φ_i — функции $\widetilde{\varphi}_i(x)=f^*\varphi_i(x)=\varphi_i(f(x))$, определенные в окрестности W^k, задают W^k уравнениями

$$\widetilde{\varphi}_1=0, \ \ldots, \ \widetilde{\varphi}_n=0.$$

Из правильности точки s_0 для f следует, что во всех точках из $f^{-1}(s_0)=W^k$ градиенты $\operatorname{grad}\widetilde{\varphi}_i$ линейно независимы и направ-

лены (как векторы) нормально к W^k в евклидовой метрике $S^{n+k} \setminus \infty = \mathbb{R}^{n+k}$.

Таким образом, отображению $f\colon S^{n+k} \to S^n$ поставлена в соответствие пара (W^k, τ^n), где $W^k = f^{-1}(s_0)$ и τ^n — реперное поле в $\mathbb{R}^{n+k} = S^{n+k} \setminus \infty$, заданное в точках W^k и нормальное к W^k в евклидовой метрике, $\tau^n = (\operatorname{grad} \widetilde{\varphi}_1, \ldots, \operatorname{grad} \widetilde{\varphi}_n)$, $\widetilde{\varphi}_i = f^* \varphi_i = \varphi_i(f(x))$.

Определение 1. Пара (W^k, τ^n), состоящая из замкнутого многообразия $W^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ с невырожденным нормальным n-реперным полем τ^n, называется *оснащенным многообразием* (без края). Само поле τ^n при этом называется *оснащением*.

Поскольку в $\mathbb{R}^{n+k}$ имеется каноническая ориентация, поле τ^n определяет ориентацию W^k.

Рассмотрим гладкую гомотопию $F\colon S^{n+k} \times I \to S^n$, правильную в точке $s_0 \in S^n$ и связывающую отображения f_0, $f_1\colon S^{n+k} \to S^n$. Рассмотрим прообраз

$$V^{k+1} = F^{-1}(s_0);$$

этот прообраз лежит в $S^{n+k} \times I$ и задается уравнениями $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_n = 0$, где $\Phi_j = F^* \varphi_j$. Градиенты $\operatorname{grad} \Phi_j$ линейно независимы на V^{k+1}. Мы получаем пару $(V^{k+1} \subset S^{n+k} \times I, \tau^n)$, где $\tau^n = (\operatorname{grad} \Phi_1, \ldots, \operatorname{grad} \Phi_n)$ — нормальное к V^{k+1} реперное поле. На краях $t = 0, 1$ получаем многообразия $W_0^k = V^{k+1} \cap (t = 0)$ и $W_1^k = V^{k+1} \cap (t = 1)$ с индуцированными «оснащениями» — реперными полями, полученными ограничением поля τ^n на край. Само многообразие V^{k+1} при $t = 0, 1$ не касается краев; поэтому можно без ограничения общности считать, что многообразие V^{k+1} нормально подходит к краям $t = 0$ и $t = 1$. С подобной ситуацией мы сталкивались в § 13, где k равнялось нулю, многообразие W^k было набором точек $\{x_1, \ldots, x_m\} = f^{-1}(s_0)$, а оснащение τ^n задавало «ориентацию» или знаки точек прообраза. Многообразие V^{k+1} было одномерным, и оснащение τ^n на него продолжалось с краев.

Определение 2. Пару $(V^{k+1} \subset S^{n+k} \times I, \tau^n)$, состоящую из многообразия V^{k+1} с краем, вложенного так, что оно нормально (под углом 90°) подходит к краям при $t = 0, 1$, и из нормального невырожденного n-реперного поля τ^n, назовем *оснащенным многообразием с краем*.

Так как в сфере S^n дополнение к малой окрестности точки s_0 с координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ стягивается к точке, мы можем все это дополнение считать одной точкой. При малом $\varepsilon > 0$ имеем: ε-окрестность W_ε многообразия $W^k \subset S^{n+k}$ ввиду наличия поля τ^n диффеоморфна $W^k \times D_\varepsilon^n$, где D_ε^n — диск радиуса ε в нормальной плоскости к W^k в точке $x \in W^k$, порожденной векторами репера $\tau^n(x)$. Аналогично ε-окрестность V_ε многообразия

$V^{k+1} \subset V^{n+k} \times I$ диффеоморфна $V^{k+1} \times D^n_\varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$. Рассмотрим два замкнутых оснащенных многообразия (W^k_1, τ^n_1) и (W^k_2, τ^n_2) в $S^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k} \cup \infty$.

Определение 3. Оснащенные многообразия (W^k_j, τ^n_j) называются *эквивалентными*, если найдется оснащенное многообразие $(V^{k+1}, \tau^n) \subset S^{n+k} \times I$, которое на краях высекает исходные оснащенные многообразия

$$W^k_1 = V^{k+1}|_{t=0}, \quad \tau^n_1 = \tau^n|_{t=0};$$
$$W^k_2 = V^{k+1}|_{t=1}, \quad \tau^n_2 = \tau^n|_{t=1}.$$

По-другому эту эквивалентность можно описать так. Оснащенные многообразия (W^k_j, τ^n_j) эквивалентны, если многообразие (W^k, τ^n), где $W^k = W^k_1 \cup W^k_2$, а τ совпадает с τ^n_1 на W^k_1, а на W^k_2 отличается от τ^2_n только направлением первого вектора, эквивалентно в предыдущем смысле нулю (т. е. пустому многообразию).

Имеет место несложная

Теорема 1. *Классы эквивалентности замкнутых оснащенных многообразий $(W^k, \tau^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\pi_{n+k}(S^n)$.*

Доказательство. Отображение $f\colon S^{n+k} \to S^n$, правильное в точке s_0, определяет, как мы видим, замкнутое оснащенное многообразие (W^k, τ^n), а гомотопия $F\colon S^{n+k} \times I \to S^n$ между двумя такими отображениями порождает эквивалентность оснащенных многообразий. Обратно, замкнутое оснащенное многообразие $(W^k, \tau^n) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ определяет отображение $S^{n+k} \to S^n$: действительно, ε-окрестность W_ε многообразия W^k при достаточно малом $\varepsilon > 0$, как указывалось выше, имеет вид прямого произведения

$$W_\varepsilon = W^k \times D^n_\varepsilon.$$

Проекция $W^k \times D^n_\varepsilon \to D^n_\varepsilon$ естественно продолжается до отображения $S^{n+k} \to S^n$, если мы весь край шара D^n_ε в образе f будем считать одной точкой: $S^n = D^n_\varepsilon \cup$ (одна точка). Все дополнение к окрестности W_ε в сфере S^{n+k} перейдет в одну эту точку.

Аналогично строится отображение $F\colon S^{n+k} \times I \to S^n$, если задано оснащенное многообразие с краем $(V^{k+1}, \tau^n) \subset S^{n+k} \times I$. Тем самым лемма доказана.

По существу, в § 13 при вычислении группы $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ мы пользовались частным случаем оснащенных многообразий $(k = 0)$.

Замечание. Сложение в гомотопической группе $\pi_{n+k}(S^n)$ интерпретируется как объединение двух непересекающихся (и

удаленных друг от друга) оснащенных многообразий в $\mathbb{R}^{n+k}$ (проверьте!).

Установим теперь одно общее свойство классов эквивалентности замкнутых оснащенных многообразий.

Теорема 2. *Для любых $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ в каждом классе эквивалентности имеется связное замкнутое оснащенное многообразие (при $k = 0$ это неверно).*

Доказательство. Пусть задано несвязное оснащенное многообразие $(W_1^k, \tau_1^n) \cup (W_2^k, \tau_2^n) = (W^k, \tau^n) \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset S^{n+k}$. Покажем, что это оснащенное многообразие эквивалентно связному. Рассмотрим гладкий несамопересекающийся путь (одномерное подмногообразие) $\gamma(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, соединяющий точки $x_0 \in W_1^k$ и $x_1 \in W_2^k$. Мы требуем, чтобы путь γ подходил нормально к W_1^k при $\tau = 0$ и к W_2^k при $\tau = 1$ вдоль направления первого вектора m_1 из реперного поля $\tau_j^n = (m_1, \ldots, m_n)$, $j = 1, 2$. Зададим в каждой точке пути $\gamma(\tau)$ нормальную к γ k-мерную плоскость $\mathbb{R}^k(\tau)$, которая на краях $\tau = 0$, 1 совпадает с k-мерной касательной плоскостью к W_1^k ($\tau = 0$) и W_2^k ($\tau = 1$) (рис. 131). Реперное поле $\tau^{n-1} = (m_2, \ldots, m_n)$ продолжим с краев $\tau = 0$, 1 на кривую $\gamma(t)$ так, чтобы оно было нормально к направлениям этих k-мерных площадок $\mathbb{R}^k(\tau)$. Рассмотрим малое «k-мерное утолщение» U_ε^{k+1} кривой $\gamma(\tau)$ вдоль направлений $\mathbb{R}^k(\tau)$ (см. рис. 131). На краях $\tau = 0$, 1 это утолщение производится

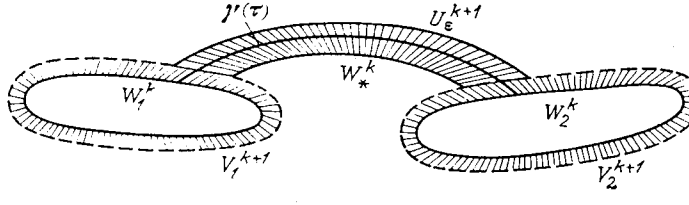


Рис. 131

вдоль касательных плоскостей к W_1^k, W_2^k. Кроме того, произведем малые утолщения V_1^{k+1}, V_2^{k+1} самих W_1^k и W_2^k вдоль направлений m_1 первого вектора реперов τ_1^n и τ_2^n (см. рис. 131). Объединение $V^{k+1} = V_1^{k+1} \cup U_\varepsilon^{k+1} \cup V_2^{k+1}$ является $(k+1)$-мерным многообразием V^{k+1} с краем

$$\partial V^{k+1} = W_1^k \cup W_2^k \cup W_*^k,$$

где W_*^k связно. Утолщение можно произвести так, чтобы многообразие V^{k+1} было гладким (не было углов), т. е. чтобы было гладким многообразие W_*^k.

Реперное поле $\tau^{n-1}=(m_2, \ldots, m_n)$ продолжается на V^{k+1} как нормальное поле к V^{k+1} в $\mathbb{R}^{n+k}$. Мы приходим, таким образом, к следующей общей ситуации: задано многообразие с краем $V^{k+1}\subset\mathbb{R}^{n+k}$ и реперным полем τ^{n-1}, нормальным к V^{k+1} в $\mathbb{R}^{n+k}$. На крае имеется репер $\tau^n=(m_1, \tau^{n-1})$, где вектор m_1 является внутренней нормалью к краю ∂V^{k+1}, касательной к V^{k+1}. Таким образом, край $(\partial V^{k+1}, \tau^n)$ является оснащенным многообразием в $\mathbb{R}^{n+k}$.

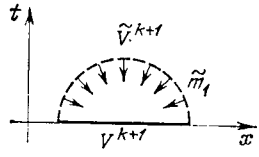


Рис. 132

Лемма 1. *При этих условиях оснащенное многообразие* $(\partial V^{k+1}, \tau^n)$ *эквивалентно нулю.*

Доказательство. Рассмотрим числовую функцию $t(x)$ на V^{k+1}, где $t(x)=0$ на крае ∂V^{k+1} и $1>t(x)>0$ внутри V^{k+1}. Эту функцию мы построим таким образом, чтобы график $(x, t(x))$ функции $t(x)$ в произведении $V^{k+1}\times I\subset S^{n+k}\times I$ был гладким многообразием $\widetilde{V}^{k+1}\subset S^{n+k}\times I$, нормально подходящим к краю $\partial\widetilde{V}^{k+1}$ при $t=0$ (рис. 132). Построим реперное поле $\widetilde{\tau}^n$, нормальное к $\widetilde{V}^{k+1}$ в $S^{n+k}\times I$. Реперное поле $\tau^{n-1}=(m_2, \ldots, m_n)$ мы поднимаем на $\widetilde{V}^{k+1}$ тривиально: параллельно переносим все векторы m_j $(j\geqslant 2)$ из точки $x\in V^{k+1}\subset\mathbb{R}^{n+k}\times 0$ в соответствующую точку $\tilde{x}\in\widetilde{V}^{k+1}\subset\mathbb{R}^{n+k}\times I$, где $\tilde{x}=(x, t(x))$. Получаем поле $\widetilde{\tau}^{n-1}=(\widetilde{m}_2, \ldots, \widetilde{m}_n)$ на $\widetilde{V}^{k+1}$. Построим, далее, векторное поле $\widetilde{m}_1$ на графике $\widetilde{V}^{k+1}\subset V^{k+1}\times I$. Пара $(V^{k+1}, \widetilde{V}^{k+1})$ совместно ограничивает область $U\subset V^{k+1}\times I$. Строим единичное поле $\widetilde{m}_1$ нормально к $\widetilde{V}^{k+1}$ в $V^{k+1}\times I$ внутрь области U так, чтобы при $t=0$ в точках $\partial\widetilde{V}^{k+1}=\partial V^{k+1}$ это поле совпадало с единичной нормалью m_1 внутрь V^{k+1} вдоль границы ∂V^{k+1}. Итак, получаем $(\partial\widetilde{V}^{k+1}, \widetilde{\tau}^n)=(\partial V^{k+1}, \tau^n)\subset\mathbb{R}^{n+k}$. Тем самым край $(\partial V^{k+1}, \tau^n)$ эквивалентен нулю как оснащенное многообразие, поскольку все оснащенное многообразие с краем $(\widetilde{V}^{k+1}, \widetilde{\tau}^n)$ в произведении $\mathbb{R}^{n+k}\times I$ не пересекается с основанием $t=1$. Лемма доказана.

Из леммы 1 вытекает теорема, поскольку $\partial V^{k+1}=W_1^k\cup W_2^k\cup W_*^k$ с соответствующими оснащениями, причем W_*^k имеет на одну связную компоненту меньше. Теорема доказана.

2. **Надстройка.** В дальнейшем тексте используем следующие сведения о гомотопических группах ортогональных групп:

1) $\pi_1(SO(2))=\mathbb{Z}$, поскольку $SO(2)=S^1$;

2) $\pi_1(SO(3))=\mathbb{Z}_2$, поскольку $SO(3)=\mathbb{R}P^3$;

3) $\pi_1(SO(n))=\mathbb{Z}_2$, $n\geqslant 3$ (см. гл. 6).

4) Гомоморфизм вложения $\pi_i(SO(n))\to\pi_i(SO(n+1))$ является изоморфизмом при $i<n-1$. Более того, если M — любое многообразие (комплекс) размерности i, то при $i<n-1$ отобра-

жение $[M, SO(n)] \to [M, SO(n+1)]$, индуцированное вложением $SO(n) \to SO(n+1)$, является взаимно однозначным соответствием. При $i = n-1$ гомоморфизм вложения $\pi_i(SO(n)) \to \pi_i(SO(n+1))$ и отображение $[M, SO(n)] \to [M, SO(n+1)]$ являются эпиморфизмами (отображениями «на»), причем ядро $\mathrm{Ker}(i_*)$ является циклической группой бесконечного порядка при четных n. Это очевидно для $n=2$ и будет доказано в гл. 6 в общем случае.

Мы уже знаем, что вложения гладкого компактного k-мерного многообразия M в $\mathbb{R}^{2k+q}$, где $q \geqslant 2$, «незаузлены». Это значит, что для двух гладких вложений $f\colon M \to \mathbb{R}^{2k+q}$, $g\colon M \to \mathbb{R}^{2k+q}$, $q \geqslant 2$, найдется семейство вложений («изотопия») $f_t\colon M \to \mathbb{R}^{2k+q}$, в котором $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Семейство вложений можно рассматривать как гладкое вложение цилиндра $F\colon M \times I \to \mathbb{R}^{2k+q} \times I$ («процесс изотопии»); последнее определяется формулой $F(x, t) = (f_t(x), t)$. Так как $M \times I$ стягивается к $M \times 0$, получаем, что любое оснащение, т. е. реперное поле τ^{k+q}, нормальное к M в $\mathbb{R}^{2k+q}$, распространяется до реперного поля $\overline{\tau}^{k+q}$, нормального к $M \times I$ в $\mathbb{R}^{2k+q} \times I$. Поэтому при $q \geqslant 2$ неважно, какое именно вложение $M \subset \mathbb{R}^{2k+q}$ рассматривается: все вложения переводятся друг в друга с помощью изотопии.

Сколько имеется оснащений при заданном вложении $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$? Если имеется одно нормальное реперное поле τ^n, то любое другое с той же ориентацией получается из него вращением в каждой точке. Таким образом, множество оснащений описывается отображениями $M \to SO(n)$. Гомотопным отображениям $M \to SO(n)$, очевидно, соответствуют эквивалентные оснащения.

Все это позволяет сказать, что при $n \geqslant k+2$ ни сами вложения $M \subset \mathbb{R}^{k+n}$, ни гомотопические классы оснащений $M \to SO(n)$ не зависят от n. Чтобы придать этому высказыванию точный смысл, определим так называемый *гомоморфизм надстройки* E: $\pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$. Конструкция надстройки такова. Предположим, что задано k-мерное оснащенное многообразие (M, τ^n) в $\mathbb{R}^{n+k}$, и рассмотрим вложение $M \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$; присоединим к реперному полю τ^n еще один вектор m_0, нормальный к $\mathbb{R}^{n+k}$ в $\mathbb{R}^{n+k+1}$ и положим $E(M, \tau^n) = (M, (m_0, \tau))$. Аналогично определяется E для оснащенных многообразий с краем. Из сказанного выше вытекает, что при $n \geqslant k+2$ этот гомоморфизм является изоморфизмом:

$$E\colon \pi_{n+k}(S^n) \xrightarrow{\approx} \pi_{n+k+1}(S^{n+1}), \quad n \geqslant k+2.$$

При $n = k+1$ имеем:

а) любое k-мерное многообразие M можно вложить в $\mathbb{R}^{2k+1}$;

б) количество гомотопических классов оснащений вложения $M \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ не меньше, чем количество классов оснащений вложения $M \subset \mathbb{R}^{2k+1+q}$, $q > 0$ (докажите!).

Отсюда следует, что гомоморфизм надстройки

$$E\colon \pi_{2k+1}(S^{k+1}) \to \pi_{2k+2}(S^{k+2})$$

является эпиморфизмом.

На обычном языке отображений надстройка E определяется так: пусть S^{n+k} — экватор в S^{n+k+1} и S^n — экватор в S^{n+1}; отображение экваторов $f\colon S^{n+k} \to S^n$ мы простейшим естественным образом продолжаем до отображения $Ef\colon S^{n+k+1} \to S^{n+1}$ по лучам на верхнюю и нижнюю полусферы; верхний полюс переходит в верхний и нижний — в нижний.

3. **Вычисление групп $\pi_{n+1}(S^n)$.** Вычислим, используя теоремы 1 и 2, группы $\pi_{n+1}(S^n)$. Согласно теоремам 1 и 2 каждый элемент $\alpha \in \pi_{n+1}(S^n)$ представляется связным оснащением одномерного многообразия в $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. окружностью $S^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с некоторым нормальным реперным полем τ^n.

А. Случай $n > 2$. При $n > 2$ все вложения $S^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ изотопны, и мы можем считать, что $S^1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ фактически лежит в плоскости $\mathbb{R}^2 = (x^1, x^2)$ и задается уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$. На окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ имеется «тривиальное» оснащение $\tau_0^n = (m, e_3, e_4, \ldots, e_{n+1})$, где m — вектор внешней нормали к S^1 в $\mathbb{R}^2$ и e_j — базисные орты в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пара (S^1, τ_0^n) задает нулевой элемент группы $\pi_{n+1}(S^n)$. Произвольное оснащение той же окружности получается вращением репера $\tau_0 \to A(x)\tau_0$, где $x \in S^1$ и $A(x) \in SO(n)$. Мы имеем отображение $x \mapsto A(x)$,

$$A\colon S^1 \to SO(n),$$

представляющее элемент $[A] \in \pi_1(SO(n))$. При $n > 2$ имеем $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$. Отсюда следует, что на окружности S^1 имеется всего два гомотопических класса оснащений. Поэтому группа $\pi_{n+1}(S^n)$ при $n > 2$ содержит не более двух элементов.

Задача. Докажите, что пара (S^1, τ_1^n) с нетривиальным оснащением τ_1^n неэквивалентна тривиально оснащенной окружности.

Из утверждения этой задачи и приведенных выше рассуждений следует вывод: $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$.

Б. Случай $n = 2$. Здесь способ вложения $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ мог бы быть a priori существенным, так как имеются узлы. Рассмотрим лишь вложение $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, как и выше, с тривиальным

оснащением τ_0^2. В действительности и здесь оказывается, что всякая оснащенная окружность эквивалентна незаузленной оснащенной окружности. Мы не будем этого доказывать и просто ограничимся рассмотрением стандартного вложения $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Тривиальное оснащение, определяемое в точности так, как выше, задает нулевой элемент группы $\pi_3(S^2)$. Другие оснащения τ^2 задаются вращением A репера τ_0^2 в каждой точке $x \in S^1$:

$$A\colon S^1 \to SO(2) = S^1.$$

Так как $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$, имеем бесконечное число классов оснащений $[A] \in \mathbb{Z}$, занумерованных целыми числами $\tau^2_{(m)}$. Точно так же, как выше, доказывается, что все оснащенные многообразия $(S^1, \tau^2_{(m)})$ не эквивалентны друг другу. Сложение в $\pi_3(S^2)$ складывает эти числа:

$$(S^1, \tau^2_{(m)}) + (S^1, \tau^2_{(q)}) \text{ экв. } (S^1, \tau^2_{(m+q)}).$$

Таким образом, группа $\pi_3(S^2)$ бесконечна (в главе 6 будет доказано иначе, что $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$).

Инвариант Хопфа $H(f)$ для гладкого отображения $f\colon S^3 \to S^2$ определяется так: если $y_0, y_1 \in S^2$ — правильные точки и $M_0 = f^{-1}(y_0)$, $M_1 = f^{-1}(y_1)$, то $H(f) = \{M_0, M_1\}$ — целое число (коэффициент зацепления прообразов, определенный в § 15). Проверьте, что $H(S^1, \tau^2_{(m)}) = m$.

Задачи. 1. Докажите, что $H(f)$ — гомотопический инвариант; найдите $H(f)$ для расслоения $f\colon S^3 \to S^2$; докажите, что $H([a, a])$ четно.

2. Введите аналогичный инвариант Хопфа для элементов из $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ и постройте элементы, для которых он нетривиален.

3. Пусть ω — такая 2-форма объема на сфере S^2, что $\int\limits_{S^3} \omega = 1$, и пусть $f\colon S^3 \to S^2$ — гладкое отображение. Форма $f^*(\omega)$ на сфере S^3 является точной, т. е. существует 1-форма ω_1, для которой $f^*(\omega) = d\omega_1$ (проверьте!). Показать, что число $\int\limits_{S^3} f^*(\omega) \wedge \omega_1$ является целым и совпадает с инвариантом Хопфа $H(f)$.

4. **Группы $\pi_{n+2}(S^n)$.** Как будет показано в главе 6, $\pi_4(S^2) = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$. Группу $\pi_5(S^3)$ изучать не будем (в действительности она также изоморфна $\mathbb{Z}_2$). Укажем метод вычисления группы $\pi_{n+2}(S^n)$ в «стабильном» случае $n > 3$. Элемент $\alpha \in \pi_{n+2}(S^n)$ может быть представлен связной оснащенной поверхностью $(M, \tau^n) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, где $n + 2 \geqslant 6$. Поэтому вложение $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ незаузлено. Как известно, ориентируемая поверхность M — это сфера с g ручками (см. [9]). Поскольку все равно, какое вло-

жение брать, мы считаем, что $M \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Имеется тривиальное оснащение $\tau_0^n = (m_1, e_4, \ldots, e_{n+2})$, где m_1 — нормаль к $M \in \mathbb{R}^3$. и e_j — базисные орты в $\mathbb{R}^{n+2}$, координатных осей. Пара (M, τ_0^k) определяет нулевой элемент в группах $\pi_{n+2}(S^n)$ по лемме 1, так как поле $(e_4, \ldots, e_{n+2}) = \tau_0^{n-1}$ продолжается на область V в $\mathbb{R}^3$, ограниченную поверхностью $M \subset \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим группу $\pi_1(M)$. Пусть элемент $\alpha \in \pi_1(M)$ реализован гладко вложенной направленной окружностью (без самопересечений) $S^1 \subset M$ и n_1 — нормальное поле к S^1 в M такое, что вектор скорости τ вместе с n_1 дает ориентирующий репер (τ, n_1) в M.

Пусть задано нетривиальное оснащение τ^n поверхности $M \subset \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{n+1}$. В базисе τ_0^n это оснащение имеет вид

$$\tau^n = A(x)\,\tau_0^n,$$

$$A\colon M \to SO(n).$$

Для вложенной окружности $S^1 \subset M$, представляющей элемент $\alpha \in \pi_1(M)$, определим функцию $\Phi(\alpha) \in \mathbb{Z}_2$, называемую *функцией Арфа*: ограничим оснащение τ^n на $S^1 \subset M$ и рассмотрим оснащенное многообразие $(S^1, \tau^{n+1}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, где $\tau^{n+1} = (n_1, \tau^n)$, поле n_1 определено выше. Оснащенное многообразие (S^1, τ^{n+1}) представляет элемент $\Phi(\alpha)$ в группе $\pi_{n+2}(S^{n+1}) = \mathbb{Z}_2$. Определена функция $\Phi(\alpha) \in \mathbb{Z}_2$ для элементов $\alpha \in \pi_1(M)$, реализованных вложенными окружностями $S^1 \subset M$.

Задачи. 1. Рассмотрим α и β. Пусть произведение $\alpha\beta \in \in \pi_1(M^2)$ реализовано окружностью $S^1 \subset M^2$. Тогда имеет место формула

$$\Phi(\alpha\beta) = \Phi(\alpha) + \Phi(\beta) + \alpha \circ \beta \pmod 2,$$

где $\alpha \circ \beta$ — индекс пересечения окружностей, представляющих α и β.

2. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g$ — система окружностей на M_g^2 (сфера с g ручками), представляющих образующие группы $\pi_1(M_g^2)$, связанные соотношением $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$. Заметим, что индексы пересечения имеют вид $\alpha_i \circ \beta_j = \delta_{ij}$, $\alpha_i \circ \alpha_j = = 0$, $\beta_i \circ \beta_j = 0$. Докажите, что сумма $\Phi(M_g^2, \tau) = \sum_{i=1}^{g} \Phi(\alpha_i)\Phi(\beta_i)$ не зависит от выбора окружностей α_i, β_i на поверхности M_g^2. Докажите, что равенство $\Phi(M_g^2, \tau) = 0$ является необходимым и достаточным условием существования окружностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$, $\beta_1, \ldots, \beta_g$, для которых $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2) = \ldots = \Phi(\alpha_g) = 0$.

Если $\Phi(\alpha)=0$, то перестройкой Морса можно изменить поверхность $M=M_g^2$, уменьшив на единицу число ручек (т. е. найти эквивалентную оснащенную поверхность меньшего рода). Перестройка производится вдоль окружности $\alpha\subset M$; условие $\Phi(\alpha)=0$ необходимо и достаточно для существования на перестроенной поверхности M_* рода $g-1$ оснащения τ_*^n, эквивалентного исходному. Действительно, рассмотрим отображение «толстой» окружности φ: $S^1\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to M$, где $\varphi(\partial D^2\times 0)=\alpha\subset M$, и образы отрезков $x\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ являются геодезическими нормалями к α в M длины 2ε.

Рассмотрим трехмерное гладкое многообразие с краем

$$W=(M\times I)\bigcup_{\varphi}(D^2\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)),$$

где склейка двух кусков производится по отображению φ:

$$\varphi\colon\ \partial D^2\times(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to M\times 1.$$

Очевидно, $\partial W=(M\times 0)\cup M_*$, и род поверхности M_* равен $g-1$.

Расположим $W\subset\mathbb{R}^{n+2}\times I\,(0,\ 1)$ так, чтобы W ортогонально подходило к краям $\mathbb{R}^{n+2}\times 0$ и $\mathbb{R}^{n+2}\times 1$, причем $W\cap(\mathbb{R}^{n+2}\times 0)=M$ и $W\cap(\mathbb{R}^{n+2}\times 1)=M_*$.

Задача 3. Оснащение τ^n к M в $\mathbb{R}^{n+2}$ можно продолжить на пленку $W\subset\mathbb{R}^{n+2}\times I\,(0,\ 1)$ в том и только в том случае, если $\Phi(\alpha)=0$.

Заметим, наконец, что для сферы $S^2\subset\mathbb{R}^{n+2}$ любое оснащение дает нулевой элемент в группе $\pi_{n+2}(S^n)$, так как $\pi_2(SO(n))=0$, и потому любое оснащение τ^n гомотопно тривиальному оснащению τ_0^n.

Если род поверхности $g\geqslant 2$, то цикл α, для которого $\Phi(\alpha)=0$, обязательно найдется (это следует из утверждения задачи 1). Поэтому в результате перестроек мы придем либо к сфере $(S^2,\ \tau_0^n)$, дающей нулевой элемент, либо к тору $T^2\subset\mathbb{R}^3\subset\mathbb{R}^{n+2}$ с нетривиальным оснащением τ^n (для базисных элементов $\alpha,\ \beta\in\pi_1(T^2)=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ будем иметь $\Phi(\alpha)=\Phi(\beta)=1$, $\alpha\circ\beta=1$). Оказывается, что тор с таким оснащением действительно существует, по конструкции мы не приводим.

Таким образом, $\pi_{n+2}(S^n)=\mathbb{Z}_2$. Далеко идущее развитие теории трех- и четырехмерных многообразий дает возможность вычислить этим методом группы $\pi_{n+3}(S^n)$.

Укажем еще некоторые факты, полученные сложными алгебраическими методами.

а) Все группы $\pi_{n+k}(S^n)$ — абелевы группы с конечным числом образующих; все группы $\pi_{n+k}(S^n)$, кроме случаев $k=0$ и

$n = 2l$, $k = 2l - 1$, конечны; группа $\pi_{4l-1}(S^{2l})$ изоморфна сумме группы $\mathbb{Z}$ и конечной группы.

б) «Стабильные» группы $\Gamma_k = \pi_{n+k}(S^n)$, $n > k + 1$, при $k \leqslant 15$ переписаны в таблице.

0	$\mathbb{Z}$	8	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
1	$\mathbb{Z}_2$	9	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
2	$\mathbb{Z}_2$	10	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_{24}$	11	$\mathbb{Z}_{504}$
4	0	12	0
5	0	13	$\mathbb{Z}_3$
6	$\mathbb{Z}_2$	14	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
7	$\mathbb{Z}_{240}$	15	$\mathbb{Z}_{480} \oplus \mathbb{Z}_2$

Глава 6

ГЛАДКИЕ РАССЛОЕНИЯ (КОСЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ)

§ 24. Гомотопическая теория косых произведений

1. Понятие гладкого расслоения. Гладкое расслоение есть составной объект, включающий в себя:

а) *пространство расслоения* — гладкое многообразие E;

б) *базу расслоения* — гладкое многообразие M;

в) *проекцию* — гладкое отображение p: $E \to M$, дифференциал которого имеет во всех точках максимальный ранг $n = \dim M$;

г) *слой* F — гладкое многообразие;

д) *структурную группу* — группу G гладких преобразований слоя F;

е) *структуру расслоения*: база M покрыта областями $U_\alpha \subset M$, над которыми в полные прообразы введены координаты прямого произведения с помощью диффеоморфизмов φ_α: $F \times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ таких, что $p\varphi_\alpha(y, x) = x$ при $x \in U_\alpha$, $y \in F$. Преобразования $\lambda_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha$: $F \times U_{\alpha\beta} \to F \times U_{\alpha\beta}$, где $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, называют функциями склейки расслоения. Можно записать их в виде $\lambda_{\alpha\beta}(y, x) = (T^{\alpha\beta}(x)y, x)$. Требуется, чтобы при любых α, β и x преобразование $T^{\alpha\beta}(x)$: $F \to F$ производилось элементом группы G. Таким образом, функции склейки $\lambda_{\alpha\beta}$ определяют гладкие отображения области $U_{\alpha\beta}$ в группу G:

$$T^{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to G, \quad x \mapsto T^{\alpha\beta}(x).$$

Из определения функций $T^{\alpha\beta}(x)$ получаем

$$T^{\alpha\beta} = (T^{\beta\alpha})^{-1} \quad \text{и} \quad T^{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}T^{\gamma\alpha} = 1 \tag{1}$$

(последнее равенство выполняется в пересечении трех областей $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma = U_{\alpha\beta\gamma}$). Все это вместе описывает структуру косого произведения или гладкого расслоения.

Области U_α называются *координатными окрестностями* расслоения.

Простейший пример расслоения — проекция прямого произведения двух многообразий на первый сомножитель с единичной структурной группой. Такое расслоение называется *тривиальным*.

Среди косых произведений особое значение имеют главные расслоения и векторные расслоения.

Главное расслоение определяется так: слой F совпадает с группой G, группа G действует на слое $G=F$ правыми сдвигами R_g: $G \to G$, $R_g(x)=xg$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Главное расслоение реализуется как свободное левое гладкое действие группы G на многообразии E, причем орбиты группы G находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с точками базы M.*

Замечание. Напомним, что гладким левым действием группы G на E называется действие $(g, y) \mapsto g(y)$ $(y \in E, g \in G)$, которое гладко зависит от обоих аргументов (g, y). При этом требуется чтобы: (1) орбиты были равномерно близки друг к другу; (2) в каждой точке $y_0 \in E$ достаточно малый гладкий n-мерный $(n = \dim M)$ диск D^n_ε, не касающийся орбиты группы G, пересекал все близкие орбиты и при этом только в одной точке каждую (рис. 133). Действие называется *свободным*, если $g(y)=y$ для какого-то $y \in E$ только при $g=1$.

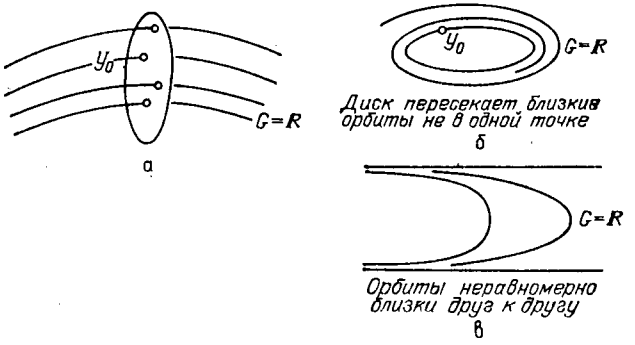


Рис. 133

Ранее (см. гл. 4) мы рассматривали только ситуацию, когда группа G дискретна, E и M являются многообразиями одной размерности n, а орбиты группы G являются дискретными наборами точек. Наше условие здесь означало, что окрестность D^n_ε точки y_0 не содержит других точек той же орбиты и выбирает из каждой достаточно близкой орбиты только по одной точке.

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся тем, что правые сдвиги коммутируют с левыми: $R_{g_1}L_{g_2}(y) = L_{g_2}R_{g_1}(y) = g_2 y g_1$. Действие (слева) группы G определим над каждой координатной окрестностью U_α формулой

$$L_{g_1}(g_1, x) = (g_1 g_1, x).$$

Диффеоморфизм φ_α: $G\times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ (см. определение структуры расслоения) переносит это действие в область $p^{-1}(U_\alpha)$. Проверим корректность этого определения над пересечением $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Строго говоря, имеем два определения левого сдвига в области $p^{-1}(U_{\alpha\beta})$:

$$p^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{L_{g_1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\varphi_\alpha} p^{-1}(U_{\alpha\beta}),$$

$$p^{-1}(U_{\alpha\beta}) \xrightarrow{\varphi_\beta^{-1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{L_{g_1}} G\times U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\varphi_\beta} p^{-1}(U_{\alpha\beta}).$$

Необходимо проверить, что для любой точки $y \in p^{-1}(U_\alpha)$

$$\varphi_\alpha L_{g_1}\varphi_\alpha^{-1}(y) = \varphi_\beta L_{g_1}\varphi_\beta^{-1}(y).$$

Применяя к этому равенству φ_β^{-1}, преобразуем его к виду

$$\lambda_{\alpha\beta}L_{g_1}\varphi_\alpha^{-1}(y) = L_{g_1}\varphi_\beta^{-1}(y).$$

Но последнее равенство вытекает из перестановочности правых сдвигов с левыми: $L_{g_1}\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}L_{g_1}$ и $\lambda_{\alpha\beta}\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta^{-1}$. Таким образом, левое действие группы g введено в каждой области $p^{-1}(U_\alpha)$, и они согласованы. Ясно, что это действие свободное. Теорема доказана.

Итак, все главные расслоения получаются из свободных действий групп G на многообразиях E.

Структура расслоения с любым слоем F определяется по существу лишь «функциями склейки» $\lambda_{\alpha\beta}$ или отображениями $T^{\alpha\beta}$: $U_{\alpha\beta} \to G$, удовлетворяющими простым требованиям (2). Таким образом, слой не играет роли: по любому расслоению с группой G и слоем F можно построить расслоение с другим слоем F', если задана реализация («представление») группы G в виде группы гладких преобразований слоя F',— достаточно взять те же функции склейки $T^{\alpha\beta}$: $U_{\alpha\beta} \to G$, но реализованные как преобразования другого слоя. Полученное расслоение называют *ассоциированным* с исходным расслоением. В частности, можно всегда реализовать функции склейки в виде правых сдвигов самой группы G и построить главное расслоение, ассоциированное с исходным. Получаем вывод:

Любое расслоение определяется как ассоциированное с некоторым главным расслоением. Таким образом, задача классификации расслоений сводится к задаче классификации главных расслоений.

Важным классом расслоений являются векторные расслоения, у которых слой F есть $\mathbb{R}^n$, а группа G действует в F как подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$. Естественно выделяются: ортогональные векторные расслоения ($G \subset O(n)$), комплексные рас-

слоения $(F=\mathbb{C}^n,\ G\subset GL(n,\mathbb{C}))$ и, в частности, унитарные расслоения $(G\subset U(n))$.

Важные классы примеров. 1. *Накрытия.* Здесь слой F дискретен (набор точек), а группа G совпадает с группой монодромий накрытия. В случае накрытий главные расслоения назывались *регулярными*; они определялись действием дискретной группы $G=\sigma(\pi_1(M))$ на пространстве расслоения. Примеры накрытий см. в гл. 4.

2. *Расслоения, связанные с многообразиями линейных элементов.* Если M — гладкое n-мерное многообразие, то естественно определяется *n-реперное расслоение* $p\colon E\to M$, где точками многообразия E являются пары $(x,\ \tau^n)$, состоящие из точки $x\in M$ и невырожденного касательного n-репера τ^n в точке x. Здесь слой F и структурная группа G совпадают (главное расслоение) и $G=GL(n,\mathbb{R})$. Действие группы $GL(n,\mathbb{R})$ определяется естественным образом: если $A\in GL(n,\mathbb{R})$ и $(x,\ \tau^n)\in E$, то

$$A(x,\ \tau^n)=(x,\ A(\tau^n)).$$

Если на многообразии задана риманова метрика (g_{ij}), то выделяется класс ортонормированных реперов; возникает естественное главное расслоение $E_O\to M$ с группой $O(n)$. Если многообразие ориентируемо, то можно ввести класс ориентированных реперов. Возникает реперное главное расслоение $E_{SO}\to M$ с группой $SO(n)$. Если M — комплексное n-мерное многообразие, то определяются комплексные реперы и расслоение $E_{\mathbb{C}}\to M$ с группой $GL(n,\mathbb{C})$, а если на M задана эрмитова метрика, то определено также расслоение $E_U\to M$ с группой $U(n)$. Все это — главные расслоения разных видов линейных элементов.

Другие многообразия линейных элементов, описанные в гл. 1, являются пространствами расслоений, ассоциированных с вышеперечисленными. Наиболее известные из них имеют в качестве слоя: а) $F=\mathbb{R}^n$; б) $F=S^{n-1}$ (единичные векторы или лучи); в) $F=\mathbb{R}P^{n-1}$ (прямые или направления); г) $F=V_{n,k}$ (ортонормированные k-реперы в $\mathbb{R}^n$); д) $F=\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ (кососимметрические k-формы); е) $\mathbb{R}^n\otimes\ldots\otimes\mathbb{R}^n\otimes(\mathbb{R}^n)^*\otimes\ldots\otimes(\mathbb{R}^n)^*$ (тензоры).

3. *Однородные пространства.* Для группы Ли G и ее подгруппы H определялось (см. гл. 1) однородное пространство левых смежных классов

$$M=G/H.$$

Мы имеем проекцию $p\colon G\to M$ со слоем $H\subset G$, причем подгруппа H свободно действует слева на группе

$$g\mapsto hg\qquad(g\in G,\ h\in H).$$

Орбиты группы H — это левые смежные классы — точки базы.

Таким образом, однородное пространство является базой главного расслоения. Ряд примеров однородных пространств уже рассматривался в гл. 4.

4. *Нормальное расслоение* к n-мерному многообразию M, гладко вложенному в $(n+k)$-мерное многообразие, наделенное римановой метрикой (например, в евклидово пространство). Точки нормального (векторного) расслоения — это пары (x, τ), где $x \in M$ и τ — вектор, нормальный к M в точке x. Группа G есть, очевидно, $O(k)$, слой F есть $\mathbb{R}^k$.

В некоторых случаях для гладких расслоений $p\colon E \to M$ со слоем F структурная группа несущественна. В этих случаях «функции склейки» $\lambda_{\alpha\beta}$ могут описываться произвольными диффеоморфизмами $F \to F$. Мы говорим в этом случае, что структурной группой расслоения является группа всех гладких преобразований (диффеоморфизмов) слоя F на себя. Эта группа обозначается через $\mathrm{diff}\, F$. В ней имеется подгруппа $\mathrm{diff}^+ F$ диффеоморфизмов, сохраняющих ориентацию.

Естественным образом определяются отображения одного расслоения в другое. Пусть $(E, M, p\colon E \to M, F, G)$ и $(E', M', p'\colon E' \to M', F, G)$ — два расслоения с одной и той же структурной группой G и одним и тем же слоем F.

Определение 1. Отображение $\tilde{f}\colon E \to E'$ пространств расслоений является *отображением расслоений*, если оно сохраняет структуру косого произведения, т. е. если:

а) отображение $\tilde{f}$ послойно, т. е. $p'\tilde{f} = fp$, где $f\colon M \to M'$ — некоторое отображение базы расслоения (отображение f однозначно определяется этим требованием);

б) на каждом слое отображение $f_F\colon F \to F$ является преобразованием, принадлежащим структурной группе G. Точно это означает следующее: над координатной окрестностью $U_\alpha \subset M$ задан диффеоморфизм $\varphi_\alpha\colon F \times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha) \subset E$, а над координатной окрестностью $U'_{\beta'} \subset M'$ — диффеоморфизм $\varphi'_{\beta'}\colon F \times U'_{\beta'} \to p'^{-1}(U'_{\beta'})$. Поэтому в области $W_{\alpha\beta'} = U_\alpha \cap f^{-1}(U'_{\beta'})$ имеется отображение

$$F \times W_{\alpha\beta'} \xrightarrow{\varphi_\alpha} p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\tilde{f}} p'^{-1}(U'_{\beta'}) \xrightarrow{(\varphi'_{\beta'})^{-1}} F \times U'_{\beta'},$$

которое для каждой точки $x \in W_{\alpha\beta'}$ действует по правилу: $(y, x) \mapsto (Ty, f(x))$, где T — некоторое преобразование слоя F. Условие б) заключается в том, что это преобразование должно принадлежать структурной группе G.

Определение 2. Отображение между двумя расслоениями с общей базой $M' = M$ называется *эквивалентностью*, если индуцированное отображение баз $M \to M$ является тождественным.

В дальнейшем мы рассмотрим задачу классификации расслоений относительно этого отношения эквивалентности, особенно в

некоторых частных случаях (например, когда база — сфера). Ниже мы покажем, что все расслоения, база которых есть диск D^n (или $\mathbb{R}^n$), являются прямыми произведениями, эквивалентными тривиальным.

2. Связность. Введем теперь понятие *связности* в расслоении с пространством E, базой M, проекцией $p\colon E \to M$, слоем F и структурной группой G. Забудем сначала о структурной группе G (это эквивалентно тому, что вместо группы G мы будем считать структурной группой расслоения группу всех диффеоморфизмов слоя F).

Интуитивно, расслоение вместе со связностью можно представлять себе так: задано семейство пространств $\{F_x\}$, зависящих от параметра, пробегающего многообразие M (базу); объединение всех слоев $E = \bigcup\limits_x F_x$ представляет собой «пространство расслоения». Каждому пути $\gamma(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, в базе M сопоставляется «параллельный перенос» слоя F вдоль пути γ из начальной точки в конечную, т. е. отображение (диффеоморфизм)

$$\varphi_\gamma\colon F_{x_0} \to F_{x_1}, \quad x_0 = \gamma(a), \quad x_1 = \gamma(b).$$

Естественные требования:

1) φ_γ непрерывно зависит от пути γ;

2) $\varphi_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1}\varphi_{\gamma_2}$; $\varphi_{\gamma^{-1}} = (\varphi_\gamma)^{-1}$; если путь γ постоянен, то отображение φ_γ тождественно;

3) φ_γ не зависит от параметризации пути.

Способ задания такого семейства преобразований φ (связности) мы сейчас укажем.

Определение 3. *Связностью общего вида* (без группы G) мы назовем распределение, которое в каждой точке y пространства E выделяет гладко зависящее от точки $y \in E$ n-мерное ($n = \dim M$) касательное направление, трансверсальное к проходящему через y слою (т. е. проектирующееся на базу M без вырождений при проекции $p\colon E \to M$). Эти направления называются *горизонтальными направлениями связности*. Гладкая кривая $\tilde{\gamma}(t)$ в E называется *горизонтальной*, если ее касательный вектор при всех t принадлежит горизонтальным направлениям.

Лемма 1. *В любом гладком расслоении имеется связность общего вида.*

Доказательство. Рассмотрим риманову метрику (g_{ij}) на пространстве E, которая существует в силу теорем гл. 2. Направления размерности n, ортогональные к слоям в каждой точке $y \in E$, образуют общую связность. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если в расслоении (E, M, p, F) с компактным слоем F задана общая связность, то для любой кусочно гладкой кривой $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в базе M и любой точки $y_0 \in E$, для которой $p(y_0) = \gamma(0)$, найдется лишь одна горизонтальная кривая*

$\tilde{\gamma}(t)$ *в* E, *накрывающая* $\gamma(t)$, *т. е. такая, что* $p\tilde{\gamma}(t)=\gamma(t)$ *и* $\tilde{\gamma}(0)=x_0$.

Доказательство. Рассмотрим малый гладкий отрезок δ кривой $\gamma(t)$, который можно считать несамопересекающимся. Над отрезком δ полный прообраз $p^{-1}(\delta)$ представляет собой гладкое расслоение со слоем F, базой δ и пространством $E_\delta=p^{-1}(\delta)$. Горизонтальные направления связности в расслоении E порождают (или высекают) одномерные горизонтальные направления в расслоении E_δ над отрезком δ. Рассмотрим интегральные траектории этих горизонтальных направлений в пространстве $E_\delta=p^{-1}(\delta)$. Все эти кривые горизонтальны. Утверждение леммы вытекает из существования и единственности траекторий с заданным началом (здесь компактность слоя существенна, так как иначе интегральные траектории могли бы уходить в бесконечность).

Замечание. Для некомпактных слоев лемма 2 может оказаться неверной. При построении общей связности нужно специально заботиться, чтобы горизонтальные кривые не уходили в бесконечность. Для дифференциально-геометрических связностей, учитывающих наличие структурной группы G (см. ниже, в § 25), это условие будет выполнено.

Итак, пусть задано гладкое расслоение с общей связностью и компактным слоем F (либо, возможно, некомпактным слоем F, но тогда с условием, что для этой связности лемма 2 верна для любой кусочно гладкой кривой $\gamma(t)$ в базе M). В силу леммы 2 для любого кусочно гладкого пути $\gamma(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, определено отображение слоя над точкой $x_0=\gamma(a)$ в слой над точкой $x_1=\gamma(b)$:

$$\varphi_\gamma\colon F_{x_0}\to F_{x_1}$$

(ввиду гладкой зависимости горизонтальных кривых от начальной точки; см. доказательство леммы 2). Ясно, что отображение φ_γ не зависит от параметризации пути γ и что

$$\varphi_{\gamma_1\gamma_2}=\varphi_{\gamma_1}\varphi_{\gamma_2},\quad \varphi_{\gamma^{-1}}=(\varphi_\gamma)^{-1}.$$

Эти отображения называются *параллельными переносами слоя, порожденными связностью*. В частности, всякий путь γ с началом и концом в одной и той же точке x_0 определяет гомоморфизм

$$\varphi\colon \Omega(x_0, M)\to G=\operatorname{diff}F,$$
$$\gamma\mapsto\varphi_\gamma\colon F\to F$$

(H-пространства в группу). Сопоставление, ставящее в соответствие пути γ преобразование φ_γ слоя в слой с вышеперечисленными свойствами, называется *абстрактной связностью*, а образ

$\varphi(\Omega)$ в группе G — *группой голономий* данной связности. Это — обобщение группы монодромии.

Определение 4. Для расслоений со структурной группой G *G-связностью* (или *связностью, совместимой с группой G*) называется семейство горизонтальных направлений в пространстве расслоения E таких, что все переносы φ_τ принадлежат структурной группе G (доказательство существования G-связностей в расслоении приводится в § 25 этой главы; см. лемму 2).

Структурной группой расслоения со связностью фактически является группа голономий. В следующем параграфе будет дано глобальное построение и дифференциально-геометрическое описание G-связностей.

3. Вычисление гомотопических групп с помощью расслоений.

Теорема 2. *Любое гладкое расслоение с компактным слоем обладает свойством накрывающей гомотопии для всех многообразий K и их кусочно гладких отображений и гомотопий в базе M и пространстве расслоения E.*

Доказательство. Пусть гомотопия $F\colon K\times I\to M$ накрыта при $t=0$ отображением $\tilde f\colon K\times 0\to E$, т. е. $p\tilde f = F|_{K\times 0} = f_0$. Согласно лемме 1 можно задать общую связность в расслоении. Согласно лемме 2 связность порождает однозначный рецепт накрытия всех кусочно гладких путей (движений точки по базе M), непрерывно зависящий от пути и от начальной точки накрытия. Ввиду этого теорема следует из лемм 1 и 2.

Следствие. *Имеется изоморфизм гомотопических групп $\pi_j(E, F, y_0) = \pi_j(M, x_0)$, где $x_0 = p(y_0)$, и точная последовательность*

$$\ldots\to\pi_j(F)\xrightarrow{i_*}\pi_j(E)\xrightarrow{j}\pi_j(E, F)\xrightarrow{\partial}\pi_{j-1}(F)\to\ldots$$
$$\pi_j(E, F)\ \|\ \pi_j(M).\quad (p_*)$$

Следствие вытекает из теоремы 2 в силу утверждений § 22.

Замечание. Укажем другую конструкцию гомоморфизма $\partial\colon \pi_n(M)\to\pi_{n-1}(F)$, не использующую относительных гомотопических групп. Пусть $f\colon D^n\to M$ — отображение, переводящее границу S^{n-1} диска D^n в точку x_0, реализующее элемент $\alpha\in\pi_n(M, x_0)$. Соединим фиксированную точку a_0 границы диска с любой другой точкой a границы S^{n-1} хордой $[a_0, a]$. Тогда $f[a_0, a]$ — замкнутый путь в M с началом и концом в точке x_0. Поднимем этот путь в пространство расслоения так, чтобы он начинался в точке y_0, где $p(y_0)=x_0$. Конец поднятого пути будет некоторой точкой b слоя $F=p^{-1}(x_0)$. Положим $\hat f(a)=b$. Мы получили отображение $\hat f\colon S^{n-1}\to F$.

Задача. Докажите, что гомотопический класс построенного отображения $\hat f\colon S^{n-1}\to F$ совпадает с $\partial\alpha$, где ∂ — определенный

выше граничный гомоморфизм в точной последовательности расслоения.

Из такого определения граничного гомоморфизма легко следует, в частности, что для тривиального расслоения гомоморфизм ∂ нулевой (проверьте!).

Применим теперь точную последовательность расслоения для вычисления некоторых гомотопических групп. Напомним, что уже в гл. 5 (см. § 22) мы извлекали из такой точной последовательности информацию о гомотопических группах накрывающих пространств и пространств петель.

Пример 1. Рассмотрим простейшие главные расслоения:

а) $\mathbb{R}P^3 = SO(3) \xrightarrow{p} S^2$ (слой $SO(2) = S^1$);

б) $S^3 = SU(2) \xrightarrow{p} S^2$ (слой S^1).

Расслоение а) представляет собой расслоение единичных касательных векторов на сфере S^2; оно интерпретируется также как главное расслоение $SO(3) \to SO(3)/SO(2) = S^2$ с однородной базой (см. п. 1). Расслоение б) аналогичным образом описывается как расслоение $SU(2) \to SU(2)/U(1) = S^2$, где $U(1)$ вкладывается в $SU(2)$ как подгруппа диагональных матриц. Расслоение б) называется *расслоением Хопфа*. Напомним (см. § 22), что группы $\pi_j(\mathbb{R}P^3)$ и $\pi_j(S^3)$ при $j > 1$ одинаковы, так что с точки зрения гомотопических групп расслоения а) и б) дают одно и то же. Рассмотрим расслоение б), учитывая при этом равенства (см. § 21):

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \quad \text{при } n \geqslant 1,$$
$$\pi_j(S^1) = 0 \quad \text{при } j > 1.$$

Напишем точную гомотопическую последовательность расслоения б):

$$\ldots \pi_j(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_j(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_j(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_{j-1}(S^2) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

Так как $\pi_j(S^1) = \pi_{j-1}(S^1) = 0$ при $j > 2$, то возникает точная последовательность

$$0 \to \pi_j(S^3) \xrightarrow{p_*} \pi_j(S^2) \to 0 \quad (j > 2),$$

и $\pi_j(S^3) = \pi_j(S^2)$ для всех $j > 2$. В частности, $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z} = \pi_3(S^2)$.

Пример 2. *Обобщенное расслоение Хопфа*

$$p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n \quad (\text{слой } F = S^1)$$

определяется следующим образом. Зададим сферу комплексным уравнением $\sum_{j=0}^{n} |z_j|^2 = 1$. Действие группы S^1 на сфере имеет вид

$$z \mapsto e^{i\varphi} z \quad (z = (z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1},\ e^{i\varphi} \in S^1).$$

Орбиты этого действия составляют $\mathbb{C}P^n$ по определению этого многообразия. Как мы знаем,

$$\pi_1(S^1) = \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) = \mathbb{Z},$$

$$\pi_j(S^1) = 0 \text{ при } j > 1 \text{ и } \pi_q(S^{2n+1}) = 0 \text{ при } q < 2n+1.$$

Из точной последовательности расслоения получаем

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z},\ \pi_j(\mathbb{C}P^n) = \pi_j(S^{2n+1}) \text{ при } j > 2.$$

В частности, $\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ (проверьте!).

Пример 3. Расслоение касательных n-реперов к n-мерной сфере S^n. Это — главное расслоение:

а) $SO(n+1) \to SO(n+1)/SO(n) = S^n$ (слой $SO(n)$).

Рассмотрим также ассоциированные расслоения k-реперов:

б) $V_{n+1,\,k+1} \to S^n$ (слой $V_{n,\,k}$; напомним, что $V_{n,\,k}$ — многообразие ортонормированных k-реперов в n-мерном пространстве). При $k = 1$ получаем расслоение $V_{n,\,2} \to S^n$ со слоем $V_{n,\,1} = S^{n-1}$ — расслоение единичных касательных векторов.

Рассмотрим сначала гомотопическую последовательность расслоения а):

$$\ldots \pi_{j+1}(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_j(SO(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_j(SO(n+1)) \xrightarrow{p_*} \pi_j(S^n) \to \ldots$$

При $j < n-1$ получаем $\pi_j(SO(n)) = \pi_j(SO(n+1))$. При $j = n-1$ имеем

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(S^n) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(SO(n)) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{n-1}(SO(n+1)) \xrightarrow{p_*} \pi_{n-1}(S^n). \\ \| & & & & \| \\ \mathbb{Z} & & & & 0 \end{array}$$

Отсюда получаем, что гомоморфизм i_* для $j = n-1$ есть эпиморфизм (отображение «на») с циклическим ядром вида $\partial(\pi_n(S^n))$. Если касательное расслоение сферы S^n тривиально, как это верно, например, при $n = 3$, так как S^3 — группа Ли, то гомоморфизм ∂ также тривиален. Поэтому топологически $SO(4) = SO(3) \times S^3$ и $\pi_j(SO(4)) = \pi_j(S^3) + \pi_j(SO(3))$.

Используя теорему 2, докажем утверждение, которое использовалось в § 23.

Утверждение 1. *Пусть M — многообразие размерности q. Всякое отображение $M \to SO(n+1)$ гомотопно отображению $M \to SO(n) \subset SO(n+1)$, если $q < n$; если $q < n-1$, то включение $SO(n) \to SO(n+1)$ определяет взаимно однозначное соответствие*

$$[M^q,\ SO(n)] \to [M^q,\ SO(n+1)].$$

Доказательство. Пусть $q < n$. Рассмотрим отображение $\tilde{f}\colon M \to SO(n+1)$. Тогда проекция $f = p\tilde{f}\colon M \to S^n$ стягивается к точке, т. е. существует гомотопия $F = \{f_t\} : M \times I \to S^n$ с $f_0 = f$

и f_1: $M \to s_0 \in S^n$. Накрывающая гомотопия $F = \{f_t\}$ с $f_0 = f$ будет деформацией отображения f к отображению f_1: $M \to SO(n) = p^{-1}(s_0)$.

Пусть $q < n-1$, и два отображения f_0 и f_1: $M \to SO(n)$ гомотопны в $SO(n+1)$ посредством гомотопии F: $M \times I \to SO(n+1)$. Проекция $F = pF$: $M \times I \to S^n$ переводит край $(M \times 0) \cup (M \times 1)$ в точку $s_0 \in S^n$. Рассмотрим гомотопию Φ_t отображения $p\tilde{F} = F = \Phi_0$ в базе S^n к постоянному отображению со значением s_0, в процессе которой образы оснований цилиндра $M \times 0$ и $M \times 1$ неподвижны (стоят в одной точке s_0). Накрывающая гомотопия Φ_t в $SO(n+1)$ при $t = 1$ дает гомотопию между f_0 и f_1 в одном слое $SO(n)$. Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь расслоение б) со слоем $V_{n,k}$ сначала для $k = 1$:

$$p\colon V_{n+1,2} \to S^n \quad (\text{слой } V_{n,1} = S^{n+1}).$$

Из точной последовательности расслоения б) получаем

$$\pi_j(V_{n+1,2}) = 0 \text{ при } j < n-1,$$

$$\pi_{n-1}(V_{n+1,2}) \text{ — циклическая группа.}$$

Действительно, эта последовательность имеет вид

$$\ldots \xrightarrow{i_*} \pi_j(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{j-1}(S^{n-1}) \to \pi_{j-1}(V_{n+1,2}) \to \pi_{j-1}(S^n) \to \ldots$$

Если $j = 1$, то $\pi_j(S^n) = \pi_{j-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}_1$, $\pi_{j-1}(S^n) = 0$. Найдем гомоморфизм ∂:

$$\begin{array}{ccc} \partial\colon \pi_n(S^n) & \to & \pi_{n-1}(S^{n-1}). \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Рассмотрим для этого касательное векторное поле ξ на сфере S^n, имеющее ровно одну особую точку s_0 (с индексом 2 для четных n и индексом нуль для нечетных n согласно результатам § 15). Это векторное поле определяет отображение f: $S^n \setminus s_0 = D^n \to V_{n+1,2}$, задаваемое формулой $\tilde{f}(\tau) = \left(\tau, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$, где τ — единичный вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$. Ясно, что отображение $p \cdot f = f$: $D^n \to S^n$ имеет степень $+1$, причем $f(\partial D^n) = s_0$. Проверьте, что замыкание этого отображения на границе f: $\partial D^n \to V_{n,1} = S^{n-1}$ в слой имеет степень, равную индексу векторного поля ξ в особой точке. Из приведенной выше явной конструкции гомоморфизма ∂ получаем: гомоморфизм ∂ есть умножение на целое число, равное индексу векторного поля ξ в точке s_0. Отсюда следует:

$$\pi_{n-1}(S^{n-1})/\partial\pi_n(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_1 & \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$\pi_{n-1}(V_{n+1,2}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$

$$\pi_j(V_{n+1,2}) = 0 \text{ при } j < n-1.$$

Рассматривая последовательно расслоения

$$p\colon V_{n+1,k+1} \to S^n \text{ (слой } V_{n,k}),$$

мы из точной последовательности получаем

$$\pi_j(V_{n+1,k+1}) = 0 \text{ при } j < n-k,$$

$$\pi_{n-k}(V_{n+1,k+1}) \text{ — циклическая группа (докажите).}$$

Аналогично рассматриваются расслоения над сферой для унитарной и симплектической группы:

$$U(n) \to S^{2n-1} \text{ (слой } U(n-1)),$$

$$Sp(n) \to S^{4n-1} \text{ (слой } Sp(n-1)).$$

Из точной последовательности первого расслоения легко вывести, что $\pi_j(U(n)) = \pi_j(U(n-1))$ при $j < 2n-2$, а из точной последовательности второго расслоения — что $\pi_j(Sp(n)) = \pi_j(Sp(n-1))$ при $j < 4n-2$.

Поэтому группы $\pi_j(SO(n))$ при $j < n-1$, группы $\pi_j(U(n))$ при $j < 2n-2$, группы $\pi_j(Sp(n))$ при $j < 4n-2$ не зависят от n; они обозначаются соответственно через $\pi_j(SO)$, $\pi_j(U)$, $\pi_j(Sp)$ и называются *стабильными*.

Пример 4. Рассмотрим теперь расслоение единичных касательных векторов над ориентируемой поверхностью с g ручками:

$$p\colon E \to M_g^2 \text{ (слой } S^1).$$

Точки многообразия E — это пары (x, τ), где $x \in M_g^2$ и τ — единичный вектор в точке x. Для $g = 0$ мы знаем, что $E = SO(3)$. Для $g = 1$ мы имеем: $E = S^1 \times M_g^2 = S^1 \times T^2 = T^3$. Поэтому рассмотрим нетривиальный случай $g \geqslant 2$. Точная последовательность нашего расслоения имеет вид

$$\ldots \to \pi_i(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_i(E) \xrightarrow{p_*} \pi_i(M_g^2) \xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(S^1) \to \ldots$$

Если $i > 1$, то $\pi_i(S^1) = \pi_i(M_g^2) = 0$, так как универсальные накрывающие над S^1 и M_g^2 стягиваемы. Поэтому $\pi_i(E) = 0$ при $i > 1$. При $i = 1$ имеем точную последовательность

$$0 \to \pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(M_g^2) \to 0.$$

$$\| \\ \mathbb{Z}$$

Обозначим естественную образующую группы $\pi_1(S^1)$ через τ, а канонические образующие группы $\pi_1(M_g^2)$ через $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$; последние удовлетворяют соотношению

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

Пути a_j, b_j образуют «канонические разрезы» поверхности M_g^2; в результате этих разрезов поверхность превращается в $4g$-угольник Q_{4g} (рис. 134). Положим $i_*(\tau) = \bar{\tau} \in \pi_1(E)$ и выберем в $\pi_1(E)$ элементы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_g, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_g$ с $p_*(\bar{a}_j) = a_j$, $p_*(\bar{b}_j) = b_j$. Группа $i_*\pi_1(S^1)$ является нормальным делителем в $\pi_1(E)$. Группа $\pi_1(E)$ порождается образующими $\bar{\tau}$, $\bar{a}_j$, $\bar{b}_j$, связанными соотношениями:

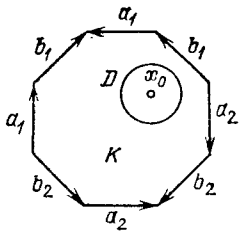


Рис. 134

1) $\bar{a}_j \bar{\tau} \bar{a}_j^{-1} = \bar{\tau}^{\alpha_j}$,

2) $\bar{b}_j \bar{\tau} \bar{b}_j^{-1} = \bar{\tau}^{\beta_j}$,

3) $\bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \ldots \bar{a}_g \bar{b}_g \bar{a}_g^{-1} \bar{b}_g^{-1} = \bar{\tau}^{\gamma}$

(ниже будет показано, что $\alpha_j = \beta_j = 1$, $\gamma = 2 - 2g$). Действительно, соотношения 1) и 2) вытекают из того, что $i_*\pi_1(S^1)$ — нормальный делитель.

Соотношение 3) вытекает из того, что

$$p_*(\bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \ldots \bar{a}_g \bar{b}_g \bar{a}_g^{-1} \bar{b}_g^{-1}) = 1.$$

Покажем, что все α_j и β_j равны единице. Действительно, внутренний автоморфизм $\bar{\tau} \mapsto \bar{a}_j \bar{\tau} \bar{a}_j^{-1}$ реализуется параллельным переносом слоя S^1 вдоль пути $a_j = p(\bar{a}_j)$ по базе M_g^2 согласно § 17. Ввиду ориентируемости поверхности M_g^2 после обноса получим диффеоморфизм слоя S^1 на себя, сохраняющий ориентацию. Поэтому все α_j и, аналогично, все β_j равны единице. Покажем теперь, что $\gamma = 2 - 2g$. Зададим (на M_g^2) векторное поле ξ с одним нулем $\xi = 0$ в точке x_0, не лежащей на путях (a_j, b_j). Положим $n(x) = \frac{\xi}{|\xi|}$ при $x \neq x_0$. Выкинем из поверхности M_g^2 малый диск D с центром x_0 (рис. 134). Поле n определяет отображение $K = Q_{4g} - D = S^1 \times I \to E$, дающее гомотопию между произведением

$$\bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_1^{-1} \bar{b}_1^{-1} \ldots \bar{a}_g \bar{b}_g \bar{a}_g^{-1} \bar{b}_g^{-1} \sim n|_{\partial D} \sim \bar{\tau}^{\gamma}$$

и образом границы ∂D диска D. Пути $\bar{a}_j$, $\bar{b}_j \in \pi_1(E)$ здесь определяются как поднятия путей a_j, b_j в пространство E с помощью векторного поля n. Согласно теореме Хопфа (§ 15) индекс особой точки x_0 поля n равен $2 - 2g$; из этого следует, что $\gamma = 2 - 2g$.

Пример 5. Рассмотрим специальный пример — *кватернионное расслоение Хопфа*. Введем в $\mathbb{R}^{4n+4}$ структуру $(n+1)$-мерного кватернионного пространства $\mathbb{H}^{n+1}$ с кватернионными координатами $(q_0, \ldots, q_n)$. Сфера S^{4n+3} задается в этих координатах уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n} |q_\alpha|^2 = 1$. На сфере действует (слева) группа $SU(2) = Sp(1) = S^3$ единичных кватернионов $|q| = 1$:

$$q(q_0, \ldots, q_n) = (qq_0, \ldots, qq_n).$$

Факторпространство $S^{4n+3}/SU(2)$ есть по определению кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$. Имеем главное расслоение с группой $SU(2)$:

$$S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n.$$

При $n = 1$ имеем $\mathbb{H}P^1 = S^4$ (проверьте!), и наше расслоение превращается в «кватернионное расслоение Хопфа»

$$S^7 \to S^4 \text{ (слой } S^3).$$

Точная последовательность этого расслоения распадается на куски вида

$$0 \to \pi_i(S^7) \to \pi_i(S^4) \to \pi_{i-1}(S^3) \to 0$$

(гомоморфизмы $\pi_i(S^3) \to \pi_i(S^7)$ тривиальны, поскольку вложение слоя S^3 в S^7 гомотопно постоянному отображению). Следовательно, $\pi_7(S^4)$ — бесконечная группа.

4. **Классификация расслоений.** Рассмотрим главные расслоения:

а) $V_{n,k} \to G_{n,k}$ (слой $O(k)$),

где $G_{n,k}$ — многообразие k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат;

б) $V_{n,k} \to \widehat{G}_{n,k}$ (слой $SO(k)$),

где $\widehat{G}_{n,k}$ — многообразие ориентированных k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат (многообразие $\widehat{G}_{n,k}$ является двулистным накрытием над $G_{n,k}$);

в) $V^{\mathbb{C}}_{n,k} \to G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ (слой $U(k)$),

где $G^{\mathbb{C}}_{n,k}$ — многообразие комплексных k-мерных плоскостей в $\mathbb{C}^n$, проходящих через начало координат, и $V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ — многообразие унитарных k-реперов в $\mathbb{C}^n$;

г) $V^{\mathbb{H}}_{n,k} \to G^{\mathbb{H}}_{n,k}$ (слой $Sp(n)$),

где $G^{\mathbb{H}}_{n,k}$ — многообразие кватернионных k-мерных плоскостей в

$\mathbb{H}^n$, проходящих через начало координат, и $V^{\mathbb{H}}_{n,k}$ — многообразие кватернионных ортогональных k-реперов. В силу результатов примера 3 имеем

$$\pi_j(V_{n,k}) = 0 \text{ при } j < n-k,$$
$$\pi_j(V^{\mathbb{C}}_{n,k}) = 0 \text{ при } j < 2(n-k), \qquad (2)$$
$$\pi_j(V^{\mathbb{H}}_{n,k}) = 0 \text{ при } j < 4(n-k).$$

Пусть k фиксировано и $n \to \infty$ (пространство становится бесконечномерным). Если $n = \infty$, то из (2) следует, что для $V_{\infty,k}$, $V^{\mathbb{C}}_{\infty,k}$ и $V^{\mathbb{H}}_{\infty,k}$ все гомотопические группы равны нулю (эти пространства стягиваемы; проверьте).

Определение 5. Главное расслоение $E \to B$ с группой G называется *универсальным* для данной группы G, если E стягиваемо (или все группы $\pi_j(E)$ равны 0); если $\pi_j(E) = 0$ при $j \leqslant n+1$, то расслоение называется *n-универсальным*.

Важность этого понятия определяется классификационной теоремой (которую мы приводим без доказательства): множество расслоений с данной базой M и группой G (с точностью до эквивалентности) совпадает с множеством гомотопических классов отображений $[M, B_G]$ базы M в базу $B = B_G$ универсального расслоения. (Если $\dim M < n$, то можно заменить B_G базой n-универсального расслоения.)

Фактически все главные расслоения с группой G и базой M получаются из отображений $f\colon M \to B_G$ в базу универсального расслоения как индуцированные расслоения. Определим это важное понятие. Пусть заданы расслоение $p\colon E \to M$ со слоем F и структурной группой G и отображение $f\colon M' \to M$. Мы построим расслоение $p'\colon E' \to M'$ с тем же слоем F и той же группой G, называемое *индуцированным* расслоением $p\colon E \to M$ посредством f. Предположим, что структура расслоения $p\colon E \to M$ задается покрытием $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и функциями склейки $\lambda_{\alpha\beta}\colon F \times U_{\alpha\beta} \to F \times U_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Структура индуцированного (с помощью отображения $f\colon M' \to M$) расслоения с базой M', слоем F и группой G задается так: $U'_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$; функции склейки $\lambda'_{\alpha\beta}\colon F \times U'_{\alpha\beta} \to F \times U'_{\alpha\beta}$ определяются формулой

$$\lambda'_{\alpha\beta}(y, x) = (T'^{\alpha\beta}(x)\, y, x), \quad y \in F,$$
$$T'^{\alpha\beta}(x) = T^{\alpha\beta}(f(x))$$

(т. е. области $U'_\alpha \subset M'$ и функции $\lambda'_{\alpha\beta}$ определяются как полные прообразы соответствующих объектов из структуры расслоения $p\colon E \to M$). Возникает новое расслоение $p'\colon E' \to M'$ и его отображение $E' \to E$ в исходное расслоение, индуцирующее заданное отображение баз $f\colon M' \to M$.

Вернемся к классификационной теореме. Задача классификации расслоений над сферой S^q сводится к нахождению множества $[S^q, B_G]$ и тем самым к гомотопическим группам $\pi_q(B_G)$; для $G = O(k)$, $SO(k)$, $U(k)$, $Sp(k)$ имеем $B_G = G_{\infty,k}$, $\widehat{G}_{\infty,k}$, $G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}$, $G^{\mathbb{H}}_{\infty,k}$, причем

$$\pi_j(G_{\infty,k}) = \pi_j(G_{n,k}) \text{ при } j < n-k,$$
$$\pi_j(\widehat{G}_{\infty,k}) = \pi_j(\widehat{G}_{n,k}) \text{ при } j < n-k,$$
$$\pi_j(G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}) = \pi_j(G^{\mathbb{C}}_{n,k}) \text{ при } j < 2(n-k).$$

Задача. Докажите общее равенство $\pi_j(G) = \pi_{j+1}(BG)$ и, в частности:

$$\pi_j(SO(k)) = \pi_{j+1}(\widehat{G}_{\infty,k}),$$
$$\pi_j(U(k)) = \pi_{j+1}(G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}),$$
$$\pi_j(Sp(k)) = \pi_{j+1}(G^{\mathbb{H}}_{\infty,k}),$$

используя точную последовательность универсального расслоения.

Рассмотрим в заключение несколько простых примеров.

1. $G = O(1) = \mathbb{Z}_2$;

$$B_G = \lim_{n\to\infty}(S^n/\mathbb{Z}_2) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^\infty.$$

Имеем $\pi_1(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}_2$ и $\pi_j(\mathbb{R}P^\infty) = 0$ для $j > 1$.

2. $G = \mathbb{Z}_m$ (циклическая группа порядка m);

$$B_G = \lim_{n\to\infty} S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m = \lim_{n\to\infty} L^{2n+1}_{(m)} = L^\infty_{(m)},$$

где S^{2n+1} задается в $\mathbb{C}^{n+1}$ уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n} |z_\alpha|^2 = 1$; образующая $a \in \mathbb{Z}_m$ действует в S^{2n+1} по формуле

$$a(z_0, \ldots, z_n) = (e^{2\pi i/m} z_0, \ldots, e^{2\pi i/m} z_n); \quad a^m = 1.$$

Факторпространство $L^{2n+1}_{(m)} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_m$ называется линзовым пространством.

Вообще, для дискретной группы G гомотопические группы $\pi_i(B_G)$ тривиальны при $i > 1$ в силу теории накрытий.

3. $G = U(1) = SO(2) = S^1$;

$$B_G = \lim_{n\to\infty} S^{2n+1}/S^1 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^\infty.$$

Здесь сфера задается уравнением $\sum_{\alpha=0}^{n} |z_\alpha|^2 = 1$, а действие окружности S^1 таково:

$$(z_0, \ldots, z_n) \mapsto (e^{i\varphi} z_0, \ldots, e^{i\varphi} z_n).$$

Так как $\pi_i(S^1)=0$ при $i\neq 1$, то

$$\pi_i(\mathbb{C}P^\infty)=\pi_i(B_G)=0 \text{ при } i\neq 2,$$
$$\pi_2(\mathbb{C}P^\infty)=\mathbb{Z}$$

(см. пример 2 выше).

4. $G=SU(2)=Sp(1)=S^3$;

$$B_G=\lim_{n\to\infty} S^{4n+3}/S^3=\lim_{n\to\infty}\mathbb{H}P^n=\mathbb{H}P^\infty.$$

В этом случае сфера S^{4n+3} реализована в пространстве кватернионов $\mathbb{H}^{n+1}$. Действие группы $S^3=Sp(1)$ имеет вид

$$(q_0,\ \ldots,\ q_n)\mapsto(qq_0,\ \ldots,\ qq_n),$$

где q — единичный кватернион. Универсальность этого расслоения вытекает из того, что гомотопические группы $\pi_i(S^{4n+3})$ тривиальны при $i<4n+3$.

Классификацию G-расслоений над сферой S^n можно получить и непосредственно, без использования универсальных расслоений. Будем здесь считать, что G — группа Ли. Достаточно классифицировать главные расслоения, тем самым будут классифицированы и все ассоциированные расслоения с другими слоями. Сначала опишем главные G-расслоения над диском.

Лемма 3. *Любое главное расслоение над диском D^n со структурной группой Ли G тривиально.*

Доказательство. Пусть p: $E\to D^n$ — главное G-расслоение. Фиксируем G-связность в этом расслоении, т. е. для каждого пути γ из точки x_0 в точку x_1 зададим преобразование слоя φ_γ: $F_{x_0}\to F_{x_1}$, $F_{x_0}=F_{x_1}=G$. Все преобразования φ_γ принадлежат структурной группе G. (Напомним, что существование такой связности для случая, когда структурная группа есть группа Ли, будет доказано в следующем параграфе.)

В диске D^n из центра $x_0\in D^n$ в любую точку $x\in D^n$ идет единственный отрезок $\gamma_x=[x_0x]$. Строим отображение Φ: $D^n\times F_{x_0}\to E$, полагая

$$\Phi(x,\ y)=\varphi_{\gamma_x}(y).$$

Это отображение вводит в E координаты прямого произведения $E=D^n\times G$, согласованные с действием структурной группы. Лемма доказана.

Сфера S^n есть объединение двух дисков D^n_+ и D^n_-, пересекающихся по экватору: $D^n_+\cap D^n_-=S^{n-1}$. Введя координаты прямого произведения отдельно над D^n_+ и над D^n_-, получим «структуру расслоения» с двумя координатными областями $U_1=D^n_+$ и $U_2=D^n_-$, причем $U_{12}=U_1\cap U_2=S^{n-1}$. Функция склейки λ_{12}

определена над $U_{12} = S^{n-1}$ и представляет собой отображение

$$T^{12}\colon S^{n-1} \to G,$$

$$\lambda_{12}(y, x) = (T^{12}(x)y, x), \quad x \in U_{12}, \quad y \in F.$$

Имеет место

Лемма 4. *Если заменить функцию склейки $T^{12}\colon S^{n-1} \to G$ гомотопной, то класс эквивалентности расслоения не меняется.*

Доказательство. Реализуем гомотопию как отображение

$$F\colon S^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \to G.$$

Построим расслоение так: расширим полусферы — диски D^n_- и D^n_+ — соответственно выше и ниже экватора на расстояние ε до дисков $\bar{D}^n_\varepsilon \supset D^n_+$ и $\bar{D}^n_\varepsilon \supset D^n_-$. Пересечение $\bar{D}^n_\varepsilon \cap \bar{D}^n_\varepsilon$ есть в точности цилиндр $S^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Построим новое расслоение со склейкой по отображению F. Это расслоение эквивалентно обоим исходным. Лемма доказана.

Таким образом, расслоение определяется элементом группы $\pi_{n-1}(G)$. Приведем значения этих групп в случаях $G = SO(k)$, $U(k)$ и $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\pi_i(U(1)) = \pi_i(SO(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i > 1; \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i = 2, \\ \mathbb{Z} & \text{при } i = 3; \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(4)) = \pi_i(SO(3)) + \pi_i(S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i = 2, \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{при } i = 3; \end{cases}$$

$$\pi_i(SO(q)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{при } i = 2, \\ \mathbb{Z} & \text{при } i = 3 \end{cases} \quad (q \geqslant 5),$$

$$\pi_i(U(q)) = \pi_i(S^1) + \pi_i(SU(q)),$$

так как топологически $U(q) = S^1 \times SU(q)$;

$$\pi_i(SU(q)) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ 0, & i = 2, \\ \mathbb{Z}, & i = 3 \end{cases} \quad (q \geqslant 2).$$

Некоторые из равенств, входящих в эту таблицу, нами выше доказаны, остальные мы сообщаем без доказательства. Таблица позволяет автоматически классифицировать расслоения над сферами S^n размерности $n \leqslant 4$.

5. Векторные расслоения и операции над ними. Изучим подробнее *векторные расслоения*, т. е. расслоения, слоем которых является вещественное или комплексное векторное пространство, а структурной группой — подгруппа линейной, ортогональной или унитарной группы. Структура расслоения $p\colon E \to M$ определяется по существу функциями склейки $\lambda_{\alpha\beta}$ над пересечениями $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, т. е. отображениями $T^{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to G$ такими, что $T^{\alpha\beta} = (T^{\beta\alpha})^{-1}$ и $T^{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}T^{\gamma\alpha} = 1$ в пересечении $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ (формулы (2)). Поэтому над расслоениями можно совершать все операции, сохраняющие эти соотношения. Например, такой операцией является вещественное или комплексное представление $\rho\colon G \to GL(n, \mathbb{R})$ или $GL(n, \mathbb{C})$ (возможно, ортогональное или унитарное) структурной группы G и вообще любой гомоморфизм $\rho\colon G \to G'$, позволяющий заменить функции склейки $T^{\alpha\beta}$ функциями склейки $\rho(T^{\alpha\beta})$. В результате получим новое расслоение, которое мы будем называть представлением ρ исходного расслоения. Если расслоение обозначается какой-либо буквой, например η, то новое расслоение обозначим через $\rho(\eta)$. Другой пример: для двух расслоений (пусть η_1, η_2) со слоями $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ можно составить их *прямую сумму* $\eta = \eta_1 \oplus \eta_2$ с группой $G_1 \times G_2$ и слоем $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ и *тензорное произведение* $\eta = \eta_1 \otimes \eta_2$ со слоем $\mathbb{R}^{mn} = \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ и также с группой $G_1 \times G_2$ соответственно операциям над линейными пространствами (аналогично в комплексном случае).

Вообще, определены естественные операции над расслоениями, отвечающие всевозможным операциям над линейными пространствами (слоями). Напомним эти операции.

1. *Определитель* $\det\eta$ вещественного (комплексного) расслоения η — это одномерное расслоение (т. е. его слой одномерен) с преобразованиями перехода $\det T^{\alpha\beta}$ в областях $U_{\alpha\beta}$.

2. Сопряженное расслоение η^* линейных форм на слоях; комплексно сопряженное расслоение $\bar{\eta}$ (для комплексного расслоения η) с преобразованиями перехода $\bar{T}^{\alpha\beta}$.

3. Комплексификация $c(\eta)$ вещественного расслоения η и овеществление $r(\eta_1)$ комплексного расслоения η_1. При этом, как и для соответствующих операций над пространствами, $cr(\eta_1) = \eta_1 \oplus \bar{\eta}_1$ и $rc(\eta) = \eta \oplus \eta$ (проверьте!).

4. Тензорные степени $\eta \otimes \ldots \otimes \eta$ расслоения η, его внешние степени $\Lambda^k\eta$ (кососимметрическая часть тензорной степени), симметрические степени $S^k\eta$ (симметрическая часть тензорной степени).

Определение 6. *Сечением* расслоения $p\colon E \to M$ называется такое отображение $\psi\colon M \to E$, что $p\psi(x) = x$ для любой точки $x \in M$. Таким образом, сечения — это функции (поля) $\psi(x)$ на M, принимающие в точке $x \in M$ значения в слое F_x

над x. Сечения тривиального расслоения — это обычные («скалярные») функции или отображения базы в слой.

Пусть τ — касательное расслоение некоторого многообразия M. Тогда сечения расслоения τ — это векторные поля; сечения сопряженного расслоения τ^* — это ковекторные поля; тензоры типа (k, l) — это сечения расслоений

$$\underbrace{\tau \otimes \ldots \otimes \tau}_{\text{верхние индексы}} \otimes \underbrace{\tau^* \otimes \ldots \otimes \tau^*}_{\text{нижние индексы}}.$$

Дифференциальные формы на многообразии — это сечения расслоения $\Lambda^k\tau^*$. Общие тензоры типа $(0, k)$ — это сечения расслоения $\tau^* \otimes \ldots \otimes \tau^*$. Квадратичные формы на векторах, как, скажем, метрика (g_{ij}),— это сечения расслоения $S^2\tau^*$ (симметрический квадрат). Если многообразие M n-мерно, то имеется расслоение $\Lambda^n\tau^*$ (определитель), тривиальность которого равносильна ориентируемости (проверьте!). Среди расслоений (особенно векторных расслоений) над комплексно аналитической базой особо выделяется класс *комплексно аналитических* расслоений, у которых функции склейки комплексно аналитичны. Такими, например, являются касательное расслоение к комплексному многообразию и результаты всех приведенных выше естественных операций над ним. Отметим, что аналогично вводятся алгебраические расслоения над комплексными алгебраическими многообразиями, особенно над проективными (комплексными компактными подмногообразиями в $\mathbb{C}P^n$). Над $\mathbb{C}P^n$ имеется важное алгебраическое одномерное (комплексное) расслоение Хопфа η, которое ранее (см. пример 2) рассматривалось топологически (без введения аналитической структуры) с группой $U(1) = SO(2) = S^1$ и слоем $\mathbb{C}^1$. Аналитически мы должны рассматривать это расслоение η с группой $\mathbb{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению (как и все комплексные одномерные расслоения). Расслоение η над $\mathbb{C}P^n$ получается из определения $\mathbb{C}P^n$: $E = \{(z_0, \ldots, z_n)\} \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^n$, где $E = \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$, слой $F = \mathbb{C}^*$.

Одномерные аналитические расслоения над комплексным многообразием образуют абелеву группу относительно тензорного умножения (множество классов эквивалентности 1-расслоений называется «многообразием Пикара»). Эта группа (точнее, ее связная компонента единицы) есть комплексный тор.

Обозначим (комплексное векторное) касательное расслоение к комплексному многообразию M через $\tau(M)$. Пусть η — расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^1$.

Задачи. 1. Докажите, что $\tau(\mathbb{C}P^n) \oplus 1 = \underbrace{\eta \oplus \ldots \oplus \eta}_{n+1}$, где 1 обозначает одномерное (комплексное) тривиальное расслоение.

2. Докажите, что

$$\Lambda^n\tau(\mathbb{C}P^n) = \det\tau(\mathbb{C}P^n) = \eta^{n+1}$$

(равенства всюду обозначают эквивалентность).

Аналогичные, но более простые задачи ставятся для вещественного одномерного расслоения $\eta_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}P^n$ с группой $\mathbb{Z}_2 = O(1)$ (обобщенного листа Мёбиуса).

3. Докажите, что $\xi^* = \xi^{-1}$ для любого одномерного комплексного расслоения ξ.

6. Мероморфные функции. Интересный класс «расслоений с особенностями» составляют семейства линий уровня мероморфных функций на компактных комплексных многообразиях, например, алгебраических функций на проективном алгебраическом многообразии $M \subset \mathbb{C}P^q$. Мероморфная функция есть по определению комплексно аналитическое отображение $f\colon M \to \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \infty$. Как говорят в теории функций, f имеет *полюсы* в точках из $f^{-1}(\infty)$. В любой координатной окрестности $U_\alpha \subset M$ с многообразии $z^1_\alpha, \ldots, z^n_\alpha$ (где n — комплексная размерность многообразия M) функция $w = f(z)$ записывается в виде $f(z^1_\alpha, \ldots, z^n_\alpha)$. *Особыми слоями* называются полные прообразы $f^{-1}(f(z_0))$, где точка $z_0 = (z^1_{\alpha 0}, \ldots, z^n_{\alpha 0})$ такова, что $df|_{z=z_0} = 0$. Остальные слои $F_a = \{f = a\}$ являются неособыми подмногообразиями многообразия M. Пусть $z_1, \ldots, z_m$ — все особые точки и $w_1 = f(z_1), \ldots, w_m = f(z_m)$ — особые значения функции f. Над областью плоскости $U_f \subset \mathbb{R}^2$:

$$U_f = [S^2 = \mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C} \cup \infty)] \setminus \{w_1, \ldots, w_m\}$$

определено гладкое расслоение со слоем $F = F_w = f^{-1}(w)$, $w \in U_f$. Рассмотрим группу $\pi_1(U_f)$, порожденную путями $a_1, \ldots, a_m$ (рис. 135). Пути a_j дают отображения неособого слоя (монодромию) $\varphi_{a_j}\colon F \to F$.

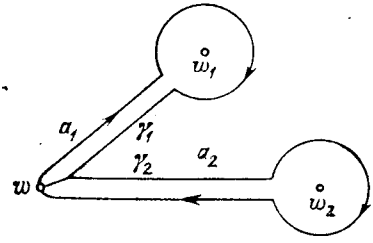


Рис. 135

Рассмотрим случай невырожденных (типичных) особых точек $z_1, \ldots, z_m$, т. е. таких, что $df|_{z_j} = 0$ и квадратичная форма $d^2f|_{z_j}$ невырождена. В этом случае топологическое устройство слоев в малой окрестности U_j точки z_j описывается квадратичной частью функции $f - f(z_j) = \Delta f$. В окрестности точки z_j существует система локальных координат $z^1_j, \ldots, z^n_j$ (точку z_j можно считать началом этой системы), в которой функция Δf имеет вид

$$\Delta f(z) = \sum_q (z^q_j)^2 + O(|z_j|^3)$$

(форму d^2f можно привести линейной заменой к сумме квадратов). В достаточно малой области $|z_j| < \varepsilon$ при исследовании топологии слоев члены $O(|z_j|^3)$ можно не учитывать,

$$\Delta f(z_j) \approx \sum_{\alpha} (z_j^{\alpha})^2 = q(z_j).$$

Обозначим для краткости координаты z_j^q через z^q и изучим чисто квадратичную функцию $q(z)$. Уравнение $q(z)=0$ задает особый слой (конус), уравнения $q=\delta$ при малых $\delta \neq 0$ задают близкие неособые слои в ε-окрестности исходной точки z_j (δ выбирается после ε). Уравнение $q(z)=\delta$ задает «квадрику»

$$K_\delta = \left\{ \sum_{q=1}^{n} (z^q)^2 = \delta \right\}.$$

При вещественном $\delta > 0$ это многообразие K_δ стягивается к сфере $S_\delta^{n-1} = \left\{ \sum_j (x^j)^2 = \delta,\ y^1 = \ldots = y^n = 0,\ z^q = x^q + iy^q \right\}$. Если $\delta = |\delta| e^{i\varphi}$, то уравнение сферы S_δ^{n-1} в K_δ принимает вид $\{\tilde{y}^q = 0\}$, где $q = 1, \ldots, n$,

$$z^q e^{-i\varphi/2} = \tilde{z}^q = \tilde{x}^q + i\tilde{y}^q,$$

$$\sum_q (z^q)^2 = \delta = |\delta| e^{i\varphi}.$$

Задача. Докажите, что K_δ диффеоморфно пространству линейных элементов (s, τ) сферы, где $s \in S^{n-1}$ и τ — произвольный касательный вектор к S^{n-1} в точке s.

Итак, имеем вложение

$$S_\delta^{n-1} \subset K_\delta,$$

где K_δ — неособый слой, близкий к особому слою K_0. Заметим, что вся сфера S_δ^{n-1} лежит в малой окрестности точки $z=0$ в силу ее уравнения. Если δ стремится к нулю, то неособый слой K_δ «сминается» на особый слой K_0 — возникает отображение

$$\varphi\colon K_\delta \to K_0.$$

При этом отображении сфера S_δ^{n-1} отображается в точку (эта сфера «исчезает» на особом слое). Поэтому сфера S_δ^{n-1} называется *исчезающим циклом* этой особой точки.

Изучим монодромию $K_\delta \to K_\delta$ при обходе вокруг особого слоя по пути в базе $\gamma_j(\varphi) = \delta e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Слои $K_{\delta e^{i\varphi}}$ деформируются при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; при $\varphi = 2\pi$ мы получим «отображение монодромии»: $\sigma\colon K_\delta \to K_\delta$.

Вычислим эти отображения монодромии для $n=2$. Решаем сейчас задачу для чисто квадратичной функции

$$w = f(z) = (z^1)^2 + (z^2)^2 = u^2 + v^2, \quad u = z^1, \quad v = z^2.$$

Квадрика K_δ задается уравнением $u^2+v^2=\delta=|\delta|e^{i\varphi}$; сфера S^1_δ есть окружность $\operatorname{Im}\tilde{u}=\operatorname{Im}\tilde{v}=0$, где $\tilde{u}=ue^{-i\varphi/2}$; $\tilde{v}=ve^{-i\varphi/2}$. Неособый слой K_δ есть произведение $K_\delta=S^1_\delta\times\mathbb{R}^1$ (цилиндр).

Отображения обхода, начиная с вещественного $\delta>0$ ($\delta=|\delta|$),

$$K_{|\delta|}\to K_{|\delta|e^{i\varphi}},$$

можно задать так:

$$u\to ue^{i\varphi/2},\quad v\to ve^{i\varphi/2}. \tag{3}$$

Изменяя φ от нуля до 2π, получим в конце отображение $K_{|\delta|}\to K_{|\delta|}$:

$$u\to ue^{i\pi}=-u,\quad v\to ve^{i\pi}=-v. \tag{4}$$

Нашей задачей является построение такого семейства отображений обхода $K_{|\delta|}\to K_{|\delta|e^{i\varphi}}$, которое совпадало бы с (3) в малой окрестности исчезающего цикла S^1_δ и было бы «тождественным» отображением всюду вне несколько большей, но малой окрестности $S^1_\delta\subset K_\delta$. Термин «тождественное» означает следующее: отображения вырождения $\varphi\colon K_\delta\to K_0$ (см. выше) взаимно однозначны вне исчезающего цикла S^1_δ и устанавливают канонический диффеоморфизм между многообразиями $K_\delta\setminus S^1_\delta$ при всех (малых) δ. Все отображения обхода $K_{|\delta|}\to K_{|\delta|e^{i\varphi}}$ должны совпадать с этими каноническими диффеоморфизмами между разными $K_\delta\setminus S^1_\delta$ вне малой окрестности $U_\delta\supset S^1_\delta$ и должны совпадать с (3) внутри еще меньшей окрестности V_δ, где $K_\delta\supset U_\delta\supset V_\delta\supset S^1_\delta$.

Именно такое семейство отображений обхода («тождественное» вне окрестности исчезающего цикла) необходимо для применений локальных результатов о квадрике к глобальной задаче о вычислении преобразований монодромии на группе гомологий $H_1(F_w)=\pi_1(F_w)/[\pi_1,\pi_1]$ неособого слоя $F=F_w$ для произвольного отображения $f\colon M\to\mathbb{C}P^1$, где M — компактное двумерное многообразие.

Слой K_0 определяется уравнением $u^2+v^2=0$ или $u=\pm iv$. Из этого видно, что $K_0\setminus 0$ состоит из двух кусков:

$$K_0\setminus 0=(S^1\times\mathbb{R}^+)_1\cup(S^1\times\mathbb{R}^+)_2;$$

введем в этих кусках координаты

$$\begin{aligned}&\rho>0,\quad (\rho,\theta)_1\colon\ u=\rho e^{i\theta},\quad v=iu\ \text{(первый кусок)},\\ &\rho>0,\quad (\rho,\theta)_2\colon\ u=\rho e^{i\theta},\quad v=-iu\ \text{(второй кусок)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Такой же вид имеет при малом δ, отличном от нуля, разность $K_\delta\setminus S^1_\delta$:

$$K_\delta\setminus S^1_\delta=(S^1\times\mathbb{R}^+)_1\cup(S^1\times\mathbb{R}^+)_2;$$

отображение вырождения φ: $K_\delta \to K_0$ индуцирует диффеоморфизм

$$(K_\delta \setminus S^1_\delta) \approx (K_0 \setminus 0),$$

вводящий координаты $(\rho, 0)_1$ и $(\rho, 0)_2$ на $(K_\delta \setminus S^1_\delta)$. Кривые уровня ($\rho = \text{const}$) на слое K_δ могут быть описаны как орбиты действия группы

$$\begin{aligned} u &\to u\cos\theta + v\sin\theta = ue^{-i\theta}, \\ v &\to -u\sin\theta + v\cos\theta = ue^{i\theta}, \end{aligned} \tag{6}$$

причем исчезающий цикл S^1_δ — это орбита минимальной длины на слое K_δ. На слое K_0 это действие сведется к действию $u \to ue^{-i\theta}$ (1-й кусок), $u \to ue^{i\theta}$ (2-й кусок). Координата ρ на слое K_δ (на обоих кусках) может быть определена как расстояние от точки $(u, v) \in K_\delta$ до исчезающего цикла $S^1_\delta \subset K_\delta$; начало отсчета угла θ мы будем вести от сечения ($\operatorname{Im} u = 0$) слоя K_δ трехмерной гиперплоскостью (на обоих кусках). Таким образом, на обоих кусках K_δ имеются координаты (θ, ρ), где $\rho \geqslant 0$ ($\rho = 0$ отвечает исчезающему циклу).

Лемма 5. *Для любого $\varepsilon > 0$ преобразования обхода $K_{|\delta|} \to K_{|\delta|e^{i\varphi}}$ могут быть построены так, что:*

1) *эти преобразования тождественны при $\rho > 2\varepsilon$;*

2) *эти преобразования имеют вид* (3) *при $\rho < \varepsilon$;*

3) *конечное преобразование монодромии σ: $K_{|\delta|} \to K_{|\delta|}$ для $\varphi = 2\pi$ на обоих кусках имеет вид*

$$\sigma\colon (\theta, \rho) \to (\theta + \theta(\rho), \rho),$$

где функция $\theta(\rho)$ имеет график, показанный на рис. 136, *т. е. $\theta = \pi$ для $\rho \leqslant \varepsilon$ (на обоих кусках и для $\rho = 0$ на исчезающем цикле); $\theta = 0, 2\pi$ для $\rho \geqslant 2\varepsilon$ на обоих кусках; кривая $(\rho^*, \theta(\rho^*))$ на цилиндре один раз охватывает цилиндр при $-2\varepsilon \leqslant \rho^* \leqslant 2\varepsilon$, где $\rho^* = \rho$ на первом куске и $\rho^* = -\rho$ на втором куске.*

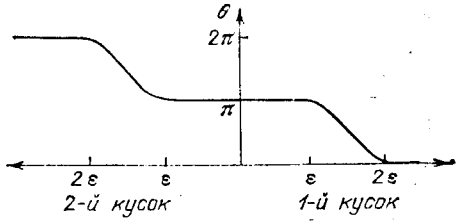


Рис. 136

Доказательство. Рассмотрим преобразования (3) при малых φ на обоих кусках поверхности K_δ. Из формул (3) непосредственно видно, что уже при малом отклонении φ от нуля координата θ при преобразованиях обхода начинает вращаться в противоположные стороны для разных кусков:

$$\theta \to \theta + \frac{\varphi}{2} \quad \text{(на 1-м куске)},$$

$$\theta \to \theta - \frac{\varphi}{2} \quad \text{(на 2-м куске)}.$$

Это следует непосредственно из сопоставления формул (3) с ограничением $K_\delta \to K_0$, вводящим координату θ, где направление θ различно на 1-м и 2-м куске, в то время как добавление угла $\varphi/2$ имеет на обоих кусках знак (+). Сшивая эту деформацию с тождественной при $\rho \geqslant 2\varepsilon$ на обоих кусках, отсчитываем угол θ от нуля для 1-го куска и от 2π для 2-го куска; в результате снова получим совпадение углов при $\varphi = 2\pi$. Отображение $K_{|\delta|} \to K_{|\delta|e^{i\varphi/2}}$ определим для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ формулой

$$(\theta, \rho) \to (\theta + \theta^\varphi(\rho), \rho),$$

где $\theta^\varphi(\rho)$ имеет график, показанный на рис. 137. Непрерывность этого отображения на сфере $S^1_\delta(\rho = 0)$ следует из того, что наши координаты θ, ρ для разных кусков указывают противоположные направления угла θ на сфере $S^1_\delta \subset K_\delta$.

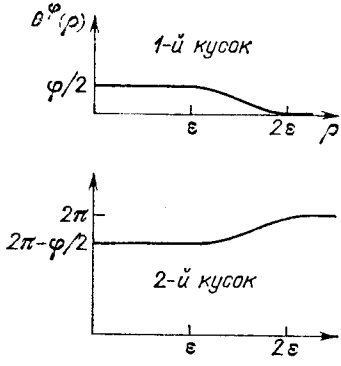


Рис. 137

Лемма доказана.

7. Формула Пикара — Лефшеца. Рассмотрим теперь задачу глобально. Имеется комплексно аналитическое отображение $f\colon M \to \mathbb{C}P^1 = S^2$, где M — компактное двумерное комплексное многообразие с невырожденными особыми точками $z_1, \ldots, z_m \in M$, которым отвечают особые значения $w_j = f(z_j)$. Рассмотрим типичный слой

$$F = F_w = f^{-1}(w) \subset M$$

над неособой точкой $w \in S^2$. Введем пути a_j (см. рис. 135) и «исчезающие циклы»

$$q_j \in H_1(F_w) = \pi_1/[\pi_1, \pi_1],$$

которые строятся путем переноса исчезающих циклов, отвечающих особым точкам z_j, в слой над общей точкой w вдоль путей γ_j из точек $w_j - \delta$ в точку w при малом δ.

Теорема 3. *Имеет место следующая «формула Пикара — Лефшеца» для гомологического эффекта обходов φ_{a_j} особых значений по путям $a_j = \gamma_j^{-1}\alpha_j\gamma_j$:*

$$(\varphi_{a_j})_*\colon H_1(F_w) \to H_1(F_w),$$

$$(\varphi_{a_j})_*(p) = p + (p \circ q_j)\, q_j.$$

Здесь p — любой цикл (элемент группы $H_1(F_w)$), q_j — исчезающие циклы особых точек z_j, $p \circ q_j$ — индекс пересечения этих циклов (любых находящихся в общем положении отображений окружности в F_w, представляющих эти циклы). При этом преоб-

разования $(\varphi_{a_j})_*$ *сохраняют индекс пересечения*:

$$p_1 \circ p_2 = [(\varphi_{a_j})_* p_1] \circ [(\varphi_{a_j})_* p_2]$$

для любых $p_1, p_2 \in H_1(F_w)$.

Доказательство. Рассмотрим цикл $\tilde{p}$ в слое $F_{w_j-\delta}$ около точки w_j, трансверсально пересекающий исчезающий цикл q_j около особой точки $z_j \in F_{w_j-\delta}$, где топологическая картина определяется квадратичной частью $(d^2 f)_z \approx \Delta f$. Согласно лемме 5 в результате обхода по малой окружности a_j радиуса δ вокруг w_j имеем формулу для классов гомологий:

$$[S^1_\delta] \to [S^1_\delta],$$
$$[\tilde{p}] \to \tilde{p} + (\tilde{p} \circ S^1_\delta)[S^1_\delta],$$

так как в окрестности всех точек трансверсального пересечения цикла $\tilde{p}$ и цикла S^1_δ изменение цикла $\tilde{p}$ при обходе будет однократным с тем знаком, с которым эта точка пересечения входит в индекс $\tilde{p} \circ S^1_\delta$. Заметим также, что $S^1_\delta \circ S^1_\delta = 0$. Перенося все циклы в точку w вдоль пути γ_j, мы и получаем формулу Пикара — Лефшеца.

Докажем теперь, что $p_1 \circ p_2 = (\varphi_* p_1) \circ (\varphi_* p_2)$ при обходе a_j. Мы имеем:

$$\varphi_* p_1 = p_1 + (p_1 \circ q_j) q_j,$$
$$\varphi_* p_2 = p_2 + (p_2 \circ q_j) q_j,$$
$$(p_1 + (p_1 \circ q_j) q_j) \circ (p_2 + (p_2 \circ q_j) q_j) =$$
$$= p_1 \circ p_2 + (p_1 \circ q_j)(q_j \circ p_2) + (p_1 \circ q_j)(p_2 \circ q_j) + (p_1 \circ q_j)(p_2 \circ q_j)(q_j \circ q_j).$$

Это равно $p_1 \circ p_2$ в силу равенства $p \circ q = -q \circ p$ (косая симметричность). Теорема доказана.

Задача. Вывести аналогичную формулу Пикара — Лефшеца для размерностей $n > 2$. Случаи четного и нечетного n при этом существенно отличаются друг от друга; чем?

Рассмотрим пример. Пусть $M = \mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}P^1_\infty)$ и наша функция — полином степени n по переменным z_1, z_2:

$$P_n(z_1, z_2)\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}.$$

Как обычно, расслоение на поверхности уровня $P_n(z_1, z_2) = \text{const}$ продолжается на все $\mathbb{C}P^2$ (база расслоения — $\mathbb{C}P^1$) в однородных координатах (u_0, u_1, u_2), где $z_1 = u_1/u_0$, $z_2 = u_2/u_0$.

Задача. Найти все особые слои и преобразования монодромии в гиперэллиптическом случае $P_1(z_1, z_2) = z_1^2 - Q_n(z_2)$. Неособые слои являются здесь поверхностями рода g, где $n = 2g+1$ или $n = 2g+2$ (см. § 2). Как мы знаем, фундаментальная группа неособого слоя (поверхности рода g) задается

образующими $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ и соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

Группа $H_1 = \pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ представляет собой $2g$-мерную решетку, порожденную векторами $[a_1], [b_1], \ldots, [a_g], [b_g]$ с индексами пересечения

$$[a_i] \circ [b_j] = \delta_{ij}, \qquad [a_i] \circ [a_j] = [b_i] \circ [b_j] = 0.$$

§ 25. Дифференциальная геометрия расслоений

1. G-связности в главных расслоениях. В первой части этой книги (см. гл. 6) уже было начато локальное рассмотрение связностей и кривизны в расслоениях. Чтобы перейти к рассмотрению топологических инвариантов связностей и кривизны (в случае, когда расслоение уже не является тривиальным и база является многообразием, а не областью евклидова пространства), мы разработаем в этой главе инвариантную систему понятий.

Определение 1. *Связностью* (G-связностью) в главном расслоении с пространством E, базой M, группой G и проекцией $p\colon E \to M$ называется гладкое семейство «горизонтальных» n-мерных направлений в пространстве E, инвариантное относительно (левого) действия группы G на пространстве E.

Ниже мы покажем, что преобразования параллельного переноса, определенного G-связностью, будут принадлежать группе G. Поэтому это определение согласовано с определением 24.4.

Напомним теорему 1 из § 24 о том, что каждое главное расслоение определяется свободным левым действием группы G на E. Простейший дифференциально-геометрический способ задания связности, как в лемме 1 из § 24, использует левоинвариантную метрику (g_{ij}) на пространстве E (т. е. такую метрику, что левое действие группы G на пространстве E является движением). Если такая метрика имеется (см. по этому поводу § 8, в котором доказано существование такой метрики для компактных групп G), то G-связность определяется заданием n-мерных плоскостей, ортогональных слоям, в качестве горизонтальных.

Другой способ, удобный при определении кривизны и в других приложениях связностей, состоит в задании поля горизонтальных направлений уравнением типа Пфаффа, т. е. набором дифференциальных форм (или одной формой с векторными значениями).

Реализуем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G как пространство правоинвариантных касательных векторных полей на группе G, где операцией Ли является коммутирование векторных полей.

Определим каноническую 1-форму ω_0 на группе G со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Значением этой формы на касательном векторе τ в точке $y \in G$ объявляется элемент алгебры Ли

$\omega_0(y, \tau) = \xi_\tau$ — правоинвариантное векторное поле такое, что $\xi_\tau(y) = -\tau$. Сокращенно можно записать форму ω_0 в виде $-(dg)g^{-1}$.

Свойства формы ω_0 таковы:

а) $\omega_0(x, \tau) \neq 0$, если $\tau \neq 0$ (очевидно),

б) $d\omega_0(y, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}\omega_0([\tau_1, \tau_2]) = [\omega_0(\tau_1), \omega_0(\tau_2)]$ (см. задачу 1 к § 25 ч. I). Группа G, действуя на самой себе левыми сдвигами $y \mapsto gy$ (y и g оба из группы G), переводит правоинвариантное поле ξ в правоинвариантное поле $\eta = g_*\xi$, обозначаемое через $\mathrm{Ad}(g)\xi$. Для формы ω_0 при левых сдвигах группы $y \mapsto gy$ имеем

$$(g^*\omega_0)(y_1, \tau) = \mathrm{Ad}(g)\,\omega_0(y_2, \bar{\tau}),$$

где $y_1 = g(y_2)$ и $\bar{\tau} = g_*(\tau)$. В матричной реализации групп и алгебр Ли преобразование $\mathrm{Ad}(g)$ выглядит как внутренний автоморфизм $\xi \mapsto g\xi g^{-1}$ на алгебре Ли; запись $\omega_0 = -(dg)g^{-1}$ приобретает в матричной записи буквальный смысл.

Определение 2. *Дифференциально-геометрической G-связностью* на главном расслоении $p\colon E \to M$ с группой G называется форма ω в пространстве E со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, обладающая двумя свойствами:

1) Нормировка: ограничение формы ω на слой G есть $\omega_0 = -(dg)g^{-1}$.

2) Инвариантность: при левом действии группы G на E имеет место равенство

$$g^*\omega = \mathrm{Ad}(g)\,\omega = g\omega g^{-1}. \tag{1}$$

Лемма 1. а) *Уравнение $\omega = 0$ задает G-инвариантное семейство горизонтальных направлений, образующих связность в смысле определения* 1; б) *обратно, если задано G-инвариантное семейство горизонтальных направлений, то можно построить форму ω со свойствами* 1) *и* 2) *такую, что семейство задается уравнением $\omega = 0$.*

Доказательство. Так как ограничение формы ω на слой G есть в точности форма ω_0, то уравнение $\omega = 0$ в любой точке $y \in E$ определяет плоскость, трансверсальную слою, и размерность пространства нулей формы ω есть n (размерность базы). G-инвариантность поля плоскостей $\omega = 0$ непосредственно следует из свойства 2 в определении 2. Обратно, пусть задано G-инвариантное семейство горизонтальных n-мерных направлений в E. Построим форму ω, представляющую собой в каждой точке $x \in E$ линейное отображение касательного пространства T_xE (в точке x) в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Структурная группа G действует на слоях правыми сдвигами R_g: $y \mapsto yg$. Форма ω_0 на слое $F = G$ инвариантна относительно правых сдвигов по своему

определению:

$$R_g^* \omega_0 = \omega_0.$$

Поэтому форма ω_0 на слое F_x над любой точкой $x \in M$, $F_x = p^{-1}(x) \approx G$, определяется инвариантно (независимо от выбора области локальных координат со структурой прямого произведения). В каждой точке y слоя F_x форма ω_0 представляет собой изоморфизм касательного пространства к слою $T_y F$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$,

$$\omega_0 \colon T_y F \to \mathfrak{g}.$$

Выделение горизонтального направления $\mathbb{R}^n_y \subset T_y E$ задает разложение в прямую сумму

$$T_y E = \mathbb{R}^n_y \oplus T_y F$$

и тем самым проекцию

$$\pi \colon T_y E \to T_y F, \quad \pi(\mathbb{R}^n_y) = 0.$$

Рассмотрим суперпозицию

$$T_y E \xrightarrow{\pi} T_y F \xrightarrow{\omega_0} \mathfrak{g}.$$

Эта суперпозиция $\omega_0 \pi$ и есть форма ω. Ее ограничение на слой F есть ω_0 по определению. Левый сдвиг $g \colon E \to E$ сохраняет проекцию π ввиду левоинвариантности семейства горизонтальных направлений $\mathbb{R}^n_y$, а на области значений формы ω_0 левый сдвиг действует по формуле (1). Лемма доказана.

Лемма 2. *На любом главном расслоении существует дифференциально-геометрическая G-связность (в смысле определения 2).*

Доказательство. Предположим, что структура главного расслоения $p \colon E \to M$ задана областями U_α, где $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$, и диффеоморфизмами $\varphi_\alpha \colon G \times U_\alpha \to p^{-1}(U_\alpha)$ (см. определение 1 из § 24). Мы выберем, если нужно, более мелкое покрытие так, чтобы на M существовало разбиение единицы $\{\psi_\alpha\}$, где $\psi_\alpha \equiv 0$ вне U_α и $\sum_\alpha \psi_\alpha(y) \equiv 1$ в любой точке $y \in M$ (см. § 7). В прямом произведении $G \times U_\alpha \overset{\varphi_\alpha}{\approx} p^{-1}(U_\alpha)$ зададим любую связность ω_α (например, горизонтальные направления касаются $\varphi_\alpha(g \times U_\alpha)$ для всех $g \in G$). Чтобы построить G-связность во всем E, достаточно положить

$$\omega = \sum_\alpha p^*(\psi_\alpha)\, \omega_\alpha.$$

Здесь функции $p^*(\psi_\alpha(x))$ имеют вид $\psi_\alpha(p(x))$, т. е. «подняты» с базы M. Поэтому $p^*\psi_\alpha \equiv 0$ вне $p^{-1}(U_\alpha)$, и форма $p^*\psi_\alpha(x)\omega_\alpha$ продолжается на все многообразие E как тождественно нулевая

вне области $p^{-1}(U_\alpha)$. Ограничение этой формы на слой имеет вид $p^*\psi_\alpha(x)\omega_0$, так как функции $p^*\psi_\alpha(x)$ постоянны вдоль слоев (G-инвариантны). Свойство 2 из определения 2 также очевидно.

Лемма доказана.

Задача. Докажите, что множество связностей в расслоении линейно связно.

Локально (над координатной областью U_α с координатами $x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n$) связность в тривиальном главном расслоении с пространством $E_\alpha = p^{-1}(U_\alpha) \overset{\varphi_\alpha}{\cong} F \times U_\alpha (F = G)$ может быть задана в виде 1-формы A в базе U_α со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Сопоставление формы $A = A_\mu dx_\alpha^\mu$ с формой $\omega|_{E_\alpha}$ в координатах $y = (g, x)$, заданных отображением φ_α, таково:

$$\omega = \omega_0 + gA_\mu(x)g^{-1}dx_\alpha^\mu, \tag{2}$$

где ω_0 — каноническая форма на G со значениями в $\mathfrak{g}$.

Инвариантно это можно сказать так: структура прямого произведения на E_α представляет собой пару отображений («координаты»):

$$U_\alpha \xleftarrow{p} E_\alpha \xrightarrow{q} G = F.$$

«Координаты» точки $y \in E_\alpha$ — это пара $(p(y), q(y))$. Формула (2) принимает вид

$$\omega = q^*(\omega_0) + q^{-1}(y)A_\mu(p(y))dx_\alpha^\mu q(y).$$

Каждое сечение расслоения E_α над областью U_α,

$$U_\alpha \xrightarrow{\psi} E_\alpha, \quad p\psi = 1,$$

задает координаты прямого произведения в главном расслоении E_α: мы объявляем точки вида $\psi(x)$ «единицами» групп G (слоев). Отображение q: $E_\alpha \to G$ задается после этого формулой

$$q(y) = g \in G, \quad g\psi(x) = y.$$

При этом разные сечения ψ_1 и ψ_2 задают разные координаты прямого произведения в E_α, отличающиеся на преобразование группы G в каждой точке $x \in U_\alpha$, $\psi_1(x) = g(x)\psi_2(x)$. В прямом произведении сечение определяется точками $\psi(x) = (1, x)$. В пересечении $U_{\alpha\beta}$ двух областей U_α, U_β возникает замена сечения $\psi_1 \to \psi_2$ с помощью левых сдвигов, заданных отображением $g(x)$: $U_{\alpha\beta} \to G$. Форму ω можно представить в области $E_{\alpha\beta} = p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ двояким образом:

$$g_1 = q_1(x), \quad \omega = q_1^*(\omega_0) + q_1 A_\mu^{(1)} q_1^{-1} dx^\mu,$$

$$g_2 = q_2(x), \quad \omega = q_2^*(\omega_0) + q_2 A_\mu^{(2)} q_2^{-1} dx^\mu,$$

где q_1: $E_{\alpha\beta} \to G$ и q_2: $E_{\alpha\beta} \to G$ различаются на преобразование

g: $U_{\alpha\beta} \to G$ (отображения q_t определяются сечениями ψ_t). Из совпадения этих двух выражений для формы ω получаем закон преобразования для коэффициентов A_μ («калибровочное преобразование»; см. часть I, § 41):

$$A_\mu^{(1)}(x) = g(x) A_\mu^{(2)} g^{-1}(x) - \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}(x). \qquad (3)$$

Эта формула определяет «склейку связностей»; она имеет вид $A_\mu^{(1)}(x) = -\frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}(x)$ в случае, если выбором другого сечения можно сделать $A_\mu^{(2)} \equiv 0$. Это — «тривиальные связности».

Теорема 1. *G-связность, задаваемая формой ω в главном расслоении p: $E \to M$, определяет параллельный перенос слоев вдоль любой кусочно гладкой кривой γ в базе M, задаваемый правым сдвигом на группе G.*

Доказательство. Пусть кривая γ имеет вид $x = x(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Будем искать горизонтальную кривую $\tilde{\gamma}$ в пространстве расслоения, накрывающую γ и начинающуюся в заданной точке g_0 слоя $G = p^{-1}(x(a))$. Достаточно рассмотреть случай, когда кривая γ целиком лежит в одной координатной области U_α такой, что $p^{-1}(U_\alpha) \approx G \times U_\alpha$ (в общем случае нужно воспользоваться преобразованиями склейки $\lambda_{\alpha\beta}$). В локальных координатах прямого произведения (g, x) в пространстве расслоения кривая $\tilde{\gamma}$ должна иметь вид $(g(t), x(t))$, где $g(t)$ — не известная пока функция. Из условия горизонтальности $\tilde{\gamma}$ (т. е. горизонтальности касательного вектора $(\dot{g}(t), \dot{x}(t))$) будем иметь

$$\omega(\dot{g}(t), \dot{x}(t)) = -\dot{g}(t) g^{-1}(t) + \dot{x}^\mu(t) g(t) A_\mu(x(t)) g^{-1}(t) = 0.$$

Обозначая через $B(t)$ функцию со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, где $B(t) = \dot{x}^\mu(t) A_\mu(x(t))$, получим для искомой функции $g(t)$ линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{g} - gB = 0.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $g(a) = g_0 \in G$ существует и единственно при всех $t \in [a, b]$. Таким образом, параллельный перенос определен при всех t. Покажем, что параллельный перенос слоя задается правым сдвигом группы.

Лемма. *Решение уравнения $\dot{g} - gB = 0$ при $B(t) \in \mathfrak{g}$ с начальным условием $g(a) = g_0 \in G$ имеет вид $g(t) = g_0 f(t)$, где функция $f(t)$ принимает значения в группе G.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если функция B не зависит от t: $B(t) = \text{const} \in \mathfrak{g}$. В самом деле, решение уравнения $\dot{g} = gB$ в этом случае имеет вид $g(t) = g_0 \exp[(t-a)B]$, где $\exp[(t-a)B]$ — экспонента вектора из алгебры Ли $\mathfrak{g}$, принадлежащая группе G.

В случае непостоянной функции $B(t)$ разобьем отрезок $[a, t]$ на N малых частей $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t$. С точностью до $o(t_i - t_{i-1})$ будем иметь

$$g(t_1) = g_0 + g_0(t_1 - t_0)B(t_0) = g(t_0)\exp[(t_1 - t_0)B(t_0)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g(t_N) = g(t_{N-1})\exp[(t_N - t_{N-1})B(t_{N-1})].$$

Отсюда вытекает, что $g(t) = g_0 f(t)$, где

$$f(t) = \lim_{|t_i - t_{i-1}| \to 0} \exp[(t_N - t_{N-1})B(t_{N-1})] \ldots \exp[(t_1 - t_0)B(t_0)].$$

Каждый сомножитель принадлежит группе G, поэтому и произведение принадлежит G. Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

Следствие. *Для G-связностей верна лемма* 2 *из* § 24 (*без предположения о компактности слоя*).

Для G-связностей определена группа голономии. Эта группа является образом гомоморфизма, относящего петлям из $\Omega(x_0, M)$ преобразования слоя, и состоит из правых сдвигов группы G (хотя, возможно, не всех).

2. G-связности в ассоциированных расслоениях. Примеры. Обсудим теперь, пользуясь инвариантным языком, связности в ассоциированных расслоениях. Предположим, что группа G действует как группа преобразований в многообразии F — слое. Пусть, далее, $p_F\colon E_F \to M$ — расслоение, ассоциированное с главным расслоением $p\colon E \to M$, обладающим формой связности ω. Форму ассоциированной связности на пространстве E_F зададим со значениями в касательном векторном пространстве к слою F. Конструкция такова: каждый элемент g группы G определяет преобразование слоя $g\colon F \to F$. Вследствие этого элементы алгебры Ли группы $\mathfrak{g}$ определяют векторные поля на слое F — дифференциальные операторы (дифференцирования по направлению) на скалярных функциях. Пусть заданы точка $y \in F$ и касательный вектор τ в этой точке. Определим форму ω_F^0 на слое F, положив ее значение $\omega_F^0(y, \tau)$ на векторе τ равным τ. Ограничение искомой формы ω_F на каждый слой F должно равняться ω_F^0. Из этого вытекает, что в каждой области $p_F^{-1}(U_\alpha) \overset{\varphi_\alpha}{\cong} F \times U_\alpha$ с координатами прямого произведения форма ω_F должна иметь вид

$$\omega_F = \omega_F^0 + A_\mu(y, x)\, dx_\alpha^\mu, \quad x = p(y). \tag{4}$$

В качестве $A_\mu(y, x)$ мы берем следующий касательный вектор к слою в точке $y \in E_F$: элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, совпадающий с $A_\mu(x)$, определяет векторное поле ξ на слое F; берется значение поля ξ в точке $y \in F$ — касательный вектор к слою

$$A_\mu(y, x) = \xi(y), \quad p(y) = x.$$

По определению, значение форм dx^μ_α на любом векторе τ, касающемся слоя, равно нулю. Поэтому ограничение формы ω_F на слой F есть ω^0_F.

Уравнение $\omega_F = 0$ задает «горизонтальные направления» $\mathbb{R}^n_x$ для точек $x \in E_F$ в ассоциированном расслоении. Формула (4) определяет форму ω_F инвариантно.

Если слой F есть векторное пространство $\mathbb{R}^m$ и группа G действует линейно, то элементы ξ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно считать линейными векторными полями (или матрицами A_ξ: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$). Пусть $\eta^1, \ldots, \eta^m$ — координаты в слое $\mathbb{R}^m$. Если $A_\xi = (a^j_i)$, то поле $\xi(\eta)$ равно

$$\xi^j = a^j_i \eta^i.$$

Поле $A_\mu(x)$ имеет матричный вид:

$$A_\mu(x) = (A_\mu(x))^i_j = a^i_{j\mu}(x) \text{ — матрица в } \mathbb{R}^m.$$

Таким образом, в векторном расслоении со слоем $\mathbb{R}^m$ связность задается (локально) матрицей, зависящей от x и μ:

$$a^i_{j\mu}(x), \quad i, j = 1, \ldots, m, \quad \mu = 1, \ldots, n = \dim M,$$

или матричнозначной формой $a^i_{j\mu} dx^\mu$.

Если само расслоение — касательное расслоение многообразия M (со слоем $\mathbb{R}^n$), то имеет смысл говорить о кручении (см. часть I, § 41):

$$a^i_{j\mu} - a^i_{\mu j} = T^i_{\mu j} = -T^i_{j\mu} \text{ (тензор в } M),$$

и о симметричности связности, если $T^i_{\mu j} \equiv 0$.

Параллельный перенос слоя F вдоль пути $\gamma(t)$ в базе является для таких связностей линейным преобразованием. В локальных координатах $x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha$ области $U_\alpha \subset M$ определяются оператор ковариантного дифференцирования сечений векторного расслоения:

$$\nabla_\mu \psi^i(x) = \frac{\partial \psi^i(x)}{\partial x^\mu} + a^i_{j\mu}(x)\, \psi^j(x), \tag{5}$$

и производной по направлению $\delta = (\delta^1, \ldots, \delta^n)$ в базе $\nabla_\delta = \delta^\mu \nabla_\mu$. Неперестановочность операторов ∇_μ и ∇_ν между собой приводит к кривизне $\Omega_{\nu\mu} = [\nabla_\nu, \nabla_\mu]$.

Для гладкой кривой $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, линейный оператор параллельного переноса слоя вдоль пути из точки $\gamma(0)$ в точку $\gamma(1)$ изображается так называемой «хронологической экспонентой» и обозначается через

$$T \exp \left\{ \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} - \nabla_{\dot\gamma(t)} \right) dt \right\}. \tag{6}$$

Здесь $T[A_1(t)A_2(t')\ldots]$ обозначает так называемое хронологическое произведение двух (и более) некоммутирующих друг с другом операторов, зависящих от времени:

$$\begin{aligned} T[A_1(t)A_2(t')] &= A_1(t)A_2(t') \quad \text{при} \quad t > t', \\ T[A_1(t)A_2(t')] &= A_2(t')A_1(t) \quad \text{при} \quad t < t'. \end{aligned} \tag{7}$$

Если кривая $\gamma(t)$ разделена на малые интервалы точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = 1$, то для операторной функции $A(t)$ по определению полагаем

$$T\exp\left\{\int_0^1 A(t)\,dt\right\} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ |t_i - t_{i-1}|\to 0}} T\{\exp[(t_1 - t_0)A(t_0)]\times$$

$$\times\exp[(t_2 - t_1)A(t_1)]\ldots\exp[(t_N - t_{N-1})A(t_{N-1})]\}. \tag{8}$$

Полагая $A(t) = \frac{d}{dt} - \nabla_{\dot\gamma(t)}$ для гладкой кривой $\gamma(t)$, получим оператор параллельного переноса вдоль кривой.

Задачи. 1. Доказать формулу разложения в ряд для непрерывной функции $A(t)$:

$$T\exp\left\{\int_0^1 A(t)\,dt\right\} = 1 + \int_0^1 A(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 T(A(t')A(t''))\,dt'\,dt'' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\int_0^1\ldots\int_0^1 T(A(t_1)\ldots A(t_n))\,dt_1\ldots dt_n + \ldots \tag{9}$$

2. Показать, что выражение $T\exp\int_0^t A(\tau)\,d\tau = B(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dB}{dt} = [A(t),\ B(t)], \tag{10}$$

а вектор $\eta(t) = B(t)\eta_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = A(t)\eta(t). \tag{11}$$

Напомним, что параллельный перенос определялся из уравнения

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\eta(t) = 0, \tag{12}$$

или $\frac{d\eta^i(t)}{dt} + a^i_{j\mu}(t)\dot x^\mu(t)\eta^j(t) = 0$, где $\gamma(t) = (x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t))$. В этом случае имеем

$$A(t) = \frac{d}{dt} - \nabla_{\dot\gamma(t)} = -a^i_{j\mu}(t)\dot x^\mu(t). \tag{13}$$

Простейший случай представляет собой коммутативная группа $U(1)=SO(2)=G=S^1$ с одномерной алгеброй Ли $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^1$ (тривиальной). В этом случае имеем $\omega_0=\frac{1}{2\pi}d\varphi$, где $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ — координата на группе S^1. Локально заданные формы $gA_\mu g^{-1}dx^\mu$ совпадают с

$$\omega=\omega_0+gA_\mu g^{-1}dx^\mu=\frac{1}{2\pi}d\varphi+A_\mu dx^\mu. \tag{14}$$

Калибровочное преобразование чисто градиентно:

$$A_\mu\to A_\mu+\frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu}g^{-1}=A_\mu+\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}. \tag{15}$$

Форма связности есть просто скалярная форма ω, инвариантная при действии группы G на E:

$$g^*\omega=\omega=\mathrm{Ad}(g)\,\omega=g\omega g^{-1}. \tag{16}$$

Уравнение $\omega=0$, задающее связность, есть просто одно уравнение Пфаффа, выделяющее касательные гиперплоскости к E, трансверсальные к слоям.

Оператор ковариантного дифференцирования комплексных скалярных полей (т. е. сечений одномерных расслоений со слоем $\mathbb{C}^1$) для реализации группы G в виде $U(1)$ имеет вид (см. часть I, § 41)

$$\nabla_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}+iA_\mu(x), \tag{17}$$

где $A_\mu(x)$ — вещественный скаляр (при каждом μ). Коммутатор операторов ∇_μ и ∇_ν называется «кривизной».

3. Кривизна. Пусть комплексное одномерное расслоение со слоем $\mathbb{C}^1$ комплексно аналитично и имеет структурную группу $G=\mathbb{C}^*$; базой пусть служит n-мерное комплексное многообразие M с областями комплексных локальных координат $U_\alpha(z^1_\alpha,\ldots,z^n_\alpha)$. Расслоение задается функциями склейки в областях $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$,

$$T^{\alpha\beta}(z^1_\alpha,\ldots,z^n_\alpha)\neq 0, \tag{18}$$

со значениями в $G=\mathbb{C}^*$, и эти функции $T^{\alpha\beta}$ аналитичны. Рассмотрим логарифм (определенный, возможно, неоднозначно)

$$a_{\alpha\beta}=\ln T^{\alpha\beta}(z^1,\ldots,z^n)\,(+2\pi im). \tag{19}$$

В дальнейшем мы будем считать, что области $U_{\alpha\beta}$ односвязны, т. е. $\pi_1(U_{\alpha\beta})=0$. В этом случае можно выбрать однозначную ветвь логарифма

$$a_{\alpha\beta}=\ln T^{\alpha\beta}(z).$$

В пересечении трех областей $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем

$$T^{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}T^{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{или} \quad a_{\alpha\beta} + a_{\beta\gamma} + a_{\gamma\alpha} = 2\pi i n_{\alpha\beta\gamma}, \tag{20}$$

где $n_{\alpha\beta\gamma}$ — целое число. Это целое число определяется, очевидно, и без предположения об аналитичности функций $T^{\alpha\beta}(z)$. Позднее будет показано, как с помощью набора $\{n_{\alpha\beta\gamma}\}$, где $\alpha\beta\gamma$ — всевозможные тройки с непустым пересечением $U_{\alpha\beta\gamma}$ (этот набор называют *коцепью*), строится топологический инвариант расслоения. Если комплексная размерность базы M равна 1, то этот топологический инвариант определяется так: занумеруем области U_α в последовательность $U_1, U_2, \ldots$ и предположим, что никакие четыре области не пересекаются ($U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap U_{\alpha_3} \cap U_{\alpha_4}$ — пустое множество). Рассмотрим сумму

$$n = \sum_{\alpha<\beta<\gamma} n_{\alpha\beta\gamma}. \tag{21}$$

Задача. Доказать, что вычет числа $n \bmod 2$ не зависит от выбора структуры расслоения (является «топологической величиной»). Найти этот вычет для расслоения Хопфа η над $\mathbb{C}P^1$ и для его степеней η^k.

Вернемся теперь к комплексно аналитическим расслоениям со структурной группой $\mathbb{C}^* = S^1 \times \mathbb{R}^+$; алгебра Ли этой группы коммутативна и совпадает с $\mathbb{C}^1$. На группе $G = \mathbb{C}^*$ имеется комплексная координата w, $|w| > 0$, и комплекснозначная форма $\omega_0 = d \ln w$. В аналитическом расслоении форма связности (локально, в области U_α) записывается в виде

$$\omega = \omega_0 + A_\mu^{(\alpha)} dz_\alpha^\mu + B_\mu^{(\alpha)} d\bar{z}_\alpha^\mu. \tag{22}$$

Потребуем, чтобы форма связности была задана локально в виде

$$\omega = \omega_0 + d' f_\alpha = \omega_0 + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z^j} dz^j, \tag{23}$$

где f_α — некоторые числовые функции, т. е.

$$B_\mu(z) \equiv 0, \quad A_\mu^\alpha(z) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\alpha^\mu}. \tag{24}$$

Для пересечений $U_{\alpha\beta}$ мы должны иметь градиентное преобразование (см. (15)):

$$d' f_\alpha - d' f_\beta = (d' + d'')\gamma_{\alpha\beta}, \tag{25}$$

где $d' + d''$ — полный дифференциал: $d = d' + d''$. Если пересечения $U_{\alpha\beta}$ односвязны, то $\ln T^{\alpha\beta}(z)$ — однозначные функции. Мы полагаем $\gamma_{\alpha\beta} = \ln T^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ и выбираем, предполагая это возможным, функции f_α (вообще говоря, неаналитические). Заметим, что $d''\gamma_{\alpha\beta} = 0$ в силу аналитичности функций $\gamma_{\alpha\beta}$. Поэтому форма

$\Omega = d'd''f_\alpha$ определена однозначно на всем многообразии M:

$$d'd''f_\alpha - d'd''f_\beta \equiv d''(d'+d'')\gamma_{\alpha\beta} \equiv 0 \qquad (26)$$

(так как $d'^2 = d''^2 = (d'+d'')^2 = 0$ и $d'd'' = -d''d'$).

Форма Ω называется *кривизной* этой связности.

Имеем $\Omega = \sum_{ij} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z^i_\alpha \partial \bar{z}^j_\alpha} dz^i_\alpha \wedge d\bar{z}^j_\alpha$ (локально). Для двумерного случая ($n = 1$) форма кривизны имеет в области U_α вид

$$\Omega = \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha. \qquad (27)$$

Заметим при этом, что $\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \Delta$ — вещественное выражение, и $dz \wedge d\bar{z} = 2i dx \wedge dy$. Поэтому действительная и мнимая части формы Ω обе корректно определены для $n = 1$ и замкнуты. В дальнейшем будет ясно, что $\operatorname{Re}\Omega = d(\Omega_1)$ и поэтому

$$\int_M \operatorname{Re}\Omega = 0.$$

Заметим еще, что если функции f_α являются аналитическими, то $\Omega = 0$.

Для вещественных баз M структура расслоения со структурной группой $S^1 = U(1)$ и слоем $\mathbb{C}^1$ определяется функциями склейки $T^{\alpha\beta}(x) = e^{i\varphi_{\alpha\beta}(x)}$ в области $U_{\alpha\beta}$. Связность в области задается 1-формой ω_α, причем разность этих форм в пересечении областей U_α, U_β имеет вид

$$\omega_\alpha - \omega_\beta = dq_{\alpha\beta}(x),$$

где $q_{\alpha\beta}(x)$ — числовая функция. Фактически функция $q_{\alpha\beta}(x)$ сводится к $\ln T^{\alpha\beta}(x) = i\varphi_{\alpha\beta}(x)$.

Кривизна Ω определяется формулой

$$2\pi i\Omega = d\omega_\alpha \quad (\text{в области } U_\alpha).$$

Очевидно, что в области $U_{\alpha\beta}$

$$d\omega_\alpha - d\omega_\beta = dd q_{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Таким образом, форма Ω корректно определена на всей базе M.

Инвариантным образом форму кривизны Ω для расслоений с группой S^1 можно описать так: рассмотрим форму связности ω на пространстве E расслоения p: $E \to M$.

Определение 3. $p^*\Omega = \frac{1}{2\pi i} d\omega$.

Для проверки корректности этого определения и его эквивалентности предыдущему определению достаточно заметить, что

локально (в области U_α) $\omega = \omega_0 + p^*\omega_\alpha$, где $\omega_0 = \frac{1}{2\pi} d\varphi$. Форма $d\omega$ имеет вид

$$d\omega = dp^*\omega_\alpha = p^*(2\pi i\Omega). \tag{28}$$

Число $2\pi i$ здесь является просто нормировочным множителем.

Перейдем теперь к определению и изучению кривизны в общих вещественных и комплексных расслоениях.

В касательном пространстве T_yE точки $y \in E$ при наличии связности имеется разложение $T_yE = T_yF \oplus \mathbb{R}^n_y$, где $\mathbb{R}^n_y$ — горизонтальное направление связности. Имеем проектирование H, порожденное связностью:

$$H\colon\ T_yE \to \mathbb{R}^n_y,\quad H(T_yF) = 0.$$

Определение 4. Если $\tau_1, \ldots, \tau_q$ — произвольные векторы из E и $H(\tau_1), \ldots, H(\tau_q)$ — их образы в $\mathbb{R}^n_y$, то *горизонтальной частью* q-формы ω называется форма

$$H\omega(\tau_1, \ldots, \tau_q) = \omega(H\tau_1, \ldots, H\tau_q). \tag{29}$$

Из определения видно, что если один из векторов τ_j касателен к слою («вертикален»), то $H\omega_q(\tau_1, \ldots, \tau_q) = 0$. В частности, ограничение форм вида $H\omega_q$ на слой равно нулю.

Определение 5. *Формой кривизны* в пространстве расслоения E называется выражение

$$\Omega_E = Hd\omega, \tag{30}$$

где ω — форма связности.

Теорема 2. *Имеет место «структурное уравнение»*

$$d\omega + [\omega, \omega] = Hd\omega = \Omega_E. \tag{31}$$

Для преобразований пространства E, производимых элементами группы G, имеет место равенство

$$g^*\Omega_E = \mathrm{Ad}\, g\Omega_E = g\Omega_E g^{-1}. \tag{32}$$

Замечание. Формы ω и Ω_E принимают значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, в которой имеется операция коммутирования, причем $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$. Для форм со значениями в какой угодно алгебре с билинейным законом умножения можно определить операцию умножения форм (в нашем случае — операцию «коммутирования» форм со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$) по правилу

$$\alpha(p, q)[\omega_p, \omega_q](\tau_1, \ldots, \tau_{p+q}) =$$

$$= \sum_\sigma \mathrm{sgn}\,\sigma\left[\omega_p(\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_p}), \omega_q(\tau_{j_1} \ldots \tau_{j_q})\right], \tag{33}$$

где σ — перестановка индексов

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & p & p+1 & \ldots & p+q \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_q \end{pmatrix}$$

и $\alpha(p, q)$ — число сочетаний из $p+q$ по p.

Для 1-форм ($p = q = 1$) определение операции коммутирования принимает вид

$$[\omega_1, \omega_2](\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}([\omega_1(\tau_1), \omega_2(\tau_2)] - [\omega_1(\tau_2), \omega_2(\tau_1)]). \quad (34)$$

Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то

$$[\omega, \omega](\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}([\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)] - [\omega(\tau_2), \omega(\tau_1)]) = [\omega(\tau_1), \omega(\tau_2)]. \quad (35)$$

Доказательство теоремы. Мы проверим утверждение теоремы в области определения локальной системы координат $E_\alpha = p^{-1}(U_\alpha)$, в которой форма связности имеет вид

$$\omega = \omega_0 + gA_\mu(x_\alpha)g^{-1}dx^\mu_\alpha = \omega_0 + gAg^{-1}, \quad (36)$$

где $A = A_\mu dx^\mu$, $\omega_0 = -(dg)g^{-1}$. Фиксируем для удобства вычислений структуру прямого произведения $G \times U_\alpha$ в $p^{-1}(U_\alpha)$ и базис (∂_μ) в касательном пространстве к M, где $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Для оператора Π в точке $(1, x) \in G \times U_\alpha$ имеем $\Pi\partial_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, $\Pi e = 0$, где e — касательный вектор к слою. Здесь A_μ есть элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, интерпретированный как касательный вектор к группе G в точке 1. Для формы ω_0 по самому ее определению имеем $\omega_0(A_\mu) = A_\mu$. Далее: $\Pi dx^\mu = dx^\mu$, $\Pi\omega_0(\partial_\mu) = \omega_0(\Pi\partial_\mu) = -\omega_0(A_\mu) = -A_\mu$. Итак, $\Pi A = A$, $\Pi\omega_0 = A = A_\mu dx^\mu$ (в точке $(1, x)$);

$$d\omega_0 = -d(dgg^{-1}) = dgg^{-1}dgg^{-1} = [\omega_0, \omega_0];$$

$$d\omega = d\omega_0 + (dgg^{-1})(gAg^{-1}) - (gAg^{-1})(dgg^{-1}) + g(dA)g^{-1} =$$
$$= [\omega_0, \omega_0] - [\omega_0, g^{-1}Ag] + [g^{-1}Ag, \omega_0] + g(dA)g^{-1}.$$

Отсюда получаем ($g = 1$)

$$\Pi d\omega = [\Pi\omega_0, \Pi\omega_0] - [\Pi\omega_0, \Pi A] + [\Pi A, \Pi\omega_0] + \Pi(dA) =$$
$$= [A, A] + dA. \quad (37)$$

При $g \neq 1$ форма $\Pi d\omega$ восстанавливается на основании ее инвариантности, $g^*(\Pi d\omega) = \mathrm{Ad}(g)\Pi d\omega$ (операторы Π и d сохраняют это свойство). Окончательно для всех g имеем

$$\Pi d\omega = \Omega_E = g(dA + [A, A])g^{-1}. \quad (38)$$

Для формы $d\omega$ получаем $d\omega = \Omega_E - g^{-1}[A, A]g - [\omega_0, \omega_0] - 2[\omega_0, g^{-1}Ag] = \Omega_E - [\omega, \omega]$.

Теорема доказана.

Локально, в координатной окрестности U_α базы M, форму Ω_E можно «опустить» в базу:

$$\Omega = DA = dA - [A, A] = \Omega_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu =$$
$$= \left(-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu]\right)dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (39)$$

Очевидно, что коэффициенты $\Omega_{\mu\nu}$ формы Ω — это коммутаторы: $\Omega_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$. При калибровочном преобразовании $g(x)$

$$\Omega \to g\Omega g^{-1}. \tag{40}$$

Для формы кривизны $\Omega_E = H\, d\omega = d\omega + [\omega, \omega]$ можно точно так же вычислить $d\Omega_E$ и $H\, d\Omega_E$. Мы получим «тождества Бьянки» (проверьте, как и выше)

$$d\Omega_E = 2[\omega, \Omega_E],$$
$$H\, d\Omega_E = 0.$$

Для форм Ω в областях U_α базы M элементарное вычисление показывает, что

$$D\Omega = d\Omega + [A, \Omega] = 0 \tag{41}$$

(проверьте!).

4. Характеристические классы. Конструкции. Для одномерных комплексных расслоений с коммутативной структурной группой $G = S^1$ или $G = \mathbb{C}^*$ тождества Бьянки сводятся к замкнутости формы кривизны Ω, так как $[A, \Omega] = 0$. Кроме того, $g\Omega g^{-1} \equiv \Omega$ и форма Ω является корректно определенной замкнутой формой на базе M. В пространстве E форма $p^*\Omega = \Omega_E$ точна: $\Omega_E = d\omega$. В базе M форма Ω, возможно, не точна (это будет обсуждаться позднее). Заменим связность ω другой связностью $\bar{\omega}$ в том же расслоении $p\colon E \to M$.

Лемма 3. *Разность форм кривизны Ω и $\bar{\Omega}$, отвечающих разным связностям ω и $\bar{\omega}$ в одном и том же расслоении с группой $G = S^1$, является точной формой,*

$$\Omega - \bar{\Omega} = du.$$

Доказательство. По определению $p^*\Omega = \Omega_E = d\omega$ и $p^*\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_E = d\bar{\omega}$. Разность $\omega - \bar{\omega}$ имеет в области U_α вид

$$\omega - \bar{\omega} = (\omega^0 + A_\mu\, dx^\mu) - (\omega^0 + \bar{A}_\mu\, dx^\mu) = (A_\mu - \bar{A}_\mu)\, dx^\mu.$$

Таким образом, форма $\omega - \bar{\omega}$ имеет вид p^*u и $\Omega - \bar{\Omega} = du$. Лемма доказана.

Пусть в базе M имеется двумерное замкнутое ориентированное подмногообразие $P \subset M$. Из леммы вытекает

Следствие. *Интегралы $\int\limits_P \Omega$ и $\int\limits_P \bar{\Omega}$ совпадают; следовательно, величина $\int\limits_P \Omega$ не зависит от выбора связности в расслоении $p\colon E \to M$ и является «топологической величиной».*

Доказательство. $\int\limits_P (\Omega - \bar{\Omega}) = \int\limits_P du = \int\limits_{\partial P} u = 0$, так как P не имеет края.

Рассмотрим теперь произвольную группу G (реализованную матрично) и локальные формы кривизны Ω в области U_α с координатами $\{x_\alpha\}$. При калибровочных преобразованиях

$$\Omega \to g(x)\Omega g(x)^{-1}.$$

Рассмотрим скалярную форму $\operatorname{Sp}\Omega$. Очевидно, имеем

$$\operatorname{Sp}\Omega = \operatorname{Sp}(g\Omega g^{-1}).$$

Следовательно, скалярная форма $\operatorname{Sp}\Omega$ определена инвариантно на всей базе M.

Из тождества Бьянки (41) получаем

$$d\Omega = -[A, \Omega].$$

Из этого вытекает, что форма $\operatorname{Sp}\Omega$ замкнута:

$$d\operatorname{Sp}\Omega = \operatorname{Sp}(d\Omega) = -\operatorname{Sp}[A, \Omega] = 0,$$

так как след коммутатора двух матриц всегда равен нулю. При замене связности ω другой связностью $\bar{\omega}$ имеем

$$d(\omega - \bar{\omega}) = d\omega - d\bar{\omega} = \Omega_E - \bar{\Omega}_E - [\omega, \omega] - [\bar{\omega}, \bar{\omega}].$$

Переходя к следам $\operatorname{Sp}\omega$, $\operatorname{Sp}\bar{\omega}$, $\operatorname{Sp}\Omega_E$, $\operatorname{Sp}\bar{\Omega}_E$ и используя равенство $\operatorname{Sp}[\omega, \omega] = 0$, получаем

$$d(\operatorname{Sp}\omega - \operatorname{Sp}\bar{\omega}) = \operatorname{Sp}\Omega_E - \operatorname{Sp}\bar{\Omega}_E = p^*(\operatorname{Sp}\Omega - \operatorname{Sp}\bar{\Omega}).$$

При этом локально $\operatorname{Sp}\omega = \operatorname{Sp}\omega_0 + \operatorname{Sp}p^*(A)$, $\operatorname{Sp}\bar{\omega} = \operatorname{Sp}\omega_0 + \operatorname{Sp}p^*(\bar{A})$. Окончательно

$$\operatorname{Sp}\Omega - \operatorname{Sp}\bar{\Omega} = du \quad (\text{в базе } M).$$

Из этого следует, что интегралы формы $\operatorname{Sp}\Omega$ по двумерным подмногообразиям многообразия M являются «топологическими величинами» (не зависят от связности в расслоении).

Рассмотрим теперь локально форму Ω в области базы U_α как матричнозначную дифференциальную 2-форму

$$\Omega = \Omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = (q_j^i)_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu, \tag{42}$$

а связность — как матричнозначную 1-форму

$$A = A_\mu dx^\mu = (a_j^i)_\mu\, dx^\mu; \tag{43}$$

между этими формами имеется связь:

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + [A_\mu, A_\nu]. \tag{44}$$

Мы уже рассматривали произведение форм, где за операцию умножения коэффициентов бралось коммутирование. Здесь мы рассмотрим произведение форм с матричными значениями относи-

тельно обычного матричного умножения коэффициентов (ср. аналогичное определение (33))

$$\alpha(p,q)(\omega_p \wedge \omega_q)(\tau_1, \ldots, \tau_{p+q}) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p \\ j_1<\ldots<j_q}} \operatorname{sgn}\sigma\, \omega_p(\tau_{i_1} \ldots \tau_{i_p})\, \omega_q(\tau_{j_1} \ldots \tau_{j_q}), \qquad (45)$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & p & p+1 & \ldots & p+q \\ i_1 & \ldots & i_p & j_1 & \ldots & j_q \end{pmatrix}$ — перестановка, $\alpha(p,q) = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}$.

Алгебра форм будет ассоциативной, но не косокоммутативной.

Определяем «характеристические классы»

$$c_i = \operatorname{Sp}(\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega) = \operatorname{Sp}\Omega^i, \quad i \geqslant 1. \qquad (46)$$

Форма c_i определена корректно на всей базе M, поскольку при калибровочном преобразовании

$$\Omega \to g\Omega g^{-1}, \quad \Omega^i \to g\Omega^i g^{-1}, \quad \operatorname{Sp}\Omega^i = c_i \to c_i.$$

Форма $c_i = \operatorname{Sp}\Omega^i$ замкнута в силу тождеств Бьянки

$$d\operatorname{Sp}\Omega^i = \operatorname{Sp} d\Omega^i = \sum_{j=1}^{i} \operatorname{Sp}(\Omega^{j-1} \wedge (d\Omega) \wedge \Omega^{i-j}) = 0,$$

так как $d\Omega = -[A, \Omega]$ и $\operatorname{Sp}(\Omega^{j-1}[A, \Omega]\Omega^{i-j}) = 0$. При замене связности ω другой связностью $\overline{\omega}$ форма c_i изменяется на точную форму du_i, где $p^*u_i = \sum_{j=1}^{i} (-1)^j \operatorname{Sp}(\Omega^{j-1} \wedge (A - \overline{A})\Omega^{i-j})$ (проверьте!). Поэтому интегралы $\int_P c_i$ по замкнутым ориентированным $2i$-мерным подмногообразиям P многообразия M представляют собой топологические величины.

Для группы $G = SO(2n)$ введем еще одну форму χ_n степени $2n$ на базе M

$$\beta(n)\chi_n = \sum_{\substack{i_1<i_2 \\ i_3<i_4 \\ \ldots\ldots \\ i_{2n-1}<i_{2n}}} \chi[\Omega(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}), \ldots, \Omega(\tau_{i_{2n-1}}, \tau_{i_{2n}})], \qquad (47)$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{2n} \end{pmatrix}$ — перестановка, $\beta(n)$ — числовой коэффициент, который будет выбран позднее из требований нормировки, $\chi[L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}]$ — полилинейная форма от n кососимметрических матриц $L^{(1)} = (l_{ij}^{(1)}), \ldots, L^{(n)} = (l_{ij}^{(n)})$, построенная так: если $l^{(k)} = l_{ij}^{(k)} du^i \wedge du^j$ — формы степени 2 в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $u_1, \ldots, u_{2n}$, то

$$l^{(1)} \wedge \ldots \wedge l^{(n)} = \chi[L^{(1)}, \ldots, L^{(n)}]\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{2n}.$$

(Это — аналог так называемого «пфаффиана».)

Если $n=1$, то $\chi(L)$ — это обычный изоморфизм между алгеброй Ли группы $SO(2)$ и прямой $\mathbb{R}^1$; форма χ_1 для $G=SO(2)$ уже вводилась выше ($G=S^1=U(1)=SO(2)$). Для $n=2$ имеем

$$\beta(2)\chi_2=\frac{1}{4!}\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}\Omega(\tau_{i_1},\tau_{i_2})\wedge\Omega(\tau_{i_3},\tau_{i_4}). \tag{48}$$

Задачи. 1. Докажите, что χ_n — замкнутая форма на базе расслоения со структурной группой $G=SO(2n)$. Если база M — риманово многообразие размерности $2n$ с метрикой g_{ij} и расслоение касательное, то

$$\begin{gathered}(n=1)\quad \chi_1=R\,d\sigma=R\sqrt{g}\,du\wedge dv,\quad g=\det(g_{ij});\\ \text{(общий случай)}\ \beta(n)\chi_n=\varepsilon^{i_1\dots i_{2n}}\Omega_{i_1i_2}\wedge\dots\wedge\Omega_{i_{2n-1}i_{2n}},\end{gathered} \tag{49}$$

где $\Omega_{ij}=\sum\limits_{k<l}R_{ijkl}dx^k\wedge dx^l$. Для всех групп $SO(n)$ и $SU(n)$ форма c_1 тривиальна, так как $\operatorname{Sp}\Omega\equiv 0$ (алгебра Ли состоит из бесследных матриц).

2. Показать, что для расслоений со структурной группой $SO(n)$ все формы $c_{2i+1}=\operatorname{Sp}(\Omega^{2i+1})$ глобально (на всей базе) являются точными и не дают топологических величин ($i<n$).

Для $n=2$ и группы $SO(4)$ имеем характеристические классы $c_2=\operatorname{Sp}(\Omega^2)$ и χ_2. Для четырехмерных римановых многообразий с метрикой g_{ij} имеем формулу (связность симметрична и согласована с метрикой)

$$\begin{gathered}c_2=-R^{ij}_{\lambda\varkappa}R_{ij\nu\mu}dx^\lambda\wedge dx^\varkappa\wedge dx^\nu\wedge dx^\mu;\\ \chi_2=\frac{1}{4!}\varepsilon^{i_1i_2i_3i_4}R_{i_1i_2\nu\mu}R_{i_3i_4\lambda\varkappa}dx^\nu\wedge dx^\mu\wedge dx^\lambda\wedge dx^\varkappa.\end{gathered} \tag{50}$$

Интегралы $\int\limits_M c_2$ и $\int\limits_M\chi_2$ являются функционалами от метрики (g_{ij}) на M, имеющими тождественно нулевую вариацию (т. е. не меняющимися при малом изменении метрики).

Мы уже перечислили важнейшие характеристические классы для групп $SO(n)$, $U(n)$. Можно ввести аналогичные характеристические классы b_j как формы степени $2j$ в базе $Sp(n)$ — расслоения, где группа $Sp(n)$ и ее алгебра Ли реализованы как кватернионные унитарные и косоэрмитовы матрицы, причем нетривиальными из них будут лишь b_{2i} (проверьте!). Это, однако, менее важный случай.

Сейчас мы укажем общую конструкцию характеристических классов (т. е. замкнутых форм на базе, меняющихся при изменении связности лишь на точную форму, так что интегралы по замкнутым подмногообразиям базы являются топологическими величинами). Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G и внутренние

автоморфизмы $\mathrm{Ad}\, g$ группы G на алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Ad}\, g\colon\ l \mapsto glg^{-1} \qquad \text{(в матричной реализации)}.$$

Определение 6. Симметричная полилинейная форма с числовыми значениями $\psi[l_1, \ldots, l_m]$ на алгебре $\mathfrak{g}$, где $l_i \in \mathfrak{g}$, называется Ad-*инвариантной*, если эта форма ψ не меняется при преобразованиях вида $\mathrm{Ad}\, g$ группы G на алгебре $\mathfrak{g}$:

$$\psi[gl_1g^{-1}, \ldots, gl_mg^{-1}] = \psi[l_1, \ldots, l_m]. \tag{51}$$

Каждая Ad-инвариантная форма ψ определяет характеристический класс c_ψ. Построение характеристического класса по Ad-инвариантной форме ψ таково: если Ω — (локальная) форма кривизны в базе M, то полагаем

$$c_\psi(\tau_1, \ldots, \tau_{2m}) = c_\psi(\Omega) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1<i_2 \\ \cdots\cdots \\ i_{2m-1}<i_{2m}}} \operatorname{sgn}\sigma\psi\left[\Omega(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}), \ldots, \Omega(\tau_{i_{2m-1}}, \tau_{i_{2m}})\right], \tag{52}$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 2m \\ i_1 & \ldots & i_{2m} \end{pmatrix}$ — перестановка.

Полагая $\Omega(\tau_{i_{2q-1}}, \tau_{i_{2q}}) = l_q$, сразу усматриваем аналогию между определением формы $c_\psi(\Omega)$ и определением эйлерова класса $\chi_n(\Omega)$; для классов $c_i(G = U(n), SO(n))$ формы ψ_i имеют вид

$$\text{const}\cdot\,\psi_i(l_1, \ldots, l_i) = \sum_{k_1, \ldots, k_i} \mathrm{Sp}\,(l_{k_1} \ldots l_{k_i}).$$

Из Ad-инвариантности ψ следует, что $c_\psi(\Omega)$ — корректно определенная числовая форма на базе M.

Задача. Доказать, что форма $c_\psi(\Omega)$ замкнута и при изменении связности в том же расслоении изменяется на точную форму (т. е. интегралы по замкнутым подмногообразиям — топологические величины).

Пример 1. G — абелева группа T^n (или $\mathbb{R}^n$). Тогда $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$, и действие $\mathrm{Ad}\, g$ тривиально. Все симметричные полилинейные формы $\psi(l_1, \ldots, l_m)$ определяют характеристические классы c_ψ. Таким образом, совокупность всех классов вида $c_\psi(\Omega)$ — это алгебра симметрических многочленов от n образующих, соответствующих элементарным формам $\psi_j(l) = \langle l, e_j\rangle$, где $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный базис алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ в евклидовой метрике.

Классы $c_{\psi_j}(\Omega)$ обозначим через $t_j(\Omega)$. Это — формы степени 2 в базе расслоения. Любой класс имеет вид

$$\sum \alpha_{i_1 \ldots\ i_q} t_{i_1}^{n_1} \ldots t_{i_q}^{n_q} = c_\psi(\Omega). \tag{53}$$

Пример 2. $G = U(n)$. Здесь алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из косоэрмитовых матриц. Любая симметричная Ad-инвариантная форма $\psi(l_1, \ldots, l_m)$ на $\mathfrak{g}$ может быть ограничена на *картановскую*, т. е. максимальную коммутативную подалгебру H алгебры $\mathfrak{g}$. Для алгебры Ли группы $U(n)$ в качестве H можно взять алгебру диагональных косоэрмитовых матриц (т. е. диагональных матриц с чисто мнимыми диагональными элементами). Оказывается, что ограничение Ad-инвариантной формы ψ на картановскую подалгебру полностью определяет эту форму. Этот факт мы не доказываем.

Изучим ограничение форм c_k на картановскую подалгебру. На картановской подалгебре выбирается базис $l_1^0, \ldots, l_n^0 \subset H$. Некоторые автоморфизмы вида $l \mapsto glg^{-1}$, где $g \in G$, сохраняют подпространство $H \subset \mathfrak{g}$; такие g составляют конечную группу, называемую *группой Вейля* группы G. Для $G = U(n)$ базис в H можно составить из диагональных матриц с единственным ненулевым элементом $(l_j^0)_{jj} = i$. Группа Вейля есть в этом случае группа S_n всех перестановок базиса l_j^0 (проверьте!). Рассмотрим базисные линейные формы t_j из $\mathfrak{g}^*$, полагая $t_j(l_k^0) = \delta_{jk}$. Тогда ограничения симметрических Ad-инвариантных форм ψ на картановскую подалгебру $H \subset \mathfrak{g}$ представляют собой симметрические полиномы от переменных $t_1, \ldots, t_n$. В качестве базисных симметрических полиномов можно взять следующие:

$$\psi_k^{(U)} = t_1^k + \ldots + t_n^k. \tag{54}$$

Классы $c_{\psi_k^{(U)}}$ совпадают с определенными выше классами c_k. Продолжение классов c_k с картановской подалгебры на всю алгебру Ли указано в формуле (46).

Пример 3. $G = SO(2n)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из кососимметрических матриц. Картановская подалгебра $H \subset \mathfrak{g}$ порождается «инфинитезимальными вращениями» в плоскостях $\mathbb{R}_{12}$, $\mathbb{R}_{34}, \ldots, \mathbb{R}_{2n-1,2n}$, где номера снизу указывают пары базисных векторов в $\mathbb{R}^{2n}$. Таким образом, базис $l_1^0, \ldots, l_n^0$ таков:

$$l_j^0 = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix},$$

причем единственная пара ненулевых элементов этой матрицы — это

$$(l_j^0)_{2j-1,2j} = 1, \quad (l_j^0)_{2j,2j-1} = -1.$$

Опять обозначим через t_j линейные формы в $\mathfrak{g}^*$:

$$(t_j, l_k^0) = \delta_{jk}.$$

Группа Вейля автоморфизмов $H \to H$ вида $l \mapsto glg^{-1}$, где $g \in G$, порождается следующими преобразованиями (проверьте):

а) перестановками векторов l_j;

б) одновременными переменами знака у пар форм t_i: $(t_j, t_k) \to (-t_j, -t_k)$.

На алгебре H имеем, следовательно, базисные полиномы, инвариантные относительно группы Вейля:

$$\begin{aligned} \psi_q^{(SO)} &= t_1^{2q} + \ldots + t_n^{2q}, \quad q < n, \\ \widetilde{\psi}_n^{(SO)} &= t_1 \ldots t_n. \end{aligned} \tag{55}$$

Классы $c_{\psi_q^{(SO)}}$ суть в точности c_{2q}, а класс $c_{\widetilde{\psi}_n^{(SO)}}$ совпадает с χ_n. Таким образом, указанные формы продолжены с картановской подалгебры на всю алгебру Ли.

Пример 4. $G = SO(2n+1)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ по-прежнему состоит из кососимметрических матриц. Картановская подалгебра $H \subset \mathfrak{g}$ состоит из «инфинитезимальных вращений» в плоскостях $\mathbb{R}_{12}, \mathbb{R}_{34}, \ldots, \mathbb{R}_{2n-1,2n}$ и совпадает с картановской подалгеброй для подгруппы $SO(2n)$ группы $SO(2n+1)$ и даже для $U(n) \subset SO(2n)$, хотя группа Вейля увеличивается (собственно говоря, такой же картановской подалгеброй обладала коммутативная группа из примера 1, для которой $H = \mathfrak{g}$, а группа Вейля была тривиальной). Опять имеем базис $l_1^0, \ldots, l_n^0 \subset H$ и формы t_j, где $t_j(l_k^0) = \delta_{jk}$. Группа Вейля для $SO(2n+1)$ кроме элементов, уже имеющихся в $SO(2n)$, содержит еще возможность обращения направления одного плоского вращения (а не только пар, как в $SO(2n)$)

$$t_i \mapsto -t_i.$$

Поэтому среди нужных нам форм ψ имеется (мультипликативный) базис из элементарных полиномов вида

$$\psi_q^{(SO)} = t_1^{2q} + \ldots + t_n^{2q}. \tag{56}$$

Формы ψ_q задают классы

$$c_{\psi_q^{(SO)}} = c_{2q} \quad (G = SO(2n+1)). \tag{57}$$

Таким образом, и в этом примере все формы продолжаются с картановской подалгебры на всю алгебру Ли в качестве Ad-инвариантных форм.

5. Характеристические классы. Перечисление. Оказывается, что для групп $G = SO(n)$, $U(n)$ никаких других характеристических классов построить невозможно. Более точно, любая другая «естественная» или ковариантная конструкция, сопоставляющая расслоению и форме связности замкнутую форму в базе, инте-

гралы от которой по циклам (замкнутым подмногообразиям базы) являются топологическими величинами (т. е. не меняются при изменении связности в том же расслоении), эквивалентна указанным выше классам c_i, χ_n или какому-либо полиному от них в алгебре дифференциальных форм. Эквивалентность (когомологичность) двух замкнутых форм a и b (таких, что $da = db = 0$) означает по определению, что форма $a - b$ является точной:

$$a = b + du.$$

В этом случае интегралы по любому циклу (по замкнутому ориентированному подмногообразию) P объемлющего многообразия от этих форм совпадают:

$$\int_P a = \int_P b.$$

Сейчас мы поясним термин «естественная или ковариантная конструкция». Мы определяли в § 24 понятие отображения расслоений с одинаковым слоем и одной и той же структурной группой G (отображение $\tilde{f}\colon E \to E'$, коммутирующее с проекцией, т. е. такое, что $fp = p'\tilde{f}$, где $f\colon M \to M'$ — отображение базы в базу, и индуцирующее на каждом слое диффеоморфизм из структурной группы G). Было определено понятие «индуцированного расслоения»: если задано расслоение $p'\colon E' \to M'$ и отображение $f\colon M \to M'$, то строятся расслоение $p\colon E \to M$ и отображение расслоений $\tilde{f}\colon E \to E'$. При этом говорилось (без доказательства), что любое расслоение с базой M (скажем, главное) индуцируется единственным с точностью до гомотопии отображением $M \to B_G$ в базу универсального главного расслоения $p_G\colon E_G \to B_G$, у которого пространство E_G стягиваемо. Универсальные или N-универсальные расслоения строились для групп $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ и имели базы, являющиеся гладкими многообразиями для любых N:

$$B_G = \widehat{G}_{N,n} \quad \text{для} \quad SO(n), \quad N \to \infty,$$
$$B_G = G^{\mathbb{C}}_{N,N} \quad \text{для} \quad U(n), \quad N \to \infty,$$
$$B_G = \mathbb{C}P^N \quad \text{для} \quad U(1) = SO(2), \quad N \to \infty,$$
$$B_G = \mathbb{H}P^N \quad \text{для} \quad SU(2) = Sp(1), \quad N \to \infty.$$

Пусть задано отображение расслоений $\tilde{f}\colon E \to E'$ с отображением баз $f\colon M \to M'$, и пусть в расслоении E' задана форма связности ω'. Применяя к ω' отображение форм $\tilde{f}^*$, получаем форму $\omega = \tilde{f}^*\omega'$ на E, также являющуюся формой связности. Операторы d и H перестановочны с отображением форм $\tilde{f}^*$. Поэтому форма кривизны Ω_E также ковариантна:

$$\tilde{f}^*(\Omega'_E) = \Omega_E \quad (\Omega'_E = Hd\omega',\ \Omega_E = Hd\omega).$$

Все характеристические классы c_i, χ_n и общие классы (см. выше) строились естественно или ковариантно, так что имеет место равенство («функториальность»)

$$f^*c'_\psi = c_\psi, \tag{58}$$

где c'_ψ и c_ψ — характеристические классы расслоений E' и E, построенные по формам ω' и ω. При этом формы c'_ψ и c_ψ с точностью до добавления точных форм (вида du) не зависят от выбора связностей в расслоениях E' и E.

Мы назовем конструкцию замкнутой формы c в базе расслоения *топологическим характеристическим классом*, если она обладает следующими свойствами:

1. Эта конструкция определена в любых главных расслоениях с группой G (база — любое многообразие!).

2. При отображениях расслоений $f\colon E \to E'$ должно иметь место равенство (с точностью до форм вида du)

$$f^*c' = c + du.$$

Оказывается, топологических характеристических классов очень мало.

Для многообразия M определяются «группы когомологий» $H^q(M;\mathbb{R})$ следующим образом: элемент $a \in H^q(M;\mathbb{R})$ представляется вещественной замкнутой формой $\tilde{a}$ (т. е. $d\tilde{a}=0$) с точностью до форм вида du (т. е. $\tilde{a}$ эквивалентно форме $\tilde{a}+du$). Прямая сумма $H^*(M;\mathbb{R}) = \sum\limits_q H^q(M;\mathbb{R})$ образует алгебру относительно внешнего перемножения замкнутых форм (см. подробнее [28]).

Имеет место

Теорема 3. *Каждый элемент c из когомологий $H^q(B_G;\mathbb{R})$ базы B_G универсального G-расслоения определяет топологический характеристический класс для всех G-расслоений и обратно.*

Доказательство. Если характеристический класс c задан как форма степени q в базах всех G-расслоений в смысле предыдущего определения, то элемент c в группе $H^q(B_G;\mathbb{R})$ — это просто характеристический класс универсального расслоения с базой B_G*). Обратно, пусть задан элемент (класс когомологий) $c \in H^q(B_G,\mathbb{R})$. Для любой базы M любое гладкое расслоение η с этой базой и группой G индуцировано единственным (с точностью до гомотопии) гладким отображением $f\colon M \to B_G$. Полагаем

$$c(\eta) = f^*(c).$$

Так как $df^* = f^*d$, то форма $c(\eta)$ замкнута и определяет элемент

*) Строго говоря, речь идет о базе N-универсального расслоения, которая является гладким многообразием.

из $H^q(M, \mathbb{R})$. Гомотопным отображениям f_1, f_2 отвечают эквивалентные формы $c_1(\eta) - c_2(\eta) = du$. Теорема доказана.

Информация о когомологиях пространства B_G.

Пример 1. Группа G дискретна.

а) $G = \mathbb{Z}$, $B_G = S^1$, $H^1(B_G; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H^q(B_G) = 0$ при $q > 1$.

б) $G = \mathbb{Z}_m$, m конечно; B_G — линзовое пространство,

$$H^q(B_G; \mathbb{R}) = 0 \text{ при всех } q.$$

Оказывается, для любой конечной группы G

$$H^q(B_G; \mathbb{R}) = 0 \text{ при } q > 0.$$

в) $G = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ (n слагаемых); $B_G = T^n$ (тор), $H^*(B_G; \mathbb{R})$ — внешняя алгебра от n одномерных образующих.

г) $G = \pi_1(M_g^2)$; $B_G = M_g^2$ (поверхность рода g); $H^*(B_G; \mathbb{R})$ имеет одномерные образующие $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ и соотношения $a_1 \wedge b_1 = \ldots = a_g \wedge b_g$ и $a_i \wedge b_j = 0$ $(i \neq j)$, $a_k \wedge a_l = b_k \wedge b_l = 0$.

д) G — свободная группа с p образующими; B_G — область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с p выколотыми точками,

$$H^q(B_G; \mathbb{R}) = 0 \text{ при } q > 1, \quad H^1(B_G; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^p.$$

Пример 2. Группа G абелева, $G = \mathbb{R}^k \times T^m$. Для группы $\mathbb{R}^k = G'$ имеем $B_{G'}$ — одна точка (или пространство, стягиваемое к точке). Для $G'' = S^1 = SO(2) = U(1)$ имеем $B_{G''} = \mathbb{C}P^\infty$. Для $G = \mathbb{R}^k \times T^m = \mathbb{R}^k \times S^1 \times \ldots \times S^1$ пространство B_G имеет вид

$$B_G \sim \underbrace{B_{S^1} \times \ldots \times B_{S^1}}_{m} = \underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_{m}.$$

Алгебра когомологий $H^*(B_G; \mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от m образующих $t_1, \ldots, t_m \in H^2(B_G; \mathbb{R})$.

Пример 3. $G = U(n)$; $H^*(B_G; \mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от образующих $c_i \in H^{2i}(B_G; \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$. Для $G = SU(n)$ алгебра $H^*(B_G; \mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от образующих $c_2, c_3, \ldots, c_n$; $c_i \in H^{2i}(B_G; \mathbb{R})$.

Пример 4. $G = SO(2n)$; $H^*(B_G; \mathbb{R})$ — алгебра полиномов от образующих $c_{2i} \in H^{4i}(B_G; \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n-1$, и одной образующей $\chi_n \in H^{2n}(B_G; \mathbb{R})$.

Пример 5. $G = SO(2n+1)$; $H^*(B_G; \mathbb{R})$ есть алгебра полиномов от образующих $c_{2i} \in H^{4i}(B_G; \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, все характеристические классы для основных групп G уже были построены выше.

Для некомпактных групп Ли топологические характеристические классы (как классы когомологий базы) сводятся к максимальной компактной подгруппе $K \subset G$. Без доказательства ука-

жем такой факт. Базы B_K и B_G гомотопически эквивалентны и $H^*(B_K; \mathbb{R}) = H^*(B_G; \mathbb{R})$. Поэтому в силу теоремы 3 их топологические характеристические классы совпадают. Если группа Ли G полупроста, то у ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ комплексификация $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ совпадает с комплексифицированной алгеброй Ли $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ некоторой компактной группы G', именуемой *компактной вещественной формой* той же самой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Поэтому построения характеристических классов по связности, например, указанными выше элементарными операциями над формой кривизны Ω для групп G и G' приводят к абсолютно одинаковым результатам. Мы получим для G (локально) точно те же замкнутые формы и функционалы от связности, имеющие тождественно нулевую вариационную производную по связности, что и для G'. Однако эти выражения будут часто «топологически тривиальны», т. е. будут давать точные формы вида du. Например, для $G = \mathbb{R}^k$ и $G' = T^k$ локально все одинаково, но для $G = \mathbb{R}^k$ все интегралы от характеристических классов по циклам тождественно равны нулю. Для $G = SO(p, q)$ все будет формально так же, как и для $G' = SO(p+q)$, но нетривиальные интегралы по циклам мы получим лишь сводящиеся к максимальной компактной подгруппе $SO(p) \times SO(q) \subset SO(p, q)$.

Если мы рассматриваем касательные расслоения псевдоримановых многообразий M типа (p, q), где $p+q = n = \dim M$, то мы можем построить те же самые характеристические классы как локальные выражения от метрики, что и для римановых многообразий (с положительной метрикой). При этом вариационные производные по метрике от интегралов этих форм по циклам (замкнутым ориентированным подмногообразиям) соответствующей размерности в M будут также нулевые. Однако топологически многие из этих классов будут тождественно нулевыми в том смысле, что интеграл по любому циклу есть тождественный нуль. В виде примера укажем, что алгебра Ли собственной группы Лоренца $SO(3, 1) = G$ комплексно эквивалентна алгебре Ли группы $SO(4) = G'$ или группы $\widehat{G}' = SU(2) \times SU(2)$. Для $\widehat{G}' = SU(2) \times SU(2)$ или $G' = SO(4)$ имеем два характеристических класса размерности 4:

$$c_2 \in H^4(B_{G'}; \mathbb{R}), \quad \chi_2 \in H^4(B_{G'}; \mathbb{R}).$$

Для $G = SO(3, 1)$, имеющей максимальную компактную подгруппу $SO(3) \subset SO(3, 1)$, имеем лишь один топологический характеристический класс

$$c_2 \in H^4(B_G; \mathbb{R})$$

(но по-прежнему два дифференциально-геометрических характеристических класса).

Использование метода универсальных расслоений позволяет также доказать важное свойство характеристических классов:

можно выбрать такой базис среди характеристических классов, что все интегралы от базисных характеристических классов по циклам (замкнутым ориентированным подмногообразиям базы любого G-расслоения) будут целыми числами.

Этот факт вытекает из того, что в универсальном расслоении с базой B_G в алгебре $H^*(B_G; \mathbb{R})$ можно выбрать полный базис элементов $d_1, \ldots, d_q$ (характеристических классов универсального расслоения), что их интегралы по циклам в B_G целочисленны.

Пусть M — база любого G-расслоения, P — замкнутое ориентированное q-мерное многообразие и φ: $P \to M$ — гладкое отображение (как говорят, «сингулярный цикл» (P, φ)). Расслоение над M индуцировано универсальным расслоением посредством отображения f: $M \to B_G$ из универсального. Имеем цикл размерности q в B_G:

$$(P,\ f\varphi),\ f\varphi\colon\ P \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{f} B_G,$$

и форму $d'_s = f^*(d_s)$ — характеристический класс в базе M. Далее, для d'_s имеем: интеграл по циклу (P, φ) в многообразии M равен

$$\int\limits_{(P,\varphi)} d'_s = \int\limits_{P} \varphi^*(d'_s) = \int\limits_{(P,\varphi)} f^*(d_s) = \int\limits_{M} \varphi^* f^*(d_s) = \int\limits_{(P,f\varphi)} d_s$$

— целое число для цикла $(P, f\varphi)$ в B_G.

Пример 6. Рассмотрим группы $G = \mathbb{R}^1$ и $G' = SO(2) = U(1)$. Форма кривизны расслоения в обоих случаях есть скалярная 2-форма $\Omega = \Omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$. Поставим вопрос: в каком случае замкнутая 2-форма является формой кривизны некоторого G-расслоения или G'-расслоения? На языке физики это означает возможность глобально ввести вектор-потенциал, необходимый при квантовании. Ответ будет различным для G и G'. Необходимые и достаточные условия таковы (достаточность мы оставляем без доказательства):

1. Для группы $G = \mathbb{R}^1$ необходимо и достаточно, чтобы для любого 2-мерного цикла P в базе M мы имели $\int\limits_P \Omega = 0$; равносильное требование: $\Omega = dA$ для некоторой 1-формы A всюду в базе M.

2. Для группы $G' = SO(2) = U(1)$ необходимо и достаточно, чтобы набор интегралов по всем 2-циклам P в базе M был целочислен при соответствующей нормировке формы Ω: $\int\limits_P \Omega$ — целое число; вектор-потенциал A будет глобально над M задан в виде формы в расслоении E.

Физически форма Ω может представлять собой напряженность электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu}$, где $d(F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu) = 0$ в силу

уравнений Максвелла. Форма $\Omega = F$ задана в области U пространства Минковского $\mathbb{R}^4$ (т. е. $\mathbb{R}^4_{3,1}$). Если в реальной физике электродинамика «компактна» (т. е. группа есть $SO(2)$, а не $\mathbb{R}^1$), то, как указал Дирак, возможны «магнитные монополи». В стационарной задаче имеем, например, область $U \subset \mathbb{R}^3$, где $U = \mathbb{R}^3 \setminus x_0$ (пусть $x_0 = 0$). Форма $\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) есть напряженность магнитного поля в области U, причем поле имеет особенность в точке 0. Рассмотрим сферу $S^2_\rho \subset U$, заданную в виде $\sum_{\mu=1}^{3} (x^\mu - x_0^\mu)^2 = \rho^2 > 0$. Для поля мы обязаны иметь

$$\int_{S^2} \Omega = n \quad \text{(целое число)}.$$

Таким образом, поток магнитного поля через поверхность без противоречия с возможностью ввести вектор-потенциал (и квантовать поля в соответствии с общими принципами квантовой теории калибровочных полей) может быть целочисленным, но не обязательно нулевым. Магнитных монополей может быть несколько в точках $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^3$. Тогда будет набор независимых циклов в области $\mathbb{R}^3 \setminus (x_0 \cup \ldots \cup x_k)$.

Пример 7. Рассмотрим расслоения над сферой S^k с различными группами G, определяемые элементом группы $\pi_{k-1}(G)$ (см. § 24, п. 4).

а) $k = 1$, $G = O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$. Ввиду связности групп SO, U все расслоения над S^1 тривиальны. Имеется лишь нетривиальное расслоение с группой $G = O(n)$, поскольку $\pi_0(G) = \mathbb{Z}_2$. Связность в расслоениях с одномерной базой встретится нам позднее в однородных моделях общей теории относительности (база $\mathbb{R}^1$), но теория кривизны здесь отсутствует.

б) $k = 2$. Для $G = SO(2)$ мы имеем набор расслоений, определяемых целым числом $m \in \pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$. Это — расслоение Хопфа η (со слоем $\mathbb{C}^1$) и его тензорные степени η^m (см. § 24, п. 5). Число m может быть определено так:

$$m = \int_{S^2} \Omega,$$

где Ω — форма кривизны. Иначе: реализуем расслоение над S^2 как прямое произведение над $\mathbb{C}^1 = S^2 \setminus \infty$ со связностью $A = A_\mu dx^\mu = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ и потребуем, чтобы при $|x| \to \infty$

$$A_\mu \to \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}$$

(т. е. связность стремится к тривиальной при $|x| \to \infty$). Для $G = SO(2) = U(1)$ имеем $g = e^{i\varphi}$, $\frac{\partial g}{\partial x^\mu} g^{-1} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$. Функция $\varphi(x)$

может быть определена только при $|x| \to \infty$ асимптотически; она определена на множестве лучей $\frac{x}{|x|}$, образующих окружность S^1:

$$S^1 \to S^1,$$

$$x \mapsto e^{i\varphi(x)} \quad (|x| \text{ велико}).$$

Степень этого отображения есть число n.

в) $n=3$; так как $\pi_2(G)=0$ для всех групп Ли G, которые нам встречались (и для всех вообще), то все расслоения над S^3 топологически тривиальны. Любая связность нулевой кривизны представляется в виде

$$A_\mu = \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}(x).$$

Получаем отображение

$$g(x)\colon\ S^3 \to G.$$

Гомотопический класс этого отображения есть элемент группы $\pi_3(G)$, который характеризует гомотопический класс связности A нулевой кривизны. Напоминаем: $\pi_3(SO(2))=0$, $\pi_3(SO(3))=\pi_3(SU(2))=\pi_3(SU(n))=\pi_3(SO(m))=\mathbb{Z}$ при $m \geqslant 5$, $n \geqslant 3$, $m \neq 4$, $\pi_3(SO(4))=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

г) $n=4$. Здесь мы имеем много разных расслоений над S^4 и большое количество топологических инвариантов. Особенно интересны случаи $G=SU(2)$, $G=SO(4)$. Так как $S^4 \setminus \infty = \mathbb{R}^4$, то расслоения над S^4 можно задавать связностями A_μ над $\mathbb{R}^4$, где расслоение тривиально, с граничным условием

$$A_\mu(x) \to \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu} g^{-1}(x) \text{ при } |x| \to \infty.$$

Функция $g(x)$ задает отображение сферы S^3 лучей $\frac{x}{|x|}$ в G:

$$g\colon\ S^3 \to G.$$

Топологический инвариант расслоения есть гомотопический класс этого отображения — элемент из $\pi_3(G)$. Мы имеем два характеристических класса (два целых числа) для $G=SO(4)$ и только одно число для $G=SU(2)$ или $G=SO(3)$:

$$c_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Sp}(F_{\mu\nu}F_{\lambda\varkappa})\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\varkappa;$$

$$\chi_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Sp}(F_{\mu\nu} * F_{\lambda\varkappa})\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\varkappa, \tag{59}$$

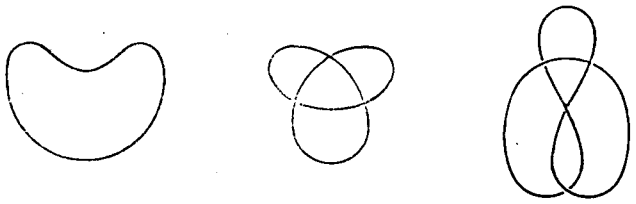
где $F_{\mu\nu} = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + [A_\mu, A_\nu]$.

Задача. Показать, что для $G = SO(4)$ при $\chi_2 = 1$ и любом c_2 пространство E расслоения над S^4 со слоем S^3 гомотопически эквивалентно сфере S^7 (это — главное расслоение для $G = SU(2)$ и ассоциированное с главным для $G = SO(4)$).

Замечание. Как показал Милнор, пространства E некоторых из этих расслоений $E(c_2, \chi_2 = 1)$ гомеоморфны, но не диффеоморфны сфере S^7.

§ 26. Узлы и зацепления. Косы

1. Группа узла. Важным применением фундаментальной группы является теория узлов и зацеплений в трехмерном пространстве. Рассмотрим замкнутую гладкую кривую γ в $\mathbb{R}^3$, $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, которая не пересекает сама себя и имеет ненулевой вектор скорости $\dot{\gamma}$. Эта кривая может быть *заузлена* в $\mathbb{R}^3$ (рис. 138).



Незаузлена (а) — Простейший узел («трилистник») (б) — «Восьмерка» (в)

Рис. 138

Под *изотопией* узла мы будем понимать движение узла по пространству, получаемое в результате деформации тождественного отображения пространства на себя (в классе диффеоморфизмов)*). Узел γ называется нетривиальным, если изотопией нельзя его привести к тривиальному узлу $\tilde{\gamma}$: $\{z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Нам будет удобно считать, что узел γ лежит в $S^3 \supset \mathbb{R}^3$. Добавление точки ∞ к $\mathbb{R}^3$ ничего не меняет в узлах и их изотопиях (эти изотопии заметают двумерные поверхности в S^3 и без ограничения общности можно считать их не задевающими одну точку). Рассмотрим ε-окрестность U_ε узла γ при малом $\varepsilon > 0$. Граница ∂U_ε есть тор T^2, и $U_\varepsilon = D^2_\varepsilon \times S^1$, где D^2_ε — нормальный диск к γ радиуса ε. Выбросим из S^3 внутренность области U_ε. Останется многообразие с краем $V_1 \subset S^3$, и край $\partial V_1 = \partial U_\varepsilon$ — это тор T^2.

*) Обычно изотопией узла называют деформацию вложения окружности в пространство (в классе гладких вложений). Однако вслед за тем доказывают, что такая деформация окружности продолжается до деформации отображения всего пространства.

Очевидно, что V_γ гомотопически эквивалентно открытой области $S^3 \setminus \gamma = W_\gamma$.

Определение 1. Фундаментальная группа $\pi_1(W_\gamma) = \pi_1(V_\gamma)$ называется *группой узла* γ.

Очевидные свойства группы узла $\pi_1(W_\gamma) = \pi_1(V_\gamma)$: 1) если узел γ тривиален, то $\pi_1(W_\gamma) = \mathbb{Z}$; это следует из того, что область $V_\gamma \subset S^3$ или $W^3_\gamma \subset S^3$ для $\gamma = \{z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$ стягивается к окружности S^1 (см. § 16); 2) по определению областей V_γ и W_γ группа $\pi_1(V_\gamma) = \pi_1(W_\gamma)$ (и сама топология этих областей с точностью до диффеоморфизма) не меняется при изотопии узла. Таким образом, равенство $\pi_1(W_\gamma) = \mathbb{Z}$ является необходимым условием тривиальности узла. (Заметим, что достаточность этого условия также имеет место и является трудной теоремой.)

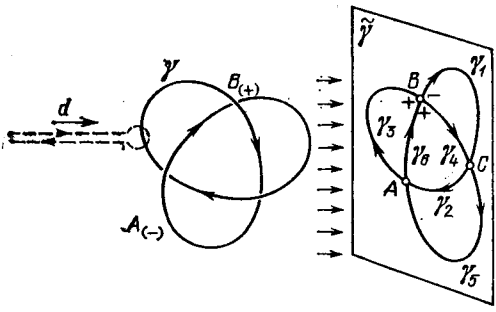


Рис. 139

Алгоритм вычисления группы $\pi_1(W_\gamma)$ таков: спроектируем узел вдоль направления d на плоскость $\mathbb{R}^2$ (рис. 139) — «экран». Для направления d общего положения можем считать, что все самопересечения проекции $\tilde{\gamma}$ на экране $\mathbb{R}^2$ двойные и под ненулевыми углами. Для кривой $\tilde{\gamma}$ на экране нужно указать только (кроме направления), какая из двух ветвей «выше» (+), а какая «ниже» (−) в точке пересечения. На экране возникает плоский граф с набором ребер и вершин, в которых сходятся 4 ребра. Начальную точку для вычисления $\pi_1(W_\gamma)$ поместим в $\infty \in S^3$. Базисные пути из π_1 будут подходить к узлу по направлению d (слева на рис. 139) перпендикулярно к экрану $\mathbb{R}^2$. Занумеруем ребра и сопоставим каждому ребру γ_j на экране $\mathbb{R}^2$ по одной образующей $a_j \in \pi_1(W_\gamma)$ (например, на рис. 139 имеем на экране вершины A, B, C и ребра $[B_{(-)}C_{(+)}] = \gamma_1$, $[C_{(+)}A_{(-)}] = \gamma_2$, $[A_{(-)}B_{(+)}] = \gamma_3$, $[B_{(+)}C_{(-)}] = \gamma_4$, $[C_{(-)}A_{(+)}] = \gamma_5$, $[A_{(+)}B_{(-)}] = \gamma_6$, указанные в порядке прохождения кривой γ). Пусть путь a_j идет из ∞ по направлению d до средней точки соответствующего ребра с номером j, обходит его и возвращается назад — см. путь a_3 для ребра $[A_{(-)}B_{(+)}] = \gamma_3$ на рис. 139. Мы имеем образующие a_j из $\pi_1(W_\gamma)$.

Соотношения получаются так: в каждой вершине сходятся четыре ребра γ_{j_1}, γ_{j_2}, γ_{j_3}, γ_{j_4}. Согласно принятой нами нумерации в порядке прохождения кривой γ имеем в вершине $j_2 = j_1 + 1$, $j_4 = j_3 + 1$, где пары (j_1, j_2) и (j_3, j_4) составлены из номеров

смежных ребер. Пусть пара ребер (j_1, j_2) «выше», чем (j_3, j_4), т. е. эта ветвь кривой γ лежит левее по направлению d (см. рис. 139). Тогда

$$a_{j_1} = a_{j_2} = a_{j_1+1}. \tag{1}$$

Проверьте, что для второй пары $(j_3, j_4 = j_3 + 1)$

$$a_{j_4} = a_{j_3+1} = a_{j_1}^{-1} a_{j_3} a_{j_1}. \tag{2}$$

Задача. Покажите, что набор соотношений (1), (2) для каждой вершины порождает все соотношения в группе узла*).

Пример. Для трилистника

$$a = a_3 = a_4, \quad a_1 = a_3^{-1} a_6 a_3 \qquad \text{(вершина } B\text{)},$$

$$b = a_1 = a_2, \quad a_5 = a_1^{-1} a_4 a_1 \qquad \text{(вершина } C\text{)},$$

$$c = a_5 = a_6, \quad c = b^{-1}ab, \quad a = c^{-1}bc \quad \text{(вершина } A\text{)},$$

$$\text{или} \quad b = a^{-1}ca, \quad c = b^{-1}ab, \quad a = c^{-1}bc.$$

Из соотношения (2) видно, что коммутированная группа $H_1(W_7)$ всегда есть $\mathbb{Z}$.

Задача. Покажите, что в группе трилистника можно выбрать образующие α, β, связанные единственным соотношением $\alpha^2 = \beta^3$.

2. Полином Александера. Группа узла оказывается иногда довольно сложной. Определяется *полином Александера* (фактически, по группе узла), который является более грубым инвариантом, но позволяет различать узлы проще. Пусть группа узла задана стандартными образующими $a_1, \ldots, a_n$ (см. выше) и соотношениями $r_i(a_1, \ldots, a_n) = 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ вида (1), (2). Определим «операторы дифференцирования» $\frac{\partial}{\partial a_i}$ элементов группы, потребовав, чтобы произведения дифференцировались по следующему правилу:

$$\frac{\partial}{\partial a_i}(bc) = \frac{\partial b}{\partial a_i} + b\frac{\partial c}{\partial a_i},$$

причем $\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{ij}$. Заметим, что производная любого элемента есть линейная комбинация элементов группы с целыми коэффициентами (т. е. элемент так называемого группового кольца группы узла).

Построим $n \times m$-матрицу $\left(\frac{\partial r_i}{\partial a_j}\right)$. Заменим в ней степени образующих a_j на степени формальной переменной t по правилу

*) Следует иметь в виду, что образующие a_j определены с точностью до замены $a_j \to a_j^{-1}$. Вид соотношений (2) при этом меняется незначительно.

$a_j^k \to t^k$. Получим $n \times m$-матрицу, элементы которой являются многочленами от t и t^{-1}. Наибольший общий делитель $\Delta(t)$ всех миноров $(n-1)$-го порядка этой матрицы и называется полиномом Александера. Этот полином определен с точностью до умножения на $\pm t^k$, k — любое целое число.

Задачи. 1. Доказать, что если группы двух узлов изоморфны, то соответствующие полиномы Александера $\Delta(t)$, $\Delta'(t)$ или совпадают, или связаны соотношением $\Delta'(t) = \Delta(t^{-1})$ (с точностью до умножения на $\pm t^k$, k — любое целое число).

2. Доказать, что для трилистника полином Александера имеет вид $\Delta(t) = 1 - t + t^2$.

3. Вычислить полином Александера для узла, изображенного на рис. 138, *в*, и показать, что этот узел не эквивалентен трилистнику.

3. Расслоение, связанное с узлом. Как мы уже видели, $H_1(W_\gamma) = \mathbb{Z}$. Поэтому вложение $\partial V_\gamma = T^2 \to V_\gamma \sim W_\gamma$ порождает гомоморфизм

$$H_1(\partial V_\gamma) = H_1(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = H_1(W_\gamma).$$

Вследствие этого одна образующая $\bar{\gamma}$ на торе $T^2 = \partial V_\gamma$ гомологична нулю в дополнении V_γ к узлу γ. Эта образующая $\bar{\gamma}$ может представляться как конец нормального векторного поля (длины $\varepsilon > 0$) на кривой γ. Рассмотрим гладкое отображение $\varphi\colon T^2 \to S^1$, при котором $\varphi^{-1}(s_0) = \bar{\gamma} \subset T^2$, и s_0 — правильная точка для φ. Пусть отображение φ имеет степень 1 на другой образующей тора. Продолжим, если это возможно, отображение φ на все дополнение V_γ к узлу γ. Получим отображение

$$\tilde{\varphi}\colon V_\gamma \to S^1, \quad \tilde{\varphi}\big|_{\partial V_\gamma} = \varphi.$$

Полный прообраз $\tilde{\varphi}^{-1}(s_0)$ правильной точки s_0 есть двумерная поверхность P с границей $\partial P = \bar{\gamma}$ на торе T^2. Сужая окрестность, видим, что сам узел γ ограничивает поверхность P в $\mathbb{R}^3$ (или S^3).

Задача. Докажите, что продолжение $\tilde{\varphi}$ отображения $\varphi\colon T^2 \to S^1$ возможно. При доказательстве используйте следующие факты: кривая $\bar{\gamma}$ гомологична нулю в $H_1(V_\gamma) = \mathbb{Z}$; $\pi_i(S^1) = 0$ при $i > 1$. Разбейте V_γ на клетки и продолжайте отображение сначала на одномерный остов (это тривиально), затем с одномерного на двумерный (это требует анализа) и затем на трехмерный с двумерного (используйте здесь равенство $\pi_2(S^1) = 0$).

Определение 2. Минимальный род гладкой несамопересекающейся поверхности P с границей γ в $\mathbb{R}^3$ (или S^3) называется *родом* узла γ.

В ряде простейших примеров узлов дополнительное пространство V_γ с границей $\partial V_\gamma = T^2$ оказывается расслоением над окружностью

$$p\colon V_\gamma \to S^1,$$

причем на границе T^2 это расслоение превращается в тривиальное расслоение φ: $T^2 \to S^1$ со слоем S^1 — малой окружностью в нормальной плоскости к узлу, зацепленной с узлом. Топологически можно представлять себе картину так: задано гладкое расслоение p: $V \to S^1$ над окружностью со слоем P — поверхностью рода $g \geqslant 0$ с границей S^1 (рис. 140); на границе это расслоение тривиально: $\partial V = T^2 = S^1 \times S^1 \to S^1$. Рассмотрим заполненный тор $D^2 \times S^1$ с той же границей $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1 = T^2$. Склейка многообразий V и $(D^2 \times S^1)$ по общей границе $\partial V = \partial D^2 \times S^1$ дает замкнутое трехмерное многообразие M. Если $M = S^3$, то $V = V_\gamma$ есть дополнение к узлу γ, лежащему в области $D^2 \times S^1$ как кривая $0 \times S^1$.

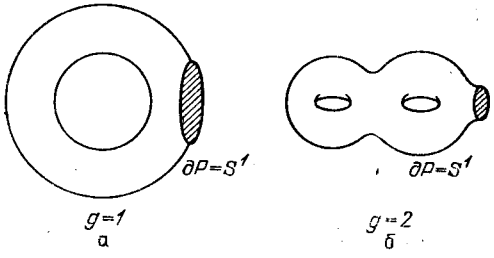


Рис. 140

Простейшие примеры:

а) Если $g = 0$ и $V = S^1 \times D^2$, $P = D^2$, то кривая γ незаузлена.

б) Пусть $g = 1$ (см. рис. 140, *а*). Многообразие V получается из прямого произведения поверхности P на отрезок $I = [0, 1]$ склейкой $(x, 0) = (h(x), 1)$ верхнего и нижнего оснований. Предположим, что склеивающее отображение h: $P \to P$ таково, что на группе $H_1(P \cup D^2) = H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ индуцируется преобразование $a \mapsto ma + nb$, $b \mapsto la + kb$, $mk - nl = 1$ (a, $b \in H_1(T^2)$ — образующие). На границе будем иметь прямое произведение $\partial V = S^1 \times S^1$.

Задача. Вычислите группу $\pi_1(V)$ и $\pi_1(V \cup (D^2 \times S^1))$. Подберите склейку так, чтобы получилась сфера S^3 с узлом $\gamma \subset S^3$. Получите этим способом трилистник при $m = 2$, $n = 3$.

Рассмотрим интересный пример: пусть задан многочлен в $\mathbb{C}^2$: $f(z, w) = z^m + w^n$, где m и n взаимно просты. Рассмотрим сферу $S^3_\delta = \{|z|^2 + |w|^2 = \delta > 0\}$. Пара уравнений

$$z^m + w^n = 0, \qquad |z|^2 + |w|^2 = \delta > 0 \tag{3}$$

задает кривую $\gamma \subset S^3_\delta$.

Задача. Докажите, что для взаимно простых m, n кривая (3) связна (узел).

Рассмотрим дополнение к узлу $\gamma \subset S^3_\delta$, обозначаемое через W_γ. Построим расслоение

$$p : S^3_\delta \setminus \gamma \xrightarrow{p} S^1$$

следующим образом:

$$p(z, w) = \frac{f(z, w)}{|f(z, w)|}, \quad f(z, w) \neq 0. \tag{4}$$

Задачи. 1. Покажите, что отображение (4) имеет всюду ранг 1 и является расслоением с базой S^1. Вычислите род слоя.

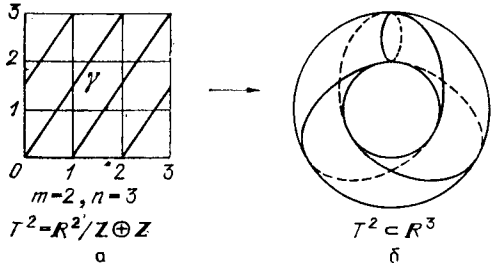


Рис. 141

2. Докажите, что формулы (3) задают «торические узлы» $\gamma \subset T^2 \subset S^3_6$, где узел γ есть несамопересекающаяся кривая на торе T^2 (рис. 141), определяющая в гомологиях $H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ элемент $\gamma = ma + nb$.

3. Покажите, что узел на рис. 138, *в* не является торическим.

4. Зацепления. Перейдем теперь к зацеплениям в $\mathbb{R}^3$ и в S^3. Пусть задан набор окружностей $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \subset S^3$, не пересекающихся попарно, несамопересекающихся и имеющих ненулевые касательные векторы. Тривиальное зацепление показано на рис. 142, *а*, нетривиальное — на рис. 142, *б*.

Естественным инвариантом зацепления $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ является *группа зацепления* — фундаментальная группа $\pi_1(S^3 \setminus (\gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_k))$.

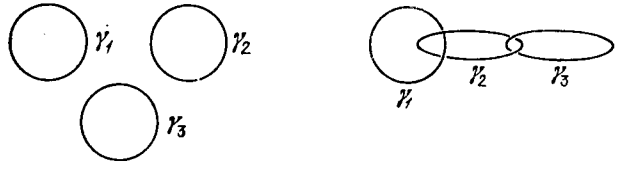


Рис. 142

Задача. Вычислите группу зацепления для случаев *а*, *б*, *в*, изображенных на рис. 143 ($k = 2$).

Мы знаем инвариант зацепления — матрицу коэффициентов зацепления $\{\gamma_i, \gamma_j\}$, $i \neq j$ (см. § 15). Однако даже при $k = 2$ это — неполный инвариант. На рис. 143, *в* показан пример, где $k = 2$, $\{\gamma_1, \gamma_2\} = 0$, обе кривые индивидуально незаузлены, но «расцепить» их нельзя. Это показывает группа зацепления.

Алгоритм вычисления группы зацепления тот же самый, что и для узла: надо спроектировать зацепление на «экран» и указать образующие и соотношения, как и выше для узлов. Инте-

ресные примеры зацеплений дают уравнения (f — многочлен):

$$f(z, w)=0,\ |z|^2+|w|^2=\delta>0. \qquad (5)$$

Задачи. 1. Пусть $f(z, w)=z^m+w^n$. Найдите число компонент зацепления.

2. Докажите, что как и для узлов, отображение $S^3\setminus(\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_k)\to S^1$, определяемое формулой (4), является расслоением.

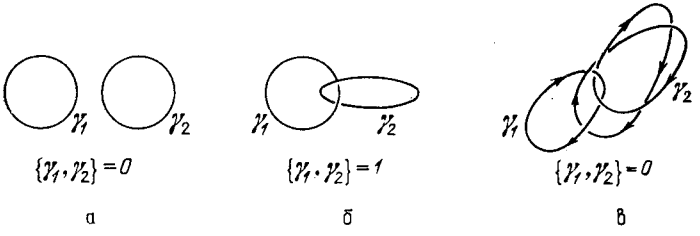


Рис. 143

Вычислите род слоя. Найдите группу зацепления в этом случае. Рассмотрите случаи:

а) $f(z, w)=z^3+w^6$;

б) $f(z, w)=z^2w+w^4$.

5. **Косы.** Рассмотрим теперь группу кос. Зафиксируем на плоскости $\mathbb{R}^2$ набор из n точек $P_1, \ldots, P_n$ и рассмотрим произведение $\mathbb{R}^2\times I$, где $I=[0, 1]$.

Определение 3. *Косой* называется набор гладких кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ в $\mathbb{R}^2\times I$, несамопересекающихся, не пересекающихся попарно, имеющих ненулевые касательные векторы $\gamma_j\neq 0$, трансверсальные к слоям $\mathbb{R}^2\times t$ для всех t. При $t=0$, 1 мы должны иметь

$$\gamma_j(0)=(P_j,\ 0),\qquad j=1, \ldots, n,$$
$$\gamma_j(1)=(P_{\sigma(j)},\ 1),\quad j=1, \ldots, n,$$

где σ — перестановка индексов $1, \ldots, n$ (рис. 144).

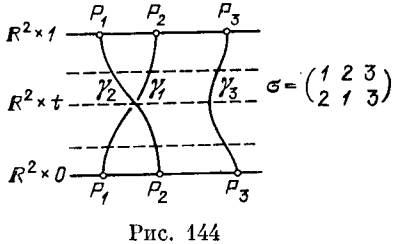


Рис. 144

Коса называется *крашеной*, если σ есть тождественная перестановка, $\sigma(j)=j$. Классы эквивалентности кос относительно изотопии образуют группу: произведение кос K_1K_2 получается приставлением нижнего основания косы K_1 к верхнему основанию косы K_2 (рис. 145, *б*).

Обратная коса — это та же коса, но идущая в обратную сторону по t.

Единичная коса имеет вид, показанный на рис. 145, *а*. Имеется гомоморфизм группы кос в группу перестановок:

$$K \mapsto \sigma(K).$$

Ядром этого гомоморфизма (косы K, для которых $\sigma(K) = 1$) и являются крашеные косы.

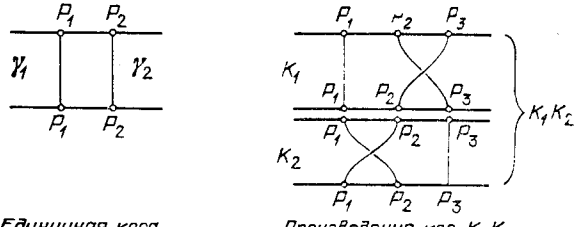


Рис. 145

Набор образующих σ_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ в группе кос соответствует элементарным транспозициям $\sigma_i = \begin{pmatrix} \ldots & i & i+1 & \ldots \\ \ldots & i+1 & i & \ldots \end{pmatrix}$ в группе перестановок S_n (рис. 146). Соотношения таковы (проверьте):

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},$$
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{при} \quad |i-j| > 1. \tag{6}$$

Задача. Докажите, что σ_i — образующие, а (6) — полный набор соотношений.

Представляют интерес *замкнутые косы*, описываемые так. Рассмотрим заполненный тор $D^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$ и рассмотрим узлы и зацепления — наборы из нескольких несамопересекающихся и непересекающихся попарно замкнутых кривых в области $D^2 \times S^1$:

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_q\} \subset D^2 \times S^1 \subset R^3.$$

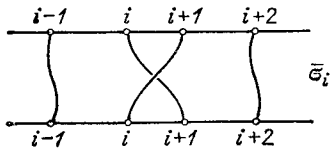


Рис. 146

Потребуем, чтобы касательные векторы всех кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ были ненулевыми и не касались направлений дисков $D^2 \times (s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$. Рассмотрим эти «трансверсальные» узлы и зацепления в области $D^2 \times S^1$.

Задача. Докажите, что каждый узел или зацепление указанного вида определяет класс сопряженных элементов в одной из групп кос. Покажите, что классы трансверсальной изотопии

в области $D^2 \times S^1$ таких узлов и зацеплений точно соответствуют классам сопряженности в группах кос.

Замечание. Можно показать, что любой узел или зацепление в $\mathbb{R}^3$ изотопией приводится к трансверсальному узлу или зацеплению в области $D^2 \times S^1$. Однако это не помогает классификации узлов и зацеплений в $\mathbb{R}^3$, так как один узел, например, может приводиться к многим замкнутым косам.

Группа кос имеет другую интересную интерпретацию. Рассмотрим множество U_n всех комплексных многочленов степени n (со старшим коэффициентом 1)

$$f = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

корни которых $z_1, \ldots, z_n$ все различны.

Задача. Докажите, что группа $\pi_1(U_n)$ совпадает с группой кос.

Рассмотрим пространство V_n, где

$$V_n = \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{n} \setminus \Delta,$$

Δ состоит из наборов $(z_1, \ldots, z_n)$, где $z_i = z_j$ для какой-нибудь пары (i, j).

Задачи. 1. Докажите, что группа $\pi_1(V_n)$ изоморфна группе крашеных кос.

2. Докажите, что пространство V_n/S_n имеет группу $\pi_1(V_n/S_n)$, изоморфную полной группе кос. Здесь S_n — группа перестановок из элементов, действующая на V_n перестановкой координат $(z_1, \ldots, z_n) \overset{\sigma}{\mapsto} (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)})$.

Глава 7

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СЛОЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

§ 27. Простейшие понятия качественной теории динамических систем. Двумерные многообразия

1. Основные определения. Определение 1. *Динамической системой* (или, как говорят, *автономной динамической системой*) называется гладкое векторное поле ξ на многообразии M.

Локально динамическая система записывается в виде

$$\dot{x}^\alpha = \xi^\alpha(x^1, \ldots, x^n). \tag{1}$$

Интегральные траектории — это решения уравнения (1) или кривые $\gamma(t) = \{x^\alpha(t)\}$, вектор скорости которых $\dot{\gamma}$ в каждый момент времени t совпадает с $\xi(\gamma(t))$. Интегральная траектория всегда существует локально, на конечном отрезке времени, согласно теореме существования. Для гладких полей ξ интегральная траектория единственна. На некомпактных (открытых) многообразиях возможна ситуация, что за конечное время траектория $\gamma(t)$ «уходит в бесконечность», и поэтому траектория существует только на конечных интервалах значений t.

На (компактных) замкнутых многообразиях каждая траектория неограниченно продолжаема по t и существует для всех значений времени $-\infty < t < \infty$. Векторное поле ξ определяет оператор дифференцирования функций по направлению ξ (см. § 23 части I)

$$f \to \partial_\xi f(x) = \xi^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}.$$

Экспонента от оператора

$$\widehat{S}_t = \exp(t\partial_\xi) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} t^k (\partial_\xi)^k \tag{2}$$

определяет сдвиг функций вдоль интегральных траекторий поля ξ:

$$\widehat{S}_t(f) = f(S_t(x)), \tag{3}$$

где $S_t(x) = \gamma(t)$, $\dot{\gamma} = \xi$ и $\gamma(0) = x$. Напомним, что коммутатором

полей ξ, η на M называется поле $[\xi, \eta]$, локально определяемое формулой (см. часть I)

$$[\xi, \eta]^\alpha = \xi^\nu \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^\nu} - \eta^\nu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu},$$

или

$$\partial_{[\xi, \eta]} = [\partial_\xi, \partial_\eta]. \tag{4}$$

Введем некоторые общие понятия.

Определение 2. 1) *Предельным множеством* $\omega^\pm(\gamma)$ интегральной траектории $\gamma(t)$ называется совокупность всех предельных точек последовательностей $\gamma(t_i)$, где $t_i \to \pm\infty$. Объединение $\omega^+(\gamma) \cup \omega^-(\gamma)$ называется ω-*предельным* для γ и обозначается через $\omega(\gamma)$.

2) Инвариантным ($\pm$) множеством (многообразием) динамической системы (1) называется такое подмножество (подмногообразие) $N \subset M$, что для любой точки $x \in N$ траектория $\gamma(t)$ лежит в N для $t \geqslant 0$ ($t \leqslant 0$), если $\gamma(0) = x$ (или $S_t(x) \subset N$ для $t \geqslant 0 (+)$ и $t \leqslant 0 (-)$).

Особо интересен случай, когда множество N инвариантно и для $t \geqslant 0$ и для $t \leqslant 0$, это — *инвариантные* множества или подмногообразия динамической системы в M.

3) Замкнутое инвариантное множество $N \subset M$ называется *минимальным*, если внутри N нет меньших замкнутых инвариантных множеств. Примерами минимальных множеств являются: а) особая точка x_0 поля ξ, где $\xi(x_0) = 0$; б) периодическая траектория поля ξ. Позднее мы познакомимся с примерами более сложных минимальных множеств.

4) Говорят, что траектория $\gamma(t)$ *захвачена* множеством $N \subset M$, если $\gamma(t)$ лежит в N для всех $t \geqslant t_0$.

5) Гиперповерхность $P \subset M$ называется *трансверсалью* динамической системы, если поле ξ не касается гиперповерхности P ни в одной ее точке. Гиперповерхность P называется *замкнутой трансверсалью*, если это — замкнутое подмногообразие многообразия M. При этом возможны два случая. а) Замкнутая трансверсаль P разделяет M на две части: $W_1 \cup W_2 = M$, $W_1 \cap W_2 = P$; в этом случае каждый из кусков W_1 и W_2 захватывает все траектории поля ξ или все траектории поля $-\xi$ (проверьте!). б) Замкнутая трансверсаль P не разделяет многообразие M на две части. Здесь особо выделяется случай, когда все траектории, начавшись в любой точке $x \in P$, возвращаются еще раз через конечное время $t(x)$ к многообразию P и его пересекают. Очевидно, что функция времени пересечения $t(x)$ гладко зависит от $x \in P$; тем самым определено гладкое отображение ψ: $P \to P$, $\psi(x) = \gamma(t(x))$, $\gamma(0) = x$.

Задача. Докажите, что все многообразие M диффеоморфно склеенному многообразию

$$M = N \times I(0, 1)/(x, 0) \sim (\psi(x), 1).$$

Докажите, что многообразие M диффеоморфно косому произведению с базой — окружностью S^1 и слоем N.

Кроме динамических систем весьма полезно строить качественную теорию для так называемых «одномерных слоений», задаваемых полями направлений (или «директоров») $\xi(x) \sim -\xi(x)$. Конечно, локально (в окрестности неособой точки $\xi(x_0) \neq 0$) одномерное слоение записывается в виде (1), но при этом надо иметь в виду два обстоятельства: во-первых, для любой скалярной функции $f \neq 0$ система $\dot{x} = \xi(x)$ определяет то же самое слоение, что и система $\dot{x} = f\xi(x)$; во-вторых, запись в виде (1) глобально не всегда возможна; поэтому одномерное слоение может не допускать корректного введения даже знака времени (рис. 147). Причины, требующие рассмотрения «одномерных слоений», могут быть различны. Например, в теории жидких кристаллов направление («директор») $\xi \sim (-\xi)$ есть ось некоторого осесимметричного (в данной точке) тензора второго ранга, определяющего оптические свойства среды. В теории динамических систем с алгебраическими правыми частями в $\mathbb{R}^n$ для изучения качественных свойств траекторий, уходящих далеко от начала координат, приходится «пополнять» пространство $\mathbb{R}^n$ бесконечно удаленными точками, превращая его в $\mathbb{R}P^n$; оказывается, система продолжается на $\mathbb{R}P^n$ как гладкое поле направлений, теряя знак времени. В случае $n = 2$ (двумерные многообразия) одномерное слоение задается 1-формой. Локально, в области $U \subset M^2$ с координатами (x, y), имеем

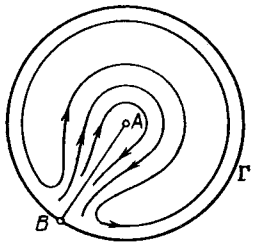


Рис. 147. В центре — особая точка A; имеется седло — особая точка B на границе Г. На отрезке BA нет знака времени.

$$\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{5}$$

Точка (x, y) неособа, если P или $Q \neq 0$. Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены степени m. Тогда сделаем обычную проективную замену

$$x = \frac{u_1}{u_0}, \quad y = \frac{u_2}{u_0}. \tag{6}$$

Мы получим 1-форму в однородных координатах

$$\Omega = u_0^{m+2}\omega = u_0^{m+2} P\left(\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}\right)(u_0 du_1 - u_1 du_0) + \\ + u_0^{m+2} Q\left(\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_0}\right)(u_0 du_2 - u_2 du_0). \tag{7}$$

Уравнение $\Omega = 0$ задает слоение на всем многообразии $\mathbb{R}P^2$.

Задача. Покажите, что бесконечно удаленная прямая $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 (u_0 = 0)$ является интегральной траекторией одномерного слоения $\Omega = 0$. Покажите, что слоение $\Omega = 0$ не допускает введения знака времени. Исследуйте особые точки слоения $\Omega = 0$ на бесконечности $(u_0 = 0)$ при $m = 2$.

Определение 3. *Предельным циклом* называется периодическая интегральная траектория динамической системы или слоения на двумерном многообразии, в достаточно малой окрестности которой нет других периодических решений.

В этом случае, как нетрудно видеть, картина интегральных траекторий около предельного цикла имеет вид, показанный на рис. 148.

Предельные циклы систем на плоскости $\mathbb{R}^2$, входящие в замкнутый диск D^2 сквозь трансверсаль $\Gamma = \partial D^2$, рассматривались в § 14 (см. теорему Пуанкаре — Бендиксона). Фактически эта теорема относится к слоениям на сфере S^2, где верхний полюс является выталкивающей особой точкой (рис. 149). Векторные

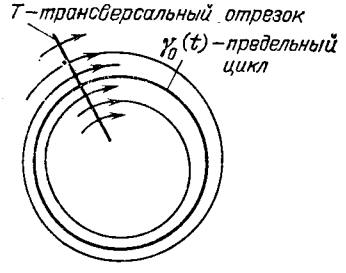


Рис. 148. Функция Пуанкаре $\tau \to f(\tau)$ для $\tau \in T$ определяется траекторией $\gamma(t)$ такой, что $\gamma(0) = \tau \in T$ и $\gamma(t) = f(\tau) \in T$; при этом в отрезке кривой между $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$ нет пересечений с T. При $\tau = 0$ имеем точку цикла γ_0.

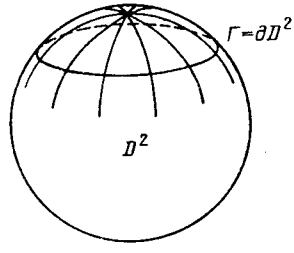


Рис. 149

поля общего положения на сфере обязательно имеют выталкивающую или втягивающую особую точку; см. § 15. Это — следствие теоремы о сумме особенностей векторного поля. Фактически это — единственная эффективная теорема, гарантирующая существование предельного цикла. Уже число циклов систем с полиномиальными правыми частями на $\mathbb{R}^2$ (даже степени 2), сводящихся к слоениям на $\mathbb{R}P^2$, неизвестно. В каждом индивидуальном случае их отыскание является нетривиальной задачей. Особый (вырожденный) случай представляют собой бездивергентные динамические системы на плоскости $\mathbb{R}^2$ (или поля $\xi = (\xi^1, \xi^2)$) такие, что $\dfrac{\partial \xi^a}{\partial x^a} = 0$. В этом случае преобразования S_t сохраняют

площадь области (см. § 23 части I). Эти системы все гамильтоновы с одной степенью свободы; поэтому они имеют интеграл энергии и интегрируются до конца.

2. Динамические системы на торе. В силу теоремы о сумме индексов особенностей векторного поля (см. § 15) единственной замкнутой ориентируемой поверхностью, допускающей векторные поля, нигде не обращающиеся в нуль, является тор T^2. К такого рода системам на торе приводит, например, задача о качественном исследовании уравнения с периодическими коэффициентами: пусть задано уравнение

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{8}$$

с периодической по обоим аргументам правой частью $f(x+1, t) = f(x, t) = f(x, t+1)$. Уравнение (8) определит нам на торе T^2 с координатами $x \pmod 1$, $t \pmod 1$ динамическую систему вида

$$\dot{x} = f(x, t), \quad \dot{t} = 1. \tag{9}$$

Система (9) допускает замкнутую трансверсаль $S^1 \subset T^2$, задаваемую уравнением $t = t_0$. Трансверсаль S^1 не разделяет тора T^2; в силу уравнения (9) каждая траектория $(x(t), t)$ возвращается к трансверсали S^1 через время $t(x) = 1$. Мы получаем отображение (диффеоморфизм степени 1)

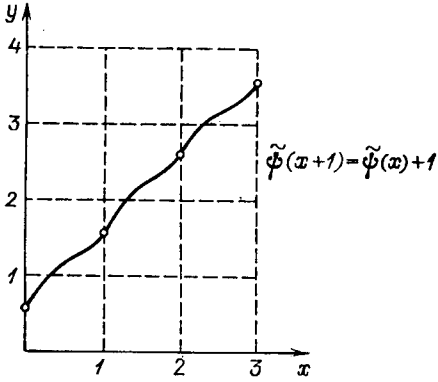


Рис. 150

$$\psi\colon S^1 \to S^1, \tag{10}$$

где $\psi(x) = \gamma(t_0 + 1)$, $\gamma(t_0) = (x, t_0) \in T^2$. График числовой функции $y = \tilde{\psi}(x)$, задающей отображение ψ (т. е. такой, что $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \bmod 1$), изображен на рис. 150. Из равенства $\tilde{\psi}(x+1) = \tilde{\psi}(x) +$ (степень ψ) следует $\tilde{\psi}(x+1) = \tilde{\psi}(x) + 1$. Можно считать, что $\tilde{\psi}(0) \geqslant 0$. Пусть $\tilde{\psi}_n(x) = \underbrace{\tilde{\psi}(\tilde{\psi}(\ldots \tilde{\psi}(x) \ldots))}_{n}$ при $n > 0$ и $\tilde{\psi}_{-n} = (\tilde{\psi}_n)^{-1}$ (обратное отображение). Рассмотрим выражение

$$(\tilde{\psi}_n(x) - x)/n \tag{11}$$

(здесь числитель есть угол поворота точки x при n-кратном применении диффеоморфизма ψ). Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. а) *Величина* $(\tilde{\psi}_n(x) - x)/n$ *имеет предел при* $n \to \infty$, *не зависящий от точки* x. б) *Этот предел называется*

«числом вращения» отображения ψ *и обладает свойством: число вращения рационально тогда и только тогда, когда у* ψ *имеется периодическая точка, т. е. такая точка* x_0, *что* $\psi^n(x_0) = x_0$ *или* $\tilde{\psi}_n(x_0) = x_0 + m$.

Доказательство. Часть а). Пусть $\alpha_n(x) = \tilde{\psi}_n(x) - x$ — угол поворота точки x при n-кратном применении диффеоморфизма ψ. Имеем неравенство

$$|\alpha_n(x_1) - \alpha_n(x_2)| < 1; \tag{12}$$

оно очевидно при $|x_1 - x_2| < 1$, а в общем случае нужно воспользоваться периодичностью функции $\alpha_n(x)$.

Пусть целое число m_n таково, что справедливо следующее неравенство:

$$m_n \leqslant \alpha_n(0) < m_n + 1. \tag{13}$$

Тогда для любого x из (12) и (13) вытекает, что $|\alpha_n(x) - m_n| < 2$, т. е. $\left|\frac{\alpha_n(x)}{n} - \frac{m_n}{n}\right| < \frac{2}{n}$. Но $\alpha_{nk}(x)$ есть среднее арифметическое k величин $\alpha_n(\tilde{\psi}_i(x))$, $i = 0, \ldots, k-1$. Поэтому верно неравенство

$$\left|\frac{\alpha_{nk}(x)}{nk} - \frac{m_n}{n}\right| < \frac{2}{n}.$$

Итак, при всех k величина $\alpha_{nk}(x)/nk$ принадлежит отрезку $\left[\frac{m_n - 2}{n}, \frac{m_n + 2}{n}\right]$. Из симметричности $\alpha_{nk}(x)/nk$ по n и k получаем, что все отрезки вида $\left[\frac{m_n - 2}{n}, \frac{m_n + 2}{n}\right]$ попарно пересекаются; длина этих отрезков стремится к нулю. Их единственная общая точка и есть число вращения α. Утверждение а) доказано.

Часть б). Пусть имеется периодическая точка x_0; если $\psi^n(x_0) = x_0$, то $\tilde{\psi}_n(x_0) = x_0 + m$. Отсюда $\psi^{kn}(x_0) = x_0$, $\tilde{\psi}_{kn}(x_0) = x_0 + km$, $\frac{1}{kn}(\tilde{\psi}_{kn}(x_0) - x_0) = \frac{km}{kn} = \frac{m}{n}$. При $k \to \infty$ получаем $\alpha = \frac{m}{n}$.

Обратно, пусть $\alpha = \frac{m}{n}$. Тогда функция $\tilde{\psi}_n$ имеет вид

$$\tilde{\psi}_n(x) = x + m + O(1) = x + m + \Delta(x). \tag{14}$$

Если $\Delta(x) > 0$ при всех x, то верно и более сильное неравенство: $\Delta(x) \geqslant \Delta_0 > 0$. Тогда для числа вращения будем иметь

$$\alpha \geqslant \frac{m}{n} + \frac{\Delta_0}{n} > \frac{m}{n}. \tag{15}$$

Действительно, достаточно рассмотреть номера, кратные n, для которых получим

$$\tilde{\psi}_{kn}(x) = x + km + k\Delta_0. \tag{16}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что неравенство $\Delta(x) < 0$ также не может выполняться при всех x. Таким образом, найдется точка x_0, в которой функция $\Delta(x)$ меняет знак. Это и есть периодическая точка. Лемма доказана.

Следствие. *Если число вращения α иррационально, то порядок точек x, $\psi(x)$, $\psi^2(x)$ ..., $\psi^N(x)$ на окружности при любом x такой же, как в случае поворота на угол α.*

Доказательство. Из доказательства леммы (часть б)) видно, что $\tilde{\psi}_n(x) > x + m$ тогда и только тогда, когда $\alpha > m/n$. Это и означает сохранение порядка при соответствии $x + n\alpha \pmod 1 \leftrightarrow \psi^n(x)$. Следствие доказано.

Периодические точки отображения ψ дают нам периодические решения уравнения (9). Таким образом, наличие у уравнения (9) периодических решений согласно лемме 1 равносильно рациональности числа вращения α для отображения ψ. Рассмотрим теперь случай, когда число вращения α иррационально и периодических решений уравнение (9) не имеет.

Лемма 2. *Если число вращения иррационально, то для любой точки x окружности S^1 предельные множества $\omega^+(x)$ и $\omega^-(x)$ совпадают и инвариантны относительно преобразования ψ; они не зависят от точки $x \in S^1$.*

(Здесь множество $\omega^\pm(x)$ определяется на окружности S^1 как совокупность предельных точек последовательности $\psi^n(x)$ при $n \to \pm\infty$. Множество $\omega^\pm(x)$ совпадает, очевидно, с пересечением $\omega^\pm(\gamma) \cap S^1$, где S^1 — окружность, отвечающая значению $t = t_0$, а γ — траектория системы (9) на торе T^2, проходящая через точку x при $t = t_0$.)

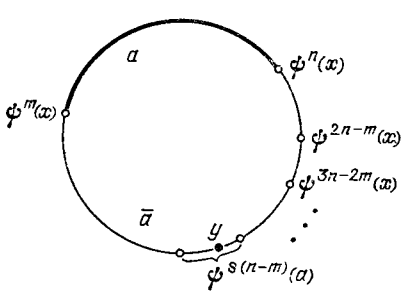


Рис. 151

Доказательство. Установим сначала инвариантность множества $\omega^\pm(x)$ относительно $\psi^{\pm 1}$. Если $y \in \omega^\pm(x)$, то найдется последовательность n_1, n_2, ... такая, что $n_k \to \pm\infty$ и $\psi^{n_k}(x) \to y$. Тогда последовательность точек $\psi^{\pm 1}\left(\psi^{n_k}(x)\right) = \psi^{n_k \pm 1}(x)$ сходится к точке $\psi^{\pm 1}(y)$. Поэтому $\psi^{\pm 1}(y) \in \omega^\pm(x)$. Во вспомогательных целях установим такой факт: если точки $\psi^n(x)$ и $\psi^m(x)$ делят окружность на дуги a и $\bar{a}$ (рис. 151), то каждая половина орбиты $\{\psi^q(y),\ q \geqslant 0\}$ и $\{\psi^q(y),\ q \leqslant 0\}$ имеет точки на обеих дугах a и $\bar{a}$. Докажем это для полуорбиты $\{\psi^q(y),\ q \geqslant 0\}$. Пусть, например, $m > n$ и $y \in \bar{a}$. Рассмотрим дуги a, $\psi^{n-m}(a)$, ..., $\psi^{s(n-m)}(a)$ $(s > 0)$. Очевидно, концы этих дуг примыкают друг к другу (см. рис. 151) и образуют монотонную последовательность точек окружности.

Указанные дуги покроют всю окружность. В самом деле, в противном случае концы этих дуг, т. е. точки вида $\psi^{s(n-m)}\psi^n(x)$, образуют монотонную и ограниченную, а потому сходящуюся последовательность. Предел этой последовательности будет неподвижной точкой преобразования ψ^{n-m}, что противоречит иррациональности числа вращения и лемме 1.

Итак, найдется такое $s>0$, что дуга $\psi^{s(n-m)}(a)$ покроет точку y: $y\in\psi^{s(n-m)}(a)$, поэтому $\psi^{s(m-n)}(y)\in a$. (Для $q\leqslant 0$ доказательство идентично; нужно лишь заменить $m-n$ на $n-m$.)

Рассмотрим теперь две полуорбиты $\{\psi^q(x),\ q\geqslant 0\}$ и $\{\psi^q(y),\ q\leqslant 0\}$. Рассмотрим точку $x_0\in\omega^+(x)$. Имеется последовательность $q_k\to\infty$ такая, что $\psi^{q_k}(x)\to x_0$. На каждой дуге $a_k=\left[\psi^{q_k}(x),\ \psi^{q_{k+1}}(x)\right]$ имеется точка из полуорбиты $\{\psi^q(y),\ q\geqslant 0\}$. Пусть это — точка $\psi^{s_k}(y)\in a_k=\left[\psi^{q_k}(x),\ \psi^{q_{k+1}}(x)\right]$. Очевидно, длины дуг a_k стремятся к нулю при $k\to\infty$, и последовательность точек $\psi^{s_k}(y)$ сходится к точке x_0. Итак, совпадение $\omega^+(x)$ и $\omega^+(y)$ доказано.

Совпадение $\omega^-(x)$ с $\omega^-(y)$ доказывается так же. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если число вращения иррационально, то предельное множество $\omega(x)=\omega(y)$ любой точки окружности S^1 может либо совпадать со всей окружностью, либо быть нигде не плотным замкнутым совершенным множеством (т. е. канторовым множеством).*

(Напомним определение: множество называется *нигде не плотным*, если около любой его точки имеется не принадлежащая ему открытая область; множество *замкнуто*, если оно содержит свои предельные точки; множество *совершенно*, если оно совпадает с множеством своих предельных точек, например, совершенное множество не имеет изолированных точек.)

Доказательство. Предельное множество $\omega(x)=\omega^{\pm}(x)$ замкнуто по определению (см. выше). Докажем, что это множество совершенно. Пусть $x_0\in\omega(x)$. Все точки $\psi^q(x_0)$ принадлежат $\omega(x)$ по лемме 2. По той же лемме $\omega^+(x_0)=\omega(x_0)=\omega(x)$. Поэтому найдется последовательность $q_k\to\infty$ такая, что $\psi^{q_k}(x_0)\to x_0$. В то же время $\psi^{q_k}(x_0)\neq x_0$ по лемме 1. Таким образом, x_0 есть предельная точка множества $\omega(x)$, т. е. множество $\omega(x)$ совершенно. Какие бывают совершенные множества на окружности S^1? Либо $\omega(x)=S^1$ (всюду плотный случай), либо $\omega(x)$ содержит не все точки из S^1. Если множество $\omega(x)$ заполняет хотя бы маленькую дугу b на окружности S^1, то можно найти меньшую дугу $a\subset b$, у которой края имеют вид x_0 и $\psi^m(x_0)$. Тогда преобразование ψ^m обладает тем свойством, что концы дуг a, $\psi^m(a)$, ..., $\psi^{sm}(a)$, ... примыкают друг к другу. Поэтому, как в доказа-

тельстве леммы 2, объединение дуг $a \cup \psi^m(a) \cup \ldots \cup \psi^{sm}(a) \ldots$ покроет окружность S^1. Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Можно построить примеры C^1-гладких отображений $\psi\colon S^1 \to S^1$ и систем на торе $\dot{x} = f(x, t)$ вида (9), для которых множество $\omega(x)$ будет канторовым. Однако для C^2-гладких отображений (и тем самым для аналитических функций $f(x, t)$, в частности, для тригонометрических многочленов) имеется теорема (А. Данжуа): *если число вращения иррационально, то предельное множество $\omega(x)$ совпадает со всей окружностью S^1 (т. е. траектории системы всюду плотны на торе T^2).*

Несмотря на это, появление среди предельных множеств траекторий в нетривиальных динамических системах канторовых множеств, по-видимому, неизбежно (начиная с размерности 3) даже в случае, когда правые части являются алгебраическими.

Теорема 2. *Если предельное множество $\omega(x)$ есть вся окружность (т. е. траектории системы (9) всюду плотны), то отображение $\psi\colon S^1 \to S^1$ топологически эквивалентно повороту. Это означает, что найдется гомеоморфизм $h\colon S^1 \to S^1$ (вообще говоря, не гладкий) такой, что*

$$h\psi h^{-1}(x) = x + \alpha, \tag{17}$$

где α — число вращения (α иррационально).

Доказательство. В силу следствия из леммы 1 точки $x_n = \psi^n(x)$ на окружности идут в том же порядке, что и точки $n\alpha \pmod 1$ (точки орбиты поворота на угол α). Точки x_n всюду плотны на окружности по условию. Чтобы получить гомеоморфизм h окружности, переводящий ψ в поворот, нужно продолжить по непрерывности отображение, переводящее точки x_n в соответствующие точки орбиты поворота:

$$h(x_n) = n\alpha \pmod 1.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Гомеоморфизм h, осуществляющий «линеаризацию» отображения $\psi\colon S^1 \to S^1$, построен нами только как непрерывный даже для аналитических или сколь угодно гладких ψ. Исследование гладкости h является нелегкой задачей.

Замечание 2. До сих пор мы исследовали динамические системы на торе, для которых минимальное множество могло совпадать со всем тором. Для поверхностей рода $g > 1$ известно следующее: в случае C^2-гладких векторных полей минимальное замкнутое множество динамической системы может быть только либо особой точкой, либо периодическим решением. Эта теорема обобщает теорему А. Данжуа, упомянутую в замечании выше. Для C^1-гладких систем легко строятся примеры с минимальными множествами типа канторова множества.

§ 28. Гамильтоновы системы на многообразиях. Теорема Лиувилля. Примеры

1. Гамильтоновы системы в кокасательном расслоении. Постановка вариационных задач на многообразиях точно такая же, как и в евклидовом пространстве: пусть на многообразии M задан лагранжиан — скалярная функция $L(x, v)$, где x — точка многообразия M, а v — касательный вектор к M в этой точке. Экстремумы действия на гладких кривых с какими-либо граничными условиями

$$S = \int\limits_{\gamma(t)} L(x, \dot{x})\, dt, \quad v = \dot{\gamma} = \dot{x}, \quad x = \gamma(t),$$

приводят к уравнению Эйлера — Лагранжа, локально имеющему вид уравнения второго порядка на M:

$$\dot{p}_\alpha \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}. \tag{1}$$

В случае невырожденности преобразования Лежандра (см. § 33 части I), когда уравнение $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial v^\alpha}(x, v)$ однозначно разрешимо в виде $v^\alpha = v^\alpha(x, p)$, получим эквивалентную систему Гамильтона

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \quad \dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \tag{2}$$

Гамильтонова система (2) представляет собой динамическую систему на пространстве кокасательного расслоения $T^*(M)$ размерности $2n (n = \dim M)$, точками которого являются пары (x, p), где p — ковектор в точке $x \in M$.

Дифференциальная форма $\Omega = \sum\limits_\alpha dx^\alpha \wedge dp_\alpha$ замкнута (и даже точна, т. е. $\Omega = d\omega$, где $\omega = p_\alpha\, dx^\alpha$), определена глобально на всем $T^*(M)$ и невырождена: это означает, что форма $\Omega^n = \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ (n раз, где $n = \dim M$) пропорциональная элементу объема с ненулевым коэффициентом. Форма Ω определяет скалярное произведение векторов (кососимметрическое и невырожденное)

$$\langle \xi, \eta \rangle = -\langle \eta, \xi \rangle = J_{ab}\xi^a\eta^b, \tag{3}$$

где $a, b = 1, \ldots, 2n$, $\Omega = J_{ab} dy^a \wedge dy^b$, координаты $y^1, \ldots, y^{2n}$ на $T^*(M)$ определяются по правилу $y^\alpha = x^\alpha$, $y^{n+\alpha} = p_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$. Уравнения Гамильтона (2) имеют вид «кососимметрического градиента»

$$\dot{y}^a = J^{ab}\frac{\partial H}{\partial y^b}, \tag{4}$$

$J^{ab}J_{bc} = \delta^a_c$. Скобка Пуассона $\{f, g\}$ функций f, g на «фазовом

пространстве» $T^*(M)$ есть скалярное произведение их «градиентов»:

$$\{f, g\} = J^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial g}{\partial x^b} = \langle \nabla f, \nabla g\rangle. \tag{5}$$

В силу замкнутости формы Ω скобка Пуассона вводит на линейном пространстве функций структуру алгебры Ли. При этом «градиент» функции $\{f, g\}$ есть коммутатор «градиентов» функций f и g:

$$f \to (\nabla f) = \left(J^{ab}\frac{\partial f}{\partial y^b}\right), \quad g \to (\nabla g) = \left(J^{ab}\frac{\partial g}{\partial y^b}\right), \tag{6}$$
$$\{f, g\} \to [\nabla f, \nabla g].$$

Все эти факты были установлены локально в § 33 части I. Их перенос на многообразия носит автоматический характер, поскольку они представляют собой локальные тождества.

2. Гамильтоновы системы на многообразиях. Примеры. При рассмотрении гамильтоновых систем на многообразиях надо иметь в виду два обстоятельства:

1. Если $\omega = H_a\,dy^a$ — любая замкнутая 1-форма, то система $\dot{y} = J^{ab}H_b$ определяет группу канонических преобразований S_t, поскольку локально замкнутая форма ω есть дифференциал некоторой функции; глобально форма ω может не быть дифференциалом однозначной функции.

2. Гамильтоновы системы возникают не только на многообразиях вида $T^*(M)$ и при этом форма Ω не обязана быть точной.

Важны также более общие многообразия — *фазовые пространства*, на которых определена скобка Пуассона гладких функций. Пусть y^a, $a = 1, \ldots, N$,— локальные координаты на многообразии Y — фазовом пространстве. Скобка Пуассона функций $f(y)$ и $g(y)$ задается кососимметрическим тензорным полем $J^{ab}(y) = -J^{ba}(y)$ по формуле (5). Эта операция обладает очевидными свойствами билинейности и кососимметричности; легко проверяется также «тождество Лейбница»

$$\{fg, h\} = g\{f, h\} + f\{g, h\}. \tag{7}$$

Требуется также выполнение тождества Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0. \tag{8}$$

Гамильтоновы системы на фазовом пространстве по определению имеют вид (4), где $J^{ab} = J^{ab}(y)$ — тензор, задающий скобку Пуассона, а $H = H(y)$ — любая функция, называемая гамильтонианом. Векторное поле $\nabla H = \left(J^{ab}\frac{\partial H}{\partial y^b}\right)$, отвечающее системе (4), называется гамильтоновым. Коммутатор гамильтоновых полей связан со скобкой Пуассона соотношением (6) (проверьте!).

В рассмотренном выше важном примере кокасательного расслоения T^*M скобка J^{ab} была *невырожденной* (т. е. $\det(J^{ab}) \neq 0$) и имела канонический (постоянный) вид $\{x^\alpha, x^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0$, $\{x^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta$. Более общий класс фазовых пространств с невырожденной скобкой Пуассона допускает следующее описание. Пусть $N = 2n$, скобка Пуассона J^{ab} невырождена, т. е. $\det(J^{ab}) \neq 0$; обозначим через J_{ab} обратную матрицу. Выполнение тождества Якоби (8) для любых функций f, g, h эквивалентно замкнутости формы (см. часть I, теорему 34.2)

$$\Omega = \frac{1}{2} J_{ab} dy^a \wedge dy^b. \tag{9}$$

Многообразия с невырожденной замкнутой 2-формой Ω называются *симплектическими*. Таким образом, класс фазовых пространств с невырожденной скобкой совпадает с классом симплектических многообразий.

Для *вырожденной* скобки Пуассона имеются функции $f_q(y)$ (быть может, заданные локально) такие, что

$$\{f_q, g\} = 0 \tag{10}$$

для любой функции $g(y)$.

Задача. Доказать, что для вырожденной матрицы $J^{ab}(y)$ постоянного ранга функции $f_q(y)$ с условием (10) локально всегда существуют. (По поводу условий интегрируемости см. ниже § 29, п. 1.)

Если из (10) найдены все такие величины $f_q(y)$, то на их общей поверхности уровня $f_q(y) = \text{const}$, $q = 1, 2, \ldots$, скобка Пуассона уже становится невырожденной.

Рассмотрим важный пример: *скобки Пуассона — Ли*. Так называется класс скобок, где тензор $J^{ab}(y)$ линейно зависит от координат,

$$J^{ab}(y) = c^{ab}_d y^d, \quad c^{ab}_d = \text{const}. \tag{11}$$

Рассмотрим совокупность L всех линейных функций на фазовом пространстве, которое мы обозначим через L^*. Для базисных линейных функций — координат y^a — скобка определяет операцию коммутирования

$$[y^a, y^b] = c^{ab}_d y^d \equiv \{y^a, y^b\}. \tag{12}$$

Из косой симметрии $c^{ab}_d = -c^{ba}_d$ и тождества Якоби (8) вытекает, что операция (12) превращает линейное пространство L в алгебру Ли, причем c^{ab}_d — ее структурные константы. Скобки (12), вообще говоря, вырождены.

Пример 1. Пусть L — алгебра Ли группы вращений $SO(3)$. Метрика Киллинга на $SO(3)$ евклидова и позволяет не различать L и L^* (все индексы считаются нижними). Скобки Пуассона

базисных функций M_i на L^* имеют вид

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \tag{13}$$

где ε_{ijk} равно знаку перестановки ijk. Функция $M^2 = \sum M_i^2$ такова, что $\{M^2, M_i\} = 0$, $i = 1, 2, 3$. На поверхностях уровня $M^2 = \text{const}$ (сферы) скобка (13) невырождена. Гамильтоновы системы на L имеют вид «уравнений Эйлера»

$$\dot{M} = [M, \Omega], \quad \Omega = (\Omega^i) = \left(\frac{\partial H}{\partial M_i}\right), \tag{14}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор в L. (При $2H = a_1 M_1^2 + a_2 M_2^2 + a_3 M_3^2$ уравнения (14) совпадают с уравнениями движения твердого тела, закрепленного в центре масс.) Вывод уравнений верен для всех компактных (и полупростых) групп Ли (проверьте!). Такие системы на группах $SO(n)$ называются «многомерным аналогом твердого тела» ([32]), если гамильтониан — квадратичная функция от M.

Пример 2. С алгеброй Ли L группы $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства связаны важные системы, возникающие в гидродинамике. Эта алгебра Ли уже не является полупростой. На фазовом пространстве L^* имеется 6 координат M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3 и скобки Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \tag{15}$$

Скобка (15) обладает двумя независимыми функциями $f_1 = \sum p_i^2$, $f_2 = \sum p_i M_i$ такими, что $\{f_q, g\} = 0$ $(q = 1, 2)$ для любой функции $g(M, p)$. На поверхностях уровня $f_1 = p^2 > 0$, $f_2 = ps$ скобка (15) невырождена. Замена $(M, p) \to (\sigma, p)$, где $\sigma_i = M_i - \frac{s}{p} p_i$, устанавливает изоморфизм этих поверхностей уровня с кокасательным расслоением T^*S^2 к сфере (проверьте!).

Задача. Докажите, что на поверхностях уровня $\{f_1 = p^2 > 0, f_2 = ps\} \approx T^*S^2$ скобка Пуассона (15) может быть задана замкнутой формой

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^{2} d\xi_\alpha \wedge dx^\alpha + F_{12}(x)\, dx^1 \wedge dx^2, \tag{16}$$

где x^1, x^2, ξ_1, ξ_2 — координаты на T^*S^2, $x^1 = \theta$, $x^2 = \psi$, $p_1 = p\cos\theta\cos\psi$, $p_2 = p\cos\theta\sin\psi$, $p_3 = p\sin\theta$, $\sigma_1 = \xi_2 \operatorname{tg}\theta\cos\psi - \xi_1\sin\theta$, $\sigma_2 = \xi_2 \operatorname{tg}\theta\sin\psi + \xi_1\cos\psi$, $\sigma_3 = -\xi_2$; $\{\theta, \psi\} = \{\xi_1, \psi\} = \{\xi_2, \theta\} = 0$, $\{\theta, \xi_1\} = \{\psi, \xi_2\} = 1$, $\{\xi_1, \xi_2\} = s\cos\theta$.

Уравнения, являющиеся гамильтоновыми по отношению к скобке (15) с гамильтонианом H, записываются в виде «уравнений Кирхгофа»

$$\dot{p} = [p, \omega], \quad \dot{M} = [M, \omega] + [p, u], \tag{17}$$

где $u^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\omega^i = \frac{\partial H}{\partial M_i}$ (квадратные скобки обозначают векторное произведение). Для квадратичных гамильтонианов $H(M, p)$ уравнения (17) описывают движение твердого тела в жидкости — идеальной, несжимаемой и покоящейся на бесконечности. К виду (17) приводятся также уравнения движения волчка в осесимметричном поле. Оказывается, естественное ограничение гамильтоновой системы (17) на поверхность $f_1 = p^2$, $f_2 = ps$ может быть записано в виде уравнения экстремалей (Эйлера — Лагранжа) $\delta S = 0$ на сфере S^2, где функционал S является «многозначным», т. е. корректно определена лишь его вариация δS — замкнутая 1-форма на функциональном пространстве траекторий на сфере. Такое сведéние можно найти в книге [28].

3. Геодезические потоки. Важнейшим в геометрии классом гамильтоновых систем являются так называемые «геодезические потоки». Геодезический поток определяется на многообразии $T = T(M)$ касательных векторов к гладкому многообразию, на котором задана риманова метрика $g_{\alpha\beta}$; его гамильтониан имеет вид (локально)

$$H(x, p) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} = \delta^\alpha_\nu. \tag{18}$$

Этот гамильтониан возникает из лагранжиана $L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$, задающего геодезические линии, параметризованные натуральным параметром. Напомним принцип Мопертюи, согласно которому, в частности, движение частицы в потенциальном поле сил $U(x)$ по многообразию M с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ при фиксированной энергии $E = H(x, p) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle + U(x)$ происходит по геодезическим новой метрики

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x, E) = \mathrm{const}(E - U(x)) g_{\alpha\beta}(x) \tag{19}$$

(хотя параметр пробегания не определяется из решения экстремальной задачи; см. § 33 части I). Таким образом, в принципе Мопертюи геодезический поток интересен нам только как одномерное слоение на M.

Мы будем далее рассматривать геодезические потоки только на многообразиях M с положительной (римановой) метрикой $g_{\alpha\beta}$ и предполагать, что многообразие M является замкнутым. Задав уровень энергии $E = H(x, p) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle$, мы получим динамическую систему на компактном многообразии линейных элементов постоянной длины. Это многообразие представляет собой расслоение со слоем S^{n-1} (где $n = \dim M$) и базой M. С точки зрения качественной теории можно сказать следующее: эта система не имеет особых точек; периодические траектории могут здесь изучаться с помощью топологической теории критических точек

функционала длины в пространстве всех замкнутых кривых. Особенно интересный случай представляют компактные многообразия, имеющие отрицательную кривизну по всем двумерным направлениям. Рассмотрим для простоты поверхности M, снабженные метрикой постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

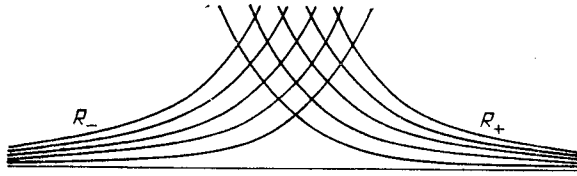


Рис. 152

Геодезический поток на таком M представляет собой динамическую систему (векторное поле ξ) на многообразии $T = T(M)$ линейных (единичных элементов к поверхности M — уровне энергии $H(x, p) = 1$. Оказывается, что каждый класс сопряженных элементов группы $\pi_1(M)$ определяет ровно одну периодическую траекторию. Характерной особенностью метрики отрицательной кривизны является «экспоненциальное» поведение геодезических: пусть $\gamma(t)$ — интегральная траектория поля ξ на T (т. е. геодезическая на M). Тогда можно найти семейство геодезических,

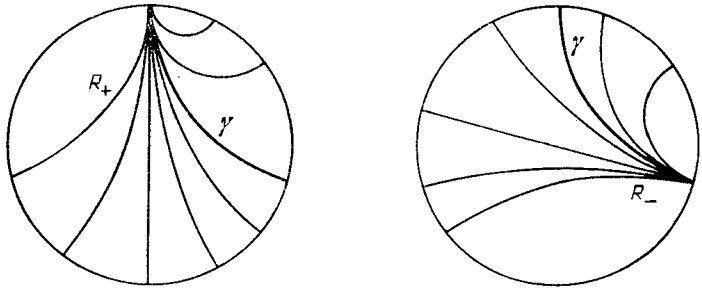


Рис. 153

экспоненциально быстро приближающихся к $\gamma(t)$ при $t \to +\infty$. Это — поверхность в T, содержащая в себе $\gamma(t)$. Обозначим эту поверхность через $R_+(\gamma)$. Аналогично определяется поверхность $R_-(\gamma)$ для $t \to -\infty$ (рис. 152). Точное определение поверхностей R_+ и R_- таково: на универсальной накрывающей поверхности M — плоскости Лобачевского L^2 — поверхность $R_\pm$ состоит из геодезических, входящих в одну и ту же точку абсолюта (рис. 153) при $t \to \pm\infty$.

Пересечение $R_-(\gamma) \cap R_+(\gamma)$ есть в точности геодезическая γ. Возникает интересная ситуация: каждая траектория $\gamma \subset T$ лежит на двух поверхностях $R_+(\gamma) \supset \gamma$ и $R_-(\gamma) \supset \gamma$; таким образом, компактное многообразие T «расслоено» на два семейства поверхностей R_+ и R_- со свойствами, перечисленными выше. Однако динамическая система неинтегрируема, т. е. не имеет первых интегралов (более того, каждая из поверхностей R_+, R_- и «почти каждая» из траекторий γ геодезического потока всюду плотно заполняет T; мы этого доказывать не будем). Семейства поверхностей R_+ и R_- на T дают весьма любопытный пример «двумерных слоений», о которых мы скажем позднее.

Задача. Докажите, что слои R_+ или R_- могут быть (топологически) либо плоскостями $\mathbb{R}^2$, либо цилиндрами $S^1 \times \mathbb{R}^1$. (На слоях R_+ и R_- топология строится так: нужно брать конечные пересечения связных компонент множеств, открытых в R_+ или в R_- в индуцированной топологии.)

4. Теорема Лиувилля. Геодезические потоки иногда допускают «лишние» интегралы движения, например, если метрика на многообразии M имеет нетривиальную группу движений (однородные пространства, поверхности вращения) и в некоторых других особых случаях. При наличии лишних интегралов, разумеется, ни одна траектория не может быть всюду плотной в многообразии T_1 единичных касательных векторов $\left(E = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle = \text{const}\right)$. Аналогичная ситуация возникает и в случае более общих гамильтоновых систем, если имеются «лишние» интегралы, кроме энергии. Важная теорема Лиувилля изучает тот случай гамильтоновых систем в $\mathbb{R}^{2n}$ с n степенями свободы (или на произвольном $2n$-мерном симплектическом многообразии M с формой Ω), когда имеется ровно n функционально независимых интегралов $H = f_1, f_2, \ldots, f_n$, скобки Пуассона которых попарно равны нулю.

Теорема 1 (Лиувилль). *Предположим, что система с гамильтонианом H имеет n интегралов $f_1 = H, f_2, \ldots, f_n$ с линейно независимыми попарно коммутирующими кососимметрическими градиентами* $\xi_j = J^{ab}\frac{\partial f_j}{\partial x^b}$ (*J_{ab} определяется равенством* $\Omega = J_{ab}dy^a \wedge dy^b$, *где y^a — локальные координаты*, $J^{ab}J_{bc} = \delta^a_c$). *Тогда*:

1) *Поверхности уровня интегралов $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$ представляют собой факторгруппы $\mathbb{R}^n$ по решеткам ранга $\leqslant n$; в частности, компактные неособые поверхности уровня являются n-мерными торами.*

2) *Если поверхность уровня $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$ компактна, то в ее окрестности можно ввести такие координаты $s_1, \ldots, s_n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(0 \leqslant \varphi_i < 2\pi)$ («действие — угол»), что*: (а) $\Omega = \sum_\alpha ds_\alpha \wedge$

$\bigwedge d\varphi_\alpha$ *или* $\{s_\alpha, s_\beta\} = \{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} = 0$, $\{s_\alpha, \varphi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$; (б) $s_\alpha = s_\alpha(f_1, \ldots, f_n)$, φ_α — *координаты на поверхностях* $f_j = \text{const}$; (в) *наша система имеет вид*

$$\dot{f}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \dot{s}_\alpha = 0, \qquad \dot{\varphi}_\alpha = \omega_\alpha(s_1, \ldots, s_n). \tag{20}$$

Доказательство. Поверхность $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$ представляет собой гладкое n-мерное многообразие; мы обозначаем его через $M^n(a_1, \ldots, a_n)$. Набор кососимметрических градиентов $\left(\xi_j^a\right) = J^{ab}\dfrac{\partial f_j}{\partial y^b}$ по условию линейно независим. При этом в силу условия $\{f_\alpha, f_\beta\} = 0$ все векторные поля ξ_j касаются поверхности $M^n(a_1, \ldots, a_n)$ и попарно коммутируют. Таким образом, на многообразии M и, в частности, на поверхности $M^n(a_1, \ldots, a_n)$ и ее окрестности действует группа $\mathbb{R}^n$ с генераторами ξ_j. Выберем начальную точку $x_0 \in M^n(a_1, \ldots, a_n)$ и выделим в $\mathbb{R}^n$ решетку: вектор $d \in \mathbb{R}^n$ принадлежит решетке, если d, действуя на x_0, снова дает x_0. Возникает подгруппа $\{d\} \subset \mathbb{R}^n$. Эта подгруппа дискретна и поэтому изоморфна решетке, натянутой на k векторов $\mathbb{R}^n$, где $k \leqslant n$. Очевидно, что лишь при $k = n$ мы получим компактное многообразие T^n. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства утверждения 2) сначала выберем начальную точку $x_0(a_1, \ldots, a_n)$, гладко зависящую от поверхности уровня в малой окрестности изучаемой поверхности. На данной поверхности уровня можно составить такие линейные комбинации η_j полей ξ_j, $\sum b_j^i \xi_i = \eta_j$, что вводимые с их помощью координаты в группе $\mathbb{R}^n$, действующей на $T^n = M^n(a_1, \ldots, a_n)$, совпадут с углами $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi$ ($\varphi_j = 0$ — это точка x_0). Коэффициенты b_j^i будут зависеть от набора $a_1, \ldots, a_n$ в окрестности избранной поверхности уровня. Таким образом,

$$\eta_j = b_j^i(f_1, \ldots, f_n)\,\xi_i.$$

Это вводит координаты $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ в целую область около $M^n(a_1, \ldots, a_n)$. В этой области имеем координаты $(f_1, \ldots, f_n, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$ и невырожденную матрицу скобок Пуассона

$$\begin{pmatrix} \{f_i, f_j\} = 0, & \{f_i, \tilde{\varphi}_j\} \\ \{\tilde{\varphi}_i, f_j\}, & \{\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A(f) \\ -A^{\mathrm{T}}(f) & B(f) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\det A \neq 0$.

Введем теперь переменные действия $s_i = s_i(f_1, \ldots, f_n)$, где $i = 1, \ldots, n$. Для фазового пространства $\mathbb{R}^{2n}$ с каноническими координатами $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ переменные действия имеют

вид

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_{k=1}^{n} p_k dq_k, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Здесь γ_i — i-й базисный цикл тора T^n,

$$\gamma_i\colon\ 0 \leqslant \tilde{\varphi}_i \leqslant 2\pi, \quad \tilde{\varphi}_j = \text{const} \qquad \text{при} \quad j \neq i.$$

Ясно, что попарные скобки Пуассона $\{s_i, s_j\} = 0$ при всех i, j, поскольку $\{f_i; f_j\} = 0$.

З а д а ч а. Докажите, что переменные действия $s_1, \ldots, s_n$ канонически сопряжены угловым переменным $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$:

$$\{s_i, \tilde{\varphi}_j\} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

В произвольном $2n$-мерном симплектическом многообразии M с формой

$$\Omega = J_{ab} dy^a \wedge dy^b$$

нужно действовать так: форма Ω обращается в нуль на торах T^n. Поэтому на некоторой окрестности тора T^n эта форма точная:

$$\Omega = d\omega.$$

Переменные действия имеют вид, аналогичный (22):

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \omega, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{24}$$

Положим теперь

$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i + b_i(s_1, \ldots, s_n). \tag{25}$$

Подберем b_i из условия $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$. Это всегда можно сделать, поскольку $\{\varphi_i, s_j\} = \delta_{ij}$. Координаты

$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i + b_i(f_1, \ldots, f_n) \tag{26}$$

на каждой поверхности уровня $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$ совпадут с выбранными ранее углами φ_i с точностью до сдвига. Матрица скобок Пуассона имеет вид

$$\{s_i, s_j\} = \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0, \quad \{\varphi_i, s_j\} = \delta_{ij}, \tag{27}$$

гамильтониан $H = f_1$ имеет вид

$$H = f_1(s_1, \ldots, s_n), \tag{28}$$

а форма Ω имеет вид $\Omega = \sum ds_\alpha \wedge d\varphi_\alpha$.

5. Примеры. Уже ранее (см. § 32 части I) мы сталкивались с примерами ситуации, указанной в теореме Лиувилля.

1. Системы с одной степенью свободы. Пусть поверхность уровня $H(x, p) = E$ компактна (рис. 154). Тогда мы имеем кано-

нические координаты («действие — угол»)

$$s(E) = \oint\limits_{H=E} p\,dx, \quad \varphi, \Omega = ds \wedge d\varphi,$$

$$H = H(s). \tag{29}$$

2. Частица в сферически симметричном потенциальном поле $U(r)$, $r = |x|$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ (см. § 32 части I). Имеем три интеграла:

$$f_1 = H, \quad f_2 = M_z,$$

$$f_3 = M^2 = \sum M_i^2. \tag{30}$$

Проверьте, что $\{f_i, f_j\} = 0$.

3. Геодезические на поверхности вращения (вокруг оси z) — см. § 31 части I. Имеем два интеграла:

$$f_1 = H = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad f_2 = p_\varphi = M. \tag{31}$$

Следствиями этих законов сохранения были, например, теорема Клеро и полная интегрируемость геодезического потока.

4. Рассмотрим более общие лагранжианы, обладающие высокой симметрией. Уже раньше, в части I (см. § 29), были найдены геодезические на сфере и плоскости Лобачевского. Другие примеры сферически симметричных лагранжианов дают релятивистские задачи: а) движение заряженной частицы в центральном поле сил с потенциалом α/r в специальной теории относительности (СТО); б) движение массивной пробной частицы в гравитационном поле Шварцшильда (см. § 39 части I) в общей теории относительности (ОТО).

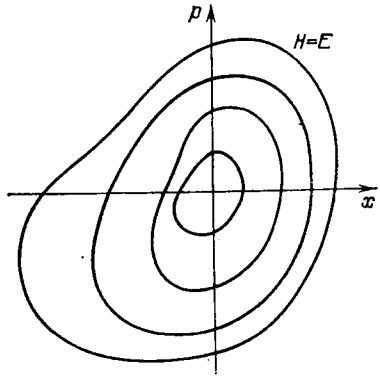


Рис. 154

а) В трехмерном формализме с лагранжианом $L_{\text{св}}^{(2)}$ при изложении СТО мы для движения частицы в потенциальном поле будем иметь следующий лагранжиан (см. § 32 части I):

$$L = mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{32}$$

В этом случае гамильтониан частицы имеет вид (см. §§ 32, 39 части I)

$$H(p) = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}, \tag{33}$$

где p — трехмерный импульс (p_1, p_2, p_3).

Движение в силу сохранения полного момента является плоским. Пусть оно происходит в плоскости (x, y) с координатами (r, φ).

Пусть $M = p_\varphi$. Тогда (см. § 32 части I)

$$p^2 = p_r^2 + \frac{M^2}{r^2}, \quad p = (p_r, p_\varphi),$$
$$H = \varepsilon = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r} = \text{const}. \tag{34}$$

В случае притяжения $\alpha < 0$. Если $Mc > |\alpha|$, то из (34) видно, что падение на центр невозможно, как и в классической механике. Если $Mc < |\alpha|$, то падение на центр возможно.

Для точного решения сферически симметричных плоских задач технически удобно воспользоваться уравнением Гамильтона — Якоби (см. § 35 части I). Пусть $p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$, $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$. Рассмотрим уравнение $E = H(x, p)$ в виде

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right). \tag{35}$$

В координатах (r, φ) ищем решение уравнения (35) в виде

$$S = -Et + M\varphi + f(r), \quad f = f(r, M, E). \tag{36}$$

Интегральная траектория $r(\varphi)$ определится уравнением $\frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}$.

Для гамильтониана (34)

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t} = c\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{37}$$

Для $S = -Et + M\varphi + f(r, M, E)$ имеем окончательно

$$S = -Et + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(E - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2}\, dr. \tag{38}$$

Траектория $r(\varphi)$ имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \varphi + \frac{\partial f}{\partial M} = \text{const}. \tag{39}$$

Зависимость от времени определяется из уравнения $\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const}$.

Задачи. 1. Докажите, что при $\alpha < 0$ и $Mc < |\alpha|$ решения представляют собой спирали с радиусом r, достигающим нуля за конечное время.

2. Пусть $\alpha < 0$ и $E < mc^2$. Покажите, что траектории, вообще говоря, не замкнуты. Найдите поправку к движению по эллипсам в классической механике.

б) Рассмотрим теперь задачу о движении частиц ненулевой массы $m > 0$ в метрике Шварцшильда (см. § 39 части I). В координатах t, r, θ, φ имеем при $r > a$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \quad (40)$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}g^{ab}p_ap_b, \qquad a,\ b = 0, 1, 2, 3. \quad (41)$$

Далее $g^{00} = (g_{00})^{-1} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}$, $g^{rr} = (g_{rr})^{-1} = 1 - \frac{a}{r}$. Движение плоское. Поэтому можно положить $\theta = \frac{\pi}{2}$. В координатах t, r, φ, $x^0 = ct$ получим для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial x^a}\frac{\partial S}{\partial x^b}g^{ab} = \text{const} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = g^{ab}p_ap_b. \quad (42)$$

Константа в правой части может быть отождествлена с величиной m^2c^2, так как (42) есть уравнение массовой поверхности. Как и в случае а), ищем действие S в виде

$$S = -Et + M\varphi + f(r, M, E).$$

Функции $r(t)$ и $r(\varphi)$ определятся из уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const}, \qquad \frac{\partial S}{\partial M} = \text{const}.$$

Подставляя вид (43) в уравнение (42), найдем траекторию:

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2}\left[\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right)\right]^{-1/2}dr. \quad (44)$$

Величина $E = cp_0$ может быть отождествлена с энергией частицы ($E > mc^2$).

Замечание. Устремляя в формуле (44) m к нулю, можно получить движение частиц нулевой массы — например, световых лучей в метрике Шварцшильда.

Зависимость r от t описывается уравнением

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{cdt} = \frac{1}{E}[E^2 - U^2(r)]^{1/2}, \quad m \neq 0, \quad (45)$$

где $U(r) = mc^2\left[\left(1 - \frac{a}{r}\right)\left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\right]^{1/2}$. Величина $U(r)$ называется

«эффективным потенциалом» при заданном моменте M. Условие $U(r) \leqslant E$ определяет при заданных M и E допустимые области движения (по r). График $\frac{U(r)}{mc^2}$ имеет вид, указанный на рис. 155.

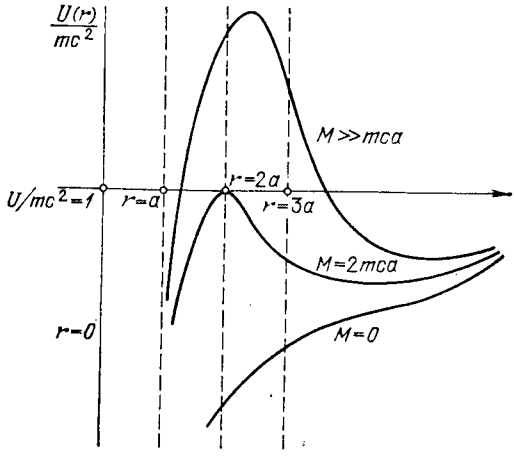


Рис. 155

Мы видим, что потенциал $U(r)$ может иметь максимум при величинах r (порядка) $2a$, в зависимости от M. При $r \to \infty$ имеем $U(r) \to 1$. Из рис. 155 видна, в частности, возможность «захвата» частиц гравитационным полем, т. е. движение $r(t)$, где $r(-\infty) = \infty$ и $r(+\infty)$ конечно.

§ 29. Слоения

1. Основные определения. Определение 1. 1) *k-мерным распределением* на n-мерном многообразии M называется гладкое поле k-мерных касательных направлений, т. е. функция, относящая каждой точке $x \in M$ линейное k-мерное подпространство касательного пространства T_xM. 2) Распределение называется *интегрируемым*, если через любую точку многообразия M проходит k-мерная интегральная поверхность, которая касается распределения в каждой своей точке. 3) Говорят, что на многообразии M задано *слоение* (размерности k), если многообразие M «расслоено» на k-мерные поверхности; это означает, что через каждую точку многообразия M проходит одна (и только одна) гладкая k-мерная поверхность, гладко (или непрерывно) зависящая от точки многообразия. Эти поверхности называются слоями слоения. Требуется, чтобы локально в многообразии около любой точки можно было ввести такие координаты $x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots$

..., y^{n-k}, что поверхности уровня $y^1 = a_1, \ldots, y^{n-k} = a_{n-k}$ задают слои слоения в этой окрестности, а $x^1, \ldots, x^k$ — локальные координаты на слоях слоения.

Слоения задаются интегрируемыми распределениями.

Пример 1. Одномерное распределение, которое уже встречалось выше, задается не обращающимся в нуль векторным полем или полем направлений. Одномерное гладкое распределение всегда интегрируемо в силу локальной теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, одномерное распределение всегда порождает слоение.

Пример 2. Пусть на n-мерном комплексном многообразии задано комплексное векторное поле (или поле одномерных комплексных направлений). В голоморфном случае, как и выше, это распределение всегда интегрируемо и порождает одномерное комплексное слоение. Рассмотрим, например, случай $n = 2$ и комплексное уравнение

$$\frac{dz}{dw} = \frac{P(z, w)}{Q(z, w)}, \tag{1}$$

где P и Q — многочлены степени m. Распределение $Q\,dz - P\,dw = 0$ порождает одномерное комплексное слоение на $\mathbb{C}^2$. Более того, производя подстановку

$$z = \frac{u_1}{u_0}, \quad w = \frac{u_2}{u_0},$$

получим одномерное комплексное слоение на многообразии $\mathbb{C}P^2 \supset \mathbb{C}^2$, задаваемой формой $\omega = Q\,dz - P\,dw$ (см. § 27 для $\mathbb{R}P^2$). Точки, в которых $P = Q = 0$, являются особыми для слоения (т. е. слоение задано фактически в дополнение к множеству этих точек).

Задача. Найдите особые точки на бесконечности.

Интересно исследовать поведение слоев комплексного слоения около невырожденной особой точки. Имеем

$$\begin{aligned} dz &= P(z, w)\,dt, \quad \dot z = P, \\ dw &= Q(z, w)\,dt, \quad \dot w = Q. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим особую точку $P = 0$, $Q = 0$. Пусть особой является точка $z = w = 0$, и пусть линейная часть

$$\begin{aligned} \dot z &= az + bw + \ldots; \\ \dot w &= cz + dw + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

невырождена, т. е. $ad - bc \neq 0$. В случае общего положения собственные значения различны, и мы можем линейной заменой

привести систему к виду

$$\dot{z} = \lambda_1 z + \ldots,$$
$$\dot{w} = \lambda_2 w + \ldots \qquad (4)$$

Пусть $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Исследуем чисто линейную систему $\frac{dz}{dw} = \lambda \frac{z}{w}$. Получим общее решение вида $z = aw^\lambda$, а также два слоя $A\,(z = 0)$ и $B\,(w = 0)$. Удалив особую точку (0, 0), получим неособое слоение в области $\mathbb{C}^2 \setminus 0$. Слои A и B неодносвязны (оба они имеют топологию $\mathbb{C} \setminus 0$).

Задача. Пусть $\gamma_1 \in \pi_1(A)$ и $\gamma_2 \in \pi_1(B)$ — образующие. Покажите, что оба элемента γ_1 и γ_2 являются предельными циклами слоения. Вычислите представление голономии

$$\gamma_i \to R_{\gamma_i}$$

(определения см. ниже в этом параграфе).

Замечание. Вопрос о приводимости системы (3) к чисто линейному виду комплексно аналитической заменой координат около особой точки (0, 0) более сложен и мы здесь его не обсуждаем.

Пример 3. Пусть имеется косое произведение (расслоение) с базой M, группой G, слоем F, пространством E и проекцией $p\colon E \to M$. Связность в косом произведении задавалась как семейство «горизонтальных» площадок $\mathbb{R}^n(y)$ в каждой точке $y \in E$ (см. § 24).

Задача. Проверьте, что распределение горизонтальных площадок в E интегрируемо (т. е. порождает n-мерное слоение) в том и только в том случае, если тензор кривизны связности тождественно равен нулю (см. условие интегрируемости ниже).

Если связность порождает интегрируемое распределение, то каждый слой W этого слоения локально изоморфно проектируется на базу. Таким образом, слои этого слоения — просто накрытия над M. Группа монодромии этого накрытия называется в данном случае «дискретной группой голономий»; см. § 19. Если база M односвязна, то слои W изоморфны многообразию M глобально.

Критерии интегрируемости k-мерного распределения, например, таковы.

1-я формулировка. Запишем локально задачу об интегрировании k-мерного распределения в виде

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = f^\alpha_\beta(x, y), \quad \alpha = 1, \ldots, n-k, \quad \beta = 1, \ldots, k, \qquad (5)$$

(«уравнения Пфаффа»).

Если слоение интегрируемо, то k-мерные слои (локально) изо-

бражаются вектор-функциями

$$y^\alpha(x^1, \ldots, x^k), \quad \alpha = 1, \ldots, n-k,$$

где $x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{n-k}$ — локальные координаты на многообразии M. Условие интегрируемости вытекает из условия

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} f^\alpha_\beta(x, y(x)) = \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^\alpha_\gamma(x, y(x)). \tag{6}$$

2-я формулировка. Рассмотрим два любых векторных поля ξ, η, касательных к k-мерному распределению в каждой точке. Если слоение интегрируемо, то коммутатор $[\xi, \eta]$ тоже должен касаться распределения. Это условие оказывается также достаточным (мы не доказываем достаточности сформулированных условий; их необходимость очевидна; проверьте!).

Задача. Докажите эквивалентность 1-й и 2-й формулировок условия интегрируемости.

Рассмотрим теперь другой особый случай слоений на n-мерных многообразиях — слоений, имеющих размерность слоев $k = n-1$ («слоения коразмерности 1»). Локально такое слоение задается 1-формой (или уравнением Пфаффа)

$$\omega = P_i(x)\,dx^i = 0; \tag{7}$$

в неособой точке функции P_i не все равны нулю. Если форма ω замкнута, то распределение (7) интегрируемо. Действительно, локально имеем $\omega = dH$ и уровни $H = \text{const}$ задают слоение. Если $f(x)$ — всюду ненулевая функция («интегрирующий множитель») и форма $f(x)\omega$ замкнута, то распределение также интегрируемо. В самом деле, уравнение Пфаффа $f(x)\omega = 0$ эквивалентно $\omega = 0$, так как $f \neq 0$.

Замечание. Более общо, можно сказать, что слоение коразмерности 1 задается в каждой окрестности U_j из некоторого покрытия многообразия M уравнением $\omega_j = 0$ вида (7), а в пересечениях $U_i \cap U_j$ имеем $f_{ij}(x)\omega_i = \omega_j$, где $f_{ij} \neq 0$.

Далее, заметим, что если $d(f\omega) = 0$, то $d\omega = -\left(\frac{df}{f}\right) \wedge \omega$. Отсюда мы имеем два вывода: 1) $d\omega$ делится на ω; 2) $\omega \wedge d\omega = 0$.

Задача. Докажите, что условие интегрируемости (неособого) распределения $\omega = 0$ эквивалентно любому из условий:

1) $d\omega$ делится на ω;

2) $\omega \wedge d\omega = 0$.

В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ форма ω записывается как ковекторное поле $P = (P_\alpha)$ и $d\omega$ — как $\operatorname{rot} P$; условие 2) приобретает вид

$$\langle P, \operatorname{rot} P \rangle = 0. \tag{8}$$

2. Примеры слоений коразмерности 1. 1. Пусть на компактном многообразии M задана замкнутая форма ω, $d\omega = 0$. Уравнение

$\omega = 0$ задает слоение коразмерности 1. Рассмотрим базис одномерных циклов $z_1, \ldots, z_q$ из группы $\bar{H}_1(M) = H_1/\mathrm{Tors}$, где Tors — кручение. Форма ω определяет набор «периодов»

$$\oint_{z_j} \omega = a_j, \qquad j = 1, \ldots, q.$$

Конечно, на универсальной накрывающей $\widehat{M} \xrightarrow{p} M$, $\pi_1(\widehat{M}) = 1$, форма $p^*(\omega)$ является точной:

$$p^*(\omega) = df. \tag{9}$$

Имеется, однако, меньшая накрывающая p_1: $M_1 \to M$, уже на которой форма $p_1^*(\omega)$ является точной. Пусть $A \subset \pi_1(M)$ — максимальная подгруппа группы π_1 такая, что для любого $z \in A$

$$\oint_z \omega = 0. \tag{10}$$

Очевидно, A содержит коммутант группы π_1; в частности, A — нормальный делитель. Рассмотрим такое накрытие p_1: $M_1 \to M$, что

$$\pi_1(M_1) = p_{1*}\pi_1(M_1) = A \subset \pi_1(M) \tag{11}$$

(см. § 19). Такое накрытие имеет группу монодромии

$$B = \sigma\pi_1(M) = \pi_1(M)/A. \tag{12}$$

Очевидно, что форма $p_1^*(\omega)$ на M_1 имеет нулевые периоды. Поэтому $p_1^*(\omega) = dg$, где g — числовая функция на M_1. Имеем

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} p_1^*(\omega). \tag{13}$$

Интеграл берется по любому пути на M_1, соединяющему точки x_0 и x, и не зависит от пути. Таким образом, исходное слоение на M после поднятия распределения на накрытие становится семейством поверхностей уровня функции $g(x)$, причем группа монодромии накрытия свободная абелева.

Примеры. 1. а) Пусть M — тор T^n с угловыми координатами $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, $0 \leqslant \varphi^j \leqslant 2\pi$. Рассмотрим форму

$$\omega = b_i d\varphi^i, \qquad b_i = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Задача. Покажите, что минимальное накрытие p_1: $M_1 \to T^n$, для которого $p_1^*\omega = dg$, имеет группу монодромии $\mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}$, где число слагаемых равно рангу набора $(b_1, \ldots, b_n)$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

б) Пусть M — компактная риманова поверхность (одномерное комплексное многообразие) и ω — голоморфный дифференциал,

имеющий локально вид $\omega = f(z)\,dz$, где $f(z)$ — аналитическая функция (без полюсов). Рассмотрим дифференциал $\operatorname{Re}\omega$, где локально

$$\operatorname{Re}\omega = \operatorname{Re}(f(z)\,dz) = \operatorname{Re}(u + iv)\,(dx + i\,dy) \tag{15}$$

($z = x + iy$, $f = u + iv$). Уравнение $\operatorname{Re}\omega = 0$ задает одномерное слоение на M.

Задача. Докажите, что особые точки этого одномерного слоения, если они невырождены, все являются седлами, и их число равно эйлеровой характеристике многообразия M. Исследуйте интегральные траектории этого одномерного слоения на гиперэллиптических римановых поверхностях вида

$$w^2 = P_{2n+1}(z) = \prod_{\alpha=0}^{2n} (z - z_\alpha), \quad z_\alpha \neq z_\beta. \tag{16}$$

Голоморфные дифференциалы ω (без полюсов) на этом многообразии имеют вид

$$\omega = \frac{Q(z)\,dz}{\sqrt{P_{2n+1}(z)}}, \tag{17}$$

где степень полинома Q не превышает $n - 1$. Покажите, что для почти всех наборов (z_α) и почти всех форм ω вида (17) найдется всюду плотная на M интегральная траектория. Исследуйте слоения, задаваемые формами, имеющими полюса, т. е. формами вида (17), у которых Q — рациональная функция. Какие особые точки отвечают полюсам формы ω?

2. Более сложные слоения, которые становятся семействами поверхностей уровня функции на некоторой (но уже неабелевой) накрывающей, мы фактически уже строили выше. Рассмотрим пространство единичных линейных элементов T над компактной поверхностью M^2_g с метрикой постоянной отрицательной гауссовой кривизны. В связи с геодезическими потоками определялись два слоения (двумерных) R_+ и R_- на T. Слои слоения R_+ состояли из геодезических, асимптотически сближающихся друг с другом при $t \to +\infty$ (для R_- — при $t \to -\infty$). Пересечение $R_+ \cap R_-$ — одна геодезическая. На универсальной накрывающей над M^2_g, которая есть плоскость Лобачевского L^2, слои R_+ состоят из геодезических, входящих в одну точку абсолюта при $t \to +\infty$ (см. рис. 154). Для T соответствующая накрывающая p_1: $T_1 \to T$ не универсальна — это пространство единичных линейных элементов над L^2, стягивающееся к слою S^1. Поэтому $\pi_1(T_1) = \mathbb{Z}$.

Задача. Покажите, используя информацию о замкнутых геодезических, что слоение R_+ (или R_-) является семейством поверхностей уровня числовой функции только на таких накрывающих p_2: $T_2 \to T$, что T_2 накрывает T_1. [Напомним структуру группы $\pi_1(T)$. В ней имеются образующие $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$,

τ и соотношения

$$\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = \tau^{2-2g}, \quad a_i\tau = \tau a_i, \quad b_i\tau = \tau b_i \tag{18}$$

(см. § 24). Группа монодромии накрытия $T_1 \to T$ совпадает с группой $\pi_1(M_g^2) = \pi_1(T)/(\tau)$. Это — неабелева группа.]

Слоения R_+ и R_- не имеют особых точек. Слои могут иметь разную топологию: очевидно, что слой R_+ стягивается к геодезической γ при $t \to +\infty$. Поэтому $R_+ \approx \mathbb{R}^2$, если геодезическая γ непериодична, и $R_+ \approx S^1 \times \mathbb{R}^1$, если она периодична. (Периодических траекторий при этом лишь счетное множество, как и классов сопряженности в $\pi_1(M_g^2)$.)

Замечание. Наличие пары слоений R_+ и R_- с указанными выше свойствами является характерным для геодезических потоков на компактных пространствах отрицательной кривизны и некоторых других. Это свойство является чрезвычайно важным в качественной теории динамических систем; оно приводит к ряду замечательных следствий, которые мы здесь не обсуждаем.

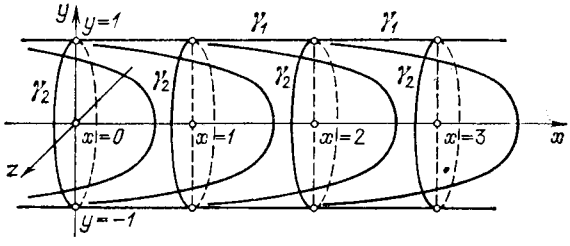


Рис. 156

3. Укажем геометрически простой пример двумерного слоения (Риба) в заполненном торе $D^2 \times S^1$, у которого граничный тор $T^2 = \partial(D^2 \times S^1)$ является целым слоем. Рассмотрим цилиндрическую область $U \subset \mathbb{R}^3$: $-\infty < x < \infty$, $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $U \cong D^2 \times \mathbb{R}^1$ (рис. 156). Слои, лежащие внутри цилиндра, получаются друг из друга сдвигом $x \to x + a$, где a — любое число. Граница также есть слой. Слои инвариантны также относительно преобразования

$$y \to -y, \quad z \to -z,$$
$$x \to x.$$

Слоение получается из рис. 156 вращением в плоскости (y, z) вокруг оси x. Производя отождествление $(x, y, z) \sim (x + 1, y, z)$, получим слоение Риба в $D^2 \times S^1$. Так как граница $\partial(D^2 \times S^1)$ есть слой — тор T^2, то можно из двух слоений Риба построить слоение на сфере

$$S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2),$$

склеивая их по границе.

Укажем важные топологические инварианты слоения — *«предельные циклы»* и *«исчезающие циклы»*. Рассмотрим слой W k-мерного слоения на компактном n-мерном многообразии M, точку $x_0 \in W$ и элемент γ группы $\pi_1(W, x_0)$, представленный гладкой замкнутой кривой γ на слое. В каждой точке $x \in \gamma$ построим трансверсальный к W диск D_x^{n-k}, гладко зависящий от

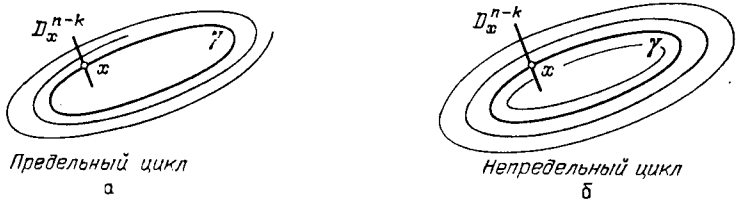


Рис. 157

точки x (рис. 157 для $k = n - 1$). Пересечения близких слоев W_y с семейством дисков D_x^{n-k} представляют собой кривые, дающие отображения «переноса вдоль γ»,

$$R_\gamma\colon D_{x_0}^{n-k} \to D_{x_0}^{n-k}. \tag{19}$$

Легко видеть, что отображение R_γ не меняется при деформации семейства дисков D_x^{n-k} и деформации кривой γ, где точка x_0 неподвижна (размер дисков мал). Возникает отображение $\gamma \mapsto R_\gamma$ группы $\pi_1(W, x_0)$ в группу «ростков преобразований» трансверсального диска $D_{x_0}^{n-k}$ в себя, определенных в достаточно малой окрестности нуля, размер которой несуществен. Представление $\gamma \mapsto R_\gamma$ называется «группой голономии» слоения на слое W. Если $\gamma \in \pi_1(W)$ таково, что $R_\gamma \neq 1$, то γ называется *предельным циклом* слоения. В особом случае $k = n - 1$ имеем отрезок $D_{x_0}^{n-k} = I$; точка $x_0 = 0$ разделяет отрезок I на две части. Поэтому здесь для гладких слоений возможны две ситуации (рис. 158).

В случае а) цикл γ называется *двусторонним* предельным циклом слоения. В случае б) цикл γ называется *«односторонним»* предельным циклом. Так как гладкость отображений R_γ определяется гладкостью слоения, то в аналитических слоениях коразмерности 1 случай б) невозможен.

В примерах слоений выше мы имели следующие ситуации (проверьте!):

1) если неособое слоение задано замкнутой формой $d\omega = 0$, $\omega = 0$, то предельных циклов оно не имеет;

2) для слоений R_+ и R_- (на пространстве T линейных элементов компактной поверхности) неодносвязные слои бывают лишь с $\pi_1(W) = \mathbb{Z}$; при этом образующая группы $\pi_1(W) = \mathbb{Z}$ есть двусторонний предельный цикл слоения $R_\pm$;

3) для слоения Риба в заполненном торе $D^2 \times S^1$ на граничном торе T^2 имеется $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ с образующими γ_1 и γ_2 (см. рис. 156); образующая γ_1 есть предельный цикл «изнутри» заполненного тора; образующая γ_2 не является предельным циклом «изнутри» области.

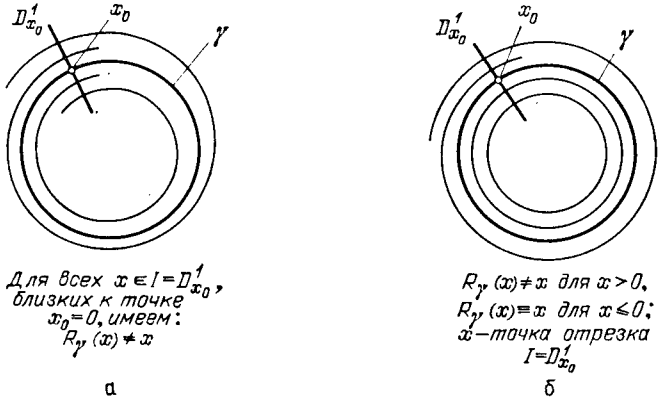


Рис. 158

Для слоения на сфере $S^3 = (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)$, полученного склейкой двух слоений Риба, оба цикла γ_1 и γ_2 на торе T^2 являются «односторонними предельными циклами». Таким образом, склейка этих двух слоений не может быть аналитической (хотя и может быть бесконечно дифференцируемой). Если элемент $\gamma \in \pi_1(W)$ не является предельным циклом (т. е. если $R_\gamma = 1$), то его можно «сдвинуть» на достаточно близкие слои — он останется замкнутой кривой на близких слоях. (Если $k = n - 1$, то достаточно, чтобы γ не был предельным циклом с одной стороны, и его можно сдвинуть в эту сторону.)

Определение 2. Элемент $\gamma \in \pi_1(W)$ называется *исчезающим циклом* слоения, если сдвиг на любой достаточно близкий слой делает его гомотопным нулю на этом слое, в то время как $\gamma \neq 1$ в $\pi_1(W)$.

Например, для слоения Риба (см. рис. 156) имеем $W = T^2$. Элемент γ_2 можно сдвинуть на слои внутрь области $D^2 \times S^1$ и сдвиг будет гомотопен нулю на всех близких слоях (все близкие слои диффеоморфны $\mathbb{R}^2$).

Замечание. Известны следующие факты: а) любое гладкое слоение коразмерности 1 на S^3 имеет односторонний предельный цикл и поэтому неаналитично. б) Любое гладкое слоение коразмерности 1 на S^3 имеет замкнутый слой, диффеоморфный T^2 и ограничивающий область $D^2 \times S^1$ со слоением Риба. в) Если универсальная накрывающая $\widehat{M}$ трехмерного многообразия M нестя-

гиваема и не диффеоморфна $S^2 \times \mathbb{R}$, то любое слоение коразмерности 1 на M имеет нетривиальные исчезающие циклы. г) Если слоение коразмерности 1 на трехмерном многообразии M не имеет предельных циклов, то найдется абелева накрывающая p_1: $M_1 \to M$ такая, что $M_1 = W \times \mathbb{R}^1(x)$ и слои слоения на M_1 — это поверхности $x = \text{const}$. Таким образом, $M = W \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$. Топологически эти слоения устроены так же, как слоения, задаваемые замкнутой невырожденной 1-формой (см. выше). Этих фактов мы не доказываем.

§ 30. Вариационные задачи с высшими производными. Гамильтоновы полевые системы

1. Гамильтонов формализм задач с высшими производными. На любом многообразии в принципе может быть поставлена вариационная задача отыскания экстремумов величины $S = \int L dt$, где лагранжиан L является скалярной функцией не только скорости $v = \dot{x}$, но и высших производных по времени: локально, в области координат $x^1, \ldots, x^n$ будем иметь $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(m)})$. Пусть $v_q^\alpha = \dfrac{d^q x^\alpha}{dt^q}$. Следующая лемма показывает, что в этой ситуации также возникает уравнение Эйлера — Лагранжа.

Лемма 1. *Уравнение* $\delta S = 0$ *эквивалентно следующему уравнению Эйлера — Лагранжа*:

$$\sum_{q=0}^{m} (-1)^q \frac{d^q}{dt^q}\left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha}\right) = 0. \tag{1}$$

Доказательство леммы производится обычным интегрированием по частям. Имеем

$$\delta S = \int \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha}\, \delta v_q^\alpha\right) dt. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что вариация $\delta x^\alpha(t)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль вне избранной малой окрестности. Далее по определению имеем

$$\delta v_q^\alpha = \frac{d^q}{dt^q}(\delta x^\alpha(t)). \tag{3}$$

Интегрируя q раз по частям слагаемое с множителем $\delta v_q^\alpha(t)$, получим

$$\delta S = \int \left(\sum_{q,\alpha} (-1)^q \frac{d^q}{dt^q}\left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha}\right)\right) \delta x^\alpha(t)\, dt. \tag{4}$$

Отсюда, как и в § 31 части I, ввиду произвольности вариаций δx^α следует уравнение (1).

Лемма доказана.

Величина $\sum (-1)^q \left(\frac{\partial L}{\partial v_q^\alpha}\right)^{(q)} = \frac{\delta S}{\delta x^\alpha (t)}$ называется *вариационной производной.*

Замечание. Для лагранжианов в теории поля мы уже встречали вариационный принцип Гильберта для уравнения Эйнштейна, в котором

$$S = \int R \sqrt{-g}\, d^4x,$$

и R зависит от полей $g_{ab}(x)$ со вторыми производными. Однако здесь вторые производные входили линейно. Можно избавиться от них с помощью несущественных добавок под интегралом. Кроме того, все другие лагранжианы, содержащие кривизну, также содержали вторые производные. Например, лагранжианы, имеющие тождественно нулевую вариационную производную,— характеристические классы (см. § 42, часть I и § 25).

Таким образом, из уравнений (1) видно, что они, вообще говоря, имеют порядок $2m$, где m — число производных в L. Оказывается, имеется некоторый аналог преобразования Лежандра, в невырожденном случае приводящий систему к гамильтоновой форме на пространстве размерности $2mn$, где n — размерность исходного многообразия M (теорема Остроградского). Имея в виду интересные приложения вариационных задач с производными больших порядков, мы рассмотрим лишь случай $n = 1$, где мы имеем дело с одной координатой u и ее производными $u', \ldots, u^{(m)}$. Независимую переменную (время) мы будем далее обозначать через $x, u' = \frac{du}{dx}$. Рассмотрим лагранжиан на прямой

$$L = L(u, u', \ldots, u^{(m)}). \tag{5}$$

Введем переменные

$$\begin{aligned}
&q_1 = u, \quad q_2 = u', \ \ldots, \quad q_m = u^{(m-1)};\\
&p_1 = \frac{\partial L}{\partial u'} - \left(\frac{\partial L}{\partial u''}\right)' + \ldots + (-1)^{m-1}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}\right)^{(m-1)};\\
&p_2 = \frac{\partial L}{\partial u''} - \left(\frac{\partial L}{\partial u'''}\right)' + \ldots + (-1)^{m-2}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}\right)^{(m-2)},\\
&\qquad\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\\
&p_m = \frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Пусть

$$H(p, q) = L - u'p_1 - u''p_2 - \ldots - u^{(m)}p_m. \tag{7}$$

Определение 1. Лагранжиан $L(u, u', \ldots, u^{(m)})$ называется *невырожденным*, если уравнения (6) могут быть однозначно разрешены в виде

$$u = u(p, q), \quad u' = u'(p, q), \ldots, u^{(2m-1)} = u^{(2m-1)}(p, q).$$

Лемма 2. *Если лагранжиан L имеет вид*

$$L = a(u^{(m)})^2 + \tilde{L}(u, u', \ldots, u^{(m-1)}), \tag{8}$$

то он невырожден.

Доказательство. Очевидно, что последнее из уравнений (6) в данном случае однозначно разрешимо в виде

$$p_m = 2au^{(m)}.$$

Для p_{m-1} имеем

$$p_{m-1} = \frac{\partial L}{\partial u^{(m-1)}} - \left(\frac{\partial L}{\partial u^{(m)}}\right)' = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^{(m-1)}} - p_m' = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^{(m-1)}} - 2au^{(m+1)}. \tag{9}$$

Заметим, что $u^{(\alpha)} = q_{\alpha+1}$, $\alpha = 0, \ldots, m-1$. Поэтому $p_{m-1} = f(q_1, \ldots, q_m) - 2au^{(m+1)}$ или $u^{(m+1)} = p_{m-1}/2a + f(q_1, \ldots, q_m)$. Очевидно, что так мы реним рекуррентно всю систему (6). Лемма доказана.

Наконец, имеет место

Теорема 1 (Остроградский). *Для невырожденных лагранжианов уравнение Эйлера — Лагранжа эквивалентно системе Гамильтона*

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

где $H(p, q) = L - u'p_1 - u''p_2 - \ldots - u^{(m)}p_m$.

Доказательство для простоты вычислений дадим в случае $m = 2$. Пусть $L = L(u, u', u'')$. Уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial u''} = 0. \tag{11}$$

Канонические переменные таковы:

$$\begin{aligned} q_1 &= u, & q_2 &= u', \\ p_1 &= \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u''}, & p_2 &= \frac{\partial L}{\partial u''}. \end{aligned} \tag{12}$$

Потребуем, чтобы из последнего уравнения можно было выразить u'' в виде

$$u'' = f(q_1, q_2, p_2)$$

(условие невырожденности лагранжиана). Гамильтониан имеет вид

$$H = p_1u' + p_2u'' - L(u, u', u'') = p_1q_2 + p_2q_2' - L(q_1, q_2, q_2') = \\ = p_1q_2 + \Phi(q_1, q_2, p_2).$$

Из формул (12), очевидно, имеем

$$q_1' = u' = q_2 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad q_2' = u'' = \frac{\partial H}{\partial p_2},$$

$$p_2' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u''}\right) = -p_1 + \frac{\partial L}{\partial u'} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}.$$

Из (11) следует, что $\frac{dp_1}{dx} = \frac{\partial L}{\partial u}$; поэтому $p_1' = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$, и мы получаем гамильтонову систему (10) в фазовом пространстве с координатами q_1, q_2, p_1, p_2. Теорема доказана.

2. Примеры. Пусть $\mathscr{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\ (x)$ — оператор Штурма — Лиувилля с гладким потенциалом $u(x)$. Особенный интерес представляют случаи:

а) $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ $\left(\text{если } \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|(1+|x|)\,dx < \infty,\right.$ то этот потенциал называют *быстроубывающим*);

б) $u(x+T) = u(x)$ (*периодический потенциал*).

Рассмотрим пока чисто формально дифференциальное уравнение

$$\mathscr{L}\psi = \lambda\psi, \qquad \psi = \psi(x, \lambda), \tag{13}$$

где λ — «спектральный параметр». Уравнение (13) при замене $\chi(x, \lambda) = -i\frac{d \ln \psi}{dx}$ приводится к виду Риккати:

$$i\chi' + \chi^2 = \lambda - u. \tag{14}$$

Пусть $\lambda = k^2$. При $\lambda \to \infty$ уравнение (14) имеет решение в виде формального ряда по переменной $\sqrt{\lambda} = k$:

$$\chi(x, k) = k + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi_n(x)}{(2k)^n}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в уравнение Риккати (14), мы увидим следующее:

а) все $\chi_n(x)$ являются многочленами от u, u', u'', ..., $u^{(k)}$ с постоянными коэффициентами;

б) все $\chi_{2q}(x)$ являются полными производными и чисто мнимы; это отражает тот факт, вытекающий из уравнения Риккати (14), что

$$\chi_{\mathrm{Im}} = -\frac{1}{2}(\ln \chi_{\mathrm{Re}})', \tag{16}$$

где $\chi = \chi_{\mathrm{Re}} + i\chi_{\mathrm{Im}}$;

в) первые из полиномов $\chi_{2m+1}(x)$ с точностью до полных производных и несущественных множителей имеют вид

$$\chi_1(x) = u(x) + f_1', \quad \chi_3(x) = u^2 + f_3', \tag{17}$$
$$\chi_5(x) = \frac{u'^2}{2} + u^3 + f_5',$$
$$\chi_7(x) = \frac{u''^2}{2} - \frac{5}{2}u^2u'' + \frac{5}{2}u^4 + f_7'.$$

Введем лагранжианы

$$L_q(u, u', u'', \ldots) = \chi_{2q+3}(x) + f_{2q+3}'. \tag{18}$$

Можно показать, что все лагранжианы L_q невырождены. Изучим лагранжианы $L_q = \chi_{2q+3}(u, u', u'', \ldots)$ при $q \leqslant 2$. Эти лагранжианы обладают замечательным свойством: для каждого числа $q \geqslant 0$ найдется дифференциальный оператор A_q порядка $2q+1$, коэффициентами которого служат полиномы от $u, u', u'', \ldots$ (с постоянными коэффициентами), такой, что коммутатор $[\mathscr{L}, A_q] = \mathscr{L}A_q - A_q\mathscr{L}$ есть оператор умножения на скалярную функцию $f_q(u, u', u'', \ldots)$:

$$[\mathscr{L}, A_q] = f_q(u, u', u'', \ldots) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_q}{\delta u(x)}, \quad S_q = \int L_q dx. \tag{19}$$

Мы не доказываем здесь эти факты в общем виде. При $q = 0, 1, 2$ они проверяются прямым вычислением, которое приводит к следующим результатам:

$$[\mathscr{L}, A_0] = \mathscr{L}A_0 - A_0\mathscr{L} = f_0 = u' = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_0}{\delta u(x)},$$
$$S_0 = \int \frac{u^2}{2}\,dx, \quad A_0 = -\frac{\partial}{\partial x};$$
$$[\mathscr{L}, A_1] = \mathscr{L}A_1 - A_1\mathscr{L} = f_1 = 6uu' - u''' = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_1}{\delta u(x)},$$
$$S_1 = \int \left(\frac{u'^2}{2} + u^3\right)dx, \quad A_1 = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3\left(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u\right);$$
$$[\mathscr{L}, A_2] = \mathscr{L}A_2 - A_2\mathscr{L} = f_2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S_2}{\delta u(x)},$$
$$S_2 = \int L_2 dx = \int \left(\frac{u''^2}{2} - \frac{5}{2}u^2u'' + \frac{5}{2}u^4\right)dx,$$
$$A_2 = 16\frac{\partial^5}{\partial x^5} - 20\left(u\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u\right) + 30u\frac{\partial}{\partial x}u + 5\left(u''\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u''\right).$$

Таким образом, можно составить «уравнение коммутативности»:

$$[\mathscr{L}, A_q + c_1A_{q-1} + \ldots + c_qA_0] = 0. \tag{20}$$

Еще в 20-х гг. было открыто любопытное свойство коммутирующей пары операторов: они связаны алгебраическим соотношением $R(\mathscr{L}, A)=0$, определяющим некоторую риманову поверхность. Уравнение коммутативности является лагранжевым (это — современное наблюдение):

$$0=[\mathscr{L}, A]=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta S}{\delta u(x)}, \qquad (21)$$

$$S=S_q+\sum_{i\geqslant 1}^{n} c_i S_{q-i}. \quad S_j=\int \chi_{2j+3}\,dx.$$

Окончательно имеем уравнение коммутативности в виде

$$\frac{\delta S}{\delta u(x)}=0, \text{ где } S=S_q+c_1S_{q-1}+\ldots+c_qS_0+c_{q+1}S_{-1},$$

причем $S_{-1}=-\int u\,dx$. Исследуем это уравнение при $q\leqslant 2$. Здесь лагранжиан L зависит от u, u', u'': $L=L(u, u', u'')$. Итак, имеем лагранжианы

(А) $L=L_0+c_1L_{-1}=u^2+c_1u$;

(Б) $L=L_1+c_1L_0+c_2L_{-1}=\frac{u'^2}{2}+u^3+c_1u^2+c_2u$;

(В) $L=L_2+c_1L_1+c_2L_0+c_3L_{-1}=$

$$=\frac{u''^2}{2}-\frac{5}{2}u''u^2+\frac{5}{2}u^4+c_1\left(\frac{u'^2}{2}+u^3\right)+c_2u^2+c_3u.$$

Уравнение коммутативности

$$\frac{\delta}{\delta u(x)}\int L\,dx=0 \qquad (22)$$

принимает следующий вид:

(А) $u=-\frac{c_1}{2}$, если $q=0$,

(Б) $u''=3u^2+2c_1u+c_2=-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-V=u^3+c_1u^2+c_1u$

или

$$x-x_0=\int\frac{du}{\sqrt{u^3+c_1u^2+c_2u+d}} \qquad (23)$$

(удвоенная эллиптическая функция Вейерштрасса $2\wp(x)$), если $q=1$. Делая замену $u\to u+\text{const}$, мы без ограничения общности можем считать $c_1=0$.

(В) При $q=2$ систему удобно записать в гамильтоновой форме, следуя (6) и (7):

$$H(p, q)=L-u'p_1-u''p_2-\ldots-u^{(m)}p_m, \qquad (24)$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}.$$

Для интегрирования необходим еще один интеграл. Оказывается, в уравнениях коммутативности (21) имеется весьма интересная «скрытая симметрия», приводящая к полной интегрируемости.

3. Гамильтонов формализм полевых систем. При отсутствии диссипации энергии и термодинамической необратимости физические системы являются «консервативными». Современные представления о физически осмысленных системах состоят в том, что консервативные системы должны быть гамильтоновы. Однако, как показывают примеры, гамильтонов формализм может быть нетривиальным, не сводящимся к лагранжеву формализму. Дадим здесь некоторые сведения о теоретико-полевом гамильтоновом формализме. В его основе, как и в конечномерном случае, лежит важное понятие «скобки Пуассона». Рассмотрим далее функциональные пространства, состоящие из C^∞-гладких функций $u^j(x^1, \ldots, x^n)$ от n переменных, не уточняя их области определения и граничных условий. При этом будем использовать такое соглашение, что интеграл по всему пространству $\int (\ldots) d^n x$ от полной производной (полной дивергенции) всегда равен нулю в этом формальном исчислении, так как мы не обсуждаем граничных условий и все вариации финитны.

Скобка Пуассона определяется для функционалов от полей $u^1, \ldots, u^m$. Однако, следуя принятому в теоретической физике формализму, ее удобно записывать через «точечные функционалы», сосредоточенные на одном из полей в одной точке. Формально определяем скобку Пуассона как операцию $\{,\}$, задаваемую формулой

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = F^{ij}(x, y), \tag{25}$$

где кроме обычных i, j имеются непрерывные индексы x, y. Скобка Пуассона должна быть линейна по каждому аргументу, должна обладать свойством Лейбница (28.7), быть кососимметричной и, наконец, удовлетворять тождеству Якоби (28.8) (см. § 28). Напомним, что тождество Лейбница состоит в следующем: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$. Пусть $J = \int P(u, \nabla u, \ldots) d^n y$ — произвольный функционал. Вычислим скобку Пуассона $\{u^i(x), J\}$. Ввиду линейности имеем

$$\left\{u^i(x), \int P\, d^n y\right\} = \int \{u^i(x), P(y)\}\, d^n y,$$

$$\left\{u^i(x), \frac{\partial}{\partial y^k} v(y)\right\} = \frac{\partial}{\partial y^k}\{u(x), v(y)\}.$$

Пусть далее для упрощения обозначений в вычислениях рассматривается случай одного поля u и одной переменной x, хотя это и не важно. Из свойства Лейбница вместе с линейностью

вытекает

$$\{u(x),\ P(y)\} = \{u(x),\ u(y)\}\frac{\partial P}{\partial u}(y) +$$

$$+ \{u(x),\ u'(y)\}\frac{\partial P}{\partial u'}(y) + \ldots + \frac{\partial P}{\partial u^{(n)}}(y)\{u(x),\ u^{(n)}(y)\}.$$

Имеем

$$\{u(x),\ P(y)\} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\partial P}{\partial u^{(k)}}(y)\frac{\partial^k}{\partial y^k}\{u(x),\ u(y)\}.$$

Так как $(fg)' = f'g + fg'$, окончательно получим

$$\left\{u(x),\ \int P dy\right\} = \int\{u(x),\ u(y)\}\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{\partial P}{\partial u^{(k)}}\right)dy,$$

или

$$\{u^i(x),\ J\} = \int\{u^i(x),\ u^k(y)\}\frac{\delta J}{\delta u^k(y)}d^n y. \tag{26}$$

Формула (26) верна для любого числа полей и любого числа переменных. Доказательство полностью аналогично.

Из формулы (26) вытекает такая формула для скобки пары функционалов J_1, J_2:

$$\{J_1,\ J_2\} = \int\frac{\delta J_1}{\delta u^i(x)}\frac{\delta J_2}{\delta u^k(y)}\{u^j(x),\ u^k(y)\}\,d^n x d^n y, \tag{27}$$

где

$$\delta J = \int\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}\delta u^j(x)\,d^n x$$

(по определению все вариации $\delta u^j(x)$ финитны).

Определение 2. Скобка Пуассона (25) называется *локальной*, если она задана конечной суммой

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\} = F^{ij}(x,\ y) = \sum_k B_k^{ij}\partial_x^k\delta(x-y), \tag{28}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_j \geqslant 0$, $\partial_x^k = \partial_{1x}^{k_1}\ldots\partial_{nx}^{k_n}$, $\partial_{jx} = \partial/\partial x^j$. Символ $\delta(x-y) = \prod_{i=1}^{n}\delta(x^i - y^i)$ представляет собой обычную δ-функцию (ядро единичного оператора)

$$\int f(x)\,\delta(x-y)\,d^n x = f(y),$$

$$\int f(x)\,\partial_x^k\delta(x-y)\,d^n x = (-1)^{k_1+\ldots+k_n}\partial_y^k f(y).$$

Мы воспринимаем здесь все эти символы формально-алгебраически, не обсуждая функциональных пространств. Набор коэффи-

циентов B_k должен зависеть от полей u только в точке x и от конечного числа их производных в той же точке («принцип локальности»).

Обозначим через A дифференциальный оператор

$$A = (A_x^{ij}) = \sum_k B_k^{ij}(u)\,\partial_x^k,$$

где сумма считается конечной. Из формулы (26) имеем

$$\{u^i(x),\ J\} = \int \{u^i(x),\ u^j(y)\}\,\frac{\delta J}{\delta u^j(y)}\,d^n y =$$

$$= \int \left(A_x^{ij}\,\delta(x-y)\right)\frac{\delta J}{\delta u^j(y)}\,d^n y =$$

$$= \int \delta(x-y)\left(A^*\,\frac{\delta J}{\delta u(y)}\right)d^n y = (A^*)^{ij}\,\frac{\delta J}{\delta u^j(y)},$$

где A^* — сопряженный оператор, $(v(x)\partial_j)^* = -\partial_j(v(x)\ldots)$. Учитывая косую симметрию скобки Пуассона $A^* = -A$, получаем

$$\{u^i(x),\ J\} = -A^{ij}\frac{\delta J}{\delta u^j(x)}. \tag{29}$$

Аналогично для пары функционалов в силу (27) верна формула

$$\{J_1,\ J_2\} = \int \frac{\delta J_1}{\delta u^i(x)}\,A^{ij}\,\frac{\delta J_2}{\delta u^j(x)}\,d^n x, \tag{30}$$

где интегрирование по y выполняется тривиально в силу свойств δ-функции. Проверка тождества Якоби для произвольной скобки Пуассона вида (30), заданной матричным оператором $A = (A^{ij})$, сложнее. Ясно, однако, что для операторов A, коэффициенты которых «постоянны» — т. е. не зависят от полей u и их производных (они могут явно зависеть от x),— тождество Якоби выполнено. Это — буквальный аналог скобок Пуассона с постоянными коэффициентами в конечномерном случае.

Простейшие примеры. Постоянные скобки.

1. *Лагранжева скобка.* Пусть заданы поля $p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n$ со скобками

$$\begin{aligned} &\{p_i(x),\ p_j(y)\} = \{q^i(x),\ q^j(y)\} = 0,\\ &\{q^i(x),\ p_j(y)\} = \delta_j^i\delta(x-y). \end{aligned} \tag{31}$$

Такая скобка Пуассона возникает из невырожденных функционалов вида

$$S\{q\} = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial x^\alpha}\right)d^n x\,dt,$$

$$p_j(x) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot q^j},\quad \dot q^j = \frac{\partial q^j}{\partial t}.$$

Согласно формулам (6), (7) можно легко обобщить это и на лагранжианы с производными больших порядков. Если взять гамильтониан

$$P_0 = \mathscr{H} = \int T_0^0 d^n x = \int (p_j \dot{q}^j - \Lambda)\, d^n x, \tag{32}$$

то уравнения Эйлера — Лагранжа приобретут гамильтонов вид (проверьте!)

$$\begin{aligned} \dot{p}_j(x) &= \{p_j(x),\ \mathscr{H}\} = -\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta q^j(x)}, \\ \dot{q}^j(x) &= \{q^j(x),\ \mathscr{H}\} = \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta p_j(x)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Компоненты полного импульса

$$P_\alpha = \frac{1}{c}\int T_\alpha^0 d^n x = \frac{1}{c}\int p_j \frac{\partial q^j}{\partial x^\alpha} d^n x \tag{34}$$

являются генераторами групп сдвигов по координатам x^α, если принять их за гамильтонианы (проверьте!).

2. *Уравнение Кортевега — де Фриза* (КдФ). Мы имеем одно поле $u(x)$ и скобку

$$\{u(x),\ u(y)\} = \delta'(x-y). \tag{35}$$

Эта скобка обладает «аннулятором» I_0, т. е. таким функционалом, что

$$\{u(x),\ I_0\} = 0, \quad I_0 = \int u\, dx.$$

Импульс (генератор сдвигов по x) имеет вид

$$P = \int \frac{1}{2} u^2\, dx, \quad \{u(x),\ P\} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{36}$$

Гамильтониан вида (37) порождает известное уравнение КдФ

$$-\mathscr{H} = \int \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 + \frac{c}{2} u^2\right) dx. \tag{37}$$

Уравнение КдФ таково:

$$\dot{u}(x) = \{u(x),\ \mathscr{H}\} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta \mathscr{H}}{\delta u(x)} = 6uu_x - u_{xxx} + cu_x. \tag{38}$$

Задача. Докажите, что все величины (17) порождают законы сохранения для КдФ, т. е. для $S_q = \int L_q\, dx$ в силу КдФ имеем $\dot{S}_q = 0$. Докажите, что $\{S_q,\ S_l\} = 0$, $\mathscr{H} = S_1 + cS_0$.

Как и в конечномерном гамильтоновом формализме (см. § 34 части I), основным нетривиальным свойством скобок Пуассона, для которого нельзя обойтись без тождества Якоби (кроме остальных, более простых свойств), является следующее. Пусть име-

ются три функционала J_1, J_2, $J_3 = \{J_1, J_2\}$. Они задают три гамильтоновых векторных поля («потоки») на функциональном пространстве по формуле

$$\frac{\partial u^j(x)}{\partial t_\alpha} = \{u^j(x),\ J_\alpha\}, \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3.$$

Тогда коммутатор первых двух потоков равен третьему. Если $\{J_1, J_2\} = 0$, то порожденные ими потоки коммутируют.

«Аннулятором» скобки Пуассона называют совокупность функционалов, имеющих нулевую скобку с любым функционалом. Невырожденные скобки не имеют нетривиального аннулятора.

Интересные примеры скобок Пуассона возникают в гидродинамике. Будем исходить из алгебры Ли L_n векторных полей в $\mathbb{R}^n$, состоящей из полей с нулевой дивергенцией:

Имеем (см. § 23 части I)

$$[v,\ w]^k = v^i \partial_i w^k - w^i \partial_i v^k,$$

где $v = v^i e_i$, $w = w^i e_i$, $[e_i,\ e_j] = 0$. На языке структурных констант для набора компонент — полей $v^i(x)$, $w^j(y)$ — их коммутатор таков:

$$[v,\ w](z) = \int\int c_{ij}^k(x,\ y,\ z)\, v^i(x)\, w^j(y)\, e_k d^n x d^n y, \tag{39}$$

поэтому

$$c_{ij}^k(x,\ y,\ z) = \delta_j^k \delta(x - z)\, \delta_i(x - y) - \delta_i^k \delta(y - z)\, \delta_j(y - x). \tag{40}$$

Сопряженное пространство L_n^* имеет своими координатами поля $p_j(x)$, где выражения (скалярные произведения)

$$\int p_j(x)\, v^j(x)\, d^n x \tag{41}$$

не меняются при гладких заменах переменных x. Таким образом, величина $p = (p_1, \ldots, p_n)$ с точки зрения теории тензоров является плотностью ковектора, которая при заменах $x(x')$ дополнительно умножается на якобиан J. Будем называть величину p *плотностью импульса*. Скобка Пуассона имеет вид

$$\{p_i(x),\ p_j(y)\} = \int c_{ij}^k(x,\ y,\ z)\, p_k(z)\, d^n z =$$

$$= p_i(y)\, \delta_j(x - y) - p_j(x)\, \delta_i(y - x). \tag{42}$$

Сопряженное пространство L_n^{0*} имеет вид фактора:

$$L_n^{0*} = L_n^*/(p_j = \partial_j \varphi), \tag{43}$$

так как для плотностей вида $p_j = \partial_j \varphi$ имеем

$$\int (\partial_j \varphi)\, v^j\, d^n x = -\int \varphi\, (\partial_j v^j)\, d^n x \equiv 0$$

в силу условия $\partial_j v^j \equiv 0$ для $v \in L_n^0$. Уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости с плотностью $\rho = \text{const}$ задаются гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \int \frac{p^2}{2\rho} d^n x \tag{44}$$

на фазовом пространстве L_n^{0*}, $\partial_i v^i = 0$, при условии $p_i = \rho v^i$ в евклидовой метрике. Эти уравнения пишут обычно на всем L_n в виде системы

$$\dot{p}_i = \rho \dot{v}^i = \rho \left(v^h \partial_h\right) v_i + \frac{1}{2} \partial_i \rho v^2 + \partial_i P, \tag{45}$$

$$\partial_i v^i = 0,$$

где P — давление, определяемое из формулы (45).

Для сжимаемой жидкости следует рассмотреть расширение алгебры L_n «внутренними переменными». На языке полей следует добавить новые полевые переменные — плотность массы ρ и плотность энтропии s — со скобками

$$\begin{aligned} &\{p_i(x),\ \rho(y)\} = \rho(x)\,\delta_i(x-y), \\ &\{p_i(x),\ s(y)\} = s(x)\,\delta_i(x-y), \\ &\{s(x),\ s(y)\} = \{\rho(x),\ \rho(y)\} = \{s(x),\ \rho(y)\} = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Гамильтониан имеет вид (в евклидовом пространстве)

$$\mathscr{H} = \int \left[\frac{p^2}{2\rho} + \varepsilon_0(\rho,\ s)\right] d^n x, \quad \rho v_i = p_i.$$

Задачи. 1. Покажите, что $\{v_i(x),\ v_j(y)\} = \frac{1}{\rho}(\partial_i v_j - \partial_j v_i)\delta(x - y)$.

2. Рассмотрим подстановку («переменные Клебша»)

$$p_i = \rho \partial_i \psi + s \partial_i \alpha$$

в размерности $n = 2$. Покажите, что скобки имеют вид (выписаны все ненулевые)

$$\{\rho(x),\ \psi(y)\} = \{s(x),\ \alpha(y)\} = \delta(x - y).$$

Исследуйте вопрос о возможности глобального задания переменных Клебша.

3. Для $n = 3$ рассмотрим подстановку

$$p_i = \rho \partial_i \psi + s \partial_i \alpha + \beta \partial_i \gamma$$

со скобками (выписаны ненулевые)

$$\{\rho(x),\ \psi(y)\} = \{s(x),\ \alpha(y)\} = \{\beta(x),\ \gamma(y)\} = \delta(x - y).$$

Покажите, что эта скобка Пуассона согласована с (46). Иссле-

дуйте «калибровочную группу» — неоднозначность введения переменных Клебша ρ, ψ, s, α, β, γ.

4. Пусть $n=3$ и жидкость баротропна, т. е. $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\rho)$, и в изучаемых процессах энтропия исключается как полевая переменная. Пусть $p_i=\rho\partial_i\psi+\alpha\partial_i\beta$. Исследуйте возможность глобального введения переменных Клебша ρ, ψ, α, β.

Для любого тензорного поля $T(x)$ можно ввести скобки Пуассона $\{p_i(x), T(y)\}$, исходя из такого требования «вмороженности»: любой гамильтониан вида

$$\mathscr{H}_w=\int w^i(x)\,p_i(x)\,d^nx$$

порождает для поля $T(y)$ уравнение

$$\dot{T}(x)=\{T(x), \mathscr{H}_w\}=L_wT(x), \tag{47}$$

где правая часть является производной Ли тензорного поля T вдоль поля w. Дополняя (47) требованием $\{T(x), T(y)\}=0$, мы получим расширение алгебры скобок Пуассона однозначным образом. Особо интересный случай — это магнитное поле $T=H_{ij}$ (замкнутая 2-форма в $\mathbb{R}^3$). Плотности массы и энтропии — это 3-формы в $\mathbb{R}^3$. Их отношение $s\rho^{-1}$ — это скаляр в $\mathbb{R}^3$. Гамильтониан (48) вместе с указанной скобкой порождает уравнения магнитной гидродинамики, где поле «вморожено» в жидкость,

$$\mathscr{H}=\int\left(\frac{p^2}{2\rho}+\varepsilon_0(\rho,\ s)+\frac{H^2}{8\pi}\right)d^3x. \tag{48}$$

Рассмотренные здесь скобки Пуассона являются частным случаем более общих «дифференциально-геометрических» скобок.

Определение 3. Однородные дифференцильно-геометрические скобки для набора полей $u^1(x), \ldots, u^n(x)$ имеют вид

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\}=g^{ij,\alpha}(u(x))\,\partial_\alpha\delta(x-y)+b_k^{ij,\alpha}(u(x))\,u_\alpha^k\delta(x-y), \tag{49}$$

где $u_\alpha^k=\partial_\alpha u^k(x)$, $x=x^1, \ldots, x^m$, $\alpha=1, \ldots, m$, $i, j=1, \ldots, n$.

Неоднородные дифференциально-геометрические скобки задаются формулой

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\}=$$
$$=g^{ij,\alpha}(u(x))\,\partial_\alpha\delta(x-y)+\left[b_k^{ij,\alpha}(u(x))\,u_\alpha^k+c^{ij}(u(x))\right]\delta(x-y). \tag{50}$$

Функционалами гидродинамического типа естественно называть величины вида

$$\mathscr{H}=\int h(u)\,dx$$

с плотностью, не зависящей от производных. Такие гамильтонианы вместе со скобкой (49) порождают *уравнения гидродинами-*

ческого типа

$$\dot{u}^i = \{u^i(x),\ \mathscr{H}\} = a_j^{i,\alpha}(u)\, u_\alpha^j. \tag{51}$$

Скобки (49), класс функционалов гидродинамического типа и уравнения вида (51) инвариантны относительно локальных замен переменных $u = u(v)$, не содержащих производных.

Лемма 3. *При локальных заменах* $u = u(v)$ *все* $g^{ij,\alpha}$ *(при фиксированном* α*) преобразуются как тензоры типа* (2,0) *в и-пространстве, а компоненты* $b_k^{ij,\alpha}$ *преобразуются как символы Кристоффеля* $b_k^{ij,\alpha} = g^{is,\alpha}\Gamma_{sk}^{j,\alpha}$, *если* $g^{ij,\alpha}$ *невырождена.*

Лемма легко следует из свойства Лейбница.

Рассмотрим более детально одномерный по x случай $m = 1$. Пусть $\det g^{ij} \neq 0$.

Теорема 2. *Скобка Пуассона* (49) *обладает всеми свойствами (включая тождество Якоби) тогда и только тогда, когда «метрика»* g^{ij} *симметрична, связность* Γ_{jk}^i *согласована с этой метрикой и имеет нулевую кривизну и кручение.*

Следствие. *Скобки Пуассона вида* (49) *при* $m = 1$ *определяются одним инвариантом (локально) — сигнатурой метрики* $g^{ij} = g^{ji}$, $\det g^{ij} \neq 0$. *Найдутся локальные координаты в и-пространстве такие, что* $g^{ij} = \text{const}$, $b_k^{ij} = 0$.

Доказательство этих фактов мы не приводим; оно требует некоторых вычислений. Оказывается, гамильтоновость систем вида (51) для $m = 1$ вместе с «диагонализуемостью», т. е. приводимостью матрицы $a_j^i(u)$ к диагональному виду в целой области, достаточна для интегрируемости уравнений вида (51) по Лиувиллю в некотором точном смысле. Для случая $n = 2$ (двухкомпонентные системы) ряд фактов известен еще с XIX века (по-видимому, начиная с Римана); они сводятся к простому утверждению:

Задача. 1) Докажите, что для функций $x = x(u^1, u^2)$, $t = t(u^1, u^2)$ уравнения (51) линейны (*преобразование годографа*). 2) Докажите, что при $n = 2$ система (51) диагонализуется локальной заменой $u(v)$.

Для числа полей $n > 2$ обобщение метода годографа найдено совсем недавно и в отличие от классического случая $n = 2$ существенно опирается на гамильтоновость. Рассмотрим две коммутирующих гамильтоновых системы вида (51) для $m = 1$:

$$u_t = v_j^i(u)\, u_x^j,$$
$$u_t = w_j^i(u)\, u_x^j,$$

где v_j^i диагональна, $v_j^i = \delta_j^i v^i(u)$, $v^1 \neq v^2 \neq \ldots \neq v^n$. Тогда $w_j^i(u)$ также диагональна (проверьте!). Следующая система уравнений:

$$w^i(u) = v^i(u)\, x + t, \text{ где } w_j^i = w^i \delta_j^i, \tag{52}$$

определяет набор функций

$$u^1(x, t), \ldots, u^n(x, t). \tag{53}$$

Оказывается, набор функций (53) — решений системы (52) — удовлетворяет уравнению $u_t^i = v_j^i(u) u_x^j$. Это и есть обобщенный метод годографа.

Для неоднородных скобок (50) при $m = 1$ и условии $\det g^{ij} \neq 0$ верна

Теорема 3. *Величина $c^{ij}(u)$ имеет вид*

$$c^{ij}(u) = c_k^{ij} u^k + c_0^{ij}, \tag{54}$$

где $c_k^{ij} = \text{const}$, $c_0^{ij} = \text{const}$ в координатах u^k, где $g^{ij} = \text{const}$, $b_k^{ij} \equiv 0$. При этом c_k^{ij} — тензор структурных констант полупростой алгебры Ли с метрикой Киллинга g^{ij}, а c_0^{ij} — коцикл на этой алгебре, т. е. верно тождество

$$c_0^{is} c_s^{jk} + c_0^{ks} c_s^{ij} + c_0^{js} c_s^{ki} = 0. \tag{55}$$

Доказательство этой теоремы несложно провести в координатах, где $g^{ij} = \text{const}$, $b_k^{ij} \equiv 0$.

Многомерный случай и другие обобщения этой теории мы здесь обсуждать не будем.

Глава 8

ГЛОБАЛЬНАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

§ 31. Некоторые многообразия общей теории относительности (ОТО)

1. Постановка задачи. Задача ОТО с точки зрения геометрии состоит в нахождении четырехмерных многообразий M^4 с метрикой g_{ab} сигнатуры $(+, -, -, -)$, удовлетворяющей уравнению Эйнштейна

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \tag{1}$$

где T_{ab} — тензор энергии-импульса материи. С общей точки зрения имеется лишь одно ограничение на тензор T_{ab}: если $\xi = (\xi^a)$ — любой времениподобный вектор, $\xi^a \xi^b g_{ab} > 0$, то должно быть $T_{ab}\xi^a\xi^b \geqslant 0$ (условие положительности плотности энергии).

Фактически мы будем рассматривать главным образом лишь так называемый гидродинамический тензор энергии-импульса (см. § 39 части I)

$$T_{ab} = (p + \varepsilon) u_a u_b - p g_{ab}, \tag{2}$$

важный для отыскания гравитационных полей макроскопических тел; здесь $u = (u_a)$ — вектор 4-скорости, $\langle u, u\rangle = 1$, p — давление, ε — плотность энергии.

Вообще говоря, анализ уравнений (1) представляет собой трансцендентно сложную задачу. Однако в ряде случаев, когда отыскивается метрика с большой группой движений G, действующей на M^4, уравнение (1) в удобной локальной системе координат приводится к сравнительно простому виду, допускающему точное решение или хотя бы качественное исследование. При этом всегда возникает вопрос о том, в какой мере полно мы нашли решение: найдено все многообразие M^4 или только область на нем? Простейшим и весьма фундаментальным случаем, когда чисто координатный подход привел к нахождению лишь одной области на M^4, является релятивистский аналог поля точечной массы — «решения Шварцшильда» (см. § 39 части I). Дадим некоторые определения.

Определение 1. Функция $f(x)$ на M^4 называется а) *времениподобной*; б) *пространственноподобной*; в) *световой* или *изотропной* в точке $x \in M^4$, если:

а) $g^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial x^b} > 0$, т. е. $\langle \nabla f, \nabla f\rangle > 0$;

б) $g^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial x^b} < 0$, т. е. $\langle \nabla f, \nabla f\rangle < 0$;

в) $g^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial x^b} = 0$, т. е. $\langle \nabla f, \nabla f\rangle = 0$.

Здесь $\nabla f = \operatorname{grad} f$.

Например, если $f(x) = x^a$, то

$$\langle \nabla f, \nabla f\rangle = g^{ab}\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial f}{\partial x^b} = g^{aa}.$$

Скалярный квадрат $\langle \nabla f, \nabla f\rangle$ мы будем часто обозначать через g^{ff}.

2. Сферически симметричные решения. Определение 2. Многообразие M^4 с метрикой Эйнштейна g_{ab} называется *сферически симметричным*, если оно обладает группой движений $G = SO(3)$ с двумерными орбитами S^2. Эти орбиты обязательно пространственноподобны, так как стационарная подгруппа группы $SO(3)$ действует на касательном пространстве к точке сферы S^2 изотропно, в то время как времениподобное направление одномерно. Факторпространство $M^4/SO(3)$ обозначим через M^2 — это двумерное пространство параметров, нумерующих орбиты группы. Получаем расслоение

$$p\colon M^4 \to M^2 \tag{3}$$

со слоем $S^2 = p^{-1}(x)$, $x \in M^2$, где S^2 — орбиты группы $SO(3)$ на M^4. На расслоении (3) имеется связность: горизонтальные площадки этой связности по определению ортогональны к слоям — орбитам $SO(3)$ в метрике g_{ab}.

Лемма 1. *Эта связность тривиальна, т. е. интегрируема.*

Доказательство. Рассмотрим точку $y \in M^4$. Пусть $H_y \subset SO(3)$ — стационарная подгруппа точки y. На орбите группы $SO(3)$ неподвижная точка y группы H_y изолирована. Неподвижные точки группы H_y образуют двумерную поверхность в M^4, ортогональную к слоям. Тем самым мы «проинтегрировали» семейство ортогональных площадок к слоям (орбитам). Лемма доказана.

Пусть $U \subset M^2$ — окрестность точки базы $x \in M^2$ с координатами τ, R и метрикой вида

$$g_{00}d\tau^2 + g_{11}dR^2, \quad g_{00} > 0, \quad g_{11} < 0 \tag{4}$$

(т. е. τ и R ортогональны). Такие координаты в области на M^2

всегда можно выбрать. Пусть θ, φ — стандартные координаты на сфере S^2, в которых $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ — метрика единичной сферы, инвариантная относительно $SO(3)$. В силу леммы 1 во всей области $p^{-1}(U) \subset M^4$ вводятся координаты τ, R, θ, φ такие, что метрика Эйнштейна имеет вид

$$g_{00}d\tau^2 + g_{11}dR^2 - r^2 d\Omega^2, \quad r = r(R, \tau), \tag{5}$$

где g_{00} и g_{11} зависят только от (R, τ) и r — «размер орбиты». В силу леммы 1 формула (5) дает локально общую $SO(3)$-симметричную метрику на M^4, так как метрику базы M^2 всегда можно записать в виде (4).

При выводе решения Шварцшильда уравнения Эйнштейна (1) с $T_{ab} \equiv 0$ мы полагали (пусть $c = 1$)

$$\tau = t, \quad R = r \tag{6}$$

и получили ответ в виде (см. § 39 части I)

$$g_{00} = 1 - \frac{a}{r}, \quad g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{a}{r}}. \tag{7}$$

Эта формула действует корректно только при $r > a$ («область внешнего наблюдателя»). Формально можно рассмотреть эту формулу и при $r < a$. Здесь мы имеем:

а) функция r (радиальная координата) становится времениподобной: $g^{rr} > 0$;

б) функция t (временна́я координата) становится пространственноподобной: $g^{tt} < 0$.

При $r \to a$ из внешней области имеем

$$g^{rr} \to 0, \quad g^{tt} \to \infty, \quad r \to a. \tag{8}$$

Таким образом, функция t на M^4 вообще не может иметь смысла при $r = a$. Функция r на M^4, если имеет смысл, является световой при $r = a$. Впрочем, формулы (7) показывают, что сами координаты t, r, θ, φ при $r = a$ не имеют смысла. Однако координаты τ, R на базе M^2 можно выбрать иначе, чем в решении Шварцшильда (7). Решая уравнения Эйнштейна в пустом пространстве

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0 \tag{9}$$

или

$$R_{ab} = 0,$$

можем, без ограничения общности, выбрать τ так, чтобы $g_{00} \equiv 1$. Этот выбор возможен, поскольку любая метрика на базе M^2 может быть приведена к виду $d\tau^2 + g_{11}dR^2$, $g_{11} < 0$. Решение уравнений (9) не вызывает затруднений. Выписывая символы Γ^a_{bc} и R_{ab} по общим формулам (см. §§ 29, 30 части I), получим

уравнения на параметры ν, λ, μ (см. (17))

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad -g_{11} = e^{\lambda}, \quad r^2 = e^{\mu},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial R} = \varphi', \quad g_{00} \equiv 1. \tag{10}$$

Решение удобно записать в параметрическом виде:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{a^2} + 1\right)(1 - \cos\eta),$$
$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{a^2} + 1\right)^{3/2}(\pi - \eta + \sin\eta), \tag{11}$$
$$0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi.$$

Устройство полного «многообразия Крускала» M^4 показано на рис. 159. При $r = 0$ орбиты группы $SO(3)$ сводятся к точкам.

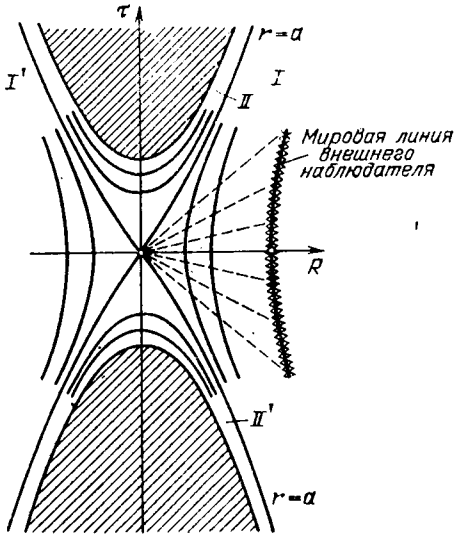


Рис. 159. Изображена (R, τ)-плоскость. Заштрихована «бессмысленная» область $r \leqslant 0$. Жирными линиями показаны кривые уровня $r(R, \tau) = \text{const}$. Пунктирными линиями показаны кривые уровня $t(R, \tau) = \text{const}$. При $r = a$ имеем $|t| = \infty$, исключая точку пересечения двух линий (седловую). Здесь имеется неопределенность — сюда входят все линии $t = \text{const}$. Точка $\tau = 0$, $R = 0$ седловая; здесь $\frac{\partial r}{\partial \tau}, \frac{\partial r}{\partial R} = 0$. На линиях $r = a$ имеем $\langle \nabla r, \nabla r \rangle = 0$. Области I и I' изометричны $(R \to -R)$; области II и II' также изометричны $(\tau \to -\tau)$.

В этих точках метрика M^4 имеет особенность. Мировая линия внешнего наблюдателя в области I (области Шварцшильда) имеет вид

$$r = r_0 > a, \quad -\infty < t < \infty,$$
$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0. \tag{12}$$

Внешний наблюдатель может получить сигнал из области II'

(«белая дыра»), но не может послать обратно сигнал в II'. Напротив, внешний наблюдатель может послать сигнал в область II («черная дыра»), но не может получить сигнал из II. Никакая посылка сигналов из I в I' и обратно невозможна. Нарисуйте самостоятельно световые конусы на (τ, R)-плоскости.

Важным применением решений Шварцшильда — Крускала является задача о коллапсе сферически симметричной массы (коллапсирующая звезда, или «коллапсар»). Рассмотрим времениподобную мировую линию γ частиц в координатах τ, R (при всех θ, φ) вида, показанного на рис. 160. Это объединение мировых линий γ при всех θ, φ дает трехмерную поверхность $S_\gamma \subset M^4$, разделяющую M^4 на две области: A — внешняя и B — внутренняя. Коллапс звезды описывает сферически симметричное решение уравнений (1) со следующими свойствами:

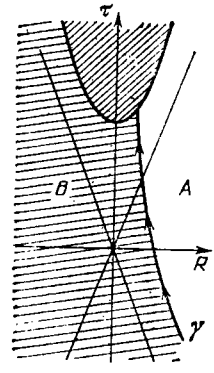


Рис. 160

а) g_{ab} такое же, как в многообразии Крускала в области A, $R_{ab} = 0$;

б) g_{ab} удовлетворяет уравнению (1) с гидродинамическим тензором энергии-импульса (2) в области B, где задано «уравнение состояния» $\varepsilon = \varepsilon(p)$;

в) граница звезды (кривая γ на (τ, R)-плоскости) пересекает при $t \to +\infty$ «линию горизонта» $r = a$, на которой $g^{rr} = 0$; при $t \to -\infty$ граница звезды ни разу не пересекала линию горизонта.

Итак, мы должны решать уравнение (1) в области B, где $T_{ab} \neq 0$. Из сферической симметричности следует, что могут быть ненулевыми только

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^0, \quad T_0^1, \quad T_\alpha^\alpha = -p. \tag{13}$$

Выберем *сопутствующую* систему координат, в которой $u = (1, 0)$, $T_0^1 = T_1^0 = 0$. Тогда

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_0^1 = T_1^0 = 0, \quad T_\alpha^\alpha = -p, \tag{14}$$

и метрика будет иметь вид (5).

Замечание. Вообще говоря, сопутствующая система отсчета, в которой временна́я координата τ ортогональна пространственным координатам R, θ, φ, но является «синхронной», т. е. $g_{00} \neq 1$.

Законы сохранения $\nabla_a T_b^a = 0$ дают: если $g_{00} = e^\nu$, $g_{11} = -e^\lambda$, $r^2 = e^\mu$, то

$$\nu' = -\frac{2p'}{p+\varepsilon}, \quad (\lambda + 2\mu)^{\cdot} = -\frac{2\dot{p}}{p+\varepsilon}. \tag{15}$$

Из соотношений (15) следует

$$-g_{11}r^4 = \exp\left\{-2\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}\right\}\exp\varphi(R),$$
$$g_{00} = \exp\left\{-2\int\frac{dp}{p+\varepsilon}\right\}\exp\psi(\tau). \tag{16}$$

Выбор функций $\varphi(R)$ и $\psi(\tau)$ в (16) окончательно фиксирует локальные координаты τ, R и позволяет исключить ε, p из уравнений (1).

После вычисления символов R_{ab} и Γ^a_{bc} в координатах $y^0=\tau$, $y^1=R$, $y^2=\theta$, $y^3=\varphi$ уравнения (1) приобретут вид:

$$\text{а)}\ -\frac{8\pi G}{c^4}T_1^1 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2}+\mu'\nu'\right)-e^{-\nu}\left(\ddot{\mu}-\frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}+\frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right)-e^{-\mu};$$

$$\text{б)}\ -\frac{8\pi G}{c^4}T_2^2 = \frac{1}{4}e^{-\lambda}\left(2\nu''+\nu'^2+2\mu''+\mu'^2-\mu'\lambda'-\nu'\lambda'+\mu'\nu\right)+$$
$$+\frac{1}{4}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\nu}+\dot{\mu}\dot{\nu}-\dot{\lambda}\dot{\mu}-2\ddot{\lambda}-\dot{\lambda}^2-2\ddot{\mu}-\dot{\mu}^2\right); \tag{17}$$

$$\text{в)}\ \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0 = -e^{-\lambda}\left(\mu''+\frac{3}{4}\mu'^2-\frac{\mu'\lambda'}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\nu}+\frac{\dot{\mu}^2}{2}\right)+e^{-\mu};$$

$$\text{г)}\ \frac{8\pi G}{c^4}T_0^1 = 0 = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(2\dot{\mu}'+\dot{\mu}\mu'-\dot{\lambda}\mu'-\nu'\dot{\mu}\right).$$

Положим $g^{rr}=1-\frac{a}{r}$, где $a=a(\tau, R)$. Для решений Шварцшильда мы имели $a=\text{const}=2MG/c^2$, где M — масса тела. В общем случае уравнение

$$a(\tau, R)=r(\tau, R) \tag{18}$$

задает «горизонт» $g^{rr}=0$, где $r(\tau, R)$ становится изотропной функцией, $\langle\nabla r, \nabla r\rangle = g^{rr}=0$.

Замечание. Уравнения Эйнштейна (см. (17)) после подстановки связи (16) с $\varphi\equiv\psi\equiv 0$ могут быть получены из лагранжиана «двумерной теории поля»

$$\tilde{S}=\int\tilde{\Lambda}dR\,d\tau,$$

где $\tilde{\Lambda}=\tilde{\Lambda}(\lambda, \mu, \dot{\lambda}, \dot{\mu}, \lambda', \mu')=T_1+T_2+U$,

$$T_1 = -e^{\frac{k-1}{2}\lambda+(k+1)\mu}\left(\frac{\mu'^2}{2}+\mu'(k\lambda'+2k\mu')\right),$$
$$T_2 = e^{-\frac{k-1}{2}\lambda+(1-k)\mu}\left(\frac{\dot{\mu}^2}{2}+\dot{\mu}\dot{\lambda}\right),\quad U=2e^{\frac{k+1}{2}\lambda+k\mu}.$$

Формальный тензор энергии-импульса для функционала $\tilde{S}$, опре-

деленный в § 37 части I, имеет такой вид:

$$\widetilde{T}_0^0 = -\widetilde{\Lambda} + \dot{\lambda}\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\dot{\lambda}} + \dot{\mu}\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\dot{\mu}} = T_2 - T_1 - U,$$

$$\widetilde{T}_1^1 = -\widetilde{\Lambda} + \lambda'\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\lambda'} + \mu'\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\mu'} = T_1 - T_2 - U,$$

$$\widetilde{T}_0^1 = \dot{\lambda}\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\lambda'} + \dot{\mu}\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\mu'} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - (k\lambda' + 2k\mu')\dot{\mu}\right),$$

$$\widetilde{T}_1^0 = \lambda'\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\dot{\lambda}} + \mu'\frac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial\dot{\mu}} = -T_0^1 e^{-(k-1)\lambda - 2k\mu}.$$

Уравнения Эйнштейна (17) сферически симметричной материи с гидродинамическим тензором энергии-импульса приобретут вид $\delta\widetilde{S} = 0$ на поверхности связей $\widetilde{T}_0^1 = \widetilde{T}_1^0 = 0$. Использование функционала $\widetilde{S}$ удобно для исследования решений, не зависящих от $\tau = \xi^0$ или $R = \xi^1$. Если $\dot{\lambda} \neq 0$, $\lambda' \neq 0$, $\dot{\mu} \neq 0$, $\mu' \neq 0$, то уравнения $\widetilde{T}_0^1 = \widetilde{T}_1^0 = 0$ решаются, и уравнения Эйнштейна (17) сведутся, как мы увидим, к системе первого порядка (24).

Из уравнений (17) вытекает (проверьте!)

$$\frac{\partial a(\tau, R)}{\partial\tau} = -pr^2\frac{\partial r}{\partial\tau}\frac{8\pi G}{c^4},$$
$$\frac{\partial a}{\partial R} = \varepsilon r^2\frac{\partial r}{\partial R}\frac{8\pi G}{c^4}, \tag{19}$$

где ε и p связаны с метрикой соотношениями (16). Так как ε — плотность энергии, то $4\pi\varepsilon r^2 dr e^{-\lambda}$ — энергия сферического слоя. Сумма энергий сферических слоев имеет вид

$$\sum_{\text{полн}} = \int 4\pi\varepsilon r^2 e^{-\lambda} dr.$$

Однако, из (19) видно, что интегралом системы является другая величина

$$E_{\text{полн}} = \int 4\pi\varepsilon r^2\, dr, \tag{20}$$

совпадающая на поверхности связи $\widetilde{T}_0^1 = \widetilde{T}_1^0 = 0$ с гамильтонианом двумерной теории поля с лагранжианом $\widetilde{\Lambda}$ (выше). Итак, мы получили «гравитационный дефект энергии»

$$E_{\text{полн}} \neq \sum_{\text{полн}}.$$

Рассмотрим случай $p = 0$ (пылевидное вещество). Тогда из (19) и (16) имеем

$$a = a(R); \quad g_{00} = \text{const}. \tag{21}$$

Пусть $g_{00}=1$. По определению имеем (см. (16))

$$1-\frac{a}{r}=g^{00}\dot{r}^2+g^{11}r'^2\quad\left(\dot{r}=\frac{\partial r}{\partial\tau},\ r'=\frac{\partial r}{\partial R}\right),$$

$$g_{00}=\exp\left\{-2\int\frac{dp}{p+\varepsilon}\right\}\exp\psi(\tau),$$

$$g_{11}=\exp\left\{-2\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}\right\}\exp\varphi(R),$$

где $g^{00}=\frac{1}{g_{00}}$, $g^{11}=\frac{1}{g_{11}}$, причем

$$g_{11}=-\frac{1}{r^4\varepsilon^2},\quad \varepsilon=\frac{a'}{r^2r'}\frac{c^4}{8\pi G}.$$

Отсюда получаем ($\psi(\tau)\equiv 1$, $g_{00}\equiv 1$)

$$\dot{r}=\sqrt{1-\frac{a(R)}{r}+(a'(R))^2\left(\frac{8\pi G}{c^4}\right)^{-2}}. \tag{22}$$

Мы знаем, что $\dot{a}=-\frac{8\pi G}{c^4}pr^2\dot{r}=0$ (см. (19)).

Это уравнение интегрируется одной квадратурой и дает известное «решение Толмена», приводящее либо к коллапсу, либо к разлету пылевидной материи, так как $\dot{r}$ не может менять знак при $1-\frac{a}{r}>0$, если метрика неособа. В области вне горизонта имеем

$$\dot{r}=\sqrt{\Phi(r,\ R)}=\sqrt{g^{rr}+|g^{11}r'^2|}\neq 0,\qquad g^{rr}>0. \tag{23}$$

Отсюда следует, что при отсутствии особенностей метрики и плотности энергии $0<\varepsilon<\infty$ вне горизонта знак величины $\dot{r}$ меняться не может.

Для общих уравнений (19) при $p=k\varepsilon$, $0\leqslant k\leqslant 1$, из (16) имеем

$$\begin{aligned}\dot{a}&=-pr^2\dot{r}\frac{8\pi G}{c^4},\\ a'&=\varepsilon r^2r'\frac{8\pi G}{c^4},\\ 1-\frac{a}{r}&=\dot{r}^2\varepsilon^{\frac{2k}{k+1}}-r'^2r^4\varepsilon^{\frac{2}{k+1}},\end{aligned} \tag{24}$$

если $\varphi\equiv\psi\equiv 0$. Исключая ε, представим уравнения в виде

$$\dot{r}=\sqrt{\Phi(r,\ r',\ a,\ a')}=\sqrt{(g^{rr}+|r'^2r^4\varepsilon^{2/k+1}|)\varepsilon^{-2k/k+1}},$$

$$\dot{a}=-k\frac{a'}{r'}\sqrt{\Phi},\quad 0\leqslant k<1. \tag{25}$$

Таким образом, решение (кроме знака $\dot r$) полностью определяется заданием $r(R, 0)$ и $a(R, 0)$. Вне горизонта $g^{rr} > 0$ имеем тот же вывод, что и для $p = 0$: неизменность знака $\dot r$ ввиду $\Phi \geqslant g^{rr} > 0$.

Вывод. Если метрика и плотность энергии $\varepsilon > 0$ не имеют особенностей, происходит монотонный коллапс (или разлет) материи.

Замечание 1. Более простой вид уравнения (25) имеют в случае «предельно жесткого уравнения состояния», т. е. при $k = 1$. Здесь

$$1 - \frac{a}{r} = \varepsilon\left(\dot r^2 - r'^2 r^4\right). \tag{26}$$

Замечание 2. Уравнения (24) при $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ обладают группой масштабных преобразований:

$$\begin{gathered} r \to \lambda r, \quad a \to \lambda a, \quad \tau \to \alpha\tau, \\ R \to \beta R, \quad \varepsilon \to \gamma\varepsilon, \quad p \to \gamma p, \end{gathered} \tag{27}$$

где $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = \lambda^{-\frac{8k}{k+1}}$, $\gamma = \lambda^{-2}$.

Можно искать «автомодельные решения», инвариантные относительно однопараметрических подгрупп этой группы, имеющих вид $\alpha = \beta^s$, $\lambda = \beta^\nu$, $\gamma = \dfrac{(1-s)(1+k)}{4k}$. Эти инвариантные решения имеют вид

$$r = R^\nu r_1(\lambda), \quad a = R^\nu a_1(\lambda), \quad \varepsilon = R^{-2\nu}\varepsilon_1(\lambda), \quad \lambda = \frac{\tau}{R^s}. \tag{28}$$

Уравнения (24) имеют решения вида (28) только при $s = \dfrac{1-k}{1+3k}$. В этом случае уравнения (24) определяют систему обыкновенных уравнений (динамическую систему)

$$\frac{da_1}{d\lambda} = -k\varepsilon_1 r_1^2 \frac{dr_1}{d\lambda}\frac{8\pi G}{c^4},$$

$$\gamma a_1 - s\lambda\frac{da_1}{d\lambda} = \varepsilon_1 r_1^2\left(\gamma r_1 - s\lambda\frac{dr_1}{d\lambda}\right)\frac{8\pi G}{c^4},$$

$$1 - \frac{a_1}{r_1} = \left(\frac{dr_1}{d\lambda}\right)^2 \varepsilon^{\frac{2k}{k+1}} - \left(\gamma r_1 - s\lambda\frac{dr_1}{d\lambda}\right)^2 r_1^4 \varepsilon_1^{\frac{2}{k+1}}.$$

Исследование стационарных решений (не зависящих от τ) и решений, не зависящих от R, также приводит к динамическим системам, которых мы здесь не приводим.

Постановка краевой задачи для уравнений (24) может быть такова. В начальный момент $\tau = 0$ мы требуем выполнения следующих условий:

а) $r' > 0$, $a' > 0$ (сферические слои материи упорядочены по радиусу r и $\varepsilon > 0$).

б) На краях должно быть $r(R_0) = 0$, $a(R_0) = 0$ и $r \to \infty$, $a \to a_0$ при $R \to R_1$. Тогда допустимая область изменения сопутствующей (лагранжевой) координаты R есть $R_0 \leqslant R < R_1$, в то время как $0 \leqslant r < \infty$. Возможно, интервал по R также бесконечен (это несущественно). Уравнения (24) верны всегда, но эквивалентны уравнениям (17) лишь при $\varepsilon \neq 0$, $r' \neq 0$, $\dot{r} \neq 0$. При $r \to \infty$ отсюда следует $\varepsilon \to 0$, так что интеграл сходится: $a_0 = \frac{8\pi G}{c^4} \int_{R_0}^{R_1} \varepsilon r^2 \, dr < \infty$, поскольку $a_0 = E_{\text{полн}} \cdot \text{const}$.

в) При $\tau = 0$ должно быть $r(R) = r(R, 0) > a(R)$, $R > R_0$. Условие в) возникает из требования, чтобы в начальный момент $\tau = 0$ вся материя была наблюдаемой (рис. 161).

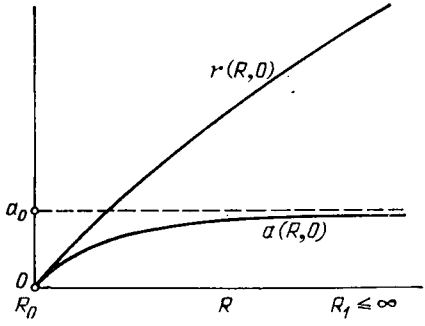


Рис. 161

3. Аксиально симметричные решения. Рассмотрим теперь аксиально симметричное стационарное решение, описывающее гравитационное поле «вращающейся черной дыры»,— так называемое «решение Керра».

Определение 3. Метрику g_{ab} сигнатуры $(+, -, -, -)$ на многообразии M^4 назовем *аксиально симметричной* и *стационарной*, если в некоторой локальной системе координат она не зависит от времени t и угловой (пространственноподобной) координаты $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. В частности, на многообразии действует коммутативная группа движений $G = \mathbb{R} \times S^1$, где орбиты $\mathbb{R} \times (s_0)$ времениподобны, а орбиты $t_0 \times S^1$ пространственноподобны.

Решение Керра уравнений (1) в пустом пространстве $T_{ab} = 0$ определяется в координатах, обозначаемых через r, θ, φ, t, формулой ($c = 1$)

$$ds^2 = dt^2 - \left[dr^2 + 2a \sin^2\theta \, dr \, d\varphi + (r^2 + a^2) \sin^2\theta \, d\varphi^2 + \right.$$
$$\left. + \rho^2 \, d\theta^2 + \frac{2mr}{\rho^2} (dr + a \sin^2\theta \, d\varphi + dt)^2 \right], \quad (29)$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $a = \text{const}$. Обычные координаты $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

имеют вид

$$x = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\cos\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{a}{r}\right),$$
$$y = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\sin\left(\varphi - \operatorname{arctg}\frac{a}{r}\right), \qquad (30)$$
$$z = r\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Таким образом, поверхности уровня $r = \text{const}$, $t = t_0$ — это сплюснутые по оси z эллипсоиды. Поверхности $\theta = \theta_0$, $t = t_0$ — это однополостные гиперболоиды вида

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2\sin^2\theta} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\theta} = 1. \qquad (31)$$

В частности, координата r может быть отрицательной, как будет видно ниже.

Введем обозначения

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2,$$
$$dt^* = dt - 2mr\frac{dr}{\Delta}, \qquad (32)$$
$$d\varphi^* = d\varphi + \frac{a\,dr}{\Delta}.$$

В новых координатах r, t^*, φ^*, θ метрика (29) приобретет вид (проверьте!):

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\,(d\varphi^*)^2 - \\ - \frac{2mr}{\rho^2}(a\sin^2\theta\,d\varphi^* + dt^*)^2 + (dt^*)^2. \qquad (33)$$

Группа G действует преобразованиями

$$t^* \to t^* + \text{const}, \quad \varphi^* \to \varphi^* + \text{const}.$$

При $a = 0$ из формул (33) получим метрику Шварцшильда (6), (7).

Задача. Покажите, что при $m = 0$ эта метрика эквивалентна метрике Минковского.

Для ненулевых компонент g^{ab} метрики (33) имеем ($c = 1$, $G = 1$)

$$g^{00} = \frac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right),$$
$$-g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad -g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2},$$
$$-g^{\varphi^*\varphi^*} = \frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right), \qquad (34)$$
$$g^{\varphi^* t^*} = \frac{4mra}{\rho^2\Delta}.$$

Как и для решения Шварцшильда, горизонт определяется условием $g^{rr} = 0$ или $\Delta = 0$:

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0,$$
$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}. \tag{35}$$

Возникает два случая:

1) $a > m$ — корни $r_\pm$ комплексны;
2) $a < m$ — корни $r_\pm$ вещественны и положительны.

Разберем сначала случай 1) (быстрое вращение). Здесь $\Delta \neq 0$ для вещественных r и метрика (33) всегда имеет смысл. Горизонт отсутствует, так как $g^{rr} < 0$ для всех r. Всегда имеем $g^{00} > 0$. Метрика имеет особенности при $r = 0$, $\cos^2\theta = 0$ (и любых t^* и φ^*). В координатах x, y, z множество особенностей задается уравнением

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0, \quad t^* \quad \text{любое}. \tag{36}$$

Эта особенность наблюдаема извне (т. е. из области $r \to \infty$) — она «голая». Вне особенности метрика регулярна. Уравнение $g^{\varphi^*\varphi^*} = 0$ дает

$$r^2 - 2mr + a^2\cos^2\theta = 0, \quad r = m \pm \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}.$$

Это — «эргосфера». Внутри эргосферы градиент функции φ^* времениподобен.

Линии $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $t^* = \text{const}$ координаты φ^* являются замкнутыми и времениподобными в области

$$g_{\varphi^*\varphi^*} = -\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) > 0. \tag{37}$$

При $\cos\theta = 0$ это — линии $r^2 = r_0^2 < ma$.

Рассмотрим теперь случай 2) ($a < m$). Область внешнего наблюдателя — это область

$$(I) \qquad r > m + \sqrt{m^2 - a^2} = r_+; \tag{38}$$

функция r в этой области пространственноподобна. Имеются также области

$$(II) \qquad r_- < r < r_+ \tag{39}$$

(r времениподобна),

$$(III) \qquad -\infty < r < r_- \tag{40}$$

(r пространственноподобна). Если $r \to r_+$ из области I, то $g^{00} \to \infty$. Поэтому время внешнего наблюдателя t^* имеет смысл лишь в области I. Координата r является световой при $r = r_\pm$ (на горизонте).

Метрика имеет особенность в области *III*. В области *III* цикл изменения φ^* ($r = r_0 < 0$, $\theta = \text{const}$, $t^* = \text{const}$) является замкнутым и времениподобным (проверьте!). Построение полного многообразия M^4 склейкой областей типа *I*, *II*, *III* можно произвести по аналогии с многообразием Крускала (см. (11)). 1) К области *I* при $r \to r_+$ могут быть приклеены 2 области типа *II* («белая дыра» при $t \to -\infty$ и «черная дыра» при $t \to +\infty$, как и для решения Шварцшильда выше); 2) к области типа *II* могут быть приклеены: а) две области типа *III*, где $r \to r_-$, б) две области типа *I*, где $r \to r_+$; 3) к области типа *III* могут быть приклеены две области типа *II* при $r \to r_-$. Склейка условно рисуется диаграммой (рис. 162).

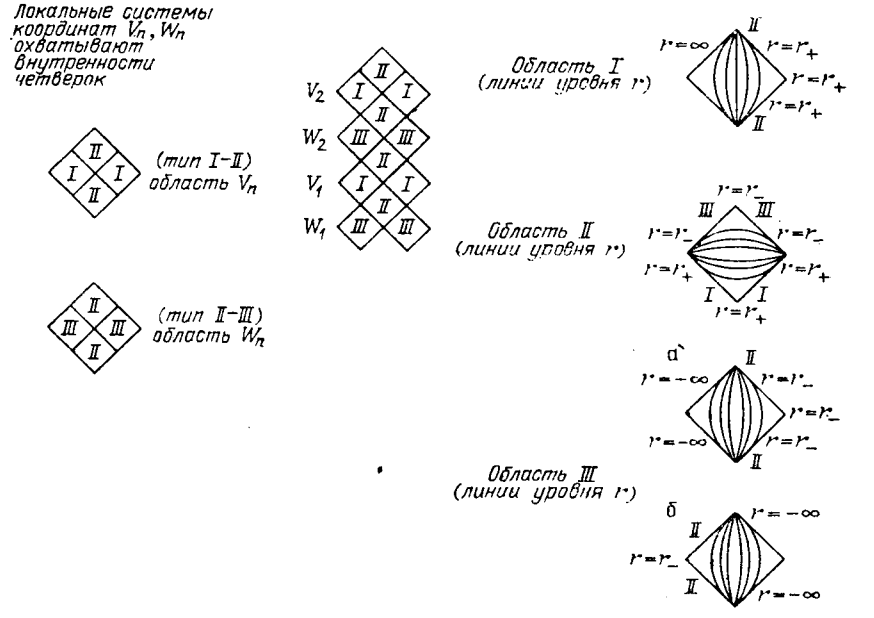


Рис. 162

Координаты в каждой четверке типов *I—II* и *II—III* (см. рис. 162) аналогичны координатам Крускала (см. рис. 159). Аналитически здесь, однако, более утомительно производить склейку, но она может быть проведена по аналогии со сферически симметричным случаем. Заметим, что преобразование B, переводящее V_n в V_{n+1} и W_n в W_{n+1}, является движением. Мы можем поэтому построить «неодносвязное решение Керра», полагая

$$\overline{M}^4 = M^4/B$$

для любой точки $x \in M^4$. Набор возможных переходов в будущее

по времениподобным линиям таков:

$$\text{область } (V_n, I) \to \text{область } (W_{n+1}, II) \cong \text{область } (V_n, II),$$
$$\text{область } (W_n, II) \to \text{область } (V_n, I),$$
$$\text{область } (W_n, III) \to \text{область } (W_n, II) \cong \text{область } (V_n, II).$$

Таким образом, в неодносвязном многообразии $\overline{M}^4$ имеются времениподобные циклы, начинающиеся и кончающиеся в области I внешнего наблюдателя.

Замечания. Решения Шварцшильда и Керра (в случае 2) обладают таким свойством: поверхность горизонта не является особенностью метрики в M^4. Как говорят, в этих решениях нет «голой сингулярности», которая бы непосредственно могла наблюдаться. Имеются теоремы, показывающие единственность этих метрик в определенных классах решений уравнений Эйнштейна $R_{ab} = 0$ с указанным свойством: метрика Шварцшильда — единственное решение среди статических метрик в координатах x, y, z, t, где $g_{0\alpha} = 0$, асимптотически тривиальное при $r \to \infty$ и имеющее неособую поверхность горизонта в (x, y, z)-пространстве, вне которых они определены; метрика Керра — единственное решение среди стационарных метрик $g_{0\alpha} \neq 0$, неособых вне поверхности горизонта. Мы не приводим здесь доказательства этих важных теорем единственности.

Существует гипотеза, согласно которой всякая коллапсирующая масса конечной величины асимптотически по времени при $t \to \infty$ создает метрику Шварцшильда или Керра (в области внешнего наблюдателя). При этом предполагается, что начальная метрика при $t = 0$ не имела особенностей.

4. Космологические модели. Другой класс задач ОТО связан с построением и изучением свойств эволюционных моделей, которые могли бы дать определенные представления об эволюции глобальной метрики Вселенной «в целом». Соответствующие четырехмерные многообразия M^4 с метрикой g_{ab} называются *космологическими моделями*. Ввиду трудностей, связанных с невозможностью сформулировать какие-либо универсальные граничные условия для уравнений Эйнштейна в этом случае, мы ограничимся рассмотрением так называемых однородных космологических моделей, где предполагается, что метрика (в данный момент времени) в некотором смысле одинакова во всех точках пространства. Более точно это формулируется так.

Определение 4. Четырехмерное многообразие M^4 с метрикой g_{ab}, удовлетворяющей уравнению Эйнштейна (1), называется *однородной космологической моделью*, если задана группа движений G, действующая на M^4 (пусть слева) и имеющая трехмерные пространственноподобные орбиты.

В дальнейшем всегда выбираются локальные координаты такие, что x^1, x^2, x^3 направлены касательно к орбитам группы G

(они называются «пространственными»), а временна́я координата x^0 направлена трансверсально к орбитам группы G. Если координата $x^0 = ct$ ортогональна к орбитам и $g_{00} = 1$, то это — *синхронная система отсчета*. Мы будем в основном рассматривать однородные модели в синхронной системе отсчета. Наиболее общие однородные модели имеют трехмерную группу движений G (классификация их алгебр Ли приведена в § 24 части I).

Совокупность орбит образует одномерное многообразие («временна́я ось»), и имеется естественное отображение

$$p\colon M^4 \to N^1,$$

слои $p^{-1}(t_0)$ которого — орбиты группы G. Выбор временно́й оси, например синхронной системы отсчета, вводит связность в это расслоение, причем кривизны нет ввиду одномерности базы. Пусть группа G трехмерна. В этом случае удобно выбрать представление метрики многообразия M^4: рассмотрим левоинвариантные векторные поля (не путать их с генераторами группы G) X_0, X_1, X_2, X_3, где X_0 трансверсально, а X_1, X_2, X_3 касательны к орбитам группы G. Наложим требования, чтобы коммутаторы векторных полей X_α имели вид ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$):

$$[X_0, X_\alpha] = 0, \quad [X_\alpha, X_\beta] = c^\nu_{\alpha\beta} X_\nu; \tag{41}$$

здесь $c^\nu_{\alpha\beta}$ — структурные константы алгебры Ли группы G, не зависящие от времени. При этом (в синхронной системе отсчета) мы требуем, чтобы X_0 было ортогонально орбитам группы и $g_{00} = 1$. Метрика описывается скалярными произведениями

$$g_{\alpha\beta} = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle,$$
$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{42}$$

Ввиду однородности модели метрика $g_{\alpha\beta}(t)$ зависит лишь от времени t, где линии времени идут вдоль поля X_0.

Уравнения Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса $T_{ab} = (p + \varepsilon) u_a u_b - p g_{ab}$ приобретут вид системы уравнений второго порядка на симметрическую матрицу $g_{\alpha\beta}(t)$, если в них исключить u, ε, p посредством законов сохранения и связей

$$\nabla_a T^a_b = 0, \quad \langle u, u \rangle = 1, \quad p = p(\varepsilon). \tag{43}$$

Как и ранее, считаем, что $p = k\varepsilon$, где $0 \leqslant k \leqslant 1$ (особенно интересны случаи $p = 0$ и $p = \varepsilon/3$, где $T^a_a = 0$). После этого исключения получим динамическую систему в фазовом пространстве $(g_{\alpha\beta}(t), \dot{g}_{\alpha\beta}(t))$ размерности 12, точнее, в области этого пространства, выделяемой условиями:

1) $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta < 0$ (пространственноподобность орбит);
2) $\varepsilon(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta}) \geqslant 0$ (положительность энергии).

Эту область мы назовем «физической областью» в фазовом пространстве $(g_{\alpha\beta}, \dot{g}_{\alpha\beta}) = \mathbb{R}^{12}$ и будем обозначать ее буквой S. Уравнение Эйнштейна будет рассматриваться как динамическая система в физической области S фазового пространства. Каждая ее интегральная траектория представляет метрику $g_{\alpha\beta}(t)$ и тем самым однородную космологическую модель с данной (трехмерной) группой движений G, т. е. многообразие M^4.

Среди общих однородных моделей выделяются такие метрики $g_{\alpha\beta}(t)$, для которых истинная группа движений $\hat{G}$, т. е. полная группа движений многообразия M^4, является более широкой: $\hat{G} \supset G$. Рассмотрим максимальную группу движений $\hat{G} \supset G$, имеющую те же самые орбиты, что и G. Таким образом, группа $\hat{G}$ является группой движений на каждой орбите $M^3(t)$ группы G:

$$M^3(t) = \hat{G}/H,$$

где H — стационарная подгруппа точки. Очевидно, что пересечение $G \cap H$ трехмерной группы G с H дискретно. Для размерностей имеем

$$\dim \hat{G} = 3 + \dim H.$$

Замечание. В принципе возможен случай, когда однородная модель M^4 с группой $\hat{G}$ размерности >3 имеет трехмерные пространственноподобные орбиты $M^3(t)$, но $\hat{G}$ не имеет ни одной трехмерной подгруппы G, транзитивно действующей на $M^3(t)$. Мы этот случай рассматривать не будем.

Задача. Найдите все группы движений трехмерных многообразий, не содержащие транзитивных трехмерных подгрупп.

В общем случае, зависящем от максимального количества параметров и покрывающем все наиболее интересные примеры, имеется трехмерная транзитивная подгруппа $G \subset \hat{G}$.

Если размерность $\dim G > 3$, то метрика $g_{\alpha\beta}(t)$ однородного пространства $M^3(t)$, определяемая в силу однородности матрицей скалярных произведений в одной точке (при данном t), не может быть произвольной. Действие группы $H \subset \hat{G}$, сохраняющее эту точку, накладывает ограничения на матрицу $g_{\alpha\beta}(t)$, а также на матрицу $\dot{g}_{\alpha\beta}(t)$. Так как $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta < 0$, группа H является подгруппой группы $SO(3) \supset H$. Поэтому возможны два случая:

а) $H = SO(3)$ (полная изотропия);

б) $H = SO(2)$ (аксиальная изотропия в одной плоскости).

Следовательно, размерность группы $\hat{G}$ может быть равна либо 6 (случай а)), либо 4 (случай б)).

5. Модели Фридмана. Однородными и изотропными моделями (или моделями Фридмана) называются модели с группой $\hat{G}$ размерности 6 (случай полной изотропии). Эти модели легко изучаются и имеют фундаментальное значение в релятивистской кос-

мологии. Астрономические наблюдения показывают, что на современной стадии Вселенная «в среднем» имеет однородное и изотропное распределение материи, если провести усреднение по достаточно большим масштабам, которые тем не менее пренебрежимо малы по сравнению с Метагалактикой, т. е. наблюдаемой сегодня частью Вселенной (размер Метагалактики $\sim 10^{28}$ см; говоря об изотопии в распределении материи, следует провести усреднение по масштабам «скоплений Галактик», т. е. 10^{25}—10^{26} см. Однако анизотропия в реликтовом излучении пока не найдена; напомним, что на более ранних стадиях эволюции Вселенной плотность энергии реликтового излучения превосходила плотность материи).

Имеется всего три однородных и изотропных односвязных трехмерных многообразия M^3 с группой $\hat{G}$ размерности 6. Это — сфера S^3, евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ и пространство Лобачевского L^3 (ср. §§ 9, 10 части I, где рассмотрен двумерный случай). Метрика этих пространств может быть записана в виде (t — параметр):

$$dl^2(t) = a^2(t)\,dl_0^2 = \begin{cases} a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\Omega^2(S^3)), \\ a^2(d\chi^2 + \chi^2\, d\Omega^2(\mathbb{R}^3)), \\ a^2(d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\, d\Omega^2(L^3)), \end{cases} \tag{44}$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где a^2 — масштабный множитель, $d\Omega^2$ — обычная метрика единичной сферы S^2. В соответствии с этим метрика многообразия M^4 в синхронной системе отсчета может быть записана в виде

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dl^2(t) = (dx^0)^2 - a^2(t)\,dl_0^2. \tag{45}$$

Далее, скорость материи u обязана в полностью изотропном случае быть тривиальной,

$$u = (1, 0, 0, 0),$$

так как ненулевая пространственная скорость нарушала бы полную изотропию. Введем новую временну́ю координату η, полагая

$$c\,dt = a\,d\eta. \tag{46}$$

После этого имеем

$$ds^2 = a^2(\eta)\,(d\eta^2 + dl_0^2). \tag{47}$$

Вычисляя R_0^0 и R в случае сферы S^3 по общим формулам (см. § 30 части I), имеем

$$a' = \frac{da}{d\eta}, \quad R = -\frac{6}{a^3}(a + a''), \quad R_0^0 = \frac{3}{a^4}(a'^2 - aa'').$$

Так как $u=(1, 0, 0, 0)$, имеем

$$T_0^0 = \varepsilon.$$

Уравнения Эйнштейна сведутся к одному уравнению

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0.$$

В случае сферы S^3 это дает уравнение

$$\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} (a'^2 + a^2). \tag{48}$$

Из соотношения

$$\nabla_a T_b^a = 0$$

для всех трех случаев S^3, $\mathbb{R}^3$, L^3 имеем

$$-\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} = 3d \ln a, \tag{49}$$

или

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + \text{const}.$$

Зная уравнение состояния $p(\varepsilon)$, из (48) и (49) получаем полное решение задачи об определении метрики ds^2, т. е. функции $a(t)$.

Для случая $p=0$ имеем $\varepsilon = \mu c^2$, где μ — плотность массы. Величина $M = \mu a^3$ является интегралом уравнений (48).

1) В случае сферы S^3 получаем

$$a = a_0 (1 - \cos \eta),$$

$$t = \frac{c_0}{c} (\eta - \sin \eta).$$

При малых временах, т. е. при $\eta \to 0$,

$$\mu \sim \frac{1}{6\pi G} t^{-2} \tag{50}$$

(проверьте!). При $a \to 0$ метрика имеет особенность.

2) В случае L^3 аналогично получаем

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + \text{const},$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} (a'^2 - a^2), \tag{51}$$

$$a = a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c} (\operatorname{sh} \eta - \eta).$$

Заметим, что при $\eta \to 0$ мы имеем для плотности массы прежнюю асимптотику (50):

$$\mu \sim \frac{1}{6\pi G} t^{-2}.$$

3) В случае $\mathbb{R}^3$ имеем ($p = 0$)

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{p + \varepsilon} + \text{const},$$

$$\frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^2} \left(\frac{da}{dt}\right)^2, \quad \mu a^3 = \text{const}, \tag{52}$$

$$a = \text{const} \cdot t^{2/3}.$$

При $\eta \to 0$ имеем опять

$$\mu \sim \frac{1}{6\pi G} t^{-2}.$$

Для уравнения состояния $p = \varepsilon/3$ легко получить аналогичные формулы, но интеграл здесь имеет вид $\varepsilon a^4 = \text{const}$. Считается, что при $\varepsilon \to \infty$ надо пользоваться именно этим уравнением состояния вместо $p = 0$. Отметим в виде задачи интересное свойство.

Задача. Докажите, что метрика изотропной модели «конформно плоская» (т. е. конформно эквивалентна метрике Минковского).

Световые лучи во всех трех случаях, как легко видеть, распространяются по линиям ($\varphi = \theta = \text{const}$)

$$\chi = \pm\eta + \text{const}. \tag{53}$$

В силу нестационарности метрики частота света ω не является интегралом движения; вместо этого вдоль луча верно равенство $\omega a = \text{const}$.

Задача. Рассмотрите уравнение Максвелла в изотропной метрике вида $ds^2 = a(\eta)(d\eta^2 - dl_1^2)$, где $a(\eta)$ — произвольная функция. Найдите решения (приближенные) вида

$$A(x, t) = e^{i\omega t} \bar{A}(x), \quad c\,dt = a\,d\eta, \quad \omega \gg a^{-1}.$$

Докажите, что $\omega a = \text{const}$.

Если ω_0 — частота в момент испускания $\eta_0 = \eta - \chi$ света, то в момент наблюдения η имеем

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \tag{54}$$

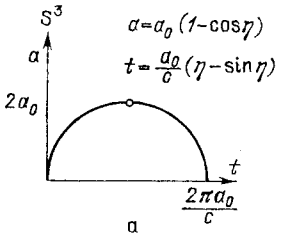
Графики величины $a(\eta)$ в трех рассматриваемых случаях (можно также заменять $t \to -t$, $\eta \to -\eta$) имеют вид, показанный на рис. 163. Астрономические наблюдения показывают, что Вселенная расширяется: непосредственно наблюдается величина

$$H = c \frac{a'(\eta)}{a^2} = \frac{d \ln a}{dt}, \tag{55}$$

именуемая «константой Хаббла». Величина H^{-1} имеет размерность времени и сегодняшние ее оценки таковы:

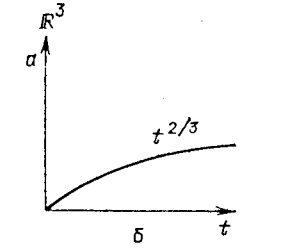
$$H^{-1} \sim 13 \cdot 10^9 \text{ лет} \pm 25\%. \tag{56}$$

Отсюда следует, в частности, конечность времени от момента $a = 0$ до момента t_0, где $1/H$ имеет сегодняшнее значение (56). Мы можем получить соотношения



а

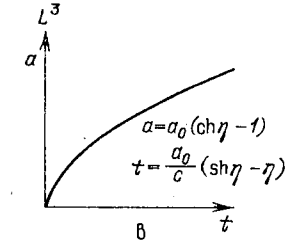
$$S^3\colon\ t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta) = \frac{1}{H}\,g(\eta) = \frac{1}{H}\,\frac{\sin\eta\,(\eta - \sin\eta)}{(1-\cos\eta)^2},$$



б

$$\mathbb{R}^3\colon\ t = \frac{2}{3}H^{-1}, \tag{57}$$

$$L^3\colon\ t = \frac{a_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta) = \frac{1}{H}\,f(\eta) = \frac{1}{H}\,\frac{\operatorname{sh}\eta\,(\operatorname{sh}\eta - \eta)}{(\operatorname{ch}\eta - 1)^2}.$$



в

Рис. 163

Так как $\frac{2}{3} < f(\eta) < 1$, $0 < g(\eta) < \frac{2}{3}$, во всех случаях приходим к общему выводу: *время t_0 от момента $a = 0$ до сегодняшнего значения H не превосходит H^{-1} (в изотропной модели Фридмана с $p = 0$)*. Рассмотрение уравнения состояния $p = \varepsilon/3$ не меняет существенным образом этих оценок (проверьте!).

З а д а ч а. Покажите, что для $\mu > \frac{3H^2}{8\pi G}$ имеем случай S^3, для $\mu = \frac{3H^2}{8\pi G}$ имеем случай $\mathbb{R}^3$, для $\mu < \frac{3H^2}{8\pi G}$ имеем случай $L^3 (p = 0)$.

6. Анизотропные вакуумные модели. Возникает естественный вопрос: в какой мере важнейшие выводы, сделанные при рассмотрении однородных и изотропных моделей, сохраняются в более общих решениях. С этой целью рассматриваются различные классы возмущений изотропных моделей. Общие однородные (но анизотропные) модели — это единственный класс «больших» возмущений изотропной модели, который является к настоящему времени достаточно хорошо изученным. Наиболее важными вопросами являются следующие:

1. Имеется ли особенность в общем решении или это специфика изотропной модели?

2. Можно ли утверждать в каком-либо смысле, что достаточно общие начальные состояния для метрики в процессе эволюции приведут к «изотропизации», которая наблюдается на современной стадии?

По поводу существования особенности легко доказать следующее: пусть $g = \det(g_{\alpha\beta}(t))$ и $d\sigma = \sqrt{-g}\, d^4x$ — элемент объема на M^4. Из уравнений Эйнштейна вместе с положительностью плотности энергии $T_{00} \geqslant 0$ легко выводится, что существует точка t_0, в которой $g(t_0) = 0$. Для некоторых однородных моделей вывод этого утверждения будет дан ниже. Однако это еще не означает наличие особенности для многообразий M^4 с метрикой g_{ab} сигнатуры $(+, -, -, -)$. Мы работали в синхронной системе отсчета, где «пространственная» часть — это орбиты группы и время t ортогонально к орбитам.

Рассмотрим новую временну́ю координату $\tilde{x}_0$, не ортогональную (но трансверсальную) к орбитам, при переходе к которой метрика $\tilde{g}_{ab}$ приобретет, например, вид

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{Vmatrix} \tilde{g}_{00} & \tilde{g}_{01} & 0 & 0 \\ \tilde{g}_{10} & \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{13} \\ 0 & \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} \\ 0 & \tilde{g}_{31} & \tilde{g}_{32} & \tilde{g}_{33} \end{Vmatrix}, \quad \tilde{g}_{ab} = \tilde{g}_{ba}. \tag{58}$$

Пусть $\tilde{g}_{01} \not\equiv 0$. Можно выбрать, например, «световую» координату $\tilde{x}^0$, для которой $\tilde{g}_{00} = 0$. Имеем, строго говоря, новые левоинвариантные поля $\tilde{X}_a$, тоже удовлетворяющие соотношениям (41). Если $\tilde{X}_0$ — световая геодезическая, то $\tilde{g}_{00} = 0$, $\tilde{g}_{01} = \gamma = \text{const}$. Если при $t = t_0$

$$\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{13} = 0,$$

то ограничение метрики g_{ab} на орбиту $M^3(t_0)$ будет вырождено. В этом случае, если перейти к синхронной системе отсчета, будем иметь $g = 0$. Такая ситуация называется «фиктивной особенностью» и может возникать уже в аксиально симметричных возмущениях изотропной модели.

В отличие от изотропного случая для однородных анизотропных моделей имеется ряд нетривиальных «вакуумных» решений, т. е. решений, в которых $\varepsilon = 0$. Приведем простейшие из них.

1) Решение Казнера. Здесь $G = \mathbb{R}^3$ (тип I по классификации п. 5 § 24 части I); метрика имеет вид ($c = 1$)

$$ds^2 = dt - \sum_{\alpha=1}^{3} t^{2p_\alpha} (dx^\alpha)^2. \tag{59}$$

Выполнение следующих двух условий равносильно уравнению Эйнштейна в пустом пространстве:

$$R_{ab}=0 \leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha = 1, \quad \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha^2 = 1.$$

Задача. Покажите, что метрика Казнера (59) для $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=1$ заменой координат приводится к метрике Минковского. Таким образом, в этом случае особенность $t=0$ «фиктивна». Здесь поля X_a коммутируют и дают координатные оси (x^a). Как выглядит в пространстве Минковского действие группы $G=\mathbb{R}^3$?

2) Решение Тауба — Мизнера. Здесь $G=SU(2)$ (тип IX). В синхронной системе отсчета мы будем считать матрицу $g_{\alpha\beta}(t)$ диагональной: $g_{\alpha\beta}=q_\alpha^2\delta_{\alpha\beta}$. Пусть $q_1^2=a$, $q_2^2=b$, $q_3^2=c$. Случай Тауба — Мизнера выделяется условиями:

а) аксиальная изотропия, $a=b$ (здесь полная группа $\hat{G}$ четырехмерна и изоморфна $SU(2)\times SO(2)$);

б) $\varepsilon=0$.

Уравнения Эйнштейна $R_{ab}=0$ для такого случая интегрируются точно. Решение имеет вид (в синхронной системе отсчета)

$$a^2=b^2=\frac{p}{2}\frac{\operatorname{ch}(2p\tau+\delta_1)}{\operatorname{ch}^2(p\tau+\delta_2)}, \tag{60}$$

$$c^2=\frac{2p}{\operatorname{ch}(2p\tau+\delta_1)}, \quad \frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{abc}.$$

Пространственные орбиты — это $M^3(t)=SU(2)=S^3$. При $t\to 0$ линейные размеры на орбите по одному направлению стягиваются к нулю, как это видно из формул (60). Это означает, что в синхронной системе отсчета получаем отображение стягивания

$$t\to 0, \quad p\colon\ S^3\to S^2=M^3(0)=S^3/S^1=SU(2)/SO(2)$$

со слоем S^1. Это — расслоение Хопфа над S^2. Казалось бы, возникает особая сфера S^2 при $t=0$. Однако можно ввести новые поля $\widetilde{X}_a^{\pm}$, удовлетворяющие требованиям (41) со световой координатой $X_0^{\pm}$, в которых метрика неособа при $t=0$ и имеет вид

$$\widetilde{g}_{ab}^{(\pm)}=\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & \widetilde{g}_{11}^{(\pm)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{g}_{22}^{(\pm)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{g}_{33}^{(\pm)} \end{pmatrix}=\langle \widetilde{X}_a^{\pm}, \widetilde{X}_b^{\pm}\rangle, \tag{61}$$

$$\widetilde{g}_{11}^{(\pm)}=\widetilde{q}_1^2=\frac{At+1-4B^2t^2}{B(4B^2t^2+1)}, \quad \widetilde{g}_{22}^{(\pm)}=\widetilde{g}_{33}^{(\pm)}=Bt^2+\frac{1}{4B}.$$

Это — метрики Тауба — Мизнера.

Задача. Докажите, что метрики (61) и (60) определяют одно и то же многообразие M^4 в области $t>0$. Выразите поля $\overset{+}{X}_a$ через $\overset{-}{X}_a$ в виде матрицы $A(t)$, $\tilde{g}^{(\pm)}_{11}>0$.

На орбите $t=0$ интегральные линии поля $\overset{\pm}{X}_1$ в $SU(2)=M^3(0)$ являются замкнутыми световыми линиями.

Задача. Покажите, что линии старой (синхронной) координаты x^0 из области $t>0$, $t=x^0/c$ наматываются на эти окружности как на предельные циклы. Это — топологически бесконечные линии конечной длины («неполнота» индефинитной метрики).

Замечание. Интересно обратить внимание на такое свойство метрик Тауба — Мизнера $\tilde{g}^{(\pm)}_{ab}$, являющихся аналитическим продолжением одной и той же метрики Тауба в синхронном времени (t) из области $t>0$: замена переменных в этой области, переводящая $\tilde{g}^{(+)}_{ab}$ в $\tilde{g}^{(-)}_{ab}$, аналитически не продолжима на все многообразие. Более того, метрики $\tilde{g}^{(+)}_{ab}$ и $\tilde{g}^{(-)}_{ab}$ вообще не изоморфны на всем многообразии M^4, так как изометрия между этими метриками в области $t>0$ единственна, и матрица $A(t)$ перехода от полей $\overset{+}{X}_a$ к полям $\overset{-}{X}_a$ неаналитична при $t=0$ (t — синхронное время). Таким образом, аналитическое продолжение за фиктивную особенность не единственно.

Удивляться свойствам метрики Тауба — Мизнера не приходится; рассмотрим простой пример двумерной метрики на двумерном многообразии с координатами x, τ в области $\tau>0$:

$$ds^2=d\tau^2-\frac{\tau^2}{4}\,dx^2.$$

Эта метрика допускает группу G: $x\to x+x_0$. Будем считать координату x циклической: $x\sim x+2\pi$. Таким образом, здесь $G=SO(2)$. Эта метрика синхронна и имеет смысл только при $\tau>0$. Зададим два продолжения, сделав замены:

$$\tau=2\sqrt{u_+},\quad x=\ln u_+-v_+;$$
$$\tau=2\sqrt{u_-},\quad x=\ln u_-+v_-.$$

В координатах $(u_\pm, v_\pm)$ имеем

$$ds^2_\pm=\pm 2du_\pm dv_\pm-u_\pm(dv_\pm)^2.$$

Матрица $\tilde{g}^{(\pm)}_{ab}$ имеет вид

$$\tilde{g}^{(+)}_{ab}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -u_+\end{pmatrix},\quad \tilde{g}^{(-)}_{ab}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -u_-\end{pmatrix}.$$

Координата $v_\pm$ циклическая, $-\infty<u_\pm<\infty$. Замена переменных от $\tilde{g}^{(\pm)}_{ab}$ к $\tilde{g}^{(-)}_{ab}$ в двумерном случае существует и имеет вид

$$u_+=u_-,\quad v_+=-v_-.$$

Эта замена не обобщается на решение Тауба — Мизнера.

В двумерном примере метрик $(ds_\pm)^2$ линия $u_\pm = 0$ есть предельный цикл для линий $x = \text{const}$ синхронного времени, ортогональных орбитам группы $G = SO(2)$ (рис. 164).

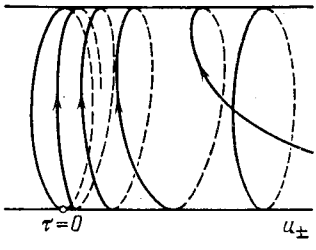


Рис. 164

7. Более общие модели. Известен ряд других, более сложных однородных моделей с ненулевой материей $\varepsilon \neq 0$, которые также обладают «фиктивной особенностью» и продолжаются в область, где орбиты группы не пространственноподобны (там эти решения могут иметь весьма сложное поведение). Наибольший интерес представляют однородные модели с группами типов I, V, VII и IX (см. § 24 части I), алгебры Ли которых описываются следующими формулами:

$\mathbb{R}^3$ (тип I), $\quad [X_\alpha, X_\beta] = 0;$

$\mathfrak{g}_5$ (тип V), $\quad [X_1, X_2] = X_2,\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = -X_3;$

$\mathfrak{g}_7$ (тип VII), $\quad [X_1, X_2] = aX_2 + X_3,\ [X_2, X_3] = 0,$

$\qquad\qquad\qquad\quad [X_3, X_1] = X_2 - aX_3;$

$\mathfrak{g}_9$ (тип IX), $\quad [X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2.$

Эти модели интересны в первую очередь, поскольку в них содержатся как частный случай изотропные модели Фридмана и имеем смысл говорить об «изотропизации» метрики при расширении Вселенной. Простейшим решением такого рода, дающем «наивное» решение проблемы изотропизации в частном случае, является метрика Гекмана — Шюкинга (тип I)

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^{3} c_i t^{2p_i} (t + t_0)^{4/3 - 2p_i}\, dx_i^2, \qquad (62)$$

$$c_i > 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

При $t \to 0$ имеем асимптотику решения Казнера (выше), а при $t \to \infty$ асимптотику решения Фридмана.

Для изотропных моделей алгебры Ли их групп движений имеют вид

$$G = G_+^6\colon\ [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k,\ [Y_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k,$$
$$[X_i, Y_j] = 0 \text{ (случай } S^3);$$

$$G = G_0^6\colon\ [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k,\ [X_i, Y_j] = \varepsilon_{ijk} Y_k,$$
$$[Y_i, Y_j] = 0 \text{ (случай } \mathbb{R}^3);$$

$$G = G_-^6 = sl(2, \mathbb{C}) \text{ (случай } L_3).$$

Укажем в этих алгебрах Ли подалгебры G размерности три типов I, V, VII, IX, которые транзитивно действуют на многообразиях S^3, $\mathbb{R}^3$, L^3:

$$\begin{aligned}
&\text{I: } [Y_i, Y_j] = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3;\\
&\text{V: } [X_1, X_2] = X_2, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_3;\\
&\text{VII: } [X_1, X_2] = aX_2 + X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 - aX_3;\\
&\text{IX: } [X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k, \qquad i, j, k = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{63}$$

Итак, решения Фридмана для изотропного случая являются частным случаем однородных моделей типов I, V, VII и IX, которые благодаря этому пригодны для исследования их однородных возмущений. (В множестве возможных структурных констант типы I и V «предельны» для типов VII и IX.)

Оказывается, что решения с фиктивной особенностью не являются общими в моделях типов I, VII и IX (и, вероятно, V) и исчезают при малых возмущениях (они «нетипичны»). Имеется целый ряд нетривиальных асимптотик при $t \to 0$, из которых наиболее сложной является так называемый «осцилляционный режим», открытый сравнительно недавно. Эта тема интенсивно развивалась с конца 60-х годов, и мы не будем здесь входить в современные вопросы, связанные с «осцилляционными режимами», с проблемой возникающей здесь теории уравнений Эйнштейна как качественной теории динамических систем.

В течение 70-х годов было проведено глубокое исследование эволюции Вселенной в однородных моделях на ранних стадиях эволюции методами современной многомерной качественной теории динамических систем. Эти исследования завершили предшествующие работы физиков, открывших первоначально более элементарными методами сложный осцилляционный режим эволюции метрики при сжатии Вселенной к сингулярности, дали классификацию всех других режимов на ранних стадиях и позволили четко поставить и решить (в рамках теории однородных космологических моделей) следующий вопрос: как точно определяются «типичные начальные состояния» метрики на ранних стадиях эволюции (по отношению к процессу расширения) и какими они фактически являются.

В случае модели типа IX (группа $G = SU(2)$), если материя «в среднем» не движется, $u = (1, 0, 0, 0)$, то метрику пространства можно во все моменты времени считать диагональной в синхронном времени:

$$g_{\alpha\beta}(t) = q_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}.$$

Если $p = k\varepsilon$, $0 \leqslant k \leqslant 1$, то уравнения Эйнштейна после замены времени $t \to \tau$, $q^k\, d\tau = dt$, где $q = q_1 q_2 q_3$, приобретут вид гамиль-

тоновой системы с гамильтонианом H (проверьте!),

$$H = \frac{1}{4(q_1q_2q_3)^{1-k}}\left(P_2(p_\alpha q_\alpha) + P_2(q_\alpha^2)\right), \quad p_i = \frac{d}{dt}(q_jq_l), \quad i \neq j \neq l \neq i, \tag{64}$$

$$P_2(x_1, x_2, x_3) = 2\sum_{\alpha<\beta}^{3} x_\alpha x_\beta - \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2.$$

Замечание. В случае I типа система также диагонализуется и гамильтониан имеет вид $H = H^1(p, q) = \dfrac{1}{4(q_1q_2q_3)^{1-k}} P_2(p_\alpha q_\alpha)$.

Имеется связь между H и ε:

$$\varepsilon(q_1q_2q_3)^{1+k} = A = H(p, q) \geqslant 0. \tag{65}$$

Поэтому «физическая область» $S \subset \mathbb{R}^6(p, q)$ выделяется условиями

$$q_\alpha > 0, \quad H(p, q) \geqslant 0. \tag{66}$$

Имеется масштабная группа преобразований:

$$q_\alpha \to \lambda q_\alpha, \quad p_\alpha \to \lambda p_\alpha, \quad H \to \lambda^{3k-1}H. \tag{67}$$

Для элемента объема $q = \sqrt{-g} = q_1q_2q_3$ имеем

$$\dot{q} = \frac{1}{2}(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3). \tag{68}$$

Отсюда следует, что если $\dot{q}(t_0) < 0$, то $\dot{q}(t) < 0$ для всех $t > t_0$, причем $\dfrac{d^2}{dt^2}(q^{1/3}) = -R_0^0 q^{1/3}/3 < 0$. Поэтому, направляя время в сторону сжатия, неизбежно получим точку t_1, в которой $q(t_1) = 0$ (особенность или «фиктивная особенность»). Направляя время обратно, в сторону расширения, будем изучать стадию $q > 0$ и $\dot{q} > 0$. Аксиально изотропный случай получим на фазовой поверхности $q_2 \equiv q_3$ (или $q_2 = q_3$, $p_2 = p_3$). Используя масштабную группу (67), в этом случае можно свести уравнение Эйнштейна к трехмерной динамической системе. Выбирая координаты

$$u = \frac{p_1q_1}{p_2q_2 + p_3q_3} = \frac{p_1q_1}{2p_2q_2}, \quad w = \frac{q_1^2}{2p_2q_2}, \quad v = \frac{q_2w}{q_1}, \tag{69}$$

мы получим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{d\tau} = \dot{u} = -w^2 + 2v^2 - 2uv^2 + (2u-1)H_2,\\
&\dot{w} = w(u - 1 + 2H_2 - 2v^2),\\
&\dot{v} = \frac{1}{2}v(-k - (1-k)(u-1)^2 - (1-k)w^2 - 4kv^2),\\
&H_2 = \frac{1-k}{4}(1 - (u-1)^2 - w^2 + 4v^2), \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{w}{q_1v^2}
\end{aligned} \tag{70}$$

при условии положительности метрики и энергии:

$$H_2 \geqslant 0, \quad w < 0, \quad v < 0. \tag{71}$$

На «границе», где $v = 0$, получаем в координатах u, w, v инвариантное многообразие размерности 2 с координатами u, w, в которых система имеет вид

$$\dot{u} = -w^2 + (2u - 1)\overline{H}_2, \quad \dot{w} = w(u - 1 + 2\overline{H}_2), \tag{72}$$
$$\overline{H}_2 = \frac{1-k}{4}(1 - (u-1)^2 - w^2).$$

Особые точки имеют координаты:

Ф (седло) $u = 1/2$, $w = 0$, $v = 0$;

C (седло) $u = 2$, $w = 0$, $v = 0$;

N (фокус) $u = \frac{3+k}{5-k}$, $w = -\frac{1}{5-k}\sqrt{(1+3k)(1-k)}$, $v = 0$;

T (узел) $u = w = v = 0$.

Картина поведения траекторий (72) имеет вид, показанный на рис. 165. Общая траектория (при сжатии) в силу свойства $\dot{v}/v < 0$ стремится к поверхности $v = 0$. Вся физическая область в координатах u, w, v имеет вид $H_2 \geqslant 0$, $w \leqslant 0$, $v \leqslant 0$. Приближаясь к границе $v = 0$, траектория примерно повторяет картину траекторий на границе $v = 0$ (см. рис. 165). Сепаратрисы («усы»), входящие изнутри физической области в особые точки типов Ф, N, T, дают решения уравнений Эйнштейна, где при $t \to 0$ метрика имеет асимптотику

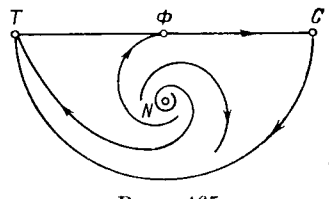


Рис. 165

$$(\Phi) \quad q_i \cong c_i t^{\frac{4}{3(1-k)}}$$

(в частном случае здесь имеем решения Фридмана $q_1 = q_2 = q_3$);

$$(T) \quad q_1 \cong c_1 t^2, \quad q_2 \cong q_3 \cong c_2$$

(в частном случае при $q_2 = q_3$ здесь имеем решение Тауба);

$$(N) \quad q_1 \cong c_1 t^{\frac{1-k}{1+k}}, \quad q_2 \cong c_2 t^{\frac{3+k}{2(1+k)}}, \quad q_3 \cong c_3 t^{\frac{3+k}{2(1+k)}}.$$

Таким образом, имеется достаточно много асимптотик типа T, дающих фиктивную особенность в том более слабом смысле, что метрика $g_{\alpha\beta}$ может быть лишь непрерывно продолжена (без вторых производных). Плотность энергии имеет «слабую» особенность (тип T) $\varepsilon \sim t^{-(1+k)}$ ($\varepsilon (q_1 q_2 q_3)^{1+k} = \text{const}$).

Без гипотезы аксиальной изотропии тип T уже не будет «общим» в модели типа IX.

Для более простых I и V типов, если материя не движется ($u^0 = 1$ и $u^\alpha = 0$ при $\alpha = 1, 2, 3$), исследование уравнений Эйнштейна без гипотезы аксиальной изотропии сводится к динамической системе на фазовой плоскости.

Подробное описание этих и других результатов теории однородных космологических моделей читатель найдет в книге [49], см. также [50]. Обсуждение ряда важных физических аспектов релятивистской космологии содержится в книгах [38], [39], [47].

Проведенное выше качественное исследование динамики однородной аксиально изотропной модели типа IX на ранней стадии эволюции методологически весьма интересно. Оно показывает, что «типичные» состояния, отвечающие процессу сжатия (окрестность типа T), не совпадают с «типичными» состояниями, отвечающими процессу расширения (окрестность типа N). Это сразу же видно из рис. 121, где стрелки отвечают процессу сжатия. Строго говоря, термин «типичные состояния» здесь означает следующее. Если взять случайное начальное условие и решать уравнения Эйнштейна в сторону сжатия, то достаточно близко к особенности с вероятностью 1 мы окажемся в фазовой окрестности типа T в этой модели. Для процесса расширения точное определение типичного состояния более сложно. Здесь уместно воспользоваться построенным выше трехмерным фазовым многообразием в координатах u, v, w, где возникают «бесконечно ранние» состояния; им отвечает кусок плоскости $v = 0$, $\overline{H}_2 \geqslant 0$, так как $v \to 0$ при сжатии пространственного объема к нулю. Учитывая этот ансамбль бесконечно ранних состояний (которых, строго говоря, нет в физической области фазового пространства $v > 0$, $H_2 > 0$), получаем естественный подход к определению понятия типичного состояния метрики на ранней стадии эволюции Вселенной по отношению к процессу расширения (а не сжатия!). Следует задать случайное начальное условие на некотором малом расстоянии $\varepsilon > 0$ от границы, например, где $|v| = \varepsilon$. Затем, решая уравнения Эйнштейна в сторону расширения, нужно посмотреть развитие компонент метрики; не исключено, что за малое время $t_0(\varepsilon)$ компоненты метрики успевают сосредоточиться в некоторой более узкой части фазового пространства, в окрестности определенных режимов, где $t_0(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Выделенные таким образом режимы (при естественных гипотезах на распределение начальных данных при $|v| = \varepsilon$) назовем «типичными ранними состояниями», отвечающими процессу расширения Вселенной в данной космологической модели. Как видно из рис. 121, после поворота стрелок в аксиально изотропной модели типа IX процессу расширения будут отвечать типичные состояния в окрестности типа N в отличие от сжатия, которому соответствует класс типичных состояний в окрестности типа T.

Анализ полностью анизотропных космологических моделей приводит к более сложным динамическим системам. Итоги этого анализа (и он сам) обсуждаются в книге [49]. Во всех достаточно сложных однородных космологических моделях процессу сжатия с вероятностью 1 отвечает осцилляционный режим Белинского — Лифшица — Халатникова (БЛХ) (см. также конец книги [38]), которому соответствует в качественной теории весьма интересный в некотором смысле «странный» аттрактор динамической системы Эйнштейна, лежащий на границе (после построения правильных координат) физически допустимой области фазового пространства, куда скатываются все траектории при уменьшении объема (стремлении к особенности).

Заметим, в частности, что в ОТО без космологической постоянной процесс сжатия не может быть устойчиво изотропным и флуктуации неизбежно выведут на сложные режимы типа БЛХ, которые упираются в аналитически сложную, никуда не продолжаемую особенность. Из этого вытекает, в частности, неправомочность рассмотрения какой-либо «предшествующей» стадии жизни Вселенной, где сжатие предшествовало расширению.

Процессу расширения, как оказывается, отвечают совсем другие, более регулярные типичные ранние состояния эволюции; их определение аналогично аксиально изотропной модели типа IX (см. выше), но более сложно. Среди этих состояний имеются только степенные асимптотики — квазиизотропные типа Ф, типов N, T и некоторые другие. В некоторых случаях эти степенные асимптотики носят промежуточный характер и до двух-трех раз успевают сменить друг друга на ранней стадии. Они довольно слабо зависят от типа однородной модели. Можно утверждать, что в итоге с большой вероятностью уже весьма рано (в точном смысле, указанном выше) успевает установиться квазиизотропный режим типа Ф, где темп расширения «почти», т. е. в главном члене асимптотики, изотропен, хотя сами компоненты метрики могут не быть изотропными. Настоящей, точной изотропизации Вселенной — стремления уже на ранней стадии именно к модели Фридмана с подавляющей вероятностью — из классической ОТО не следует. Таковы современные итоги теории однородных космологических моделей.

Общее исследование моделей IX и VII типов приводит к асимптотическим режимам, которые уже на ранней стадии расширения «изотропизуются» в некотором слабом смысле [49].

§ 32. Некоторые примеры глобальных решений уравнений Янга — Миллса. Киральные поля

1. Общие замечания. Решения типа монополей. Напомним, что поле Янга — Миллса $A_q(x)$ со значением в алгебре Ли группы G — это просто локальная форма записи связности в расслое-

нии со структурной группой G. Здесь x — локальные координаты в области U базы главного расслоения p: $E \to M$, над которой задано разложение в прямое произведение (см. § 24)

$$p^{-1}(U) = U \times G.$$

Мы будем рассматривать далее группу $G = SU(2)$ и базу $U = \mathbb{R}^n = M$, где $n = 3$, 4, причем связность «тривиализуется» при $|x| \to \infty$. Это значит, что при $|x| \to \infty$

$$A_a(x) \approx \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x), \tag{1}$$

где $g(x)$ — функция со значениями в G. Кроме поля $A_a(x)$, будем рассматривать также поле $\psi(x)$ со значениями в векторном пространстве V, на котором задано линейное представление группы G. Для простоты будем считать, что V — это также алгебра Ли группы G, на котором алгебра Ли действует по формуле

$$A \leftrightarrow \operatorname{ad} A\colon\ \psi \to [A, \psi]$$

(присоединенное представление). Лагранжиан поля ψ в отсутствие связности должен иметь вид

$$L(\psi) = \frac{1}{2}\langle \partial\psi, \partial\psi\rangle - u(|\psi|^2), \tag{2}$$

где скалярное произведение в пространстве V определяется формой Киллинга (см. § 3), скалярное произведение $\langle \partial\psi, \partial\psi\rangle$ определяется формой Киллинга на V и метрикой базы $g_{ab}(x)$. В присутствии связности $A_a(x)$ следует сделать замену

$$\partial_a \to \partial_a - \operatorname{ad} A_a(x) = \nabla_a, \tag{3}$$

и ввести полный лагранжиан полей ψ и A (см. § 42 части I)

$$L(\psi, A) = \frac{1}{2}\langle \nabla\psi,\ \nabla\psi\rangle - u(|\psi|^2) + \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\left(F_{ab}F^{ab}\right), \tag{4}$$

где

$$F_{ab} = \frac{\partial A_b}{\partial x^a} - \frac{\partial A_a}{\partial x^b} + [A_a, A_b].$$

Переходя к постановкам глобальных задач, следует считать поле $\psi(x)$ сечением некоторого векторного расслоения со слоем V и структурной группой G. О базе этого расслоения, если это не область в $\mathbb{R}^n$, мы отдельно скажем потом.

О функции u мы предположим, что $u \geqslant 0$ и ее график имеет вид, показанный на рис. 166.

Нас будут интересовать случаи $n = 3$ и $n = 4$.

Рассмотрим сначала случай $n = 3$. Пусть $G = SU(2)$, $\psi(x)$ — трехкомпонентное вещественное поле, операция в алгебре Ли — векторное произведение, база — евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Рас-

сматриваем стационарную задачу для величины

$$S\{\psi, A\} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x \left\{ \frac{1}{2} \langle \nabla\psi, \ \nabla\psi \rangle - u(|\psi|^2) + \frac{1}{4} \operatorname{Sp}\left(F_{ab}F^{ab}\right) \right\}. \quad (5)$$

Определение. *Вакуумным решением* уравнения $\delta S = 0$ называется поле (ψ, A) такое, что:

а) $F_{ab} = 0$;
б) $u(|\psi|^2) = \min, \quad \psi = \text{const} = \psi_0$;
в) $\langle \nabla\psi, \ \nabla\psi \rangle = 0$.

Поскольку метрики базы $\mathbb{R}^3$ и слоя $V = \mathbb{R}^3$ евклидовы, из этого определения следует, что для всех x

$$A_\alpha = \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} g^{-1}(x), \quad \alpha = 1, 2, 3, \qquad (6)$$

$$[A_\alpha(x), \ \psi] = 0.$$

Поэтому поле $A_\alpha(x)$ направлено по оси $\psi = \psi_0$ в алгебре Ли и является градиентом числовой функции $A_\alpha(x) = a_\alpha(x)\psi_0$, $a_\alpha(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$. Добавляя к A_α градиентное слагаемое, мы сделаем поле A_α нулевым.

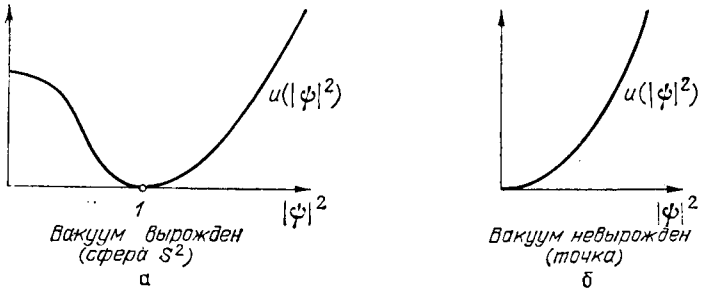


Рис. 166

Множество вакуумных решений образует сферу S^2 векторов $\psi_0 \in V = \mathbb{R}^3$, задаваемых условием

$$|\psi_0|^2 = 1 \qquad (7)$$

в силу свойств функции u. В этом случае говорят, что вакуум «вырожден».

Класс допустимых полей (A, ψ) в постановке вариационной задачи $\delta S = 0$ для функционала (5) определяется требованием: при $|x| \to \infty$ поля (A, ψ) должны стремиться к «вакуумным» решениям, у которых $A \equiv 0$ и $\psi = \psi_0$. При этом вектор ψ_0 не обязан быть одним и тем же для всех направлений ухода $x \to \infty$.

Если ψ_0 зависит только от направления $x = |x| \cdot n$, $|n| = 1$, $\psi_0 = \psi_0(n)$, то имеем отображение

$$\psi_0\colon S^2 \to S^2, \tag{8}$$

которое направлению $n \in S^2$ сопоставляет точку $\psi_0(n)$ из «вакуумного» многообразия $u(|\psi_0|^2) = \min$. Отображение ψ_0 определяет «граничные условия» на бесконечности для полей (ψ, A). Степень отображения ψ_0: $S^2 \to S^2$ дает нам целочисленный топологический инвариант вариационной задачи в $\mathbb{R}^3$.

Лагранжиан (5) инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\begin{gathered} A_a(x) \to g(x) A_a(x) g^{-1}(x) - \frac{\partial g}{\partial x^a} g^{-1}(x), \\ \psi \to g\psi g^{-1} = T_g(\psi), \end{gathered} \tag{9}$$

где функция $g(x)$ со значениями в G определена на всем $\mathbb{R}^3$ и при $|x| \to \infty$, $x = |x| \cdot n$, имеет предел:

$$g(x) \to g_\infty(n)\colon S^2 \to G. \tag{10}$$

Используя этот произвол, можно менять отображение ψ_0: $S^2 \to S^2$, определяющее граничные условия на бесконечности.

Лемма. *Если отображения* $\psi_0^{(1)}\colon S^2 \to S^2$ *и* $\psi_0^{(2)}\colon S^2 \to S^2$ *гомотопны* (*и только в этом случае*), *можно найти такое отображение* $g_\infty\colon S^2 \to G$, *гомотопное нулю* (*или продолжаемое на все* $\mathbb{R}^3$), *что*

$$\psi_0^{(2)}(n) = T_{g_\infty(n)}\, \psi_0^{(1)}(n) = g_\infty(n)\, \psi_0^{(1)}(n)\, g_\infty^{-1}(n), \tag{11}$$

где n — *единичный вектор из* S^2.

Доказательство. Группа $G = SU(2)$ транзитивно действует на сфере S^2. Рассмотрим расслоение $\pi\colon G \times S^2 \to S^2 \times S^2$, где отображение π задано формулой $\pi(g, n) = (gn, n)$. Определим отображения Ψ_0, $\Psi_1\colon S^2 \to S^2 \times S^2$ следующим образом:

$$\Psi_0(n) = \left(\psi_0^{(1)}(n), \psi_0^{(1)}(n)\right), \quad \Psi_1(n) = \left(\psi_0^{(2)}(n), \psi_0^{(1)}(n)\right).$$

Из гомотопности $\psi_0^{(1)} \sim \psi_0^{(2)}$ вытекает гомотопность отображений Ψ_0 и Ψ_1. Гомотопию Ψ_t, связывающую эти два отображения, можно накрыть гомотопией $\widehat{\Psi}_t$ в пространстве расслоения $G \times S^2$, причем полагаем (по определению), отображение $\widehat{\Psi}_0\colon S^2 \to G \times S^2$ имеет вид

$$\widehat{\Psi}_0(n) = \left(1, \psi_0^{(1)}(n)\right), \quad \pi\widehat{\Psi}_0 = \Psi_0.$$

Тогда отображение $\widehat{\Psi}_1\colon S^2 \to G \times S^2$ имеет следующий вид: $\widehat{\Psi}_1(n) = (g_\infty(n), n)$, где $g_\infty(u)$ и есть искомое отображение g_∞:

$S^2 \to G$. Из построения очевидно, что g_∞ гомотопно отображению в единицу группы. Лемма доказана.

Вследствие леммы 1 отображение ψ_0: $S^2 \to S^2$ можно заменять на любое гомотопное ему. Таким образом, граничное условие определяется гомотопическим классом

$$k = [\psi_0] \in \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}.$$

Примеры. 1) При $k = 0$ калибровочным преобразованием можно сделать $\psi_0 = \text{const}$ ($|x| \to \infty$). Можно считать, что $\psi_0 = (0, 0, 1)$.

В этом случае говорят о «потере симметрии» теории (остается только группа $SO(2) \subset G$ вращений в плоскости векторов (1, 0, 0) и (0, 1, 0) — «малая группа вакуума»). С целью дальнейшего построения теории возмущений около вакуумного состояния, делают замену $\psi = \psi_0 + \tilde{\psi}$, $f_a(x) = (A_a(x))^3$, $(B^1)_a = (A_a)^1$, $(B^2)_a = (A_a)^2$. Получим новый лагранжиан

$$\tilde{L}(f_a, B^1, B^2, \tilde{\psi}) = L(\psi, A).$$

Если потенциал $u(\xi) = u(|\psi|)^2$ имел вид, показанный на рис. 166, *а*, и $u_{\xi\xi}(1) = m^2 > 0$, то получаем (положив $\tilde{\psi}^1 = \tilde{\psi}^2 = 0$ и разлагая u в ряд по ξ в точке $\psi_0 = (0, 0, 1)$ — см. задачу ниже)

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\sum_a (\partial_a \tilde{\psi})^2 - 2m^2\tilde{\psi}^2 + \frac{1}{2}(|B^1|^2 + |B^2|^2) -$$

$$- \frac{1}{2}(|\operatorname{rot} B^1|^2 + |\operatorname{rot} B^2|^2 + |\operatorname{rot} f|^2) + \ldots,$$

где остаток состоит из членов 3-го порядка и выше по полям f, B, $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}^3$.

Задача. Покажите, что калибровочным преобразованием можно добиться $\tilde{\psi}^1 = \tilde{\psi}^2 = 0$.

2) При $k = 1$ можно считать, что $\psi_0(n) = n$ для отображения ψ_0: $S^2 \to S^2$. Это отображение «сферически симметрично». Физиками найдено интересное сферически симметричное решение уравнений Янга — Миллса $\delta S = 0$ для функционала (5):

$$A_a^i = a(r)\,\varepsilon_{aij}x_j,$$

$$\psi^i = x^i \frac{u(r)}{r}, \quad r = |x|, \tag{12}$$

при $r \to \infty$ $\quad u(r) \to u_\infty$, $\quad a(r) \to -\dfrac{1}{gr^2}$,

при $r \to 0$ $\quad u(r) \to \text{const} \cdot r$, $\quad a(r) \to \text{const}$.

Так как граничное отображение на бесконечности

$$\psi_0\colon\ S^2 \to S^2, \quad \psi_0(n) = n \in \mathbb{R}^3 = (\psi^1, \psi^2, \psi^3),$$

имеет степень 1, то его продолжение до гладкого поля $\psi(x)$ в $\mathbb{R}^3 = (x^1, x^2, x^3)$ должно иметь точки, где $\psi = 0$. Итак, существует гладкое решение $\{A_\alpha(x), \psi(x)\}$, где $\psi(x)$ неизбежно обращается в нуль в $\mathbb{R}^3$ в некоторой точке x_0 (пусть эта точка одна).

Имеется интересное отображение, сопоставляющее паре (A_α, ψ) скалярное поле $f_\alpha(x)$, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла в пустом пространстве всюду, где $\psi \neq 0$ (т. е. вне точки x_0):

$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha},$$
$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{|\psi|}\psi^i F^i_{\alpha\beta} - \frac{1}{|\psi|^3}\varepsilon_{ijk}\psi_i(\nabla_\alpha\psi_j)(\nabla_\beta\psi_k). \tag{13}$$

Из вида этого отображения и из (12) следует, что интеграл от поля $H_{\alpha\beta} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha}$ по сфере большого радиуса равен 4π. Поэтому из несингулярного решения уравнений Янга — Миллса получается так называемый «магнитный монополь». Отображение (13) сопоставляет паре (A_α, ψ) расслоение в области $\mathbb{R}^3 \setminus x_0$, где $\psi(x_0) = 0$, с абелевой структурной группой $SO(2) = S^1$, причем решение уравнений Янга — Миллса переходит в решение уравнений Максвелла для стационарного магнитного поля $H = (H_{\alpha\beta}) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha}$.

2. Уравнение дуальности. Перейдем теперь к случаю $n = 4$. Вообще говоря, рассмотрение возникающих в физике лагранжианов требует решения уравнений Янга — Миллса типа $\delta S = 0$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^4_1$ для полей $A_a(x)$ и некоторых полей ψ (возможно, тензорных или спинорных). Уже само «чистое» уравнение Янга — Миллса при отсутствии других полей ψ является нелинейным и довольно сложным в отличие от обычных уравнений Максвелла. Для пространства $\mathbb{R}^4_1$ нетривиальные вещественные решения этих уравнений не известны. В физической литературе найдены серии решений для евклидова пространства $\mathbb{R}^4$, некоторые из них мы далее опишем. Считается, что они также могут оказаться физически полезными. Кроме того, эти решения весьма интересны с чисто математической точки зрения и имеют глубокий геометрический смысл. Будем рассматривать далее функционал Янга — Миллса $S = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Sp}\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) d^4x$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с евклидовыми координатами x^1, x^2, x^3, x^4. При $|x| \to \infty$ мы будем требовать, чтобы

$$F_{ab} \to 0, \quad A_a(x) \approx \frac{\partial g(x)}{\partial x^\alpha} g^{-1}(x). \tag{14}$$

Фактически мы будем требовать, чтобы при вложении $\mathbb{R}^4$ в S^4 в качестве дополнения к верхнему полюсу в S^4 связность $A_a(x)$ гладко продолжалась в этот верхний полюс; расслоение со связностью в $\mathbb{R}^4$ является частью расслоения с базой S^4, рассмотренного на области $\mathbb{R}^4 \subset S^4$. Топологический инвариант расслоения с группой $G = SU(2)$ задается степенью отображения

$$g_\infty\colon S^3 \to SU(2) = G, \quad \deg g_\infty = m, \tag{15}$$

где при $|x| \to \infty$ и $x = |x| \cdot n$ имеем

$$A_a(x) \approx \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x), \quad g(x) \to g_\infty(n).$$

Другая запись этого числа в виде «характеристического класса» обсуждалась также в § 25:

$$m\{F\} = \operatorname{Sp} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{8\pi^2} F_{ab} F_{cd} \varepsilon^{abcd} d^4x = \operatorname{Sp} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{4\pi^2} F_{ab} (*F)^{ab} d^4x, \tag{16}$$

или

$$m\{F\} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Sp}(F \wedge *F) \tag{17}$$

на языке форм ($*F$ — это «дуальная» форма к $F = F_{ab} dx^a \wedge dx^b$, $*F = \frac{1}{2} \varepsilon^{abcd} F_{ab} dx^c \wedge dx^d$). В евклидовой метрике величина

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Sp}[F_{ab} - (*F)_{ab}] [F^{ab} - (*F)^{ab}] d^4x \tag{18}$$

является неотрицательной, $T \geqslant 0$.

Пусть выполнено уравнение

$$F_{ab} = (*F)_{ab}; \tag{19}$$

это равенство равносильно равенству $T = 0$. Далее,

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Sp}(F_{ab} F^{ab}) d^4x + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Sp}(*F_{ab})(*F^{ab}) d^4x -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^4} \operatorname{Sp}(F_{ab} * F^{ab}) d^4x = S\{F\} - 4\pi^2 m\{F\} \geqslant 0.$$

Так как $m\{F\}$ — характеристический класс, получаем:

1) уравнения $\delta T = 0$ и $\delta S = 0$ эквивалентны;

2) более того, так как $T \geqslant 0$, то выполнение уравнения $F_{ab} = *F_{ab}$ для поля Янга — Миллса равносильно тому, что мы имеем абсолютный минимум функционала $S\{F\}$ при заданном числе $m\{F\} = m$ и этот минимум равен m.

Итак, если мы найдем для каждого числа m хотя бы одно решение уравнения $F_{ab} = *F_{ab}$, то тем самым мы строго докажем, что минимумы функционала $S\{F\} = \mathrm{Sp} \int\limits_{\mathbb{R}^4} F_{ab}F^{ab}d^4x$ при указанных граничных условиях описываются уравнением (19).

Задача. Докажите, что решения уравнения (19) удовлетворяют также уравнениям Янга — Миллса.

Для $m = 0$ имеем «тривиальное» решение $F_{ab} = 0$.

Для $m = 1$ будем искать «сферически симметричные» решения в виде ($G = SU(2)$)

$$\pm A_a^i = \frac{1}{2}\left(\widetilde{A}_a^{0i} \pm \frac{1}{2}\varepsilon_{ihl}\widetilde{A}_a^{hl}\right), \quad \widetilde{A}_a^{ij} \in SO(4). \tag{20}$$

Ответ мы окончательно получим такой («инстантон»):

$$\widetilde{A}_a^{ij} = f(r)\left(x^i\delta_a^j - x^j\delta_a^i\right), \quad r = |x|,$$

$$f(r) = \frac{1}{r^2 + \lambda^2}. \tag{21}$$

Для любого $m > 1$ известны решения вида

$$A_\mu = -\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i^2}{(x - x_i)^2}(\partial_\mu\omega_i)\,\omega_i^{-1}, \tag{22}$$

где $\rho = \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\lambda_i^2}{(x - x_i)^2}$, $\omega_i = \dfrac{(x - x_i)_0 + i(x - x_i)_a\sigma_a}{\left[(x - x_i)^2\right]^{1/2}}$, σ_a — матрицы Паули (см. § 14 части I). Общее решение (зависящее от $8m - 3$ параметров) пока в хорошем виде не получено, хотя здесь имеется ряд глубоких результатов. Заметим, что лагранжиан Янга — Миллса (точно так же, как и для обычных уравнений Максвелла; см. § 42 части I) конформно инвариантен. Поэтому можно перейти от $\mathbb{R}^4$ к сфере S^4, на которой метрика является конформно евклидовой (группа конформных преобразований сферы S^4 изоморфна $O(5, 1)$; см. § 15 части I).

Имеется естественное расслоение

$$p\colon \mathbb{C}P^3 \to S^4$$

со слоем S^2 (см. § 24). Напомним его построение. Группа $SU(2)$ действует на $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ обычным образом на каждом слагаемом $\mathbb{C}^2$:

$$(z^1, z^2, w^1, w^2) \xrightarrow{g} (g(z^1, z^2),\ g(w^1, w^2)), \quad g \in SU(2).$$

По определению

$$\mathbb{C}P^3 = (\mathbb{C}^4 \setminus \{0\})/(SO(2) \times R^+),$$

$$S^4 = (\mathbb{C}^4 \setminus \{0\})/(SU(2) \times R^+).$$

Поскольку $SO(2)\subset SU(2)$, возникает расслоение p: $\mathbb{C}P^3\to S^4$. Слои $p^{-1}(x)=\mathbb{C}P^1\subset\mathbb{C}P^3$ лежат в $\mathbb{C}P^3$ как проективные прямые. Решением «уравнений дуальности» (19) является связность в некотором расслоении η над S^4 со слоем $\mathbb{C}^2$ и структурной группой $G=SU(2)$. Рассмотрим расслоение $p^*(\eta)$ над $\mathbb{C}P^3$ с поднятой связностью (тривиальной над слоями $p^{-1}(x)$). Во всяком комплексном (не обязательно голоморфном) расслоении со связностью над комплексным многообразием (здесь над $\mathbb{C}P^3$) имеется «квазикомплексная» структура. Это означает, что в пространстве E расслоения $p^*(\eta)$ связность естественным образом порождает «горизонтальные» направления и тем самым операторы «ковариантной» производной, действующие в функциях на E. Пусть U — область в базе $U\subset\mathbb{C}P^3$ с комплексными координатами z^1, z^2, z^3, $z^\alpha=x^\alpha+ix^{\alpha+3}$, и операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z^1}, \frac{\partial}{\partial z^2}, \frac{\partial}{\partial z^3}$. Локально имеем $p^{-1}(U)\subset E$, $p^{-1}(U)=\mathbb{C}^2\times U$. Координаты в $\mathbb{C}^2$ обозначим через w^1, w^2. Имеем набор операторов, задающих «квазикомплексную структуру»,

$$\frac{\partial}{\partial w^1},\quad \frac{\partial}{\partial w^2},\quad \frac{D}{Dz^1},\quad \frac{D}{Dz^2},\quad \frac{D}{Dz^3}, \tag{23}$$

где $\frac{D}{Dz^\alpha}=\frac{\partial}{\partial z^\alpha}+A^{\mathbb{C}}_\alpha=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha+3}}+A_\alpha-iA_{\alpha+3}$. Условие интегрируемости означает, что все операторы (23) коммутируют. В этом случае в пространстве расслоения E возникает структура комплексного многообразия с локальными комплексными координатами z, w. Само расслоение p: $E\to\mathbb{C}P^3$ окажется тогда голоморфным (т. е. отображение p голоморфно).

Задача. Покажите, что уравнение дуальности для расслоения η над S^4 эквивалентно коммутированию операторов (23) в E над $\mathbb{C}P^3$.

Таким образом, задача нахождения решений уравнения дуальности сводится к теории голоморфных расслоений над $\mathbb{C}P^3$, где с успехом применяются методы алгебраической геометрии.

3. Киральные поля. Интеграл Дирихле. К числу нелинейных полей, интересных физически и таких, в которых возникают топологические явления, относятся так называемые *киральные* поля. Наиболее общим (локально) киральным полем является функция $\psi(x)$ на пространстве $\mathbb{R}^k$ со значениями в некотором нелинейном многообразии M. Глобально такое поле может быть сечением некоторого расслоения со слоем M.

Фактически, интересные киральные поля являются в ситуации, когда M — однородное пространство группы Ли,

$$M=G/H.$$

Главными киральными полями называются такие, у которых $M = G$ (группа Ли). Будем считать эту группу компактной и фиксируем на ней двусторонне инвариантную метрику. Другой важный тип киральных полей — это случай, когда $M = G/H$ является симметрическим пространством компактной группы G со стационарной подгруппой $H \subset G$ (см. § 6). Простейший пример такого рода:

$$M = S^q = SO(q+1)/SO(q).$$

Будем представлять сферу как множество единичных векторов $n \in \mathbb{R}^{q+1}$. В этом случае имеем, как говорят, «n-поле» $n(x)$.

Киральным полям отвечают лагранжианы, имеющие в важнейших случаях следующий вид:

а) Случай главного кирального поля $g(x) \in G$. Положим $A_a(x) = \dfrac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x)$ (это — элемент алгебры Ли),

$$S = \int_{\mathbb{R}^k} \frac{1}{2} \langle A_a(x),\ A_a(x) \rangle\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^k. \qquad (24)$$

Для $G = SO(2)$ поле A_a имеет вид градиента скалярной функции $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \exp\{i\varphi(x)\}, \\ A_a(x) &= i\frac{\partial \varphi}{\partial x^a}. \end{aligned} \qquad (25)$$

Уравнение $\delta S = 0$ сводится к уравнению Лапласа.

Для $G = SU(2)$ это уравнение не столь тривиально. Пусть $A_a(x) = X_i A_a^i(x)$, где A_a^i — скалярные функции и X_1, X_2, X_3 — базис алгебры Ли, в котором $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_3, X_1] = X_2$. Можно считать, что поля $A_a(x)$ составляют связность нулевой кривизны:

$$F_{ab} = \frac{\partial A_a}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b}{\partial x^a} + [A_a, A_b] = 0. \qquad (26)$$

Уравнения $\delta S = 0$ сведутся, кроме (26), к такому соотношению:

$$\frac{\partial A_a}{\partial x^a} = 0 \qquad (27)$$

(докажите это). На компактной некоммутативной группе G любой размерности имеется стандартная двусторонне инвариантная 3-форма Ω, определявшаяся в точке $g = 1$ на алгебре Ли с помощью коммутатора $[\,,\,]$ и формы Киллинга $\langle\,,\rangle$:

$$\Omega(X, Y, Z) = \langle [X, Y], Z \rangle \qquad (28)$$

(смешанное произведение). Здесь X, Y, Z — элементы алгебры

Ли, рассматриваемой как касательное пространство к группе G в точке $g = 1$ (см. § 3). Форма Ω замкнута (это легко проверить непосредственно; впрочем, это вытекает из ее двусторонней инвариантности) и никогда не эквивалентна нулю в когомологиях, т. е. $\Omega \neq d\Omega'$. Для случая $G = SU(2)$ форма Ω есть элемент объема на $SU(2) = S^3$, где $\int\limits_{S^3} \Omega = 1$.

Для главного кирального поля $g(x)$ на $\mathbb{R}^3$, у которого $g(x) \to g_0$ при $g \to \infty$, имеем топологический инвариант

$$[g] \in \pi_3(G).$$

(Для $G = SU(2)$ этот инвариант совпадает со степенью отображения $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3 \xrightarrow{g} S^3$ и вычисляется по формуле $[g] = \int\limits_{\mathbb{R}^3} g^*(\Omega)$.)

Напомним, что функционал Дирихле имеет вид

$$S\{g\} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle A, A\rangle \, d^3x, \tag{29}$$

где

$$A_a(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x),$$

и уравнение $\delta S = 0$ таково:

$$\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\frac{\partial g}{\partial x^a} g^{-1}(x)\right) = 0 \tag{30}$$

или

$$\frac{\partial A_a}{\partial x^a} = 0, \quad \frac{\partial A_a}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b}{\partial x^a} + [A_a, A_b] = 0.$$

Для функционала Дирихле (29) нет, однако, никаких «топологических» оценок на абсолютный минимум при заданном $[g]$, аналогичных случаю $\mathbb{R}^2$ (см. ниже). Рассмотрим «подправленный» киральный лагранжиан («модель Скирма»)

$$S_\delta\{g(x)\} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle A, A\rangle + \delta^2 \langle [A, A], [A, A]\rangle, \tag{31}$$

где $[A, A]_{ab} = [A_a, A_b]$ — форма степени 2 (кососимметрический тензор) со значением в алгебре Ли. Как найти минимум при заданном топологическом инварианте $d = \deg [g(x)\colon (\mathbb{R}^3 \cup \infty) \to G]$ для случая $G = SU(2)$ и функционала S_δ? Рассмотрим новый функционал

$$S_\delta + T = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle A_a + \delta\varepsilon^{abc}[A_a, A_c], A_a + \delta\varepsilon^{abc}[A_b, A_c]\rangle \, d^3x$$

или

$$S_\delta + \int_{\mathbb{R}^3} 2\delta \langle A_a, \varepsilon^{abc} [A_b, A_c] \rangle d^3x = S_\delta + \text{const}\, d \geqslant 0. \tag{32}$$

Для минимума мы должны иметь (если этот минимум достигается при нулевом значении (32)):

$$A_a + \alpha \varepsilon^{abc} [A_b, A_c] = 0.$$

Получаем систему уравнений на функцию $g(x)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\alpha [A_2, A_3], \\ A_2 &= +\alpha [A_1, A_3], \\ A_3 &= -\alpha [A_1, A_2], \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$A_a = \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x),$$

$$\frac{\partial A_a}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b}{\partial x^a} = -[A_a, A_b].$$

Отсюда следует, что $A_a(x) \equiv 0$, так как $A = \delta \operatorname{rot} A$.

Вывод. Для подправленного кирального лагранжиана минимум (если он достигается при заданном d) больше, чем он был бы, исходя из «тривиальной» оценки (32). При отыскании минимумов нельзя заменять оценку на точное равенство в отличие от поля Янга — Миллса в $\mathbb{R}^4$ и n-поля в $\mathbb{R}^3$ (см. ниже). Подправленный киральный лагранжиан (31) не является конформно инвариантным, а поэтому его рассмотрения для S^3 и $\mathbb{R}^3$ дают различные результаты. Для S^3, например, тождественное отображение $S^3 \to S^3$ дает минимум, удовлетворяющий равенству (33). Проверьте это.

б) В случае n-поля $n(x) \in S^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ имеем простейший лагранжиан («интеграл Дирихле»)

$$S\{n(x)\} = \int_{\mathbb{R}^k} \left\langle \frac{\partial n^\alpha}{\partial x^a}, \frac{\partial n^\alpha}{\partial x^a} \right\rangle d^k x. \tag{34}$$

Для случая $k = q$, вводя граничные условия $n(x) \to n_0$ при $|x| \to \infty$, мы получим топологический инвариант поля — степень отображения $S^q \to S^q$:

$$d = \deg n = \int_{\mathbb{R}^q} n^* (\Omega)$$

(см. § 13), где $\int_{Sq} \Omega = 1$ — элемент объема на S^q.

Рассмотрим случай $q = k = 2$ и решим задачу на нахождение абсолютных минимумов действия S при заданной степени d. Если $u^\alpha (\alpha = 1, 2)$ — локальные координаты на сфере S^2 и $x^a (a = 1, 2)$ — координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, то

$$S\{n(x)\} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g^{ab} \tilde{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^b} dx^1 \wedge dx^2, \tag{35}$$

где $g^{ab} = \delta^{ab}$ — метрика на $\mathbb{R}^2$ и $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ — метрика сферы S^2 в координатах u^1, u^2, а отображение $n(x)$ задается формулой

$$n(x) = \{u^\alpha(x^1, x^2), \ \alpha = 1, 2\}.$$

Замечание. Формула (35) определяет «интеграл Дирихле» $S\{n\}$ для любого отображения n: $M \to N$, где (x^a) — локальные координаты M, g_{ab} — метрика в M, (u^α) — локальные координаты в N, $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ — метрика в N.

Задача. Если $N = G$ — группа Ли с двусторонне инвариантной метрикой, то интеграл Дирихле приобретает вид (29) для действия главного кирального поля.

Вернемся к случаю $M = \mathbb{R}^2$, $N = S^2$, где x^1, x^2 — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^2$. Пусть u^1, u^2 — конформно евклидовы координаты в $S^2 \setminus \infty$, в которых метрика имеет вид (см. § 13, часть I)

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = \frac{4(du^1)^2 + 4(du^2)^2}{(1 + (u^1)^2 + (u^2)^2)^2} = \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2},$$

где $z = u^1 + iu^2$, $w = x^1 + ix^2$. Отсюда

$$S\{n\} = 2i \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2 + \left|\frac{\partial z}{\partial \bar{w}}\right|^2}{(1 + |z|^2)^2} dw d\bar{w}. \tag{36}$$

Степень отображения n: $S^2 \to S^2$ вычисляется по формуле

$$\deg n = \int\limits_{\mathbb{R}^2} n^*(\Omega) = \frac{i}{2\pi} \int n^* \left(\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{u_x v_y - u_y v_x}{(1 + |z|^2)^2} dx\, dy, \tag{37}$$

где $u = u^1$, $v = u^2$, $x = x^1$, $y = x^2$. Разность

$$S\{n\} - 2\pi \deg n$$

имеет вид

$$S - 2\pi \deg n = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2}{(1 + |z|^2)^2} dx\, dy \geqslant 0. \tag{38}$$

Отсюда имеем вывод:

1) Для отображений $n(x)$ степени d имеется неравенство

$$S - 2\pi \deg n = S - 2\pi d \geqslant 0.$$

2) Для абсолютных минимумов функционала S в гомотопическом классе $d \geqslant 0$ это неравенство является равенством $S_{\min} = 2\pi d$, которое равносильно равенствам

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{39}$$

(т. е. уравнениям Коши — Римана). Наоборот, если (39) верно и $\deg n = d$, то имеем минимумы функционала S в этом гомотопическом классе. Итак, минимумы функционала S — это голоморфные отображения n: $S^2 \to S^2$ и только они: $z = P(w)/Q(w)$, где P, Q — многочлены. Этот важный результат, полученный сначала в геометрии, а затем в физике, применялся в теории ферромагнетизма.

Разберем тот же самый пример с другой точки зрения. Сфера S^2 есть однородное пространство

$$S^2 = SO(3)/SO(2) = SU(2)/U(1) = G/H,$$

и, более того, симметрическое пространство (см. § 6). Точно это означает, что алгебра Ли группы G разлагается в сумму $L = L_0 + L_1$, причем $[L_0, L_0] = L_0$, $[L_0, L_1] \subset L_1$ и $[L_1, L_1] \subset L_0$; здесь L_0 — алгебра Ли стационарной подгруппы $H \subset G$. Подпространства L_0 и L_1 ортогональны относительно формы Киллинга. Другое изложение теории n-поля таково: рассмотрим поле $g(x) \subset G$ и будем считать эквивалентными поля $g(x)$ и $e^{i\varphi(x)}g(x)$ для любой функции $e^{i\varphi(x)} \in H$. Переход $g(x) \to e^{i\varphi(x)}g(x)$ является «калибровочным» преобразованием. Фактически классы эквивалентности — это поля $n(x) \in G/H$. Рассмотрим «киральный лагранжиан»

$$S\{g(x)\} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \langle A, A\rangle_{L_1} d^n x, \tag{40}$$

где $A_a(x) = \dfrac{\partial g(x)}{\partial x^a} g^{-1}(x)$, $\langle A, A\rangle_{L_1}$ означает скалярное произведение, совпадающее на подпространстве L_1 алгебры Ли L с формой Киллинга и нулевое на L_0. При калибровочном преобразовании

$$g(x) \to e^{i\varphi(x)}g(x) = \tilde{g}(x)$$

имеем

$$\tilde{A} = e^{i\varphi(x)} A e^{-i\varphi(x)} + i\nabla\varphi, \tag{41}$$

где компонента $i\nabla\varphi$ лежит в L_0. Следовательно,

$$S\{g(x)\} = S\{\tilde{g}(x)\}$$

и лагранжиан (40) корректно определен на классах эквивалентности G/H. В нашем случае $G = SO(3)$, $H = SO(2)$, и поле A_a

трехкомпонентно, $A_a = A_a^0 e_0 + A_a^1 e_1 + A_a^2 e_2$, где

$$\begin{aligned} &[e_0, e_1] = e_1, \qquad [e_1, e_2] = e_0, \quad [e_2, e_0] = e_1, \\ &\langle e_0, e_0\rangle_{L_1} = 0, \quad \langle e_1, e_1\rangle_{L_1} = 1, \quad \langle e_2, e_2\rangle_{L_1} = 1, \\ &\langle e_i, e_j\rangle_{L_1} = 0, \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{42}$$

Вектор e_0 порождает L_0, векторы e_1, e_2 порождают L_1. Уравнения $F_{ab} = 0$ имеют вид

$$\frac{\partial A_a^\beta}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b^\beta}{\partial x^a} + [A_a, A_b]^\beta = 0, \tag{43}$$

где $\alpha = 1, 2$, $\beta = 0, 1, 2$. Положим

$$\begin{aligned} &B_a = A_a^1 + iA_a^2, \quad B_a^* = A_a^1 - iA_a^2, \\ &A_a^0 = if_\alpha, \qquad f_{ab} = \frac{\partial A_a^0}{\partial x^b} - \frac{\partial A_b^0}{\partial x^a}. \end{aligned} \tag{44}$$

Из соотношений (43) при $\beta = 0$ имеем

$$f_{ab} = \text{const} \cdot (B_1 B_2^* - B_2 B_1^*) \tag{45}$$

(напомним, что мы работаем в двумерном пространстве, $a = 1, 2$). Из (43) при $\beta = 1, 2$ получаем

$$\frac{\partial B_1}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^1} = B_2 f_1 - B_1 f_2. \tag{46}$$

Введем «ковариантные» производные

$$D_a = \frac{\partial}{\partial x^a} - f_a.$$

Очевидно, что

$$D_1 B_2 - D_2 B_1 = 0, \tag{47}$$

и, варьируя функционал (34), получаем

$$\frac{\partial B_a}{\partial x^a} = 2 f_a B_a. \tag{48}$$

Поле $if_a = A_a^0$ является калибровочным, так как согласно (41) имеется градиентное преобразование

$$f_a \to f_a + \frac{\partial \varphi}{\partial x^a},$$

$$B_a \to e^{i\varphi} B_a.$$

Итак, мы свели теорию n-поля к уравнениям комплексного векторного поля (B_a), взаимодействующего с калибровочным полем f_a, где на тензор напряженности f_{ab} наложена дополнитель-

ная связь:

$$f_{ab} = \frac{\partial f^a}{\partial x^b} - \frac{\partial f_b}{\partial x^a} = \text{const} \cdot (B_1 B_2^* - B_2 B_1^*). \tag{49}$$

Топологический инвариант n-поля определяется в этих переменных интегралом от напряженности

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma \cup \Gamma_\infty} (f_1 dx^1 + f_2 dx^2) =$$

$$= \text{const} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^2} (B_1 B_2^* - B_2 B_1^*)\, dx^1 \wedge dx^2;$$

здесь контур Γ_∞ есть окружность большого радиуса $R \to \infty$, а $\Gamma = \bigcup\limits_i \Gamma_i$, где Γ_i — мелкие контуры размера $\varepsilon \to 0$, охватывающие особые точки x_i и имеющие правильную ориентацию. Допущение особенностей в конечных точках необходимо для соответствия с теорией n-поля $n(x)$: точки $x_i = n^{-1}(\infty)$ будут выглядеть как особые в нашей записи. В этих точках поля (B_a, f_a) могут быть не определены, так как отображение $n\colon S^2 \to S^2$ не накрывается глобально отображением $g\colon S^2 \to SO(3)$ (или $SU(2)$) — в одной точке $\infty \in S^2$ сечение расслоения $S^3 \to S^2$ становится многозначным и вместе с ним становятся многозначными функции $g(x)$ для $x \in n^{-1}(\infty)$.

Если z — комплексная координата на $S^2 \backslash \infty$, то $SO(3)$-инвариантная 2-форма имеет вид (см. § 13 части I)

$$\Omega = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}. \tag{50}$$

Форма $n^*(\Omega)$ имеет вид

$$n^*(\bar{\Omega}) = \text{const}\,(B_1 \bar{B}_2 - B_2 \bar{B}_1)\, dx^1 \wedge dx^2 = \omega \wedge \bar{\omega}, \tag{51}$$

$$\omega = B_1 dx^1 + B_2 dx^2.$$

Если $w = x^1 + ix^2$ — комплексная координата в $\mathbb{R}^2$ и отображение $n = z(w)$ голоморфно, то

$$n^*(\Omega) = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + |z(w)|^2)^2} = \omega \wedge \bar{\omega}. \tag{52}$$

Можно проверить, что форма $\omega = B_a dx^a$ имеет вид

$$\omega = \frac{dz}{dw}\frac{dw}{1 + |z|^2} = B_a dx^a, \quad w = x^1 + ix^2.$$

Действительно, голоморфные n-поля $z(w)$ дают абсолютные минимумы функционала

$$S = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \langle A, A\rangle_{L_1} d^2x = \int\limits_{\mathbb{R}^2} B_a \bar{B}_a dw \wedge d\bar{w} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (B_1 \bar{B}_1 + B_2 \bar{B}_2)\, dw \wedge d\bar{w} \tag{53}$$

при условии

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} n^*(\Omega) = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}^2} (B_1\overline{B}_2 - B_2\overline{B}_1)\, dw \wedge \overline{dw} = d.$$

Рассмотрим величины

$$S + \frac{i}{\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}^2} n^*(\Omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (B_1\overline{B}_1 + B_2\overline{B}_2 + i(B_1\overline{B}_2 - B_2\overline{B}_1))\, dw \wedge \overline{dw} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} (B_1 + iB_2)(\overline{B}_1 - i\overline{B}_2)\, dw \wedge \overline{dw} \geqslant 0. \tag{54}$$

Для минимумов имеем $S + \frac{i}{\lambda}\int n^*\Omega = 0$ или

$$B_1 + iB_2 = 0. \tag{55}$$

Отсюда следует, что

$$B_a dx^a = (B_1 - iB_2)\frac{dz}{2} = B_1 dz. \tag{56}$$

Легко проверить равенство

$$B_1 = \frac{\text{const}}{1 + |z|^2}\frac{dz}{dw}. \tag{57}$$

Форма $f_1 dx^1 + f_2 dx^2$ является связностью в расслоении $n^*(\eta)$, где η — стандартное хопфовское расслоение $S^3 \to S^2$ с группой $G = S^1$.

Рассмотрим теперь уравнение $\delta S = 0$ для всех экстремумов действия S вида (35). Извлечение из современной литературы: эта задача сводится к теории уравнения «sin — gordon», уже возникавшего (см. § 30 части I) как уравнение вложения поверхности постоянной отрицательной кривизны в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Пусть метрика плоскости $\mathbb{R}^2$ является метрикой Минковского $\mathbb{R}^2_1$. В переменных ξ, η, где $ds^2 = d\xi d\eta$, функционал S имеет вид

$$S\{n\} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} n^\alpha_\xi n^\alpha_\eta\right) d\xi\, d\eta \tag{58}$$

при условии $n^2 = 1$. Выведем уравнение Эйлера — Лагранжа. Пусть μ — произвольная неизвестная пока функция (множитель Лагранжа). Рассмотрим функционал

$$S_\mu\{n\} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\langle n_\xi, n_\eta\rangle - \mu\langle n, n\rangle)\, d\eta\, d\xi = \int \Lambda_\mu(n, n_\xi, n_\eta)\, d\eta\, d\xi. \tag{59}$$

Уравнение $\delta S = 0$ имеет вид (см. § 37 части I)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial n^\alpha_\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial n^\alpha_\eta}\right) = \frac{\partial\Lambda}{\partial n^\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{60}$$

при условии $\langle n, n\rangle = 1$. Отсюда

$$n^{\alpha}_{\xi\eta} = \mu n^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{61}$$

или ввиду $\langle n, n\rangle = 1$

$$n_{\xi\eta} = \langle n_{\xi\eta}, n\rangle n, \quad \mu = \langle n, n_{\xi\eta}\rangle. \tag{62}$$

Покажем, что величины $|n_\xi|$, $|n_\eta|$ являются «интегралами», т. е.

$$\frac{\partial |n_\xi|}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial |n_\eta|}{\partial \xi} = 0. \tag{63}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \langle n_\xi, n_\xi\rangle}{\partial \eta} = \langle n_{\xi\eta}, n_\xi\rangle = \langle n_{\xi\eta}, n\rangle \langle n_\xi, n\rangle = 0$$

в силу (62), так как n_ξ ортогонально n. Таким образом, $|n_\xi| = f(\xi)$, $|n_\eta| = g(\eta)$. Произведя подстановку

$$\cos\omega = \frac{\langle n_\xi, n_\eta\rangle}{f(\xi)\, g(\eta)}, \tag{64}$$

для величины ω получим из (62) уравнение

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi\, \partial \eta} = fg \sin\omega. \tag{65}$$

Локальной заменой $\xi \to \xi'(\xi)$, $\eta \to \eta'(\eta)$ сведем уравнение (65) к виду «sin — gordon»

$$\varphi_{\xi\eta} = \sin\varphi. \tag{66}$$

Исследование этого уравнения значительно труднее, чем приведенное выше исследование минимумов S при заданной степени.

§ 33. Минимальность комплексных подмногообразий

Напомним, что комплексное многообразие M называется кэлеровым, если его метрика $g_{ij}dz^i d\bar{z}^j$ определяет замкнутую форму $\omega = \frac{i}{2} g_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j$.

Теорема 1. *Пусть M — кэлерово многообразие комплексной размерности n, $X \subset M$ — его комплексное k-мерное подмногообразие. Рассмотрим следующий класс вещественных вариаций Y подмногообразия X в M. Вариация Y — вещественное $2k$-мерное подмногообразие в M, совпадающее с X вне компактной области (на X). При этом требуется, чтобы была задана «деформация» в виде вещественного ориентированного $(2k+1)$-мерного многообразия z с краем $\partial Z = X \cup (-Y)$, где $(-Y)$ есть Y с противоположной ориентацией* (рис. 167).

Тогда объем $v(X)$ многообразия X не более объема $v(Y)$ (если X и Y не компактны, то имеются в виду объемы тех областей, где X и Y различны). Если объем Y совпадает с объемом X, то Y тоже комплексно.

Таким образом, в кэлеровых многообразиях компактные комплексные подмногообразия являются глобально минимальными подмногообразиями (т. е. экстремалями многомерной вариационной задачи на минимум объема). Так, например, в $\mathbb{C}P^n$ глобально

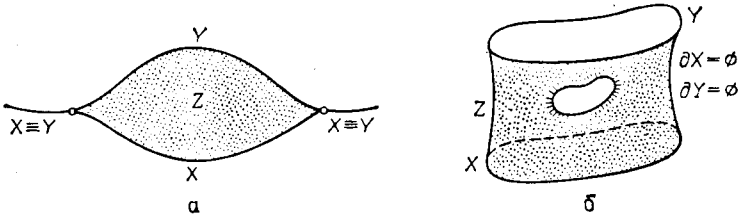


Рис. 167

минимальными подмногообразиями являются комплексные подмногообразия. Кэлеровым многообразием является также комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, а потому любое комплексное подмногообразие X в $\mathbb{C}^n$ минимально относительно возмущений, неподвижных вне некоторой ограниченной области в X. Напомним, что все комплексные подмногообразия в $\mathbb{C}^n$ некомпактны.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.

Лемма 1. *Для произвольной внешней 2-формы* ω *на* $\mathbb{R}^2$ *можно выбрать такой ортонормированный базис* $e_1, \ldots, e_{2n}$, *в котором форма* ω *имеет вид* $\lambda_1\omega_1 \wedge \omega_2 + \ldots + \lambda_n\omega_{2n+1} \wedge \omega_{2n}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *неотрицательные числа, а* $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ — *базис, сопряженный базису* $e_1, \ldots, e_{2n}$ *в* $\mathbb{R}^{2n}$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ произвольный ортонормированный базис $e_1', \ldots, e_{2n}'$. Для заданной 2-формы ω построим матрицу $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \omega(e_i', e_j')$. Назовем матрицу A матрицей, ассоциированной с формой ω. Поскольку форма ω полностью определяется своими значениями на базисных векторах, то она полностью определяется своей матрицей A (с указанием соответствующего ортонормированного базиса $e_1', \ldots, e_{2n}'$). Ясно, что A — кососимметрическая матрица. Следовательно, для A существует такой ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{2n}$, в котором матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{cc} 0 & \lambda_n \\ -\lambda_n & 0 \end{array} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные числа. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ — сопряженный базис к базису $e_1, \ldots, e_{2n}$. Тогда очевидно, что

$$\omega = \sum_{\alpha=1,3,\ldots,2n-1} \lambda_\alpha \omega_\alpha \wedge \omega_{\alpha+1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ *задана эрмитова метрика* (g_{ij}). *Пусть, далее* ω — *внешняя 2-форма, соответствующая метрике* g_{ij}, *т. е. определяемая формулой* $\omega(v_1, v_2) = \langle iv_1, v_2\rangle$. *Положим* $\sigma_k = \frac{1}{k!}\omega^k = \frac{1}{k!}\underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k}$. *Тогда выполнено неравенство* $|\sigma_k(v_1, \ldots, v_{2k})| \leqslant 1$, *где* $v_1, \ldots, v_{2k}$ — *произвольная ортонормированная система векторов в* $\mathbb{R}^{2n}$. *Кроме того, равенство* $|\sigma_k(v_1, \ldots, v_{2k})| = 1$ *достигается тогда и только тогда, когда* $v_1, \ldots, v_{2k}$ *порождают комплексное подпространство в* $\mathbb{R}^{2n}$ (*т. е. когда вещественная линейная оболочка векторов* $v_1, \ldots, v_{2k}$ *инвариантна относительно умножения на* i).

Доказательство. 1. Случай $k = 1$. Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ — ортогональные векторы длины 1. Ясно, что $|\omega(v_1, v_2)| = |\langle iv_1, v_2\rangle| \leqslant |iv_1| \cdot |v_2| = 1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\pm v_2 = iv_1$, т. е. векторы v_1, v_2 порождают комплексное одномерное подпространство (вещественной размерности 2).

2. Общий случай. Пусть $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ — подпространство, порожденное $v_1, \ldots, v_{2k}$. Обозначим сужение $\omega|_V$ через $\tilde{\omega}$. Согласно лемме 1 можно выбрать ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{2k}$ подпространства V и сопряженный ему базис $\omega_1, \ldots, \omega_{2k}$ такие, что $\tilde{\omega} = \lambda_1\omega_1 \wedge \omega_2 + \ldots + \lambda_k\omega_{2k-1} \wedge \omega_{2k}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — неотрицательные вещественные числа. Ясно, что $\omega(e_{2p-1}, e_{2p}) = \lambda_p$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$. Отсюда согласно случаю $k = 1$ получаем, что $\lambda_p \leqslant 1$, причем $\lambda_p = 1$ тогда и только тогда, когда $ie_{2p-1} = \pm e_{2p}$. Обозначим ограничение формы $\sigma_k = \frac{1}{k!}\omega^k$ на подпространство V через $\tilde{\sigma}_k$. Тогда $|\tilde{\sigma}_k(e_1, \ldots, e_{2k})| = \left|\frac{1}{k!}\tilde{\omega}^k(e_1, \ldots, e_{2k})\right| = \lambda_1 \ldots \lambda_k \leqslant 1$; равенство достигается тогда и только тогда, когда $\lambda_p = 1$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$, т. е. тогда и только тогда, когда $ie_{2p-1} = \pm e_{2p}$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$. Последнее равенство в точности означает, что V — комплексное подпространство пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть φ — внешняя форма степени l на $\mathbb{R}^{2n}$, а V — линейное l-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^{2n}$; пусть $v_1, \ldots, v_l$ и $v_1', \ldots, v_l'$ — произвольные ортонормированные базисы пространства V одного класса ориентации. Из закона преобразования l-мерной внешней формы в l-мерном пространстве (а именно: умножение на определитель линейного преобразования) сразу следует, что $\varphi(v_1, \ldots, v_l) = \varphi(v_1', \ldots, v_l')$.

Поэтому форму φ можно корректно определить как функцию на множестве классов ориентированных ортонормированных базисов одного и того же подпространства (при изменении подпространства будет меняться и функция φ). Другими словами, l-форма φ на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ определяет функцию (обозначаемую той же буквой φ) на многообразии Грассмана $\widehat{G}_{2n,\,l}$ ориентированных l-мерных подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. § 5). Класс ориентированных ортонормированных базисов подпространства V, т. е. точку из $\widehat{G}_{2n,\,l}$, обозначим через $\widehat{V}$.

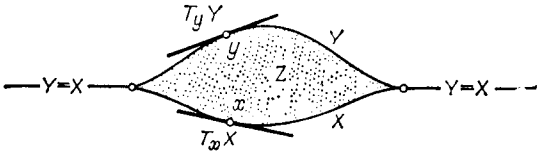


Рис. 168

Пусть теперь X — комплексное подмногообразие в M и пусть Y — допустимая вариация. Обозначим, как и прежде, через T_xX (соответственно T_yY) касательное пространство к подмногообразию X (соответственно Y) в точке x (соответственно y). Пусть Z — подмногообразие в M такое, что $\partial Z = X \cup (-Y)$ (рис. 168). Пусть $\omega = -\frac{i}{2} g_{ij}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$ — определенная выше замкнутая 2-форма на M, и пусть $\sigma_k = \frac{1}{k!}\omega^k$. Тогда очевидно и $d\sigma_k = 0$. По формуле Стокса

$$0 = \int\limits_Z d\sigma_k = \int\limits_{\partial Z} \sigma^k = \int\limits_{X \cup (-Y)} \sigma_k = \int\limits_X \sigma_k - \int\limits_Y \sigma_k, \text{ т. е. } \int\limits_X \sigma_k = \int\limits_Y \sigma_k.$$

Обозначим $2k$-мерные внешние формы объема подмногообразий X и Y через dx и dy соответственно. Тогда

$$\int\limits_X \sigma_k = \int\limits_X \sigma_k(\widehat{T}_xX)\, dx; \quad \int\limits_Y \sigma_k = \int\limits_Y \sigma_k(\widehat{T}_yY)\, dy.$$

Так как X — комплексное подмногообразие в M, т. е. T_xX — комплексное подпространство в $T_xM = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, то согласно лемме 2 $\sigma_k(\widehat{T}_xX) \equiv 1$, $\sigma_k(\widehat{T}_yY) \leqslant 1$ (напомним, что Y — не обязательно комплексное подмногообразие). Отсюда

$$v(X) = \int\limits_X dx = \int\limits_X \sigma_k(\widehat{T}_xX)\, dx = \int\limits_Y \sigma_k(\widehat{T}_yY)\, dy \leqslant \int\limits_Y dy = v(Y).$$

Таким образом, первая часть утверждения теоремы доказана. Далее, очевидно, что равенство $v(X) = v(Y)$ достигается тогда и

только тогда, когда на множестве полной $2k$-мерной меры выполнено тождество $\sigma_k(\hat{T}_y Y) \equiv 1$. Согласно лемме 2 это последнее тождество равносильно тому, что $T_y Y$ — комплексное подпространство для $y \in Y$ (для почти всех точек $y \in Y$), т. е. Y — комплексное многообразие в M. Теорема доказана полностью.

Из доказательства теоремы видно, что предположение о неособости подмногообразия $X \subset M$ не является существенным ограничением. Доказательство (в терминах подмножеств полной меры) проходит и для алгебраических комплексных поверхностей $X \subset M$ (т. е. задаваемых системой полиномиальных уравнений на M) несмотря на то, что такие поверхности могут иметь особые точки (например, типа конусов над гладкими многообразиями). В этом случае условие бордантности X и Y следует заменить более общим соотношением: X гомологично Y в группе $H_{2k}(M, \partial X)$, т. е. X и Y определяют один и тот же элемент в группе $H_{2k}(M, \partial X)$.

В $\mathbb{C}P^n$ подмногообразие $\mathbb{C}P^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ реализует образующую в группе $H_{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и является глобально минимальным в этом гомологическом классе. Можно доказать (это уже менее тривиальный факт), что если $Y \subset \mathbb{C}P^n$ — какое-нибудь $2k$-мерное подмногообразие, реализующее образующую $1 \in \mathbb{Z} = H_{2k}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ и такое, что $v\ V) = v(\mathbb{C}P^k)$, то существует преобразование $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ из группы $SU(n+1)$, переводящее Y в $\mathbb{C}P^k$. Другими словами, подмногообразие $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^n$ является единственным (с точностью до изометрий) решением многомерной вариационной задачи (на абсолютный минимум) в классе гомологий $1 \in \mathbb{Z} = H_{2k}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$. Более того, оказывается, что если Y реализует элемент $m \in \mathbb{Z} = H_{2k}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$, $m \neq \pm 1$, то $v(Y) > v(\mathbb{C}P^k)$. Мы не будем здесь доказывать все эти утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Книги учебного типа по геометрии и топологии

1. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.— М.: Наука, 1967.
2. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1956.
3. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия.— М.: Наука, 1974.
4. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.
5. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Ефимов Н. В. Высшая геометрия.— М.: Наука, 1971.
7. Норден А. П. Теория поверхностей.— М.: Гостехиздат, 1956.
8. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1952.
9. Зейферт Т., Трельфалль В. Топология.— М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
10. Зейферт Т., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом.— М.: ИЛ, 1947.
11. Милнор Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.
12. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1971.
13. Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.— М.: Наука, 1985.
14. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1984.
15. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли.— М.: Мир, 1969.
16. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.
17. Номидзу К. Группа Ли и дифференциальная геометрия.— М.: ИЛ, 1960.
18. Чжэнь Шэн-шэнь. Комплексные многообразия.— М.: ИЛ, 1961.
19. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий.— М.: Мир, 1967.
20. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.
21. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М.: Мир, 1964.
22. Стинрод Н. Топология косых произведений.— М.: ИЛ, 1953.
23. Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии.— М.: Наука, 1971.
24. Новиков С. П., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Задачи по геометрии.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
25. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.— М.: Наука, 1981.
26. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы.— М.: Наука, 1977.
27. Лефшец С. Алгебраическая топология.— М.: ИЛ, 1949.
28. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий.— М.: Наука, 1984.

II. Книги по дифференциальным уравнениям и классической механике

29. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1969.
30. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1974.
31. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
32. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
33. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.
34. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.— М.: Наука, 1973.
35. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— М.: Гостехиздат, 1954.

III. Дополнительная литература

36. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969.
37. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1984.
38. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.
39. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация.— М.: Мир, 1977.
40. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1983, 1984.
41. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.
42. Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел.— М.: ИЛ, 1956.
43. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике.— М.: Мир, 1977.
44. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики.— М.: Наука, 1967.
45. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.
46. Делоне Б. Н., Александров А. Д., Падуров Н. Н. Математические основы структурного анализа кристаллов.— Л.; М.: ОНТИ, 1934.
47. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной.— М.: Наука, 1975.
48. Теория солитонов/Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1979.
49. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.— М.: Наука, 1980.
50. Нелинейные волны.— М.: Наука, 1979, с. 60—72.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абелев тор 438
Алгебра Ли 199, 426
— — полупростая 429
— — простая 429
— — Z_2 -градуированная 450
Алгебраическое число неподвижных точек (число Лефшеца) 523
Аннулятор скобки Пуассона 698
Аффинная группа 41

База накрытия 537
— расслоения 574, 596
Белая дыра 706
Биголоморфная эквивалентность 433
Бутылка Клейна 530

Вакуумное решение 733
Вариационная производная 289, 336, 689
Вектор 29, 412
— времениподобный 62
— изотропный (световой) 62
— пространственноподобный 62
— скорости кривой 25, 28
— энергии-импульса 296
Векторное поле левоинвариантное 208
— — линейное 206
— произведение 56
Вектор-потенциал электромагнитного поля 309
Включение электромагнитного поля 309, 390
Вложение многообразия 475
Внешний дифференциал формы 220
Внешняя алгебра 157
Времениподобная функция 704
Вторая квадратичная форма поверхности 83

Гамильтониан 304
Гамильтонова система 313
Гармонический радиус-вектор 357
Гауссово отображение 234, 491
Геодезическая 263
— медленная 297
Гессиан 83, 485
Гиперповерхность 73
Гиперэллиптическая кривая 108
Гипотеза Эйнштейна 297
Главная нормаль 57
Главные кривизны 83, 86
— направления 85
Гомотопическая эквивалентность 534
Гомотопия 496
— относительная 498
Гравитационный коллапс 707
— радиус 377
Градиент кососимметрического тензора 218
Градиентная система 312
Граница области 19
Группа 37
— Вейля 640
— Галилея 49
— голономий 603
— гомологий одномерная 550
— движений 38
— зацепления 654
— изотропии 443
— калибровочная 393
— когомологий 643
— кос 655
— Ли 420
— — комплексная 436
— — простая 429
— Мёбиуса 561
— преобразований дискретная 544
— Пуанкаре 63
— симметрии кристалла 171
— структурная расслоения 596
— трансляций кристалла 169
— узла 650
— унитарная 100
— фуксова 556
— фундаментальная 531
Группы гомотопические 567
— — относительные 570

Движение 38
— собственное 42
Двусторонняя гиперповерхность 420
Действие 286
— группы на многообразии 442
— — — — свободное 597
— — — — транзитивное 442
— для гравитационного поля 349
— — электромагнитного поля 344
Дивергенция 218, 222
Динамическая система 658
Дираковское сопряжение 388
Диффеоморфизм 192

Дифференциал отображения 192
Дифференциальная форма 154
Дифференциально-геометрическая G-связность 623
Длина кривой 25, 33

Евклидова топология 409

Закон Гука 146
Замкнутое множество 409
Замкнутые косы 656
Зеркальное вращение 46

Изотопия узла 649
Изотопные вложения 498
Изотропная функция 704
Изотропный (световой) конус 61
Импульс 289
Инвариант Хопфа 92
Инвариантное подмножество динамической системы 659
Инварианты электромагнитного поля 184
Инверсия 130
Индекс критической точки 485
— особой точки векторного поля 514
— пересечения 520
Индуцированная топология 409
Инстантон 738
Интеграл векторного поля 196
— Дирихле 742
— от кососимметрического тензора 229
— — — — по многообразию 468
— — функции по поверхности 230
— по антикоммутирующим переменным 157
Интегралы Лапласа — Рунге — Ленца 318
Интегральная кривая 192
Исчезающий цикл особой точки 617
— — слоения 687

Канторово множество 665
Карта 408
Картановская подалгебра 640
— связность 397
Касательный вектор кривой 25
Квадратичная форма (на векторах) 31
Кватернионы 124
Ковариантно постоянное векторное поле 261
Ковариантное дифференцирование 256
Ковектор 30
Коммутатор векторных полей 197
Комплексно аналитическая замена координат 104
— — функция 104
Константа Хаббла 722
Координатные окрестности 408
— — расслоения 597
Координаты декартовы 17
— евклидовы 24, 34
— изотермические 110
— конформные 109
— полярные 22
— псевдоевклидовы 35
— псевдосферические 36
— сферические 23
— цилиндрические 23
Космологическая модель 716
Кососимметрический линейный оператор 161
Коэффициент зацепления 525
Кривизна гауссова 83, 86
— кривой 52, 55
— — ориентированная 52
— риманова 272
— скалярная 277
— средняя 83, 86
Критическая точка 477
— — невырожденная 484
Критическое значение 477
Кручение кривой 57

Лагранжиан 289
— невырожденный 304, 690
— поля векторного комплексного 367
— — скалярного действительного 367
— — — комплексного 365
— сильно невырожденный 304
Линейный оператор 141
Лист Мёбиуса 529
Локальные координаты 408
— — на поверхности 73

Магнитный монополь 736
Матрица Якоби замены координат 21
Матрицы Паули 125, 383
Метрика евклидова 34
— Киллинга 209
— кэлерова 248
— Лобачевского 94
— — в модели Клейна 96
— — — — Пуанкаре 95
— на многообразии 413
— — поверхности 76
— псевдоевклидова 35
— псевдориманова 35
— риманова 32
— сферы 91

Метрика Шварцшильда 377
— эрмитова 247
Минимальная поверхность 356
Мировая линия точечной частицы 18
Многообразие 407
— Грассмана 446
— замкнутое 415
— комплексно аналитическое 433
— Крускала 706
— кэлерово 748
— линейных элементов 458
— неориентируемое 418
— ориентированное 411, 418
— ориентируемое 418
— оснащенное 586
— — с краем 586
— с краем 415
— симплектическое 460
— флагов 447
— Штифеля 444
Многообразия диффеоморфные 412
Множество меры нуль 477
Модели Фридмана 718
Модель Скирма 741
Момент импульса 303
Монодромия 545

Надстройка 590
Накрывающая гомотопия 539, 573
Накрытие 537
— регулярное 544
— с ветвлением 542
— универсальное 541
Натуральное уравнение кривой 58
Натуральный параметр 28
Невырожденные точки кривой 57
Неособая поверхность 70, 72
— точка поверхности 70, 72
— — системы координат 21
Неравенство треугольника 410
Нормальное расслоение 461

Область без границы 19
— с границей 19
Овеществление 97
Ограничение тензора 190
Одномерное слоение 660
Однопараметрическая подгруппа 124, 426
Оператор Якоби 331
— * 162
Опускание индексов 160
Оснащение 586
Особая точка векторного поля 513
— — — — невырожденная 513
Открытое множество 409
Отображение голоморфное 433
— многообразий гладкое 411
— непрерывное 409
Отображение расслоений 600

Параллельный перенос вектора 262
Первая квадратичная форма поверхности 76
Переменные «действие — угол» 673
Перестановка индексов 148
Площадь области на поверхности 79
Поверхность лагранжева 323
— — коническая 327
Погружение 415, 475
Подмногообразие 414
Поднятие индексов 160
Поле гравитационное 297
— — слабое 297
— калибровочное 393
— киральное 739
— — главное 740
— электромагнитное 184
— Янга — Миллса 401, 731
Поливектор 157
Полином Александера 651
Полный поток тензорного поля через поверхность 233
Полуспинорное представление 387
Правильное значение 480
Предельный цикл 661
— — слоения 686
Представление алгебры Ли 430
— группы 430
— точное 431
Преобразование гиперболическое 562
— годографа 701
— — обобщенное 702
— калибровочное 393, 626
— каноническое 320
— конформное 43, 129
— Лежандра 304
— локсодромическое 562
— Лоренца 63
— — собственное 66
— области 37
— — комплексного пространства 106
— ортохронное 65
— параболическое 562
— симплектическое 321
— унитарное 99
Приведение в общее положение 483
Примитивная ячейка решетки 165
Принцип Мопертюи 310
— наименьшего действия 289
— — — релятивистский 295
— Ферма 311
Проекция накрытия 537
— расслоения 574, 596
Произведение Уайтхеда 583
Производная Ли 195
Производящая функция канонического преобразования 323

Пространственная группа решетки 169
Пространственно-временной интервал 36
— континуум 18
Пространственноподобная функция 704
Пространство евклидово 24
— кокасательного расслоения 460
— компактное 410
— линейно связное 410
— метрическое 409
— Минковского 36
— накрывающее 537
— однородное 442
— — главное 442
— отображений 410
— паракомпактное 468
— проективное 421
— расслоения 574, 596
— симметрическое 448
— — 1-го типа 452
— — 2-го типа 452
— топологическое 409
— хаусдорфово 410
— n-мерное декартово пространство 18
Пространство-время плоское 348
Прямая сумма расслоений 614
Пфаффиан 312

Радиус кривизны 52, 55
Разбиение единицы 467
Размерность пространства 18
Распределение 679
— интегрируемое 679
Расслоение ассоциированное 598
— векторное 614
— главное 597
— гладкое 596
— индуцированное 610
— комплексно аналитическое 615
— путей 574
— Серра 573
— универсальное 610
— Хопфа 604
— — кватернионное 609
— — обобщенное 604
— n-универсальное 610
Регулярная точка 480
Решение Казнера 723
— Керра 712
— Тауба — Мизнера 724
— Толмена 710
Решетка Браве 166
— кристалла 164
Риманова поверхность 107, 439
Род узла 652
Ротор 218

Свертка 149
Связность в расслоении (общего вида) 601
— гомотопическая 574
— дифференциально-геометрическая 257
— симметрическая 258
—, согласованная с метрикой 264
Сечение расслоения 614
Сила 289
Символы Кристоффеля 256
Симметрический линейный оператор 161
Синхронная система отсчета 717
Скалярное произведение 24, 33, 142
— — вектора и ковектора 150
— — евклидово 24
— — ковекторов 142
— — эрмитово 99
Скобка Пуассона 314, 668
— — невырожденная 669
— — полевая 694
— — — дифференциально-геометрическая 700
— — — локальная 695
— Пуассона — Ли 669
Скользящее отражение 42
След линейного оператора 149
Слоение 679
— Риба 685
Слой накрытия 537
— расслоения 574
Собственное время 63
— отображение (гомотопия) 498
Собственные значения квадратичной формы 161
Сопряженные точки 333
Сопутствующая система координат 707
Сохраняющийся ток 366
Спинорное представление группы вращений 385
— — — Лоренца 386
Степень отображения 499
Стереографическая проекция 91, 94
Сфера Римана 434
Сферически симметричное многообразие 704

Тензор 142, 414
— деформации 145
— кручения 258
— малой деформации 146, 198
— момента импульса 341
— напряжений 145

Тензор Римана 272
— Риччи 277
— энергии-импульса 338
— — сплошной среды 379
— — электромагнитного поля 189, 347
Тензорное произведение расслоений 614
— умножение 149
Тетрадный формализм 274
Тождество Бьянки, 284, 635
— Якоби 199
— — обобщенное 584
Тор комплексный 437
Точечная группа решетки 171
Точка ветвления 542
Точная гомотопическая последовательность пары 572
— — — расслоения 575
Трансверсаль динамической системы 660
Трансверсально регулярное (t-регулярное) отображение 481
Трансверсальное пересечение 483
Тривиальная связность 626
Тривиальное накрытие 538
— расслоение 596
Трубчатая окрестность 495
Тэта-функция 439

Углы Эйлера 120
Угол между линиями 26, 33
Уравнение Вейля 389
— Гамильтона — Якоби 324
— — — укороченное 326
— Дирака 389
— дуальности 737
— Клейна — Гордона 366
— коммутативности 692
— Кортевега-де Фриза 697
— Лиувилля 114
— состояния 707
— структурное 633
— Эйлера — Лагранжа 289
— sin-gordon 283
Уравнения Гамильтона 305
— гидродинамического типа 701
— Кирхгофа 670
— Коши — Римана 104
— Максвелла 224
— Петерсона — Кодацци 282
— Пфаффа 681
— Эйлера 670
— Эйнштейна 349
Усреднение по группе 473

Фазовое пространство 304, 313, 668
Фокальная точка 494
Форма голоморфная 247
— Киллинга 429
— — симметрического пространства 454
— кривизны 233, 394
— — в пространстве расслоения 633
— типа (p, q) 155
Формула вычетов 238
— Стокса 237, 469, 472
— Эйлера 87
Формулы Кристоффеля 265
— Френе 52, 57
Фронт волны 328
Фундаментальная область 553
Функции перехода 408
— склейки расслоения 596
Функционал Дирихле 359
Функция Арфа 593
— высоты 491
— Морса 485

Характер представления 430
Характеристический класс 402, 637
— — топологический 643
Хронологическая экспонента 628

Центр группы 431
Циклическая координата 291
Циркуляция векторного поля 233

Черная дыра 706
Число вращения 663
— Уитни 509

Эйлерова характеристика 522
Эквивалентность расслоений 600
Экспонента векторного поля 194
— от матрицы 122
Экстремаль 288
Электромагнитные волны 190
Элемент объема 155, 414
— — на группе инвариантный 473
Энергия 289

Якобиан 21
— комплексный 105
Якобиево поле 333

G-сводимость 603, 622
h-поле 740
H-пространство 581
γ-матрицы 385
4-вектор тока 344

Борис Анатольевич Дубровин
Сергей Петрович Новиков
Анатолий Тимофеевич Фоменко

СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методы и приложения

Редакторы *Д. Б. Фукс, В. В. Донченко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректоры *О. М. Березина, И. Я. Кришталь*

ИБ № 12693

Сдано в набор 02.04.85. Подписано к печати 28.01.86. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 47,5. Усл. кр.-отт. 47,5. Уч.-изд. л. 47,3. Тираж 16 000 экз. Заказ № 690. Цена 1 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск 77, Станиславского, 25