А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
механико-математических и физических
специальностей вузов*

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.16
Б 66
УДК 517

Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики.— 2-е изд., доп.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 312 с.

Сборник содержит свыше 1000 задач по курсу уравнений в частных производных, читаемому в высших учебных заведениях студентам физико-математического и инженерно-физического профилей (с повышенной программой математического образования). Материал в книге расположен по традиционным разделам этого курса — уравнениям эллиптического, гиперболического и параболического типов. Особое внимание уделено методам, наиболее часто применяемым на практике при построении решений указанных уравнений (методу Фурье, методу интегральных преобразований, методу конечных разностей, вариационным методам и т. д.).

Во втором издании (первое выходило в 1977 г.) добавлены новые подразделы, а также значительно увеличено количество задач.

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов.

Рецензент
кафедра высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой — член-корреспондент АН СССР *С. И. Похожаев*)

Б $\frac{1702050000-062}{053(02)-85}$ 54—85

Оглавление

Предисловие

Настоящая книга представляет собой сборник задач по курсу уравнений математической физики, читаемому в высших учебных заведениях нашей страны студентам математического, физического и инженерно-физического профилей. Она состоит из двух частей. В первой части сформулированы условия задач. В начале каждого параграфа этой части собраны сведения из соответствующих разделов программы теоретического курса. Во второй части приведены ответы к задачам, а в тех случаях, когда задачи нестандартны, и подробное объяснение хода получения решений.

Большое внимание уделено методам, наиболее часто применяемым на практике при построении решений основных задач для эллиптических, гиперболических и параболических уравнений.

Во втором издании книги значительно увеличено количество задач, в частности, за счет включения в нее новых разделов. В некоторых местах улучшено изложение материала, исправлены замеченные опечатки.

Авторы выражают благодарность Л. Д. Кудрявцеву, С. И. Похожаеву, М. Л. Краснову, А. А. Вашарину и А. И. Киселеву за ценные замечания, способствующие улучшению изложения материала. Мы также благодарны Г. В. Калиниченко за помощь при оформлении рукописи и чтение корректур.

А. В. Бицадзе
Д. Ф. Калиниченко

Глава I

Вводные понятия. Классификация уравнений и систем уравнений с частными производными. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Вывод некоторых уравнений математической физики

§ 1. Дифференциальное уравнение с частными производными и его решения. Системы уравнений с частными производными

Обозначим через D область n-мерного евклидова пространства E_n точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с декартовыми ортогональными координатами $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, $n \geqslant 2$.

Пусть $F \equiv F\left(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots\right)$ — заданная действительная функция точек $x \in D$ и действительных переменных

$$p_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$$

с неотрицательными целочисленными индексами $i_1, \ldots, i_n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k$, $k =$ $= 0, \ldots, m$, $m \geqslant 1$, по крайней мере одна из частных производных которой

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m,$$

отлична от нуля.

Уравнение вида

$$F\left(x, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial_{x_1}^{i_1} \ldots \partial_{x_n}^{i_n}}, \ldots\right) = 0, \qquad x \in D, \tag{1}$$

называется *дифференциальным уравнением с частными производными порядка m* относительно неизвестной функции $u \equiv u(x)$, а левая часть F этого равенства, представляющая собой совокупность операций над функцией u,— *дифференциальным оператором с частными производными порядка m*.

Каждая определенная в D-области задания уравнения (1) действительная функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращающая его в тождество, называется *регулярным решением* уравнения (1).

Наряду с регулярными решениями в теории уравнений с частными производными важную роль играют также *элементарные*, или *фундаментальные, решения.*

Когда F представляет собой N-мерный вектор $F=(F_1, \ldots, F_N)$ с компонентами $F_i\left(x, \ldots, p_{i_1\ldots i_n}, \ldots\right)$, $i=1, \ldots, N$, зависящими от $x \in D$ и от M-мерных векторов $p_{i_1\ldots i_n}=\left(p^1_{i_1\ldots i_n}, \ldots, p^M_{i_1\ldots i_n}\right)$, векторное равенство (1) называется *системой дифференциальных уравнений с частными производными* относительно неизвестных функций $u_1, \ldots, u_M$ или относительно неизвестного вектора $u=(u_1, \ldots, u_M)$.

Уравнение (1) называется *линейным*, если F линейно зависит от всех $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$, $\quad 0 \leqslant k \leqslant m$.

Линейное уравнение можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1\ldots i_n} a_{i_1\ldots i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = f(x), \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = k, \quad x \in D,$$

или кратко

$$Lu = f(x), \quad x \in D,$$

где

$$L \equiv \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1\ldots i_n} a_{i_1\ldots i_n}(x) \frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = k,$$

— *линейный дифференциальный оператор порядка m.*

Линейное уравнение называется *однородным* или *неоднородным* в зависимости от того, будет ли $f(x) \equiv 0$ или $f(x) \not\equiv 0$.

Уравнение (1) называется *квазилинейным*, если F линейно зависит лишь от $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$, $\quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m$.

Выяснить, являются ли приведенные ниже равенства дифференциальными уравнениями с частными производными:

1. $\cos(u_x+u_y)-\cos u_x \cos u_y+\sin u_x \sin u_y=0$.
2. $u_{xx}^2+u_{yy}^2-(u_{xx}-u_{yy})^2=0$.
3. $\sin^2(u_{xx}+u_{xy})+\cos^2(u_{xx}+u_{xy})-u=1$.
4. $\sin(u_{xy}+u_x)-\sin u_{xy}\cos u_x-\cos u_{xy}\sin u_x+2u=0$.
5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{tg} u-u_x\sec^2 u-3u+2=0$.
6. $\ln|u_xu_y|-\ln|u_x|-\ln|u_y|+5u-6=0$.

Определить порядок уравнений:

7. $\ln|u_{xx}u_{yy}| - \ln|u_{xx}| - \ln|u_{yy}| + u_x + u_y = 0.$

8. $u_x u_{xy}^2 + (u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_y)^2 - 2xy = 0.$

9. $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y + u = 0.$

10. $2(u_x - 2u)\,u_{xy} - \dfrac{\partial}{\partial y}(u_x - 2u)^2 - xy = 0.$

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{yy}^2 - u_y\right) - 2u_{yy}\dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xy} - u_x) - 2u_x + 2 = 0.$

12. $2u_{xx}u_{xxy} - \dfrac{\partial}{\partial y}(u_{xx} - u_y)^2 - 2u_y u_{xxy} + u_x = 0.$

Выяснить, какие из следующих уравнений являются линейными (однородными или неоднородными) и какие нелинейными (квазилинейными):

13. $u_x u_{xy}^2 + 2xuu_{yy} - 3xyu_y - u = 0.$

14. $u_y u_{xx} - 3x^2 uu_{xy} + 2u_x - f(x, y)u = 0.$

15. $2\sin(x+y)u_{xx} - x\cos y u_{xy} + xyu_x - 3u + 1 = 0.$

16. $x^2 y u_{xxy} + 2e^x y^2 u_{xy} - (x^2y^2 + 1)u_{xx} - 2u = 0.$

17. $3u_{xy} - 6u_{xx} + 7u_y - u_x + 8x = 0.$

18. $u_{xy}u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0.$

19. $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x +$
$+ e(x, y)u_y + h(x, y) = 0.$

20. $a(x, y, u_x, u_{xy})\,u_{xyy} + b(x, y, u_{yy})\,u_{yyy} + 2uu_{xy}^2 - f(x, y) = 0.$

21. $u_{xy} + u_y + u^2 - xy = 0.$

22. $u_{xy} + 2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2 + u\right) - 6x\sin y = 0.$

23. $2xu_{xy} - 6\dfrac{\partial}{\partial x}(u^2 - xy) + u_{yy} = 0.$

24. $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(yu_y + u_x^2\right) - 2u_x u_{xy} + u_x - 6u = 0.$

§ 2. Классификация уравнений и систем уравнений с частными производными

Форма порядка m

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m, \tag{2}$$

относительно действительных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называется *характеристической формой*, соответствующей уравнению (1).

В случае линейного уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f \tag{3}$$

характеристическая форма (2) является квадратичной

$$Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j.$$

В каждой фиксированной точке $x \in D$ квадратичную форму Q при помощи неособого аффинного преобразования переменных $\lambda_i=\lambda_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i=1, \ldots, n$, можно привести к каноническому виду

$$Q=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i^2, \tag{4}$$

где коэффициенты α_i принимают значения 1, -1, 0. Известно, что число отрицательных и нулевых коэффициентов формы Q в (4) не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду. На этом факте основана классификация линейных уравнений (3).

Говорят, что линейное уравнение (3) *эллиптическое*, *гиперболическое* или *параболическое* в области D, если в каждой точке $x \in D$ коэффициенты α_i формы (4) соответственно: все отличны от нуля и все одного знака, все отличны от нуля и не все одного знака или, наконец, хотя бы один из них равен нулю (но не все).

Эллиптическое в области D уравнение (3) называется *равномерно эллиптическим* в этой области, если существуют действительные числа $k_0 \neq 0$ и $k_1 \neq 0$ одного знака такие, что

$$k_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \leqslant Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leqslant k_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

для всех $x \in D$.

Для линейного уравнения с частными производными порядка m

$$\sum_{i_1\ldots i_n} a_{i_1\ldots i_n}(x)\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}+L_1 u=f(x), \quad \sum_{j=1}^{n} i_j=m, \tag{5}$$

где L_1 — *линейный дифференциальный оператор* порядка ниже m, характеристическая форма (2) имеет вид

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\sum_{i_1\ldots i_n} a_{i_1\ldots i_n}(x)\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j=m. \tag{6}$$

Если при фиксированном значении $x \in D$ можно найти такое аффинное преобразование $\lambda_i=\lambda_i(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $i=1, \ldots, n$, в результате которого полученная из (6) форма содержит лишь l $(0<l<n)$ переменных μ_i, то говорят, что уравнение (5) *параболически вырождается*.

При отсутствии параболического вырождения, если уравнение

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=0 \tag{7}$$

не имеет действительных решений, кроме $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, уравнение (5) в точке $x \in D$ называется *эллиптическим*.

Говорят, что уравнение (5) в точке $x \in D$ *гиперболическое*, если в пространстве переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ существует такая прямая, что если принять ее за координатную ось в новых переменных $\mu_1, \ldots, \mu_n$, полученных аффинным преобразованием $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то относительно координаты, меняющейся вдоль этой оси, преобразованное уравнение (7) имеет ровно m действительных корней (простых или кратных) при любом выборе остальных переменных.

Аналогично по характеру формы (2) классифицируются и нелинейные уравнения порядка m. Однако поскольку коэффициенты формы (2) в этом случае зависят не только от точки $x \in D$, но также от искомого решения и его производных, в этом случае классификация по типам производится лишь для данного решения.

Когда равенство (1) представляет собой систему N уравнений относительно N неизвестных функций, т. е. когда $M = N$ и порядок каждого уравнения этой системы равен m, с помощью квадратных матриц

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, N, \quad \sum_{k=1}^{n} i_k = m,$$

можно составить форму порядка Nm

$$K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det \sum_{i_1 \ldots i_n} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1 \ldots i_n}} \right\| \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}, \quad \sum_{k=1}^{n} i_k = m, \tag{8}$$

относительно действительных скалярных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Деление по типам системы (1) происходит по характеру формы (8) точно так же, как это было сделано выше при рассмотрении одного уравнения порядка m.

Определить тип следующих уравнений:

25. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0.$

26. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0.$

27. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 3u - xy^2 = 0.$

28. $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$

29. $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0.$

30. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0.$

31. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0.$

32. $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} - 3x^2 u_y + y \sin x \; u + xe^{-y} = 0.$

33. $5u_{xx} + u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 8u_{xz} - 4u_{yz} - u + yz^2 \sin x = 0.$

34. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 2u_{yz} + 3u_z - u = 0.$

35. $3u_{xx} + 4u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 4u_{yz} + 2u_x - u_y + xye^z = 0.$

36. $y^{2m+1} u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$, m — целое неотрицательное число.

37. $xu_{xx} + yu_{yy} - u = 0.$

Вдоль соответствующих решений $u(x, y)$ определить тип следующих уравнений:

38. $u_{xx}^2 + (u_{xx} - 2) u_{xy} - u_{yy}^2 = 0, \quad u = x^2 + y^2.$

39. $u_{xy}^2 + u_{xx}u_{yy} + u_{yy}^2 = 8, \quad u = x^2 + y^2, \quad u = 2\sqrt{2}\, xy.$

40. $u_{xx}^2 - 4u_{xy} + u_{yy}^2 = 0, \ u = (x+y)^2, u = x, \ u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{17}{16} xy.$

41. $u_{xx} + u_{xy}u_{yy} + u_{yy}^2 - 4u_{yy} = 0, \ u = 2y^2, \ u = 5xy, \ u = x.$

42. $3u_{xx}^3 - 6u_{xy} + u_{yy} - 4 = 0, \ u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \ u = 2y^2.$

43. $u_{xx}^2 u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - 2(x + y) - 8 = 0, \ u = x^2 + 2xy.$

44. $u_{xx}^4 + 2u_{xy}^2 - 3u_{yy} + u_y - 2x = 0, \ u = 2xy - 8y.$

45. $2u_{xx}^3 + 2u_{xy}^5 + 3u_{yy} - 2u_y + 2x = 0, \ u = xy - \frac{1}{2} x^2.$

46. $5u_{xx}^5 - 7u_{xy} + 25u_{yy} - 150y = 0, \ u = \frac{x^2}{2} + y^3 + \frac{5}{7} xy.$

47. $u_{xx}^2 + 5u_{xy}^2 + 6u_{yy}^2 = 12, \ u = \frac{1}{2}(x + y)^2, \ u = \sqrt{3}\, x^2.$

48. $u_{xx}^3 - 4u_{xy}^2 + 7u_{yy} - 4u_x + u_y + 3x + 4y + 3 = 0, \ u = \frac{1}{2} x^2 + xy.$

49. $u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2 + 2u_x - 2(x + y) = 0, \ u = \frac{1}{2}(x + y)^2.$

50. $u_{xy}^2 + u_{xx}u_{yy} + u_{yy}^2 + 2u_{xx} + 2u_{yy} = 0, \quad u = x^2 - y^2, \ u = x.$

51. Написать условия эллиптичности, параболичности и гиперболичности уравнения

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

если известно, что функция F непрерывно дифференцируема относительно последних трех переменных, причем по крайней мере одна из производных по этим переменным отлична от нуля.

Определить тип следующих систем уравнений:

52. $2u_x + 3u_y - 3v_y + u = 0,$
$-u_x + u_y + v_x + xy = 0.$

53. $2u_x + 3v_y + 3u_y - 6u = 0,$
$u_x + u_y + v_x + x^2 u = 0.$

54. $2u_x + 3v_y + 3u_y - 2u = 0,$
$u_x + v_x - u + xy^2 = 0.$

55. $2u_x - 4v_x + 3u_y + 8v_y - u = 0,$
$3u_x - 2v_x + 6u_y + 3v_y + 2u = 0.$

56. $2u_x + v_x + 12u_y - 2u = 0,$
$v_x + 4u_y + v_y + xy = 0.$

57. $2u_x + v_x + 7u_y - 2u = 0,$
$3u_x + 3v_x + 31u_y + v_y - e^y \sin x = 0.$

58. $5u_x + 22{,}5v_x + 2u_y + v_y - 6u = 0,$
$5v_x + 2u_y + 3v_y - 2xu = 0.$

59. $v_x + 12u_y + v_y + 3u - 32xe^y = 0,$
$-5u_x + \frac{5}{6} v_x + u_y + v_y - e^x u = 0.$

60. $15u_x + 9v_x + 12u_y + 17v_y - 3x \cos y = 0,$
$3u_x + 2v_x + v_y - 6u = 0.$

61. $3u_x + 3v_x + 3u_y + 4v_y = 0,$
$2u_x + 3v_x - v_y - 3u = 0.$

62. $u_x - v_y + 2u_z - 3v_z - u = 0,$
$u_y + 2v_x - 2u_z + v_y + 2u = 0.$

63. $u_x - u_y + 2v_y - 3v_z + 2u = 0,$
$u_x + 2u_z - v_x + v_z - u = 0.$

64. $u_x + u_y + v_y + v_z - xyu = 0,$
$v_x - u_y - v_y + u_z + 2u = 0.$

65. $2u_x - 3u_y + v_y + f(x, y, u, v) = 0,$
$3v_x + 2v_y - u_x + g(x, y, u, v) = 0.$

66. $2u_x + 3u_y - v_y + f(x, y, u, v) = 0,$
$3v_x + 2v_y - u_x + g(x, y, u, v) = 0.$

67. $3u_x + 2u_y - v_y + f(x, y, u, v) = 0,$
$11u_x + 2v_x + 3v_y + g(x, y, u, v) = 0.$

68. $u_x - 2u_y - 3v_x + v_y + f(x, y, u, v) = 0,$
$u_x + u_y + 2v_x - v_y + g(x, y, u, v) = 0.$

69. $u_y - 2u_x + v_x - 3v_y + f(x, y, u, v) = 0,$
$u_x + u_y - v_x + 2v_y + g(x, y, u, v) = 0.$

70. $u_x + 2v_x - u_y + 3v_y + f(x, y, u, v) = 0,$
$2u_x - 3v_x + u_y - v_y + g(x, y, u, v) = 0.$

Определить тип следующих систем уравнений в зависимости от значения параметра k:

71. $u_x - kv_y = 0,$
$u_y + v_x = 0.$

72. $u_y - kv_x + v_y = 0,$
$u_x + kv_y - u = 0.$

73. $u_y - kv_x + kv_y = 0,$
$u_x - v_y + 2v = 0.$

§ 3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

Общее линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными можно записать в виде

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0, \tag{9}$$

где a, b, c, d, e, f, g — заданные функции независимых переменных x, y.

Обозначим через Δ дискриминант $b^2 - ac$ соответствующей (9) квадратичной формы

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2. \tag{10}$$

Кривые, определяемые уравнением $\Omega(x, y) = \text{const}$, где Ω — решение нелинейного уравнения с частными производными первого порядка

$$a\Omega_x^2 + 2b\Omega_x\Omega_y + c\Omega_y^2 = 0,$$

называются *характеристиками* уравнения (9). Компоненты касательного вектора (dx, dy) характеристической кривой в каждой ее точке (x, y) удовлетворяют равенству

$$a\,dy^2 - 2b\,dy\,dx + c\,dx^2 = 0. \tag{11}$$

По введенной выше классификации уравнение (9) является эллиптическим, гиперболическим или параболическим в зависимости от того, будет ли форма (10) определена (дефинитна), знакопеременна или полуопределена (вырождена), т. е. дискриминант $b^2 - ac = \Delta$ этой формы будет меньше нуля, больше нуля или равен нулю соответственно.

В эллиптическом случае уравнение (9) можно привести к каноническому виду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + d_1v_\xi + e_1v_\eta + f_1v + g_1 = 0 \tag{12}$$

в результате замены независимых переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{13}$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$a\varphi_x + b\varphi_y + \sqrt{-\Delta}\,\psi_y = 0, \quad a\psi_x + b\psi_y - \sqrt{-\Delta}\,\varphi_y = 0$$

с отличным от нуля якобианом $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$.

Замена (13), когда $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$a\varphi_x + (b + \sqrt{\Delta})\varphi_y = 0, \quad a\psi_x + (b - \sqrt{\Delta})\psi_y = 0,$$

приводит уравнение (9) в гиперболическом случае к виду

$$v_{\xi\eta} + d_1v_\xi + e_1v_\eta + f_1v + g_1 = 0. \tag{14}$$

Новая замена $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ позволяет привести уравнение (14) к каноническому виду

$$w_{\alpha\alpha} - w_{\beta\beta} + d_2w_\alpha + e_2w_\beta + f_2w + g_2 = 0. \tag{15}$$

Наконец, в случае, когда уравнение (9) параболично, в результате замены (13), где $\varphi(x, y)$ — отличное от постоянной решение уравнения

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0,$$

а $\psi(x, y)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \neq 0,$$

получаем

$$v_{\eta\eta} + d_1 v_\xi + e_1 v_\eta + f_1 v + g_1 = 0. \tag{16}$$

В уравнениях (12), (14), (16) $v(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$, где $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ — решения системы (13). Разрешимость этой системы по крайней мере «в малом» гарантирована выполнением условия

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Как известно из теории линейных уравнений с частными производными первого порядка, в качестве функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ в преобразовании (13) при $\Delta > 0$ можно брать левые части общих интегралов $\varphi(x, y) = \mathrm{const}$, $\psi(x, y) = \mathrm{const}$ обыкновенных дифференциальных уравнений, соответственно

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b - \sqrt{\Delta}},$$

а в качестве функции $\varphi(x, y)$ при $\Delta = 0$ — левую часть общего интеграла $\varphi(x, y) = \mathrm{const}$ уравнения

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}.$$

Что касается случая $\Delta < 0$, то, поскольку в записи

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \Omega(x, y)$$

функция Ω является решением уравнения

$$a\Omega_x + (b + i\sqrt{-\Delta})\Omega_y = 0,$$

преобразование (13) аналогично находим и на этот раз.

По изложенной схеме приводится к каноническому виду и квазилинейное уравнение вида

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

коэффициенты a, b, c которого являются заданными функциями лишь независимых переменных x, y.

Поскольку функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в преобразовании (13) являются решениями линейных уравнений с частными производными первого порядка, коэффициенты которых выражаются через $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, то от последних следует потребовать, чтобы они одновременно в нуль не обращались, и, кроме того, обладали определенными дифференциальными свойствами.

Заметим, что, когда коэффициенты уравнения (9) постоянны, после приведения этого уравнения к одному из видов (12), (15), (16) можно произвести дальнейшее упрощение. Так, например, вводя новую неизвестную функцию $w(\xi, \eta)$ по формуле

$$v(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}w(\xi, \eta),$$

подходящим подбором постоянных λ и μ можно добиться, чтобы коэффициенты при первых производных w в эллиптическом и гиперболическом случаях и один из коэффициентов при первых производных и коэффициент при самой w в параболическом случае отсутствовали.

Следующие уравнения привести к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения:

74. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$

75. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$

76. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$

77. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$

78. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0.$

79. $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x+y) = 0.$

80. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x+y) = 0.$

81. $(1+x^2)^2u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0.$

82. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$

83. $u_{xx} - (1+y^2)^2u_{yy} - 2y(1+y^2)u_y = 0.$

84. $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y - 2u = 0.$

85. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x + ye^{y/x} = 0.$

86. $xy^2u_{xx} - 2x^2yu_{xy} + x^3u_{yy} - y^2u_x = 0.$

87. $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

88. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0.$

89. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0.$

90. $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$

91. $yu_{xx} + u_{yy} = 0.$

92. $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0.$

93. $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x)u_{yy} + \cos x u_y = 0.$

94. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$

Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения уравнений:

95. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0.$

96. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$

97. $2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$

98. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0.$

99. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0.$

100. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0.$

101. $u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y - 4u = 0.$

102. $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + 4x = 0.$

103. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0.$

104. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 2u_x - 2u_y + u = 0.$

105. $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y + 64u = 0.$

106. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + 12u_y + 27u = 0.$

Привести к каноническому виду уравнения:

107. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0.$

108. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} + 3u_x = 0.$

109. $u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_x + u_y = 0.$

110. $3u_{xy} - 2u_{xz} - u_{yz} - u = 0.$

111. $u_{xx} + 3u_{yy} + 3u_{zz} - 2u_{xy} - 2u_{xz} - 2u_{yz} - 8u = 0.$

112. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 6u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z + 4u = 0.$

113. $2u_{xx} + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0.$

114. $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} + 4u = 0.$

115. $u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$

116. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0.$

117. $2u_{xy} - u_{xz} + 2u_{yz} - u = 0.$

118. $u_{xy} - u_{xz} - u_{yz} = 0.$

119. $u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2} u_y = 0.$

120. $u_{xy} + u_{zz} + u_x - u_y = 0.$

Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения уравнений:

121. $u_{xy} - u_{xz} - u_x + u_y + u_z + u = 0.$

122. $u_{xy} + u_{yz} + 2u_x - 3u_y + 4u_z - u = 0.$

123. $u_{xx} + u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

124. $u_{yy} - 2u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

125. $u_{xx} - 2u_{xy} - 2u_{xz} + u_x + u_y + 2u_z + u = 0.$

126. $u_{xx} - u_{zz} - 2u_{xy} + u_x + u_y + u_z + u = 0.$

127. $2u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_x + u_y + u_z + 4u = 0.$

128. $2u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y + u_z + u = 0.$

129. $3u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z = 0.$

130. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xy} + 2u_{xz} - 2u_{yz} + 2u_x - u_z + u = 0.$

§ 4. Математическое описание некоторых явлений, изучаемых методами математической физики

Во многих случаях исследование тех или иных явлений природы можно привести к нахождению решений дифференциальных уравнений с частными производными, носящих название *уравнений математической физики.* Чтобы пользоваться методами математической физики, в первую очередь следует установить, какие величины являются определяющими для изучаемого явления. Затем, пользуясь физическими законами (принципами), выражающими связь между этими величинами, составить уравнение (систему уравнений) с частными производными и дополнительные условия (граничные, начальные) к уравнению (системе), из которых впоследствии определяются, и притом однозначно, неизвестные величины, характеризующие явление. Важно иметь в виду, что одна и та же задача математической физики может служить моделью совершенно разных явлений.

Задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Уравнения (системы) гиперболического типа получаются при математическом моделировании колебательных процессов. При выводе уравнений колебаний механических систем с успехом можно пользоваться *вариационным принципом стандартного действия* (известным также под названием *принципа наименьшего действия*) *Гамильтона.* В качестве примера рассмотрим плоские поперечные колебания струны и проследим, как происходит математическое описание этого процесса, основанное на принципе Гамильтова.

Струной называется гибкая упругая нить (одномерный упругий континуум), которая в состоянии покоя натянута (вдоль координатной оси x) и потенциальная энергия элемента которой в процессе колебаний пропорциональна приращению длины этого элемента. Коэффициент пропорциональности называется *натяжением* струны. Основной величиной, характеризующей колебания струны, является отклонение $u = u(x, t)$ струны в плоскости (x, u) от положения равновесия в точке x в момент времени t. Если обозначить через K и U соответственно кинетическую и потенциальную энергии струны, которые выражаются через $u(x, t)$ и ее производные, то в силу принципа Гамильтона интеграл (действие)

$$\int_{t_1}^{t_2} (K - U)\, dt, \tag{17}$$

распространенный на промежуток $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ времени наблюдения, должен быть стационарным, т. е. должна существовать определенная функция $u(x, t)$, при которой вариация функционала (17) обращается в нуль. Уравнение Эйлера этого функционала и является искомым дифференциальным уравнением с частными производными, носящим название *уравнения колебаний струны.* Получаемые при варьировании функционала (17) соотношения для функции $u(x, t)$ на концах струны представляют собой налагаемые на функцию $u(x, t)$ дополнительные (граничные или краевые) условия, характеризующие состояние концов (в частности, способы их закрепления) в процессе колебаний.

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний, кроме дифференциального уравнения и граничных условий, нужно знать также начальное положение (форму струны в начальный момент времени) и начальную скорость движения струны. Уравнение колебаний струны сильно упрощается, если считать колебания малыми, т. е. в выражении для потенциальной энергии U пренебречь степенями u_x выше второй. Отметим, что это уравнение представляет математическую модель для описания и других явлений, таких, например, как колебания газа в трубке, электрические колебания в проводах и т. д. Пользуясь принципом Гамильтона (по изложенной схеме), можно математически формулировать задачи о продольных колебаниях стержня, поперечных колебаниях мембраны, пластинки и др.

131. Струна $(0 \leqslant x \leqslant l)$ с линейной плотностью $\rho = \rho(x)$ совершает поперечные колебания $u = u(x, t)$ в плоскости (x, u). Найти кинетическую энергию K для случаев, когда струна

а) не имеет сосредоточенных масс;

б) в точках x_i имеет сосредоточенные массы m_i, $i = 1, \ldots, n$.

132. Найти потенциальную энергию струны $(0 \leqslant x \leqslant l)$, совершающей поперечные колебания $u(x, t)$ в плоскости (x, u) для случаев, когда:

а) концы струны закреплены жестко;

б) концы струны закреплены жестко и степенями u_x выше второй можно пренебречь;

в) в ортогональном оси x направлении к концам струны приложены силы $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ соответственно;

г) концы струны закреплены упруго, т. е. они испытывают действие силы, пропорциональной их отклонению и направленной противоположно отклонению.

Мембраной называется гибкая упругая пленка (двумерный континуум), которая в положении покоя занимает некоторую область плоскости и для которой работа, затрачиваемая на деформацию элемента мембраны, пропорциональна приращению площади этого элемента (коэффициент пропорциональности называется *натяжением мембраны*).

133. Мембрана, которая в состоянии покоя совпадает с областью D плоскости переменных x, y, совершает поперечные колебания $u = u(x, y, t)$ и имеет поверхностную плотность $\rho = \rho(x, y)$. Найти кинетическую энергию K мембраны для случаев, когда мембрана

а) не имеет сосредоточенных масс;

б) в точках (x_i, y_i) имеет сосредоточенные массы m_i, $i = 1, \ldots, n$.

134. Найти потенциальную энергию мембраны D, совершающей поперечные колебания $u = u(x, y, t)$, когда:

а) край мембраны закреплен жестко;

б) край мембраны закреплен жестко, степенями u_x и u_y выше второй можно пренебречь;

в) край мембраны закреплен упруго, т. е. точки (x, y) края мембраны испытывают сопротивление, пропорциональное отклонению $u(x, y, t)$ этих точек;

г) на мембрану с жестко закрепленным краем действует поперечная сила $F(x, y, t)$, степенями u_x и u_y выше второй можно пренебречь.

135. Струна $(0 \leqslant x \leqslant l)$ с линейной плотностью $\rho = \rho(x)$ и натяжением T совершает малые поперечные колебания $u(x, t)$. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — начальные (при $t = 0$) отклонения и скорости точек струны соответственно. Пренебрегая степенями u_x выше второй в выражении для потенциальной энергии струны, а также действием силы тяжести, на основании принципа Гамильтона сформулировать задачу об определении отклонений $u(x, t)$, $t > 0$, точек струны от положения покоя, когда:

а) концы струны закреплены жестко;

б) концы струны свободны;

в) к концам струны $x = 0$ и $x = l$, начиная с момента $t = 0$, приложены поперечные силы $F(t)$ и $\Phi(t)$ соответственно;

г) концы струны закреплены упруго, т. е. каждый из концов испытывает сопротивление, пропорциональное отклонению конца;

д) конец $x = 0$ закреплен жестко, а конец $x = l$ — упруго, т. е. испытывает сопротивление, пропорциональное отклонению, и на струну, начиная с момента $t = 0$, действует поперечная сила $F(x, t)$;

е) в точке x_0 $(0 < x_0 < l)$ струны, начиная с момента $t = 0$, действует поперечная сила $F(t)$, концы струны закреплены жестко;

ж) концы струны закреплены упруго и в точках x_i $(0 < x_i < l)$ струны имеются сосредоточенные массы m_i, $i = 1, \ldots, n$.

136. Однородная мембрана в состоянии покоя совпадает с областью D плоскости (x, y) с границей L. Пусть ρ — поверхностная плотность, T — натяжение мембраны, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — начальные (при $t = 0$) отклонения и скорости точек (x, y) мембраны соответственно. На основании принципа Гамильтона сформулировать задачу об определении поперечных отклонений $u(x, y, t)$, $t > 0$, точек мембраны от положения покоя, пренебрегая действием силы тяжести и степенями u_x и u_y выше второй, когда:

а) край мембраны закреплен жестко;

б) край мембраны свободен;

в) к краю мембраны приложена поперечная сила $F(x, y, t)$, $(x, y) \in L$, начиная с момента $t = 0$;

г) край мембраны закреплен упруго, т. е. точки края испытывают сопротивление, пропорциональное их отклонению;

д) начиная с момента $t = 0$, на мембрану действует поперечная сила $F(x, y, t)$, а край мембраны закреплен жестко;

е) мембрана колеблется в среде, оказывающей сопротивление колебаниям, пропорциональное отклонению, а край мембраны закреплен жестко;

ж) в точке $(x_0, y_0) \in D$ мембрана имеет сосредоточенную массу m, а край мембраны закреплен жестко.

Уравнение колебаний струны описывает также продольные колебания упругого стержня. В самом деле, пусть координатная ось x совпадает с направлением продольной оси упругого стержня длины l.

Предположим, что поперечные (ортогональные оси x) сечения стержня могут смещаться (совершать продольные колебания) вдоль оси x. Будем считать, что поперечные сечения $S = S(x)$ стержня во время смещения остаются плоскими и ортогональными оси x. Это допущение вполне оправдано, когда толщина стержня по сравнению с его длиной достаточно мала.

Обозначим через $u = u(x, t)$ отклонение в момент времени t того сечения стержня, которое, находясь в покое, имело абсциссу x. Пусть $\rho = \rho(x)$ — плотность стержня, $F = F(x, t)$ — объемная плотность внешних сил, действующих вдоль оси x, $E = E(x)$ — модуль упругости Юнга, $T = T(x, t)$ — натяжение. Выделим произвольно внутри стержня достаточно малую его часть W, которая в положении покоя заключена между поперечными сечениями с координатами x и $x + \Delta x$, и составим уравнение движения этой части, пользуясь на этот раз принципом Даламбера. В силу этого принципа *сумма всех сил, действующих на W в направлении возможного перемещения (вдоль оси x), включая силы инерции, должна равняться нулю*, т. е.

$$T(x + \Delta x, t) + T(x, t) + S(\bar{x})F(\bar{x}, t)\Delta x - S(\bar{\bar{x}})\rho(\bar{\bar{x}})u_{tt}(\bar{\bar{x}}, t)\Delta x = 0,$$
$$\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in (x, x + \Delta x).$$

Отсюда, учитывая то обстоятельство, что, согласно закону Гука, натяжение $T(x, t)$ пропорционально относительному удлинению,

$$T(x, t) = E(x)u_x(x, t), \quad 0 < x < l,$$

находим

$$(ESu_x)(x + \Delta x, t) - (ESu_x)(x, t) + (SF)(\bar{x}, t)\Delta x = (S\rho u_{tt})(\bar{\bar{x}}, t)\Delta x. \tag{18}$$

Пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях, перепишем равенство (18) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(ESu_x)(x^*, t)\,\Delta x + (SF)(\bar{x}, t)\,\Delta x = (\rho S u_{tt})(\tilde{x}, t)\,\Delta x, \tag{19}$$
$$x^* \in (x, x + \Delta x).$$

Сократим равенство (19) на Δx, а затем устремим в нем Δx к нулю. В результате получим дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня

$$\frac{\partial}{\partial x}[S(x)\,E(x)\,u_x(x, t)] + S(x)\,F(x, t) = \rho(x)\,S(x)\,u_{tt}(x, t), \tag{20}$$
$$0 < x < l.$$

В случае однородного стержня постоянного сечения, т. е. когда S, ρ, E постоянны, уравнение (20) примет вид

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, \tag{20'}$$

где $a^2 = E/\rho$, $f(x, t) = F(x, t)/\rho$.

Для однозначного определения искомой функции $u(x, t)$ из уравнения (20) или (20′) следует задать начальные отклонения $u(x, 0)$ и начальные скорости $u_t(x, 0)$ точек стержня, а также граничные условия. Чтобы получить граничные условия, следует выделить части стержня W_0 и W_l достаточпо малой длины Δx, примыкающие к концам стержня, и для каждой из этих частей написать уравнение движения, а затем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$.

137. Сформулировать задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня постоянного сечения S длины l при произвольных начальных отклонении и скорости для случаев, когда:

а) концы стержня свободны;

б) к концам стержня $x = 0$ и $x = l$, начиная с момента $t = 0$, приложены силы $F(t)$ и $\Phi(t)$ соответственно, действующие вдоль оси x;

в) концы стержня закреплены упруго, т. е. испытывают сопротивление, пропорциональное их отклонению;

г) конец стержня $x = 0$ испытывает сопротивление, пропорциональное скорости, а конец $x = l$ закреплен жестко;

д) начиная с момента $t = 0$, стержень испытывает действие направленной вдоль оси x силы (вызванной, например, магнитным полем) объемной плотности $F(x, t)$, а концы стержня закреплены жестко;

е) стержень (на единицу массы) испытывает действие пропорциональной скорости силы сопротивления отклонению, а концы стержня $x = 0$ и $x = l$ колеблются по заданным законам $\mu(t)$ и $\nu(t)$ соответственно;

ж) конец стержня $x = 0$ закреплен, а конец $x = l$ свободен и к нему прикреплена сосредоточенная масса m.

138. Сформулировать задачу о малых продольных колебаниях упругого однородного стержня переменного сечения $S = S(x)$ длины l при произвольных начальных условиях для случаев, когда:

а) стержень имеет форму усеченного конуса с радиусами оснований r и R $(r < R)$, которые закреплены жестко;

б) конец стержня $x = 0$ закреплен упруго, а к концу $x = l$, начиная с момента $t = 0$, приложена продольная сила $F(t)$ на единицу площади сечения.

139. Два полуограниченных упругих однородных стержня с одинаковыми (постоянными) поперечными сечениями S соединены торцами и составляют один неограниченный стержень. Пусть ρ_1 и E_1 — плотность и модуль упругости одного из них, а ρ_2 и E_2 — другого. Поставить краевую задачу для определения отклонений сечений неограниченного стержня (при $t > 0$) от их положения покоя, если заданы начальное (при $t = 0$) отклонение $\varphi(x)$ и начальная скорость $\psi(x)$. При этом рассмотреть случаи:

а) торцы составляющих стержней соединены непосредственно;

б) торцы составляющих стержней соединены так, что между ними находится жесткая прокладка пренебрежимо малой толщины с массой m.

К системе уравнений гиперболического типа приводится задача об электрических колебаниях в проводах.

Расположим провод вдоль координатной оси x. Пусть $i = i(x, t)$ — сила тока $v = v(x, t)$ — напряжение проходящего по проводу тока, R — омическое сопротивление, а L, C и G, соответственно,— самоиндукция, емкость и утечка тока, рассчитанные на единицу длины провода. Пренебрегая электромагнитными колебаниями в среде, окружающей провод, и считая утечку тока (через несовершенную изоляцию) пропорциональной напряжению, выведем уравнения, описывающие изменение тока и напряжения в проводе. Для определенности предположим, что направление тока совпадает с направлением оси x. В силу закона Ома для достаточно малого внутреннего участка провода $(x, x + \Delta x)$ имеем

$$v(x, t) - v(x + \Delta x, t) = i(x', t)R\,\Delta x + i_t(x'', t)L\,\Delta x,$$
$$x', x'' \in (x, x + \Delta x).$$

Применим к левой части этого равенства теорему Лагранжа о конечных приращениях, а затем, сократив на Δx полученное равенство, перейдем в нем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим

$$v_x(x, t) + Ri(x, t) + Li_t(x, t) = 0. \tag{21}$$

Далее, приравнивая количество электричества, притекающее на элемент провода Δx за время Δt (от t до $t + \Delta t$),

$$[i(x, \bar{t}) - i(x + \Delta x, \bar{t})]\Delta t = -i_x(\bar{x}, \bar{t})\Delta x\,\Delta t,$$
$$\bar{x} \in (x, x + \Delta x), \quad \bar{t} \in (t, t + \Delta t),$$

количеству электричества

$$C[v(\tilde{x}, t + \Delta t) - v(\tilde{x}, t)]\Delta x + Gv(\tilde{x}, \tilde{t})\Delta x\,\Delta t = [Cv_t(\tilde{x}, t') + Gv(\tilde{x}, \tilde{t})]\Delta x\,\Delta t,$$
$$\tilde{x} \in (x, x + \Delta x), \quad \tilde{t}, t' \in (t, t + \Delta t),$$

которое расходуется на зарядку элемента Δx и утечку через несовершенную изоляцию этого элемента, как и при выводе равенства (21), находим

$$i_x(x, t) + Cv_t(x, t) + Gv(x, t) = 0. \tag{22}$$

Система уравнений (21) и (22) называется *системой телеграфных уравнений*. Если из этой системы исключить $v(x, t)$ или $i(x, t)$, то получим, соответственно, уравнения вида

$$i_{xx} = ai_{tt} + bi_t + ci, \quad v_{xx} = av_{tt} + bv_t + cv,$$

где $a = CL$, $b = CR + GL$, $c = GR$.

Для вывода граничных условий (в случае, например, конечного провода $(0 \leqslant x \leqslant l)$) следует рассмотреть падение напряжения и приток электричества для участков $(0, \Delta x)$ и $(l - \Delta x, l)$ провода, примыкающих к его концам. При этом необходимо учесть, что если в цепи имеются последовательно включенные сосредоточенные омическое сопротивление R_0, самоиндукция L_0 и емкость C_0, то падение напряжения на них дается формулой

$$\Delta v = R_0 i + L_0 i_t + \frac{1}{C_0}\int i\,dt.$$

140. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — соответственно начальный (при $t=0$) ток и начальное напряжение тока в проводе $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Пренебрегая омическим сопротивлением и утечкой, поставить краевую задачу для определения тока и напряжения (электрических колебаний) при $t>0$ в этом проводе для случаев, когда:

а) к концу $x=0$, начиная с момента $t=0$, приложена электродвижущая сила $E(t)$, а конец $x=l$ заземлен;

б) конец $x=0$ заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0, а конец $x=l$ — через сосредоточенную емкость C_0;

в) конец $x=0$ заземлен через сосредоточенную самоиндукцию L_0, а к концу $x=l$, начиная с момента $t=0$, приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенную самоиндукцию L_l;

г) конец $x=0$ заземлен через сосредоточенную емкость C_0, а к концу $x=l$, начиная с момента $t=0$, приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенное омическое сопротивление R_0;

д) к концу $x=0$, начиная с момента $t=0$, приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенную самоиндукцию L_0, а конец $x=l$ заземлен через сосредоточенную самоиндукцию L_l.

141. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — начальные (при $t=0$) ток и напряжение в проводе $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Поставить краевую задачу для определения при $t>0$ тока и напряжения (электрических колебаний) в этом проводе для случаев, когда:

а) конец провода $x=0$ заземлен через сосредоточенное омическое сопротивление R_0, а к концу $x=l$, начиная с момента $t=0$, приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенное омическое сопротивление R_l;

б) конец $x=0$ заземлен через последовательно включенные сосредоточенное омическое сопротивление R_0 и самоиндукцию L_0, а к концу $x=l$, начиная с момента $t=0$, приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенную самоиндукцию L_l.

Задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Начнем с задачи об определении температуры в стержне. Направим ось стержня вдоль координатной оси x. Будем предполагать, что в любом ортогональном оси стержня сечении температура не зависит от положения точек этого сечения. Пусть $\rho=\rho(x)$ — плотность стержня, $k=k(x)$ и $\varkappa=\varkappa(x)$ — коэффициенты внутренней и внешней (конвективной) теплопроводности соответственно, $c=c(x)$ — удельная теплоемкость, $S=S(x)$ — площадь поперечного сечения, $\sigma=\sigma(x)$ — периметр поперечного сечения, $q=q(x, t)$ — объемная плотность источников тепла, $u=u(x, t)$ — температура в сечении x в момент времени t, $u_0=u_0(t)$ — температура внешней среды. Для вывода дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $u(x, t)$, выделим произвольно внутри стержня достаточно малую его часть W, заключенную между ортогональными оси x сечениями в точках x и $x+\Delta x$. В элемент W за время Δt втекает количество тепла

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3.$$

Q_1 — приток тепла через сечения x и $x+\Delta x$, который, согласно закону Фурье, выражается формулой

$$Q_1 = [(kSu_x)(x+\Delta x, t') - (kSu_x)(x, t')]\,\Delta t = \left[\frac{\partial}{\partial x}(kSu_x)\right](x', t')\,\Delta x\,\Delta t,$$

$$x' \in (x, x+\Delta x), \quad t' \in (t, t+\Delta t);$$

Q_2 — приток тепла через боковую поверхность, он пропорционален (по закону Ньютона) разности температур:

$$Q_2 = [\varkappa\sigma(u_0 - u)](\bar{x}, \bar{t})\Delta x\,\Delta t, \ \bar{x} \in (x, x+\Delta x), \quad \bar{t} \in (t, t+\Delta t);$$

наконец, Q_3 возникает вследствие действия источников тепла, причем

$$Q_3 = (qS)(\tilde{x}, \tilde{t})\Delta x\,\Delta t, \ \tilde{x} \in (x, x+\Delta x), \quad \tilde{t} \in (t, t+\Delta t).$$

Следовательно,

$$Q = \left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}(kSu_x)\right](x', t') + [\varkappa\sigma(u_0 - u)](\bar{x}, \bar{t}) + (Sq)(\tilde{x}, \tilde{t})\right\}\Delta x\,\Delta t. \qquad (23)$$

Это количество тепла расходуется на нагревание элемента W от температуры $u(x, t)$ до $u(x, t+\Delta t)$, и поэтому его можно записать в виде

$$(c\rho S)(x'')[u(x'', t+\Delta t) - u(x'', t)]\Delta x = (c\rho Su_t)(x'', t'')\Delta x\,\Delta t,$$

$$x'' \in (x, x+\Delta x), \quad t'' \in (t, t+\Delta t). \qquad (24)$$

Приравнивая (23) к (24) и сокращая полученное равенство на $\Delta x\,\Delta t$, перейдем в нем к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$. Получим дифференциальное уравнение для $u(x, t)$:

$$(c\rho Su_t)(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}[(kSu_x)(x, t)] - [\varkappa\sigma(u - u_0)](x, t) + (Sq)(x, t). \qquad (25)$$

В частности, когда c, ρ, k, $\varkappa$, σ, S — постоянные, уравнение (25) принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu + f(x, t),$$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad b = \frac{\varkappa\sigma}{c\rho S}, \quad f(x, t) = \frac{Sq(x, t) + \varkappa\sigma u_0(t)}{c\rho S}.$$

При решении задачи об определении температуры $u(x, t)$ в стержне в момент времени $t > 0$, наряду с дифференциальным уравнением, следует знать начальную температуру при $t = 0$ стержня, а также краевые условия, определяющие тепловой режим на концах стержня. Краевые условия можно получить, если, как и при выводе дифференциального уравнения, подсчитать баланс тепла для элементов W_0 и W_l стержня, примыкающих к соответствующим концам.

Аналогично, основываясь на законе Нернста о потоке вещества через поверхность, ставятся задачи о диффузии (об определении концентрации вещества) в трубке.

Предположим, что исследуемое вещество (газ, вещество в растворе) находится в некотором пространственном объеме Ω, заполненном пористой средой. Пусть $u = u(x, t)$ — концентрация исследуемого вещества в точке $x =$

$= (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t, $D = D(x)$ — коэффициент диффузии, $c = c(x)$ — коэффициент пористости среды, который равен отношению объема пор в рассматриваемом объеме к этому объему, $F = F(x, t)$ — объемная плотность источников исследуемого вещества. Для вывода уравнения диффузии выделим произвольно внутри Ω некоторый объем V с достаточно гладкой границей S и подсчитаем *баланс исследуемого вещества* в этом объеме за произвольно взятый достаточно малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$. Пусть ν — единичный вектор внешней нормали к S. По закону Нернста количество исследуемого вещества, проходящего через элемент поверхности dS в направлении нормали ν к dS за единицу времени, равно

$$dQ = -D(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS.$$

При выводе уравнения диффузии следует учесть, что:

1) количество исследуемого вещества, поступающего в объем V через S за время Δt, равно

$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_S D\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS,$$

или, пользуясь формулой Гаусса — Остроградского

$$\int_S D\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS = \int_V \operatorname{div}(D\operatorname{grad} u)\,dV,$$

$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_V \operatorname{div}(D\operatorname{grad} u)\,dV;$$

2) от источников исследуемого вещества (например, при наличии химической реакции с выделением этого вещества) в объем V за время Δt поступает количество вещества

$$Q_2 = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_V F(x, t)\,dV;$$

3) вследствие приращения, получаемого функцией $u(x, t)$ за время Δt:

$$u(x, t+\Delta t) - u(x, t) \approx u_t(x, t)\Delta t,$$

общий приток исследуемого вещества в объем V дается формулой

$$Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_V c u_t\,dV.$$

Следовательно,

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_V [\operatorname{div}(D\operatorname{grad} u) + F - c u_t]\,dV = 0.$$

Отсюда, считая подынтегральное выражение непрерывной функцией и пользуясь произвольностью объема V и промежутка времени $(t, t+\Delta t)$, следует, что всюду в Ω для любого t $(t>0)$ подынтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$cu_t = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) + F. \tag{26}$$

Уравнение (26) является искомым уравнением диффузии. Если среда однородная, то величины c и D постоянны, и уравнение (26) принимает вид

$$u_t = a^2 \Delta u + f, \quad a^2 = \frac{D}{c}, \quad f = \frac{F}{c}.$$

При исследовании явления диффузии, наряду с уравнением диффузии, следует выписать начальное распределение концентрации вещества (например, при $t=0$) и краевые условия, определяющие диффузионный режим на границе рассматриваемого объема Ω. Аналогично, основываясь на законе Фурье о потоке тепла, выводится уравнение теплопроводности в произвольном объеме Ω.

142. Боковая поверхность однородного стержня $(0 \leqslant x \leqslant l)$ теплоизолирована, а его начальная (при $t=0$) температура равна $\varphi(x)$. Сформулировать задачу об определении температуры u в стержне при $t>0$ для случаев, когда:

а) концы стержня теплоизолированы;

б) на концах $x=0$ и $x=l$ стержня, начиная с момента $t=0$, поддерживаются тепловые потоки $q(t)$ и $Q(t)$ соответственно;

в) на концах $x=0$ и $x=l$ стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средами, примыкающими к этим концам и имеющими температуру $\tau(t)$ и $\theta(t)$ соответственно;

г) на конце $x=l$ стержня имеется сосредоточенная масса m из того же материала, что и стержень, и этот конец теплоизолирован, а на конце $x=0$, начиная с момента $t=0$, поддерживается температура $\mu(t)$;

д) на обоих концах стержня имеются одинаковые сосредоточенные массы m из того же материала, что и стержень, причем конец $x=0$ теплоизолирован, а на конце $x=l$, начиная с момента $t=0$, поддерживается тепловой поток $q(t)$;

е) конец $x=0$ стержня зажат в массивную клемму, обладающую достаточно большой теплопроводностью и имеющую теплоемкость Q, а на конце $x=l$ поддерживается тепловой поток $q(t)$, начиная с момента $t=0$;

ж) на конце $x=0$ стержня имеется сосредоточенная масса m из того же материала, что и стержень, и этот конец теплоизолирован, а конец $x=l$ зажат в массивную клемму, обладающую достаточно большой теплопроводностью и имеющую теплоемкость Q.

143. В трубке длины l постоянного сечения S, однородно заполненной пористым веществом, происходит диффузия газа с начальной (при $t=0$) концентрацией $\varphi(x)$. Поставить задачу об определении концентрации u газа в трубке при $t>0$, считая боковую поверхность трубки газонепроницаемой, для случаев, когда:

а) на конце $x=0$, начиная с момента $t=0$, поддерживается концентрация газа, равная $\mu(t)$, а конец $x=l$ газонепроницаем;

б) на конце $x=0$, начиная с момента $t=0$, поддерживается поток газа $q(t)$, а конец $x=l$ перекрыт пористой перегородкой, т. е. на этом конце происходит газообмен с внешней средой по закону, аналогичному закону Ньютона для конвективного теплообмена, причем концентрация газа во внешней среде предполагается нулевой.

144. Однородный стержень $(0 \leqslant x \leqslant l)$ постоянного сечения S имеет начальную (при $t=0$) температуру $\varphi(x)$. На поверхности стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей температуру $v(t)$, а его концы $x=0$ и $x=l$ зажаты в массивные клеммы с заданными теплоемкостями C и Q соответственно и достаточно большой теплопроводностью. Сформулировать задачу об определении температуры u при $t>0$ в этом стержне для случаев, когда:

а) стержень нагревается текущим по нему постоянным электрическим током силы I;

б) начиная с момента $t=0$, в стержне действуют тепловые источники объемной плотности $F(x, t)$;

в) тепло в стержне поглощается пропорционально u_t в каждой его точке.

145. Трубка $(0 \leqslant x \leqslant l)$ постоянного сечения S наполнена газом, начальная (при $t=0$) концентрация которого $\varphi(x)$. Поверхность и торцы трубки пористые, так что через них происходит обмен концентрацией (по закону, аналогичному закону Ньютона для конвективного теплообмена) с внешней средой. Концентрация газа во внешней среде равна $v(t)$. Поставить краевую задачу об определении концентрации газа u при $t>0$ в трубке, когда:

а) частицы газа распадаются (например неустойчивый газ), причем скорость распада газа в каждой точке полости трубки пропорциональна корню квадратному из его концентрации;

б) частицы газа размножаются со скоростью, пропорциональной произведению uu_t в каждой точке полости трубки.

146. Однородный шар радиуса R с центром в начале координат нагрет до температуры T. Поставить краевую задачу об остывании шара для случаев, когда:

а) в каждой точке этого шара вследствие химической реакции поглощается количество тепла, пропорциональное температуре u в этой точке, а поверхность S шара теплоизолирована;

б) в шаре имеются тепловые источники постоянной мощности Q, а на его поверхности S происходит конвективный теплообмен с внешней средой нулевой температуры.

Задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа. К уравнениям эллиптического типа приводит изучение установившихся (стационарных) процессов. Так, например, если в рассмотренных выше задачах считать, что искомые величины не зависят от времени, то полученные для их определения уравнения (когда число пространственных переменных больше единицы) все являются эллиптическими.

147. Поставить краевую задачу об определении установившейся (стационарной) концентрации неустойчивого газа в цилиндре радиуса r_0 и высоты h, если в цилиндре имеются источники газа (вследствие химической реакции) постоянной мощности Q, а скорость распада газа пропорциональна его концентрации u, для случаев, когда:

а) на основаниях цилиндра $z=0$ и $z=h$ концентрация газа поддерживается равной нулю, а боковая поверхность цилиндра газонепроницаема;

б) основания $z=0$ и $z=h$ цилиндра пористы (через них происходит диффузия по закону, аналогичному закону Ньютона для конвективного теплообмена), а на боковой поверхности поддерживается нулевая концентрация газа, при этом концентрация рассматриваемого газа во внешней среде равна нулю.

148. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — компоненты скорости плоского установившегося потока несжимаемой жидкости в точке (x, y); D — произвольная односвязная область плоскости потока, ограниченная гладкой кривой S с нормалью ν и касательной s. Пользуясь выражениями

$$\int\limits_S (u\cos\widehat{\nu x} + v\cos\widehat{\nu y})\, dS \quad \text{и} \quad \int\limits_S (u\cos\widehat{sx} + v\cos\widehat{sy})\, dS$$

соответственно для потока жидкости через контур S и для циркуляции жидкости вдоль S (в предположении отсутствия источников и циркуляции), показать, что величины u и v удовлетворяют системе уравнений

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0,$$

а каждая из этих величин — уравнению Лапласа.

149. Показать, что потенциал скоростей $\varphi(x, y)$ и функция тока $\psi(x, y)$, определяемые из равенств $\varphi_x = u$, $\varphi_y = v$, $\psi_x = -v$, $\psi_y = u$ (u и v — те же, что и в задаче 148), являются решениями системы Коши — Римана

$$\varphi_x - \psi_y = 0, \quad \varphi_y + \psi_x = 0,$$

а каждая из этих величин удовлетворяет уравнению Лапласа.

150. Определить физический смысл равенства $\psi = \text{const}$, где $\psi(x, y)$ — функция тока (см. задачи 148 и 149).

151. Пусть в состоянии изгиба мембрана находится в равновесии, т. е. функция u, изображающая изгиб мембраны, не зависит от времени, и поэтому в выражении (17) остается только потенциальная энергия U. Следовательно, если пренебречь степенями u_x, u_y выше второй, функция $u(x, y)$ в силу принципа Гамильтона должна минимизировать интеграл Дирихле

$$D(u) = \iint\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy,$$

где G — область, занятая мембраной в состоянии покоя. При сделанных предположениях:

а) показать, что прогиб $u(x, y)$ мембраны является решением уравнения Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G;$$

б) выяснить физический смысл условий задач Дирихле

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in S,$$

и Неймана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = f(x, y), \quad (x, y) \in S,$$

где S — граница области G, ν — нормаль к S, а $f(x, y)$ — заданная на S функция.

Глава II

Уравнения эллиптического типа

§ 1. Основные свойства гармонических функций

Простейшим примером уравнений эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа.

Регулярные решения уравнения Лапласа называются *гармоническими функциями*.

152. Найти выражение оператора Лапласа:

а) в криволинейных координатах

$$x = \varphi(\xi, \eta), \quad y = \psi(\xi, \eta),$$

б) в полярных координатах

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

в) в цилиндрических координатах

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z;$$

г) в сферических координатах

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta,$$

д) в сплюснутых сфероидальных координатах

$$x = \xi\eta\sin\varphi, \quad y = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = \xi\eta\cos\varphi.$$

153. Пусть функция $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ гармоническая. Выяснить, какие из выписанных ниже функций являются гармоническими и какие нет:

а) $u(x + h)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — постоянный вектор;

б) $u(\lambda x)$, λ — скалярная постоянная;

в) $u(Cx)$, C — постоянная ортогональная матрица;

г) $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $n = 2$;

д) $\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $n > 2$;

е) $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial u}{\partial x_3}$, $n=3$;

ж) $x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}-x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $n=2$;

з) $x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_1}-x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$, $n=2$;

и) $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}$, $n=2$;

к) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$, $n=2$;

л) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2$, $n=2$.

154. Найти значение постоянной k, для которой выписанные ниже функции являются гармоническими:

а) $x_1^3+kx_1x_2^2$;

б) $x_1^2+x_2^2+kx_3^2$;

в) $e^{2x_1}\operatorname{ch} kx_2$;

г) $\sin 3x_1 \operatorname{ch} kx_2$;

д) $\dfrac{1}{|x|^k}$, $|x|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, $|x|\neq 0$.

В теории гармонических функций важную роль играет следующий принцип экстремума: *гармоническая в области D функция $u(x)$, отличная от постоянной, ни в одной точке x этой области не может достигать своего экстремума.*

155. Показать, что наряду с $u(x)$ гармонической является и функция $v(x)=\dfrac{1}{|x|^{n-2}}u\left(\dfrac{x}{|x|^2}\right)$ всюду, где она определена.

156. Пользуясь принципом экстремума, ответить, могут ли пересекаться линии уровня гармонической функции в области ее гармоничности.

157. Построить график монотонно возрастающей линии уровня функции $u(x, y)=x^2-y^2$, проходящей через точку (0, 0).

158. Начертить линию уровня гармонической функции $u=\sin x \operatorname{ch} y$, проходящую через точку $(-\pi/2, 0)$ и обладающую тем свойством, что при удалении точки (x, y) вдоль этой линии в бесконечность функция $\cos x \operatorname{sh} y$ стремится к отрицательной бесконечности.

Найти точки экстремума гармонической функции u в замкнутой области $\bar{D}$, если:

159. $u = xy$, $\overline{D}$ — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

160. $u = x^2 - y^2$, $\overline{D}$ — множество $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$.

161. Пусть функция $w(x)$ непрерывна в области D вместе со своими производными до второго порядка и удовлетворяет условию $\Delta w < 0$ $(\Delta w > 0)$. Показать, что $w(x)$ не может иметь отрицательный относительный минимум (положительный относительный максимум) в D.

162. Вычислить производную $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ по внешней нормали ν к границе S области D в точках экстремума функции u, определенной в задачах 159 и 160.

163. Пусть функция u гармонична в области D с достаточно гладкой границей S и непрерывна вплоть до S вместе со своими частными производными первого порядка. Показать, что в точке $x_0 \in S$, в которой u достигает своего экстремума в $D \cup S$, нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial \nu} \neq 0$, причем если ν — внешняя нормаль, то $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ в точке минимума и $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ в точке максимума (принцип Зарембы).

Действительная и мнимая части аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ являются гармоническими функциями (*сопряженными гармоническими функциями*). На этом факте основывается глубокая связь между теорией гармонических функций двух независимых переменных и теорией аналитических функций одного комплексного переменного.

164. Показать аналитичность функции $\varphi(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ в предположении, что функция $u(x, y)$ гармонична.

С помощью криволинейного интегрирования восстановить аналитическую в односвязной области D функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, если:

165. $u = x^3 - 3xy^2$.

166. $u = e^x \sin y$.

167. $u = \sin x \operatorname{ch} y$.

168. Пользуясь системой уравнений Коши — Римана $u_x(x, y) = v_y(x, y)$, $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ найти функцию $v(x, y)$, гармонически сопряженную с функцией $u(x, y)$, если:

а) $u(x, y) = xy^3 - yx^3$;

б) $u(x, y) = e^y \sin x$;

в) $u(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y$;

г) $u(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y$;

д) $u(x, y) = \operatorname{sh} x \cos y$;

е) $u(x, y) = \operatorname{ch} x \sin y$.

169. Пользуясь системой уравнений Коши — Римана (см. задачу 168), найти гармоническую функцию $u(x, y)$, если:

а) $u_x(x, y) = 3x^2y - y^3$;

б) $u_y(x, y) = e^x \cos y$;

в) $u_x(x, y) = e^x \sin y$;

г) $u_y(x, y) = x^2 - y^2 + x + y$;

д) $u_x(x, y) = xy + x^2 - y^2$.

170. Найти гармоническую функцию $u = u(x, y, z)$, если:

а) $u_y = e^x \cos z - 2y$;

б) $u_x = \operatorname{sh} x \cos z + 2xy$;

в) $u_z = xy^2 - xz^2 + 6xz + x$;

г) $u_z = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2z$.

171. Найти функцию $v(x, y)$, гармонически сопряженную с функцией $u(x, y)$, если:

а) $u_x(x, y) = y^3 - 3x^2y$;

б) $u_y(x, y) = e^y \cos x$;

в) $u_y(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y$;

г) $u_x(x, y) = \operatorname{ch} x \sin y$;

д) $u_x(x, y) = xy$.

172. Показать справедливость формулы Гурса

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0) + iC, \quad z = x + iy, \quad (0, 0) \in D, \qquad (1)$$

позволяющей восстановить аналитическую в односвязной области D функцию $f(z)$ по заданной ее действительной части $u(x, y)$ с точностью до произвольного мнимого постоянного iC без интегрирования.

173. Решить задачи 165—167, пользуясь формулой Гурса (1), и выводы сравнить с ранее полученными результатами.

174. В ограниченной области $D \subset E_n$ найти решение задачи Дирихле

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D; \qquad u(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i, \quad y \in \partial D,$$

a_i — действительные постоянные.

175. Пусть функция $u(x, y)$ гармоническая в области D плоскости $z = x + iy$ и однозначная аналитическая функция $\zeta = f(z)$ конформно отображает область D на область G плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Показать, что функция $v(\xi, \eta) = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$ является гармонической в области G.

176. Пусть r, φ — полярные координаты на плоскости. Убедиться в том, что при $n \geqslant 0$:

а) функции $u(r, \varphi) = r^n \cos n\varphi$, $v(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi$ — гармонические на всей плоскости;

б) функции $u(r, \varphi) = r^{-n} \cos n\varphi$, $v(r, \varphi) = r^{-n} \sin n\varphi$, $w(r) = \ln r$ — гармонические на всей плоскости, кроме начала координат.

177. Показать, что гармоническая в круге $|z| < R$ функция $u(x, y)$ внутри этого круга представляется в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \tag{2}$$

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z, \quad z = x + iy,$$

a_k, b_k — действительные постоянные.

178. Показать, что ограниченная гармоническая вне круга $|z| \leqslant R$ функция $u(x, y)$ представляется по формуле

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \tag{3}$$

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z, \quad z = x + iy,$$

a_k, b_k — действительные постоянные.

179. Показать гармоничность функции

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!} \Delta^k \tau(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k \nu(x_1, \ldots, x_{n-1}) \right] \tag{4}$$

в предположениях, что τ и ν — произвольные бесконечно дифференцируемые функции и ряд в правой части формулы (4) можно почленно дифференцировать нужное число раз.

180. Показать, что все регулярные решения уравнения эллиптического типа

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

с действительными постоянными коэффициентами a_k, $k = 1, \ldots, n$, одинакового знака могут быть представлены в виде

$$u(x_1, \ldots, x_n) = v\left(\frac{x_1}{\sqrt{|a_1|}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{|a_n|}} \right),$$

где $v(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная гармоническая функция.

181. Показать, что формула

$$u(x, y) = e^{\lambda x + \mu y} v(x, y),$$

где $v(x, y)$ — произвольная гармоническая функция, дает общее решение уравнения эллиптического типа

$$u_{xx} + u_{yy} - 2\lambda u_x - 2\mu u_y + (\lambda^2 + \mu^2) u = 0$$

с постоянными коэффициентами λ, μ.

182. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция двух точек $E(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, вида

$$E(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} |x-y|^{2-n}, & n > 2, \\ -\ln|x-y|, & n = 2, \end{cases} \tag{5}$$

где $|x-y|$ — расстояние между точками x, y, удовлетворяет уравнению Лапласа как по x, так и по y при $x \neq y$.

Определенная формулой (5) функция $E(x, y)$ называется *элементарным* или *фундаментальным решением* уравнения Лапласа.

183. Показать, что все отличные от постоянной решения уравнения Лапласа, зависящие только от расстояния $|x-y|$, имеют вид $CE(x, y)$, где C — произвольная постоянная, а $E(x, y)$ — элементарное решение этого уравнения.

Элементарное решение

$$E(M, M_0) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

уравнения Лапласа имеет простой физический смысл. А именно, сосредоточенный в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ электрический заряд μ создает поле, потенциал которого $u(x, y, z) = u(M)$ в каждой отличной от M_0 точке $M(x, y, z)$ определяется формулой

$$u(M) = \mu E(M, M_0).$$

184. Пусть в точках $M'(x', y', z')$, $M''(x'', y'', z'')$, расположенных на прямой с направляющим вектором ν симметрично относительно третьей точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на этой прямой, сосредоточены заряды $-\mu_0$ и μ_0 соответственно, такие, что при $|M' - M''| \to 0$

$$\mu_0 |M' - M''| = \mu(M_0).$$

Потенциал поля, созданного этими зарядами в точке $M(x, y, z)$, отличной от M_0, M', M'', имеет вид

$$\frac{\mu_0}{|M'' - M|} - \frac{\mu_0}{|M' - M|}.$$

Предельное расположение зарядов $-\mu_0$, μ_0 при $|M' - M''| \to 0$ называется *диполем*, а величины μ и ν — его *моментом* и *осью* соответственно. Вычислить потенциал диполя в точке $M(x, y, z)$.

185. В точке $M(x, y, z)$, отличной от $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, \ldots, m$, выписать потенциал зарядов μ_k, сосредоточенных в точках $M_k(x_k, y_k, z_k)$.

186. Плотность зарядов, расположенных на сфере

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = R^2,$$

постоянна и равна C. Вычислить потенциал поля, созданного этими зарядами в центре $M(x, y, z)$ сферы.

187. Написать формулу для потенциала зарядов, расположенных на пространственной кривой L с непрерывной плотностью $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, где

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

— параметрические уравнения кривой L.

§ 2. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона

Под *функцией класса* $C^m(D \cup S)$, где D — область пространства E_n с границей S, понимается однозначная функция, непрерывная в $D \cup S$ вместе с ее частными производными порядка m. При $m = 0$ получается класс непрерывных в $D \cup S$ функций.

В теории гармонических функций центральное место занимают *краевые задачи Дирихле* и *Неймана*, или, как еще принято говорить, *первая и вторая краевые задачи* соответственно.

Задача Дирихле: *найти гармоническую в области D функцию $u(x)$ класса $C^0(D \cup S)$, удовлетворяющую краевому условию*

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in S, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ — заданная на S непрерывная функция.

В предположении гладкости границы S области D ставится

Задача Неймана: *определить гармоническую в области D функцию класса $C^1(D \cup S)$ по краевому условию*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x), \quad x \in S, \tag{7}$$

где ν — внешняя нормаль к S, а $\varphi(x)$ — заданная на S непрерывная функция.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Неймана является условие

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS = 0. \tag{8}$$

Говорят, что задача Неймана *поставлена правильно*, если ее решение удовлетворяет условию (8).

188. В круге $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 \leqslant r < R,$$
$$u(x, y) = g(x, y), \quad r = R,$$

если:

а) $g(x, y) = x + xy$; б) $g(x, y) = 2(x^2 + y)$;

в) $g(x, y) = 4y^3$; г) $g(x, y) = x^2 - 2y^2$;

д) $g(x, y) = 4xy^2$; е) $g(x, y) = \frac{1}{R} y^2 + Rxy$;

ж) $g(x, y) = 2x^2 - x - y$.

189. Вне круга $x^2 + y^2 = r^2 \leqslant R^2$ решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad R < r < \infty,$$
$$u(x, y) = g(x, y), \quad r = R, \quad |u(x, y)| < \infty,$$

если:

а) $g(x, y) = y + 2xy$; б) $g(x, y) = ax + by + c$;

в) $g(x, y) = x^2 - y^2$; г) $g(x, y) = x^2 + 1$;

д) $g(x, y) = y^2 - xy$; е) $g(x, y) = y^2 + x + y$;

ж) $g(x, y) = 2x^2 - x + y$.

190. В круге $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad 0 \leqslant r < R,$$
$$u(x, y) = g(x, y), \quad r = R,$$

если:

а) $f(x, y) = 1, \quad g(x, y) = 0$;

б) $f(x, y) = x, \quad g(x, y) = 0$;

в) $f(x, y) = -1, \ g(x, y) = y^2/2$;

г) $f(x, y) = y, \quad g(x, y) = 1$;

д) $f(x, y) = 4, \quad g(x, y) = 1$.

191. Найти условие, при соблюдении которого в круге $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ правильно поставлена задача Неймана

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 \leqslant r < R,$$
$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial r} = g(x, y), \quad r = R.$$

Найти решение правильно поставленной задачи, если:

а) $g(x, y) = A$; б) $g(x, y) = 2x^2 + A$;

в) $g(x, y) = 2xy$; г) $g(x, y) = Ay^2 - B$;

д) $g(x, y) = Ax^2 - By^2 + y$.

Здесь A, B — постоянные.

192. Установить, для каких функций $g(x, y)$ правильно поставлена вне круга $x^2 + y^2 = r^2 \leqslant R^2$ задача Неймана

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad R < r < \infty,$$
$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial r} = g(x, y), \quad r = R, \quad |u(x, y)| < \infty.$$

Найти решение правильно поставленной задачи, если

а) $g(x, y) = y^2 - A$; б) $g(x, y) = x^2 + Ay - B$;

в) $g(x, y) = 2xy - Ax^2 + B$; г) $g(x, y) = x^2 - Ay^2 + B$.

Здесь A, B — постоянные.

193. В круге K: $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, найти гармоническую функцию $u(r, \varphi) \in C^1(K)$, удовлетворяющую условию

$$u(R, \varphi) - u(R_1, \varphi) = f(\varphi),$$

где $0 < R_1 < R$, $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$, если:

а) $f(\varphi) = \sin\varphi$; б) $f(\varphi) = \cos\varphi$;

в) $f(\varphi) = \cos^2\varphi + C$; г) $f(\varphi) = \sin 2\varphi + \cos 3\varphi$;

д) $f(\varphi) = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi$; е) $f(\varphi) = \sin\varphi - 3\cos^2\varphi + C$.

Здесь A, B, C — постоянные.

194. Вне круга $\overline{K}$: $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ найти ограниченную гармоническую функцию $u(r, \varphi) \in C^1(C\overline{K})$, удовлетворяющую условию

$$u(R, \varphi) - u(R_1, \varphi) = f(\varphi),$$

где $R < R_1 < \infty$, $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi = 0$, если

а) $f(\varphi) = 3\sin 2\varphi$; б) $f(\varphi) = 5\sin^2\varphi - A$;

в) $f(\varphi) = \sin^3\varphi + 2$; г) $f(\varphi) = \sin\varphi + 3\cos^2\varphi - A$;

д) $f(\varphi) = \sin\varphi + \cos 5\varphi$.

Здесь A — постоянная.

195. Пользуясь формулой (4), решить задачу Коши для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x, y, z) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = g(x, y), \quad u_z(x, y, 0) = h(x, y),$$

если

а) $g(x, y) = x + 2y$, $h(x, y) = 2x - y^2$;

б) $g(x, y) = xe^y$, $h(x, y) = 0$;

в) $g(x, y) = xy + x^2$, $h(x, y) = e^x + y$;

г) $g(x, y) = x\sin y$, $h(x, y) = \cos y$;

д) $g(x, y) = x^3 + 2$, $h(x, y) = 2x^2 - y$;

е) $g(x, y) = \cos 2x$, $h(x, y) = x - 2\sin 2y$.

Внутри кольца $a < r < b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ найти решения $u(r)$ следующих краевых задач:

196. $\Delta u(r) = 0$, $u(a) = T$, $u(b) = U$.

197. $\Delta u(r) = 0$, $u(a) = T$, $u_r(b) = U$.

198. $\Delta u(r) = 0$, $u_r(a) = T$, $u(b) = U$.

199. $\Delta u(r) = 0$, $u_r(a) = T$, $u_r(b) = U$.

200. $\Delta u(r) = 0$, $u(a) = T$, $u_r(b) + hu(b) = U$.

201. $\Delta u(r) = 0$, $u_r(a) - hu(a) = T$, $u(b) = U$.

202. $\Delta u(r)=0,\ u_r(a)=T,\ u_r(b)+hu(b)=U.$

203. $\Delta u(r)=0,\ u_r(a)-hu(a)=T,\ u_r(b)=U.$

204. $\Delta u(r)=0,\ u_r(a)-hu(a)=T,\ u_r(b)+hu(b)=U.$

205. $\Delta u(r)=0,\ u(a)=T,\ u(c)=hu(b),\ a<c<b,\ h\neq 0.$

206. Какое значение надо взять для $u(a)$, если функция $u(r)$ — гармоническая в кольце K: $a<r<b$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0<a<b<\infty$, непрерывная в $\overline{K}$ и:

а) $u(c)=T_0,\quad u(b)=T;$

б) $u(c)=T,\quad u_r(b)=U;$

в) $u(c)=T,\quad u_r(b)+hu(b)=W;$

г) $u_r(c)=U,\quad u(b)=T?$

Здесь $a<c<b$.

207. Какие значения надо взять для $u(a)$ и $u(b)$, если функция $u(r)$ — гармоническая в кольце K: $a<r<b$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0<a<b<\infty$, непрерывная в $\overline{K}$ и:

а) $u(c)=T_0,\quad u(d)=T_1;$

б) $u_r(c)=U,\quad u(d)=T.$

Здесь $a<c<b$, $a<d<b$.

208. Какое значение надо взять для $u(b)$, если функция $u(r)$ — гармоническая в кольце K: $a<r<b$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0<a<$ $<b<\infty$, непрерывная в $\overline{K}$ и:

а) $u(c)=T_0,\quad u(a)=T;$

б) $u(c)=T,\quad u_r(a)=U;$

в) $u(c)=T,\quad u_r(a)-hu(a)=W;$

г) $u_r(c)=U,\quad u(a)=T.$

Здесь $a<c<b$.

209. Какие значения надо взять для $u(a)$ и $u_r(b)$, если функция $u(r)$ — гармоническая в кольце K: $a<r<b$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0<a<b<\infty$, непрерывная в $\overline{K}$ и:

а) $u(c)=T_0,\quad u(d)=T;$

б) $u(c)=T,\ u_r(d)=U.$

Здесь $a<c<b$, $a<d<b$.

210. Пусть $u(r)$ — решение уравнения Пуассона $\Delta u(r)=ar$, $a\neq 0$ в круге K: $x^2+y^2=r^2<R^2$, непрерывное в $\overline{K}$.

Определить:

а) значение $u(R)$, если $u(c)=T$;

б) такое значение R, чтобы $u(R)=T$, $u(c)=T_0$.

Здесь $0\leqslant c<R$.

211. Пусть $u(r)$ — решение уравнения Пуассона $\Delta u(r) = \frac{1}{r}$ в кольце K: $a^2 < x^2 + y^2 = r^2 < b^2$, непрерывное в $\bar{K}$.

Определить:

а) значение $u(a)$, если $u(b) = T_0$, $u(c) = T$;

б) значение $u(a)$, если $u(b) = T$, $u_r(c) = U$;

в) значения $u(a)$ и $u_r(b)$, если $u(c) = T_0$, $u(d) = T$;

г) значения $u_r(a)$ и $u(b)$, если $u(c) = T$, $u_r(d) = U$.

Здесь $a < c < b$, $a < d < b$.

212. В шаре D: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 < R^2$ найти решение $u(r) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ задачи

$$\Delta u(r) = f(r), \quad 0 \leqslant r < R, \quad u(R) = T.$$

213. В однородном шаре $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 < R^2$ действуют постоянные источники тепла объемной плотности $6Q$. Считая температуру $u(r)$ в шаре стационарной, а температуру $u(R)$ поверхности шара постоянной, определить:

а) такое значение $u(R)$, чтобы $u(a) = T$;

б) такие значения $u(R)$ и Q, чтобы $u(c) = T_0$, $u(d) = T$;

в) такие значения $u(R)$ и Q, чтобы $u(a) = T$, $u_r(b) = U$;

г) такое значение R, чтобы $u(0) = T_0$, $u(R) = T$.

Здесь $0 \leqslant a < R$, $0 < b \leqslant R$, $0 \leqslant c < R$, $0 \leqslant d < R$, $c \neq d$.

214. Пусть D — шаровой слой: $a < r < b$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $0 < a < b < \infty$, функция $u(r)$ — гармоническая в D и непрерывная в $\bar{D}$. Какое значение надо взять для $u(a)$, чтобы:

а) $u(c) = T_0$, $u(b) = T$; б) $u(c) = T$, $u_r(b) = U$;

в) $u(c) = T$, $u_r(b) + hu(b) = W$;

г) $u_r(c) = U$, $u(b) = T$.

Здесь $a < c < b$.

215. В условии задачи 214 определить такие значения $u(a)$ и $u(b)$, чтобы:

а) $u(c) = T_0$, $u(d) = T$;

б) $u(c) = T$, $u_r(d) = U$.

Здесь $a < c < b$, $a < d < b$, $c \neq d$.

216. В однородном шаровом слое $a < r < b$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $0 < a < b < \infty$, действуют источники тепла объемной плотности $2Q/r$. Определить стационарное распределение температуры $u(r)$ в этом слое, если $u_r(a) = U$, $u(b) = T$.

217. В условиях задачи 216 при стационарном распределении температуры $u(r)$ определить:

а) значение $u(a)$, если $u(b) = T$, $u_r(b) = U$;

б) такое значение Q, чтобы при $u(b) = T$, $u_r(b) = U$ было $u(a) = T_0$.

218. Толстая стенка неограниченной цилиндрической трубы $a<r<c$ состоит из двух однородных слоев $a<r<b$ и $b<r<c$, коэффициенты теплопроводности материалов которых k_1 и k_2 соответственно. На внешней поверхности стенки трубы поддерживаются постоянные температура T и поток Q. Какую постоянную температуру надо поддерживать у заполняющей трубу охлаждающей жидкости, чтобы температура стенки трубы была стационарной. Предполагается, что температура внутренней стенки трубы совпадает с температурой охлаждающей жидкости.

§ 3. Некоторые задачи для гармонических функций

Наряду с задачами Дирихле и Неймана в приложениях важное значение имеют *смешанные краевые задачи*, в которых на одной части границы S задаются значения искомой в области D гармонической функции, а на другой — значения ее нормальной производной.

В теории краевых задач важную роль играет функция Грина. *Функцией Грина задачи Дирихле для гармонических функций* называется функция $G(x, y)$ двух точек x, y, обладающая свойствами:

1) она имеет вид

$$G(x, y) = E(x, y) + g(x, y),$$

где $E(x, y)$ — определенное по формуле (5) элементарное решение уравнения Лапласа, а $g(x, y)$ — гармоническая функция как по $x \in D$, так и по $y \in D$;

2) $G(x, y) = 0$, когда по крайней мере одна из точек x, y лежит на S.

Будем предполагать вначале, что D — ограниченная область с гладкой границей S.

219. Для гармонических в области D функций $u(x)$ и $v(x)$ класса $C^1(D \cup S)$ вывести тождество

$$\int_S \left[v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \nu_y} \right] dS_y = 0, \tag{9}$$

где ν_y — внешняя к S нормаль в точке $y \in S$, а dS_y — элемент площади S по переменной y.

220. Для гармонической в области D функции $u(x)$ класса $C^1(D \cup S)$ показать справедливость интегрального представления

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left[E(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y} \right] dS_y, \tag{10}$$

где ω_n — площадь единичной сферы в E_n,

$$\omega_n = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \pi^{\frac{n}{2}},$$

а Γ — гамма-функция Эйлера.

221. Доказать симметричность функции Грина $G(x, y)$, т. е. что

$$G(x, y) = G(y, x).$$

222. Доказать, что для любой гармонической в области D функции $u(x)$ класса $C^1(D \cup S)$ имеет место равенство

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0,$$

где ν — нормаль к S.

223. Пусть шар $|y-x| \leqslant R$ лежит в области гармоничности функции $u(x)$. Показать справедливость формул, выражающих теорему о среднем:

а) $u(x) = \dfrac{1}{\omega_n R^{n-1}} \displaystyle\int_{|y-x|=R} u(y)\, dS_y$ для сферы $|y-x| = R$;

б) $u(x) = \dfrac{n}{\omega_n R^n} \displaystyle\int_{|y-x|<R} u(y)\, d\tau_y$ для шара $|y-x| < R$.

224. Из формулы, выражающей теорему о среднем, вывести принцип экстремума для гармонических функций.

225. Пользуясь принципом экстремума, установить свойство единственности решения задачи Дирихле для гармонических функций с краевым условием (6).

226. Показать, что при наличии функции Грина $G(x, y)$ решение $u(x)$ задачи Дирихле с краевым условием (6) в классе $C^1(D \cup S)$ можно выписать в квадратурах:

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y)\, dS_y. \qquad (11)$$

227. Проверить, что выражение

$$G(x, y) = E(x, y) - E\left(|x|\, y, \frac{x}{|x|}\right)$$

представляет собой функцию Грина задачи Дирихле в шаре $|x| < 1$.

228. Пользуясь функцией Грина, вывести формулу Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \frac{1 - |x|^2}{|y-x|^n} \varphi(y)\, dS_y,$$

дающую решение задачи Дирихле с краевым условием (6) для гармонических функций в шаре $|x| < 1$.

229. Показать, что гармоническая функция в области гармоничности имеет производные всех порядков.

230. Построить решение задачи Дирихле с краевым условием (6) для шара $|x - x_0| < R$.

231. Вывести из формулы Пуассона формулу, выражающую теорему о среднем для сферы.

232. Показать справедливость тождества

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\,d\psi = 1,$$

где $x=(x_1, x_2)$ — точка круга $|x|<1$, а $y=(\cos\psi, \sin\psi)$ — точка на окружности $|y|=1$.

233. Непосредственной проверкой убедиться в гармоничности представленной в шаре $|x|<1$ формулой Пуассона функции $u(x)$ и показать, что

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ |x_0|=1}} u(x) = \varphi(x_0).$$

234. Показать, что для неотрицательной гармонической в шаре $|x|<R$ функции $u(x)$ верны оценки

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leqslant u(x) \leqslant R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

235. Может ли сохранять знак гармоническая в E_n функция, отличная от постоянной?

236. Может ли ограниченная сверху гармоническая в E_n функция отличаться от постоянной?

237. Показать, что если для непрерывной в области D функции в окрестности каждой точки области D имеет место теорема о среднем, то эта функция гармоническая в D.

238. Показать, что если для функции $u(x)$ класса $C^2(D)$ интеграл от нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, взятый по любой сфере, лежащей в D, равен нулю, то эта функция является гармонической в D.

239. В круге K: $x^2+y^2+2x<0$ решить задачу

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y)\in K,$$
$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y)\in \partial K,$$

если:

а) $f(x, y)=0, \qquad g(x, y)=4x^3+6x-1;$

б) $f(x, y)=0, \qquad g(x, y)=x^2+2y;$

в) $f(x, y)=0, \qquad g(x, y)=2y^2-x;$

г) $f(x, y)=4, \qquad g(x, y)=2xy+1;$

д) $f(x, y)=24y, \quad g(x, y)=y.$

240. Для n-мерного шара $|x-x_0|<R$, пользуясь формулой Грина и задачей **181**, записать в квадратурах решение задачи

$$\Delta u - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 u = 0, \quad |x-x_0|<R,$$
$$u(x) = \varphi(x), \quad |x-x_0| = R.$$

Задача Дирихле ставится не только в ограниченной области. При постановке этой задачи для бесконечной области от искомой гармонической функции требуется, чтобы она при $|x| \to \infty$ была ограниченной, когда $n = 2$, и стремилась к нулю не медленнее, чем $\frac{1}{|x|^{n-2}}$, когда $n > 2$.

241. Показать справедливость формулы (10) (см. задачу 220) для гармонической функции $u(x)$ в полупространстве $x_n > 0$.

242. Проверить, что выражение

$$G(x, y) = E(x, y) - E(x, y'),$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, а y' — точка E_n, симметричная точке y относительно плоскости $y_n = 0$, удовлетворяет всем требованиям из определения функции Грина, и вывести из формулы (11) формулу Пуассона

$$u(x) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{-\frac{n}{2}} x_n \int\limits_{y_n=0} \frac{\varphi(y_1, \ldots, y_{n-1})}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}(y_i - x_i)^2 + x_n^2\right]^{n/2}} dy_1 \ldots dy_{n-1},$$

дающую решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с краевым условием (6) в полупространстве $x_n > 0$.

243. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа с краевым условием (6) в полупространстве $x_n < 0$.

244. Найти гармоническую в полуплоскости $y > 0$ функцию $u(x, y)$, если известно, что

$$u(x, 0) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

245. В полупространстве $z < 0$ найти гармоническую функцию $u(x, y, z)$ по краевому условию

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Пусть D^+ — ограниченная область с границей S, а D^- — дополнение $D^+ \cup S$ до всего пространства E_n.

Задачи Дирихле в областях D^+ и D^- принято называть соответственно *внутренней* и *внешней* задачами.

246. Показать, что при помощи инверсии

$$\xi = \frac{x}{|x|^2}$$

внешнюю задачу Дирихле можно редуцировать к внутренней задаче.

247. Построить решение задачи Дирихле для внешности круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ по краевому условию

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad x^2 + y^2 = 1.$$

248. Найти условие, необходимое для существования решения задачи Неймана с краевым условием (7).

249. Доказать единственность решения внутренней задачи Неймана с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

250. Показать, что функция

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_S \ln\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}\, g(\xi, \eta)\, dS + C$$

является решением задачи Неймана в круге $x^2 + y^2 < R^2$ с краевым условием

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu} = g(x, y), \quad x^2 + y^2 = R^2,$$

если функция g удовлетворяет условию

$$\int\limits_S g\, dS = 0.$$

251. Пользуясь формулой Гурса (1), вывести из формулы Пуассона

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2x\xi - 2y\eta + x^2 + y^2}\, u\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi,$$

$$\xi = \cos\varphi, \quad \eta = \sin\varphi,$$

формулу Шварца

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{t + z}{t - z}\,\frac{u(t)\, dt}{t} + iC.$$

252. Найти гармоническую в полукруге $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ функцию $u(x, y)$, непрерывную в замкнутом полукруге с непрерывными вплоть до диаметра $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$ первыми производными по краевым условиям

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0,$$

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad -1 < x < 1.$$

253. Найти гармоническую в полукруге $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую краевым условиям:

$$u(x, y) = 0, \quad |z| = 1, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

254. Показать, что формула

$$u(x, y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1 - 2r\cos(\vartheta - \varphi) + r^2} - \frac{1}{1 - 2r\cos(\vartheta + \varphi) + r^2}\right)(1 - r^2)\, f(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad \xi = \cos\vartheta, \quad \eta = \sin\vartheta,$$

дает гармоническую в полукруге $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ функцию, удовлетворяющую краевым условиям

$$u(x, y) = f(\vartheta), \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

где f — заданная непрерывная функция, причем

$$f(0) = u(1, 0) = f(\pi) = u(0, -1) = 0.$$

§ 4. Потенциалы

Объемным потенциалом масс, распределенных по области D пространства E_n с плотностью μ, называется функция

$$u(x) = \int\limits_D E(x, y)\, \mu(y)\, d\tau_y, \tag{12}$$

где $E(x, y)$ — элементарное решение уравнения Лапласа, а $d\tau_y$ — элемент объема по переменному y. Он является гармонической функцией вне замкнутой области $D \cup S$, где $S = \partial D$. В случае непрерывности и ограниченности функции μ в D потенциал объемных масс непрерывен вместе со своими производными первого порядка во всем пространстве E_n. Если же μ имеет частные производные первого порядка, непрерывные и ограниченные в D, то потенциал объемных масс имеет также вторые производные в D, причем

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x), \quad x \in D, \tag{13}$$

где ω_n — площадь единичной сферы в E_n.

255. Выяснить поведение потенциала объемных масс при $|x| \to \infty$.

256. Считая область D ограниченной, указать условие, достаточное для того, чтобы при $n = 2$ потенциал объемных масс стремился к нулю, когда $|x| \to \infty$.

257. Показать, что выражение

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_D G(x, y)\, f(y)\, d\tau_y,$$

где $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле в области D, является решением уравнения Пуассона

$$\Delta u = f(x), \quad x \in D, \tag{14}$$

и удовлетворяет краевому условию

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0, \quad x_0 \in S.$$

258. Предполагая, что задача Дирихле с краевым условием

$$\lim_{x \to x_0} v(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S,$$

для гармонических функций имеет решение, на основании результата задачи **257** доказать существование решения $u(x)$ уравнения Пуассона (14), удовлетворяющего неоднородному краевому условию

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \varphi(x_0), \quad x_0 \in S. \tag{15}$$

259. Обладает ли свойством единственности решение задачи (14), (15)?

260. Показать справедливость равенств

$$\int_{\sigma} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x = \begin{cases} -\omega_n, & y \in d, \\ -\omega_n/2, & y \in \sigma, \\ 0, & y \in C(d \cup \sigma), \end{cases}$$

где $E(x, y)$ — элементарное решение уравнения Лапласа, d — произвольная ограниченная область пространства E_n с гладкой границей σ, а $C(d \cup \sigma)$ — дополнение $d \cup \sigma$ до всего пространства E_n.

261. Для потенциала $u(x)$ объемных масс, распределенных по области $D \subset E_n$ с плотностью $\mu(x)$, доказать справедливость формулы Гаусса

$$\int_{\sigma} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} d\sigma_x = -\omega_n \int_{D \cap d} \mu(y)\, d\tau_y,$$

где d — любая ограниченная область пространства E_n с гладкой границей σ.

262. Может ли гармоническая в области D функция быть потенциалом объемных масс, распределенных по области D с ненулевой плотностью?

263. Найти плотность μ масс, распределенных по области D, если известно, что объемный потенциал этих масс в D

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 1.$$

264. В условиях задачи **263** найти массу M, заполняющую объем шара $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$, лежащего в области D.

265. Найти частное решение уравнения Пуассона $\Delta u = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$, где a_k, $k = 1, \ldots, n$, — действительные постоянные, $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = A^2 \neq 0$.

266. Потенциал объемных масс, распределенных по области D, определяется функцией

$$u(x, y) = x^2 y^2.$$

Найти массу M, заполняющую квадрат $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, лежащий внутри D.

267. Показать, что потенциал $u(x, y)$ масс, распределенных по кругу $x^2+y^2<1$ с плотностью $\mu=1$, дается формулой

$$u(x, y)=\begin{cases}-\pi \ln r, & r \geqslant 1, \\ \frac{\pi}{2}\left(1-r^2\right), & r \leqslant 1,\end{cases}$$

где $r^2=x^2+y^2$.

268. Показать, что функция

$$u(x, y, z)=\begin{cases}4\pi/3r, & r \geqslant 1, \\ 2\pi\left(1-\frac{1}{3} r^2\right), & r \leqslant 1,\end{cases}$$

где $r^2=x^2+y^2+z^2$, является потенциалом объемных масс, распределенных по шару $r^2<1$ с плотностью $\mu=1$.

269. Потенциал $u(x, y)$ масс, распределенных по кругу $r^2=x^2+y^2<1$, внутри этого круга дается формулой

$$u(x, y)=\frac{\pi x}{4}\left(2-r^2\right).$$

Найти плотность масс μ и значение потенциала $u(x, y)$ вне замкнутого круга $r^2 \leqslant 1$.

270. Потенциал $u(x, y)$ масс, распределенных по кругу $r^2=x^2+y^2<1$, внутри круга дается формулой

$$u(x, y)=\frac{\pi}{8}\left(1-r^4\right).$$

Найти массу M в круговом кольце

$$\frac{1}{4}<x^2+y^2<\frac{1}{2}.$$

271. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{x^2+y^2=1} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} d s_x$, где $u(x)$ — потенциал масс, распределенных по квадрату $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, с плотностью $\mu=x y$.

Пусть S — гладкая или кусочно гладкая поверхность ($(n-1)$-мерное гладкое многообразие) в пространстве E_n, а μ — заданная на ней непрерывная функция.

Выражения

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \mu(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y} d S_y \tag{16}$$

и

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \mu(y) E(x, y) d S_y, \tag{17}$$

где $E(x, y)$ — элементарное решение уравнения Лапласа, ν_y — внешняя нормаль к S в точке y, а ω_n — площадь единичной сферы в E_n, называются соответственно *потенциалом двойного слоя* и *потенциалом простого слоя* масс, распределенных на S с плотностью μ.

В каждой точке x пространства E_n, не лежащей на S, потенциалы двойного и простого слоя представляют собой гармонические функции. Выражения (16) и (17) имеют смысл, когда точка x лежит на поверхности S, и представляют собой непрерывные функции.

Пусть S — замкнутая достаточно гладкая $(n-1)$-мерная поверхность (кривая с непрерывной кривизной при $n=2$), а D^+ и D^- — соответственно конечная и бесконечная области, ограниченные ею.

Потенциал двойного слоя (16) обладает следующими двумя важными свойствами:

1) при переходе точки x из области D^+ в область D^- он претерпевает разрыв так, что в обозначениях

$$u(x_0)=\frac{1}{\omega_n}\int_S \mu(y)\frac{\partial E(x_0, y)}{\partial \nu_y}\,dS_y,$$

$$u^+(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} u(x), \quad u^-(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}} u(x), \quad x_0\in S,$$

имеют место равенства

$$u^+(x_0)=-\frac{1}{2}\mu(x_0)+u(x_0), \tag{18}$$

$$u^-(x_0)=\frac{1}{2}\mu(x_0)+u(x_0); \tag{19}$$

2) при $x\to x_0\in S$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x},$$

обозначаемые, соответственно,

$$\left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^-,$$

причем

$$\left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+=\left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^-$$

в каждой точке $x_0\in S$.

Что же касается потенциала простого слоя (17), то: 1) он остается непрерывным при переходе точки x из области D^+ в область D^- и 2) существуют пределы

$$\left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}, \quad \left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^-=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x}$$

такие, что

$$\left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^+ = \frac{1}{2}\mu(x_0) + \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}, \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}\right)^- = -\frac{1}{2}\mu(x_0) + \frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}. \tag{21}$$

Здесь через $\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu_{x_0}}$ обозначена нормальная производная потенциала простого слоя (17) при $x = x_0 \in S$. Это выражение имеет вполне определенный смысл.

272. Выяснить поведение потенциалов двойного и простого слоя при $|x| \to \infty$.

273. Указать достаточное условие для того, чтобы при $n = 2$ потенциал простого слоя стремился к нулю, когда $|x| \to \infty$.

274. Составить интегральные уравнения Фредгольма второго рода, к которым сводятся задачи Дирихле и Неймана (как внутренние, так и внешние) для гармонических функций.

275. Для гармонических в полуплоскости $y > 0$ функций $u(x, y)$ найти решение задачи Неймана с краевым условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

редуцируя ее к задаче Дирихле в этой же полуплоскости для сопряженных к $u(x, y)$ гармонических функций.

276. Вычислить потенциал простого слоя $u(x, y)$ масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с плотностью $\mu = 1$.

277. Найти потенциал простого слоя $u(x, y, z)$ масс, распределенных по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с плотностью $\mu = 1$.

278. Найти потенциал двойного слоя $u(x, y)$ масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = 1$ с плотностью $\mu = x$.

279. Найти решение задачи Дирихле для гармонических функций вне шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ по краевому условию

$$u(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

280. Найти решение задачи Дирихле для гармонических функций в области $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ по краевому условию

$$u(x, y, z) = z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

281. Функция

$$u(x, y) = -\frac{y}{2r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

является внешним потенциалом простого слоя масс, распределенных по окружности $r^2 = 1$. Найти значение этого потенциала в круге $r^2 < 1$.

282. Найти потенциал двойного слоя масс, распределенных по окружности $x^2 + y^2 = 1$ с плотностью $\mu = 1$.

283. Потенциал простого слоя масс, распределенных по окружности $x^2+y^2=1$, вне замкнутого круга $x^2+y^2\leqslant 1$ дается формулой

$$u(x, y) = \frac{x}{r^2}\left(1+\frac{2y}{r^2}\right), \quad r^2 = x^2+y^2.$$

Найти плотность масс μ.

§ 5. Некоторые другие классы эллиптических уравнений

Среди классов эллиптических уравнений в приложениях важное значение имеет *уравнение Гельмгольца*

$$\Delta u + \lambda u = 0, \tag{22}$$

где Δ — оператор Лапласа, а λ — действительная постоянная, и *бигармоническое уравнение*

$$\Delta\Delta u = 0. \tag{23}$$

284. Непосредственной проверкой убедиться, что относительно переменных x, y выражение

$$u(x, y) = J_0\left(\mu\sqrt{(z-t)\bar z}\right),$$

где $J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}$ — функция Бесселя нулевого порядка, $\mu^2=\lambda$, $z=x+iy$, $t=\xi+i\eta$, удовлетворяет уравнению (22).

285. Пользуясь результатом задачи 284, показать, что формула

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\int_0^z J_0\left(\mu\sqrt{(z-t)\bar z}\right) f(t)\,dt,$$

где f — произвольная аналитическая функция комплексного переменного t, а $\mu^2=\lambda$, дает регулярные решения уравнения (22).

286. Для уравнения (22) доказать справедливость принципа экстремума: при $\lambda<0$ регулярное в области D решение уравнения (22) ни в одной внутренней точке области D не может достигать ни положительного максимума, ни отрицательного минимума.

287. Обладает ли свойством единственности решение задачи Дирихле (22), (6) в ограниченной области при $\lambda<0$?

288. Показать, что функция

$$E(r) = \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{\mu r t}\,dt}{\sqrt{t^2-1}},$$

где $\mu^2=-\lambda$, $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$, является решением уравнения (22) при $n=2$, $r\neq 0$.

289. Пользуясь записью оператора Лапласа в сферических координатах, доказать, что при $n=3$ одно из зависящих только от расстояния $r=|x-y|$ решений уравнения (22), когда $\lambda=-\mu^2$, имеет вид

$$E(r)=\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{24}$$

290. Полагая в уравнении (22) $\lambda=-\mu^2$, для регулярных в области $D\subset E_3$ решений $u\in C^1(D\cup S)$ этого уравнения доказать справедливость тождества

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left[E(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y}-u(y)\frac{\partial E(x, y)}{\partial\nu_y}\right]dS_y,$$

где $E(x, y)=E(r)$ дается формулой (24).

291. Записывая уравнение (23) при $n=2$ в виде

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial\bar z^2}=0,$$

показать, что все решения этого уравнения в односвязной области могут быть представлены в виде

$$u=\operatorname{Re}[\bar z\varphi(z)+\psi(z)],$$

где φ и ψ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $z=x_1+ix_2$.

292. Показать, что функция

$$E(r)=r^2\ln r,\quad r=|x-y|,$$

при $r\neq 0$ удовлетворяет уравнению (23) при $n=2$.

293. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u(x)=v_0(x)+|x|^2v_1(x),$$

где v_0 и v_1 — гармонические функции, а $|x|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, удовлетворяет уравнению (23).

294. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функции вида

$$u(x)=\sum_{k=1}^{m}u_k(x),$$

где $u_k(x)$ — решения уравнения $\Delta u_k-\lambda_k u_k=0$, $k=1, \ldots, m$, а λ_k — нули полинома $\sum\limits_{k=0}^{m}a_k\lambda^{m-k}$, являются решениями эллиптического уравнения порядка $2m$ с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{m}a_k\Delta^{m-k}u=0.$$

295. Показать, что функции вида

$$u(x, y) = \operatorname{Re}[\varphi(z_1) + \psi(z_2)],$$

где φ и ψ — аналитические функции комплексных переменных $z_1 = x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)y$, $z_2 = x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)y$, являются решениями эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

296. Показать, что при $b^2 - ac < 0$ все регулярные решения уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

могут быть получены из формулы

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f\left[x - \frac{1}{c}\left(b + i\sqrt{ac - b^2}\right)y\right],$$

где $f(t)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $t = x - \frac{1}{c}\left(b + i\sqrt{ac - b^2}\right)y$.

297. Пользуясь формулой Пуассона для круга, написать решение $u(x, y)$ задачи Дирихле внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ для уравнения эллиптического типа

$$a^2 u_{xx} + b^2 u_{yy} = 0, \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const},$$

с краевым условием (6).

298. Показать, что при постоянном a общее решение системы

$$au_x - v_y = 0, \quad av_x + u_y = 0$$

имеет вид

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z),$$

где $f(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $z = x + aiy$.

299. Доказать, что задача Коши для системы из 298 с данными

$$u = f_1, \quad v = f_2$$

на любой дуге S не может иметь более одного решения.

300. Может ли задача Коши

$$a^2 u_{xx} + b^2 u_{yy} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0,$$
$$0 < x < \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const},$$

иметь отличное от нуля решение?

301. Показать, что все регулярные решения эллиптической системы

$$u_{xx}-u_{yy}-2v_{xy}=0,\quad v_{xx}-v_{yy}+2u_{xy}=0$$

в односвязной области могут быть получены из формулы

$$u(x,\ y)+iv(x,\ y)=\bar{z}\varphi(z)+\psi(z), \tag{25}$$

где φ и ψ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $z=x+iy$.

302. Пользуясь общим представлением (25) решений рассмотренной в задаче 301 эллиптической системы, показать, что для этой системы в круге $|z|<1$ однородная задача Дирихле с краевыми условиями

$$u(t)=0,\quad v(t)=0,\quad |t|=1,$$

имеет бесконечное множество решений

$$u(x,\ y)+iv(x,\ y)=(1-z\bar{z})\psi(z),$$

где $\psi(z)$ — произвольная аналитическая в круге $|z|<1$ функция, а неоднородная задача Дирихле с краевыми условиями

$$u(x)=f_1(t),\quad v(t)=f_2(t),\quad |t|=1,$$

вообще неразрешима.

303. Проверить эллиптичность системы

$$u_{xx}-u_{yy}+\sqrt{2}v_{xy}=0,\quad v_{xx}-v_{yy}-\sqrt{2}u_{xy}=0$$

и показать, что для нее однородная задача Дирихле с краевыми условиями

$$u(x,\ y)=0,\quad v(x,\ y)=0,\quad x^2+y^2=1,$$

в круге $x^2+y^2<1$ имеет нетривиальные решения

$$u^{(k)}(x,\ y)+iv^{(k)}(x,\ y)=[(\mu z+\bar{z})^2-4\mu^2]^k-(\mu z-\bar{z})^{2k},$$

$$z=x+iy,\quad \mu=\frac{i}{1+\sqrt{2}},\quad k=1,2,\ldots$$

304. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u\,(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{c^{2n}}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n\tau\,(x,y)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{c^{2n+1}}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n\nu\,(x,y),$$

где τ и ν — произвольные полиномы, удовлетворяет уравнению эллиптического типа с постоянными коэффициентами

$$a^2u_{xx}+b^2u_{yy}+c^2u_{zz}=0.$$

305. Проверить эллиптичность системы

$$\left\|\begin{matrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{matrix}\right\| (u, v, w, \varphi) = 0$$

и показать, что каждая компонента ее решения (u, v, w, φ) является гармонической функцией переменных x, y, z.

Напомним, что если $A = \|A_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка n, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор, то под $Ax = y$ понимается вектор y (линейное преобразование) с компонентами

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} x_k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

§ 6. Структурные свойства решений эллиптических уравнений

В предыдущих параграфах речь шла в основном о регулярных решениях эллиптических уравнений.

Действительная функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется *аналитической в области* D евклидова пространства E_n точек x, если для каждой точки $x^0 \in D$ существует параллелепипед $|x_i - x_i^0| < \delta_i$, $i = 1, \ldots, n$, в котором $f(x)$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k_1 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0} a_{k_1 \ldots k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{k_n}.$$

Коэффициенты этого ряда выражаются через $f(x)$ по формуле

$$a_{k_1 \ldots k_n} = \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right)_{x = x^0}.$$

Регулярные в области D решения эллиптических уравнений обладают замечательным свойством: *если L — линейный эллиптический оператор с аналитическими в области D коэффициентами, то регулярные в D решения уравнения*

$$L(u) = 0$$

являются аналитическими в D. Таким же свойством обладают и регулярные решения уравнения (1) из гл. I, если F является аналитической функцией относительно всех своих аргументов.

306. Пользуясь формулой Шварца (задача 251), показать, что гармоническая в области D плоскости комплексного переменного

$z=x+iy$ функция $u(x, y)$ является аналитической функцией действительных переменных x, y в области D.

307. Применяя формулу Пуассона (задача 228), показать, что гармоническая в области $D\subset E_n$ функция u действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$ является аналитической в области D.

308. Установить аналитичность регулярных решений уравнения Гельмгольца (22).

В ограниченной плоской области D с кусочно гладкой границей ∂D построить общее решение следующих эллиптических систем ($g_i=g_i(x, y)$, $i=1, 2$):

309. $u_x-v_y=g_1,\quad u_y+v_x=g_2.$

310. $u_x+v_y=g_1,\quad u_y-v_x=g_2.$

311. $u_x-v_y+u=g_1,\quad u_y+v_x+v=g_2.$

312. $u_x-v_y+v=g_1,\quad u_y+v_x-u=g_2.$

313. $u_x-v_y-3u=g_1,\quad u_y+v_x-3v=g_2.$

314. $u_x-v_y-2v=g_1,\quad u_y+v_x+2u=g_2.$

315. $u_x-v_y+au=g_1,\quad u_y+v_x+av=g_2,\quad a\in R.$

316. $u_x-v_y+av=g_1,\quad u_y+v_x-au=g_2,\quad a\in R.$

317. $u_x-v_y+au+bv=g_1,\quad u_y+v_x-bu+av=g_2,\quad a\in R,\quad b\in R.$

318. $au_x-bv_y+acu=g_1,\quad au_y+bv_x+bcv=g_2,\quad a>0,\quad b>0,\quad c\in R.$

319. $u_x+v_y-v=g_1,\quad u_y-v_x-u=g_2.$

320. $u_x+v_y-u=g_1,\quad u_y-v_x+v=g_2.$

321. $u_x+v_y+2v=g_1,\quad u_y-v_x+2u=g_2.$

322. $u_x+v_y+4u=g_1,\quad u_y-v_x-4v=g_2.$

323. $u_x+v_y-av=g_1,\quad u_y-v_x-au=g_2,\quad a\in R.$

324. $u_x+v_y-au=g_1,\quad u_y-v_x+av=g_2,\quad a\in R.$

325. $u_x+v_y-au+bv=g_1,\quad u_y-v_x+bu+av=g_2,\quad a\in R,\quad b\in R.$

326. $au_x+bv_y-acu=g_1,\quad au_y-bv_x+bcv=g_2,\quad a>0,\quad b>0,\quad c\in R.$

327. Пусть D — ограниченная область плоскости переменных ξ, η с кусочно гладкой границей ∂D.

Показать, что если $u(\xi, \eta)\in C^1(\bar{D})$, $v(\xi, \eta)\in C^1(\bar{D})$, то

$$\int\limits_{\partial D} f(t)\,dt-2i\int\limits_{D}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}}\,d\xi\,d\eta=0, \tag{26}$$

где $f=u+iv$, $t=\xi+i\eta$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}+i\dfrac{\partial}{\partial \eta}\right)$.

328. В условиях задачи 327 показать, что для любого $z \in D$ имеет место тождество

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} \frac{d\xi\,d\eta}{t-z}. \tag{27}$$

329. Пользуясь утверждением задачи 328, получить решения задач 309 и 310.

330. Показать, что общее комплексное представление гармонических функций действительных переменных x и y имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(z) + \overline{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции переменного $z = x + iy$.

331. Пользуясь формулой (27) из задачи 328, показать, что одно из частных решений уравнения Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(z), \quad z = x + iy,$$

в области D плоскости переменных x, y с достаточно гладкой границей ∂D имеет вид

$$u = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{D} f(t) \ln|t - z|\,d\xi\,d\eta, \quad t = \xi + i\eta.$$

332. Найти общее действительное решение уравнения Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = f(z), \quad z = x + iy,$$

в области D плоскости переменных x, y с достаточно гладкой границей ∂D.

333. В области D плоскости переменных x, y с достаточно гладкой границей ∂D найти общее действительное решение уравнения

$$\Delta\Delta u = f,$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

334. Пользуясь комплексной формой записи двумерного оператора Лапласа

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}},$$

установить аналитичность гармонических функций с двумя независимыми переменными.

335. Рассмотренная в задаче 301 эллиптическая система в обозначениях $w = u + iv$, $\bar{z} = x - iy$ записывается в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = 0.$$

Исходя из этого, доказать аналитичность регулярных решений этой системы.

336. Пусть D — область пространства E_n, примыкающая $(n-1)$-мерным участком σ своей границы к гиперплоскости $x_n = 0$, а гармоническая в D функция $u = u(x)$ непрерывна в D вплоть до σ и обращается в нуль на σ. Показать, что функция

$$v(x) = \begin{cases} u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), & x_n \geqslant 0, \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n), & x_n \leqslant 0 \end{cases}$$

гармонична в области $D \cup D^* \cup (\sigma \backslash \partial\sigma)$, где D^* — область E_n, симметричная области D относительно гиперплоскости $x_n = 0$.

337. Область D лежит в полуплоскости $y - x > 0$ и примыкает к прямой $y - x = 0$ вдоль интервала AB этой прямой. Функция $u(x, y)$ гармонична в D, непрерывна в $D \cup AB$ и равна нулю в точках интервала AB.

Построить функцию $v(x, y)$, которая совпадает с $u(x, y)$ в D и является гармонической в области $D \cup AB \cup D^*$, где D^* — область, симметричная D относительно прямой $y - x = 0$.

338. Простая гладкая дуга γ делит односвязную область D плоскости переменных x, y на две области D_1 и D_2.

Показать, что если функция $u(x, y) \in C^1(D)$ и гармонична в D_1 и D_2, то она гармонична всюду в D.

Если функция $u(x, y) = u(z)$ гармонична в окрестности точки $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ всюду, кроме этой точки, то говорят, что α — *изолированная особая точка* гармонической функции $u(z)$. В окрестности D: $|z - \alpha| < \delta$ изолированной особой точки α гармоническую функцию $u(z)$ можно представить в виде

$$u(z) = k \ln |\Phi(z)|, \tag{28}$$

где k — действительная постоянная, а $\Phi(z)$ — аналитическая в кольце $0 < |z - \alpha| < \delta$ функция комплексного переменного $z = x + iy$.

Действительно, обозначим через $v(z)$ функцию, гармонически сопряженную с $u(z)$. Очевидно, что

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta + C, \quad \xi + i\eta = t, \tag{29}$$

где C — произвольная действительная постоянная, а путь интегрирования, соединяющий фиксированную точку $z_0 \in D$, $z_0 \neq \alpha$, с переменной точкой $z \in D$, $z \neq \alpha$, лежит внутри D и не проходит через точку α. Когда в правой части формулы (29) интегрирование происходит по пути, обходящему точку α, функция $v(z)$ может получить приращение. Поэтому формулой (29) функция $v(z)$ определяется, вообще, неоднозначно, т. е. она определяется с точностью до слагаемого кратного $2k\pi$, где k — действительное число и через $2k\pi$ обозначен интеграл

$$\int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial \eta} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta = 2k\pi,$$

где γ — замкнутая простая кривая, обходящая точку $z = \alpha$. Очевидно, что функция

$$kF(z) = u(z) + iv(z) - k\ln(z-\alpha) \tag{30}$$

однозначна и аналитична в D всюду, кроме точки α. Следовательно, выражение

$$\Phi(z) = (z-\alpha)e^{F(z)}$$

является однозначной аналитической в D функцией комплексного переменного z с изолированной особенностью в точке α, причем в силу (30)

$$u(z) = k\ln|\Phi(z)|. \tag{31}$$

Пользуясь формулой (31), доказать справедливость следующих двух утверждений:

339. Если функция $u(z)$ гармонична и ограничена в кольце $0<|z-\alpha|<\delta$, то она гармонична всюду в круге $|z-\alpha|<\delta$, если положить $u(\alpha)=\lim\limits_{z\to\alpha} u(z)$. (В этом случае изолированная особая точка α гармонической функции $u(z)$ называется *устранимой*.)

340. Если α — изолированная особая точка гармонической функции $u(z)$ и $\lim u(z)=+\infty$ или $\lim u(z)=-\infty$ при стремлении точки z к α по любому пути, то вблизи точки α функция $u(z)$ представляется в виде

$$u(z) = k^*\ln|z-\alpha| + u^*(z),$$

где k^* — действительная постоянная, а функция $u^*(z)$ — гармоническая в некоторой окрестности $|z-\alpha|<\delta$ точки α.

Пусть $t'=e^{i\vartheta'}$, $t''=e^{i\vartheta''}$, $0\leqslant\vartheta'<\vartheta''\leqslant 2\pi$ — точки единичной окружности $t=e^{i\vartheta}$, $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$. Главная ветвь функции

$$u(\vartheta', \vartheta''; z) = \frac{1}{\pi}\arg\left[\frac{z-t''}{z-t'}e^{i\frac{\vartheta'-\vartheta''}{2}}\right] \tag{32}$$

однозначна и гармонична в круге $|z|<1$. Она называется *гармонической мерой дуги $t't''$ окружности $|t|=1$ в точке z, $|z|<1$, относительно единичного круга $|z|<1$.*

Очевидно, что при $z=e^{i\vartheta}$

$$u(\vartheta', \vartheta''; e^{i\vartheta}) = \frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta''}{2}}{\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta'}{2}}\right).$$

Отсюда следует, что функция $u(\vartheta', \vartheta''; e^{i\vartheta})$ равна единице в каждой точке t открытой дуги $t't''$, $\vartheta'<\vartheta<\vartheta''$, и равна нулю на дополнении дуги $t't''$, $\vartheta'<\vartheta<\vartheta''$ до полной окружности $|t|=1$.

341. Найти гармоническую в круге $|z|<1$ функцию $u(z)$ по краевому условию

$$u(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 1, & 0<\vartheta<\pi, \\ 0, & \pi<\vartheta<2\pi, \end{cases}$$

и вычислить $\lim u(z)$ при $z\to 1$, $|z|<1$, вдоль луча $\arg(z-1)=\pi\omega$.

Найти гармонические в круге $|z| < 1$ функции $u(z)$ по краевым условиям:

342. $u(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \pi, \\ -1, & \pi < \vartheta < 2\pi, \end{cases}$

343. $u(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 0, & 0 < \vartheta < \pi/2, \\ 1, & \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi, \\ 0, & \pi < \vartheta < 3\pi/2, \\ 1, & \frac{3\pi}{2} < \vartheta < 2\pi. \end{cases}$

344. $u(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < 3\pi/2, \\ 2, & \frac{3}{2}\pi < \vartheta < 2\pi. \end{cases}$

345. $u(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} -2, & 0 < \vartheta < \pi/4, \\ -1, & \frac{\pi}{4} < \vartheta < 2\pi. \end{cases}$

346. $u(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \pi/2, \\ 2, & \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi, \\ 0, & \pi < \vartheta < 2\pi. \end{cases}$

347. $u(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 0, & 0 < \vartheta < \pi/4, \\ 1, & \frac{\pi}{4} < \vartheta < \pi, \\ 0, & \pi < \vartheta < 2\pi. \end{cases}$

348. Доказать единственность решения каждой из задач **341—347.**

Доказывается, что для любой суммируемой на промежутке $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ функции $f(\theta)$ формула Пуассона

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|t - z|^2} f(\theta)\, d\theta, \qquad t = e^{i\theta}, \tag{33}$$

определяет гармоническую в круге $|z| < 1$ функцию $u(z)$, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{z \to t} u(z) = f(\theta), \quad |z| < 1, \quad |t| = 1$$

для почти всех значений θ из промежутка $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

349. Найти гармоническую ограниченную в круге $|z| < 1$ функцию, которая на окружности $|t| = 1$ почти всюду совпадает с функцией

$$\varphi(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{для иррациональных } \theta, \\ 0 & \text{для рациональных } \theta. \end{cases}$$

350. Пользуясь формулой Шварца из задачи **251**, построить решения задачи Дирихле, рассмотренной в задачах **341—347**.

351. Установить гармоничность функции

$$u(z) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}$$

при $z \neq 1$ и показать, что на окружности $|t| = 1$ она удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} &\lim u(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \to t, \quad |z| < 1, \quad |t| = 1, \quad t \neq 1, \\ &\lim u(z) = \infty \quad \text{при} \quad z \to 1, \quad |z| < 1. \end{aligned} \tag{34}$$

352. Показать, что среди гармонических в круге $|z| < 1$ функций, удовлетворяющих краевым условиям (34), рассмотренная в задаче **351** функция $u(z)$ не является единственной.

353. Установить гармоничность функции

$$u(z) = \ln \frac{(1-x)^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

в круге $|z| < 1$ и вычислить ее краевые значения на окружности $|z| = 1$ при $z \neq \pm 1$.

354. Можно ли представить при помощи формулы Пуассона (33) рассмотренные в задачах **351** и **353** гармонические функции?

В приложениях определенный интерес представляет знание поведения решений краевых задач для эллиптических уравнений в области их определения вплоть до границы. На гладкость (в замкнутой области) решений краевых задач для эллиптических уравнений существенно влияет характер гладкости как границы области (носителя данных), так и самих данных (краевых значений).

355. Пользуясь формулой Шварца из задачи **251**, построить гармоническую в круге $|z| < 1$, $z = x + iy$, функцию $u(z) \equiv u(x, y)$, непрерывную в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и удовлетворяющую на окружности $|z| = 1$ краевому условию

$$u(z) = P_n(x), \quad -1 \leqslant |x| \leqslant 1,$$

где $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ — многочлен степени n с действительными коэффициентами a_n.

Рассмотреть частные случаи:

а) $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$;

б) $P_4(x) = 8x^4 + x$;

в) $P_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$;

г) $P_5(x) = 16x^5$.

356. Показать, что гармоническая в круге $|z| < 1$ функция $u(z)$, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ и совпадающая на окружности $|z| = 1$ с действительным многочленом $P(x, y)$ переменных x, y, $z = x + iy$, сама является многочленом.

357. Пользуясь формулой Шварца из задачи **251** для единичного круга, вывести формулу Шварца

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z} + iC, \quad C = \text{const},$$

выражающую аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функцию $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ по краевым значениям ее действительной части

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

в предположении, что для больших значений $|t|$

$$\varphi(t) = o(t^{-h}), \quad h > 0.$$

358. Решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(0, y) = 0, \quad 0 \leqslant y < \infty, \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

$$f(x) = o(x^{-h}), \quad x \to +\infty, \quad h > 0.$$

Глава III

Уравнения гиперболического типа

§ 1. Волновое уравнение

Ниже будем предполагать, что в пространстве E_{n+1} точек (x, t) символ x обозначает совокупность пространственных переменных $x_1, \ldots, x_n$, а t — время.

Как уже было отмечено в § 4 гл. I, колебательные процессы в определенных предположениях описываются уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_{tt} = 0. \tag{1}$$

Поэтому решение этого уравнения принято называть *волной*, а само уравнение (1) — *волновым*.

Поскольку соответствующая уравнению (1) характеристическая форма $Q(\lambda)$ имеет вид

$$Q(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \lambda_{n+1}^2,$$

оно является уравнением гиперболического типа.

Характеристической поверхностью уравнения (1) называется n-мерное многообразие в E_{n+1}

$$\varphi(x, t) = 0,$$

на котором квадратичная форма

$$Q(\operatorname{grad} \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2 - \varphi_t^2 = 0.$$

Одной из самых важных задач в теории распространения волн является задача Коши. В настоящем параграфе эта задача будет рассмотрена в следующей постановке: *требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{2}$$

где φ и ψ — заданные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$.

359. Выписать все характеристические кривые уравнения колебаний струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \tag{3}$$

360. Определить характеристические поверхности второго порядка для уравнения колебаний мембраны

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{tt} = 0. \tag{4}$$

361. Найти все характеристические плоскости уравнения распространения звука

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - u_{tt} = 0. \tag{5}$$

362. Показать, что выражение

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = tM(\mu),$$

где

$$M(\mu) = \int\limits_{|y|=1} \mu(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2, x_3 + ty_3)\, dS_y,$$

а $\mu(x_1, x_2, x_3)$ — заданная в пространстве E_3 переменных x_1, x_2, x_3 функция с непрерывными частными производными второго порядка, является решением уравнения (5).

363. Показать, что *формула Кирхгофа*

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} tM(\psi) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)], \tag{6}$$

где φ и ψ — заданные в пространстве E_3 действительные функции, имеющие непрерывные частные производные третьего и второго порядка соответственно, а $M(\mu)$ определена в задаче **362**, дает решение задачи Коши с начальными условиями (2).

364. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\tau(x_1, \ldots, x_n) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x_1, \ldots, x_n)\right], \tag{7}$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$, а τ и ν — бесконечно дифференцируемые функции, является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_t(x, 0) = \nu(x),$$

предполагая, что ряд в правой части формулы (7), а также ряды, полученные из него почленным дифференцированием дважды по $x_1, \ldots, x_n, t$, равномерно сходятся.

365. Вывести из формулы (6) принцип Гюйгенса: соответствующая задаче Коши (5), (2) волна в точке (x_1, x_2, x_3, t) пространства E_4 вполне определяется значениями φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ и ψ на сфере

$$(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + (z_3 - x_3)^2 = t^2$$

радиуса $|t|$ с центром в точке (x_1, x_2, x_3).

366. В предположении, что φ и ψ зависят только от двух пространственных переменных x_1, x_2, вывести из формулы Кирхгофа

(6) формулу Пуассона

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_d \frac{\psi(y_1, y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_d \frac{\varphi(y_1, y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}, \quad (8)$$

где d — круг $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 \leqslant t^2$.

367. Показать, что формула Пуассона (8) дает решение задачи Коши (4), (2).

368. Имеет ли место принцип Гюйгенса для решений задачи Коши (4), (2)?

369. Предполагая, что φ и ψ зависят только от одного пространственного переменного $x = x_1$, вывести из формулы Пуассона (8) формулу Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau\right], \quad (9)$$

дающую решение задачи Коши с условиями (2) для уравнения (3).

370. Записывая уравнение колебаний струны (3) в характеристических переменных $\zeta = x+t$, $\eta = x-t$, показать, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(x, t) = f(x+t)+\varphi(x-t), \quad (10)$$

где f и φ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Найти общее решение для каждого из следующих уравнений:

371. $2u_{xx}-5u_{xy}+3u_{yy}=0$.

372. $2u_{xx}+6u_{xy}+4u_{yy}+u_x+u_y=0$.

373. $3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}-2u_x+4u_y+\frac{5}{16}u=0$.

374. $3u_{xx}+10u_{xy}+3u_{yy}+u_x+u_y+\frac{1}{16}u-16xe^{-\frac{x+y}{16}}=0$.

375. $u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y=4e^x$.

376. $u_{xx}-6u_{xy}+8u_{yy}+u_x-2u_y+4e^{5x+\frac{3}{2}y}=0$.

377. $u_{xx}-2\cos x u_{xy}-(3+\sin^2 x)u_{yy}+u_x+(\sin x-\cos x-2)u_y=0$.

378. $e^{-2x}u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}-e^{-2x}u_x+e^{-2y}u_y+8e^y=0$.

379. $u_{xy}+yu_y-u=0$.

380. $u_{xy}+xu_x-u+\cos y=0$.

381. $\operatorname{ch} x u_{xy}+(\operatorname{sh} x+y\operatorname{ch} x)u_y-\operatorname{ch} xu=0$.

382. $\frac{\partial}{\partial y}(u_x+u)+2x^2y(u_x+u)=0$.

383. $\frac{\partial}{\partial y}(u_x+u)+x(u_x+u)+x^2y=0$.

Решить следующие задачи Коши:

384. $4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0$,
$u(x,\ y)|_{y=0}=\varphi(x),\quad u_y(x,\ y)|_{y=0}=\psi(x)$.

385. $u_{xx}-2u_{xy}+4e^y=0$,
$u(x,\ y)|_{x=0}=\varphi(y),\quad u_x(x,\ y)|_{x=0}=\psi(y)$.

386. $u_{xx}+2\cos x\ u_{xy}-\sin^2 x\ u_{yy}-\sin x\ u_y=0$,
$u(x,\ y)|_{y=\sin x}=x+\cos x,\quad u_y(x,\ y)|_{y=\sin x}=\sin x$.

387. $3u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-3u_x+u_y=0$,
$u(x,\ y)|_{y=0}=\varphi(x),\quad u_y(x,\ y)|_{y=0}=\psi(x)$.

388. $e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y=0$,
$u(x,\ y)|_{y=0}=-x^2/2,\quad u_y(x,\ y)|_{y=0}=-\sin x$.

389. $u_{xx}-2\sin x\ u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}-\cos x\ u_y=0$,
$u(x,\ y)|_{y=\cos x}=\sin x,\quad u_y(x,\ y)|_{y=\cos x}=e^x/2$.

390. $u_{xx}-2\sin x\ u_{xy}-(3+\cos^2 x)u_{yy}+u_x+(2-\sin x-\cos x)u_y=0$,
$u(x,\ y)|_{y=\cos x}=0,\quad u_y(x,\ y)|_{y=\cos x}=e^{-x/2}\cos x$.

391. $u_{xx}+2\sin x\ u_{xy}-\cos^2 x\ u_{yy}+u_x+(\sin x+\cos x+1)u_y=0$,
$u(x,\ y)|_{y=-\cos x}=1+2\sin x,\quad u_y(x,\ y)|_{y=-\cos x}=\sin x$.

392. $u_{xx}+2\cos x\ u_{xy}-\sin^2 x\ u_{yy}+u_x+(1+\cos x-\sin x)u_y=0$,
$u(x,\ y)|_{y=\sin x}=\cos x,\quad u_y(x,\ y)|_{y=\sin x}=\sin x$.

393. $e^yu_{xy}-u_{yy}+u_y=xe^{2y}$,
$u(x,y)|_{y=0}=\sin x,\quad u_y(x,y)|_{y=0}=\frac{1}{1+x^2}$.

394. $3u_{xx}-5u_{xy}+2u_{yy}=0$,
$u(x,y)|_{y=x}=\frac{x}{1+x^2},\quad u_y(x,y)|_{y=x}=\sin x$.

395. $u_{xx}-6u_{xy}+5u_{yy}=0$,
$u(x,\ y)|_{y=x}=\sin x,\quad u_y(x,\ y)|_{y=x}=\cos x$.

396. $u_{xx}-u_{yy}+5u_x+3u_y+4u=0$,
$u(x,y)|_{y=0}=xe^{-\frac{5}{2}x-x^2},\quad u_y(x,y)|_{y=0}=e^{-\frac{5}{2}x}$.

397. Найти область зависимости задачи (1), (2) при $n=1$, $n=2$, $n=3$.

Решить следующие задачи Коши для уравнений первого порядка:

398. $u_x-u_y=0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x)$.

399. $u_x-u_y=y\sin x,\quad u(x,\ x)=\cos x$.

400. $u_x+u_y=0,\quad u(x,\ -x)=\varphi(x)$.

401. $u_x+u_y=e^{x+y},\quad u(x,\ 0)=\varphi(x)$.

402. $2u_x-3u_y=0,\quad u(x,\ x)=\varphi(x)$.

403. $u_x + 2u_y = \sin(x+y), \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

404. $2u_x - 5u_y = 20a, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

405. $u_x + 2u_y + 4u = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

406. $2u_x - u_y + 2u = 0, \quad u(x, -x) = \varphi(x)$.

407. $u_x - u_y + 2u + 4(x+y) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

408. $2u_x - u_y - 4u = e^{x+y}, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

409. $2u_x + 3u_y + (3x - 2y)u = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

410. $2u_x + 3u_y + (3x + 2y)u = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

411. $3u_x - 4u_y + \sin(4x + 3y)u = 0. \quad u(x, 0) = \varphi(x)$.

412. $3u_x - 4u_y + e^{4x+3y}u = 0, \quad u(x, 0) = \cos x$.

413. Доказать, что для каждого решения $u(x, t)$ уравнения (3) имеет место формула среднего значения

$$u(x_1, t_1) + u(x_3, t_3) = u(x_2, t_2) + u(x_4, t_4),$$

где (x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3), (x_4, t_4) — последовательные вершины характеристического прямоугольника, т. е. прямоугольника, ограниченного характеристическими прямыми уравнения (3).

414. Построить решение $v(x_1, x_2, x_3, t, \tau)$ уравнения (5) по начальным условиям

$$v(x_1, x_2, x_3, \tau, \tau) = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau} = g(x_1, x_2, x_3, \tau).$$

415. Пусть $v(x_1, x_2, x_3, t, \tau)$ — решение задачи 414. Показать, что функция $u(x_1, x_2, x_3, t) = \int\limits_0^t v(x_1, x_2, x_3, t, \tau)\, d\tau$ является решением неоднородного уравнения

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - u_{tt} = -g(x_1, x_2, x_3, t),$$

удовлетворяющим однородным начальным условиям

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \; u_t(x_1, x_2, x_3, 0) = 0.$$

416. Функцию $u(x_1, x_2, x_3, t)$ из задачи 415 представить в виде

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{r^2 < t^2} \frac{g(y_1, y_2, y_3, t - r)}{r}\, d\tau_y; \qquad r = |y - x|,$$

и объяснить, почему она называется запаздывающим потенциалом.

417. Найти решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_1, x_2, 0) = x_1^3 x_2^2, \qquad \frac{\partial u(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = x_1^2 x_2^4 - 3x_1^3.$$

418. Построить решение неоднородного уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = g(x, t)$$

с неоднородными условиями вида (2).

419. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u(x, t, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(t-\tau)^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\mu(x_1, \ldots, x_n, \tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{(t-\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\nu(x_1, \ldots, x_n, \tau)\right], \quad (11)$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$, а μ и ν — бесконечно дифференцируемые функции, является решением задачи Коши

$$u_{tt} = \Delta u,$$
$$u(x, t, \tau)|_{t=\tau} = \mu(x, \tau), \quad u_t(x, t, \tau)|_{t=\tau} = \nu(x, \tau),$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, при условии, что ряд в правой части (11) допускает двукратное почленное дифференцирование по переменным t и x_i, $i = 1, \ldots, n$.

Пользуясь формулами (7) и (11), решить задачи Коши:

420. $u_{tt} = \Delta u$,
$u(x, y, z, 0) = xyz, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2y^2z^2.$

421. $u_{tt} = \Delta u$,
$u(x, y, z, 0) = r^2, \quad u_t(x, y, z, 0) = xy.$

422. $u_{tt} = \Delta u$,
$u(x, y, z, 0) = e^x \cos y, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2 - y^2.$

423. $u_{tt} = \Delta u$,
$u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2, \quad u_t(x, y, z, 0) = 1.$

424. $u_{tt} = \Delta u$,
$u(x, y, z, 0) = e^x, \quad u_t(x, y, z, 0) = e^{-x}.$

425. $u_{tt} = \Delta u$,
$u(x, y, z, 0) = \frac{1}{x}, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0,$
$x \neq 0, \; x^2 + y^2 + z^2 \neq t^2.$

426. $u_{tt} = \Delta u + ax + bt$,
$u(x, y, z, 0) = xyz, \quad u_t(x, y, z, 0) = xy + z.$

427. $u_{tt} = \Delta u + \frac{x}{1+t^2} e^y \cos z$,
$u(x, y, z, 0) = z \sin \sqrt{2}(x + y), \quad u_t(x, y, z, 0) = 0.$

428. $u_{tt} = \Delta u + \frac{xt}{1+t^2}$,
$u(x, y, z, 0) = x \sin y, \quad u_t(x, y, z, 0) = y \cos z.$

429. $u_{tt} = \Delta u + txy \sin az$,
$u(x, y, z, 0) = az + bxy, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0.$

430. $u_{tt} = \Delta u + axyze^{-bt}$,
$u(x, y, z, 0) = 2xy, \quad u_t(x, y, z, 0) = x \sin \sqrt{2}\, y \cos \sqrt{2}\, z.$

431. $u_{tt} = \Delta u + axyz \sin bt,$
$u(x, y, z, 0) = x^2yz^2, \quad u_t(x, y, z, 0) = y \sin \omega x e^{\omega z}.$

432. $u_{tt} = \Delta u + xyz \ln (1 + t^2),$
$u(x, y, z, 0) = ye^x \sin z, \quad u_t(x, y, z, 0) = xz \sin y.$

433. $u_{tt} = \Delta u + \dfrac{ayzt^3}{1+t^2},$
$u(x, y, z, 0) = xe^y, \quad u_t(x, y, z, 0) = ye^z.$

434. $u_{tt} = \Delta u,$
$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z),$
где φ и ψ — произвольные гармонические функции.

435. $u_{tt} = \Delta u + f(x, y, z),$
$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z),$
где φ, ψ — произвольные гармонические функции.

436. $u_{tt} = \Delta u + f(x, y, z)g(t),$
$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z),$
где φ, ψ, f — гармонические функции, а $g \in C^1$ $(t \geqslant 0)$.

437. $u_{tt} = \Delta u + f(x, y, z)g(t),$
$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z),$
где $\Delta^m \varphi = 0$, $\Delta^n \psi = 0$, $\Delta^l f = 0$.

Решить следующие одномерные задачи Коши:

438. $u_{tt} = u_{xx} + bx^2,$
$u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = a.$

439. $u_{tt} = u_{xx} + axt,$
$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \sin x.$

440. $u_{tt} = u_{xx} + ae^{-t},$
$u(x, 0) = b \sin x, \quad u_t(x, 0) = c \cos x$

441. $u_{tt} = u_{xx} + a \sin bt,$
$u(x, 0) = \cos x, \quad u_t(x, 0) = \sin x.$

442. $u_{tt} = u_{xx} + x \sin t,$
$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = \cos x.$

443. $u_{tt} = u_{xx} + g(x)f(t),$
$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0,$
где $g^{(2m)}(x) = 0$.

444. Показать, что если $u(x, t)$ — решение уравнения (3), то решением этого уравнения является и функция

$$v(x, t) = u\left(\frac{x}{x^2 - t^2}, \frac{t}{x^2 - t^2}\right)$$

всюду, где она определена.

445. Пользуясь формулой Даламбера для решения $u(x, t)$ задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

проверить, что в случае нечетности обеих функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $u(x, t)|_{x=0}=0$, а в случае их четности $u_x(x, t)|_{x=0}=0$.

446. Убедиться в том, что если в задаче Коши

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0,$$
$$u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0,\quad -\infty<x<\infty,$$

функция $f(x,t)$ относительно x нечетная, то $u(x,t)|_{x=0}=0$, а если она четная, то $u_x(x, t)|_{x=0}=0$.

Пользуясь утверждениями задач 445 и 446, подходящим образом продолжить данные на всю прямую $-\infty<x<\infty$ и решить следующие задачи на полупрямой:

447. $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x>0,\quad t>0,$
$u(0,\ t)=0,\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),$
$x>0.$

448. $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x>0,\quad t>0,$
$u_x(0,\ t)=0,\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),$
$x>0.$

449. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad x>0,\quad t>0,$
$u(0,\ t)=0,\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0,\quad x>0.$

450. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad x>0,\quad t>0,$
$u_x(0,\ t)=0,\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0,\quad x>0.$

451. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad x>0,\quad t>0,$
$u(0,\ t)=0,\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),$
$x>0.$

452. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad x>0,\quad t>0,$
$u_x(0,\ t)=0,\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x$
$x>0.$

Всякая функция $f(x-at)$ аргумента $x-at$ называется *прямой волной.*

Распространяя возмущение края с помощью прямой волны, решить задачи:

453. $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x>0,\quad t>0,$
$u(0,\ t)=\mu(t),\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0,\quad x>0.$

454. $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x>0,\quad t>0,$
$u_x(0,\ t)=\nu(t),\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0,\quad x>0.$

455. $u_{tt}=a^2u_{xx},\quad x>0,\quad t>0,$
$u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=\varkappa(t),\quad t>0,\quad h>0,$
$u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0,\quad x>0.$

Решить задачи:

456. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad x>0,\quad t>0,$
$u(0,\ t)=\mu(t),\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),$
$x>0.$

457. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t),\quad x>0,\quad t>0,$
$u_x(0,\ t)=\nu(t),\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),$
$x>0.$

458. Найти решение $u(x, y, t)$ уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = xyt$$

по начальным условиям

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = xy.$$

459. Доказать, что функция $u(x, y, t)$, определенная по формуле

$$u(x, y, t) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \rho^{2k+2} \square^k \Phi}{[2 \cdot 4 \ldots (2k+2)]\{(2n-1)(2n-3)\ldots[2n-(2k-1)]\}},$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2 - t^2$, $\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, Φ — однородный полином переменных x, y, t степени $n-2$, является решением неоднородного уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = \Phi(x, y, t).$$

460. Непосредственной проверкой убедиться в том, что наряду с решением $u(x, t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, уравнения (1), решением этого уравнения является и функция

$$v(x, t) = \frac{1}{(|x|^2 - t^2)^{\frac{n-2}{2}}} u\left(\frac{x}{|x|^2 - t^2}, \frac{t}{|x|^2 - t^2}\right),$$

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad |x|^2 \neq t^2.$$

461. Найти все линейно независимые однородные полиномы степени 3, по переменным x_1, x_2, t, удовлетворяющие уравнению (4).

462. Чему равно число линейно независимых однородных полиномов степени k по переменным $x_1, \ldots, x_n$, t, являющихся решениями уравнения (1)?

463. Функция $u(x, t)$ с непрерывными частными производными третьего порядка является решением уравнения (3). Показать, что этому же уравнению удовлетворяет и функция

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

464. Показать, что наряду с функцией $u(x, t)$ решением уравнения (3) являются и функции

а) $xu_x + tu_t$,

б) $u_x^2 + u_t^2$,

в) $\frac{u_t}{u_x^2 - u_t^2}$, $\quad u_x^2 \neq u_t^2$.

465. Определить значение показателя $k = \text{const}$, для которого уравнение (1) имеет решение вида

$$u(x, t) = \frac{1}{(|x|^2 - t^2)^k}, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

466. Показать, что если $u(x, t)$ — решение уравнения (1), то функция

$$v(x, t) = u\left(\frac{x_1}{\sqrt{|a_1|}}, \ldots, \frac{x_n}{\sqrt{|a_n|}}, \frac{t}{\sqrt{|a_{n+1}|}}\right)$$

будет решением уравнения гиперболического типа

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i x_i} - a_{n+1} u_{tt} = 0$$

с постоянными коэффициентами a_i, $i = 1, \ldots, n+1$, одинакового знака.

467. Найти условие, связывающее постоянные m_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n+1$, при котором уравнение (1) имеет решение вида плоской волны

$$u(x, t) = \Phi(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n + m_{n+1} t).$$

468. Показать, что наиболее общее решение уравнения (5), зависящее только от r и t, имеет вид

$$u(r, t) = \frac{f_1(r+t)}{r} + \frac{f_2(r-t)}{r}, \quad r \neq 0,$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Эти решения называются *сферическими волнами.*

469. Непосредственной проверкой убедиться в том, что наряду с функцией $u(x, t)$, обладающей частными производными третьего порядка, решением уравнения (1) является и функция

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_{x_i} + t u_t.$$

470. Показать, что выражение

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \Box[\varphi(r+t) + \psi(r-t)],$$

где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, а φ и ψ — произвольные трижды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяет уравнению (5).

471. Для уравнения (5) найти решение задачи Коши

$$u(x, 0) = \varphi(r), \quad u_t(x, 0) = \psi(r), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

где φ и ψ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

472. Доказать единственность решения задачи Коши с начальными условиями (2) для уравнения

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x, t).$$

473. Найти скорость распространения плоской волны

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + mt).$$

474. Может ли описывать функция

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 t^2$$

процесс распространения волны?

475. Показать, что функция

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 t^2$$

описывает процесс распространения волны, и найти скорость волны.

Найти область определения (распространения) волны, если:

476. Скорость волны $a = 5$, $n = 1$, носителем начальных данных $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ является отрезок $l_1 \leqslant x_1 \leqslant l_2$ прямой $t = 0$.

477. Скорость волны $a = 1$, $n = 2$, носителем данных $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ является кольцо $1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4$.

478. Скорость волны $a = 2$, $n = 3$, носителем начальных данных $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ является шар $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$.

479. Скорость волны $a = 1$, $n = 1$, носителями данных $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ являются отрезки $-2 \leqslant x_1 \leqslant -1$, $1 \leqslant x_1 \leqslant 2$ прямой $t = 0$. Определить множество точек плоскости E_2 переменных x_1, t, являющееся общей «областью» влияния обоих этих отрезков.

§ 2. Задачи, корректно поставленные для уравнений гиперболического типа

В предыдущем параграфе речь шла о задаче Коши для волнового уравнения в предположении, что носителем начальных данных $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ является вся плоскость $t = t_0$ или определенная ее часть. В приложениях большое значение имеет изучение таких задач для гиперболических уравнений, в которых носителями данных служат многообразия, отличные от плоскости $t = t_0$ или от ее части. Однако далеко не каждое многообразие (пусть даже сколь угодно гладкое) годится в качестве носителя данных.

Задача называется *корректно поставленной* для гиперболического уравнения, если ее решение существует, единственно и *устойчиво*. Понятие устойчивости означает, что малому изменению данных задачи соответствует малое изменение ее решения.

В § 1 характеристической была названа такая поверхность $\varphi(x, t) = 0$, в каждой точке которой

$$Q(\operatorname{grad} \varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^2 - \varphi_t^2 = 0.$$

Заданную уравнением $\psi(x, t) = 0$ поверхность в пространстве E_{n+1} будем называть *поверхностью пространственного типа*, если в каждой ее точке

$$Q(\operatorname{grad}\psi) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{x_i}^2 - \psi_t^2 < 0.$$

Обозначим через S кусок достаточно гладкой поверхности пространственного типа. Задача Коши в общей постановке формулируется так: *найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее на S условиям*

$$u(x, t) = F(M), \quad \frac{\partial u}{\partial N}(x, t) = \Phi(M), \tag{12}$$

где $F(M)$ и $\Phi(M)$ — заданные достаточно гладкие функции точки M поверхности S, а N — направление, нигде не касающееся S. Доказывается, что в такой формулировке задача поставлена корректно.

Заметим, что в случае одного пространственного переменного $x_1 = x$ для носителя S важным является не требование $\psi_x^2 - \psi_t^2 < 0$ (на кривой $\psi(x, t) = 0$, где заданы условия (12)), а требование $\psi_x^2 - \psi_t^2 \neq 0$.

Все сказанное выше не означает, что при постановке задач для гиперболических уравнений характеристические поверхности не годятся в качестве носителя данных. Так, например, когда характеристическая поверхность $\psi(x, t) = 0$ представляет собой конус

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2 - (t - t_0)^2 = 0, \tag{13}$$

ставится так называемая характеристическая задача Коши: *найти регулярное внутри конуса* (13) *решение $u(x, t)$ уравнения* (1), *принимающее на конусе* (13) *наперед заданные значения.*

В случае одного пространственного переменного $x_1 = x$ конус (13) представляет собой пару прямых $x - x_0 = t - t_0$, $x - x_0 = t_0 - t$, проходящих через точку (x_0, t_0). Эти прямые разбивают плоскость E_2 переменных x, t на четыре угла. Пусть область D представляет собой один из этих углов. В этом случае характеристическую задачу принято называть задачей Гурса: *определить регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения* (3), *удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{gathered} u = \varphi \ \text{при} \ x - x_0 = t - t_0, \\ u = \psi \ \text{при} \ x - x_0 = t_0 - t, \\ \varphi(x_0, t_0) = \psi(x_0, t_0). \end{gathered} \tag{14}$$

480. Показать, что задача определения регулярного решения $u(x, t)$ уравнения (3) по заданным на характеристике $x - t = 0$ значениям функции $u(x, t)$ и ее нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ поставлена некорректно (она вообще не имеет решения, а в тех случаях, когда имеет, оно не единственно).

481. Выяснить, для каких значений постоянного k прямая $x = kt$ может служить в качестве носителя данных в задаче Коши с условиями (12) для уравнения (3) и:

а) найти решение этой задачи, если направление N имеет компоненты $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, а носителем данных является отрезок $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 1/k)$ указанной прямой;

б) определить область зависимости, область влияния и область распространения;

в) доказать устойчивость решения.

482. Указать, для каких значений положительных постоянных φ_0, φ_1 дуга $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ окружности $x = \cos\varphi$, $t = \sin\varphi$, $0 \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, может служить носителем данных задачи Коши (12) для уравнения (3) и найти решение этой задачи, когда N совпадает с нормалью к окружности.

483. Пусть дуга S: $A(x_0,\ t_0)B(x_1,\ t_1)$ кривой $x = f(t)$ с непрерывной кривизной ни в одной своей точке не касается характеристик уравнения (3), а N — нормаль к дуге AB. Построить решение $u(x,\ t)$ задачи (3), (12).

484. Определить область распространения волны, найденной в задаче 483, и доказать ее единственность.

485. Указать, какому условию должны удовлетворять постоянные a, b, c, чтобы плоскость Π: $ax_1 + bx_2 + ct = 0$ служила носителем данных задачи Коши с условиями (12) для уравнения (4), и построить решение задачи Коши с данными на этой плоскости:

$$u = -\frac{a}{c}x_1 - \frac{b}{c}x_2, \quad \frac{\partial u}{\partial N} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где N — нормаль к Π.

486. Найти решение задачи Гурса для уравнения (3) с данными на характеристиках $x - t = 0$, $x + t = 0$:

$$u(x, x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a,$$
$$u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant b,$$
$$\varphi(0) = \psi(0).$$

487. Определить область распространения найденной в задаче 486 волны и доказать ее единственность.

488. Доказать единственность решения $u(x,\ t)$ характеристической задачи Коши для уравнения (4), когда носителем данных является нижняя часть характеристического конуса

$$x_1^2 + x_2^2 - (t-1)^2 = 0.$$

489. Обозначим через S нижнюю часть характеристического конуса $x^2 + y^2 - t^2 = 0$ до плоскости $t = -h$ $(h > 0)$. Найти решение $u(x,\ y,\ t)$ характеристической задачи Коши

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = xyt, \quad u|_S = 0.$$

490. Определить область распространения волны из задачи 489 и доказать ее единственность.

491. Будет ли корректно поставлена задача Дирихле для уравнения (3) в характеристическом прямоугольнике, когда но-

сителями данных $u(x, t)$ являются все стороны этого прямоугольника?

Задача отыскания решения уравнения (1) по данным значениям $u(x, t)$ корректно поставлена не только тогда, когда носителями данных являются характеристики этого уравнения. Для иллюстрации этого факта ограничимся рассмотрением уравнения (3).

Пусть D — область, лежащая в характеристическом угле между прямыми $x - x_0 = t - t_0$, $x - x_0 = t_0 - t$, $x \geqslant x_0$, ограниченная кривыми S_1: $t = s_1(x)$, S_2: $t = s_2(x)$, $x \geqslant x_0$, $s_1(x_0) = s_2(x_0)$, которые имеют непрерывную кривизну и удовлетворяют условиям

$$-1 \leqslant \frac{ds_1}{dx} < \frac{ds_2}{dx} \leqslant 1.$$

Доказывается, что корректно поставлена следующая

Задача Дарбу: *требуется определить регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения* (3), *удовлетворяющее условиям*

$$u|_{S_1} = \varphi(x), \quad u|_{S_2} = \psi(x), \quad x \geqslant x_0,$$

где φ и ψ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, такие что

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0).$$

492. Корректно ли поставлена задача об отыскании регулярного в первом координатном угле плоскости x, t решения $u(x, t)$ уравнения (3), если

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$
$$u(0, t) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t < \infty,$$
$$\varphi(0) = \psi(0), \quad \varphi''(0) = \psi''(0)?$$

493. Область D представляет собой угол между прямыми $x = 0$, $t = x/2$, $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Корректно ли поставлена задача об определении в области D решения уравнения (3) с данными

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(x, x/2) = \psi(x), \quad t \geqslant 0, \quad x \geqslant 0,$$
$$\varphi(0) = \psi(0), \quad \varphi''(0) = \psi''(0)?$$

Задачи 494, 495, 497, 500, 503, 504, 505, 524 редуцируются к функциональному уравнению вида

$$P(x) + \mu P[\lambda(x)] = f(x), \tag{15}$$

решение которого при соблюдении, например, условия

$$|\mu^m f[\lambda^m(x)]| < M^m,$$

может быть построено методом итерации

$$P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu^m f[\lambda^m(x)]. \tag{16}$$

Здесь M — постоянная, $0 < M < 1$, под μ^m понимается обычная степень μ

с показателем m, а

$$\lambda^m(x) = \lambda^{m-1}[\lambda(x)], \quad \lambda^0(x) = x.$$

494. Область D представляет собой угол между прямыми $t = k_1x$, $t = k_2x$, $x \geqslant 0$, где $-1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant 1$. Найти регулярное в области D решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям

$$u(x, k_1x) = \varphi(x), \quad u(x, k_2x) = \psi(x), \quad k_1 = 0, \quad k_2 = k > 0,$$

где φ и ψ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем $\varphi(0) = \psi(0)$.

495. В задаче 494 принять $k_1 = -1/4$, $k_2 = 1/4$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x$ и доказать существование и единственность решения $u(x, t)$.

496. Определить область распространения волны, соответствующей решению $u(x, t)$ из задачи 495.

497. Область D представляет собой угол между прямыми $t = x/4$, $t = 0$, $x \geqslant 0$. Найти регулярное в D решение $u(x, t)$ уравнения (3), если задано

$$u(x, x/4) = x, \quad u(x, 0) = \sin x.$$

498. Определить область распространения волны в задаче 497, считая $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Найти решения уравнения (3) и области их распространения по указанным ниже данным:

499. $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(x, x) = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, $\varphi(0) = \psi(0)$.

500. $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(x, x/2) = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2/3$, $\varphi(0) = \psi(0)$.

501. $u(0, t) = t^2$, $u(t, t) = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

502. $u(0, t) = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $u(t, t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

503. $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u[x, \tau(x)] = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi(0) = \psi(0)$,

где τ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \frac{d\tau}{dx} < 1.$$

504. Носителями данных для искомого решения $u(x, t)$ уравнения (3) являются дуги кривых:

$$t = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4,$$
$$t = -\sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4,$$

причем

$$u(x, \sin x) = x, \quad u(x, -\sin x) = x.$$

Определить волну $u(x, t)$ и область ее распространения.

505. Носителем данных решения $u(x, t)$ уравнения (3) являются дуга параболы $t = x^2/4$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и отрезок $0 \leqslant x \leqslant 2$ прямой $t = 0$. Определить решение $u(x, t)$ уравнения (3) и область его распространения, если

$$u(x, x^2/4) = x^3, \quad u(x, 0) = 0.$$

506. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (3) по данным

$$u(x, x) = \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=-x} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

и доказать его единственность.

507. Определить решение $u(x, t)$ уравнения (3), если

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$u(x, x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant b,$$

и найти область его распространения.

508. Корректно ли поставлена задача для уравнения (3) с данными

$$u(x, x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{t=x} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty?$$

§ 3. Некоторые другие классы гиперболических уравнений. Задача Коши для уравнения Лапласа

Рассмотренные в предыдущем параграфе задачи ставятся также для общего уравнения гиперболического типа

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = F. \tag{17}$$

Многообразие $\varphi(x, t) = 0$, удовлетворяющее условию

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} - \varphi_t^2 < 0,$$

может служить носителем данных Коши (12) для уравнения (17).

Как и в предыдущем параграфе, в характеристической задаче Коши для уравнения (17) носителем данных является характеристическая поверхность $\varphi(x, t) = 0$, на которой по определению

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} - \varphi_t^2 = 0.$$

В случае одного пространственного переменного $x = x_1$ удобнее всего записать уравнение (17) в виде

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)u = F(\xi, \eta). \tag{18}$$

В теории уравнения (18) важную роль играет функция Римана $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ двух точек (ξ, η), (ξ_1, η_1), обладающая следующими свойствами:

а) относительно переменных ξ, η она является решением уравнения

$$L^*R = \frac{\partial^2 R}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(aR) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bR) + cR = 0,$$

сопряженного с (18), а относительно ξ_1, η_1 — уравнения $LR = 0$, в котором вместо ξ, η подразумеваются переменные ξ_1, η_1;

б) $$\frac{\partial R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial\eta} - a(\xi_1, \eta) R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) = 0,$$

$$\frac{\partial R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial\xi} - b(\xi, \eta_1) R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 0,$$

$$R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 1;$$

в) $$\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi, \eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi, \eta_1) R(\xi, \eta; \xi, \eta_1) = 0,$$

$$\frac{\partial R(\xi, \eta; \xi_1, \eta)}{\partial\xi_1} + b(\xi_1, \eta) R(\xi, \eta; \xi_1, \eta) = 0,$$

$$R(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1.$$

Этими условиями функция $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ определяется однозначно, если коэффициенты a, b являются функциями класса C^1, а коэффициент c — класса C^0.

Наличие функции Римана позволяет выписать в квадратурах решение как задачи Коши, так и задачи Гурса для уравнения (18).

Решение задачи Гурса

$$u(\xi, \eta_0) = \varphi(\xi), \quad u(\xi_0, \eta) = \psi(\eta), \quad \varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0),$$

где φ и ψ — заданные непрерывно дифференцируемые функции, для уравнения (18) дается формулой

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = R(\xi, \eta_0; \xi, \eta)\varphi(\xi) + R(\xi_0, \eta; \xi, \eta)\psi(\eta) - \\ - R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)\varphi(\xi_0) + \\ + \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t, \eta_0) R(t, \eta_0; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, \eta_0; \xi, \eta)\right]\varphi(t)\,dt + \\ + \int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0, \tau) R(\xi_0, \tau; \xi, \eta) - \frac{\partial}{\partial\tau} R(\xi_0, \tau; \xi, \eta)\right]\psi(\tau)\,d\tau + \\ + \int_{\xi_0}^{\xi} dt \int_{\eta_0}^{\eta} R(t, \tau; \xi, \eta) F(t, \tau)\,d\tau. \end{aligned} \qquad (19)$$

Пусть σ — разомкнутая дуга Жордана, которая имеет непрерывную кривизну и ни в одной своей точке не касается характеристик уравнения (18).

Решение задачи Коши для уравнения (18) по заданным значениям u и $\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \xi}$, где ν — внешняя нормаль к σ в точке (ξ, η), имеет вид

$$u(P) = \frac{1}{2}u(Q)R(Q,P) + \frac{1}{2}u(Q')R(Q',P) + \int\limits_G F(P')R(P',P)\,d\xi_1 d\eta_1 - \frac{1}{2}\int\limits_{QQ'}\left[\frac{\partial u(P')}{\partial N}R(P',P) - u(P')\frac{\partial R(P',P)}{\partial N}\right]d\sigma_{P'} - \int\limits_{QQ'}\left[a(P')\frac{\partial \xi_1}{\partial N} + b(P')\frac{\partial \eta_1}{\partial N}\right]R(P',P)u(P')\,d\sigma_{P'}; \qquad (20)$$

здесь Q' и Q — точки пересечения с дугой σ характеристик $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$, выходящих из точки $P(\xi, \eta)$, а G — конечная область плоскости переменных ξ, η, ограниченная участком QQ' дуги σ и отрезками характеристик PQ и PQ'.

Выражение

$$\int\limits_G F(P')R(P',P)\,d\xi_1 d\eta_1$$

представляет собой частное решение неоднородного уравнения (18).

509. Показать, что функция Римана $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ для уравнения (3), записанного в характеристических переменных, тождественно равна единице.

510. Пользуясь функцией Римана из задачи **509**, выписать решения задачи Коши и Гурса для уравнения (3).

511. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция Римана для уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} + \lambda u = 0 \qquad (21)$$

в переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ имеет вид

$$R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = J_0(\mu\sqrt{(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1)}),$$

где $\mu^2 = -\lambda$.

Пользуясь функцией Римана из задачи **511**, выписать в квадратурах решения уравнения (21), удовлетворяющие приведенным ниже условиям:

512. $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\quad u_t(x, 0) = \psi(x)$.

513. $u(x, x) = \varphi(x)$, $\quad u(x, -x) = \psi(x)$, $\quad 0 \leqslant x < \infty$, $\varphi(0) = \psi(0)$.

514. Построить решение уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} + \lambda u = 1,$$

удовлетворяющее условиям $u(x, x) = u(x, -x) = 0$.

Найти решения задачи Коши

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(0, t) = \psi(t)$$

и задачи Гурса

$$u(x, x) = \varphi(x), \quad u(x, -x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0, \quad \varphi(0) = \psi(0)$$

для приведенных ниже уравнений:

515. $u_{xx} - u_{tt} + au_x + \frac{a^2}{4} u = 0, \quad a = \text{const}.$

516. $u_{xx} - u_{tt} + bu_t - \frac{b^2}{4} u = 0, \quad b = \text{const}.$

517. $u_{xx} - u_{tt} + au_x + bu_t + \frac{a^2}{4} u - \frac{b^2}{4} u = 0,$
$a = \text{const}, \quad b = \text{const}.$

518. Для уравнений из задач 515—517 найти решения, удовлетворяющие условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, x) = \psi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0).$$

519. Показать, что общее решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

имеет вид

$$u(x, y) = f(x + y) + f_1(x - y), \quad v(x, y) = f(x + y) - f_1(x - y),$$

где f и f_1 — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Для системы из задачи 519 построить решения, удовлетворяющие, соответственно, условиям:

520. $u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x).$

521. $u(x, x) = \varphi(x), \quad v(x, -x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0.$

522. $u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, -x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0.$

523. $u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, x) = \psi(x), \quad x \geqslant 0.$

524. $u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, -x/2) = \psi(x), \quad x \geqslant 0,$
$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0,$

где φ и ψ — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

525. Показать, что система

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

будет гиперболической тогда и только тогда, когда $a > 0$ и при $a = \text{const} > 0$ ее общее решение имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a}} f(x + \sqrt{a} y) + \frac{1}{\sqrt{a}} f_1(x - \sqrt{a} y),$$
$$v(x, y) = -f(x + \sqrt{a} y) + f_1(x - \sqrt{a} y),$$

где f и f_1 — произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

526. Определить решение системы из задачи 525, удовлетворяющее условиям

$$u\left(x, \frac{1}{\sqrt{a}}x\right) = \varphi(x), \quad v\left(x, -\frac{1}{\sqrt{a}}x\right) = \psi(x), \quad x \geqslant 0,$$

где φ и ψ — заданные действительные непрерывно дифференцируемые функции.

527. Найти условие, связывающее действительные постоянные a, b, c, при котором уравнение гиперболического типа

$$a^2u_{xx} + b^2u_{yy} - c^2u_{zz} = 0$$

имеет решение вида

$$u(x, y, z) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

где α, β, γ — действительные постоянные, а f — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

528. Показать, что уравнение из задачи 527 имеет решение

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{2n}} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(n)} \tau(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{2n+1}} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(n)} \nu(x, y),$$

где τ и ν — полиномы.

529. Для уравнения из задачи 527 найти решение задачи Коши с данными

$$u(x, y, 0) = x^2 - y^2, \quad u_z(x, y, 0) = xy.$$

530. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u(x, y) = \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}\,dt + \frac{\sqrt[3]{6}\,\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{4\pi^2}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right] t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}}\,dt$$

является решением задачи Коши с данными

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

для уравнения Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

при $y < 0$.

531. Показать, что функция

$$u(x, t) = f(t + ax) + \varphi(t + bx) + \psi(t + cx),$$

где f, φ, ψ — произвольные трижды непрерывно дифференцируемые функции, является решением уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - (a + b + c)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + (ab + ac + bc)\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - abc\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = 0.$$

532. Для уравнения, рассмотренного в **531**, решить задачу Коши с данными

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \varphi_3(x).$$

533. Определить тип системы

$$u_{xx} + u_{yy} - 2v_{xy} = 0,$$
$$v_{xx} + v_{yy} - 2u_{xy} = 0$$

и показать, что ее решением являются функции

$$u(x, y) = (x - y)\varphi(x + y) + (x + y)\varphi_1(x - y) + \psi(x + y) + \psi_1(x - y),$$
$$v(x, y) = (x - y)\varphi(x + y) - (x + y)\varphi_1(x - y) + \psi(x + y) - \psi_1(x - y),$$

где φ, φ_1, ψ, ψ_1 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

534. В угле, ограниченном прямыми $y = x/2$, $y = -x/2$, $x > 0$, найти решение рассмотренной в задаче **533** системы, если известно, что

$$u(x, x/2) = \tau(x), \quad u(x, -x/2) = \nu(x),$$
$$v(x, x/2) = \tau_1(x), \quad v(x, -x/2) = \nu_1(x), \quad x \geqslant 0,$$
$$\tau(0) = \nu(0), \quad \tau_1(0) = \nu_1(0),$$

где τ, τ_1, ν, ν_1 — заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

535. Для системы из **533** построить решение задачи Коши с данными

$$u(x, 0) = \tau_1(x), \quad v(x, 0) = \tau_2(x),$$
$$u_y(x, 0) = \nu_1(x), \quad v_y(x, 0) = \nu_2(x).$$

536. Определить, для каких значений действительных постоянных a, b, c, k система

$$au_x + bu_y + kcv_x = 0,$$
$$av_x + bv_y + \frac{c}{k}u_x = 0$$

является гиперболической, и построить ее общее решение.

537. Выяснить, для каких значений постоянных a, b, c, k, обеспечивающих гиперболичность рассмотренной в задаче **536**

системы, прямая $y=0$ может служить носителем данных Коши для этой системы.

538. Построить решение задачи Коши

$$u(x, 0)=p_n(x), \quad u_y(x, 0)=q_m(x)$$

для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ в предположении, что $p_n(x)$ и $q_m(x)$ — полиномы степеней n и m соответственно.

539. Для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ построить решение $u(x, y)$ задачи Коши

$$u(x, 0)=0, \quad u_y(x, 0)=\frac{\sin nx}{n}$$

и показать неустойчивость полученного решения.

540. Пусть D — область плоскости x, t, ограниченная отрезком $A(0, 0)\,B(1, 0)$ прямой $t=0$ и характеристиками $x+t=0$, $x-t-1=0$ уравнения (3). Показать, что регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения (3), непрерывное в $\bar{D}$ и равное нулю на характеристике $x+t=0$, достигает своего экстремума в $\bar{D}$ на отрезке AB.

541. Показать, что задача Коши

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_y(x, 0)=\psi(x), \quad 0<x<1$$

для уравнения

$$y^2u_{xx}+yu_{yy}+\frac{1}{2}u_y=0$$

при $y<0$ поставлена некорректно.

542. При $y<0$ для уравнения из задачи 541 найти решение $u(x, y)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad \lim_{y\to-0}(-y)^{-1/2}\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\nu(x), \quad 0<x<1.$$

543. Показать, что общее решение уравнения

$$u_{xx}-yu_{yy}-\frac{1}{2}u_y=0, \quad y>0,$$

имеет вид

$$u(x, y)=f_1(x+2y^{1/2})+f_2(x-2y^{1/2}),$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

544.* Найти решение $u(x, y)$ рассмотренного в задаче 543 уравнения по условиям

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad 0<x<1, \quad |\lim_{y\to+0}u_y|<\infty.$$

545. При $y>0$ найти решение рассмотренного в задаче 543 уравнения по условиям

$$u(x, 0)=\tau(x), \quad \lim_{y\to+0}y^{1/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x).$$

546. Показать, что общее решение уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \tag{22}$$

имеет вид

$$u(x, y) = (x+y)\varphi(x-y) + (x-y)\psi(x+y) + \varphi_1(x-y) + \psi_1(x+y),$$

где φ, φ_1, ψ, ψ_1 — произвольные четырежды непрерывно дифференцируемые функции.

547. Для уравнения (22) найти решение задачи Коши по условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = 0,$$
$$u_{yy}(x, 0) = 0, \quad u_{yyy}(x, 0) = 0.$$

548. Определить решение $u(x, y)$ уравнения (22) по условиям

$$u(x, x) = \tau_1(x), \quad u(x, -x) = \tau_2(x),$$
$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=-x} = \tau_3(x), \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=x} = \tau_4(x), \quad x \geqslant 0,$$
$$\tau_1(0) = \tau_2(0), \quad \tau_1'(0) = \tau_2'(0),$$
$$\tau_2'(0) = \tau_3(0) = \tau_4(0), \quad \tau_3'(0) = \tau_4'(0).$$

549. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} = 0 \tag{23}$$

имеет вид

$$u(x, y) = f_1(x+y) + f_2(x-y) + f_3(y),$$

где f_1, f_2, f_3 — произвольные достаточно гладкие функции.

550. Корректно ли поставлена задача для уравнения (23) с данными

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \varphi_2(x), \quad u_{yy}(x, 0) = \varphi_3(x)?$$

551. Определить решение $u(x, y)$ уравнения (23) по данным

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y).$$

§ 4. Характер гладкости решений уравнений гиперболического типа и некоторые некорректно поставленные для них задачи

В § 6 гл. II было отмечено, что решения эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами в области их регулярности являются аналитическими функциями независимых переменных. Аналогичным свойством могут не обладать решения неэллиптических уравнений. В этом легко убедиться на примере уравнения колебаний струны (3), общее решение которого дается формулой (10). Функция $u(x, t)$, представленная этой формулой, будет *регулярным решением* уравнения (3), если функции f и φ *лишь дважды непрерывно дифференцируемы*.

При нарушении такой гладкости функций f и φ определенную по этой же формуле функцию $u(x, t)$ принято называть в некотором смысле *обобщенным решением* уравнения (3).

В формуле (20), выражающей решение задачи Коши для уравнения (18), предполагается, что носитель данных σ представляет собой разомкнутую дугу Жордана с непрерывной кривизной, причем эта дуга ни в одной своей точке не касается характеристик уравнения (18). Также предполагается, что данные Коши $F(M)$ и $\Phi(M)$, определяемые по формулам (12), соответственно, дважды и один раз непрерывно дифференцируемы. Из формул (19) и (20) легко сделать вывод о том, что: а) *наличие разрывов у данных Гурса и Коши вызывает разрывы у решений этих задач*, б) *эти разрывы распространяются вдоль характеристик уравнения* (18) *и* в) *нарушение гладкости носителя данных σ влечет за собой нарушение гладкости решения.*

552. Показать, что задача Коши

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u(x, x)=\tau(x),\quad (u_x-u_t)_{t=x}=\nu(x)$$

с носителем данных σ: $x-t=0$ поставлена некорректно.

553. Найти связь между начальными данными $\tau(x)$ и $\nu(x)$, гарантирующую разрешимость задачи

$$u_{tt}=u_{xx},\quad u(x, x)=\tau(x),\quad u_t(x, x)=\nu(x),\quad -\infty<x<\infty,$$

и установить степень ее неопределенности.

554. В квадрате Q с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(1/2, -1/2)$, $B(1, 0)$, $C(1/2, 1/2)$ найти решение $u(x, t)$ задачи Гурса

$$u_{tt}=u_{xx},$$

$$u(x, x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, \end{cases}\qquad u(x, -x)=0,\quad 0<x<\frac{1}{2},$$

и определить распределение разрывов его первых и вторых производных.

555. В квадрате Q, ограниченном прямыми $x+t=1$, $x-t=1$, $x+t=-1$, $x-t=-1$ найти решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения $u_{tt}=u_{xx}$ по начальным условиям

а) $u(x, 0)=\begin{cases} 0, & -1<x\leqslant 0, \\ x, & 0\leqslant x<1, \end{cases}\qquad u_t(x, 0)=0,\quad |x|<1;$

б) $u(x, 0)=\begin{cases} x, & -1<x\leqslant 0, \\ \sin x, & 0\leqslant x<1, \end{cases}\qquad u_t(x, 0)=0,\quad |x|<1.$

556. В квадрате Q, ограниченном прямыми $x+t=1$, $x-t=1$, $x+t=-1$, $x-t=-1$, построить решение задачи Коши для

уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ по начальным условиям

$$\text{а) } u(x, 0) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leqslant 0, \\ x^n, & 0 \leqslant x < 1, \end{cases} \qquad u_t(x, 0) = 0, \quad |x| < 1;$$

$$\text{б) } u(x, 0) = 0, \quad |x| < 1, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leqslant 0, \\ x^n, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

557. Для уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ найти решение задачи Коши по условиям

$$u(x, 0) = 1/x, \quad -\infty < x < \infty, \quad x \neq 0,$$
$$u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

и определить множество особых точек полученного решения.

558. В угле $x + t > 0$, $x - t < 0$ найти решение задачи Гурса

$$u_{tt} = u_{xx},$$
$$u(x, x) = \frac{x}{1 - x}, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad x \neq 1,$$
$$u(x, -x) = 0, \quad -\infty < x \leqslant 0,$$

и определить множество особых точек полученного решения.

559. В угле D: $t > 0$, $t > x/2$ плоскости переменных x, t определить непрерывное решение $u(x, t)$ уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x \leqslant 0, \quad u(x, x/2) = x^n, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$
$$u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad (u_x - u_t)_{t=x/2} = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

и выяснить распределение его особенностей в зависимости от натурального показателя степени n.

Известно (задача 518), что задача

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < t < |x|, \quad 0 < |x| < \infty,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, -x) = \psi(x), \quad -\infty < x \leqslant 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, x) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

об определении ее регулярного решения поставлена корректно. Аналогом этой задачи для волнового уравнения с двумя пространственными переменными (4) можно считать задачу

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}, \tag{24}$$

$$0 < t < \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad 0 < |x_i| < \infty, \quad i = 1, 2,$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \Phi(x_1, x_2), \tag{25}$$

$$u\left(x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = \Psi(x_1, x_2),$$
$$-\infty < x_1, x_2 < \infty,$$

об определении ее регулярного решения. Однако задача (24), (25) уже не будет поставленной корректно.

560. Показать, что функции

$$u_{mn}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_d \frac{\rho^m \cos n\varphi\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}, \tag{26}$$

где $y_1 = \rho\cos\varphi$, $y_2 = \rho_2\sin\varphi$, d: $(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2<t^2$, дают нетривиальные решения задачи (24), (25) при $\Phi = \Psi = 0$, если n и m натуральные числа, такие что $n \geqslant 4$, $m = n-3$, $n-5$, ..., $n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

561. Указать другой класс нетривиальных решений задачи (24), (25) при $\Phi = \Psi = 0$.

562. Пользуясь формулой (10), показать, что каждая из функций $\sin ax \sin at$, $\cos ax \cos at$, $\sin ax \cos at$, $\cos ax \sin at$ при любом фиксированном значении a является решением уравнения (3).

563. Доказать единственность решения задачи Дирихле для уравнения (3) в характеристическом прямоугольнике П с вершинами в точках $M_1(x_1, t_1)$, $M_2(x_2, t_2)$, $M_3(x_3, t_3)$, $M_4(x_4, t_4)$, т. е. в прямоугольнике П, стороны которого лежат на характеристиках уравнения (3).

564. Установить связи между граничными значениями решений задачи Дирихле и задачи Гурса для уравнения (3) в характеристическом прямоугольнике П: $M_1M_2M_3M_4$, гарантирующие существование решения задачи Дирихле в этом прямоугольнике.

565. Пусть Q — прямоугольник с вершинами в точках $M_1(0, 0)$, $M_2(p, 0)$, $M_3(p, q)$, $M_4(0, q)$. Показать, что однородная задача Дирихле

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in Q,$$
$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial Q$$

при рациональном $\frac{p}{q}$ имеет нетривиальные решения.

Глава IV

Уравнения параболического типа

§ 1. Уравнение теплопроводности

Как уже было отмечено в § 4 гл. I, изучение явлений переноса (передача тепла, диффузия и др.) при определенных допущениях приводит к уравнению теплопроводности

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_t = 0, \tag{1}$$

являющемуся типичным примером параболических уравнений.

Пусть область D пространства (x, t), $T_0 \leqslant t \leqslant T_1$, обладает тем свойством, что она в пересечении с плоскостями $t = T$, $T_0 \leqslant T \leqslant T_1$, дает односвязную n-мерную область в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через S боковую поверхность области D и нижнее ее основание $t = T_0$.

Под первой краевой задачей, или задачей Дирихле, для уравнения (1) понимается следующая задача: *найти регулярное в области D вплоть до ее верхнего основания $t = T_1$ решение $u(x, t)$ уравнения* (1), *когда наперед заданы его значения на S*:

$$u|_S = \varphi. \tag{2}$$

Наряду с первой краевой задачей (2) для уравнения (1) ставится также вторая краевая задача, или задача Коши — Дирихле: *требуется определить регулярное в полупространстве $t > 0$ решение $u(x, t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — заданная функция.

566. Определить уравнение, которому удовлетворяет функция $v(\xi, \eta) = u(\eta, \xi - a\eta)$, где a — постоянная, а $u(x, t)$ — решение уравнения (1).

567. Показать, что функция $u(x, t)$, определенная как сумма ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^k \tau(x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

допускающего почленное дифференцирование нужное число раз, является решением уравнения (1).

568. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$E(x, t) = \frac{1}{(t-t_0)^{n/2}} \exp\left[-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}{4(t-t_0)}\right],$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — действительные параметры, при $t > t_0$ является решением уравнения (1). (Эта функция называется *фундаментальным решением* уравнения (1).)

569. Показать, что наряду с $u(x, t)$ и функция $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ является решением уравнения (1) при $\lambda = \text{const}$ всюду, где она определена.

570. Доказать, что для уравнения (1) в области D имеет место принцип экстремума: *регулярное в области D решение уравнения* (1), *непрерывное в* $D \cup S$, *своего экстремума достигает на* S.

571. Установить свойство единственности решения задачи (1), (2).

572. Показать, что в призматической области D: $0 < t < T$, $0 < x_1 < l_1$, $0 < x_2 < l_2$, функция

$$u(x_1, x_2, t) = \exp\left[-\pi^2\left(\frac{i^2}{l_1^2} + \frac{j^2}{l_2^2}\right)t\right] \sin\frac{ix_1\pi}{l_1} \sin\frac{jx_2\pi}{l_2},$$

где i и j — натуральные числа, является решением уравнения (1) при $n = 2$ и удовлетворяет условиям

$$u(x_1, x_2, 0) = \sin\frac{ix_1\pi}{l_1} \sin\frac{jx_2\pi}{l_2}, \quad u|_\sigma = 0,$$

где σ — боковая поверхность области D.

573. Построить регулярное в прямоугольнике $0 < t < T_0$, $0 < x < \pi$ решение $u(x, t)$ уравнения

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{1'}$$

по краевым условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

где φ — заданная достаточно гладкая функция.

574. Показать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy, \quad t > 0,$$

где $\varphi(y)$, $-\infty < y < \infty$, — заданная непрерывная ограниченная функция, является решением уравнения (1′), удовлетворяющим условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{3'}$$

575. Показать, что для регулярного в полупространстве $t>0$ решения $u(x, t)$ уравнения (1′) имеют место оценки

$$m \leqslant u(x, t) \leqslant M,$$

где

$$m = \inf u(x, 0), \quad M = \sup u(x, 0), \quad -\infty < x < \infty.$$

576. Доказать единственность решения $u(x, t)$ задачи Коши — Дирихле (1′), (3′).

577. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau)\, d\tau,$$

где

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}} g(y, \tau)\, dy, \quad t > \tau,$$

а $g(x, \tau)$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \tau < \infty$,— заданная непрерывная ограниченная функция, удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} - u_t = -g(x, t).$$

578. Редуцировать первую краевую задачу для уравнения

$$u_{xx} - u_t = f(x, t) \tag{5}$$

в прямоугольнике $0 < t < T_0$, $0 < x < 1$, с неоднородными условиями на боковых сторонах

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_0,$$

к первой краевой задаче, но уже с однородными краевыми условиями на боковых сторонах.

579. Построить частное решение уравнения (5), если

$$f(x, t) = \sin nx\, f_n(t),$$

где $f_n(t)$ — заданная непрерывная функция.

580. Для $t > T$ построить решение задачи Коши — Дирихле для уравнения (1) с условием

$$u(x, T) = e^{x_1} \operatorname{ch} x_2.$$

Подходящим образом продолжая данные задач на всю ось x, решить следующие задачи:

581. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \infty$, $t > 0$,
$u(0, t) = 0$, $t > 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 < x < \infty$.

582. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \infty$, $t > 0$,
$u_x(0, t) = 0$, $t > 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 < x < \infty$.

583. $u_t = a^2u_{xx} - hu,\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 < x < \infty.$

584. $u_t = a^2u_{xx} - hu,\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u_x(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 < x < \infty.$

585. $u_t = a^2u_{xx} + f(x, t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \infty.$

586. $u_t = a^2u_{xx} + f(x, t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u_x(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \infty.$

587. $u_t = a^2u_{xx} - hu + f(x, t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \infty.$

588. $u_t = a^2u_{xx} - hu + f(x, t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u_x(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \infty.$

589. $u_t = a^2u_{xx} - hu + f(x, t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 < x < \infty.$

590. $u_t = a^2u_{xx} - hu + f(x, t),\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$
$u_x(0, t) = 0,\ t > 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 < x < \infty.$

Зная, что решение $u(x, t)$ задачи Коши

$$u_t = \Delta u + f(x, t), \quad x \in E_n, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in E_n,$$

выражается по формуле Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{E_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{E_n} \frac{1}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \quad (6)$$

подходящим образом продолжая данные, построить решения следующих задач:

591. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$
$u(x, 0, t) = 0,\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y),$
$-\infty < x < \infty,\ t, y > 0.$

592. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$
$u(x, y, 0, t) = 0,\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z),$
$-\infty < x, y < \infty,\ 0 < t, z < \infty.$

593. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$
$u_y(x, 0, z, t) = 0,\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z),$
$-\infty < x, z < \infty,\ 0 < t, y < \infty.$

594. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$
$u(x, 0, z, t) = 0,\ u(x, y, 0, t) = 0,$
$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z),$
$-\infty < x < \infty,\ 0 < t, y, z < \infty.$

595. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$,
$u_x(0, y, z, t) = 0$, $u(x, y, 0, t) = 0$,
$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$,
$0 < x, z, t < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

596. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - hu$, $h > 0$,
$u(x, 0, t) = 0$, $u(x, y, 0) = f(x, y)$,
$-\infty < x < \infty$, $0 < y, t < \infty$.

597. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - hu$, $h > 0$,
$u_x(0, y, t) = 0$, $u(x, y, 0) = f(x, y)$,
$0 < x, t < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

598. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x, y, t)$,
$u(x, 0, t) = 0$, $u(x, y, 0) = 0$,
$-\infty < x < \infty$, $0 < y, t < \infty$.

599. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - hu + g(x, y, t)$, $h > 0$,
$u_x(0, y, t) = 0$, $u(x, y, 0) = 0$,
$0 < x, t < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

Пусть D — область пространства переменных x, y, t, ограниченная плоскостями $t = 0$, $t = T > 0$ и круговым цилиндром S: $x^2 + y^2 = 1$. Определить регулярное в D решение $u(x, y, t)$ уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} - u_t = 0$$

по условиям:

600. $u|_S = -4t$, $u(x, y, 0) = 1 - x^2 - y^2$.

601. $u|_S = -32t^2 - 16t$, $u(x, y, 0) = 1 - (x^2 + y^2)^2$.

602. $u|_S = 1 + 4t$, $u(x, y, 0) = x^2 + y^2$.

603. $u|_S = e^{2t + \cos\varphi + \sin\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $u(x, y, 0) = e^{x+y}$.

604. $u|_S = e^t I_0(1)$, $u(x, y, 0) = I_0(r)$, $r^2 = x^2 + y^2$,

где $I_0(r) = J_0(ir)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Построить решения задач Коши — Дирихле для уравнения (1), удовлетворяющие соответственно условиям:

605. $u(x, 0) = \sin lx_1$.

606. $u(x, 0) = \cos lx_1$.

607. $u(x, 0) = \operatorname{ch} lx_1$.

608. $u(x, 0) = \operatorname{sh} lx_1$.

609. $u(x, 0) = \sin l_1x_1 \sin l_2x_2$.

610. $u(x, 0) = \sin l_1x_1 \cos l_2x_2$.

611. $u(x, 0) = \cos l_1x_1 \cos l_nx_n$.

612. $u(x, 0) = \cos l_1x_1 \sin l_2x_2$.

613. $u(x, 0) = \sin l_1x_1 \sin l_2x_2 \ldots \sin l_nx_n$.

614. $u(x, 0) = \sin l_1x_1 + \cos l_nx_n$.

Найти явный вид решения $u = u(x, y, t)$ следующих задач Коши:

615. $u_t = a^2\Delta u + xye^{-t}$, $u(x, y, 0) = bx \sin y$.

616. $u_t = a^2\Delta u + t\sin x\cos y,\ \ u(x,\ y,\ 0) = xy.$

617. $u_t = a^2\Delta u + xt\sin y,\ \ u(x,\ y,\ 0) = x\cos y.$

618. $u_t = a^2\Delta u + t\sin(x+y),\ \ u(x,\ y,\ 0) = \cos(x+y).$

619. $u_t = a^2\Delta u + e^{y-t}\sin x,\ \ \ u(x,\ y,\ 0) = \sin(x-y).$

620. $u_t = a^2\Delta u + f(x,\ y)g(t),\ \ u(x,\ y,\ 0) = \varphi(x,\ y),$
где $f(x,\ y)$ и $\varphi(x,\ y)$ — гармонические функции.

§ 2. Некоторые другие примеры параболических уравнений

621. Найти общее решение уравнения

$$a^2u_{xx} + 2au_{xy} + u_{yy} = 0, \quad a = \text{const}.$$

622. Проверить, что функция

$$u(x,\ y,\ t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{p^k k!}\Delta^k\tau(x,\ y), \tag{4'}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, а $\tau(x,\ y)$ — произвольный полином переменных $x,\ y$, удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} - pu_t = 0, \quad p = \text{const}.$$

623. Для времени $t > 1$ решить задачу Коши — Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} - u_t = 0,$$
$$u(x,\ y,\ 1) = 1 - (x^2+y^2)^2.$$

624. Выписать в квадратурах в полуплоскости $t > 0$ решение $u(x,\ t)$ задачи Коши — Дирихле

$$u_{xx} - pu_t = 0, \quad p = \text{const} > 0,$$
$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

625. В полуплоскости $x < by$, $b > 0$, найти решение задачи Коши — Дирихле

$$b^2u_{xx} + 2bu_{xy} + u_{yy} + bu_x = 0,$$
$$u\left(x,\ \frac{x}{b}\right) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где φ — заданная непрерывная ограниченная функция.

626. Для уравнения из задачи 625 в параллелограмме, ограниченном прямыми $y = \dfrac{1}{b}x$, $y = \dfrac{1}{b}x + 1$, $y = 0$, $y = 1$, найти решение $u(x,\ y)$ по краевым условиям

$$u\left(x,\ \frac{1}{b}x\right) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant b,$$
$$u(x,\ 0) = 0, \quad -b \leqslant x < 0, \quad u(x,\ 1) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant b,$$

где φ — заданная достаточно гладкая функция.

627. В прямоугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=T>0$, найти решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_{xx}+pu_x-u_y+\frac{p^2}{4}u=0, \quad p=\text{const},$$

по условиям

$$u(0, y)=u(\pi, y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant T,$$

$$u(x, 0)=\sin x\cdot e^{-\frac{p}{2}x}, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

628. Для уравнения из задачи 627 выписать в квадратурах решение задачи Коши — Дирихле

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

и указать требования на $\varphi(x)$, гарантирующие существование интеграла в выражении формально полученного решения.

629. Показать, что уравнению

$$u_{xx}+u_{yy}-\lambda u_t=0, \quad \lambda=\text{const},$$

удовлетворяют функции

$$e^{-\lambda t}J_k(\lambda r)\cos k\varphi, \quad e^{-\lambda t}J_k(\lambda r)\sin k\varphi, \qquad k=0, 1, \ldots,$$

где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, а J_k — функция Бесселя целого порядка k.

630. В области D пространства переменных x, y, t, ограниченной плоскостями $t=0$, $t=T>0$ и круговым цилиндром $x^2+y^2=(\lambda_1/\lambda)^2$, найти решение $u(x, y, t)$ уравнения из задачи 629 по условиям

$$u(x, y, 0)=J_0(\lambda r),$$
$$u\,\big|_{x^2+y^2=(\lambda_1/\lambda)^2}=0,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка, а λ_1 — ее корень.

631. Определить тип уравнения

$$\Delta\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{7}$$

и показать, что функция

$$u(x, t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\Delta^{2k}\tau(x),$$

где $\tau(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая функция, в предположении, что ряд можно почленно дифференцировать нужное число раз, дает решение уравнения (7).

Построить решения уравнения (7) по краевым условиям:

632. $u(x, 0)=P_n(x)$,

где $P_n(x)$ — полином степени n по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

633. $u(x, 0)=\sin l_1x_1\cos l_nx_n$.

634. Определить тип уравнения

$$\Delta\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

и показать, что его решением является функция

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^{2k}\tau(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^{2k}\nu(x),$$

если τ и ν — произвольные бесконечно дифференцируемые функции, а ряды в правой части этой формулы можно почленно дифференцировать нужное число раз.

Найти решения уравнения (8) по приведенным ниже условиям:

635. $u(x, 0) = P_n(x)$, $u_t(x, 0) = 0$,
где $P_n(x)$ — полином степени n.

636. $u(x, 0) = \sin x_1$, $u_t(x, 0) = \cos x_1$.

Глава V

Методы, наиболее часто применяемые при решении задач для уравнений с частными производными

§ 1. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Этим методом пользуются при построении решений так называемых *смешанных задач* для широкого класса уравнений с частными производными.

Обозначим через D область пространства переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, ограниченную плоскостью $t = 0$ и цилиндрической поверхностью S с образующими, параллельными оси t, и лежащую в области задания уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\, u_{x_i} + C(x)\, u -$$
$$- \alpha(t)\, u_{tt} - \beta(t)\, u_t - \gamma(t)\, u = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\, \lambda_i \lambda_j$ положительно определена, коэффициент $\alpha(t)$ либо больше нуля, либо тождественно равен нулю, причем в последнем случае $\beta(t) > 0$. В таком случае уравнение (1) либо гиперболическое, либо параболическое.

Общая смешанная задача для уравнения (1) состоит в *определении регулярного в области D решения $u(x, t)$ этого уравнения, удовлетворяющего краевому условию*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i} + b(x)\, u = 0, \quad x \in S, \quad t \geqslant 0, \qquad (2)$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \qquad (3)$$

в гиперболическом случае,

$$u(x, 0) = \varphi^*(x) \qquad (4)$$

в параболическом случае.

Для обеспечения непрерывности искомого решения вплоть до границы области D нужна определенная согласованность между данными в условиях (2), (3) и (4).

Сущность метода разделения переменных заключается в следующем.

Нетривиальное решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию (2), ищется в виде произведения двух функций $T(t)$ и

$X(x) = X(x_1, \ldots, x_n)$:

$$u(x, t) = T(t)X(x). \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) для $u(x, t)$ в уравнение (1) и в краевое условие (2), получаем

$$\frac{1}{X(x)}\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) X_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) X_{x_i} + C(x) X\right] =$$
$$= \frac{1}{T(t)}[\alpha(t) T'' + \beta(t) T' + \gamma(t) T] = -\lambda = \text{const}, \quad (x, t) \in D, \tag{6}$$

и

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x) X_{x_i} + b(x) X\right] T(t) = 0, \quad x \in S, \quad t \geqslant 0. \tag{7}$$

Ввиду того, что $X(x)$ и $T(t)$ тождественно в нуль не обращаются, из равенств (6) и (7) имеем

$$\alpha(t)T'' + \beta(t)T' + [\gamma(t) + \lambda]T = 0, \ t > 0, \tag{8}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) X_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) X_{x_i} + [C(x) + \lambda] X = 0, \quad x \in d, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) X_{x_i} + b(x) X = 0, \quad x \in s, \tag{10}$$

где d и s — проекции области D и поверхности S на плоскость $t = 0$ соответственно.

Значение λ, для которого краевая задача (9), (10) имеет нетривиальное решение $X(x)$, называется *собственным значением* (*собственным числом*), а сама функция $X(x)$ — соответствующей *собственной функцией.*

Множество всех собственных значений задачи (9), (10) называется *спектром*, а задача об отыскании спектра и соответствующей ему системы собственных функций — *спектральной задачей.*

В целом ряде случаев спектр задачи (9), (10) является счетным:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots, \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty,$$

а система линейно независимых собственных функций

$$X_1(x), \quad X_2(x), \ldots \tag{11}$$

— полной. Ниже речь будет идти именно о таких случаях.

Обозначим через $T_k(t)$ соответствующее $\lambda = \lambda_k$ общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (8) при $\alpha(t) > 0$:

$$T_k(t) = \alpha_k T_{k1}(t) + \beta_k T_{k2}(t), \tag{12}$$

где α_k, β_k — произвольные действительные постоянные, а $T_{k1}(t)$ и $T_{k2}(t)$ — решения уравнения (8), удовлетворяющие условиям

$$T_{k1}(0) = 1, \quad T'_{k1}(0) = 0, \quad T_{k2}(0) = 0, \quad T'_{k2}(0) = 1. \tag{13}$$

При $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) > 0$ общее решение $T_k(t)$ уравнения (8) берется в виде

$$T_k(t) = \alpha_k^* T_{k1}(t), \tag{12'}$$

где

$$T_{k1}(0) = 1. \tag{13'}$$

Очевидно, что функция $u(x, t)$ вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \tag{14}$$

в случае равномерной сходимости ряда в правой части этого равенства и рядов, полученных из него почленным дифференцированием нужное число раз, является решением уравнения (1), удовлетворяющим краевому условию (2). Потребовав, чтобы представленная формулой (14) функция $u(x, t)$ удовлетворяла и начальным условиям (3) или (4), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_k(x) = \varphi(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k X_k(x) = \psi(x) \tag{15}$$

или, соответственно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* X_k(x) = \varphi^*(x). \tag{15'}$$

Когда система собственных функций (11) является полной и ортонормированной для определения коэффициентов α_k, β_k, α_k^* из (15) и (15') имеем

$$\alpha_k = \int\limits_d \varphi(x) X_k(x)\, d\tau_x, \quad \beta_k = \int\limits_d \psi(x) X_k(x)\, d\tau_x \tag{16}$$

и

$$\alpha_k^* = \int\limits_d \varphi^*(x) X_k(x)\, d\tau_x. \tag{16'}$$

Подставляя найденные значения α_k, β_k, α_k^* из (16) и (16') в (12) и (12') соответственно, находим $T_k(t)$. Следовательно, формула (14) дает решение сформулированной выше смешанной задачи.

При $n = 1$ уравнение (9) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} A(x)X'' + B(x)X' + [C(x) + \lambda]X = 0, \\ A(x) = A_{11}(x_1), \quad x_1 = x, \end{gathered} \tag{17}$$

область D совпадает с полуполосой $0 < x < l$, $t > 0$ и краевое условие (10) записывается в виде

$$a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0, \tag{18}$$

где a_k, b_k, $k = 1, 2,$ — постоянные, ибо в этом случае краевое условие (2) имеет вид

$$a_1 u_x(0, t) + b_1 u(0, t) = 0, \quad a_2 u_x(l, t) + b_2 u(l, t) = 0. \tag{19}$$

Спектральная задача (17), (18) носит название *задачи Штурма — Лиувилля* (или, короче, *задачи III — Л*). Исследование задачи III — Л (17), (18) в общем случае затруднительно. Оно сильно осложняется, когда в отдельных точках интервала изменения переменного x коэффициент $A(x)$ равен нулю. В этом случае становится необходимым ввести в рассмотрение специальные функции.

Когда $n = 1$ и коэффициенты уравнения (1) постоянные, решение задачи III — Л (17), (18) строится явно. Так, например, в случае уравнения колебаний струны

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0, \quad a = \text{const},$$

уравнения (8) и (17) имеют вид

$$T''(t) + a^2\lambda T = 0, \tag{8'}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{17'}$$

Ради простоты рассуждения будем считать, что в краевых условиях (18) $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$, $l = \pi$, т. е.

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0. \tag{18'}$$

Спектр задачи (17′), (18′) совпадает с последовательностью натуральных чисел, а система линейно независимых собственных функций $X_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$, является полной в интервале $(0, \pi)$. Решение же $T_k(t)$ уравнения (8′), соответствующее $\lambda = k^2$, дается формулой

$$T_k(t) = \alpha_k \cos akt + \beta_k \sin akt.$$

В этих же предположениях в случае уравнения теплопроводности $a^2 u_{xx} - u_t = 0$ собственными функциями являются опять $X_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$, а

$$T_k(t) = \alpha_k e^{-k^2a^2t}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

поскольку в рассматриваемом случае уравнение (8) имеет вид $T' + a^2k^2T = 0$.

Метод разделения переменных позволяет строить решения смешанных задач и в тех случаях, когда уравнение и краевые условия являются неоднородными.

Ограничимся рассмотрением смешанной задачи

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = f(x, t), \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1u_x(0, t) + b_1u(0, t) &= \mu(t),\\ a_2u_x(l, t) + b_2u(l, t) &= \nu(t), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$a_k^2 + b_k^2 \neq 0, \quad k = 1, 2,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \tag{22}$$

Прежде всего заметим, что при некоторых дополнительных предположениях относительно a_1, b_1, a_2, b_2 постоянные γ_1, γ_2, γ_3, δ_1, δ_2, δ_3 можно подобрать так, чтобы в результате замены искомой функции

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $w(x, t) = (\gamma_1 x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3)\mu(t) + (\delta_1 x^2 + \delta_2 x + \delta_3)\nu(t)$, задача (20), (21), (22) будет редуцирована к смешанной задаче для уравнения

$$v_{xx} - \frac{1}{a^2} v_{tt} = F(x, t) \tag{20'}$$

с однородными краевыми условиями

$$a_1 v_x(0, t) + b_1 v(0, t) = 0, \quad a_2 v_x(l, t) + b_2 v(l, t) = 0 \tag{21'}$$

и начальными условиями

$$v(x, 0) = \varphi_1(x), \quad v_t(x, 0) = \psi_1(x), \tag{22'}$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) - w_{xx} + \frac{1}{a^2} w_{tt},$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - w(x, 0), \quad \psi_1(x) = \psi(x) - w_t(x, 0).$$

Предположим, что существует полная ортонормированная система линейно независимых собственных функций $X_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, задачи Ш — Л:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{23}$$

$$a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0, \quad a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0. \tag{24}$$

Представляя функции $F(x, t)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ в виде сумм рядов

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \tag{25}$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k X_k(x), \quad \psi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k X_k(x), \tag{26}$$

будем искать решение задачи (20′), (21′), (22′) в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \tag{27}$$

Подставляя выражения $F(x, t)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $v(x, t)$ из (25), (26) и (27) в уравнение (20′) и условия (22′), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k(t) X_k''(x) - \frac{1}{a^2} T_k''(t) X_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x), \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k X_k(x), \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) X_k(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} e_k X_k(x). \end{aligned}\right. \tag{29}$$

На основании (23) перепишем равенство (28) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + a^2 \lambda_k T_k(t)\right] X_k(x) = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) X_k(x). \tag{28'}$$

В силу линейной независимости системы $X_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, из (28′) и (29) для определения функций $T_k(t)$ получаем задачу

$$T_k''(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = -a^2 c_k(t),$$
$$T_k(0) = d_k, \quad T_k'(0) = e_k,$$

решение которой строится в квадратурах.

Подставляя найденные значения $T_k(t)$ в правую часть (27), при соблюдении условий, налагаемых на функции F, φ_1 и ψ_1, обеспечивающих равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$ и рядов, полученных из него почленным дифференцированием достаточное число раз, получаем решение задачи (20′), (21′), (22′).

Когда правая часть уравнения (20) является функцией лишь переменной x, т. е.

$$f(x, t) \equiv f(x),$$

и в краевых условиях (21) правые части $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$ постоянные, причем

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 - b_1 b_2 l \neq 0, \tag{30}$$

в результате замены искомой функции

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x),$$

где

$$w''(x) = f(x),$$
$$a_1 w'(0) + b_1 w(0) = \mu_0, \quad a_2 w'(l) + b_2 w(l) = \nu_0, \tag{31}$$

задача (20), (21), (22) редуцируется к смешанной задаче для однородного уравнения

$$v_{xx} - \frac{1}{a^2} v_{tt} = 0$$

с однородными краевыми условиями

$$a_1 v_x(0, t) + b_1 v(0, t) = 0, \quad a_2 v_x(l, t) + b_2 v(l, t) = 0$$

и с начальными условиями

$$v(x, 0) = \varphi(x) - w(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Задача же (31) при соблюдении условия (30) всегда имеет решение.

Методом разделения переменных пользуются также и при построении решений определенных классов уравнений эллиптического типа.

1°. Задачи для волнового уравнения

637. Построить набор решений $u(x, t)$ уравнения колебаний струны $u_{xx} = u_{tt}$ в виде $u(x, t) = v(x)w(t)$.

638. В полуполосе $a < x < b$, $t > 0$ построить решение краевой задачи

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad u(a, t) = u(b, t) = 0.$$

Единственно ли ее решение?

639. В полуполосе $0<x<\pi$, $t>0$ решить задачу

$$u_{xx}=u_{tt},\ u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ $(\varphi(0)=\varphi(\pi)=0,\ \varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0)$ и $\psi(x)$, $(\psi(0)=\psi(\pi)=0)$ — достаточно гладкие функции (основная смешанная задача).

640. Обладает ли свойством единственности решение задачи 639?

641. В полосе $0<x<\pi$, $-\infty<t<\infty$ найти собственные колебания (гармоники), соответствующие краевой задаче

$$u_{xx}=u_{tt},\quad u(0,\ t)=u_x(\pi,\ t)=0.$$

В полуполосе $0<x<l$, $t>0$ для уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

642. $u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=0,\quad u_t(x,\ 0)=\sin\frac{2\pi}{l}x.$

643. $u(0,\ t)=u(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x).$

644. $u(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=\sin\frac{5\pi}{2l}x,\quad u_t(x,\ 0)=\cos\frac{\pi}{2l}x.$

645. $u(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=x,\quad u_t(x,\ 0)=\sin\frac{\pi}{2l}x+\sin\frac{3\pi}{2l}x.$

646. $u_x(0,\ t)=u(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=\cos\frac{\pi}{2l}x,\quad u_t(x,\ 0)=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x.$

647. $u_x(0,\ t)=u(l,\ t)=0,\ u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x).$

648. $u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0,\quad u(x,\ 0)=x,\quad u_t(x,\ 0)=1.$

649. $u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0,\quad u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x).$

650. $u(0,\ t)=u_x(l,\ t)+hu(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),\quad h>0.$

651. $u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)+hu(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=0,\quad u_t(x,\ 0)=1,\quad h>0.$

652. $u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),\quad h>0.$

653. $u_x(0,\ t)-hu(0,\ t)=u_x(l,\ t)+hu(l,\ t)=0,$
$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x),\quad h>0.$

В полуполосе $0<x<l$, $t>0$ решить смешанные задачи:

654. $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x),\quad u(0,\ t)=\alpha,\quad u(l,\ t)=\beta,$
$u(x,\ 0)=u_t(x,\ 0)=0.$

655. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), \quad u_x(0, t) = \alpha, \quad u_x(l, t) = \beta,$
$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$

656. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \alpha,$
$u(l, t) = \beta, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad h > 0.$

657. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x),$
$u_x(0, t) = \alpha, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = \beta,$
$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad h > 0.$

658. $u_{tt} = u_{xx},$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \alpha, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = -\alpha,$
$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$

Пользуясь заменой $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, подобрать функцию $w(x, t)$ так, чтобы приведенные ниже задачи редуцировались к задачам для неоднородного уравнения $v_{xx} - v_{tt} = F(x, t)$ с однородными краевыми условиями и соответствующим образом измененными начальными условиями:

659. $u_{xx} = u_{tt},$
$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t),$
$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$

660. $u_{xx} = u_{tt}, \quad u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t),$
$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = 0.$

661. $u_{xx} = u_{tt} + f(x, t),$
$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = \nu(t), \quad h > 0,$
$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$

662. $u_{xx} = u_{tt} + f(x, t),$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu(t), \quad h > 0, \quad u_x(l, t) = \nu(t),$
$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$

663. $u_{xx} = u_{tt},$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) + gu(l, t) = \nu(t),$
$h > 0, \quad g > 0,$
$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$

В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ решить смешанные задачи для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ с начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ и следующими краевыми условиями:

664. $u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad f(x, t) = Ae^{-t} \sin \frac{\pi}{l} x.$

665. $u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad f(x, t) = Axe^{-t}.$

666. $u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad f(x, t) = A \sin t.$

667. $u(0, t) = u_x(l, t) = 0.$

668. $u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \quad f(x, t) = Ae^{-t} \cos \frac{\pi}{2l} x.$

669. $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$

Решить следующие смешанные задачи:

670. $u_{xx} = u_{tt}$, $u(0, t) = t^2$, $u(\pi, t) = t^3$,
$u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$.

671. $u_{xx} = u_{tt}$, $u(0, t) = e^{-t}$, $u(\pi, t) = t$,
$u(x, 0) = \sin x \cos x$,
$u_t(x, 0) = 1$, $0 < x < \pi$, $t > 0$.

672. $u_{xx} = u_{tt}$, $u(0, t) = t$, $u_x(\pi, t) = 1$,

$u(x, 0) = \sin \frac{1}{2} x$, $u_t(x, 0) = 1$, $0 < x < \pi$, $t > 0$.

673. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u_x(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = Ae^{-t}$,

$$u(x, 0) = \frac{Aa \operatorname{ch} \frac{x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a}}, \quad u_t(x, 0) = -\frac{Aa \operatorname{ch} \frac{x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a}},$$

$0 < x < l$, $t > 0$.

674. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t$,

$u_x(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = \frac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t$,

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = -2 \cos \frac{2x}{a}$, $0 < x < l$, $t > 0$.

675. Найти малые поперечные колебания струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами, если:

а) в начальном положении струна находится в покое и точкам ее участка (α, β), $0 < \alpha < \beta < l$, придана постоянная начальная скорость v_0;

б) начальные отклонения ее точек равны нулю и в начальный момент времени струне сообщается поперечный импульс величины I в точке x_0, $0 < x_0 < l$.

676. Найти малые продольные колебания упругого однородного стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, если:

а) в начальном положении стержень находится в покое и его свободному концу $x = 0$ сообщается импульс величины I, а конец $x = l$ закреплен жестко;

б) конец $x = 0$ закреплен жестко и стержень находится в равновесии под действием продольной силы $F_0 = \text{const}$, приложенной к концу $x = l$, которая в момент $t = 0$ мгновенно убирается. Начальные скорости точек стержня равны нулю.

677. Найти малые продольные колебания упругого однородного стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ со свободными концами, если в начальном положении стержень покоится и его концу $x = 0$ сообщен импульс величины I.

678. Определить малые поперечные колебания струны $0 \leqslant x \leqslant l$, конец $x = 0$ которой свободен и на нем имеется сосредоточенная масса M, а конец $x = l$ закреплен жестко. Начальное отклонение равно $\varphi(x)$, начальная скорость равна $\psi(x)$.

679. Упругий стержень $0 \leqslant x \leqslant l$ расположен вертикально и верхним концом $x = 0$ жестко прикреплен к свободно падающему лифту, который достигнув скорости U, мгновенно останавливается. Определить продольные колебания стержня для случаев, когда:

а) нижний конец $x=l$ стержня свободен;

б) на нижнем конце $x=l$ имеется сосредоточенная масса M.

680. Указать задачи, к которым при разделении переменных $u(x, y, t)=v(x, y)w(t)$ редуцируется смешанная краевая задача

$$u_{xx}+u_{yy}-u_{tt}=0, \tag{32}$$

$$\begin{gathered} u(x, y, t)=0, \quad t>0, \quad (x, y)\in C, \\ u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0)=\psi(x, y), \quad (x, y)\in G, \end{gathered} \tag{33}$$

где G — область плоскости переменных x, y с границей C, а $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные непрерывные функции.

681. Доказать единственность решения смешанной краевой задачи (32), (33), см. 680.

Для задачи

$$v_{xx}+v_{yy}+\lambda v=0, \quad (x, y)\in G, \tag{34}$$

$$v(x, y)=0, \quad (x, y)\in C, \tag{35}$$

где G — плоская область с границей C, а λ — параметр, показать, что:

682. Собственные числа положительны.

683. Собственные функции $v_k(x, y)$ и $v_m(x, y)$, соответствующие собственным числам λ_k и λ_m, $\lambda_k\neq\lambda_m$, ортогональны, т. е.

$$\int\limits_G v_k(x, y)\, v_m(x, y)\, dx\, dy=0.$$

684. Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны $0\leqslant x\leqslant s$, $0\leqslant y\leqslant p$ с жестко закрепленным краем для случаев, когда:

а) начальное отклонение мембраны равно $\sin\frac{\pi}{s}x\sin\frac{\pi}{p}y$, а начальная скорость равна нулю;

б) в начальный момент $t=0$ мембрана получает поперечный сосредоточенный импульс I в точке (x_0, y_0), $0<x_0<s$, $0<y_0<p$, а начальное положение — покой;

в) колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране поперечной силой с плотностью

$$f(x, y, t)=e^{-t}x\sin\frac{2\pi}{p}y.$$

685. В однородной прямоугольной мембране $0\leqslant x\leqslant s$, $0\leqslant y\leqslant p$ часть границы $x=s$, $0\leqslant y<p$ и $y=p$, $0\leqslant x<s$ свободна, а остальная часть закреплена жестко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания мембраны, вызванные:

а) начальным отклонением Axy;

б) поперечным сосредоточенным импульсом I, сообщенным мембране в начальный момент $t=0$ в точке (x_0, y_0), $0<x_0<s$, $0<y_0<p$.

686. В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x=0$, $0 \leqslant y < p$ свободна, а остальная часть закреплена жестко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания мембраны, вызванные:

а) начальным отклонением

$$u(x, y, 0) = \cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p};$$

б) поперечным сосредоточенным импульсом величины I, сообщенным мембране в начальный момент $t=0$ в точке (x_0, y_0), $0<x_0<s$, $0<y_0<p$;

в) начальным распределением скоростей

$$u_t(x, y, 0) = A(s-x)\sin\frac{\pi y}{p};$$

г) распределенной по мембране поперечной силой с плотностью

$$f(x, y, t) = B(s-x)\sin\frac{\pi y}{p}\sin t.$$

2°. Задачи для уравнений параболического типа

В полуполосе $0<x<l$, $t>0$ для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ решить смешанные задачи со следующими условиями:

687. $u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = Ax.$

688. $u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$

689. $u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = A(l-x).$

690. $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = U.$

691. $u_x(0, t) = u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad h>0.$

692. $u_x(0, t) - hu(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = U, \quad h>0.$

693. $u_x(0, t) - hu(0, t) = u_x(l, t) + hu(l, t) = 0,$
$u(x, 0) = U, \quad h>0.$

В полуполосе $0<x<l$, $t>0$ решить следующие смешанные задачи:

694. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,$
$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$

695. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,$
$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin\frac{\pi x}{2l}.$

696. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,$
$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$

697. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u,$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = U, \quad h>0.$

698. $u_t = a^2 u_{xx}$,
$u(0, t) = T, \quad u(l, t) = U, \quad u(x, 0) = 0.$

699. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x)$,
$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = q, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$

700. $u_t = a^2 u_{xx}$,
$u_x(0, t) = u_x(l, t) = q, \quad u(x, 0) = Ax.$

701. $u_t = a^2 u_{xx}$,
$u(0, t) = T, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = U, \quad u(x, 0) = 0, \quad h > 0.$

702. $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\frac{\pi x}{l}$,
$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$

703. $u_t = a^2 u_{xx}$,
$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = Ae^{-t}, \quad u(x, 0) = T.$

704. $u_t = a^2 u_{xx}$,
$u_x(0, t) = At, \quad u_x(l, t) = T, \quad u(x, 0) = 0.$

В шаре $0 \leqslant r < R$ найти ограниченные решения $u = u(r, t)$ уравнения $u_t = a^2 \Delta u$, где $\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$, по следующим условиям:

705. $u(R, t) = 0, \quad u(r, 0) = f(r), \quad t > 0.$

706. $u_r(R, t) = 0, \quad u(r, 0) = f(r), \quad t > 0.$

707. $u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, \quad u(r, 0) = f(r), \quad t > 0.$

708. Начальная температура однородного шара $0 \leqslant r < R$ равна T. Найти температуру шара при $t > 0$ для случаев, когда:

а) поверхность шара поддерживается при постоянной температуре P;

б) внутрь шара через его поверхность подается постоянный поток тепла плотности q;

в) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру P.

709. В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если:

а) поверхность шара поддерживается при постоянной температуре U;

б) с поверхности шара происходит теплоотдача потоком постоянной плотности q;

в) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Температура среды равна P.

В шаре $0 \leqslant r < R$ найти решение $u = u(r, t)$ следующих задач:

710. $u_t = a^2 \Delta u - \beta u, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0, \quad \beta > 0,$
$|u(r, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = 0, \quad t > 0,$

$$u(r, 0) = \begin{cases} U, & 0 \leqslant r < R/2, \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R. \end{cases}$$

711. $u_t = a^2\Delta u + f(r, t), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$|u(r, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, \quad t > 0,$
$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R.$

712. Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant s$, $-\infty < z < \infty$, является произвольной функцией $f(x, y)$. Определить температуру в стержне при $t > 0$, если:

а) температура поверхности стержня поддерживается равной нулю;

б) часть поверхности стержня $x = 0$, $0 < y < s$ теплоизолирована, а остальная часть его поверхности поддерживается при нулевой температуре;

в) на части поверхности $x = p$, $0 < y < s$ происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, часть $y = 0$, $0 < x < p$ — теплоизолирована, а остальная поверхность стержня поддерживается при нулевой температуре.

В прямоугольнике $0 < x < p$, $0 < y < s$ решить следующие смешанные задачи:

713. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t),$
$0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$
$u(0, y, t) = u_x(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$
$u(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$
$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s.$

714. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s},$
$0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$
$u(0, y, t) = u_x(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$
$u_y(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$
$u(x, y, 0) = B \sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s}, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s.$

715. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s},$
$0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$
$u(0, y, t) = u(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$
$u(x, 0, t) = u_y(x, s, t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$
$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s.$

716. В кубе $0 \leqslant x, y, z \leqslant l$ происходит диффузия вещества, частицы которого распадаются со скоростью, пропорциональной его концентрации. Определить концентрацию вещества в этом кубе при $t > 0$, если начальная концентрация вещества в нем постоянна и равна U. Концентрация вещества на границе куба поддерживается равной нулю.

3°. Задачи для эллиптических уравнений

717. Найти решения $u = u(x, y)$ уравнения Лапласа в прямоугольнике $0 < x < p$, $0 < y < s$, удовлетворяющие, соответственно, краевым условиям:

а) $u(0, y) = u_x(p, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, s) = f(x)$;

б) $u_x(0, y) = u_x(p, y) = 0, \quad u(x, 0) = A, \quad u(x, s) = Bx$;

в) $u_x(0, y) = u(p, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, s) = Bx$;

г) $u(0, y) = U, \ u_x(p, y) = 0, \ u_y(x, 0) = T \sin \frac{\pi x}{2p}, \ u(x, s) = 0$;

д) $u(0, y) = 0, \quad u_x(p, y) = q, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, s) = U$;

е) $u(0, y) = 0, \ u(p, y) = Ty, \ u(x, 0) = 0, \ u(x, s) = \frac{sTx}{p}$.

718. Найти решения уравнения Лапласа в полуполосе $0 < x < \infty$, $0 < y < l$ соответственно по краевым условиям:

а) $u(x, 0) = u_y(x, l) = 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad u(\infty, y) = 0$;

б) $u_y(x, 0) = u_y(x, l) + hu(x, l) = 0,$
$u(0, y) = f(y), \quad u(\infty, y) = 0, \quad h > 0$;

в) $u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad u(0, y) = y(l - y), \quad u(\infty, y) = 0$;

г) $u_y(x, 0) - hu(x, 0) = 0, \quad u(x, l) = 0,$
$u(0, y) = l - y, \quad u(\infty, y) = 0, \quad h > 0$.

719. В круге $0 \leqslant r < R$ найти гармонические функции, удовлетворяющие соответственно граничным значениям:

а) $u(R, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$; б) $u(R, \varphi) = \varphi \sin \varphi$;

в) $u_r(R, \varphi) + hu(R, \varphi) = T + Q \sin \varphi + U \cos 3\varphi$;

г) $u_r(R, \varphi) = f(\varphi)$.

720. Вне круга $0 \leqslant r \leqslant R$ найти решения $u = u(r, \varphi)$ следующих краевых задач для уравнения Лапласа:

а) $u(R, \varphi) = T \sin \frac{\varphi}{2}$; б) $u_r(R, \varphi) = \frac{1}{2} + \varphi \sin 2\varphi$;

в) $u_r(R, \varphi) - hu(R, \varphi) = f(\varphi)$; г) $u(R, \varphi) = U(\varphi + \varphi \cos \varphi)$.

721. Найти гармонические функции $u = u(r, \varphi)$ внутри кольца $a < r < b$, удовлетворяющие соответственно граничным значениям:

а) $u(a, \varphi) = 0, \quad u(b, \varphi) = A \cos \varphi$;

б) $u(a, \varphi) = A, \quad u(b, \varphi) = B \sin 2\varphi$;

в) $u_r(a, \varphi) = q \cos \varphi, \quad u(b, \varphi) = Q + T \sin 2\varphi$;

г) $u(a, \varphi) = T + U \cos \varphi, \quad u_r(b, \varphi) = hu(b, \varphi) = 0$.

722. В круговом секторе $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha$ найти гармонические функции, удовлетворяющие соответственно краевым условиям:

а) $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = A\varphi$;

б) $u_\varphi(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = f(\varphi)$;

в) $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \alpha) = 0, \quad u(R, \varphi) = U\varphi$;

г) $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, \quad u_r(R, \varphi) = Q$;

д) $u(r, 0) = u_\varphi(r, \alpha) + hu(r, \alpha) = 0, \quad u_r(R, \varphi) + \gamma u(R, \varphi) = 0$.

§ 2. Специальные функции. Асимптотические разложения

1°. Задачи с использованием специальных функций

Как уже было отмечено выше, при решении ряда смешанных задач с одним пространственным переменным часто приходится иметь дело с обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, коэффициенты которых при старших производных в отдельных точках рассматриваемого интервала обращаются в нуль. Решения этих уравнений принято называть *специальными функциями.*

К такому классу обыкновенных дифференциальных уравнений относятся, например:

1. Уравнение Бесселя

$$x^2 v'' + xv' + (x^2 - \mu^2) v = 0, \quad \mu = \text{const},$$

решения которого называются *бесселевыми* или *цилиндрическими функциями* порядка μ.

2. Уравнение Чебышёва

$$(1 - x^2) v'' - xv' + n^2 v = 0, \quad n = \text{const},$$

решения которого называются *функциями Чебышёва.*

3. Уравнение Лагерра

$$xv'' + (1 - x) v' + \lambda v = 0, \quad \lambda = \text{const},$$

решения которого называются *функциями Лагерра.*

4. Уравнение Лежандра

$$(1 - x^2) v'' - 2xv' + m(m + 1) v = 0, \quad m = \text{const},$$

решения которого называются *функциями Лежандра.*

5. Уравнение для присоединенных функций Лежандра

$$(1 - x^2) v'' - 2xv' + \left[m(m + 1) - \frac{n^2}{1 - x^2}\right] v = 0, \quad m = \text{const}, \quad n = \text{const}.$$

723. Показать, что для бесселевых функций

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k! \, (n + k)!}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

имеют место тождества

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x),$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x),$$

$$xJ'_n(x) = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x).$$

724. Проверить справедливость интегрального представления для бесселевой функции

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1 - t^2}} \, dt.$$

725. Показать, что

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad J''_0(x) = \frac{1}{2} [J_2(x) - J_0(x)].$$

726. Проверить справедливость тождеств

$$(\alpha^2 - \beta^2) xJ_n(\alpha x) J_n(\beta x) =$$

$$= \frac{d}{dx} \left[xJ_n(\alpha x) \frac{d}{dx} J_n(\beta x) - xJ_n(\beta x) \frac{d}{dx} J_n(\alpha x)\right],$$

$$2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x) = \frac{d}{dx}\left\{(\alpha^2x^2 - n^2) J_n^2(\alpha x) + \left[x\frac{d}{dx} J_n(\alpha x)\right]^2\right\},$$

где α и β — постоянные, а $n > -1$.

727. При $n > -1$ показать, что:

если $J_n(\alpha) = J_n(\beta) = 0$, то

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x) J_n(\beta x) dx = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)\, dx = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\alpha);$$

а если $J_{n+1}(\alpha) = 0$, то

$$\int_0^1 xJ_n^2(\alpha x)\, dx = \frac{1}{2} J_n^2(\alpha).$$

728. Пользуясь результатом задачи 727, показать, что корни уравнения $J_n(x) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, могут быть только действительными и, кроме того, уравнения $J_n(x) = 0$ и $J_m(x) = 0$, $n, m = 0, 1, \ldots$, $n \neq m$, не могут иметь общих корней, отличных от нуля (при $n > 0$, $m > 0$).

729. Показать, что функции

$$u_n(r, \vartheta) = I_n(\mu r)\cos n\vartheta, \quad v_n(r, \vartheta) = I_n(\mu r)\sin n\vartheta, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

где $I_n(x)$ — бесселева функция с чисто мнимым аргументом, т. е. $I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$, удовлетворяют уравнению

$$\Delta u - \mu^2 u = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta.$$

730. Определяя бесселеву функцию $J_n(x)$ для любого индекса n как сумму ряда

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!\,\Gamma(n+k+1)},$$

вывести формулы

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

731. Показать, что заменой $x = \cos\vartheta$ уравнение Чебышёва

$$(1 - x^2)v'' - xv' + n^2 v = 0$$

приводится к виду

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + n^2 u = 0,$$

где $u(\vartheta) = v(\cos\vartheta)$.

732. Пользуясь формулой

$$\cos n\vartheta = \cos^n\vartheta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta + \ldots,$$

проверить, что функция Чебышёва

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

представляет собой полином степени n.

733. Построить полиномы Чебышёва

$$T_0(x),\ T_1(x),\ T_2(x),\ T_3(x).$$

734. Доказать ортогональность полиномов Чебышёва с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в интервале $(-1, 1)$, т. е. что

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

735. Вычислить норму

$$\|T_n\| = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

полинома Чебышёва $T_n(x)$.

736. Показать, что функции

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

являются решениями уравнения Лагерра

$$xv'' + (1-x)v' + nv = 0.$$

737. Вычислить коэффициенты полиномов Лагерра

$$L_0(x),\ L_1(x),\ L_2(x),\ L_3(x).$$

738. Показать, что

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x} L_n(x)\,L_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m.$$

739. Показать, что

$$\|L_n\|^2 = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} L_n^2(x)\,dx = 1.$$

740. Пользуясь формулами

$$u_\alpha^m(x, y, z) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \Delta^n\left(x^\alpha y^{m-\alpha}\right), \quad \alpha = 0, \ldots, m,$$

$$u_{m+\beta+1}^m(x, y, z) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n\left(x^\beta y^{m-\beta-1}\right), \quad \beta = 0, \ldots, m-1,$$

найти все линейно независимые шаровые функции степени 3, зависящие от переменных x, y, z.

741. Исходя из формулы

$$Y_m^k(\varphi, \vartheta) = r^m u_k^m\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \quad k = 0, \ldots, 2m,$$

и из результатов задачи 740, найти сферические функции Лапласа $Y_3^k(\varphi, \vartheta)$, $k = 0, \ldots, 6$.

742. Показать (выборочно), что сферические функции Лапласа $Y_3^k(\varphi, \vartheta)$ (например, Y_3^5) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + 12Y = 0.$$

743. Проверить, что выражения

$$P_1(t) = t, \quad Q_1(t) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t+1}{t-1} - 1$$

являются функциями Лежандра первого и второго рода соответственно, т. е. решениями уравнения Лежандра

$$(1 - t^2)v'' - 2tv' + m(m+1)v = 0 \qquad (36)$$

при $m = 1$.

744. Непосредственной проверкой убедиться в том, что выражения

$$P_1^1(t) = \sqrt{1 - t^2}, \quad Q_1^1(t) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - t^2}\ln\frac{t+1}{t-1} + \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}},$$

$$-1 < t < 1,$$

являются присоединенными функциями Лежандра, т. е. решениями уравнения

$$(1 - t^2)v'' - 2tv' + \left[m(m+1) - \frac{n^2}{1 - t^2}\right]v = 0 \qquad (37)$$

при $m = 1$, $n = 1$.

745. Показать, что функции

$$P_m(t) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dt^m}(t^2 - 1)^m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

представляют собой полиномы Лежандра, т. е. решения уравнения (36).

746. Для полиномов Лежандра показать справедливость рекуррентных соотношений

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t)\right].$$

747. Доказать, что при $m = 0, 1, \ldots$ функции

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+k)!\,(-1)^k}{(m-k)!\,(k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-t)^k + (-1)^m (1+t)^k\right] \quad (38)$$

представляют собой полиномы Лежандра.

748. Пользуясь выражением для $P_m(t)$ из задачи 745, проверить ортогональность полиномов Лежандра, т. е. справедливость равенства

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)\,P_n(t)\,dt = 0, \quad m \neq n.$$

749. Проверить, что для нормы $P_m(t)$ имеет место равенство

$$\|P_m\|^2 = \frac{2}{2m+1}.$$

750. Показать, что в выражении сферической функции $Y_3^5(\varphi, \vartheta)$ из задачи 741 зависящий от ϑ множитель, умноженный на 15, представляет собой присоединенную функцию Лежандра первого рода $P_3^2(\cos\vartheta) = P_3^2(t)$, т. е. решение уравнения (37) при $m = 3$, $n = 2$.

751. Проверить, что если $v(t)$ — решение уравнения Лежандра (36), то функция $y = \frac{d^n v}{dt^n}$ будет решением уравнения

$$(1-t^2)y'' - 2(n+1)ty' + (m-n)(m+n+1)y = 0.$$

752. Непосредственной проверкой убедиться в том, что для функции Лежандра второго рода имеет место представление

$$Q_m(t) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dt^m} \left[(t^2-1)^m \ln\frac{1+t}{1-t}\right] - \frac{1}{2} P_m(t) \ln\frac{1+t}{1-t},$$

$$-1 < t < 1.$$

753. Непосредственным вычислением убедиться в том, что функция $P_2^1(t) = 3t\sqrt{1-t^2}$, $-1 < t < 1$, является присоединенной функцией Лежандра первого рода.

754. Пользуясь результатом задачи 751, показать, что функции

$$P_m^n(t) = (1-t^2)^{n/2} \frac{d^n}{dt^n} P_m(t), \quad -1 < t < 1,$$

где m — целое неотрицательное число, представляют собой присоединенные функции Лежандра, т. е. решения уравнения (37).

755. Проверить, что для присоединенных функций Лежандра второго рода $Q_m^n(t)$ имеют место представления

$$Q_m^n(t) = (1-t^2)^{n/2} \frac{d^n}{dt^n} Q_m(t), \quad -1 < t < 1.$$

756. Непосредственной проверкой убедиться в том, что

$$P_m(\cos\vartheta)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos t)^m dt. \tag{39}$$

757. Пользуясь представлением (39), показать, что для любого целого $m\geqslant 0$

$$|P_m(t)|\leqslant 1,\quad -1<t<1.$$

758. Показать, что на промежутке $(-1,\ 1)$ полином Лежандра $P_m(x)$ ортогонален любому полиному степени, меньшей m.

759. Показать, что $P_m(1)=1,\ P_m(-1)=(-1)^m,\quad m=0,\ 1,\ \ldots$

760. Пользуясь результатом задачи 756, вычислить $P_m(0)$.

761. Непосредственной проверкой убедиться в том, что функции

$$u(x,y,z)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(z+ix\cos t+iy\sin t,\ t)\,dt,$$

где $f(\tau,\ t)$ — произвольная функция, аналитическая по τ и непрерывная по t, являются гармоническими.

762. Показать, что имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^m dt=r^m P_m(\cos\vartheta),$$

где $x=r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y=r\sin\varphi\sin\vartheta,\ z=r\cos\vartheta$.

Решение $y(z)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$L(y)=p(z)y''+q(z)y'+r(z)y=0$$

иногда удобно искать в виде интеграла

$$y(z)=\int\limits_C K(z,\ t)\,v(t)\,dt, \tag{40}$$

где C — кусочно гладкий контур, $K(z,\ t)$ — аналитическая функция переменных $z,\ t$, удовлетворяющая уравнению с частными производными

$$p(z)K_{zz}+q(z)K_z+r(z)K=a(t)K_{tt}+b(t)K_t+c(t)K,$$

а $v(t)$ — решение уравнения

$$(av)_{tt}-(bv)_t+cv=0. \tag{41}$$

763. Показать, что уравнение Бесселя

$$z^2y''+zy'+(z^2-n^2)y=0 \tag{42}$$

имеет решение, выражающееся по формуле (40), в которой

$$K(z,\ t)=\mp\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin t},$$

и для этого случая выписать уравнение (41) и его решения.

764. Предполагая, что в формуле (40) контур C на комплексной плоскости переменного $t=\xi+i\eta$ имеет вид

$$\xi=0, \quad -\infty<\eta\leqslant 0; \quad -\pi\leqslant\xi\leqslant 0, \quad \eta=0; \quad \xi=-\pi, \quad 0\leqslant\eta<\infty,$$

или

$$\xi=0, \quad -\infty<\eta\leqslant 0; \quad 0\leqslant\xi\leqslant\pi, \quad \eta=0; \quad \xi=\pi, \quad 0\leqslant\eta<\infty,$$

а $K(z, t)=-\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin t}$ или $K(z, t)=\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin t}$ соответственно, найти решения уравнения (42) в виде интегралов. Эти решения называются *функциями Ханкеля* и обозначаются $H_n^{(1)}(z)$ и $H_n^{(2)}(z)$.

765. Пользуясь тем, что функция Бесселя $J_n(z)$ выражается через функции Ханкеля в виде

$$J_n(z)=\frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(z)+H_n^{(2)}(z)\right],$$

на основании результатов задачи 764 показать справедливость интегрального представления бесселевой функции $J_n(z)$ с целочисленным индексом n

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\xi-n\xi)\,d\xi.$$

766. Показать, что для целых индексов n

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z).$$

767. Пользуясь представлением

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\xi-n\xi)\,d\xi,$$

показать равномерную ограниченность бесселевых функций с целочисленными индексами для действительных значений z.

768. Показать гармоничность функции

$$u(x, y, z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda(z+ix\sin t+iy\cos t)}e^{imt}\,dt$$

и справедливость равенства

$$u(x, y, z)=e^{\lambda z}e^{im\varphi}J_{-m}(\lambda\rho),$$

где λ — действительная постоянная, m — целое число, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Методом разделения переменных с использованием цилиндрических функций решить следующие задачи для волнового уравнения.

В круге $0\leqslant r<R$ решить задачи относительно функции $u=u(r, t)$:

769. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$

$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, \quad t > 0,$

$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \quad 0 \leqslant r < R.$

770. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r, t), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$

$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, \quad t > 0,$

$u(r, 0) = u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R.$

771. Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, вызванные начальной скоростью

$$f(r) = \begin{cases} U, & 0 \leqslant r < R/2, \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R, \end{cases}$$

если

а) край мембраны закреплен жестко;

б) край мембраны закреплен упруго.

772. Однородная круглая мембрана радиуса R с жестко закрепленным краем совершает поперечные колебания, вызванные

а) начальным отклонением $f(r) = A(R^2 - r^2)$;

б) постоянной начальной скоростью U точек мембраны.

В круге $0 \leqslant r < R$ относительно функции $u = u(r, t)$ решить задачи

773. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + F, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$

$u_r(R, t) = U, \quad t > 0, \quad u(r, 0) = u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R.$

774. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$

$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = U \sin \omega t, \quad t > 0,$

$u(r, 0) = u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R.$

775. $u_{tt} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$

$|u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = U \cos \omega t, \quad t > 0,$

$u(r, 0) = u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R.$

776. Определить поперечные колебания круглой однородной мембраны радиуса R, вызванные непрерывно распределенной по мембране поперечной силой плотности $q \sin \omega t$, действующей с момента $t = 0$, если

а) край мембраны закреплен жестко;

б) край мембраны закреплен упруго.

Решить методом разделения переменных с использованием цилиндрических функций следующие задачи для уравнения теплопроводности:

777. В круге $0 \leqslant r < R$ найти решения $u = u(r, t)$ следующих задач:

а) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty, \ u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, \ t > 0,$
$u(r, 0) = \varphi(r), \ 0 \leqslant r < R;$

б) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r, t), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty, \ u(R, t) = 0, \ t > 0, \ u(r, 0) = 0, \ 0 \leqslant r < R;$

в) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) - hu, \quad h > 0, \quad 0 \leqslant r < R, \ t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty, \ u_r(R, t) = 0, \ t > 0,$
$u(r, 0) = \varphi(r), \ 0 \leqslant r < R;$

г) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) - h^2 u, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty, \ u(R, t) = T, \ t > 0, \ u(r, 0) = T, \ 0 \leqslant r < R;$

д) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + Ue^{-h^2 t}, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty, \ u(R, t) = 0, \ t > 0, \ u(r, 0) = 0, \ 0 \leqslant r < R;$

е) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = Te^{-h^2 t}, \quad t > 0,$
$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R;$

ж) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + Ue^{-\gamma^2 t}, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$|u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) = Te^{-h^2 t}, \quad t > 0,$
$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R;$

з) $u_t = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$
$u_r(R, t) = q, \ t > 0, \ u(r, 0) = U, \ 0 \leqslant r < R.$

778. Найти распределение температуры при $t > 0$ в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса R, если начальная температура цилиндра равна Ur^2 для случаев:

а) поверхность цилиндра теплоизолирована;

б) на поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру;

в) температура поверхности цилиндра поддерживается равной T.

779. В бесконечном однородном цилиндре радиуса R с момента $t = 0$ выделяется тепло с постоянной плотностью Q. Считая температуру цилиндра при $t = 0$ равной нулю, определить распределение температуры в нем при $t > 0$, если поверхность цилиндра поддерживается при температуре T.

780. В начальный момент времени $t = 0$ температура бесконечной однородной трубы $b \leqslant r \leqslant d$ равна U. Найти распределение температуры в трубе при $t > 0$, если:

а) поверхности трубы поддерживаются при нулевой температуре;

б) внутренняя поверхность трубы теплоизолирована, а внешняя поддерживается при температуре T;

в) начиная с момента $t=0$, в трубе действуют источники тепла постоянной плотности Q, а ее поверхности поддерживаются при температуре U.

781. Считая начальную температуру однородного цилиндра $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 < z < l$ равной нулю, определить распределение температуры в цилиндре для случаев, когда:

а) поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре U;

б) температура нижнего основания поддерживается равной U, а верхнее основание и боковая поверхность цилиндра теплоизолированы;

в) температура боковой поверхности поддерживается равной U, а основания цилиндра теплоизолированы.

782. Начальная температура в однородном конечном цилиндре $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$ равна $A(R^2-r^2)z$. Определить распределение температуры в этом цилиндре в любой момент времени $t>0$, если:

а) боковая поверхность и нижнее основание цилиндра поддерживаются при нулевой температуре, а верхнее основание теплоизолировано;

б) верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, нижнее теплоизолировано, а на боковой поверхности происходит теплообмен с внешней средой, имеющей нулевую температуру.

Следующие задачи для уравнений эллиптического типа решить методом разделения переменных с применением специальных функций.

783. В полубесконечном круговом цилиндре $0 \leqslant r < R$, $0 < z < \infty$ имеются источники некоторого газа плотности Ue^{-hz}, причем на основании цилиндра концентрация этого газа поддерживается равной Q. Определить стационарное распределение концентрации газа в цилиндре, если:

а) боковая поверхность цилиндра газонепроницаема;

б) на боковой поверхности происходит газообмен по закону Ньютона с внешней средой, концентрация рассматриваемого газа в которой нулевая;

в) на боковой поверхности поддерживается концентрация газа, равная $Te^{-\beta z}$, $\beta > 0$.

784. Два одинаковых цилиндрических стакана, $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, соединенных верхними кромками с помощью пренебрежимо тонкой изоляционной прокладки, образуют цилиндрическую коробку $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 2l$. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри этой коробки, если вся поверхность нижнего стакана поддерживается при потенциале V_1, а вся поверхность верхнего стакана — при потенциале V_2.

785. В трубчатой области $b<r<d$, $0<z<l$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, относительно функции $u=u(r, z)$ решить задачу

$$\Delta u = 0, \quad \text{где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$u(r, 0)=u(r, l)=0, \quad b<r<d,$$

$$u(b, z)=0, \quad u(d, z)=U, \quad 0<z<l.$$

786. Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре ($0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant l$) для случаев, когда:

а) нижнее основание цилиндра имеет температуру T, а остальная поверхность — температуру, равную нулю;

б) нижнее основание цилиндра имеет нулевую температуру, верхнее теплоизолировано, а температура боковой поверхности равна $f(z)$;

в) температура оснований цилиндра нулевая, а боковая поверхность имеет температуру $f(z)=Uz(l-z)$;

г) через нижнее основание в цилиндр подается нормальный тепловой поток плотности q; верхнее основание и боковая поверхность имеют температуру T;

д) в цилиндре имеются источники тепла объемной плотности Q, и температура поверхности цилиндра равна нулю.

787. В неограниченной однородной пластине $0\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant l$ просверлен цилиндрический канал радиуса R, ось которого совпадает с координатной осью z. Определить стационарное распределение температуры в пластине для случаев, когда:

а) температура стенки цилиндрического канала равна T, а грани пластины имеют нулевую температуру;

б) через стенки канала внутрь пластины подается нормальный тепловой поток плотности q, нижняя грань пластины теплоизолирована, а температура верхней грани равна T;

в) нижняя грань пластины имеет нулевую температуру, на верхней грани происходит теплообмен с внешней средой, имеющей температуру T; температура стенки канала равна Tz/l.

788. Определить стационарное распределение температуры $u(r, \theta)$ в однородном шаре радиуса R для случаев, когда:

а) поверхность шара имеет температуру:

$$u(R, \theta)=f(\theta)=\begin{cases} T_1, & 0\leqslant\theta<\alpha,\\ T_2, & \alpha<\theta\leqslant\pi;\end{cases}$$

б) шар нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности q, падающим на его поверхность, и отдает тепло со всей своей поверхности в окружающую среду в результате конвективного теплообмена. Температура среды равна T;

в) поверхность шара имеет температуру

$$u(R, \theta)=f(\theta)=\begin{cases} T, & 0\leqslant\theta<\pi/2,\\ 0, & \pi/2<\theta\leqslant\pi;\end{cases}$$

г) в шаре происходит объемное тепловыделение с плотностью Q, а отвод тепла совершается через часть поверхности шара ($0 \leqslant \theta < \alpha$) нормальным потоком постоянной плотности q, а остальная поверхность ($\alpha < \theta \leqslant \pi$) теплоизолирована;

д) в шаре происходит объемное тепловыделение с плотностью Q, а на поверхности — конвективный теплообмен по закону

$$u_r(R, \theta) + hu(R, \theta) = T + \cos\theta.$$

789. Определить стационарное распределение температуры в теле, имеющем форму половины шара радиуса R, если его сферическая часть границы имеет температуру T, а плоское основание — нулевую.

790. Построить функции $u(r, \theta)$, гармонические в шаре радиуса R и удовлетворяющие соответственно граничным условиям:

а) $u(r, \theta)_{r=R} = 3 + 5\cos^2\theta$; б) $u(r, \theta)_{r=R} = 2\cos\theta - 3\sin^2\theta$;

в) $u(r, \theta)_{r=R} = 3\cos^3\theta - \cos\theta$;

г) $u(r, \theta)_{r=R} = 3\sin^2 2\theta - 2\sin^2\theta$.

791. Построить функции $u(r, \theta)$, гармонические вне шара радиуса R и удовлетворяющие соответственно граничным условиям:

а) $u(r, \theta)_{r=R} = 2\cos\theta - \cos^2\theta$;

б) $u(r, \theta)_{r=R} = \cos^3\theta$; в) $u(r, \theta)_{r=R} = 3 + 2\cos^2\theta$.

792. Концентрация некоторого газа на границе сферического сосуда радиуса R с центром в начале координат равна $f(\theta)$. Определить стационарное распределение концентрации данного газа:

а) внутри этого сосуда; б) вне сосуда.

793. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

а) внутри шара радиуса R; б) вне шара радиуса R.

Решить следующие задачи:

794. Определить распределение температуры в однородном шаре радиуса R с центром в начале координат, температура поверхности которого поддерживается равной нулю для случаев, когда начальная температура шара равна: а) $f(r, \theta)$; б) $f(r, \theta, \varphi)$.

2°. Асимптотические разложения

В приложениях весьма важно иметь точное в определенном смысле представление о поведении функции вблизи интересующих исследователя точек (например, о поведении специальных функций вблизи их особых точек). С этой целью используются так называемые *асимптотические разложения* функций.

Обозначим через E множество точек плоскости комплексного переменного z, для которого бесконечно удаленная точка является предельной точкой. Пусть на E задана функция $f(z)$. Рассмотрим конечную сумму

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k},$$

где a_k — заданные числа.

Если для любого фиксированного n имеет место равенство

$$\lim_{z\to\infty} z^n [f(z) - S_n(z)] = 0, \quad z \in E, \tag{43}$$

то говорят, что ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots, \tag{44}$$

независимо от того, сходится он или нет, является ***асимптотическим разложением*** функции $f(z)$ на E, и пишут

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}.$$

Имея точное представление о функции $S_n(z)$, с помощью (43) получаем важные сведения о поведении функции $f(z)$ на множестве E вблизи бесконечно удаленной точки. Из равенства (43) для определения коэффициентов асимптотического разложения (44) получаются формулы

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} f(z), \quad a_n = \lim_{z\to\infty} z^n [f(z) - S_{n-1}(z)], \quad n = 1, 2, \ldots$$

795. На множестве $E = \{0 < z < \infty\}$ найти асимптотическое разложение функции e^{-z}.

796. Показать на примерах, что один и тот же ряд может служить асимптотическим разложением для различных функций.

Пользуясь интегрированием по частям, показать справедливость асимптотических разложений:

797. $\displaystyle\int_z^{\infty} e^{z^2-t^2} dt \sim \frac{1}{2z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1\cdot 3 \ldots (2k-1)}{2^{k+1} z^{2k+1}}, \quad z < t < \infty,$
$E = \{0 < z < \infty\}, \quad z \to \infty.$

798. $\displaystyle\int_z^{\infty} e^{z-t} \frac{t\,dt}{z^2} \sim \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}, \quad z < t < \infty,$
$E = \{0 < z < \infty\}, \quad z \to \infty.$

799. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t+z} dt \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{z^k},$
$z \to \infty, \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta < \pi.$

800. $\displaystyle\int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \sim e^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a) z^{a-k}}{\Gamma(a-k+1)},$
$0 < z < \infty, \quad z \to +\infty, \quad a$ — действительное число.

801. $\displaystyle\int_z^{\infty} t^{-a} e^{it} dt \sim \frac{ie^{iz}}{z^a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)(iz)^k},$
$0 < z < \infty, \quad z \to +\infty, \quad a > 0.$

802. Основываясь на результате задачи 797, получить асимптотическое разложение функции ошибок

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau \sim e^{-z^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{1-2k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)},\quad 0<z<\infty,\quad z\to+\infty.$$

803. Отделяя действительную и мнимую части в результате задачи 801, найти асимптотические разложения при $u\to+\infty$ для интегралов Френеля:

а) $\int\limits_u^{\infty}\cos\vartheta^2\,d\vartheta$; б) $\int\limits_u^{\infty}\sin\vartheta^2\,d\vartheta$.

С помощью интегрирования по частям получить асимптотические разложения для следующих функций:

804. $\mathrm{Ei}(z)=\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\xi}}{\xi}\,d\xi$ — интегральная показательная функция,

$-\infty<z<0,\quad z\to-\infty.$

805. $\mathrm{Ci}(z)=\int\limits_{\infty}^{z}\frac{\cos\xi}{\xi}\,d\xi$ — интегральный косинус,

$0<z<\infty,\quad z\to\infty.$

806. $\mathrm{Si}(z)=\int\limits_{\infty}^{z}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$ — интегральный синус,

$-\infty<z<\infty,\quad |z|\to\infty.$

С целью получения асимптотических разложений для отдельных классов функций чаще всего пользуются *методом перевала* и *методом Ватсона*. Ниже приводится основное содержание метода Ватсона.

Пусть на сегменте $0\leqslant t\leqslant N$, $0<N\leqslant\infty$, задана непрерывная функция $\varphi(t)$. Функция $F(z)$, представленная интегралом,

$$F(z)=\int_0^N t^m\varphi(t)\,e^{-zt^{\alpha}}\,dt,\quad \alpha>0,\quad m>-1,$$

является аналитической.

Если на некотором сегменте $0\leqslant t\leqslant h_1\leqslant N$ функция $\varphi(t)$ является суммой степенного ряда, т. е.

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k,\quad c_0\neq 0,$$

и для фиксированного значения $z=z_0>0$ имеет место оценка

$$\int_0^N t^m\,|\varphi(t)|\,e^{-z_0t^{\alpha}}\,dt<M=\mathrm{const},$$

то на множестве $E=\{0<z<\infty\}$ при $z\to\infty$ асимптотическое разложение функции $F(z)$ дается формулой

$$F(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\alpha}\Gamma\left(\frac{m+k+1}{\alpha}\right)z^{-\frac{m+k+1}{\alpha}},\tag{45}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Для получения асимптотического разложения функции

$$F(z)=\int_{-A}^{N}\varphi(t)\,e^{-\frac{1}{2}zt^2}\,dt,\quad A=\mathrm{const}>0,$$

при условии, что

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k,\quad c_0\neq0,\quad 0\leqslant t\leqslant h\leqslant\min(A,N),$$

достаточно представить $F(2z)$ в виде

$$F(2z)=\int_0^N\varphi(t)\,e^{-zt^2}\,dt+\int_0^A\varphi(-t)\,e^{-zt^2}\,dt$$

и пользоваться *формулой Ватсона*

$$F(2z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)z^{-\frac{2k+1}{2}}=\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}\frac{1\cdot3\ldots(2k-1)}{2^k}z^{-\frac{2k+1}{2}}.\tag{45'}$$

Пользуясь методом Ватсона, показать справедливость следующих асимптотических разложений:

807. $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-zt}\frac{dt}{1+t^{2n}}\sim\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2nk)!}{z^{2nk+1}},$

$0<t<\infty,\quad 0<z<\infty,\quad z\to\infty,\quad n>0$ (целое число).

808. $\displaystyle\int_0^1 t^{p-1}e^{-zt}\,dt\sim\frac{\Gamma(p)}{z^p},$

$0<t<1,\quad 0<z<\infty,\quad z\to\infty,\quad p>0.$

809. $\displaystyle\int_{-A}^{N}\sin t e^{-zt^2}\,dt\sim0,\quad A>0,\quad N>0,$

$0<z<\infty,\quad z\to\infty.$

810. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\cos t e^{-\frac{1}{2}zt^2}\,dt\sim\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1\cdot3\ldots(2k-1)}{(2k)!}z^{-\frac{2k+1}{2}},$

$-1<t<2,\quad 0<z<\infty,\quad z\to\infty.$

811. При $z\to\infty$, $0<z<\infty$, найти асимптотическое разложение функции

$$F(z)=\int_0^{\infty}e^{-z^2t^2}\,dt.$$

812. Показать, что

$$e^{-z^2}\int\limits_0^z e^{\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2z}\,[1+o(1)] \quad \text{при} \quad z\to\infty.$$

§ 3. Метод интегральных преобразований

По определению функция

$$F(z)=\int\limits_a^b K(z,\,t)\,f(t)\,dt$$

называется *интегральным преобразованием (образом) функции* $f(t)$, причем $f(t)$ называется *оригиналом своего образа* $F(z)$, а функция $K(z,\,t)$ — *ядром* интегрального преобразования. Интегральное преобразование над некоторым классом функций $f(t)$ определяется выбором ядра $K(z,\,t)$ и промежутка интегрирования $(a,\,b)$.

Пусть заданная действительная или комплексная функция $f(t)$ действительного переменного t, $0\leqslant t<\infty$, удовлетворяет условиям:

1) $f(t)$ — непрерывная всюду, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода;

2) существуют постоянные $M>0$ и $\xi_0>0$ такие, что

$$|f(t)|<Me^{\xi_0 t} \quad \text{для всех } t.$$

В этих предположениях интеграл

$$F(\zeta)=\int\limits_0^\infty e^{-\zeta t}f(t)\,dt$$

существует для всех ζ с действительной частью $\operatorname{Re}\zeta>\xi_0$ и представляет собой аналитическую функцию комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta>\xi_0$.

Функция $F(\zeta)$ называется *преобразованием Лапласа* функции $f(t)$, а сама $f(t)$ — *функцией-оригиналом*.

При определенных условиях оригинал $f(t)$ по известному образу $F(\zeta)$ определяется с помощью *обратного преобразования Лапласа*:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(a+i\eta)t}F(a+i\eta)\,d\eta, \tag{46}$$

где постоянная $a>\xi_0$.

Когда функция $f(t)$ определена для всех действительных значений t, вводится *преобразование Фурье*

$$F(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta t}f(t)\,dt. \tag{47}$$

Для существования преобразования Фурье в случае выполнения условия 1) достаточна абсолютная сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

Обращение преобразования Фурье (47) дается формулой

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} F(\eta)\, d\eta. \tag{48}$$

Заметим, что если $f(t)$ — четная функция, то преобразования Фурье (47) и (48) переходят во взаимно обратные так называемые *косинус-преобразования Фурье*

$$F(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \eta t\ f(t)\, dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \eta t\, F(\eta)\, d\eta,$$

а если $f(t)$ нечетна, то, соответственно, — в *синус-преобразования Фурье*

$$F(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \eta t\, f(t)\, dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \eta t\, F(\eta)\, d\eta.$$

Среди других интегральных преобразований отметим *преобразования Ханкеля* (или *Фурье — Бесселя*):

прямое: $$G_n(\eta) = \int_0^{\infty} t J_n(\eta t)\, g(t)\, dt,$$

обратное: $$g(t) = \int_0^{\infty} \eta J_n(\eta t)\, G_n(\eta)\, d\eta$$

и преобразование Меллина:

прямое: $$G(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} g(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} z = b,$$

обратное: $$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} t^{-z} G(z)\, dz, \quad t > 0,$$

Интегральные преобразования позволяют получить решения ряда задач математической физики. В качестве примера, пользуясь интегральным преобразованием Лапласа, определим в полуполосе $t > 0$, $0 < x < l$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи:

$$\begin{gathered} a(x) u_{xx} + b(x) u_{tt} + c(x) u_x + d(x) u_t + e(x) u = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = f_1(t), \quad u(l, t) = f_2(t). \end{gathered} \tag{49}$$

Пусть параметр ζ и класс функций, в котором ищется решение $u(x, t)$ этой задачи, таковы, что существуют интегралы

$$v(x, \zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} u(x, t)\, dt,$$

$$F_1(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} u(0, t)\, dt, \quad F_2(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} u(l, t)\, dt \tag{50}$$

и законны операции

$$v_x(x, \zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} u_x(x, t)\, dt, \quad v_{xx}(x, \zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} u_{xx}(x, t)\, dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-\zeta t} u_t(x, t)\, dt = e^{-\zeta t} u(x, t)\Big|_0^\infty + \zeta \int_0^\infty e^{-\zeta t} u(x, t)\, dt = \zeta v(x, \zeta) - u(x, 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-\zeta t} u_{tt}(x, t)\, dt = \zeta^2 v(x, \zeta) - \zeta u(x, 0) - u_t(x, 0). \tag{51}$$

Умножая обе части уравнения и два последних условия задачи (49) на $e^{-\zeta t}$ и интегрируя по промежутку $(0, \infty)$ изменения t, в силу (49), (50) и (51) получаем задачу

$$a(x) v_{xx} + c(x) v_x + [e(x) + \zeta d(x) + \zeta^2 b(x)] v =$$

$$= \zeta b(x)\varphi(x) + b(x)\psi(x) + d(x)\varphi(x), \tag{52}$$

$$v(0, \zeta) = F_1(\zeta), \quad v(l, \zeta) = F_2(\zeta). \tag{53}$$

Таким образом, решение смешанной задачи (49) редуцировано к отысканию решения $v(x, \zeta)$ (зависящего от параметра ζ) краевой задачи (52), (53) для обыкновенного дифференциального уравнения (52). Построив решение $v(x, \zeta)$ задачи (52), (53), искомое решение задачи (49) можно получить при помощи обратного преобразования Лапласа

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, a + i\eta)\, e^{(a+i\eta)t} d\eta, \quad a > \xi_0.$$

В приложениях при решении конкретных задач для уравнений с частными производными предпочитают пользоваться преобразованием Фурье, ибо выполнение условий, гарантирующих существование обратного преобразования Фурье, во многих случаях является естественным. При этом весьма полезную роль играет понятие свертки.

Сверткой $f * \varphi$ функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, заданных в интервале $-\infty < x < \infty$, называется интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(x - t)\, dt$, т. е.

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(x - t)\, dt. \tag{54}$$

Когда существуют преобразования Фурье

$$F(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\zeta}f(t)\,dt,\quad \Phi(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-it\zeta}\varphi(t)\,dt$$

и обратные преобразования

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{it\zeta}F(\zeta)\,d\zeta,\quad \varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{it\zeta}\Phi(\zeta)\,d\zeta,$$

свертке (54) можно придать вид

$$f*\varphi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\zeta)\,\Phi(\zeta)\,e^{i\zeta x}d\zeta. \tag{55}$$

Громоздкие вычисления, встречающиеся при пользовании преобразованием Фурье, значительно упрощаются, если воспользоваться *δ-функцией Дирака*. Она определяется как преобразование Фурье от постоянной $1/\sqrt{2\pi}$.

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}d\xi. \tag{56}$$

Преобразование, обратное (56), дается формулой

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}\delta(\xi)\,d\xi.$$

Поскольку преобразование (56) в обычном понимании смысла не имеет, приведенное выше определение δ-функции является формальным. В современном математическом анализе дается строгое определение δ-функции как обобщенной функции.

813. Пусть $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, удовлетворяет условиям применимости прямого и обратного преобразований Фурье. Доказать основное свойство δ-функции Дирака

$$f*\delta=f(x).$$

814. Показать справедливость равенства $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1.$

Заметим, что в физике δ-функцию Дирака иногда определяют как функцию, равную нулю для всех действительных значений x, отличных от нуля, обращающуюся в бесконечность при $x=0$ и удовлетворяющую условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1.$$

Пользуясь интегральными преобразованиями Фурье, решить следующие задачи:

В полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $t > 0$:

815. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

816. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$.

817. $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = \varphi(x)$.

818. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, $u(x, 0) = 0$.

В четвертьплоскости $0 < x < \infty$, $t > 0$:

819. $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(0, t) = \mu(t)$, $u(x, 0) = 0$.

820. $u_t = a^2 u_{xx}$, $u_x(0, t) = \nu(t)$, $u(x, 0) = 0$.

821. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, $u(0, t) = u(x, 0) = 0$.

В полупространстве $-\infty < x$, $y < \infty$, $t > 0$:

822. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$.

823. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$, $u(x, y, 0) = 0$.

В части пространства $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$, $t > 0$:

824. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $u(x, 0, t) = 0$, $u(x, y, 0) = f(x, y)$.

825. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $u(x, 0, t) = f(x, t)$, $u(x, y, 0) = 0$.

826. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $u_y(x, 0, t) = 0$, $u(x, y, 0) = f(x, y)$.

827. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$,
$u_y(x, 0, t) = f(x, t)$, $u(x, y, 0) = 0$.

В части пространства $-\infty < x < \infty$, $0 < y$, $t < \infty$.

828. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $0 < x, y, t < \infty$,
$u_x(0, y, t) = f(y, t)$, $u(x, 0, t) = g(x, t)$, $u(x, y, 0) = 0$.

829. Определить стационарное распределение температуры в полубесконечной трубе $a < r < b$, $0 < z < \infty$, если на поверхностях $z = 0$ и $r = b$ температура равна нулю, а на поверхности $r = a$ температура равна $f(z)$.

Пользуясь интегральным преобразованием Лапласа, решить следующие задачи:

830. $u_y = u_{xx} + a^2 u + f(x)$, $u(0, y) = u_x(0, y) = 0$,
$0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$.

831. $u_y = u_{xx} + u + B\cos x$, $u(0, y) = Ae^{-3y}$, $u_x(0, y) = 0$,
$0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$.

832. $u_{xx} - u_t + u = f(x)$, $u(0, t) = t$, $u_x(0, t) = 0$,
$0 < x, t < \infty$.

833. $u_{xx} + u_{xt} = 0$, $0 < x, t < \infty$,
$u(0, t) = \psi(t)$, $u_x(0, t) = 0$,
$u(x, 0) = \varphi(x)$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

834. $9u_{xx} + 4u_{tt} = 36e^{2x}\sin 3t$,
$u(0, t) = 0$, $u_x(0, t) = \sin 3t$,
$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 3xe^{2x}$, $0 < x, t < \infty$.

835. $2u_{xx} + 5u_{xt} + 3u_{tt} = 0$,
$u(0, t) = 0$, $u_x(0, t) = f(t)$, $u(x, 0) = g(x)$, $u_t(x, 0) = 0$,
$0 < x, t < \infty$.

836. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u = f(x, y)$, $0 < x, y < \infty$,
$u(0, y) = \psi(y)$, $u(x, 0) = u_x(0, y) = 0$, $u_y(x, 0) = \varphi(x)$.

837. Начальная температура (при $t=0$) тонкого однородного стержня равна нулю. Определить температуру $u(x, t)$ в стержне при $t>0$, когда:

а) стержень имеет конечную длину ($0<x<l$) и

$$u(+0, t)=\delta(t), \quad u(l-0, t)=0;$$

б) стержень полубесконечен ($0<x<\infty$) и

$$u(0, t)=\delta(t), \quad u(\infty, t)=0;$$

в) стержень полубесконечен ($0<x<\infty$) и

$$u(0, t)=\mu(t), \quad u(\infty, t)=0;$$

$\delta(t)$ — δ-функция Дирака, а $\mu(t)$ — заданная функция.

838. Начиная с момента $t=0$, к концу ($x=0$) полубесконечной изолированной электрической линии подключена эдс $E(t)$. Найти напряжение $u(x, t)$ для $t>0$ в линии, если начальное напряжение и начальный ток в ней равны нулю, для случаев, когда:

а) линия без потерь: $R=G=0$;

б) линия без «искажения»: $RC=LG$.

839. $u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad 0<x<\infty, \quad 0<t<\infty,$

$$u_x(0, t)-hu(0, t)=\varphi(t), \quad u(\infty, t)=0, \quad 0<t<\infty,$$
$$u(x, 0)=u_t(x, 0)=0, \quad 0<x<\infty.$$

Пользуясь интегральным преобразованием Ханкеля, решить задачи:

840. Найти стационарное распределение температуры в полупространстве $0\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $z>0$ для случаев, когда:

а) температура границы ($z=0$) равна $f(r)$;

б) температура границы ($z=0$) при $r<R$ равна T, а при $r>R$ равна 0;

в) полупространство нагревается тепловым потоком постоянной плотности q, падающим на часть границы $r\leqslant R$, $z=0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. При этом на всей границе происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру.

§ 4. Метод конечных разностей

Считая переменные x, y декартовыми ортогональными координатами точки на плоскости, покроем эту плоскость *сетью* $x=mh$, $y=nh$, $m, n=0, \pm 1, \ldots$, где h — заданное положительное число. Вершины каждого квадрата полученной сети называются *узлами*, а число h — *шагом*.

В каждом узле (x, y) при условии, что все шесть точек (x, y), $(x-h, y)$, $(x+h, y)$, $(x, y-h)$, $(x, y+h)$, $(x+h, y+h)$ принадлежат области D задания функции $u(x, y)$ класса $C^{(2)}(D)$, можно считать, что

$$u_x\approx\frac{u(x, y)-u(x-h, y)}{h}, \quad u_y\approx\frac{u(x, y)-u(x, y-h)}{h},$$

$$u_{xx} \approx \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x, y)}{h^2},$$
$$u_{xy} \approx \frac{u(x+h, y+h) - u(x+h, y) - u(x, y+h) + u(x, y)}{h^2}, \quad (57)$$
$$u_{yy} \approx \frac{u(x, y+h) + u(x, y-h) - 2u(x, y)}{h^2}.$$

Исходя из формул (57), заданное в области D уравнение с частными производными

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + \\ + e(x, y)u_y + f(x, y)u = g(x, y)$$

в каждом узле (x, y) приближенно можно заменить равенством

$$a(x, y)[u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x, y)] + \\ + 2b(x, y)[u(x+h, y+h) - u(x+h, y) - u(x, y+h) + u(x, y)] + \\ + c(x, y)[u(x, y+h) + u(x, y-h) - 2u(x, y)] + \\ + hd(x, y)[u(x, y) - u(x-h, y)] + he(x, y)[u(x, y) - u(x, y-h)] + \\ + h^2 f(x, y)u(x, y) = h^2 g(x, y). \quad (58)$$

Когда точка (x, y) пробегает узлы, принадлежащие области D, в качестве (58) мы будем иметь систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $u(x, y)$ в указанных узлах. Некоторые из этих значений либо прямо определяются независимо от системы (58), исходя из начальных и краевых условий, либо эти последние порождают дополнительные к (58) линейные алгебраические уравнения, составляющие вместе с системой (58) *приближенную сеточную замену* всей исходной задачи.

Решение таким образом полученной системы линейных алгебраических уравнений принимается за *приближенное решение рассматриваемой задачи*. Например, при конечноразностной замене задачи Дирихле для гармонических функций краевые условия учитываются следующим образом.

Обозначим через Q_δ совокупность всех лежащих в области D квадратов сети, по крайней мере одна из вершин которых удалена от границы S области D на расстояние не большее, чем наперед заданное число $\delta > h$, где h — шаг сети. В каждом узле (x, y), являющемся вершиной квадрата из Q_δ, за $u(x, y)$ примем заданное на S значение $\varphi(x, y)$ искомой гармонической функции в ближайшей от (x, y) точке границы S. Когда таких точек на S несколько, то произвольно выбираем одно какое-либо из заданных значений функции φ в этих точках и к нему приравниваем $u(x, y)$.

841. Найти конечноразностную замену уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в области D с границей S.

842. В круге $x^2 + y^2 < 16$ найти приближенное решение задачи Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \{x^2 + y^2 < 16\},$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \{x^2 + y^2 = 16\},$$

считая $h=1$, $\delta=h+1/8$ отдельно для каждого из случаев:

а) $\varphi(x, y)=0$;
б) $\varphi(x, y)=1$;
в) $\varphi(x, y)=x$.

Сравнить полученные приближенные решения задач с их точными решениями, которые легко находятся непосредственно.

843. В прямоугольнике Q с вершинами в точках $A(-3, 4)$, $B(3, 4)$, $C(3, -4)$, $D(-3, -4)$ и границей S найти приближенное решение задачи Дирихле

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \quad (x, y)\in Q,$$
$$u(x, y)=\varphi(x, y), \quad (x, y)\in S,$$

считая $h=1$, $\delta=h+1/8$. Отдельно рассмотреть случаи, когда:

а) $\varphi(x, y)=1$;
б) $\varphi(x, y)=y$;
в) $\varphi(x, y)=x+y$.

Сравнить найденные приближенные решения с точными решениями этих задач.

Пусть D — область плоскости x, t, ограниченная отрезками OA и MN прямых $t=0$, $t=H$, $H>0$ и гладкими кривыми OM и AN, каждая из которых пересекается с прямыми $t=\mathrm{const}$ не более чем в одной точке. Обозначим через S часть границы области D, состоящую из OM, OA и AN. Предположим, требуется решить приближенно первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_{xx}-u_t=0, \quad (x, t)\in D, \tag{59}$$
$$u(x, t)=\varphi(x, t), \quad (x, t)\in S. \tag{60}$$

Чтобы учесть краевое условие (60), обозначим через Q_h совокупность всех квадратов сети, не выходящих из замкнутой области $\bar{D}$, а через ∂Q_h — границу Q_h.

Пусть q_h — совокупность квадратов из Q_h, по крайней мере одна вершина которых лежит на ∂Q_h, кроме внутренних квадратов самого верхнего ряда, примыкающего к верхнему основанию области D. В узлах (x, t), являющихся вершинами квадратов из q_h, за $u(x, t)$ примем значение $\varphi(x, t)$ в ближайшей к этому узлу точке границы S. Неизвестные значения $u(x, t)$ в остальных узлах, лежащих в D, находим, решая линейную алгебраическую систему, полученную в результате конечноразностной замены уравнения (59).

844. Найти конечноразностную замену уравнения теплопроводности $u_{xx}-u_t=0$ в области, где ищется решение первой краевой задачи (59), (60).

845. Считая $h=1$, в прямоугольнике Q с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 5)$, $D(4, 0)$ и границей S найти приближенное решение первой краевой задачи

$$u_{xx} - u_t = 0, \quad (x, t) \in Q,$$
$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S,$$

если

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(0, t) = 0, \quad \varphi(4, t) = 4.$$

846. В прямоугольнике Q с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(5, 3)$, $D(5, 0)$ найти приближенное решение задачи

$$u_{xx} - u_t = 0, \quad u(0, t) = t, \quad u(5, t) = t + 25/2, \quad u(x, 0) = x^2/2,$$

считая $h = 1$.

Сравнить найденное приближенное решение этой задачи с ее точным решением $u(x, t) = t + x^2/2$.

847. Считая $h = 1$, найти конечноразностным методом приближенное решение $u(x, y)$ задачи Гурса

$$u_{xy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$
$$u(0, y) = \varphi(y), \quad 0 < y < \infty, \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < \infty,$$

в узлах (2, 2), (2, 3), (2, 4).

Отдельно рассмотреть случаи, когда:

а) $\varphi(y) = 0, \quad \psi(x) = x;$

б) $\varphi(y) = y, \quad \psi(x) = 0;$

в) $\varphi(y) = y, \quad \psi(x) = x.$

§ 5. Вариационные методы

Встречающиеся в приложениях уравнения с частными производными часто представляют собой уравнение Эйлера для соответствующей вариационной задачи.

Как известно, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ может служить уравнением Эйлера задачи на минимум *интеграла Дирихле*

$$D(u) = \int_D \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\,dy, \tag{61}$$

распространенного по области D с границей S.

Непрерывные в $D \cup S$ функции с кусочно непрерывными в D производными первого порядка и конечным интегралом Дирихле (61), совпадающие с наперед заданной на S непрерывной функцией $\varphi(x, y)$, называются *допустимыми функциями*. Задача об отыскании среди допустимых функций той функции, для которой интеграл Дирихле (61) минимален, называется *первой вариационной задачей*.

Если d — минимум интеграла Дирихле или вообще некоторого функционала $\Phi(u)$, то последовательность $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, допустимых функций, обладающая свойством

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(u_n) = d,$$

называется *минимизирующей*.

Центральное место в вариационных методах занимает построение минимизирующей последовательности. Один из методов ее построения принадлежит Ритцу. Сущность этого метода заключается в следующем.

Пусть $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — полная система из класса допустимых функций для функционала $\Phi(u)$. Последовательность $\{\varphi_n\}$ носит название *системы координатных функций*. Составим новую последовательность

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где c_k — пока произвольные постоянные, и определим коэффициенты c_k так, чтобы выражение $\Phi_n = \Phi(u_n)$ как функция $c_1, \ldots, c_n$ было минимальным. Для некоторых классов функционалов удается показать, что последовательность $\{u_n\}$ является минимизирующей и ее предел дает решение рассматриваемой вариационной задачи.

848. Показать, что если заданная на границе S области D функция $\varphi(x, y)$ такова, что класс допустимых функций, принимающих на S значения $\varphi(x, y)$, является не пустым, то задача Дирихле

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D,$$
$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in S,$$

и первая вариационная задача эквивалентны.

849. Показать, что в классе допустимых функций $y(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, удовлетворяющих условиям $y(0) = 0$, $y(1) = a$, функция $y(x) = ax^n$ минимизирует функционал

$$I_n(y) = \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{n^2}{x^2} y^2\right] x\,dx,$$

где n — положительное целое число. Вычислить $\min I_n(y)$.

850. Пользуясь тем фактом, что в квадрате Q: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ среди допустимых функций $u(x, y)$, обращающихся в нуль на границе этого квадрата, функция $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin x \sin y$ минимизирует функционал

$$I(u) = \frac{D(u)}{H(u)}, \tag{62}$$

где $D(u) = \int\limits_Q (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$, $H(u) = \int\limits_Q u^2 dx\,dy$, показать справедливость оценки

$$H(u) \leqslant \frac{1}{2} D(u)$$

для всех допустимых функций.

851. Среди непрерывно дифференцируемых на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad H(y) = \int_0^\pi y^2(x)\,dx = 1,$$

найти ту, которая минимизирует функционал

$$D(y) = \int_0^\pi y'^2(x)\,dx.$$

852. Показать, что для допустимых функций $y(x)$ из задачи 851 имеет место оценка

$$H(y) \leqslant D(y).$$

853. Найти первое приближение задачи на минимум функционала

$$D(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + y^2 + 2xy\right) dx, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

когда координатные функции берутся в виде $\{y_0(x) = 0,\ y_n(x) = x^n(x-1)\}$.

854. Сводя задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y) = -1, \quad (x, y) \in D, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S,$$

к задаче на минимум функционала

$$D(u) = \int_D \left(u_x^2 + u_y^2 - 2u\right) dx\,dy, \quad u|_S = 0,$$

где D: $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, найти первое приближение $u_1(x, y)$, если координатные функции имеют вид

$$v_1(x, y) = (x^2-1)(y^2-1), \quad v_2(x, y) = (x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2), \ \ldots$$

и, следовательно, $u_1(x, y) = cv_1(x, y)$.

855. Задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y) = xy, \quad (x, y) \in D, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S,$$

свести к вариационной задаче и найти приближенное решение $u_1(x, y) = cxy(x-1)(y-1)$, если область D представляет собой квадрат $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

856. Пусть допустимые функции для функционала (62) определены в круге Q: $x^2 + y^2 < 1$ и обращаются в нуль на границе этого круга. Пользуясь методом Ритца, найти функцию, минимизирующую функционал (62).

857. Пользуясь задачей 856, вывести неравенство

$$H(u) \leqslant CD(u)$$

и указать точное значение константы C в случае, когда область Q есть круг $x^2 + y^2 < 1$.

Ответы, указания, решения

Глава I

1. Нет. 2. Да. 3. Нет. 4. Нет. 5. Нет. 6. Нет. 7. Первый. 8. Второй. 9. Первый. 10. Первый. 11. Второй. 12. Второй. 13. Нелинейное. 14. Квазилинейное.. 15. Линейное, неоднородное. 16. Линейное, однородное. 17. Линейное, неоднородное. 18. Нелинейное. 19. Линейное, неоднородное при $h(x, y) \neq 0$. 20. Квазилинейное. 21. Квазилинейное. 22. Квазилинейное. 23. Квазилинейное (линейное относительно старших производных). 24. Линейное, однородное. 25. Гиперболический. 26. Эллиптический. 27. Параболический.

28. Параболический. Действительно, соответствующая этому уравнению форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 4\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - 6\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 10\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3 = \\ = \frac{1}{4}(4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3)^2 - \frac{1}{4}(\lambda_2 + 7\lambda_3)^2$$

в результате неособой замены переменных

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{3}{2}\xi_2 + 4\xi_3, \quad \lambda_2 = 2\xi_2 - 7\xi_3, \quad \lambda_3 = \xi_3$$

приводится к каноническому виду $K(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 - \xi_2^2$, откуда и следует справедливость утверждения. 29. Гиперболический. 30. Эллиптический, так как соответствующая характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2$$

положительно определена. В этом случае и в задачах 33, 35 можно пользоваться критерием Сильвестра положительной определенности симметричной квадратичной формы

$$Q = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + 2a_{13}\lambda_1\lambda_3 + a_{22}\lambda_2^2 + 2a_{23}\lambda_2\lambda_3 + a_{33}\lambda_3^2,$$

что заключается в положительности всех главных диагональных миноров

$$A_{11} = a_{11}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

матрицы $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$.

31. Гиперболический. Соответствующая характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2^2 + \lambda_3^2 =$$
$$= (\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2$$

в результате неособой замены

$$\lambda_1 = \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{3}{2}\mu_3, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_3)$$

приводится к каноническому виду $K(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2$.

32. Гиперболический, так как характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)^2 - \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \lambda_3^2$$

в результате замены

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3, \quad \lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 - \mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_3$$

приводится к каноническому виду $K(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2$. 33. Эллиптический. 34. Гиперболический. Неособой заменой

$$\lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 - \mu_3, \quad \lambda_2 = \mu_2 + \mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_3$$

соответствующая характеристическая форма

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 - \lambda_3^2$$

приводится к каноническому виду $K(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2$. 35. Эллиптический. 36. Параболический при $y = 0$; гиперболический при $y < 0$; эллиптический при $y > 0$. 37. Параболический при $x = 0$, $y \neq 0$ и при $y = 0$, $x \neq 0$; гиперболический при $\operatorname{sign} x \neq \operatorname{sign} y$; эллиптический при $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y$. 38. Гиперболический. 39. Эллиптический вдоль $u = x^2 + y^2$; гиперболический вдоль $u = 2\sqrt{2}\,xy$. 40. Эллиптический вдоль $u = (x + y)^2$; гиперболический вдоль $u = x$; параболический вдоль $u = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{17}{16}xy$. 41. Параболический вдоль $u = 2y^2$; эллиптический вдоль $u = 5xy$; гиперболический вдоль $u = x$. 42. Параболический вдоль $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; гиперболический вдоль $u = 2y^2$. 43. Гиперболический. 44. Гиперболический. 45. Гиперболический. 46. Эллиптический. 47. Гиперболический вдоль $u = \frac{1}{2}(x + y)^2$; параболический вдоль $u = \sqrt{3}\,x^2$. 48. Эллиптический. 49. Параболический. 50. Вдоль решения $u = x^2 - y^2$ уравнение не принадлежит ни к одному из названных трех типов, так как $K(\lambda_1, \lambda_2) = 0$; вдоль $u = x$ уравнение эллиптического типа.

51. Гиперболическое, эллиптическое или параболическое, если выражение $\frac{\partial F}{\partial u_{xx}}\frac{\partial F}{\partial u_{yy}} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}}\right)^2$ соответственно меньше, больше или равно нулю.

52. Эллиптический. 53. Гиперболический. 54. Параболический. 55. Гиперболический. 56. Гиперболический. 57. Эллиптический. 58. Параболический. 59. Эллиптический. 60. Параболический. 61. Гиперболический. 62. Гиперболический. 63. Гиперболический. 64. Параболический. 65. Гиперболический.

66. Параболический. 67. Гиперболический. 68. Эллиптический. 69. Эллиптический. 70. Эллиптический.

71. Гиперболический при $k < 0$; параболический при $k = 0$; эллиптический при $k > 0$. 72. Гиперболический при $-0{,}5 < k < 0{,}5$; параболический при $k = \pm 0{,}5$; эллиптический при $|k| > 0{,}5$. 73. Параболический при $k = 0$ и при $k = 4$; эллиптический при $0 < k < 4$; гиперболический при $k < 0$ и при $k > 4$.

74. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 8v = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2x.$$

75. Параболическое всюду,

$$v_{\eta\eta} + 18v_\xi + 9v_\eta - 9v = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = x.$$

76. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta} + 3v_\xi - v_\eta + 2v = 0, \quad \xi = y - x, \quad \eta = 2y - x.$$

77. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta} + v_\xi - 2v_\eta + \xi + \eta = 0, \quad \xi = 2x - y, \quad \eta = x + y.$$

78. Параболическое всюду,

$$27v_{\eta\eta} - 105v_\xi + 30v_\eta - 150v - 2\xi + 5\eta = 0, \quad \xi = x + 3y, \quad \eta = x.$$

79. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 15v_\xi - 4\sqrt{6}\, v_\eta + \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta = 0, \quad \xi = y - 2x, \quad \eta = \sqrt{6}\, x.$$

80. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 2v_\xi + v_\eta - v + \eta - \xi = 0, \quad \xi = 2x - y, \quad \eta = 3x.$$

81. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0, \quad \xi = y, \quad \eta = \operatorname{arctg} x.$$

82. Параболическое всюду, кроме начала координат (в начале координат уравнение вырождается),

$$v_{\eta\eta} - \frac{\xi}{2\eta(\xi + \eta)} v_\xi + \frac{1}{2\eta} v_\eta = 0, \quad \xi = y^2 - x^2, \quad \eta = x^2.$$

83. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad \xi = x + \operatorname{arctg} y, \quad \eta = x - \operatorname{arctg} y.$$

84. Эллиптическое всюду,

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 2v = 0, \quad \xi = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right), \quad \eta = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right).$$

85. Параболическое всюду, кроме начала координат (в начале координат уравнение вырождается),

$$v_{\eta\eta} + 2\frac{\xi^2}{\eta^2} v_\xi + \frac{1}{\eta} e^\xi = 0, \quad \xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y.$$

86. Параболическое всюду кроме координатной оси $x=0$ (на оси $x=0$ уравнение вырождается),

$$v_{\eta\eta}+\frac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}v_\xi-\frac{1}{\eta}v_\eta=0,\quad \xi=x^2+y^2,\quad \eta=x.$$

87. Гиперболическое всюду,

$$v_{\xi\eta}=0,\quad \xi=x+y-\cos x,\quad \eta=-x+y-\cos x.$$

88. Параболическое всюду,

$$v_{\eta\eta}-\frac{\xi}{1+\xi e^{\eta}}v_\xi-\eta e^{-2\eta}v=0,\quad \xi=e^{-y}-e^{-x},\quad \eta=x.$$

89. Параболическое при $x=0$, $u_{xx}=0$; гиперболическое при $x\neq 0$,

$$v_{\xi\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}v_\xi=0,\quad \xi=x^2+y,\quad \eta=y.$$

90. Параболическое при $x=0$, $u_{yy}=0$; гиперболическое при $x>0$,

$$v_{\xi\eta}+\frac{1}{2(\xi-\eta)}(v_\xi-v_\eta)=0,\quad \xi=y-x+2\sqrt{x},\quad \eta=y-x-2\sqrt{x};$$

эллиптическое при $x<0$,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}v_\eta=0,\quad \xi=y-x,\quad \eta=2\sqrt{-x}.$$

91. Параболическое при $y=0$, $u_{yy}=0$; гиперболическое при $y<0$,

$$v_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}(v_\xi+v_\eta)=0,\quad \xi=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}+x,\quad \eta=\frac{2}{3}(-y)^{3/2}-x;$$

эллиптическое при $y>0$,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}v_\xi=0,\quad \xi=\frac{2}{3}y^{3/2},\quad \eta=x.$$

92. Параболическое при $x=0$, $y\neq 0$, $u_{yy}+\frac{2}{y}(u_x+u_y)=0$ и при $x\neq 0$, $y=0$, $u_{xx}+\frac{2}{x}(u_x+u_y)=0$ (в начале координат уравнение вырождается); гиперболическое при $x>0$, $y<0$ и при $x<0$, $y>0$, $v_{\xi\eta}-\frac{3}{\xi^2-\eta^2}\times$ $\times(\eta v_\xi-\xi v_\eta)=0$ (замена переменных: $\xi=\sqrt{-y}+\sqrt{x}$, $\eta=\sqrt{-y}-\sqrt{x}$ при $x>0$, $y<0$ и $\xi=\sqrt{y}+\sqrt{-x}$, $\eta=\sqrt{y}-\sqrt{-x}$ при $x<0$, $y>0$); эллиптическое при $x>0$, $y>0$ и при $x<0$, $y<0$, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+3\left(\frac{1}{\xi}v_\xi+\frac{1}{\eta}v_\eta\right)=0$ (замена переменных: $\xi=\sqrt{y}$, $\eta=\sqrt{x}$ при $x>0$, $y>0$ и $\xi=\sqrt{-y}$, $\eta=\sqrt{-x}$ при $x<0$, $y<0$).

93. Параболическое на прямых $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0,\pm 1,\ldots$; гиперболическое вне прямых $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0,\pm 1,\ldots$,

$$v_{\xi\eta}+\frac{\xi-\eta}{2[4-(\xi-\eta)^2]}(v_\xi-v_\eta)=0,\quad \xi=y+\cos x+\sin x,\quad \eta=y+\cos x-\sin x.$$

94. Параболическое на осях координат $x=0$ и $y=0$, $u_{xx}=0$; гиперболическое при $x>0$, $y<0$ и при $x<0$, $y>0$,

$$v_{\xi\eta}-\frac{1}{3(\xi^2-\eta^2)}[(2\xi-\eta)v_\xi-(2\eta-\xi)v_\eta]=0$$

(замена переменных: $\xi=-2(-y)^{1/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}$, $\eta=-2(-y)^{1/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}$ при $x>0$, $y<0$ и $\xi=2y^{1/2}+\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, $\eta=2y^{1/2}-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ при $x<<0$, $y>0$); эллиптическое при $x>0$, $y>0$ и при $x<0$, $y<0$, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-\frac{1}{\xi}v_\xi+\frac{1}{3\eta}v_\eta=0$ (замена переменных: $\xi=2y^{1/2}$, $\eta=\frac{2}{3}x^{3/2}$ при $x>0$, $y>0$ и $\xi=2(-y)^{1/2}$, $\eta=\frac{2}{3}(-x)^{3/2}$ при $x<0$, $y<0$).

95. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-\frac{15}{2}w=0$,

$\xi=2x+y$, $\eta=x$, $v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-2\eta)=e^{\frac{5\xi+3\eta}{2}}w(\xi,\eta)$.

96. $w_{\eta\eta}-w_\xi=0$,

$\xi=3x+y$, $\eta=x$, $v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-3\eta)=e^{\frac{-\xi+2\eta}{4}}w(\xi,\eta)$.

97. $w_{\xi\eta}+\frac{1}{2}w+\frac{\eta}{2}e^{\frac{\xi}{2}}=0$,

$\xi=2x+y$, $\eta=x$, $v(\xi,\eta)=u(\eta,\xi-2\eta)=e^{-\xi/2}w(\xi,\eta)$.

98. $w_{\xi\eta}-7w=0$,

$\xi=2x-y$, $\eta=x$, $v(\xi,\eta)=u(\eta,2\eta-\xi)=e^{-\xi-6\eta}w(\xi,\eta)$.

99. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-\frac{3}{2}w=0$,

$\xi=2y-x$, $\eta=x$, $v(\xi,\eta)=u\left(\eta,\frac{\xi+\eta}{2}\right)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta)$.

100. $w_{\eta\eta}-2w_\xi=0$,

$\xi=y-x$, $\eta=y+x$, $v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta-\xi}{2},\frac{\eta+\xi}{2}\right)=e^{\frac{15\xi+8\eta}{32}}w(\xi,\eta)$.

101. $w_{\xi\eta}-w=0$,

$\xi=x-y$, $\eta=x+y$, $v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta+\xi}{2},\frac{\eta-\xi}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}\xi}w(\xi,\eta)$.

102. $w_{\xi\eta}+9w+4(\xi-\eta)e^{\xi+\eta}=0$,

$\xi=y-x$, $\eta=y$, $v(\xi,\eta)=u(\eta-\xi,\eta)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta)$.

103. $w_{\xi\eta}-w+\xi e^\eta=0$,

$\xi=y$, $\eta=x-3y$, $v(\xi,\eta)=u(\eta+3\xi,\xi)=e^{-\eta}w(\xi,\eta)$.

104. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-w=0$,

$\xi=2x-y, \quad \eta=x, \; v(\xi,\eta)=u(\eta, 2\eta-\xi)=e^{\xi+\eta}w(\xi,\eta)$.

105. $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+2w=0$,

$$\xi=y, \; \eta=4x-2y, \; v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\eta+2\xi}{4}, \xi\right)=e^{-\xi-\eta}w(\xi,\eta).$$

106. $w_{\xi\xi}+w_{\eta}=0$,

$$\xi=2x-y, \quad \eta=x+y, \quad v(\xi,\eta)=u\left(\frac{\xi+\eta}{3}, \frac{2\eta-\xi}{3}\right)=e^{\xi-2\eta}w(\xi,\eta).$$

107. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}=0$,

$\xi=x, \; \eta=-x+y, \; \zeta=2x-2y+z$.

Исходному уравнению соответствует характеристическая квадратичная форма $Q=\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_2^2+4\lambda_2\lambda_3+5\lambda_3^2$, которую, пользуясь, например, методом Лагранжа, можно привести к виду $Q=(\lambda_1+\lambda_2)^2+(\lambda_2+2\lambda_3)^2+\lambda_3^2$. Обозначая $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2$, $\mu_2=\lambda_2+2\lambda_3$, $\mu_3=\lambda_3$, получим форму Q в каноническом виде $Q=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$. Таким образом, невырожденное аффинное преобразование $\lambda_1=\mu_1-\mu_2+2\mu_3$, $\lambda_2=\mu_2-2\mu_3$, $\lambda_3=\mu_3$ с матрицей $M=\begin{Vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$ приводит форму Q к каноническому виду $Q=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$.

Матрица невырожденного аффинного преобразования, приводящего исходное дифференциальное уравнение к каноническому виду, является сопряженной к матрице M, т. е. $M^*=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{Vmatrix}$, а само это преобразование имеет вид

$$\xi=x, \quad \eta=-x+y, \quad \zeta=2x-2y+z.$$

Применяя его и обозначая $u(x,y,z)=v(\xi,\eta,\zeta)$, находим:

$$u_{xx}=v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+4v_{\zeta\zeta}-2v_{\xi\eta}+4v_{\xi\zeta}-4v_{\eta\zeta},$$

$$u_{yy}=v_{\eta\eta}+4v_{\zeta\zeta}-4v_{\eta\zeta}, \quad u_{zz}=v_{\zeta\zeta},$$

$$u_{xy}=-v_{\eta\eta}-4v_{\zeta\zeta}+v_{\xi\eta}-2v_{\xi\zeta}+4v_{\eta\zeta}, \quad u_{yz}=-2v_{\zeta\zeta}+v_{\eta\zeta}.$$

Подставляя найденные выражения для производных в исходное уравнение, получим $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}=0$.

108. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+3v_{\xi}+\frac{3}{2}v_{\eta}-\frac{9}{2}v_{\zeta}=0$,

$$\xi=x, \; \eta=\frac{1}{2}(x+y+z), \; \zeta=-\frac{1}{2}(3x+y-z).$$

109. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+2v_{\eta}=0$,

$\xi=x+y, \quad \eta=-x+y, \quad \zeta=-x-y+z$.

110. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+v=0$,

$$\xi=y+z, \; \eta=-y+z, \; \zeta=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{\sqrt{6}}{2}z.$$

111. $v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} - 8v = 0,$

$$\xi = x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z, \quad \eta = -\frac{1}{2}(y + z), \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(y - z).$$

112. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + 2v_\xi - \sqrt{2}v_\eta + \sqrt{2}v_\zeta + 4v = 0,$

$$\xi = x, \quad \eta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(3x - y), \quad \zeta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x + y - 4z).$$

113. $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 3v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) - 2\zeta = 0,$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} x, \quad \eta = \frac{3}{\sqrt{2}} x + \sqrt{2} y, \quad \zeta = x + z.$$

114. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v = 0,$
$\xi = y + z, \quad \eta = -y - 2z, \quad \zeta = x - z.$

115. $v_{\xi\xi} + 2v = 0,$
$\xi = x, \quad \eta = -2x + y, \quad \zeta = -x + z.$

116. $v_{\xi\xi} - 2v_\xi = 0,$
$\xi = x, \quad \eta = -2x + y, \quad \zeta = -3x + z.$

117. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v = 0,$
$\xi = \frac{1}{\sqrt{5}}(3x - 2y - z), \quad \eta = -x + y + z.$

118. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} = 0,$
$\xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = x + y + z.$

119. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2} v_\xi - \frac{1}{2} v_\eta = 0,$
$\xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + 2y + z).$

120. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} - 2v_\eta = 0,$
$\xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = z.$

121. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 2v_\eta + 2v_\zeta + v = 0,$
$\xi = x + y, \quad \eta = -x + y, \quad \zeta = y + z;$
$v = e^{\eta-\zeta} w, \quad w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + 2w_\zeta = 0.$

122. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 6v_\xi - 8v_\eta - v = 0,$
$\xi = x + z, \quad \eta = -3x + 2y + z;$
$v = e^{-(3\xi+4\eta)} w, \quad w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + 6w = 0.$

123. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\xi + v_\eta + v_\zeta + v = 0,$
$\xi = x, \quad \eta = -x + 2y, \quad \zeta = z;$

$$v = e^{-\frac{(\xi-\eta+\zeta)}{2}} w, \quad w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + \frac{3}{4} w = 0.$$

124. $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\xi + 2v_\eta + v_\zeta + v = 0,$
$\xi = y, \quad \eta = x + y, \quad \zeta = z;$

$$v = e^{-\frac{(\xi-2\eta+\zeta)}{2}} w, \quad w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + w_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2} w = 0.$$

125. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+v_\xi+2v_\eta+v_\zeta+v=0,$
$\xi=x,\quad \eta=x+y,\quad \zeta=-y+z;$
$$v=e^{-\frac{1}{4}(\xi-4\eta+7\zeta)}w,\quad w_{\xi\xi}-w_{\eta\eta}+w_\zeta=0.$$
126. $v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+v_\xi+2v_\eta+v_\zeta+v=0,$
$\xi=x,\quad \eta=x+y,\quad \zeta=z;$
$$v=e^{-\frac{1}{2}(\xi-2\eta-\zeta)}w,\quad w_{\xi\xi}-w_{\eta\eta}-w_{\zeta\zeta}+2w=0.$$
127. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+v_\xi+v_\eta+v_\zeta+4v=0,$
$\xi=x-y,\quad \eta=y,\quad \zeta=z;$
$$v=e^{\frac{1}{2}(\xi-\eta+\zeta)}w,\quad -w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+w_{\zeta\zeta}+\frac{3}{4}w=0.$$
128. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+v_\xi+v_\eta+v_\zeta+v=0,$
$\xi=x+y,\quad \eta=-y,\quad \zeta=z;$
$$v=e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta+\zeta)}w,\quad w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+w_{\zeta\zeta}+\frac{1}{4}w=0.$$
129. $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+2v_\xi-2v_\eta+2v_\zeta=0,$
$\xi=x+y-z,\quad \eta=-y,\quad \zeta=z;$
$v=e^{-\xi+\eta-\zeta}w,\quad w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}+w_{\zeta\zeta}-3w=0.$

130. $v_{\xi\xi}+2v_\xi+2v_\eta-3v_\zeta+v=0,$
$\xi=x,\quad \eta=x+y,\quad \zeta=-x+z;$
$v=e^{-\xi+3\eta+2\zeta}w,\quad w_{\xi\xi}+2w_\eta-3w_\zeta=0.$

131. а) $K=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho(x)\,u_t^2(x,t)\,dx;$

б) $K=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho(x)\,u_t^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i u_t^2(x_i,t).$

132. а) $U=T\displaystyle\int_0^l\left(\sqrt{1+u_x^2(x,t)}-1\right)dx;$ б) $U=\dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^l u_x^2(x,t)\,dx;$

в) $U=\dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^l u_x^2(x,t)\,dx-\nu_1(t)\,u(0,t)-\nu_2(t)\,u(l,t);$

г) $U=\dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^l u_x^2(x,t)\,dx+\frac{\sigma_1}{2}u^2(0,t)+\frac{\sigma_2}{2}u^2(l,t);$

T — натяжение, σ_1 и σ_2 — коэффициенты жесткости упругого крепления.

133. а) $K=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \rho(x,y)\,u_t^2(x,y,t)\,dx\,dy;$

б) $K=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_D \rho(x,y)\,u_t^2(x,y,t)\,dx\,dy+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i u_t^2(x_i,y_i,t).$

134. а) $U = T\int\limits_D \left[\sqrt{1+u_x^2(x,y,t)+u_y^2(x,y,t)}-1\right]dx\,dy;$

б) $U = \frac{T}{2}\int\limits_D \left[u_x^2(x,y,t)+u_y^2(x,y,t)\right]dx\,dy;$

в) $$U = T\int\limits_D \left[\sqrt{1+u_x^2(x,y,t)+u_y^2(x,y,t)}-1\right]dx\,dy + \int\limits_L \sigma(s)\,u^2(s,t)\,ds;$$

г) $$U=\frac{T}{2}\int\limits_D \left[u_x^2(x,y,t)+u_y^2(x,y,t)\right]dx\,dy + \int\limits_D F(x,y,t)\,u(x,y,t)\,dx\,dy;$$

T — патяжение мембраны, L — граница области D, s — точка кривой L, ds — элемент длины L, $\sigma(s)$ — коэффициент жесткости упругого крепления;

135. а) $\rho u_{tt} = Tu_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l;$

б) $\rho u_{tt} = Tu_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\quad t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l;$

в) $\rho u_{tt} = Tu_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$Tu_x(0,t)=-F(t),\quad Tu_x(l,t)=\Phi(t),\quad t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l;$

г) $\rho u_{tt} = Tu_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$Tu_x(0,t)-\sigma_1 u(0,t)=0,\quad Tu_x(l,t)+\sigma_2 u(l,t)=0,\ t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l,$

где σ_1 и σ_2 — коэффициенты жесткости упругого крепления концов струны;

д) $\rho u_{tt} = Tu_{xx}+F(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$u(0,t)=0,\quad Tu_x(l,t)+\sigma u(l,t)=0,\quad t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l,$

σ — коэффициент жесткости упругого крепления;

е) $\rho u_{tt} = Tu_{xx}+F(t)\delta(x-x_0),\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l.$

Здесь и ниже $\delta(x-\xi)$ — δ-функция Дирака (см. гл. V, § 3);

ж) $\left[\rho(x)+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\delta(x-x_i)\right]u_{tt}=Tu_{xx},\ 0<x<l,\quad t>0,$
$Tu_x(0,t)-\sigma_1 u(0,t)=0,\quad Tu_x(l,t)+\sigma_2 u(l,t)=0,\quad t>0,$
$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<l,$

σ_1 и σ_2 — коэффициенты жесткости упругого крепления концов струны.

136. а) $u_{tt}=a^2\Delta u,\quad (x,y)\in D,\quad t>0,\quad a^2=T/\rho,$
$u(x,y,t)=0,\quad (x,y)\in L,\quad t>0,$
$u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y),\quad (x,y)\in D;$

б) $u_{tt}=a^2\Delta u, \quad (x, y)\in D, \quad t>0, \quad a^2=T/\rho,$

$\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial\nu}=0, \quad (x, y)\in L, \quad t>0,$ ν — внешняя нормаль к L,

$u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0)=\psi(x, y), \quad (x, y)\in D;$

в) $u_{tt}=a^2\Delta u, \quad (x, y)\in D, \quad t>0, \quad a^2=T/\rho,$

$\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial\nu}=\dfrac{1}{T}F(x, y, t), \quad (x, y)\in L, \quad t>0,$

ν — внешняя нормаль к L,

$u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0)=\psi(x, y), \quad (x, y)\in D;$

г) $u_{tt}=a^2\Delta u, \quad (x, y)\in D, \quad t>0, \quad a^2=T/\rho,$

$T\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial\nu}+\sigma u(x, y, t)=0, \quad (x, y)\in L, \quad t>0,$

$u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \; u_t(x, y, 0)=\psi(x, y), \quad (x, y)\in D,$

ν — внешняя нормаль к L, σ — коэффициент жесткости упругого крепления края мембраны;

д) $u_{tt}=a^2\Delta u+\dfrac{1}{\rho}F(x, y, t), \quad (x, y)\in D, \quad t>0, \quad a^2=T/\rho,$

$u(x, y, t)=0, \quad (x, y)\in L, \quad t>0,$

$u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0)=\psi(x, y), \; (x, y)\in D;$

е) $u_{tt}=a^2\Delta u-\alpha u, \quad (x, y)\in D, \quad t>0, \quad a^2=T/\rho, \quad \alpha=\beta/\rho,$

$u(x, y, t)=0, \quad (x, y)\in L, \quad t>0,$

$u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \; u_t(x, y, 0)=\psi(x, y), \quad (x, y)\in D,$

где β — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления среды: $-\beta u$;

ж) $[\rho+m\delta(x-x_0, y-y_0)]u_{tt}=T\Delta u, \quad (x, y)\in D, \quad t>0,$

$u(x, y, t)=0, \quad (x, y)\in L,$

$u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0)=\psi(x, y), \quad (x, y)\in D.$

137. а) $u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \quad a^2=E/\rho,$

$u_x(0, t)=u_x(l, t)=0, \quad t>0,$

$u(x, 0)=\varphi(x), \; u_t(x, 0)=\psi(x), \quad 0<x<l;$

б) $u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \quad a^2=E/\rho,$

$u_x(0, t)=-\dfrac{1}{SE}F(t), \quad u_x(l, t)=\dfrac{1}{SE}\Phi(t), \quad t>0,$

$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad 0<x<l;$

в) $u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \quad a^2=E/\rho,$

$SEu_x(0, t)-\sigma_1u(0, t)=0, \quad SEu_x(l, t)+\sigma_2u(l, t)=0, \quad t>0,$

$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad 0<x<l,$

где σ_1 и σ_2 — коэффициенты жесткости упругого крепления концов;

г) $u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \quad a^2=E/\rho,$

$\alpha u_t(0, t)+SEu_x(0, t)=0, \quad u(l, t)=0, \quad t>0,$

$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad 0<x<l,$

где α — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления $-\alpha u_t(0, t)$, действующей на конец $x=0$;

д) $u_{tt}=a^2u_{xx}+\dfrac{1}{\rho}F(x, t), \quad 0<x<l, \quad t>0, \quad a^2=E/\rho,$

$u(0, t)=u(l, t)=0, \quad t>0,$

$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad 0<x<l;$

е) $u_{tt}=a^2u_{xx}-\alpha u_t, \quad 0<x<l, \quad t>0, \quad a^2=E/\rho,$

$u(0, t)=\mu(t), \quad u(l, t)=\nu(t), \quad t>0,$

$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad 0<x<l,$

где α — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления отклонению $-\alpha u_t$, действующей на единицу массы;

ж) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad a^2 = E/\rho,$

$u(0, t) = 0, \quad -SEu_x(l, t) = mu_{tt}(l, t), \quad t > 0,$

$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < x < l.$

138. а) $\left[r + \frac{(R-r)}{l}x\right]^2 u_{tt} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[r + \frac{(R-r)}{l}x\right]^2 u_x\right\},$

$0 < x < l, \quad t > 0,$

$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0,$

$u(x, 0) = \varphi(x), \ u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l;$

б) $\rho S u_{tt} = E\frac{\partial}{\partial x}(Su_x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$S(0)Eu_x(0, t) - \sigma u(0, t) = 0, \quad Eu_x(l, t) = F(t), \quad t > 0,$

$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l,$

σ — коэффициент жесткости упругого крепления.

139. Обозначив $u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & -\infty < x < 0, \\ u_2(x, t), & 0 < x < \infty, \end{cases}$ получим задачи:

а) $\rho_1 u_{1tt} = E_1 u_{1xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad t > 0,$

$\rho_2 u_{2tt} = E_2 u_{2xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$

$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad E_1 u_{1x}(0, t) = E_2 u_{2x}(0, t), \quad t > 0,$

$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty;$

б) $\rho_1 u_{1tt} = E_1 u_{1xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad t > 0,$

$\rho_2 u_{2tt} = E_2 u_{2xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$

$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad t > 0,$

$SE_2 u_{2x}(0+0, \ t) - SE_1 u_{1x}(0-0, \ t) = mu_{1tt}(0, \ t) = mu_{2tt}(0, \ t),$

$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty.$

140. а) $v_x + Li_t = 0, \quad i_x + Cv_t = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$v(0, t) = E(t), \quad v(l, t) = 0, \quad t > 0,$

$v(x, 0) = \psi(x), \quad i(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l;$

или

$v_{xx} = CLv_{tt}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$v(0, t) = E(t), \quad v(l, t) = 0, \quad t > 0,$

$v(x, 0) = \psi(x), \quad Cv_t(x, 0) = -\varphi'(x), \quad 0 < x < l;$

$i_{xx} = CLi_{tt}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$i_x(0, t) = -CE'(t), \quad i_x(l, t) = 0, \ t > 0,$

$i(x, 0) = \varphi(x), \quad Li_t(x, 0) = -\psi'(x), \quad 0 < x < l;$

б) $v_x + Li_t = 0, \quad i_x + Cv_t = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$v(0, \ t) + R_0 i(0, \ t) = 0, \quad C_0 v_t(l, \ t) - i(l, \ t) = 0, \quad t > 0,$

$i(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x);$

или

$v_{xx} = CLv_{tt}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$Lv_t(0, \ t) - R_0 v_x(0, \ t) = 0, \quad C_0 L v_{tt}(l, \ t) + v_x(l, \ t) = 0, \quad t > 0,$

$v(x, 0) = \psi(x), \quad v_t(x, 0) = -\frac{1}{C}\varphi'(x), \quad 0 < x < l;$

$$i_{xx}=CLi_{tt},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$i_x(0,\ t)-CR_0i_t(0,\ t)=0,\quad C_0i_x(l,\ t)+Ci(l,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$i(x,\ 0)=\varphi(x),\quad i_t(x,0)=-\frac{1}{L}\psi'(x),\quad 0<x<l.$$

в) $v_x+Li_t=0,\quad i_x+Cv_t=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$$v(0,\ t)+L_0i_t(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)-L_li_t(l,\ t)=E(t),\quad t>0,$$
$$i(x,\ 0)=\varphi(x),\quad v(x,\ 0)=\psi(x),\quad 0<x<l;$$

или

$$v_{xx}=CLv_{tt},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$L_0v_x(0,\ t)-Lv(0,\ t)=0,\quad L_lv_x(l,\ t)+Lv(l,\ t)=LE(t),\quad t>0,$$
$$v(x,\ 0)=\psi(x),\quad v_t(x,0)=-\frac{1}{C}\varphi'(x),\quad 0<x<l:$$
$$i_{xx}=CLi_{tt},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$L_0Ci_{tt}(0,t)-i_x(0,t)=0,\quad CL_li_{tt}(l,t)+i_x(l,t)=-\frac{1}{C}E'(t),\quad t>0,$$
$$i(x,0)=\varphi(x),\quad i_t(x,0)=-\frac{1}{L}\psi'(t),\quad 0<x<l.$$

г) $v_x+Li_t=0,\quad i_x+Cv_t=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$$C_0v_t(0,\ t)+i(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)-R_0i(l,\ t)=E(t),\quad t>0,$$
$$v(x,\ 0)=\psi(x),\quad i(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<l:$$

или

$$v_{xx}=CLv_{tt},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$LC_0v_{tt}(0,\ t)-v_x(0,\ t)=0,\quad Lv_t(l,\ t)+R_0v_x(l,\ t)=E'(t),\ t>0,$$
$$v(x,0)=\psi(x),\quad v_t(x,0)=-\frac{1}{C}\varphi'(x),\quad 0<x<l;$$
$$i_{xx}=CLi_{tt},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$C_0i_x(0,\ t)-Ci(0,\ t)=0,\quad i_x(l,\ t)+CR_0i_t(l,\ t)=E'(t),\quad t>0.$$
$$i(x,0)=\varphi(x),\quad i_t(x,0)=-\frac{1}{L}\psi'(x),\quad 0<x<l;$$

д) $v_x+Li_t=0,\quad i_x+Cv_t=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$$L_0i_t(0,\ t)+v(0,\ t)=E(t),\quad L_li_t(l,\ t)-v(l,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$i(x,\ 0)=\varphi(x),\quad v(x,\ 0)=\psi(x),\quad 0<x<l;$$

или

$$v_{xx}=CLv_{tt},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$L_0v_x(0,\ t)-Lv(0,\ t)=-LE(t),\quad L_lv_x(l,\ t)+Lv(l,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$v(x,0)=\psi(x),\quad v_t(x,0)=-\frac{1}{C}\varphi'(x),\quad 0<x<l;$$
$$i_{xx}=CLi_{tt},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$L_0Ci_{tt}(0,\ t)-i_x(0,\ t)=CE'(t),\quad CL_li_{tt}(l,\ t)+i_x(l,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$i(x,0)=\varphi(x),\quad i_t(x,0)=-\frac{1}{L}\psi'(x),\quad 0<x<l.$$

141. а) $v_x+Li_t+Ri=0,\quad i_x+Cv_t+Gv=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$$v(0,\ t)+R_0i(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)-R_li(l,\ t)=E(t),\quad t>0,$$
$$i(x,\ 0)=\varphi(x),\quad v(x,\ 0)=\psi(x),\quad 0<x<l;$$

или

$$v_{xx}=CLv_{tt}+(CR+GL)v_t+GRv,\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$R_0v_x(0,\ t)-Lv_t(0,\ t)-Rv(0,\ t)=0,$$
$$R_lv_x(l,\ t)+Lv_t(l,\ t)+Rv(l,\ t)=LE'(t)+RE(t),\quad t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x),\quad v_t(x,0)=-\frac{1}{C}\varphi'(x)-\frac{G}{C}\psi(x),\quad 0<x<l;$$

$$i_{xx}=CLi_{tt}+(CR+GL)i_t+GRi,\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$i_x(0,\ t)-CR_0i_t(0,\ t)-GR_0i(0,\ t)=0,$$
$$i_x(l,\ t)+CR_li_t(l,\ t)+GR_li(l,\ t)=-CE'(t)-CE(t),\quad t>0,$$
$$i(x,0)=\varphi(x),\quad i_t(x,0)=-\frac{1}{L}\psi'(x)-\frac{R}{L}\varphi(x),\quad 0<x<l;$$

б) $v_x+Li_t+Ri=0,\quad i_x+Cv_t+Gv=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$$v(0,\ t)+L_0i_t(0,\ t)+R_0i(0,\ t)=0,\quad v(l,\ t)-L_li_t(l,\ t)=E(t),\quad t>0,$$
$$i(x,\ 0)=\varphi(x),\quad v(x,\ 0)=\psi(x),\quad 0<x<l.$$

Для определения тока $i(x,\ t)$ можно поставить задачу:
$$i_{xx}=CLi_{tt}+(CR+GL)i_t+GRi,\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$CL_0i_{tt}(0,\ t)+(CR_0+GL_0)i_t(0,\ t)-i_x(0,\ t)+GR_0i(0,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$CL_li_{tt}(l,\ t)+GL_li_t(l,\ t)+i_x(l,\ t)+CE'(t)+GE(t)=0,\quad t>0,$$
$$i(x,0)=\varphi(x),\quad i_t(x,0)=-\frac{1}{L}[\varphi'(x)+R\varphi(x)],\quad 0<x<l.$$

142. а) $S\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad a^2=\dfrac{k}{c\rho},$
$$u_x(0,\ t)=u_x(l,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<l;$$

б) $S\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad a^2=\dfrac{k}{c\rho},$
$$u_x(0,t)=-\frac{1}{kS(0)}q(t),\quad u_x(l,t)=\frac{1}{kS(l)}Q(t),\quad t>0,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<l;$$

в) $S\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad a^2=\dfrac{k}{c\rho},$
$$u_x(0,\ t)-h_1[u(0,\ t)-\tau(t)]=0,$$
$$u_x(l,\ t)+h_2[u(l,\ t)-\theta(t)]=0,\quad t>0,$$
$$h_i=\varkappa_i/k,\quad i=1,\ 2,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<l,$$

где $\varkappa_i$ — коэффициенты внешней теплопроводности при теплообмене на концах;

г) $S\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left[S\dfrac{\partial u}{\partial x}\right],\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad a^2=\dfrac{k}{c\rho},$
$$u(0,\ t)=\mu(t),\quad kS(l)u_x(l,\ t)+cmu_t(l,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<l;$$

д) $S\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad a^2=\dfrac{k}{c\rho},$
$$kS(0)u_x(0,\ t)-cmu_t(0,\ t)=0,\quad t>0,$$
$$kS(l)u_x(l,\ t)+cmu_t(l,\ t)=q(t),\quad t>0,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<l.$$

е) $S\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad a^2=\dfrac{k}{c\rho},$
$$kS(0)u_x(0,\ t)-Qu_t(0,\ t)=0,\quad kS(l)u_x(l,\ t)=q(t),\quad t>0,$$
$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<l;$$

ж) $S\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S\dfrac{\partial u}{\partial x}\right),\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad a^2=\dfrac{k}{c\rho},$

$$kS(0)u_x(0, t) - cmu_t(0, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$kS(l)u_x(l, t) + Qu_t(l, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l.$$

143. а) $u_t = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad a^2 = \alpha D/c,$
$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$
α — коэффициент пористости сечения, равный отношению площади пор в данном сечении к площади этого сечения;

б) $u_t = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad a^2 = \alpha D/c,$
$$u_x(0, t) = -\frac{1}{\alpha SD}q(t), \quad u_x(l, t) + \frac{d}{D}u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$
где α — коэффициент пористости сечения, равный отношению площади пор в данном сечении к площади этого сечения, а d — коэффициент (внешней) диффузии через пористую перегородку.

144. а) $u_t = \frac{k}{c\rho}u_{xx} - \frac{\varkappa\sigma}{c\rho S}u + \frac{\varkappa\sigma}{c\rho S}v(t) + \frac{\beta I^2R}{c\rho S}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$$kSu_x(0, t) = Cu_t(0, t), \quad -kSu_x(l, t) = Qu_t(l, t), \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$
β — коэффициент пропорциональности в формуле $q = \beta I^2R\Delta x$, выражающей количество тепла, выделяемое током в единицу времени в элементе провода $(x, x + \Delta x)$;

б) $u_t = \frac{k}{c\rho}u_{xx} - \frac{\varkappa\sigma}{c\rho S}u + \frac{\varkappa\sigma}{c\rho S}v(t) + \frac{1}{c\rho}F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$$kSu_x(0, t) = Cu_t(0, t), \quad -kSu_x(l, t) = Qu_t(l, t), \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l;$$

в) $u_t = \frac{k}{c\rho}u_{xx} - \frac{\alpha}{c\rho S}u_t - \frac{\varkappa\sigma}{c\rho S}u + \frac{\varkappa\sigma}{c\rho S}v(t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$$kSu_x(0, t) = Cu_t(0, t), \quad -kSu_x(l, t) = Qu_t(l, t), \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$
α — коэффициент пропорциональности в формуле $q = \alpha u_tS\Delta x$, выражающей количество тепла, поглощенного объемом $S\Delta x$ элемента стержня $(x, x + \Delta x)$.

145. а) $u_t = Du_{xx} - \gamma u^{1/2} - \frac{\sigma d}{S}[u - v(t)], \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$$u_x(0, t) - \frac{d}{D}[u(0, t) - v(t)] = 0,$$
$$u_x(l, t) + \frac{d}{D}[u(l, t) - v(t)] = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$
γ — коэффициент пропорциональности при распаде, d — коэффициент внешней диффузии (через пористую перегородку);

б) $u_t = Du_{xx} + \gamma uu_t - \frac{\sigma d}{S}[u - v(t)], \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$$u_x(0, t) - \frac{d}{D}[u(0, t) - v(t)] = 0,$$
$$u_x(l, t) + \frac{d}{D}[u(l, t) - v(t)] = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$
γ — коэффициент пропорциональности при размножении (коэффициент

размножения), d — коэффициент внешней диффузии (через пористую перегородку).

146. а) $u_t = a^2\Delta_r u - \beta u,\quad 0 \leqslant r < R,\quad t > 0,\qquad a^2 = \frac{k}{c\rho},\quad \beta = \frac{\alpha}{c\rho},$

$$\frac{\partial u(R, t)}{\partial r} = 0,\quad t > 0,$$
$$u(r, 0) = T,\quad 0 \leqslant r < R,$$

где $\Delta_r u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$ — радиальная часть оператора Лапласа в сферической системе координат, α — коэффициент поглощения тепла;

б) $u_t = a^2\Delta_r u + \frac{Q}{c\rho},\quad 0 \leqslant r < R,\quad a^2 = \frac{k}{c\rho},$

$$k\frac{\partial u(R, t)}{\partial r} + \alpha u(R, t) = 0,\quad t > 0,$$
$$u(r, 0) = T,\quad 0 \leqslant r < R,$$

где $\Delta_r u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$ — радиальная часть оператора Лапласа в сферической системе координат, α — коэффициент внешней теплопроводности (теплообмена).

147. а) $k\Delta u - \gamma u + Q = 0,\quad 0 \leqslant r < r_0,\quad 0 < z < h,\quad t > 0,$

$$u(r, 0) = u(r, h) = 0,\quad 0 \leqslant r < r_0,\qquad \frac{\partial u(r_0, z)}{\partial r} = 0,\quad 0 < z < h,$$

γ — коэффициент распада газа;

б) $k\Delta u - \gamma u + Q = 0,\quad 0 \leqslant r < r_0,\quad 0 < z < h,\quad t > 0,$

$$D\frac{\partial u(r, 0)}{\partial z} - du(r, 0) = 0,\quad D\frac{\partial u(r, h)}{\partial z} + du(r, h) = 0,$$
$$0 \leqslant r < r_0,\quad u(r_0, z) = 0,\quad 0 < z < h,$$

где d — коэффициент внешней диффузии (обмена), γ — коэффициент распада газа.

150. $\psi(x, y) = \mathrm{const}$ есть семейство линий тока.

151. б) $f(x, y)$ пропорциональна силе, действующей в точках $(x, y) \in S$ в направлении, ортогональном плоскости покоя мембраны.

Глава II

152. Как известно из курса анализа, при переходе от декартовых ортогональных координат $x_1, \ldots, x_n$ к произвольным криволинейным координатам $y_1, \ldots, y_n$ выражение

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

преобразуется по формуле

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk} \frac{\partial u}{\partial y_k}\right),$$

где $g = \det \|g_{jk}\|$, $g^{jk} = \frac{G^{jk}}{g}$, $G^{jk} = G^{kj}$ — алгебраическое дополнение элемента

g_{ik} (или g_{ki}) в $\det\|g_{jk}\|$, а

$$g_{jk}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial x_i}{\partial y_k},$$

причем, когда координаты $y_1, \ldots, y_n$ ортогональны, $g_{jk} = 0$, $j \neq k$.

$$\text{а) } \Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{g}\, g^{11}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{g}\, g^{12}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{g}\, g^{21}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{g}\, g^{22}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

где

$$g = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2, \quad g^{11} = \frac{1}{g}\left(x_\eta^2 + y_\eta^2\right),$$

$$g^{12} = g^{21} = -\frac{1}{g}\left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right), \quad g^{22} = \frac{1}{g}\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right);$$

$$\text{б) } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

$$\text{в) } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

$$\text{г) } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v\frac{\partial u}{\partial v}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 v}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

$$\text{д) } \Delta u = \frac{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}{\xi\eta(\xi^2-\eta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\sqrt{\frac{\xi^2-1}{1-\eta^2}}\,\xi\eta\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\sqrt{\frac{1-\eta^2}{\xi^2-1}}\,\xi\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi\eta}\,\frac{1}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right]\right\}.$$

153. а) Гармоническая; б) гармоническая; в) гармоническая; г) гармоническая; д) нет; е) гармоническая; ж) нет; з) гармоническая; и) гармоническая. Непосредственные вычисления громоздкие. Следует учесть, что по гармонической функции $u = u(x_1, x_2)$, приняв ее за $\operatorname{Re} f(z)$, $z = x_1 + ix_2$, можно построить функцию $v(x_1, x_2) = \operatorname{Im} f(z)$ некоторой аналитической функции $f(z) = u + iv$. Условия Коши — Римана для нее имеют вид $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}$. Очевидно, функция $w(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1}$ аналитична и в силу условий Коши — Римана принимает вид $w(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2}$. Аналитична также и функция

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x_1} - i\frac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2},$$

действительная часть которой $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}$ гармонична; к) гармоническая; л) нет.

154. а) $k=-3$; б) $k=-2$; в) $k=\pm 2i$, при этом $\operatorname{ch} kx_2=\cos 2x_2$; г) $k=\pm 3$; д) $k=0$, $k=n-2$ при $n>2$.

155. Так как $\Delta|x|^{2-n}=0$ при $x\neq 0$, то

$$\Delta v=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}|\xi|^{n-2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_i}+|\xi|^{n-2}\Delta u(\xi),$$

где $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\xi=\dfrac{x}{|x|^2}$, $|x|=\dfrac{1}{|\xi|}$, $\xi_i=\dfrac{x_i}{|x|^2}$. Учитывая гармоничность функции $u(\xi)$ и равенства

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_i}\right)^2=\left(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_l}\right)^2+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}\left(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_i}\right)^2=(|\xi|^2-2\xi_l)^2+4\xi_l^2\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}\xi_i^2=$$

$$=|\xi|^4-4|\xi|^2\xi_l^2+4\xi_l^2\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=|\xi|^4,$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ l\neq j}}^{n}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}=\frac{\partial\xi_l}{\partial x_l}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_l}+\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_j}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l,j}}^{n}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}=$$

$$=-2\left(|\xi|^2-2\xi_l^2\right)\xi_j\xi_l-2\left(|\xi|^2-2\xi_j^2\right)\xi_j\xi_l+$$

$$+4\xi_l\xi_j\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l,j}}^{n}\xi_i^2=-4\xi_j\xi_l|\xi|^2+4\xi_j\xi_l\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=0,$$

получаем

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}|\xi|^{n-2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial x_i}=2\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}|\xi|^{n-2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_l}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_i}=$$

$$=2|\xi|^4\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}|\xi|^{n-2}\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j}=2(n-2)|\xi|^n\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial u(\xi)}{\partial\xi_j},$$

$$\Delta u(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial x_i^2}=\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_l}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\xi_l}{\partial x_i}=$$

$$=|\xi|^4\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\xi_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{x_j}{|x|^2}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\xi_j}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\frac{x_j}{|x|^2}\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{x_j}{|x|^2}\right)\right]=$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \left[-6|\xi|^2\xi_j + 8\xi_j^3 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \left(8\xi_j\xi_i^2 - 2|\xi|^2\xi_j\right) \right] =$$

$$= 2(2-n)|\xi|^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial u}{\partial \xi_j}.$$

Следовательно, $\Delta v(x) = 0$.

156. Могут.

157. $y = x$.

158. Функция $u = \cos x \operatorname{sh} y$ стремится к $-\infty$ при удалении точки (x, y) в бесконечность вдоль той части ее линии уровня $\sin x \operatorname{ch} y = -1$, касательная к которой в точке $(-\pi/2, 0)$ имеет угол наклона к оси x, равный $3\pi/4$. На этой части линии уровня $\sin x \operatorname{ch} y = -1$ координата y убывает от $+\infty$ до $-\infty$ при убывании координаты x от $-\pi$ до 0.

159. $u_{\max} = 1/2$ в точках $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$; $u_{\min} = -1/2$ в точках $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

160. $u_{\max} = 4$ в точках $(-2, 0)$, $(2, 0)$; $u_{\min} = -9$ в точках $(0, -3)$, $(0, 3)$.

161. Пусть в точке $x \in D$ функция $w(x)$ имеет относительный отрицательный минимум. Тогда в этой точке $w_{x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum\limits_{i,k=1}^{n} w_{x_i x_k} \times \lambda_i\lambda_k \geqslant 0$. Так как квадратичную форму $\sum\limits_{i,k=1}^{n} w_{x_i x_k}\lambda_i\lambda_k$ в точке x можно представить в виде $\sum\limits_{i,k=1}^{n} w_{x_i x_k}\lambda_i\lambda_k = \sum\limits_{i,s=1}^{n} (g_{is}\lambda_s)^2$, то $w_{x_i x_k} = \sum\limits_{j=1}^{n} g_{ji}g_{jk}$, и, стало быть, $\Delta w = \sum\limits_{i=1}^{n} w_{x_i x_i} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ji}^2 \geqslant 0$, что противоречит условию $\Delta w < 0$. Аналогично доказывается и вторая часть утверждения.

162. В задаче 159: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 1$ в точках максимума $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$; $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -1$ в точках минимума $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. В задаче 160: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 4$ в точках максимума $(2, 0)$, $(-2, 0)$; $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -6$ в точках минимума $(0, 3)$, $(0, -3)$.

163. На внутренней нормали к S в точке y_0 минимума гармонической в области D функции $u(x)$ выберем точку $x^* \in D$ так, чтобы замкнутый шар $d_1: |x - x^*| \leqslant |x^* - y_0|$ имел единственную общую точку $y_0 \in S$. Пусть замкнутый шар d_2: $|x - y_0| \leqslant \rho < |x^* - y_0|$ не содержит точку x^*. Пересечение замкнутых шаров d_1 и d_2 обозначим через d и введем в рассмотрение функцию

$$v(x) = e^{-\gamma|x^*-y_0|^2} - e^{-\gamma|x-x^*|^2},$$

где γ — пока произвольная положительная постоянная. В силу принципа экстремума $u(x) - u(y_0) > 0$ всюду в D. Выберем постоянную $\lambda > 0$ так, чтобы на границе области d имело место неравенство $-\lambda v(x) \leqslant$

$\leqslant u(x) - u(y_0)$. Ввиду того, что

$$\Delta\left[u(x) - u(y_0) + \lambda v(x)\right] = 2\lambda\gamma\{n - 2\gamma\,|x - x^*|^2\}\,e^{-\gamma|x-x^*|^2},$$

за счет подбора γ всегда можно считать, что $\Delta[u(x) - u(y_0) + \lambda v(x)] < 0$. Поэтому (см. задачу 161) неравенство $u(x) - u(y_0) \geqslant -\lambda v(x)$ справедливо в замкнутой области $\bar{d}$. Отсюда следует, что для производной $u(x)$ по внешней нормали ν к S в точке $y_0 \in S$ имеет место неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \leqslant -2\lambda\gamma\,|x^* - y_0|\,e^{-\gamma|x^*-y_0|^2} < 0.$$

Аналогично доказывается вторая часть утверждения.

164. $\varphi(z)$ аналитична, поскольку ее действительная $U(x, y) = u_x$ и мнимая $V(x, y) = -u_y$ части непрерывны вместе с их первыми производными и удовлетворяют условиям Коши — Римана

$$U_x - V_y = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad U_y + V_x = u_{xy} - u_{xy} = 0.$$

165. Действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ связаны между собой уравнениями Коши — Римана $u_x - v_y = 0$, $u_y + v_x = 0$. Поэтому выражение $dv = v_x\,dx + v_y\,dy = -u_y\,dx + u_x\,dy$ является полным дифференциалом, так как $(u_x)_x + (y_y)_y = \Delta u = 0$. Следовательно, криволинейный интеграл $\int dv = \int -u_y dx + u_x dy$ от произвольной фиксированной точки (x_0, y_0) до переменной точки (x, y) в односвязной области D не зависит от пути. В качестве пути интегрирования можно брать, например, прямолинейные отрезки, соединяющие точки (x_0, y_0), (x, y_0) и (x, y_0), (x, y) и лежащие в области D, или ступенчатую ломаную с конечным числом звеньев, соединяющую точки (x_0, y_0), (x, y). В рассматриваемом случае

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left[\int_{x_0}^{x} 6xy_0\,dx + \int_{y_0}^{y} 3(x^2 - y^2)\,dy\right] + iC =$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + i\left(-3x_0^2y_0 + y_0^3 + C\right),$$

где $-3x_0^2y_0 + y_0^3 + C$ — произвольная действительная постоянная.

166. $f(z) = e^x \sin y - ie^x \cos y + i\left(e^{x_0}\cos y_0 + C\right)$.

167. $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y + i(-\cos x_0 \operatorname{sh} y_0 + C)$.

168. а) $v(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2) + C$;

б) $v(x, y) = e^y \cos x + C$;

в) $v(x, y) = -\operatorname{ch} x \cos y + C$;

г) $v(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y + C$;

д) $v(x, y) = \operatorname{ch} x \sin y + C$;

е) $v(x, y) = -\operatorname{sh} x \cos y + C$.

169. а) $u(x, y) = x^3y - xy^3 + Cy + C_0$;

б) $u(x, y) = e^x \sin y + Cx + C_0$;

в) $u(x, y) = e^x \sin y + Cy + C_0$;

г) $u(x, y) = x^2y - \frac{y^3}{3} + xy + \frac{y^2 - x^2}{2} + Cx + C_0$;

д) $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - xy^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{6} + Cy + C_0$.

170. а) $u = ye^x \cos z - y^2 + x^2 + g(x, z)$,
где $g(x, z)$ — произвольная гармоническая функция;

б) $u = \operatorname{ch} x \cos z + yx^2 - y^2 + g(x, y)$,
где $g(x, y)$ — произвольная гармоническая функция;

в) $u = xy^2z - \frac{xz^3}{3} + 3xz^2 - x^3 + xz + g(x, y)$,
где $g(x, y)$ — произвольная гармоническая функция;

г) $u = xze^x \cos y - yze^x \sin y + z^2 - x^2 + g(x, y)$,
где $g(x, y)$ — произвольная гармоническая функция.

171. а) $v(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + C_0x + C_1$;

б) $v(x, y) = -e^y \sin x + C_0y + C_1$;

в) $v(x, y) = -\operatorname{ch} x \sin y + C_0y + C_1$;

г) $v(x, y) = -\operatorname{ch} x \cos y + C_0x + C_1$;

д) $v(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{6} + C_0x + C_1$.

C_0, C_1 — произвольные действительные постоянные.

172. Гармоническая в области D функция $u(x, y)$ аналитична в этой области, т. е. в некоторой окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in D$ она разлагается в ряд по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$. Поэтому можно считать, что функция $u(x, y)$ аналитически продолжается для комплексных значений x и y. Для действительных x, y имеем

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad \bar{f}(\bar{z}) = u(x, y) - iv(x, y),$$

т. е.

$$f(z) = 2u(x, y) - \bar{f}(\bar{z}).$$

Если в этом равенстве считать x и y комплексными, величины $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ уже не будут сопряженными и, так как $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, то

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) - \bar{f}(\bar{z}),$$

откуда при $\bar{z} = \bar{z}_0$ получаем формулу Гурса

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - u(x_0, y_0) + iC,$$

где $C = \operatorname{Im} f(z_0)$ — произвольная действительная постоянная. Требуемое равенство получается, когда $\bar{z}_0 = 0$.

173. (165): $f(z) = z^3 + iC$; (166): $f(z) = -ie^z + i(1 + C)$; (167): $f(z) = \sin z + iC$.

174. $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$.

177. $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, где функция $f(z)$ — аналитическая в круге $|z| < R$. Следовательно, в этом круге

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

где $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{k!} \dfrac{d^k f(0)}{dz^k} = a_k - ib_k$.

178. $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, где функция $f(z)$ — аналитическая вне круга $|z| \leqslant R$. Поэтому вне указанного круга

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + ib_k) \frac{\cos k\varphi - i \sin k\varphi}{r^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

179. Так как

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!} \Delta^{k+1}\tau + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^{k+1}\nu \right],$$

$$u_{x_n x_n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k-2}}{(2k-2)!} \Delta^k \tau + \frac{x_n^{2k-1}}{(2k-1)!} \Delta^k \nu \right] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x_n^{2k}}{(2k)!} \Delta^{k+1}\tau + \frac{x_n^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^{k+1}\nu \right],$$

то $\Delta u = 0$.

180. В результате замены $y_k = x_k/\sqrt{|a_k|}$, $k = 1, \ldots, n$, получаем $\sum_{k=1}^{n} a_k u_{x_k x_k} = \pm \sum_{k=1}^{n} v_{y_k y_k} = 0$, откуда следует, что $u(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1/\sqrt{|a_1|}, \ldots, x_n/\sqrt{|a_n|})$.

181. Справедливость утверждения следует из того, что в результате замены искомой функции $u = e^{\lambda x + \mu y} v(x, y)$ рассматриваемое уравнение переходит в уравнение $\Delta v = 0$.

182. При $x \neq y$ имеем

$$E_{x_i x_i} = -|x - y|^{-n} - n|x - y|^{-n-2} (x_i - y_i)^2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\Delta E = -n|x - y|^{-n} - n|x - y|^{-n-2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 =$$

$$= -n|x - y|^{-n} - n|x - y|^{-n} = 0.$$

183. Поскольку $E(x, y)$ является функцией только расстояния $|x - y| = r$, то, пользуясь записью уравнения Лапласа в сферических координатах с началом в точке $x = y$, находим, что при $r \neq 0$ $E(r)$ является

решением обыкновенного дифференциального уравнения $\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{dE}{dr}\right)=0$, т. е. $E=C/r^{n-2}+C_1$ при $n>2$ и $E=C\ln r+C_1$ при $n=2$, где C и C_1 — произвольные постоянные.

184. $\mu(M_0)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|M-M_0|}$. По определению диполя для его потенциала в точке $M\neq M'$, M'', M_0 имеем

$$\lim_{|M'-M''|\to 0}\left(\frac{\mu_0}{|M''-M|}-\frac{\mu_0}{|M'-M|}\right)=$$
$$=\mu(M_0)\lim_{|M'-M''|\to 0}\frac{1}{|M'-M''|}\left(\frac{1}{|M''-M|}-\frac{1}{|M'-M|}\right)=$$
$$=\mu(M_0)\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|M-M_0|}.$$

185. $u(M)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\mu_k}{|M_k-M|}$, где $|M_k-M|$ — расстояние между точками M_k и M. 186. RC.

187. $u(x, y, z)=$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\mu[\xi(t),\ \eta(t),\ \zeta(t)]\sqrt{[\xi'(t)]^2+[\eta'(t)]^2+[\zeta'(t)]^2}}{\sqrt{[\xi(t)-x]^2+[\eta(t)-y]^2+[\zeta(t)-z]^2}}\,dt.$$

188. а) $u(x, y)=x+xy$;

б) $u(x, y)=x^2-y^2+2y+R^2$.

Решение. По формуле (2) задачи 177

$$u(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}r^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi).$$

В полярной системе координат, учитывая, что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, имеем $g(x, y)=R^2+R^2\cos 2\varphi+2R\sin\varphi$. Тогда краевое условие принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}R^k(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi)=R^2+R^2\cos 2\varphi+2R\sin\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ в обеих частях этого равенства, получаем

$$a_0=R^2,\quad a_2=1,\quad b_1=2,\quad a_1=a_3=\ldots=0,\quad b_0=b_2=\ldots=0.$$

Следовательно, $u(x, y)=R^2+r^2\cos 2\varphi+2r\sin\varphi=R^2+r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+$ $+2r\sin\varphi=R^2+x^2-y^2+2y$.

189. а) $u(x, y)=\left(\frac{R}{r}\right)^2 y+2\left(\frac{R}{r}\right)^4 xy$.

Решение. Пользуясь формулой (3) из задачи 178, как и при решении задачи 188 б), краевое условие данной задачи запишем в полярной системе координат

$$\sum_{k=0}^{\infty} R^{-k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = R \sin \varphi + R^2 \sin 2\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ в обеих частях этого равенства, получаем

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0, \quad b_1 = R^2, \quad b_2 = R^4, \quad b_3 = b_4 = \ldots = 0.$$

Следовательно, $u(x, y) = R^2 r^{-1} \sin \varphi + R^4 r^{-2} \sin 2\varphi = \left(\frac{R}{r}\right)^2 y + 2\left(\frac{R}{r}\right)^4 xy.$

б) $u(x, y) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 (ax + by) + c;$

в) $u(x, y) = \left(\frac{R}{r}\right)^4 (x^2 - y^2);$

г) $u(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4 (x^2 - y^2) + \frac{R^2}{2} + 1;$

д) $u(x, y) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4 (x^2 - y^2 + 2xy);$

е) $u(x, y) = \frac{R^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4 (x^2 - y^2) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 (x + y);$

ж) $u(x, y) = R^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^4 (x^2 - y^2) - \left(\frac{R}{r}\right)^2 (x - y).$

190. а) $u(x, y) = \frac{r^2 - R^2}{4}$. Подобрав частное решение уравнения, свести данную задачу к задаче Дирихле для уравнения Лапласа.

б) $u(x, y) = \frac{1}{8}(x^3 + xy^2 - R^2 x);$

в) $u(x, y) = \frac{R^2 - x^2}{2};$

г) $u(x, y) = \frac{1}{8}(y^3 + x^2 y - R^2 y + 8);$

д) $u(x, y) = r^2 - R^2 + 1.$

191. а) $u(x, y) = \text{const}$ при $A = 0$. При $A \neq 0$ задача поставлена неправильно.

б) $u(x, y) = \frac{R}{2}(x^2 - y^2) + \text{const}$ при $A = \frac{R}{2}$. При $A \neq \frac{R}{2}$ задача поставлена неправильно.

Воспользоваться формулой (2) из задачи 177.

в) $u(x, y) = Rxy + \text{const};$

г) $u(x, y) = -\frac{AR}{4}(x^2 - y^2) + \text{const}$ при $B = \frac{AR^2}{2}$. При $B \neq \frac{AR^2}{2}$ задача поставлена неправильно.

д) $u(x, y) = \frac{AR}{2}(x^2 - y^2) + Ry + \text{const}$ при $B = A$. При $B \neq A$ задача поставлена неправильно.

192. а) $u(x, y) = \frac{R^5}{4r^4}(x^2 - y^2) + \text{const}$ при $A = \frac{R^2}{2}$. При $A \neq \frac{R^2}{2}$ задача поставлена неправильно.

Воспользоваться формулой (3) из задачи 178.

б) $u(x, y) = \frac{R^5}{4r^4}(y^2 - x^2) - \frac{AR^3}{r^2}y + \text{const}$ при $B = \frac{R^2}{2}$. При $B \neq \frac{R^2}{2}$ задача поставлена неправильно;

в) $u(x, y) = \frac{AR^5}{4r^4}(x^2 - y^2) - \frac{R^5}{r^4}xy + \text{const}$

при $B = \frac{AR^2}{2}$. При $B \neq \frac{AR^2}{2}$ задача поставлена неправильно.

г) $u(x, y) = \frac{(1 + A) R^5}{4r^4}(y^2 - x^2) + \text{const}$ при $B = (A - 1)\frac{R^2}{2}$.

При $B \neq (A - 1)\frac{R^2}{2}$ задача поставлена неправильно.

193. а) $u(r, \varphi) = \frac{r}{R - R_1}\sin\varphi + \text{const}$.

Решение ищем по формуле (2) из задачи 177 в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Тогда

$$u(R; \varphi) - u(R_1, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(R^k - R_1^k\right)(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = \sin\varphi.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ в обеих частях этого равенства, получаем $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, $b_1 = \frac{1}{R - R_1}$, $b_2 = b_3 = \ldots = 0$. Поэтому $u(r, \varphi) = \frac{r}{R - R_1}\sin\varphi + a_0$, $a_0 = \text{const}$.

б) $u(r, \varphi) = \frac{r}{R - R_1}\cos\varphi + \text{const}$;

в) $u(r, \varphi) = \frac{r^2 \cos 2\varphi}{2\left(R^2 - R_1^2\right)} + \text{const}$ при $C = -\frac{1}{2}$. При $C \neq -\frac{1}{2}$ не выполнено условие $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$.

г) $u(r, \varphi) = \frac{r^2 \sin 2\varphi}{R^2 - R_1^2} + \frac{r^3 \cos 3\varphi}{R^3 - R_1^3} + \text{const}$;

д) $u(r, \varphi) = A\frac{r^2 \cos 2\varphi}{R^2 - R_1^2} + \text{const}$ при $B = -A$. При $B \neq -A$ не выполнено условие $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$.

e) $u(r,\varphi)=\dfrac{r\sin\varphi}{R-R_1}-\dfrac{3r^2\cos 2\varphi}{2\left(R^2-R_1^2\right)}+\text{const}$ при $C=\dfrac{3}{2}$. При $C\neq$ $\neq\dfrac{3}{2}$ не выполнено условие $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=0$.

194. а) $u(r,\varphi)=\dfrac{3R^2R_1^2\sin 2\varphi}{\left(R_1^2-R^2\right)r^2}+\text{const}$.

Решение ищем по формуле (3) из задачи 178 в виде

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right).$$

Тогда $u(R,\varphi)-u(R_1,\varphi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(R^{-k}-R_1^{-k}\right)\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right)=3\sin 2\varphi$.
Сравнивая коэффициенты при $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$ в обеих частях этого равенства, получаем

$$a_1=a_2=\ldots=0,\quad b_1=b_3=\ldots=0,\quad b_2=\frac{3R^2R_1^2}{R_1^2-R^2}.$$

Поэтому $u(r,\varphi)=\dfrac{3R^2R_1^2\sin 2\varphi}{\left(R_1^2-R^2\right)r^2}+a_0,\quad a_0=\text{const}.$

б) $u(r,\varphi)=-\dfrac{5R^2R_1^2\cos 2\varphi}{2\left(R_1^2-R^2\right)r^2}+\text{const}$ при $A=\dfrac{5}{2}$. При $A\neq\dfrac{5}{2}$ не выполнено условие $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=0$;

в) Задача не имеет решения, так как не выполнено условие $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=0$;

г) $u(r,\varphi)=\dfrac{RR_1\sin\varphi}{(R_1-R)\,r}+\dfrac{3R^2R_1^2\cos 2\varphi}{2\left(R_1^2-R^2\right)r^2}+\text{const}$ при $A=\dfrac{3}{2}$.

При $A\neq\dfrac{3}{2}$ не выполнено условие $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi=0$;

д) $u(r,\varphi)=\dfrac{RR_1\sin\varphi}{(R_1-R)\,r}+\dfrac{R^5R_1^5\cos 5\varphi}{\left(R_1^5-R^5\right)r^5}+\text{const}$.

195. а) $u=x+2y+z(2x-y^2)+z^3/3$;

б) $u=xe^y\cos z$;

в) $u=x(x+y)+z(y-z)+e^x\sin z$;

г) $u=x\sin y\,\mathrm{ch}\,z+\mathrm{sh}\,z\cos y$;

д) $u = x^3 + z(2x^2 - y) - 3xz^2 - \frac{2}{3} z^3 + 2$;

е) $u = xz + \cos 2x \operatorname{ch} 2z - \sin 2y \operatorname{ch} 2z$.

196. $u = T + (U - T) \dfrac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}$. 197. $u = T + bU \ln \frac{r}{a}$.

198. $u = U + aT \ln \frac{r}{b}$.

199. $u = aT \ln r + \text{const}$ при условии, что $aT = bU$. При $aT \neq bU$ задача поставлена неправильно.

200. $u = T + \dfrac{b(U - hT)\ln \frac{r}{a}}{1 + bh \ln \frac{b}{a}}$. 201. $u = U + \dfrac{a(T + hU)\ln \frac{r}{b}}{1 + ah \ln \frac{b}{a}}$.

202. $u = \dfrac{bU - aT}{hb} + aT \ln \frac{r}{b}$. 203. $u = \dfrac{bU - aT}{ah} + bU \ln \frac{r}{a}$.

204. $$u = \frac{abh\left(T \ln \frac{r}{b} + U \ln \frac{r}{a}\right) + bU - aT}{h\left(a + b + abh \ln \frac{b}{a}\right)}.$$

205. $$u = T \frac{h \ln \frac{r}{b} - \ln \frac{r}{c}}{h \ln \frac{a}{b} - \ln \frac{a}{c}}.$$

206. а) $u(a) = \dfrac{T_0 \ln \frac{b}{a} - T \ln \frac{c}{a}}{\ln \frac{b}{c}}$;

б) $u(a) = T - bU \ln \frac{c}{a}$;

в) $u(a) = \dfrac{T\left(1 + bh \ln \frac{b}{a}\right) - bW \ln \frac{c}{a}}{1 + bh \ln \frac{b}{c}}$;

г) $u(a) = T - cU \ln \frac{b}{a}$.

207. а) $u(a) = \dfrac{T_0 \ln \frac{a}{d} - T_1 \ln \frac{a}{c}}{\ln \frac{c}{d}}$, $u(b) = \dfrac{T_0 \ln \frac{b}{d} - T_1 \ln \frac{b}{c}}{\ln \frac{c}{d}}$;

б) $u(a) = T + cU \ln \frac{a}{d}$, $u(b) = T + cU \ln \frac{b}{d}$.

208. а) $u(b) = \dfrac{T_0 \ln \frac{b}{a} - T \ln \frac{b}{c}}{\ln \frac{c}{a}}$;

б) $u(b) = T - aU \ln \frac{c}{a}$;

в) $u(b) = \dfrac{T\left(1 + ah \ln \frac{b}{a}\right) - aW \ln \frac{c}{b}}{1 + ah \ln \frac{c}{a}}$;

г) $u(b) = T + cU \ln \frac{b}{a}$.

209. а) $u(a) = \dfrac{T_0 \ln \frac{d}{a} - T \ln \frac{c}{a}}{\ln \frac{d}{c}}$, $u_r(b) = \dfrac{T - T_0}{b \ln \frac{d}{c}}$;

б) $u(a) = T - dU \ln \frac{c}{a}$, $u_r(b) = \frac{d}{b} U$.

210. а) $u(R) = T + \dfrac{a(R^3 - c^3)}{9}$;

б) $R = \sqrt[3]{c^3 + \frac{9}{a}(T - T_0)}$.

211. а) $u(a) = a - c + T + \dfrac{(T - T_0) \ln \frac{a}{c}}{(c - b) \ln \frac{c}{b}}$;

б) $u(a) = a - b + T + c(U - 1) \ln \frac{a}{b}$;

в) $u(a) = a - c + T_0 + \dfrac{(T - T_0 + c - d) \ln \frac{a}{c}}{\ln \frac{d}{c}}$, $u_r(b) = 1 +$
$+ \dfrac{T - T_0 + c - d}{b \ln \frac{d}{c}}$;

г) $u_r(a) = \dfrac{a + d(U - 1)}{a}$, $u(b) = T + b - c + d(U - 1) \ln \frac{b}{c}$.

212. $u(r) = T - \displaystyle\int_r^R \frac{1}{\rho^2}\left[\int_0^\rho t^2 f(t)\, dt\right] d\rho$.

213. а) $u(R) = T + \dfrac{Q}{k}(a^2 - R^2)$.

Стационарная температура $u(r)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u(r) = -\frac{6Q}{k}$, $0 \leqslant r \leqslant R$, $\Delta u(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right)$;

б) $u(R) = \dfrac{T(R^2 - c^2) - T_0(R^2 - d^2)}{d^2 - c^2}$, $Q = \dfrac{k(T - T_0)}{c^2 - d^2}$;

в) $u(R) = T + \frac{U}{2b}(R^2 - a^2)$, $Q = -\frac{kU}{2b}$;

г) $R = \sqrt{\frac{k(T_0 - T)}{Q}}$.

214. а) $u(a) = T_0 + \frac{b(c-a)}{a(c-b)}(T - T_0)$;

б) $u(a) = T + \frac{b^2 U(a-c)}{ac}$;

в) $u(a) = T + \frac{b^2(a-c)(W - hT_0)}{a(c - bch - b^2 h)}$;

г) $u(a) = T + \frac{c^2(a-b)U}{ab}$.

215. а) $u(a) = \frac{d(a-c)T - c(a-d)T_0}{a(d-c)}$, $u(b) = \frac{d(b-c)T - c(b-d)T_0}{b(d-c)}$;

б) $u(a) = T + \frac{d^2(a-c)U}{ac}$, $u(b) = T + \frac{d^2(b-c)U}{bc}$.

216. $u(r) = T + \frac{Q}{k}(b - r) + a^2\left(U + \frac{Q}{k}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right)$.

Функция $u(r)$ является решением уравнения $\Delta u(r) = -\frac{2Q}{kr}$, где $\Delta u(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right)$.

217. а) $u(a) = T + \frac{Q}{k}(b-a) - \frac{b}{a}(b-a)\left(U + \frac{Q}{k}\right)$;

б) $Q = \frac{bk^2}{ak - b}\left[U - \frac{a(T - T_0)}{b(b-a)}\right]$.

218. $u(a) = T + cQ\left(\frac{1}{k_1}\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{k_2}\ln\frac{c}{b}\right)$,

где

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r), & a \leqslant r \leqslant b, \\ u_2(r), & b \leqslant r \leqslant c, \end{cases} \text{— решение задачи,}$$

$$\Delta u_1(r) = 0, \quad a < r < b, \quad \Delta u_2(r) = 0, \quad b < r < c,$$

$$u_1(b) = u_2(b), \quad k_1 u_{1r}(b) = k_2 u_{2r}(b),$$

$$u_1(a) = ? \quad u_2(c) = T, \quad u_{2r}(c) = -Q/k_2.$$

219. Применить формулу Гаусса — Остроградского

$$\int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, d\tau_x = \int_S \sum_{i=1}^n F_i \cos \widehat{\nu y_i}\, ds_y$$

к тождеству

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = v\Delta u - u\Delta v = 0.$$

220. Пусть точка $x \in D$. Часть области D вне замкнутого шара $|y-x| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε с центром в точках x обозначим через D_ε. Так как $E(x, y)$ гармонична в D_ε, то, применяя формулу (9) к границе области D_ε и полагая при этом $v = E(x, y)$, получаем

$$\int\limits_S \left[E(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y}\right] dS_y =$$

$$= \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \left[E(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y)\frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y}\right] dS_y.$$

Отсюда, учитывая, что на сфере $|y-x| = \varepsilon$

$$E(x, y) = \begin{cases} 1/(n-2)\varepsilon^{n-2}, & n > 2, \\ -\ln\varepsilon, & n = 2, \end{cases} \quad \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y} = \begin{cases} -1/\varepsilon^{n-1}, & n > 2, \\ -1/\varepsilon, & n = 2, \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} [u(y) - u(x)]\frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_y}\, dS_y = 0, \qquad \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \frac{dS_y}{\varepsilon^{n-1}} = \omega_n,$$

в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем формулу (10).

221. Пусть точки $x, y \in D$, $x \neq y$. Часть области D вне замкнутых шаров $|z-x| \leqslant \varepsilon$, $|z-y| \leqslant \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε с центрами в точках x, y обозначим через D_ε. Применяя формулу (9) из задачи 219 в области D_ε, когда $u(z) = G(z, x)$, $v(z) = G(z, y)$ (на этот раз переменным интегрирования является z), получаем

$$\int\limits_{|z-x|=\varepsilon} \left[G(z, x)\frac{\partial G(z, y)}{\partial \nu_z} - G(z, y)\frac{\partial G(z, x)}{\partial \nu_z}\right] ds_z =$$

$$= \int\limits_{|z-y|=\varepsilon} \left[G(z, y)\frac{\partial G(z, x)}{\partial \nu_z} - G(z, x)\frac{\partial G(z, y)}{\partial \nu_z}\right] ds_z.$$

Отсюда, учитывая, что $G(z, x) = E(z, x) + g(z, x)$, $G(z, y) = E(z, y) + g(z, y)$, где $g(z, x)$ и $g(z, y)$ — гармонические функции, и рассуждая, как при решении предыдущей задачи, в пределе при $\varepsilon \to 0$ получим $-G(x, y) = -G(y, x)$.

222. Проинтегрировать по области D тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

справедливое для гармонической функции u, применив при этом к его левой части формулу Гаусса — Остроградского и положив в полученном результате $v \equiv 1$. Требуемое равенство следует также из формулы (9) задачи 219, когда $v \equiv 1$.

223. Формула, выражающая теорему о среднем, а) для сферы следует из формулы (10) задачи 220, если в ней считать S сферой $|y-x| = R$ с центром в точке x; б) для шара $|y-x| < R$ получается, если написать формулу, выражающую теорему о среднем по сфере $|y-x| = \rho$, в виде

$\rho^{n-1}u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|y-x|=\rho} u(y)\,dS_y$ и проинтегрировать обе ее части по ρ, $0 < \rho < R$.

224. Допущение, что отличная от постоянной гармоническая в области D функция $u(x)$ в точке $x_0 \in D$ достигает своего максимума, приводит к противоречию. В самом деле, пользуясь формулой, выражающей теорему о среднем, имеем

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x_0|<R} u(y)\,d\tau_y,$$

откуда следует, что функция $u(x)$ всюду в шаре $|y - x_0| < R$, лежащем в области D, равна $u(x_0)$. Действительно, если в некоторой точке y_0, $|y_0 - x_0| < R$, имеет место неравенство $u(y_0) < u(x_0)$ (неравенство противоположного знака исключено), то это неравенство сохранится в некоторой окрестности $|y - y_0| < \varepsilon$ с точки y_0, и, стало быть, $u(x_0) < u(x_0)$. Из полученного противоречия следует, что $u(x) = u(x_0)$ всюду в шаре $|y - x_0| < R$. Пусть теперь x — произвольная точка области D. Соединим точки x и x_0 непрерывной кривой L, расстояние которой до границы области D равно $\delta > 0$. Передвигая центр y^* шара $|y - y^*| < \delta$ от точки x_0 к точке x вдоль L и учитывая, что каждый раз $u(y^*) = u(x_0)$, убеждаемся в справедливости равенства $u(x) = u(x_0)$, а это исключено. Аналогично рассматривается случай минимума.

225. Применить принцип экстремума к разности u_1 и u_2 двух произвольных решений задачи Дирихле $\Delta u(x) = 0$, $x \in D, u(x) = f(x), x \in S$.

226. Пусть $G(x, y) = E(x, y) + g(x, y)$ — функция Грина, а $u(x)$ — решение задачи Дирихле. Требуемую формулу (11) можно получить, если из формулы (10) задачи 220, записанной для решения $u(x)$, вычесть почленно формулу (9) из задачи 219, примененную к функциям $u(y)$ и $g(x, y)$ и умноженную на ω_n^{-1}.

227. Непосредственно убедиться в справедливости равенств

$$\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right| = [\, |x|^2 |y|^2 - 2(x, y) + 1]^{1/2} = \left| |y|\, x - \frac{y}{|y|} \right| =$$
$$= |y| \left| x - \frac{y}{|y|^2} \right| = |x| \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|,$$

из которых следует, что функция $g(x, y) = E(|x|y, x/|x|)$ гармонична в единичном шаре как по x, так и по y, причем $g(x, y) = E(x, y)$, когда $|x| = 1$ или $|y| = 1$. Здесь (x, y) — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Таким образом, функция $G(x, y)$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Грина.

228. Ввиду того, что (см. задачу 227)

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i (y_i - x_i)}{|y - x|^n} - |x| \frac{y_i \left(|x|\, y_i - \frac{x_i}{|x|} \right)}{\left| |x|\, y - \frac{x}{|x|} \right|^n} \right\} = \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n},$$

из формулы (11) задачи 226 получаем требуемую формулу Пуассона.

230. $u(x) = \dfrac{1}{\omega_n R} \displaystyle\int\limits_{|y-x_0|=R} \dfrac{R^2 - |x - x_0|^2}{|y - x|^n} \varphi(y)\, ds_y.$

В результате замены переменных по формуле $x = Rz + x_0$ рассматриваемая задача сведется к задаче Дирихле для гармонической функции $v(z) = u(Rz + x_0)$ в шаре $|z| < 1$:

$$\Delta v(z) = 0, \quad |z| < 1, \quad v(z) = \varphi(Rz + x_0), \quad |z| = 1,$$

решение которой (см. задачу 228) имеет вид

$$v(z) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|y|=1} \frac{1 - |z|^2}{|y - z|^n} \varphi(Ry + x_0)\, ds_y.$$

С помощью обратной замены переменных $z = (x - x_0)/R$ из последней формулы получим ответ.

231. В формуле Пуассона (см. ответ к задаче 230) принять $x = x_0$.

232. Для гармонической в круге $|x| < 1$ функции $u(x) \equiv 1$ из формулы Пуассона (см. задачу 228) имеем

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^2}\, d\psi.$$

233. Поскольку ядро формулы Пуассона совпадает с нормальной производной функции Грина $\dfrac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y}$, то оно гармонично при $|x| < 1$. В силу равномерной сходимости интеграла в достаточно малой окрестности точки x в шаре $|x| < 1$ оператор Лапласа можно внести под знак интеграла. Тем самым убеждаемся в гармоничности $u(x)$.

При доказательстве второй части задачи ограничимся рассмотрением случая $n = 2$. Имеем

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^2} \varphi(y)\, dy.$$

Отсюда, пользуясь тождеством из задачи 232, получим

$$u(x) - \varphi(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{|y - x|^2} [\varphi(y) - \varphi(x_0)]\, d\psi, \quad |x| < 1, \quad |x_0| = 1.$$

Так как $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на окружности $|x| = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех ψ и ψ_0, $y_1 = \cos\psi$, $y_2 = \sin\psi$, $x_{10} = \cos\psi_0$, $x_{20} = \sin\psi_0$, удовлетворяющих условию $|\psi - \psi_0| < \delta$, будем иметь $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Представляя выражение

$u(x)-\varphi(x_0)$ в виде $u(x)-\varphi(x_0)=I_1+I_2$, где

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\psi_0-\delta}^{\psi_0+\delta}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}[\varphi(y)-\varphi(x_0)]\,d\psi,$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\psi_0-\delta}+\int\limits_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}[\varphi(y)-\varphi(x_0)]\,d\psi,$$

заключаем, что $|I_1|<\varepsilon$, а после выбора $\delta(\varepsilon)$, устремляя x к x_0, получаем

$$\left(\int\limits_0^{\psi_0-\delta}+\int\limits_{\psi_0+\delta}^{2\pi}\right)\frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}\,d\psi<\frac{\pi\varepsilon}{M},\quad M=\max_{0<\psi<2\pi}|\varphi(y)|,\quad |y|=1,$$

т. е. $|I_2|<\varepsilon$. Следовательно, $|u(x)-\varphi(x_0)|<2\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\varphi(x_0)$, $|x|<1$, $|x_0|=1$.

234. Справедливость оценок получается из формулы Пуассона (см. задачу 230)

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^n}\varphi(y)\,dy,$$

если учесть неравенства $R-|x|<|y-x|<R+|x|$ при $|x|<R$, $|y|=R$ и воспользоваться формулой, выражающей теорему о среднем (см. задачу 223).

235. Нет. Это следует из неравенств задачи 234. Действительно, считая без ограничения общности, что $u(x)>0$, из указанных неравенств в пределе при $R\to\infty$ получаем $u(x)=u(0)=\mathrm{const}$.

236. Нет, если $M=\sup u(x)$, то гармоническая функция $M-u(x)$ была бы знакопостоянной и, следовательно, было бы $M-u(x_0)=M-u(x)$, т. е. $u(x)=u(x_0)$ всюду в E_n.

237. Действительно, пусть x_0 — произвольная точка области D и шар $|y-x_0|\leqslant\varepsilon$ лежит в D. Пусть $u(x)$ — непрерывная в D функция, для которой имеет место формула, выражающая теорему о среднем в окрестности каждой точки области D. Обозначим через $v(x)$ гармоническую в шаре $|y-x_0|<\varepsilon$ функцию, принимающую на сфере $|y-x_0|=\varepsilon$ то же значение, что и $u(x)$. Для разности $u(x)-v(x)=w(x)$ имеет место формула, выражающая теорему о среднем. Отсюда следует справедливость принципа экстремума для $w(x)$ (см. задачу 224). Так как $w(x)=0$ на сфере $|y-x_0|=\varepsilon$, то $w(x)\equiv 0$ в шаре $|y-x_0|\leqslant\varepsilon$, что и доказывает гармоничность $u(x)$ в окрестности каждой точки $x_0\in D$.

238. Для любого шара $|x-x_0|\leqslant\varepsilon$, лежащего в области D, в соответствии с формулой Гаусса — Остроградского и условием задачи имеем

$$\int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon}\Delta u\,d\tau=\int\limits_{|x-x_0|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds=0.$$

Отсюда, в силу произвольности точки x_0, следует $\Delta u=0$.

239. а) $u(x, y) = x^3 - 3x^2 - 3xy^2 + 3y^2 + 12x - 1$;

б) $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - x + 2y$;

в) $u(x, y) = y^2 - x^2 - 3x$;

г) $u(x, y) = (x + y)^2 + 2x + 1$;

д) $u(x, y) = 3y(x + 1)^2 + 3y^3 - 2y$.

240. $$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{|y-x_0|=R} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|y - x|^n} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i - x_i)} \varphi(y)\, dS_y.$$

241. Выписать формулу (10) для полусферы $|y| = R$, $y_n \geqslant 0$, и устремить R к бесконечности.

243. Решение задачи выражается формулой из задачи 242, если в ней заменить x_n на $-x_n$.

244. $$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y + 1)^2}.$$

245. $$u(x, y, z) = -\frac{z - 1}{|x^2 + y^2 + (z - 1)^2|^{3/2}}.$$

246. Пусть D^+ — ограниченная область евклидова пространства E_n точек $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с достаточно гладкой границей S, точки которой будем обозначать $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, а D^- — дополнение $D^+ \cup S$ до E_n. Не умаляя общности, считаем, что единичный шар $|\xi| < 1$ принадлежит D^+. Чтобы найти решение $u(\xi)$ внешней задачи Дирихле

$$\Delta u(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \to \eta} u(\xi) = \varphi(\eta), \quad \xi \in D^-, \quad \eta \in S, \tag{*}$$

произведем преобразование инверсии $\xi = x/|x|^2$ пространства $E_n(\xi)$ (относительно единичной сферы $|\xi| = 1$). В результате инверсии неограниченная область D^- с границей S отображается на некоторую область d точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с границей σ, точки которой обозначим через $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Строим функцию

$$v(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right). \tag{**}$$

Непосредственно (см. задачу 155) проверяется гармоничность функции $v(x)$ при условии гармоничности функции $u(\xi)$. Кроме того, полагая $\eta = \frac{y}{|y|^{n-2}}$,

$$\lim_{x \to y} v(x) = \lim_{x \to y} \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \frac{1}{|y|^{n-2}} \varphi\left(\frac{y}{|y|^2}\right), \quad x \in d, \quad y \in \sigma.$$

Таким образом, для функции $v(x)$ получаем (внутреннюю) задачу Дирихле

$$\Delta v(x) = 0, \quad \lim_{x \to y} v(x) = \frac{1}{|y|^{n-2}} \varphi\left(\frac{y}{|y|^2}\right), \quad x \in d, \quad y \in \sigma,$$

решая которую, находим функцию $v(x)$. Зная $v(x)$, по формуле ($**$), пользуясь обратной инверсией $\xi = \frac{x}{|x|^2}$, получаем решение $u(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{n-2}} v\left(\frac{\xi}{|\xi|^2}\right)$ внешней задачи Дирихле ($*$). Нетрудно проверить, что найденная функция $u(\xi)$ удовлетворяет краевому условию задачи ($*$).

247. $u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \varphi(x_1, y_1)\, ds.$

248. $\int\limits_S \varphi\, ds = 0.$ См. задачу 222.

249. Пусть u_1 и u_2 — любые два решения задачи Неймана (7) для гармонических функций. Тогда их разность $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет условию $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_S = 0.$ Отсюда, учитывая очевидное тождество

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 d\tau = \int\limits_S v \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds = 0,$$

заключаем, что $v = C = \text{const}$, т. е. $u_1 + u_2 + C$.

250. Обозначим через $v(x, y)$ функцию, гармонически сопряженную с $u(x, y)$. Тогда

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\nu} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\nu} = \frac{du}{d\nu} = g(s),$$

и поэтому $v(s) = \int\limits_0^s g(t)\, dt + C, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi R,$ где C — произвольная постоянная. Соблюдение необходимого условия разрешимости задачи Неймана $\int\limits_0^{2\pi R} g(t)\, dt = 0$ гарантирует непрерывность функции $v(s)$ в точке $s = 0$, $s = 2\pi R$.

Гармоническая в круге $x^2 + y^2 < R^2$ функция $v(x, t)$ определяется по формуле Пуассона (см. задачу 230)

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_S \frac{R^2 - (x^2 + y^2)}{(z - t)(\bar{z} - \bar{t})} \left(\int\limits_0^s g(\tau)\, d\tau\right) ds + C,$$

где $z = x + iy, \quad t = \xi + i\eta$.

Аналитическая функция $\varphi(z) = v(x, y) + iu(x, y)$ определяется по формуле

$$\varphi(z) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - v(0, 0) + iC_1 =$$

$$= \frac{R}{\pi} \int\limits_S \frac{ds}{\bar{t}(t - z)} \int\limits_0^s g(\tau)\, d\tau - v(0, 0) + 2C + iC_1,$$

$t = Re^{i\varphi}$, $\bar t = Re^{-i\varphi}$. Так как $R/\bar t = e^{i\varphi}$, $ds = dt/ie^{i\varphi}$, то

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_S \frac{dt}{t-z}\int_0^s g(\tau)\,d\tau - v(0,0) + 2C + iC_1,$$

или, после интегрирования по частям,

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_S [\ln|t-z| + i\arg(t-z)]\,g(s)\,ds - v(0,0) + 2C + iC_1.$$

Выделяя мнимую часть, получаем

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_S g(s)\ln|t-z|\,ds + C_1.$$

251. Запишем формулу Пуассона (см. задачу 250) в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{1-z\bar z}{(t-z)(\bar t-\bar z)}\,u(t)\,d\varphi$$

и воспользуемся формулой Гурса (1). Получим

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{|t|=1}\frac{u(t)}{(t-z)\bar t}\,d\varphi - u(0,0) + iC.$$

Отсюда, так как $t = e^{i\varphi}$, $\bar t = e^{-i\varphi}$, $d\varphi = -i\bar t\,dt$, $u(0,0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{u(t)}{t}\,dt$, находим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{t+z}{t-z}\,\frac{u(t)}{t}\,dt + iC.$$

252. Для аналитической в полукруге $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в силу условия $\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, т. е. $v(x, 0) = \mathrm{const}$, имеем $\operatorname{Im}[f(z) - \mathrm{const}]|_{y=0} = 0$. Это означает, что функция $u(x, y)$ гармонически продолжается из верхнего полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ в нижний полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 1$, причем $u(x, y) = u(x, -y)$ при $y < 0$. Следовательно, функция $u(x, y)$ гармонична в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет краевым условиям $u(x, y)|_{\sigma_1} = \varphi(x, y)$, $u(x, y)|_{\sigma_2} = \varphi(x, -y)$, где σ_1 и σ_2 — полуокружности: $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ и $x^2 + y^2 = 1$, $y < 0$ соответственно. Пользуясь формулой Пуассона, находим

$$u(x, y) = \int_{\sigma_1}\frac{1-x^2-y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\varphi(\xi, \eta)\,ds + \int_{\sigma_2}\frac{1-x^2-y^2}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\varphi(\xi, -\eta)\,ds =$$

$$= \int_{\sigma_1}(1-x^2-y^2)\left[\frac{1}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} + \frac{1}{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}\right]\varphi(\xi, \eta)\,ds.$$

253. $u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{(t-x)^2 + y^2} - \frac{1}{(1-tx)^2 + t^2y^2} \right] \varphi(t)\, dt.$

Функция $u(x, y)$ гармонически продолжается из полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ в область $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, причем при $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$

$$u(x, y) = -u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ гармонична в верхней полуплоскости $y > 0$ и удовлетворяет краевому условию

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\varphi(1/x), & -\infty < x \leqslant -1, \\ \varphi(x), & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\varphi(1/x), & 1 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Поэтому в силу формулы Пуассона (см. задачу 242) имеем

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \left\{ -\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(t-x)^2+y^2} \varphi\left(\frac{1}{t}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t-x)^2+y^2} \varphi(t)\, dt - \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2+y^2} \varphi\left(\frac{1}{t}\right) dt \right\} =$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} - \frac{1}{(1-tx)^2+t^2y^2} \right] \varphi(t)\, dt.$$

254. Для получения формулы достаточно убедиться в том, что функция $u(x, y)$ гармонически продолжается из верхнего полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ в нижний полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$, причем $u(x, y) = -u(x, -y)$ при $y < 0$. Дальше следует обычная процедура применения формулы Пуассона (см. задачу 253).

255. В случае ограниченной области D из формулы (12) видно, что когда $n > 2$, потенциал объемных масс стремится к нулю при $x \to \infty$. Когда же $n = 2$, то, представляя функцию $\ln|x-y|$ в виде $\ln|x-y| = \ln\frac{|x-y|}{|x|} + \ln|x|$, убеждаемся, что в этом случае при $|x| \to \infty$ потенциал объемных масс ведет себя как функция $\ln|x| \int_D \mu(y)\, d\tau_y$.

256. $\int_D \mu(y)\, d\tau_y = 0$. См. задачу 255.

257. Пусть $f(x)$ непрерывна и ограничена в D вместе с частными производными первого порядка. Представляя функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_D E(x, y) f(y)\, d\tau_y - \frac{1}{\omega_n} \int_D g(x, y) f(y)\, d\tau_y$$

и пользуясь тем фактом, что

$$\Delta \int\limits_D E(x, y) f(y)\, d\tau_y = -\omega_n f(x), \quad \Delta \int\limits_D g(x, y) f(y)\, d\tau_y = 0,$$

убеждаемся в справедливости равенства (14). Убедиться в справедливости условия $\lim u(x) = 0$, $x \to x_0$, $x_0 \in S$, непосредственно с помощью перехода к пределу под знаком интеграла в выражении

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_D G(x, y) f(y)\, d\tau_y$$

нельзя, поскольку стремление к нулю функции Грина $G(x, y)$ при $x \to x_0$ не является равномерным относительно $y \in D$. Поэтому представим функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{D_\delta} G(x, y) f(y)\, d\tau_y - \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{d_\delta} G(x, y) f(y)\, d\tau_y,$$

где $d_\delta = D \cap \{|y - x_0| < \delta\}$, а D_δ — часть области D вне шара $|y - x_0| \leqslant \delta$. Очевидно, что

$$\lim_{x \to x_0} \int\limits_{D_\delta} G(x, y) f(y)\, d\tau_y = \int\limits_{D_\delta} \lim_{x \to x_0} G(x, y) f(y)\, d\tau_y = 0. \qquad (*)$$

Пусть Q_R — шар $|x - y| < R$ с центром в точке $y \in D$ такой, что при любом $y \in D$ будет $D \cup S \subset Q_R$. Тогда, если точка z лежит на сфере $|z - y| = R$, для функции $\Omega(x, y) = E(x, y) - E(z, y)$ имеем $\Omega(x, y) \geqslant 0$, причем на границе S области D имеем $G(x, y) - \Omega(x, y) \leqslant 0$. В силу гармоничности функции $G(x, y) - \Omega(x, y)$ в D по теореме о максимуме и минимуме всюду в $\bar{D}$ имеем $G(x, y) - \Omega(x, y) \leqslant 0$. Тогда, считая $x \in d_\delta$ и обозначив $M = \sup |f(y)|$, $y \in D$, будем иметь

$$\left| \int\limits_{d_\delta} G(x, y) f(y)\, d\tau_y \right| \leqslant \int\limits_{d_\delta} G(x, y)\, |f(y)|\, d\tau_y \leqslant M \int\limits_{d_\delta} G(x, y)\, d\tau_y \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{d_\delta} \Omega(x, y)\, d\tau_y = M \int\limits_{d_\delta} [E(x, y) - E(z, y)]\, d\tau_y \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{d_\delta} E(x, y)\, d\tau_y \leqslant M \int\limits_{|y - x_0| < \delta} E(x, y)\, d\tau_y =$$

$$= \frac{M}{n-2} \int\limits_{|y - x_0| < \delta} \frac{1}{|y - x|^{n-2}}\, d\tau_y \leqslant \frac{M}{n-2} \int\limits_{|y - x| < 2\delta} \frac{1}{|y - x|^{n-2}}\, d\tau_y =$$

$$= \frac{M}{n-2} \int\limits_{|y - x| < 2\delta} \frac{1}{r^{n-2}} r^{n-1} dr\, d\sigma = \frac{\omega_n M}{n-2} \int\limits_0^{2\delta} r\, dr = \frac{2M\omega_n \delta^2}{n-2},$$

где $d\sigma$ — элемент площади единичной сферы.

Из полученных оценок находим

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{d_\delta} G(x, y) f(y)\, d\tau_y = 0. \qquad (**)$$

Фиксируем, далее, произвольное число $\varepsilon > 0$. Из $(*)$ и $(**)$ следует, что существуют числа $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого $\bar\delta < \delta_1$

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{d_{\bar\delta}} G(x, y) f(y)\, d\tau_y\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta_2$,

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{D_{\bar\delta}} G(x, y) f(y)\, d\tau_y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{d_\delta} G(x, y) f(y)\, d\tau_y\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{1}{\omega_n}\int_{D_\delta} G(x, y) f(y)\, d\tau_y\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $|x - x_0| < \delta$.

Из последних двух неравенств следует, что $|u(x)| < \varepsilon$, т. е. $\lim u(x) = 0$, $x \to x_0$, $x \in D$, $x_0 \in S$, что и требовалось установить.

258. Для разности $u(x) - v(x) = w(x)$ имеем задачу

$$\Delta w(x) = f(x), \quad x \in D, \qquad w(y) = 0, \quad y \in S.$$

Следовательно (см. задачу 257),

$$u(x) = v(x) + \frac{1}{\omega_n}\int_D G(x, y) f(y)\, d\tau_y.$$

259. Да (см. решение задачи 225).

260. Если $y \in C(d \cup \sigma)$, справедливость третьего из доказываемых равенств очевидна (см. задачу 222). Когда $y \in d$, часть области d вне достаточно малого замкнутого шара $|x - y| \leqslant \varepsilon$ обозначим через d_ε. Пользуясь результатом задачи 222, для области d_ε можем написать

$$\int_\sigma \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x}\, ds_x = \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x}\, ds_x,$$

откуда в пределе при $\varepsilon \to 0$ с учетом равенства $\left.\dfrac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x}\right|_{|x-y|=\varepsilon} = -\dfrac{1}{\varepsilon^{n-1}}$ получаем $\displaystyle\int_\sigma \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x}\, ds_x = -\omega_n$. Остается рассмотреть случай $y \in \sigma$. Часть области d вне достаточно малого шара $|x - y| \leqslant \varepsilon$ обозначим опять d_ε. Пусть σ_1 — часть σ, лежащая вне этого шара, а σ_2 — часть сферы $|x - y| = \varepsilon$, лежащая в d. Также в силу результата задачи 222 имеем

$$\int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x = \int\limits_{\sigma_2} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x = -\int\limits_{\sigma_2} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} ds_x.$$

Отсюда в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем $\int\limits_{\sigma} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x = -\frac{\omega_n}{2}, \quad y \in \sigma.$

261. Формула является непосредственным следствием равенств (см. задачу 260)

$$\int\limits_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_x} E(x, y) ds_x = \begin{cases} -\omega_n, & y \in d, \\ 0, & y \in C(d \cup \sigma), \end{cases}$$

где d — ограниченная область с границей σ. Действительно, имеем

$$\int\limits_{\sigma} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_x} ds_x = \int\limits_{\sigma} ds_x \int\limits_{D} \mu(y) \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} d\tau_y = \int\limits_{D} \mu(y) d\tau_y \int\limits_{\sigma} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x =$$

$$= \int\limits_{D \cap d} \mu(y) d\tau_y \int\limits_{\sigma} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x + \int\limits_{d_1} \mu(y) d\tau_y \int\limits_{\sigma} \frac{\partial E(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x,$$

d_1 — часть D, лежащая вне $d \cup \sigma$.

262. Нет. 263. $\mu = -\frac{5}{\pi}(x^2 + y^2 + z^2)$. 264. $M = -4r^5$. 265. $u(x) = -\frac{1}{A^2}\int\limits_0^{\omega} dt \int\limits_0^t f(\tau) d\tau, \quad \omega = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k.$ 266. $M = -\frac{8}{3\pi}$.

267. Решить задачу

$$\Delta u(r) = \begin{cases} -2\pi, & 0 \leqslant r < 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases}$$

$$u(1+0) = u(1-0), \quad u_r(1+0) = u_r(1-0).$$

268. Решить задачу

$$\Delta u(r) = \begin{cases} -4\pi, & 0 \leqslant r < 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases}$$

$$u(1-0) = u(1+0), \quad u_r(1-0) = u_r(1+0), \quad |u(r)| < \infty,$$

$$\lim u(r) = 0, \quad r \to \infty.$$

269. $\mu = x$, $u = \pi x/4r^2$. 270. $M = 3\pi/32$. 271. $I = 0$. Для получения решения задачи достаточно воспользоваться формулой Гаусса (см. задачу 261).

272. В предположении, что слой лежит в ограниченной области пространства E_n, потенциал двойного слоя стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Аналогичным свойством обладает и потенциал простого слоя, если $n > 2$.

273. Это условие имеет вид $\int\limits_S \mu(y) ds_y = 0$.

274. Рассмотрим случай $n = 2$. Будем искать решение задачи Дирихле (внутренней или внешней) с краевым условием $u|_S = g$ в виде потенциала

двойного слоя с плотностью μ. Тогда, пользуясь формулами (18) и (19) для определения μ, получаем интегральные уравнения, к которым сводятся соответственно внутренняя и внешняя задачи Дирихле, в виде

$$\mu(s)+\int_S K(s,t)\,\mu(t)\,dt=-2g(s),\quad \mu(s)-\int_S K(s,t)\,\mu(t)\,dt=2g(s),$$

где $K(s,t)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\ln|y-x|,\quad x=x(s),\quad y=y(t).$

Решение задачи Неймана (внутренней или внешней) с краевым условием $\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_S=g$ будем искать в виде потенциала простого слоя с плотностью μ. Тогда, пользуясь формулами (20) и (21), внутреннюю и внешнюю задачи Неймана можно свести соответственно к интегральным уравнениям

$$\mu(s)+\int_S K^*(s,t)\,\mu(t)\,dt=2g(s),\quad \mu(s)-\int_S K^*(s,t)\,\mu(t)\,dt=-2g(s).$$

Здесь

$$K^*(s,t)=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\nu_x}\ln|y-x|=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y_2(t)-x_2(s)}{y_1(t)-x_1(s)}.$$

275. $u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln[(t-x)^2+y^2]\,\varphi(t)\,dt+C.$

Обозначив через $v(x,y)$ сопряженную с $u(x,y)$ гармоническую функцию, получим для $v(x,y)$ задачу Дирихле

$$\Delta v(x,y)=0,\quad y>0,\quad v(x,0)=\int_0^x\varphi(t)\,dt+C=\psi(x). \qquad (*)$$

Предполагая, что для достаточно больших значений $|x|$ имеет место оценка $|\psi(x)|<A|x|^{-\delta}$, $\delta>0$, с помощью формулы Пуассона (см. задачу 242) находим решение $(*)$ в виде

$$v(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}.$$

Зная $v(x,y)$, обычным путем восстанавливаем $u(x,y)$.

276. $u(x,y)=\begin{cases}-R\ln R, & x^2+y^2\leqslant R,\\ -R\ln\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\leqslant R,\end{cases}$

При решении задачи учесть угловую симметрию распределения плотности μ.

277. $u(x,y,z)=\begin{cases}1, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, & x^2+y^2+z^2\geqslant 1.\end{cases}$

278. $u(x,y)=\begin{cases}-x/2, & x^2+y^2<1,\\ x/2r^2, & x^2+y^2>1,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$

279. $u(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$.

280. $u(x, y, z) = \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. 281. $u(x, y) = -y/2$.

282. $u(x, y) = \begin{cases} -1, & x^2 + y^2 < 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$ 283. $\mu = 2x + 8xy$.

284. В переменных $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ уравнение (22) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} + \frac{\lambda}{4} u = 0. \qquad (*)$$

Представляя функцию $J_0\left(\mu \sqrt{(z - t)\bar{z}}\right)$ в виде суммы ряда, получаем

$$u(x, y) = J_0\left(\mu \sqrt{(z - t)\bar{z}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\mu}{2}\right)^{2n} \frac{(z - t)^n \bar{z}^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{4}\right)^n \frac{(z - t)^n \bar{z}^n}{(n!)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{4}\right)^n \frac{(z - t)^{n-1} \bar{z}^{n-1}}{[(n-1)!]^2} = -\frac{\lambda}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^n \frac{(z - t)^n \bar{z}^n}{(n!)^2}.$$

Подставляя выражения для $\dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ и $u(x, y)$ в левую часть $(*)$, убеждаемся в том, что $u(x, y)$ является решением уравнения $(*)$.

285. Так как

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^z J_0\left(\mu \sqrt{(z - t)\bar{z}}\right) f(t)\, dt + \int_0^{\bar{z}} J_0\left(\mu \sqrt{(\bar{z} - \bar{t})z}\right) \bar{f}(\bar{t})\, d\bar{t} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^z \frac{\partial^2 J_0\left(\mu \sqrt{(z - t)\bar{z}}\right)}{\partial z\, \partial \bar{z}} f(t)\, dt + \int_0^{\bar{z}} \frac{\partial^2 J_0\left(\mu \sqrt{(\bar{z} - \bar{t})z}\right)}{\partial z\, \partial \bar{z}} \bar{f}(\bar{t})\, d\bar{t} \right\}$$

и наряду с $J_0\left(\mu \sqrt{(z - t)\bar{z}}\right)$ функция $J_0\left(\mu \sqrt{(\bar{z} - \bar{t})z}\right)$ также является решением уравнения (22), справедливость утверждения очевидна.

286. Допуская, что $u(x, y)$ во внутренней точке $(x, y) \in D$ принимает положительный максимум, приходим к противоречию. Действительно, в точке (x, y) максимума $u(x, y)$ имеем $u_{xx} + u_{yy} < 0$. Так как максимум положителен, а $\lambda < 0$, равенство $u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0$ исключено. Аналогично доказывается и вторая часть утверждения.

287. Да. Это следует из принципа экстремума, сформулированного в задаче 286.

288. Поскольку в полярных координатах $x-\xi = r\cos\varphi$, $y-\eta = r\sin\varphi$ уравнение (22) имеет вид $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\mu^2 u=0$ и $\frac{\partial^2 E}{\partial\varphi^2}=0$, то мы должны иметь

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)-\mu^2 E=0.$$

Справедливость же этого равенства следует из того, что

$$r\frac{\partial E}{\partial r}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{r\mu t e^{r\mu t}\,dt}{\sqrt{t^2-1}},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mu t e^{r\mu t}\,dt}{\sqrt{t^2-1}}+\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mu^2 t^2 e^{r\mu t}\,dt}{\sqrt{t^2-1}}=$$

$$=-\mu^2\int_{-\infty}^{-1}\sqrt{t^2-1}\,e^{r\mu t}\,dt+\mu^2\int_{-\infty}^{-1}\sqrt{t^2-1}\,e^{r\mu t}\,dt+\mu^2\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{r\mu t}\,dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

289. Для определения функции $E(r)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\mu^2 u=0.$$

При $E(r)=\frac{e^{-\mu r}}{r}$, как легко видеть,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial E}{\partial r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r e^{-\mu r}+e^{-\mu r}\right)=\frac{\mu^2}{r}e^{-\mu r}$$

и, стало быть, $\Delta E-\mu^2 E=0$.

290. Пусть точка $x\in D$. Обозначим через D_ε часть области D вне лежащего в D шара $|y-x|\leqslant\varepsilon$ достаточно малого радиуса ε. Так как $\Delta u=\mu^2 u$, $\Delta E=\mu^2 E$, то из формулы Гаусса — Остроградского получаем

$$\int\limits_{|y-x|=\varepsilon}\left[u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu_y}-E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y}\right]d\sigma_y=$$
$$=\int\limits_S\left[u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu_y}-E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y}\right]ds_y.$$

Отсюда, так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 E(\varepsilon)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{e^{-\mu\varepsilon}}{\varepsilon}\right]=-1,$$

в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем

$$-4\pi u(x)=\int\limits_S\left[u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial\nu_y}-E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y}\right]ds_y.$$

291. Интегрируя уравнение $\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0$, получаем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial \bar{z}^2} = \bar{\varphi}_2(\bar{z}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = z\bar{\varphi}_2(\bar{z}) + \bar{\psi}_2(\bar{z}),$$

где $\bar{\varphi}_2(\bar{z})$ и $\bar{\psi}_2(\bar{z})$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = z\bar{\varphi}_1(\bar{z}) + \bar{\psi}_1(\bar{z}) + \lambda_1(z),$$

где $\bar{\varphi}_1(\bar{z}) = \int\limits_0^{\bar{z}} \bar{\varphi}_2(\bar{t})\, d\bar{t}$, $\bar{\psi}_1(\bar{z}) = \int\limits_0^{\bar{z}} \bar{\psi}_2(\bar{t})\, d\bar{t}$. Следовательно, $u = z\bar{\varphi}_*(\bar{z}) + \bar{\psi}_*(\bar{z}) + \bar{z}\chi(z) + \omega(z)$, где $\bar{\varphi}_*(\bar{z}) = \int\limits_0^{\bar{z}} \varphi_1(\bar{t})\, d\bar{t}$, $\bar{\psi}_*(\bar{z}) = \int\limits_0^{\bar{z}} \bar{\psi}_1(\bar{t})\, d\bar{t}$, а $\chi(z)$ и $\omega(z)$ — произвольные аналитические функции комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Так как $u(x, y)$ — действительная функция, то $\chi(z) = \varphi_*(z)$, $\omega(z) = \psi_*(z)$, и поэтому $u = z\bar{\varphi}_*(\bar{z}) + \bar{\psi}_*(\bar{z}) + \bar{z}\varphi_*(z) + \psi_*(z)$. В обозначениях $\varphi_*(z) = \frac{1}{2}\varphi(z)$, $\psi_*(z) = \frac{1}{2}\psi(z)$, получаем $u(x_1, x_2) = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)]$.

292. Функция $E(r) = r^2 \ln r$ получается из формулы

$$u = \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)], \quad z = x_1 - y_1 + i(x_2 - y_2)$$

(см. задачу 291), когда $\psi(z) = 0$, $\varphi(z) = z \ln z = z(\ln|z| + i \arg z)$. Поэтому $E(r)$ при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению (23).

294. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ — нули полинома $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k \lambda^{m-k}$ кратности, соответственно, $\nu_1, \ldots, \nu_\mu$, то рассматриваемый дифференциальный оператор можем записать в виде

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \Delta^{m-k} = a_0 \prod_{k=1}^{\mu} (\Delta - \lambda_k)^{\nu_k}.$$

Отсюда следует справедливость утверждения.

295. Записывая дифференциальный оператор в виде

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

убеждаемся, что как $\varphi(z_1)$, так и $\psi(z_2)$ являются решениями рассматриваемого уравнения. В самом деле, имеем

$$\left\{1 + i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2\right\} \mathrm{Re}\,\varphi''(z_1) = 0,$$

$$\left\{1 + i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2\right\} \mathrm{Re}\,\psi''(z_2) = 0.$$

296. Для корней λ и $\bar\lambda$ квадратного уравнения $c\lambda^2 + 2b\lambda + a = 0$ имеем

$$\lambda = -\frac{b}{c} - \frac{i}{c}\sqrt{ac - b^2}, \quad \bar\lambda = -\frac{b}{c} + \frac{i}{c}\sqrt{ac - b^2}.$$

В переменных $z = x + \lambda y$, $\bar z = x + \bar\lambda y$ рассматриваемое уравнение запишется в виде $u_{z\bar z} = 0$. Следовательно,

$$u(x, y) = \frac{1}{2} f(z) + \frac{1}{2}\bar f(\bar z).$$

297. $u(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\frac{t^2}{a^2}+\frac{\tau^2}{b^2}=1} \frac{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{t - x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tau - y}{b}\right)^2} \varphi(t, \tau)\, ds.$ В результате замены переменных $x = a\xi$, $y = b\eta$, $u(x, y) = u(a\xi, b\eta) = v(\xi, \eta)$ эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ переходит в окружность $\xi^2 + \eta^2 = 1$, а заданное уравнение — в уравнение Лапласа $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0$. Если $v(\xi, \eta)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $\xi^2 + \eta^2 < 1$, то искомое решение дается формулой

$$u(x, y) = v\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right).$$

298. В переменных $z = x + i\,ay$, $\bar z = x - i\,ay$, $w = u + iv$ система записывается в виде $w_{\bar z} = 0$, откуда и следует, что

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(x + i\,ay).$$

299. Для соответствующей однородной задачи Коши

$$u_0(x, y) = 0, \quad v_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S,$$

аналитическая функция (см. задачу 298) $f(z) = u_0 + iv_0$ комплексного переменного $z = x + i\,ay$ во всех точках S обращается в нуль. Отсюда в силу теоремы единственности аналитической функции заключаем, что $f(z)$ тождественно равна нулю, и тем самым единственность решения задачи Коши доказана.

300. Нет. В обозначениях $\xi = \dfrac{1}{a}x$, $\eta = \dfrac{1}{b}y$, $a > 0$, $b > 0$, $u_\xi = v$, $u_\eta = w$ рассматриваемое уравнение приводится к системе Коши — Римана $w_\xi - v_\eta = 0$, $w_\eta + v_\xi = 0$, причем $v(\xi, 0) = 0$, $w(\xi, 0) = 0$ при $\eta = 0$ и $0 \leqslant \xi \leqslant a\varepsilon$. Поэтому (см. ответ к задаче 299) заключаем, что $v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) = 0$ тождественно.

301. В переменных $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$, $w = u + iv$ рассматриваемая система принимает вид $w_{\bar z\bar z} = 0$, откуда и следует справедливость представления (25).

302. На основании формулы (25) заключаем, что на окружности $|t| = 1$

$$\varphi(t) + t\psi(t) = t[f_1(t) + if_2(t)].$$

Отсюда следует: а) задача Дирихле может иметь решение лишь при условии, что функция $t[f_1(t)+if_2(t)]$ является предельным значением на окружности $|t|=1$ аналитической в круге $|z|<1$ функции; б) когда $f_1(t)=f_2(t)=0$, то $\varphi(t)=-t\psi(t)$, $|t|=1$. Поэтому, в силу теоремы единственности аналитической функции, $\varphi(z)=-z\psi(z)$ всюду в круге $|z|\leqslant 1$. Следовательно, однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений

$$u(x,y)+iv(x,y)=(1-z\bar{z})\psi(z).$$

305. Поскольку в силу формулы (8) гл. I характеристический детерминант рассматриваемой системы имеет вид

$$D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{vmatrix}0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & -\lambda_1\\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0\end{vmatrix}=-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2,$$

эта система эллиптична.

Предполагая, что u, v, w, φ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, в результате воздействия на эту систему матричным дифференциальным оператором

$$\begin{Vmatrix}0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0\end{Vmatrix}$$

получаем

$$\begin{Vmatrix}\Delta & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta\end{Vmatrix}(u,v,w,\varphi)=0,$$

откуда и следует гармоничность функций u, v, w, φ.

306. Решение. Следует показать, что в круге d: $|z-z_0|<\delta$ с центром в точке $x_0+iy_0=z_0\in D$ достаточно малого радиуса δ функция $u(x,y)$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося ряда по степеням $x-x_0$ и $y-y_0$. Без ограничения общности полагаем $z_0=0$, $\delta=1$. Представляя аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ комплексного переменного $z=x+iy$ в круге d по формуле Шварца (задача 251), получаем

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{t+z}{t(t-z)}u(t)\,dt=$$

$$=-u(0)+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}\,dt=-u(0)+\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,$$

где $a_k = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)}{t^{k+1}} dt$, $k = 0, 1, \ldots$ Пусть $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Тогда, группируя члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, что возможно в силу его абсолютной сходимости в круге $|z| < 1$, выделяем действительную и мнимую части этого ряда. В результате получаем

$$u(x, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} b_{mk} (x - x_0)^m (y - y_0)^k.$$

307. Достаточно показать, что вблизи каждой точки $x^0 \in D$ гармоническая функция $u(x)$ представляется в виде суммы абсолютно сходящегося ряда по степеням $x_i - x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Предположим, без ограничения общности, что $x^0 = 0$ и шар d: $|x| < 1$ лежит в области D. Функцию $u(x)$ в шаре d представим по формуле Пуассона (задача 228). Запишем ядро этой формулы в виде

$$\frac{1 - |x|^2}{|y - x|^n} = (1 - |x|^2)(1 - p)^{-\frac{n}{2}},$$

где $p = 2(x, y) - |x|^2$ — полином второй степени по переменным $x_1, \ldots, x_n$, (x, y) — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Так как $|p| < 1$ в достаточно малой окрестности точки $x^0 = 0$, то в этой окрестности функция $(1 - p)^{-n/2}$ допускает разложение в ряд по неотрицательным целым степеням p. Таким образом получаем разложение ядра по степеням $x_1, \ldots, x_n$. Проинтегрировав почленно ряд в правой части формулы Пуассона, убеждаемся в справедливости утверждения задачи.

308. Следует воспользоваться интегральным представлением решения (задача 290), в котором функция $E(r)$ определяется по формуле (24), а затем провести рассуждения, аналогичные тем, которые имеются в указании к решению задачи 307.

309. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{g(t)}{t - z} d\xi\, d\eta,$$

$2g(t) = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в области D.

Решение. Введем обозначения $w = u + iv$, $2g = g_1 + ig_2$, $z = x + iy$, $t = \xi + i\eta$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Исходную систему преобразуем к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = g(z). \qquad (*)$$

Как известно (задача 257), одним из частных решений уравнения Пуассона с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = f(z)$$

является функция

$$q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_D f(t) \ln |t - z| \, d\xi \, d\eta.$$

Легко убедиться, что эта формула дает частное решение уравнения Пуассона и для комплекснозначной непрерывной и ограниченной в D функции $f(z) = f_1 + if_2$, где f_1 и f_2 — действительные функции переменных x, y.

Уравнение Пуассона запишем в виде

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z \, \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} f(z). \qquad (**)$$

Сравнивая уравнение $(*)$ с уравнением $(**)$, частное решение которого уже известно, заключаем, что частным решением уравнения $(*)$ является функция

$$w_1 = 4 \frac{\partial q}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2\pi} \int\limits_D g(t) \ln |t - z| \, d\xi \, d\eta,$$

которую, в силу очевидного тождества

$$-2 \frac{\partial}{\partial z} \ln |t - z| = \frac{1}{t - z},$$

запишем в виде

$$w_1(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{g(t)}{t - z} \, d\xi \, d\eta.$$

Учитывая условия Коши — Римана, непосредственной проверкой убеждаемся, что всякая аналитическая функция $\varphi(z) = \varphi_1 + i\varphi_2$ является решением уравнения $w_{\bar{z}} = 0$. Следовательно, общим решением этого уравнения является произвольная аналитическая функция $\varphi(z)$. Поэтому общее решение уравнения $(*)$ имеет вид

$$w(z) = \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{g(t)}{t - z} \, d\xi \, d\eta.$$

310. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = \bar{\varphi}(\bar{z}) - \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{\bar{g}(\bar{t})}{\bar{t} - \bar{z}} \, d\xi \, d\eta,$$

$2g(t) = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в области D, $\overline{\varphi}(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$.

Решение задачи можно получить тем же методом, что и решение задачи 309.

311. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{-x}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z}\, e^{\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

Решение. Пусть $u = u(x, y) = e^{\lambda x + \mu y} U(x, y)$, $v = v(x, y) = e^{\lambda x + \mu y} V(x, y)$, где λ и μ — параметры. Тогда исходная система преобразуется к виду

$$U_x - V_y + (\lambda + 1) U - \mu V = g_1 e^{-(\lambda x + \mu y)},$$
$$U_y + V_x + \mu U + (\lambda + 1) V = g_2 e^{-(\lambda x + \mu y)}.$$

Положив $\lambda = -1$, $\mu = 0$, приходим к системе

$$\begin{aligned} U_x - V_y &= g_1 e^x, \\ U_y + V_x &= g_2 e^x, \end{aligned} \qquad (*)$$

которая аналогична системе задачи 309. Поэтому в обозначениях $W = U + iV$, $G = ge^x$ система $(*)$ сводится к уравнению $W_{\bar z} = G$, общее решение которого, как и при решении задачи 309, записывается по формуле

$$W(z) = \varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{G(t)}{t-z}\, d\xi\, d\eta,$$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D. Отсюда получаем

$$w(z) = e^{x}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z}\, e^{\xi} d\xi\, d\eta\right].$$

312. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{y}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z}\, e^{-\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

Решение можно получить по аналогии с решением задачи 311.

313. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{3x}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z}\, e^{-3\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

314. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{-2y}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z}\, e^{2\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

315. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{-ax}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z} e^{a\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

316. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{ay}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z} e^{-a\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

317. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{-ax+by}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z} e^{a\xi-b\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

318. $u = \frac{1}{a}\operatorname{Re} w(z)$, $v = \frac{1}{b}\operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{-cx}\left[\varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{g(t)}{t-z} e^{c\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

319. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{y}\left[\bar{\varphi}(\bar{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\bar{g}(\bar{t})}{\bar{t}-\bar{z}} e^{-\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

320. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{x}\left[\bar{\varphi}(\bar{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\bar{g}(\bar{t})}{\bar{t}-\bar{z}} e^{-\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

321. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{-2y}\left[\bar{\varphi}(\bar{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\bar{g}(\bar{t})}{\bar{t}-\bar{z}} e^{2\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

322. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{-4x}\left[\overline{\varphi}(\overline{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\overline{g}(\overline{t})}{\overline{t} - \overline{z}} e^{4\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

323. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{ay}\left[\overline{\varphi}(\overline{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\overline{g}(\overline{t})}{\overline{t} - \overline{z}} e^{-a\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

324. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{ax}\left[\overline{\varphi}(\overline{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\overline{g}(\overline{t})}{\overline{t} - \overline{z}} e^{-a\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

325. $u = \operatorname{Re} w(z)$, $v = \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{ax-by}\left[\overline{\varphi}(\overline{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\overline{g}(\overline{t})}{\overline{t} - \overline{z}} e^{-a\xi+b\eta} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

326. $u = \frac{1}{a} \operatorname{Re} w(z)$, $v = \frac{1}{b} \operatorname{Im} w(z)$, где

$$w(z) = e^{cx}\left[\overline{\varphi}(\overline{z}) - \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\overline{g}(\overline{t})}{\overline{t} - \overline{z}} e^{-c\xi} d\xi\, d\eta\right],$$

$2g = g_1 + ig_2$, $t = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D.

327. Воспользоваться формулой Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{\partial D} p\, dx + q\, dy = \int\limits_D (q_x - p_y)\, dx\, dy.$$

328. Применить формулу (26) из задачи 327 к функции $\frac{1}{2\pi i}\frac{f(t)}{t - z}$ и области $D_\varepsilon = D\setminus\overline{O}(z, \varepsilon)$, где $O(z, \varepsilon)$ — круг: $|t - z| < \varepsilon$, а затем в полученном равенстве перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$.

329. Как было показано при решении задачи 309, эта задача сводится к решению уравнения

$$w_{\overline{z}} = g(z), \qquad (*)$$

где $w = u + iv$, $2g = g_1 + ig_2$. Но функцию $w(z)$ можно выразить по формуле (27) (задача 328). Для этого положим в (27) $f(z) = w(z)$, $f_{\overline{t}} = w_{\overline{t}} =$

$= g(t)$. Получим

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{w(t)}{t-z}\, dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{g(t)}{t-z}\, d\xi\, d\eta. \qquad (**)$$

Учитывая, что интеграл типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{w(t)}{t-z}\, dt$$

является аналитической функцией в D, запишем формулу $(**)$ в виде

$$w(z) = \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{g(t)}{t-z}\, d\xi\, d\eta.$$

Аналогично, пользуясь формулой (27), можно получить решение задачи 310.

330. Записывая уравнение Лапласа в комплексной форме $u_{z\bar{z}} = 0$, получаем

$$u_{\bar{z}} = \overline{\psi}'(\bar{z}),$$

где $\psi(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного z. Как и при решении задачи 309, общее решение уравнения $(*)$ получаем в виде

$$u = \varphi_1(z) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{\overline{\psi}'(\bar{t})}{t-z}\, d\xi\, d\eta, \qquad (**)$$

где $\varphi_1(z)$ — произвольная аналитическая функция в D. Так как представление функции $\overline{\psi}(\bar{z})$ по формуле (27) имеет вид

$$\overline{\psi}(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\overline{\psi}(\bar{t})}{t-z}\, dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \frac{\overline{\psi}'(\bar{t})}{t-z} d\xi\, d\eta,$$

то, выражая отсюда интегральное слагаемое в формуле $(**)$, получаем

$$u = \varphi_1(z) + \overline{\psi}(\bar{z}) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{\overline{\psi}(\bar{t})}{t-z}\, dt = \varphi(z) + \overline{\psi}(\bar{z}),$$

где $\varphi(z) = \varphi_1(z) - \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D} \frac{\overline{\psi}(\bar{t})}{t-z}\, dt$ — произвольная аналитическая функция.

331. Исходное уравнение Пуассона в комплексной форме имеет вид $u_{z\bar{z}} = \frac{1}{4} f(z)$, а в обозначении $v = u_z$ оно преобразуется к уравнению $v_{\bar{z}} = \frac{1}{4} f(z)$. Записывая функцию по формуле (27), получаем

$$u_z = v = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{v(t)}{t-z}\, dt - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{D} \frac{f(t)}{t-z}\, d\xi\, d\eta.$$

Учитывая то, что функция $\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{v(t)}{t-z}\,d\xi\,d\eta$ — аналитическая в D, а также тождество $\frac{1}{t-z}=-2\frac{\partial}{\partial z}\ln|t-z|$, имеем

$$u(z)=\varphi(z)+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_D f(t)\ln|t-z|\,d\xi\,d\eta.$$

Интегрируя это равенство по z, получаем

$$u(z)=\int\limits_{z_0}^{z}\varphi(t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_D f(t)\ln|t-z|\,d\xi\,d\eta+\overline{\psi}(\bar z), \qquad (*)$$

где $\psi(z)$ — произвольная аналитическая функция в D. Очевидно, функция $g(z)=\int\limits_{z_0}^{z}\varphi(t)\,dt$ — также аналитическая в области D. Так как $g_{z\bar z}(z)=0$, $\overline{\psi}_{z\bar z}(\bar z)=0$, то из формулы $(*)$ следует требуемое утверждение.

332. $u(x,y)=\varphi(z)+\overline{\varphi}(\bar z)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_D f(t)\ln|t-z|\,d\xi\,d\eta,$

где $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция. (См. решение задачи 331.)

333. $u(x,y)=\operatorname{Re}\left[\bar z\varphi(z)+\psi(z)\right]+\frac{1}{8\pi}\int\limits_D f(t)\left[|t-z|^2\ln|t-z|\right]d\xi\,d\eta.$

Чтобы получить такой результат, обозначим $\Delta u=v$. Тогда исходное уравнение примет вид $\Delta v=f$. Общим действительным решением этого уравнения является (задача 332) функция

$$v(z)\equiv v(x,y)=\varphi(z)+\overline{\varphi}(\bar z)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_D f(t)\ln|t-z|\,d\xi\,d\eta.$$

Учитывая непосредственно проверяемое тождество,

$$2\ln|t-z|=-2+\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}\left(|t-z|^2\ln|t-z|^2\right),$$

имеем

$$v(z)=\varphi(z)+\overline{\varphi}(\bar z)+\frac{1}{4\pi}\int\limits_D f(t)\left[-2+\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}\left(|t-z|^2\ln|t-z|^2\right)\right]d\xi\,d\eta.$$

Имея в виду, что $v=\Delta u=4u_{z\bar z}$, отсюда получаем

$$u_{z\bar z}=\frac{1}{4}\left[\varphi(z)+\overline{\varphi}(\bar z)\right]+\frac{1}{16\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}\int\limits_D f(t)\left[-2+|t-z|^2\ln|t-z|^2\right]d\xi\,d\eta.$$

Непосредственно интегрируя это равенство по z и по $\bar z$, получаем приведенный вид решения

334. Для гармонической функции $u(z) = u(x, y)$ введем обозначение $u_{\bar z} = v$. Тогда, учитывая, что $\Delta u = 4u_{z\bar z} = 0$, имеем $v_z = 0$ и, следовательно, $\bar v_{\bar z} = 0$. Поэтому $\bar v(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного z в D. Обозначив $\bar v(z) = \varphi'(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в области D, имеем

$$v(z) = \overline{\varphi'}(\bar z) = u_{\bar z}.$$

Тогда по формуле (27) для функции u получаем

$$u(x, y) = u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{u(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\overline{\varphi'}(\bar t)}{t-z}\,d\xi\,d\eta,$$

Имея в виду, что по формуле (27)

$$\bar\varphi(\bar z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar\varphi(\bar t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\overline{\varphi'}(\bar t)}{t-z}\,d\xi\,d\eta,$$

находим

$$u(x, y) = u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{u(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{\varphi'}(\bar t)}{t-z}\,dt + \bar\varphi(\bar z).$$

Так как в этой формуле $\varphi(z)$ и интегралы типа Коши — аналитические функции, то $u(x, y)$ — аналитическая функция переменных x, y.

335. Обозначив $w_{\bar z} = \varphi$, получаем $\varphi_{\bar z} = 0$. Следовательно, $\varphi \equiv \varphi(z)$ — аналитическая функция переменного z. Подставляя $w(z)$ и $\bar z\varphi(z)$ по формуле (27), получаем

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\varphi(t)}{t-z}\,d\xi\,d\eta,$$

$$\bar z\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar t\varphi(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\varphi(t)}{t-z}\,d\xi\,d\eta.$$

Из этих равенств находим

$$w(z) = \bar z\varphi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar t\varphi(t)\,dt}{t-z}.$$

Так как $\varphi(z)$ и интегралы типа Коши в правой части полученного равенства являются аналитическими функциями в области D, то в достаточно малой окрестности любой точки $z_0 = x_0 + iy_0$ области D эти функции представляются рядом Тейлора. Отделяя действительные и мнимые части, получаем разложения в степенные ряды функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в этой окрестности.

336. Очевидно, функция $v(x)$ — гармоническая в области D^* и непрерывна в $D \cup D^* \cup (\sigma\setminus\partial\sigma)$. Нетрудно установить, что для каждой точки $x \in D \cup D^* \cup (\sigma\setminus\partial\sigma)$ справедлива теорема о среднем. Тогда, как показано в задаче 237, функция $v(x)$ — гармоническая в $D \cup D^* \cup (\sigma\setminus\partial\sigma)$.

337. $v(x, y) = \begin{cases} u(x, y), & (x, y) \in D, \\ -u(y, x), & (x, y) \in D^*. \end{cases}$

338. Решение задачи можно получить с помощью принципа непрерывного аналитического продолжения.

339, 340. Утверждения вытекают из известного характера поведения аналитической функции $\Phi(z)$ комплексного переменного z вблизи изолированной особой точки $z = \alpha$ этой функции.

341. $u(z) = \frac{1}{\pi} \arg \frac{z+1}{i(z-1)}$,

$$\lim_{z\to 1} u(z) = \frac{3}{2} - \omega, \quad |z| < 1, \quad \arg(z-1) = \pi\omega.$$

Функцию $u(z)$ можно построить по формуле (32), если положить $t' = 1$, $t'' = -1$, $\vartheta' = 0$, $\vartheta'' = \pi$.

342. $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$,

где $u_1(z) = \frac{1}{\pi} \arg \left(\frac{z+1}{z-1} e^{i3\pi/2}\right)$, $u_2(z) = \frac{1}{\pi} \arg \left(\frac{z-1}{z+1} e^{i3\pi/2}\right)$. Решение ищется в виде $u = u_1 - u_2$, где функции u_1 и u_2 — гармонические в рассматриваемом круге и удовлетворяют краевым условиям

$$u_1(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \vartheta < \pi, \\ 0, & \pi < \vartheta < 2\pi, \end{cases} \qquad u_2(e^{i\vartheta}) = \begin{cases} 0, & 0 < \vartheta < \pi, \\ 1, & \pi < \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

343. $u(z) = \frac{1}{\pi} \arg \left(i \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)$. 344. $u(z) = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \arg \frac{z-1}{z+i}$.

345. $u(z) = -\frac{7}{8} - \frac{1}{\pi} \arg \left(\frac{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{z-1}\right)$.

346. $u(z) = \frac{13}{4} + \frac{1}{\pi} \arg \frac{(z+1)^2}{(z-1)(z-i)}$.

347. $u(z) = \frac{13}{8} + \frac{1}{\pi} \arg \frac{z+1}{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}$.

348. Ответ даст следующая лемма Зарембы: *если функция $u(z)$ гармоническая в ограниченной области D и*

$$\lim_{z\to t, z\in D, t\in\partial D} u(z) = 0,$$

кроме конечного числа точек $t_k \in \partial D$, $k = 1, \ldots, N$, причем

$$\lim_{z\to t_k, z\in D} \frac{u(z)}{\ln|z-t_k|} = 0, \quad k = 1, \ldots, N,$$

то $u(z) = 0$ в каждой точке $z \in D$.

Сама лемма является следствием принципа экстремума для гармонических функций.

349. $u(z) = 1$.

350. Пользуясь формулой Шварца

$$f(z) = u(x, y) + i\vartheta(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t+z}{t-z} \frac{u(t)}{t} dt + iC,$$

где C — действительная постоянная, имеем

$$u(z) \equiv u(x, y) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{t+z}{t-z} \frac{u(t)}{t} dt =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \left[2 \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)}{t-z} dt - \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)}{t} dt \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}) \, d\varphi \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{u(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} d\varphi = -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \ln(t-z) \Big|_{t=1}^{t=-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{i} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \arg\left(\frac{z+1}{z-1} e^{-\frac{i\pi}{2}}\right) = \frac{1}{\pi} \arg\left[\frac{z+1}{i(z-1)}\right].$$

Аналогично с помощью формулы Шварца решаются задачи 342—347.

351. Следует иметь в виду, что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, где $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

352. Наряду с функцией $u(z)$ функция $U(z) = Cu(z)$, где $C = \text{const}$, также является гармонической в единичном круге $|z| < 1$ и удовлетворяет, очевидно, краевым условиям (34).

353. $\lim\limits_{z \to t} \ln \frac{(1-x)^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} = \ln \frac{1-x}{1+x}$

при условии, что $|z| < 1$, $|t| = 1$, $t = e^{i\theta}$, $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$.

Рассмотреть функцию $f(z) = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2$ и учесть, что

$$u(z) = \ln \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^2 = \ln \frac{(1-x)^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}.$$

354. Нет (351); Да. (353).

355. $$u(z) = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\frac{a_{2m}}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{m} \binom{2m}{j} z^{2(m-j)} + \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+1}} \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{j} z^{2(m-j)+1} \right] - \frac{a_{2m}(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \right\}, \quad n \text{ — нечетное};$$

$$u(z) = a_0 + \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\frac{a_{2m-1}}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{2m-1}{j} z^{2(m-j)-1} + \frac{a_{2m}}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{m} \binom{2m}{j} z^{2(m-j)} \right] - \frac{a_{2m}(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \right\}, \quad n \text{ — четное}.$$

а) $u(z) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 (x^2 - y^2 + 1) + \frac{1}{4} a^3 (x^3 - 3xy^2 + 3x)$;
По формуле Шварца

$$u(z) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t}\,dt\right].$$

Затем следует учесть, что если x принадлежит единичной окружности $|t| = 1$, то $x = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ и $u(t) = P_3(x) = P_3\left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right)$.

б) $u(z) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4x^2 - 4y^2 + x + 3$.

в) $u(z) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$.

г) $u(z) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + 5x^3 - 15xy^2 + 10x$.

356. Воспользоваться формулой Шварца (см. ответ к задаче 355а)).

357. Воспользоваться конформным отображением $w = f(z)$ единичного круга $|z| < 1$ на полуплоскость $\mathrm{Im}\, w > 0$.

358. $u(x, y) = \mathrm{Re}\,\frac{2}{\pi i}\int\limits_0^\infty \frac{tf(t)}{t^2 - z^2}\,dt, \quad z = x + iy.$

Сначала продолжить нечетно функцию $f(x)$ на отрицательную полуось, а затем воспользоваться результатом задачи 357.

Глава III

359. $x - t = \mathrm{const}$, $x + t = \mathrm{const}$.

360. $(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 - (t - t^0)^2 = 0$, где (x_1^0, x_2^0, t^0) — произвольная фиксированная точка пространства E_3 переменных x_1, x_2, t.

361. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + at = \mathrm{const}$, где a_1, a_2, a_3, a — произвольные действительные постоянные, связанные между собой равенством $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$.

362. В принятых обозначениях имеем

$$\sum_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} = t\int\limits_{|y|=1}\sum_{i=1}^{3}\mu_{z_i z_i}\,ds_y,$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_{|y|=1}\mu(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2, x_3 + ty_3)\,ds_y + t\int\limits_{|y|=1}\sum_{i=1}^{3}\mu_{z_i} y_i\,ds_y\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{t} + \frac{1}{t} I\right) = \frac{1}{t} I_t,$$

где $\mu(z_1, z_2, z_3) = \mu(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2, x_3 + ty_3)$, $I = \int\limits_{|z-x|^2=t^2}\sum_{i=1}^{3}\mu_{z_i}\nu_i\,ds_z$, а $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — внешняя нормаль к сфере $|z - x|^2 = t^2$ в точке z. Так как в силу формулы Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{D} \sum_{i=1}^{3} A_{z_i} d\tau = \int\limits_{\partial D} \sum_{i=1}^{3} A_i \nu_i ds_z,$$

выражение для I можно записать в виде

$$I = \int\limits_{|z-x|^2 \leqslant t^2} \sum_{i=1}^{3} \mu_{z_i z_i} d\tau = \int\limits_0^t \rho^2 d\rho \int\limits_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu \, d\varphi,$$

$$z_1 - x_1 = \rho \sin\vartheta \cos\varphi, \quad z_2 - x_2 = \rho \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z_3 - x_3 = \rho \cos\vartheta,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2},$$

то

$$I_t = t^2 \int\limits_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} \Delta\mu \, d\varphi = t^2 \int\limits_{|y|=1} \sum_{i=1}^{3} \mu_{z_i z_i} ds_y,$$

$$u_{tt} = t \int\limits_{|y|=1} \sum_{i=1}^{3} \mu_{z_i z_i} ds_y.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{3} u_{x_i x_i} - u_{tt} = 0.$

363. Так как функция ψ непрерывна вместе со своими вторыми производными, первое слагаемое в правой части формулы (6) удовлетворяет уравнению (5). Непрерывность же производных третьего порядка функции φ достаточна для существования производных третьего порядка $\dfrac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial t} [tM(\varphi)]$, $\dfrac{\partial^3}{\partial t^3} [tM(\varphi)]$, так что

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial t} [tM(\varphi)] - \frac{\partial^3}{\partial t^3} [tM(\varphi)] = \frac{\partial}{\partial t} \{\Delta [tM(\varphi)]\} - \frac{\partial}{\partial t} \{\Delta [tM(\varphi)]\} = 0.$$

Следовательно, функция (6) удовлетворяет уравнению (5). Кроме того, из (6) находим

$$u(x_1, x_2, x_3, 0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=1} \varphi(x_1, x_2, x_3) \, ds_y = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=1} \psi(x_1, x_2, x_3) \, ds_y + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [tM(\varphi)]_{t=0} =$$

$$= \psi(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{4\pi} [tM(\Delta\varphi)]_{t=0} = \psi(x_1, x_2, x_3).$$

365. Переписав формулу (6) (см. задачу 363) в виде

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|z-x|^2=t^2} \psi(z_1, z_2, z_3)\, ds_z + \\ + \frac{1}{4\pi t^2} \int\limits_{|z-x|^2=t^2} \varphi(z_1, z_2, z_3)\, ds_z + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|z-x|^2=t^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, ds_z,$$

убеждаемся в том, что значение определенной по формуле (6) функции в точке (x_1, x_2, x_3, t) зависит от значений φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ и ψ на сфере $(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + (z_3 - x_3)^2 = t^2$.

366. Когда $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, $\psi = \psi(x_1, x_2)$, формула (6) дает функцию двух переменных, которую можно записать в виде

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|z|^2=t^2} \psi(x_1 + z_1, x_2 + z_2)\, ds_z + \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_{|z|^2=t^2} \varphi(x_1 + z_1, x_2 + z_2)\, ds_z \right\}.$$

При вычислении интегралов в правой части этой формулы следует спроектировать на круг d: $z_1^2 + z_2^2 \leqslant t^2$, $z_3 = 0$ верхнюю и нижнюю половины сферы $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = t^2$. При этом площадь $dz_1\, dz_2$ элемента ds_z сферы $|z|^2 = t^2$ на круг d выражается через ds_z в виде

$$dz_1 dz_2 = ds_z \cos(\widehat{i_3, \nu}) = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}\, ds_z,$$

где i_3 — орт оси x_3, ν — нормаль к сфере $|z|^2 = t^2$ в точке (z_1, z_2, z_3), а $z_3 = \pm\sqrt{t^2 - z_1^2 - z_2^2}$. В результате получим

$$u(x_1, x_2, t) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_d \frac{\psi(x_1 + z_1, x_2 + z_2)}{\sqrt{t^2 - z_1^2 - z_2^2}}\, dz_1 dz_2 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_d \frac{\varphi(x_1 + z_1, x_2 + z_2)}{\sqrt{t^2 - z_1^2 - z_2^2}}\, dz_1 dz_2, \quad (8')$$

откуда, производя замену $x_1 + z_1 = y_1$, $x_2 + z_2 = y_2$, приходим к формуле (8).

367. Проводя рассуждения в ответе к задаче 366 в обратном порядке, формуле (8′) можно придать вид (6), откуда следует, что функция $u(x_1, x_2, t)$ является решением задачи (4), (2).

368. Нет, так как (см. формулу (8)) значение функции $u(x_1, x_2, t)$ в точке (x_1, x_2, t) определяется значениями начальных данных φ и ψ не только на окружности $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 = t^2$, но и во всем круге $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leqslant t^2$.

369. Когда φ и ψ зависят только от одного переменного $x_1 = x$, из формулы (8) (см. ответ к задаче 366) получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^{t} \psi(x + \eta_1)\, d\eta_1 \int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-t}^{t} \varphi\ (x + \eta_1)\ d\eta_1 \int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} \psi(x + \eta_1)\, d\eta_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-t}^{t} \varphi(x + \eta_1)\, d\eta_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \varphi(x + t) + \frac{1}{2} \varphi(x - t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\, d\tau.$$

370. В уравнении (3) сделать замену переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right) = u(x, y)$ и проинтегрировать полученное уравнение.

371. В характеристических переменных $\xi = x + y$, $\eta = 3x + 2y$ уравнение записывается в виде $v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$, интегрируя которое, находим $u = f(x + y) + \varphi(3x + 2y)$, где f и φ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

372. $u = \varphi(y - x) + e^{(x-y)/2}\psi(y - 2x)$.

373. $u = [\varphi(x + 3y) + \psi(3x + y)]e^{(7x+y)/16}$.

374. $u = \left[\varphi(y - 3x) + \psi(3y - x) - \frac{1}{8} x(y - 3x)(3y - x)\right] e^{-(x+y)/16}$. В характеристических переменных $\xi = y - 3x$, $\eta = 3y - x$, $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\eta - 3\xi}{8}, \frac{3\eta - \xi}{8}\right)$ исходное уравнение примет вид

$$32 v_{\xi\eta} + v_\xi - v_\eta - \frac{1}{32} v - (3\xi - \eta)\, e^{(\xi-\eta)/32} = 0,$$

которое после замены $v(\xi, \eta) = e^{(\xi-\eta)/32} w(\xi, \eta)$ переходит в уравнение $32 w_{\xi\eta} - 3\xi + \eta = 0$. Интегрируя последнее уравнение и возвращаясь к переменным x, y, получим ответ.

375. $u = 2e^x + e^{(x+2y)/2}\varphi(x) + \psi(x + 2y)$.

376. $u = e^{x+y/2}[(2x + y)e^{4x+y} + \varphi(2x + y) + \psi(4x + y)]$.

377. $u = \varphi(y + 2x + \sin x) + e^{-(y+2x+\sin x)/4}\psi(y - 2x + \sin x)$.

378. $u = e^y(e^{2y} - e^{2x}) + \varphi(e^y + e^x) + \psi(e^y - e^x)$.

379. $u = y\varphi(x) + \varphi'(x) + \int_0^y (y - \eta)\, e^{-x\eta} f(\eta)\, d\eta$. Пользуясь обозначением $v = u_y$, преобразовать исходное уравнение к виду $v_{xy} + y v_y = 0$.

380. $u = \cos y + x\varphi(y) + \varphi'(y) + \int\limits_0^x (x-\xi)\, e^{-y\xi} f(\xi)\, d\xi.$

Решение искать в виде $u = v + \cos y$. Далее см. указание к задаче 379.

381. $u = \frac{1}{\operatorname{ch} x}\left\{ y\varphi(x) + \varphi'(x) + \int\limits_0^y (y-\eta)\, e^{-x\eta}\psi(\eta)\, d\eta\right\}$. Пользуясь обозначением $v = \operatorname{ch} x\, u_y$, преобразовать исходное уравнение к виду $v_{xy} + yv_y = 0$.

382. $u = e^{-x}\left\{\varphi(y) + \int\limits_0^x e^{\xi - \xi^2 y^2}\psi(\xi)\, d\xi\right\}.$

383. $u = (1+y)(1-e^{-x}) - xy + e^{-x}\left\{\varphi(y) + \int\limits_0^x e^{\xi(1-y)}\psi(\xi)\, d\xi\right\}$. Пользуясь обозначением $u_x + u = e^{-xy}v$, преобразуем исходное уравнение к виду $v_y = -x^2ye^{xy}$, откуда находим v. Далее, подставляя найденное выражение для v в равенство $u_x + u = e^{-xy}v$, придем к уравнению $u_x + u = 1 - xy + e^{-xy}\psi(x)$, интегрируя которое, найдем ответ.

384. $u(x, y) = \varphi\left(x - \frac{2}{3}y^3\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \psi(\alpha)\, d\alpha$. В характеристических переменных $\xi = x - \frac{2}{3}y^3$, $\eta = x + 2y$ исходное уравнение принимает вид $v_{\xi\eta} = 0$, интегрируя которое и используя начальные данные, приходим к ответу.

385. $u(x, y) = (1 + 2x - e^{2x})\, e^y + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_y^{2x+y} \psi(z)\, dz$. Воспользоваться заменой переменных $\xi = y$, $\eta = y + 2x$ в уравнении.

386. $u(x, y) = x + \cos(x - y + \sin x)$. Воспользоваться заменой переменных $\xi = y - x - \sin x$, $\eta = y + x - \sin x$ в уравнении.

387. $$u(x, y) = \frac{3}{2}e^{-y}\varphi(x+y) - \frac{1}{2}\varphi(x+3y) + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+3y)}\int\limits_{x+y}^{x+3y} e^{z/2}\,[3\varphi(z) + 2\psi(z)]\, dz.$$

Сначала с помощью замены переменных $\xi = x + 3y$, $\eta = x + y$ привести исходное уравнение к каноническому виду $v_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}v_\eta$, интегрируя которое, можно получить его общий интеграл.

388. $u(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \cos(x - 1 + e^y) - \cos x$. Для облегчения нахождения общего интеграла исходного уравнения его следует привести к каноническому виду, пользуясь заменой переменных $\xi = x$, $\eta = x + e^y$.

389. $u(x, y) = e^x \operatorname{sh}\left(\frac{y - \cos x}{2}\right) + \sin x \cos\left(\frac{y - \cos x}{2}\right)$. Для приведения уравнения задачи к каноническому виду воспользоваться заменой переменных $\xi = 2x - y + \cos x$, $\eta = 2x + y - \cos x$.

390. $u(x, y) = 2e^{-\frac{1}{4}(2x - y + \cos x)} \cos x \sin \frac{1}{2}(y - \cos x)$. С помощью замены переменных $\xi = 2x - y + \cos x$, $\eta = 2x + y - \cos x$ исходное уравнение задачи приводится к каноническому виду

$$4v_{\xi\eta} + v_\eta = 0,$$

где $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{4}, \frac{\eta - \xi}{2} + \cos\frac{\xi + \eta}{4}\right) = u(x, y)$, общий интеграл которого имеет вид $v(\xi, \eta) = f(\xi) + e^{-\xi/4}F(\eta)$. Здесь f и F — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Возвращаясь к переменным x, y, получим общий интеграл исходного уравнения

$$u = f(2x - y + \cos x) + e^{-\frac{1}{4}(2x - y + \cos x)} F(2x + y - \cos x).$$

Далее, пользуясь начальными условиями, следует определить вид функций f и F.

391. $u(x, y) = 1 - \sin(y - x + \cos x) + e^{y + \cos x} \sin(x + y + \cos x)$. Сначала, пользуясь заменой переменных $\xi = -x + y + \cos x$, $\eta = x + y + \cos x$, привести уравнение задачи к каноническому виду. Далее следовать процедуре, изложенной в указании к решению задачи 390.

392. $u(x, y) = \cos(y - x - \sin x)$.

393. $u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 (e^y - 1) + \sin x + \frac{x^3 - (x - e^y - 1)^3}{6} +$

$$+ \operatorname{arctg}(x + e^y - 1) - \operatorname{arctg} x.$$

394. $u(x, y) = \frac{12(x + y)}{4 + (x + y)^2} + 10 \cos \frac{x + y}{2} - \frac{25(2x + 3y)}{25 + (2x + 3y)^2} -$

$$- 10 \cos \frac{(2x + 3y)}{5}.$$

395. $u(x, y) = \frac{5}{2} \sin \frac{x + y}{2} - \frac{3}{2} \sin \frac{5x + y}{6}$.

396. $u(x, y) = \frac{1}{2} e^{\frac{3y - 5x}{2}} \left[2y + \left(x + y + \frac{3}{4}\right) e^{-(x+y)^2} +\right.$

$$\left. + \left(x - y - \frac{3}{4}\right) e^{-(x-y)^2}\right].$$

397. Для точки $(y, \tau) \in E_{n+1}$ областью зависимости на многообразии $t = 0$ являются: сфера $|x - y|^2 = \tau^2$ при $n = 3$, круг $|x - y|^2 \leqslant \tau^2$ при $n = 2$, отрезок $|x - y|^2 \leqslant \tau^2$ при $n = 1$.

398. $u(x, y) = \varphi(x + y)$.

399. $u(x, y) = \frac{x + y}{2} \cos \frac{x + y}{2} - y \cos x - \sin x +$

$$+ \sin \frac{x + y}{2} + \cos \frac{x + y}{2}.$$

400. $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$. 401. $u(x, y) = e^x \operatorname{sh} y + \varphi(x-y)$.

402. $u(x, y) = \varphi\left(\frac{3x+2y}{5}\right)$.

403. $u(x, y) = \frac{1}{3}\cos\frac{2x-y}{4} - \frac{1}{3}\cos\frac{7y-2x}{4} + \varphi\left(\frac{2x-y}{2}\right)$.

404. $u(x, y) = -4ay + \varphi\left(\frac{5x+2y}{5}\right)$. 405. $u(x, y) = e^{-2y}\varphi\left(\frac{2x-y}{2}\right)$.

406. $u(x, y) = e^{-2(x+y)}\varphi(-x-2y)$.

407. $u(x, y) = 2(x+y)(e^{2y}-1) + e^{2y}\varphi(x+y)$.

408. $u(x, y) = e^{x-2y}\left[e^{-(x+2y)}\varphi(x+2y) - \frac{1}{3}e^{3y} + \frac{1}{3}\right]$.

409. $u(x, y) = e^{\frac{2y^2-3xy}{3}}\varphi\left(\frac{3x-2y}{3}\right)$.

410. $u(x, y) = e^{-xy}\varphi\left(\frac{3x-2y}{3}\right)$.

411. $u(x, y) = e^{\frac{y}{4}\sin(4x+3y)}\varphi\left(\frac{4x+3y}{4}\right)$.

412. $u(x, y) = e^{\frac{y}{4}e^{4x+3y}}\cos\left(\frac{4x+3y}{4}\right)$.

413. Поскольку сторонами характеристического прямоугольника с вершинами в точках (x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3), (x_4, t_4) являются прямые $x - x_1 = t - t_1$, $x - x_2 = t_2 - t$, $x - x_3 = t - t_3$, $x - x_4 = t_4 - t$, то $x_2 - x_1 = t_2 - t_1$, $x_3 - x_2 = t_2 - t_3$, $x_4 - x_3 = t_4 - t_3$, $x_1 - x_4 = t_4 - t_1$. Поэтому в силу формулы (10) имеем

$$u(x_1, t_1) + u(x_3, t_3) = f(x_1 + t_1) + \varphi(x_1 - t_1) + f(x_3 + t_3) + \varphi(x_3 - t_3).$$

$$u(x_2, t_2) + u(x_4, t_4) = f(x_2 + t_2) + \varphi(x_2 - t_2) + f(x_4 + t_4) + \varphi(x_4 - t_4) =$$
$$= f(x_3 + t_3) + \varphi(x_1 - t_1) + f(x_1 + t_1) + \varphi(x_3 - t_3),$$

откуда следует справедливость утверждения.

414. $v(x_1, x_2, x_3, t, \tau) = \frac{t-\tau}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1} g\, d\sigma_\xi$,

где $g = g[x_1 + (t-\tau)\xi_1,\ x_2 + (t-\tau)\xi_2 + x_3 + (t-\tau)\xi_3,\ \tau]$.

417. $u(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^3x_2^2 + \left(3x_1x_2^2 + x_1^3\right)t^2 + x_1t^4 +$
$+ \left(x_1^2x_2^4 - 3x_1^3\right)t + \frac{1}{3}\left(x_2^4 - 9x_1 + 6x_1^2x_2^2\right)t^3 + \frac{1}{5}\left(2x_2^2 + x_1^2\right)t^5 + \frac{1}{35}t^7$.

418. $u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \frac{1}{2}\varphi(x-t) +$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau)\,d\tau_1.$$

420. $u = x_1x_2x_3 + x_1^2x_2^2x_3^2t +$

$$+\frac{1}{3}\left(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2\right)t^3 + \frac{1}{15}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)t^5 + \frac{1}{105}t^7.$$

421. $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3t^2 + x_1x_2t.$

422. $u = e^{x_1}\cos x_2 + t\left(x_1^2 - x_2^2\right).$ 423. $u = x_1^2 + x_2^2 + t + 2t^2.$

424. $u = e^{x_1}\operatorname{ch} t + e^{-x_1}\operatorname{sh} t.$ 425. $u = \dfrac{x_1}{x_1^2 - t^2}.$

426. $u(x, y, z, t) = xyz + t(xy + z) + \dfrac{axt^2}{2} + \dfrac{bt^3}{6}.$

427. $u(x, y, z, t) = z\cos 2t \sin\sqrt{2}(x + y) +$

$$+\left[t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\right]xe^y \cos z.$$

428. $u(x, y, z, t) = x\sin y \cos t + y\cos z \sin t +$

$$+x\left[\frac{t}{2}\ln(1 + t^2) - t + \operatorname{arctg} t\right].$$

429. $u(x, y, z, t) = az + bxy + \dfrac{xy}{a^3}(at - \sin at)\sin az.$

430. $u(x, y, z, t) = 2xy + \dfrac{axyz}{b^2}(bt + e^{-bt} - 1) +$

$$+\frac{1}{2}x\sin\sqrt{2}y\cos\sqrt{2}z\sin 2t.$$

431. $u(x, y, z, t) = x^2yz^2 + \dfrac{a}{b}xyzt +$

$$+yt\sin\omega x e^{\omega z} + yt^2(x^2 + z^2) - \frac{a}{b^2}xyz\sin bt.$$

432. $u(x, y, z, t) = ye^x \sin z + xz\sin y \sin t +$

$$+xyz\left[\frac{t^2 - 1}{2}\ln(1 + t^2) + 2\operatorname{arctg} t - \frac{3}{2}t^2\right].$$

433. $u(x, y, z, t) = xe^y \operatorname{ch} t + ye^z \operatorname{sh} t +$

$$+ayz\left[\frac{t^3}{6} + t - \frac{t}{2}\ln(1 + t^2) - \operatorname{arctg} t\right].$$

434. $u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) + t\psi(x, y, z).$

435. $u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) + t\psi(x, y, z) + \dfrac{t^2}{2}f(x, y, z).$

436. $u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) + t\psi(x, y, z) + f(x, y, z)\displaystyle\int_0^t (t - \tau)g(\tau)\,d\tau.$

437. $u(x, y, z, t) =$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k\varphi + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k\psi + \sum_{k=0}^{l-1}\frac{\Delta^k f}{(2k+1)!}\int_0^t (t - \tau)^{2k+1}g(\tau)\,d\tau.$$

438. $u(x, t) = at + \frac{1}{2} bx^2t^2 + \frac{1}{12} bt^4 + e^{-x} \operatorname{ch} t.$

439. $u(x, t) = x + \frac{axt^3}{6} + \sin x \sin t.$

440. $u(x, t) = at + a(e^{-t} - 1) + b \sin x \cos t + c \cos x \sin t.$

441. $u(x, t) = \frac{at}{b} - \frac{a}{b^2} \sin bt + \cos(x - t).$

442. $u(x, t) = x(t - \sin t) + \sin(x + t).$

443. $u(x, t) = \frac{\varphi(x - t) + \varphi(x + t)}{2} +$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(2k+1)!} g^{(2k)}(x) \int_0^t (t - \tau)^{2k+1} f(\tau)\, d\tau.$$

445. Непосредственно из формулы Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz$$

получаем:

а) когда обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетные,

$$u(0, t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(z)\, dz = 0;$$

б) когда обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четные,

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(-at) + \varphi'(at)}{2} + \frac{\psi(at) - \psi(-at)}{2a} = 0.$$

446. Решение рассматриваемой задачи Коши выражается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau,$$

откуда непосредственно находим:

а) если функция $f(x, t)$ нечетная относительно точки $x = 0$, то

$$u(0, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz = 0;$$

б) если $f(x, t)$ четная относительно точки $x = 0$, то

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \{f[a(t - \tau), \tau] - f[-a(t - \tau), \tau]\}\, d\tau = 0.$$

$$447.\ u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz & \text{при } x>0,\ t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(z)\,dz & \text{при } x>0,\ t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Рассматриваемую задачу редуцируем к задаче Коши на бесконечной прямой. Для этого продолжим начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрицательную полуось оси x нечетно, т. е. построим функции

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0,\\ -\psi(-x), & x<0,\end{cases}$$

и поставим задачу Коши:

$$\begin{gathered}U_{tt}=a^2U_{xx},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0,\\ U(x,0)=\Phi(x),\quad U_t(x,0)=\Psi(x),\quad -\infty<x<\infty.\end{gathered}\tag{$*$}$$

Решение задачи $(*)$, как известно, дается формулой Даламбера

$$U(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz.$$

В силу нечетности функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ имеем $U(0,t)=0$ (см. задачу 445), причем для $x>0$

$$U(x,0)=\Phi(x)=\varphi(x),\quad U_t(x,0)=\Psi(x)=\psi(x).$$

Таким образом, найденная функция $U(x,t)$ при $x\geqslant0$, $t\geqslant0$ удовлетворяет всем условиям задачи 447 и, следовательно, является ее решением, т. е. $u(x,t)=U(x,t)$. Выражая функцию $U(x,t)$ при $x\geqslant0$, $t\geqslant0$ через данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ исходной задачи, получим вид решения $u(x,t)$, приведенный в ответе.

$$448.\ u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\\ \qquad\qquad\text{при } x>0,\quad t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at}\psi(z)\,dz+\right.\\ \qquad\left.+\displaystyle\int\limits_{0}^{at-x}\psi(z)\,dz\right\}\ \text{при } x>0,\quad t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$U(x, 0) = \Phi(x), \quad U_t(x, 0) = \Psi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Ее решение дается формулой Даламбера

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(z)\, dz.$$

В силу четности функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ имеем $U_x(0, t) = 0$ (см. задачу 445), причем для $x > 0$

$$U(x, 0) = \Phi(x) = \varphi(x), \quad U_t(x, 0) = \Psi(x) = \psi(x).$$

Следовательно, функция $U(x, t)$ при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ является искомым решением, т. е. $u(x, t) = U(x, t)$. Выражая функцию $U(x, t)$ при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ через данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ исходной задачи, получим вид решения $u(x, t)$, приведенный в ответе.

449. $$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau, \quad x > 0,\ t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau, \quad x > 0, \quad t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Чтобы получить этот вид решения, продолжим функцию $f(x, t)$ относительно точки $x = 0$ по переменной x нечетно на отрицательную полуось оси x, т. е. построим функцию

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x > 0, \\ -f(-x, t), & x < 0, \end{cases}$$

и рассмотрим задачу Коши:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Решением этой задачи является функция

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(z, \tau) dz\, d\tau. \qquad (*)$$

В силу нечетности функции $F(x, t)$ по x имеем $U(0, t) = 0$ (см. задачу 446), причем при $x > 0$ $U(x, 0) = U_t(x, 0) = 0$. Следовательно, функция $U(x, t)$ при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ является искомым решением, т. е. $u(x, t) = U(x, t)$. Чтобы преобразовать полученное решение к виду, приведенному в ответе, рассмотрим случаи:

1) $x > 0$, $x - at > 0$ $(t < x/a)$.

Тогда

$$x - a(t - \tau) = x - at + a\tau > 0.$$

Поэтому

$$u(x, t) = U(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau;$$

2) $x > 0$, $x - at < 0$ $(t > x/a)$.

Тогда

$$x - a(t - \tau) = x - at + a\tau \begin{cases} < 0, & 0 < \tau < t - x/a, \\ > 0, & \tau > t - x/a. \end{cases}$$

Поэтому

$$u(x, t) = U(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(z, \tau)\, dz\, d\tau + \frac{1}{2a} \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{0} -f(-z, \tau)\, dz\, d\tau + \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_0^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau = \left(\begin{matrix} \text{замена в первом} \\ \text{интеграле } -z \text{ на } z \end{matrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2a} \int\limits_0^{t-\frac{x}{a}} \int\limits_{a(t-\tau)-\tau}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau + \frac{1}{2a} \int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau)\, dz\, d\tau.$$

$$450.\quad u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz\,d\tau, \quad x>0,\ t<\dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\left[\int\limits_0^{a(t-\tau)-x}+\int\limits_0^{x+a(t-\tau)}\right] f(z,\tau)\,dz\,d\tau+\\[2ex] \qquad+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz\,d\tau, \quad x>0,\ t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

Чтобы получить этот вид решения, продолжим функцию $f(x, t)$ относительно точки $x=0$ по переменной x четно на отрицательную полуось оси x, т. е. построим функцию

$$F(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & x>0,\\ f(-x,t), & x<0,\end{cases}$$

и рассмотрим задачу Коши:

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+F(x,t), \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0,$$

$$U(x,0)=U_t(x,0)=0, \quad -\infty<x<\infty.$$

Далее использовать процедуру, изложенную в ответе к задаче 449, учитывая, однако, четность функции $F(x, t)$ по переменному x.

451. Решение искать в виде $u(x, t)=v(x, t)+w(x, t)$, где $v(x, t)$ и $w(x, t)$ — решения задач 447 и 449 соответственно.

452. Решение искать в виде $u(x, t)=v(x, t)+w(x, t)$, где $v(x, t)$ и $w(x, t)$ — решения задач 448 и 450 соответственно.

453. Так как режим на границе вызывает волну, распространяющуюся от края ($x=0$) в направлении оси x, то решение задачи ищем в виде прямой волны $u(x,t)=f(x-at)$. Из начального условия получим $u(x,0)=$ $=f(x)=0$, $x>0$, откуда непосредственно следует справедливость условия $u_t(x, 0)=-af'(x)=0$ при $x>0$. Из краевого условия находим $u(0, t)=$ $=f(-at)=\mu(t)$, $t>0$. Таким образом, $f(z)=0$ при $z\geqslant 0$ и $f(z)=$ $=\mu(-z/a)$ при $z\leqslant 0$, и, следовательно,

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & 0<t\leqslant x/a,\\ \mu\ (t-x/a), & t\geqslant x/a.\end{cases}$$

$$454.\quad u(x,t)=\begin{cases}0, \quad 0<t\leqslant x/a,\\ -a\displaystyle\int\limits_0^{t-x/a}\nu(s)\,ds, \quad t\geqslant x/a.\end{cases}$$

Решение, как и в предыдущей задаче, следует искать в виде прямой волны $u(x, t)=f(x-at)$.

$$455.\quad u(x,t)=\begin{cases}0, \quad 0<t\leqslant x/a,\\ -ae^{h(x-at)}\displaystyle\int\limits_0^{t-x/a}e^{ahs}\varkappa(s)\,ds, \quad t\geqslant x/a.\end{cases}$$

Так как источником колебаний служит возмущенный край $(x=0)$, то решение задачи ищем в виде прямой волны $u(x, t)=f(x-at)$. Из начального условия находим $u(x, 0)=f(x)=0$, $x>0$, откуда непосредственно следует, что $u_t(x, 0)=0$, так как $u_t(x, 0)=-af'(x)=0$, $x>0$. Из краевого условия находим $u_x(0, t)-hu(0, t)=f'(-at)-hf(-at)=\varkappa(t)$, $t\geqslant 0$, или $f'(z)-hf(z)=\varkappa\left(-\frac{z}{a}\right)$, $z\leqslant 0$. Интегрируя последнее уравнение, получим

$$f(z)=-ae^{hz}\int\limits_0^{-z/a} e^{ahs}\varkappa(s)\,ds, \quad z\leqslant 0.$$

Таким образом,

$$f(z)=\begin{cases} 0, & z>0, \\ -ae^{hz}\int\limits_0^{-z/a} e^{ahs}\varkappa(s)\,ds, & z\leqslant 0. \end{cases}$$

Полагая здесь $z=x-at$, получим приведенный выше ответ.

456. Решение искать в виде $u(x, t)=v(x, t)+w(x, t)+z(x, t)$, где $v(x, t)$, $w(x, t)$, $z(x, t)$ — решения задач 447, 449 и 453 соответственно.

457. Решение искать в виде $u(x, t)=v(x, t)+w(x, t)+z(x, t)$, где $v(x, t)$, $w(x, t)$, $z(x, t)$ — решения задач 448, 450 и 454 соответственно.

458. $u(x, t)=xyt-\frac{1}{6}xyt^3$.

459. Действительно, если $w(x, y, t)$ — однородный полином степени $n-2m\geqslant 0$, то ввиду того, что по свойству однородных функций $xw_x+yw_y+tw_t=(n-2m)w$, имеем

$$\Box w\rho^{2m}=2m(2n-2m+1)w\rho^{2m-2}+\rho^{2m}\Box w. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $u_1(x, y, t)=v+\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\rho^{2k}\Box^k v$, где A_k — постоянные, а v — однородный полином степени n. Пользуясь соотношением $(*)$, можем написать

$$\Box u_1=\Box v+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left[2k(2n-2k+1)\rho^{2k-2}\Box^k v+\rho^{2k}\Box^{k+1}v\right].$$

В предположении, что $2k(2n-2k+1)A_k=-A_{k-1}$, $k\geqslant 2$, $2(2n-1)A_1=-1$, получаем $\Box u_1=0$. Если теперь принять $\Box v=\Phi$, $u=u_1+v$, то получим $\Box u=\Phi$, что и требовалось.

460. См. задачу 155.

461. Их всего семь: x^3+3xt^2, x^2y+yt^2, xy^2+xt^2, y^3+3yt^2, $x^2t+\frac{1}{3}t^3$, $y^2t+\frac{1}{3}t^3$, xyt.

462. При $n=1$ их число равно двум. Когда же $n\geqslant 2$, искомые многочлены могут быть получены из формулы (7) в виде

$$u(x_1, \ldots, x_n, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{2m}}{(2m)!}\Delta^m x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \Delta^m x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n},$$

где $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$ — линейно независимые одночлены степеней k и $k-1$. Поскольку их числа равны соответственно $\binom{k+n-1}{n-1}$ и $\binom{k+n-2}{n-1}$, то число l искомых полиномов определяется формулой

$$l = \binom{k+n-1}{n-1} + \binom{k+n-2}{n-1}.$$

465. $k = (n-2)/2$. 467. $\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = m_{n+1}^2$.

468. Если искать решение u уравнения (5) как функцию r, t, то в этом случае (см. задачу 152, г)) уравнение (5) можно записать в виде

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial^2 (ru)}{\partial^2 r} - \frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2}\right] = 0,$$

откуда находим (см. задачу 370)

$$ru(r, t) = f_1(r+t) + f_2(r-t).$$

470. Пользуясь записью оператора Лапласа $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ в сферической системе координат, получаем выражение

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \Box\,[\varphi(r+t) + \psi(r-t)] =$$
$$= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}[r\varphi(r+t) + r\psi(r-t)] - \frac{\partial^2}{\partial t^2}[r\varphi(r+t) + r\psi(r-t)]\right\} =$$
$$= 2r^{-1}[\varphi'(r+t) + \psi'(r-t)],$$

являющееся решением уравнения (5) (см. задачу 468).

471. Пользуясь представлением решений вида $u(r, t)$ уравнения (5) (см. задачу 468), получаем

$$u(r, t) = \frac{(r+t)\,\varphi(r+t) + (r-t)\,\varphi(r-t)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} \tau\psi(\tau)\,d\tau.$$

472. Достаточно показать, что решение $u(x, t)$ однородной задачи

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{tt} = 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$$

тождественно равно нулю.

Пусть (x_1^0, x_2^0, t^0), $t^0 > 0$ — произвольная точка, а K — конус $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} = t_0 - t$. Обозначим через D область пространства переменных x_1, x_2, t, ограниченную конусом K и плоскостью $t = 0$. Интегрируя по области D очевидное тождество

$$(u_{x_1}^2)_t + (u_{x_2}^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_t u_{x_1})_{x_1} - 2(u_t u_{x_2})_{x_2} = 0,$$

пользуясь при этом формулой Гаусса — Остроградского и равенствами $v(x_1, x_2, 0) = u_t(x_1, x_2, 0) = 0$, получаем

$$\int\limits_K \frac{1}{\nu_3}\left[\left(u_{x_1}\nu_3 - u_t\nu_1\right)^2 + \left(u_{x_2}\nu_3 - u_t\nu_2\right)^2\right] ds = 0,$$

где $\nu_3 = 1/\sqrt{2}$, $\nu_1^2 + \nu_2^2 = \nu_3^2$. Следовательно, на K равны нулю внутренние производные $u_{x_1}\nu_3 - u_t\nu_1$ и $u_{x_2}\nu_3 - u_t\nu_2$, а это означает, что $u = \text{const}$ на K, т. е. $u = 0$ на K. В силу произвольности точки $\left(x_1^0, x_2^0, t\right)$ заключаем, что $u(x_1, x_2, t) = 0$ всюду в области определения (распространения) волны.

473. $|m|\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right)^{-1/2}$.

474. Нет, ибо рассматриваемая функция не удовлетворяет волновым уравнениям.

475. Скорость волны равна $a/\sqrt{3}$.

476. Параллелограмм, ограниченный прямыми:

$$x - 5t = l_1, \quad x + 5t = l_2, \quad x + 5t = l_1, \quad x - 5t = l_2.$$

477. Тор, полученный вращением вокруг оси t квадрата, ограниченного прямыми $x_1 - t = 1$, $x_1 + t = 1$, $x_1 - t = 2$, $x_1 + t = 2$, лежащими в плоскости x_1, t.

478. Область, ограниченная конусами:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} = \frac{1}{2}(1 - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} = \frac{1}{2}(1 + t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

479. Общая область влияния состоит из двух областей, ограниченных прямыми

$$x - t = -1, \quad x + t = 1, \qquad t > 1;$$
$$x - t = 1, \qquad x + t = -1, \quad t < -1.$$

480. Так как прямая $x - t = 0$ является носителем данных

$$u(x, x) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_1(x),$$

то в силу (10) $f(2x) + \varphi(0) = f_1(x)$, $\sqrt{2}f'(2x) = \varphi_1(x)$ или $f(x) = f_1\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi(0)$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1\left(\frac{x}{2}\right)$. Следовательно, задача будет иметь решение, лишь когда

$$f_1'(x) = \sqrt{2}\,\varphi_1(x).$$

При соблюдении этого условия решение задачи дается формулой

$$u(x, t) = f_1\left(\frac{x + t}{2}\right) - \varphi(0) + \varphi(x - t),$$

где φ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, и, стало быть, оно не единственно.

481. Носители данных Коши могут служить прямые $t = x/k$ лишь при $|k| \neq 1$.

а) Предполагая, что $k > 0$, $k \neq 1$, $\nu = (1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ и носителем данных является отрезок AB прямой $t = \frac{1}{k}x$, где $A = A(0,\ 0)$, $B = B(1,\ 1/k)$, и

$$u\,|_{AB} = f_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{AB} = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

из формулы (10) получаем

$$f\left(\frac{k+1}{k}x\right) + \varphi\left(\frac{k-1}{k}x\right) = f_1(x),$$

$$\sqrt{2}f'\left(\frac{k+1}{k}x\right) = \varphi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^x \varphi_1\left(\frac{k}{k+1}\tau\right)d\tau + f(0),$$

$$\varphi(x) = f_1\left(\frac{k}{k-1}x\right) - \frac{k+1}{k\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{k}{k-1}x} \varphi_1(\tau)\,d\tau - f(0),$$

и искомое решение записывается в виде

$$u(x,t) = f_1\left[\frac{k}{k-1}(x-t)\right] + \frac{k+1}{k\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{k}{k-1}(x-t)}^{\frac{k}{k+1}(x+t)} \varphi_1(\tau)\,d\tau.$$

б) Областью зависимости для точки $(x,\ t)$ является пересечение отрезков AB и CD, где $C = C\left[\frac{k}{k-1}(x-t),\ \frac{1}{k-1}(x-t)\right]$, $D = D\left[\frac{k}{k+1}(x+t),\ \frac{1}{k+1}(x+t)\right]$, прямой $x = kt$. Области влияния ограничены прямыми $x + t = 0$, $x = kt$, $x - 1 = t - \frac{1}{k}$ и $x - t = 0$, $x = kt$, $x - 1 = \frac{1}{k} - t$ соответственно. Областью определения является прямоугольник, ограниченный прямыми $x - t = 0$, $x - 1 = \frac{1}{k} - t$, $x + t = 0$, $x - 1 = t - \frac{1}{k}$.

в) Устойчивость решения следует из формулы, дающей это решение.

482. Носителем данных годится любая дуга S рассматриваемой окружности, расположенная внутри ее дуг с концами в точках

$$A(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}) \text{ и } B(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}),$$
$$B(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}) \text{ и } C(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}),$$
$$C(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}) \text{ и } D(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}),$$
$$D(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}) \text{ и } A(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}).$$

Пусть Q и Q' — точки пересечения с дугой S выходящих из точки $P(x, y)$ характеристик L_1: $\xi - x = t - \tau$ и L_2: $\xi - x = \tau - t$ уравнения (3). Интегрируя тождество $(u_\xi)_\xi - (u_\tau)_\tau = 0$ по области, ограниченной отрезками PQ, $Q'P$ характеристик L_1, L_2 и частью QQ' дуги S, и применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$u(P) = \frac{1}{2} F(Q) + \frac{1}{2} F(Q') + \frac{1}{2} \int\limits_Q^{Q'} \left[\cos 2\theta\, \Phi(\xi, \eta) - \sin 2\theta\, F'_\theta(\xi, \eta)\right] d\theta,$$

где $\xi = \cos\theta$, $\eta = \sin\theta$.

483. $u(P) = \frac{1}{2} F(Q) + \frac{1}{2} F(Q') +$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_Q^{Q'} \left[\left(\tau_s^2 - \xi_s^2\right) \Phi(\xi, \tau) - (\tau_s \tau_N - \xi_s \xi_N) F'_s\right] \frac{ds}{\tau_s \xi_N - \xi_s \tau_N},$$

где Q, Q' — точки пересечения выходящих из $P(x, t)$ характеристик $\xi - x = t - \tau$, $\xi - x = \tau - t$ с дугой S кривой $\xi = f(\tau)$ (см. задачу 482).

484. Областью распространения волны является прямоугольник, ограниченный характеристиками $x - x_0 = t - t_0$, $x - x_0 = t_0 - t$, $x - x_1 = t - t_1$, $x - x_1 = t_1 - t$. Единственность получается обычным рассуждением, если интегрировать тождество $\left(u_\xi^2\right)_\tau + \left(u_\tau^2\right)_\tau - 2\left(u_\tau u_\xi\right)_\xi = 0$ по области, ограниченной прямыми $\xi - x = \tau - t$, $\xi - x = t - \tau$ и дугой S.

485. $a^2 + b^2 - c^2 < 0$; $u(x_1, x_2, t) = t$.

486. $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0)$.

487. Область распространения волны ограничена прямыми $x - t = 0$, $x + t = 0$, $x - a = a - t$, $x - b = t + b$.

488. Интегрируя тождество

$$\left(u_{x_1}^2\right)_t + \left(u_{x_2}^2\right)_t + \left(u_t^2\right)_t - 2\left(u_{x_1} u_t\right)_{x_1} - 2\left(u_{x_2} u_t\right)_{x_2} = 0$$

по области, ограниченной конусом $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 - t$ и плоскостью $t = h$, $h < 1$, где h — произвольная постоянная, получаем $u = u_t = 0$ при $t = h$. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши (см. задачу 472) убеждаемся в справедливости утверждения.

489. В силу формулы из задачи 459 имеем

$$u(x, y, t) = \frac{1}{18}\left(x^2 + y^2 - t^2\right) xyt.$$

490. Область распространения волны ограничена конусами

$$t = -\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad -h \leqslant t \leqslant 0,$$

$$t = -2h + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad -2h \leqslant t \leqslant -h.$$

Доказательство единственности решения получается повторением рассуждений, использованных при решении задачи 472 с заменой начальных условий условием рассматриваемой задачи.

491. Нет, так как решение задачи Гурса с данными на смежных сторонах характеристического прямоугольника определяется однозначно (см. задачу 486 или 487).

492. Нет, поскольку соответствующая однородная задача имеет нетривиальные решения

$$u(x, t) = \begin{cases} \omega\left(\frac{x+t}{2}\right) - \omega\left(\frac{x-t}{2}\right) & \text{при} \quad x - t \geqslant 0, \\ \omega\left(\frac{x+t}{2}\right) - \omega\left(\frac{t-x}{2}\right) & \text{при} \quad x - t \leqslant 0, \end{cases}$$

где ω — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $\omega'(0) = \omega''(0) = 0$.

493. Нет, ибо соответствующая однородная задача имеет нетривиальные решения

$$u(x, t) = \begin{cases} \omega\left(\frac{x+t}{2}\right) - \omega\left[\frac{3}{2}(x-t)\right], & \frac{x}{2} \leqslant t \leqslant x, \\ \omega\left(\frac{x+t}{2}\right) - \omega\left(\frac{t-x}{2}\right), & t \geqslant x, \end{cases}$$

где ω — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $\omega'(0) = \omega''(0) = 0$.

494. Общее решение уравнения (3) (см. (10)) имеет вид

$$u(x, t) = f_1(x+t) + f_2(x-t).$$

Отсюда, пользуясь данными задачи на границе области D, находим

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u(x, kx) &= f_1(x + kx) + f_2(x - kx) = \psi(x). \end{aligned} \qquad (*)$$

Исключая f_1 из последних двух уравнений, получаем функциональное уравнение вида (15)

$$f_2(x) - f_2\left(\frac{1-k}{1+k}x\right) = \varphi(x) - \psi\left(\frac{x}{1+k}\right).$$

Пользуясь формулой (16), запишем решение этого уравнения в виде

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\varphi(\alpha^m x) - \psi\left(\frac{\alpha^m}{1+k}x\right)\right\},$$

где $\alpha = \frac{1-k}{1+k}$. Подставляя найденное выражение для f_2 в равенства $(*)$, получим

$$f_1(x) = \varphi(x) - \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\varphi(\alpha^m x) - \psi\left(\frac{\alpha^m}{1+k}x\right)\right\}.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \varphi(x+t) - \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi[\alpha^m(x+t)] - \psi\left[\frac{\alpha^m}{1+k}(x+t)\right]\right\} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi[\alpha^m(x-t)] - \psi\left[\frac{\alpha^m}{1+k}(x-t)\right]\right\}.$$

495. Из общего решения (10) уравнения (3), записанного в виде

$$u(x, t) = f_1(x+t) + f_2(x-t),$$

имеем

$$f_1\left(\frac{3}{4}x\right) + f_2\left(\frac{5}{4}x\right) = x, \quad f_1\left(\frac{5}{4}x\right) + f_2\left(\frac{3}{4}x\right) = x.$$

Отсюда находим, что $f_1(x) = \frac{1}{2}x$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x$. Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(x+t) + \frac{1}{2}(x-t) = x.$$

Единственность решения следует из той же формулы.

496. Область распространения волны ограничена прямыми $x = -\frac{1}{4}a$, $x = \frac{1}{4}a$, $x - t = \frac{5}{4}a$, $x + t = \frac{5}{4}a$.

497. $u(x, t) = \sin(x+t) - \sum_{m=0}^{\infty}\sin\left(\frac{3}{5}\right)^m(x+t) + \sum_{m=0}^{\infty}\sin\left(\frac{3}{5}\right)^m(x-t) + 4t.$

498. Область распространения волны ограничена прямыми $t = 0$, $t = \frac{1}{4}x$, $x - t = 1$, $x + t = \frac{5}{4}$.

499. $u(x, t) = \varphi(x-t) + \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \psi\left(\frac{x-t}{2}\right)$. Область распространения волны ограничена прямыми $x + t = 0$, $x - t = 0$, $x - t = a$, $x + t = 2a$.

500. $$u(x, t) = \varphi(x+t) - \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi\left[\frac{1}{3^m}(x+t)\right] - \psi\left[\frac{2}{3^{m+1}}(x+t)\right]\right\} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varphi\left[\frac{1}{3^m}(x-t)\right] - \psi\left[\frac{2}{3^{m+1}}(x-t)\right]\right\}.$$

Область распространения волны ограничена прямыми $x + t = 0$, $t = x$, $x - t = \frac{2}{3}$, $x + t = 1$.

501. $u(x, t) = \frac{1}{8}(x+t)^3 + (x-t)^2 + \frac{1}{8}(x-t)^3$. Область распространения волны ограничена прямыми $t + x = 0$, $x - t = 0$, $t - x = 2$, $x + t = 4$.

502. $u(x, t) = \sin(t-x)$. Область распространения волны ограничена прямыми $t+x=0$, $x=t$, $t-x=1$, $x+t=4$.

503. $$u(x, t) = \varphi(x+t) - \sum_{k=0}^{\infty} \{\varphi[\theta^k(x+t)] -$$
$$- \varphi[\theta^k(x-t)] - \psi[\omega(\theta^k(x+t))] + \psi[\omega(\theta^k(x-t))]\},$$
где $x = \omega(\xi)$ — решение уравнения $x + \tau(x) = \xi$, $\theta(\xi) = \omega(\xi) - \tau[\omega(\xi)]$, а $\theta^k(x) = \theta^{k-1}(x)\theta(x)$, $\theta^0(\xi) = \xi$. Область распространения волны ограничена прямыми $x+t=0$, $t=x$, $x+t=1+\tau(1)$, $x-t=1$.

504. $u(x, t) = x$. Область распространения волны ограничена линиями $t=x$, $x+t=0$, $x-t=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x+t=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

505. $$u(x, t) = 8\sum_{k=0}^{\infty} \{[1-\sqrt{1+\theta^k(x+t)}]^3 - [1-\sqrt{1+\theta^k(x-t)}]^3\},$$
где $\theta(\xi) = 4(1+\xi) - \xi - 4$, $\theta^0(\xi) = \xi$, $\theta^k = \theta^{k-1}\theta$. Область распространения волны ограничена прямыми $x-t=0$, $x+t=0$, $x+t=2$, $x-t=2$.

506. Из общего решения (10) уравнения (3), записанного в виде $u(x, t) = f_1(x+t) + f_2(x-t)$, имеем $f_1(2x) = \varphi(x) - f_2(0)$, $2f_2'(2x) = \psi(x)$. Отсюда находим
$$f_1(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - f_2(0), \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \psi\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau + f_2(0).$$
Следовательно, $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{x-t}\psi\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau$. Единственность решения следует из этой же формулы.

507. $u(x, t) = \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \psi(0) - \int_0^{x-t}\varphi(\tau)\,d\tau$. Область распространения волны ограничена прямыми $t=x$, $x+t=0$, $x-t=a$, $x+t=2b$.

508. Нет. Задача имеет решение лишь при условии $\varphi'(x) = \psi(x)$. Если это условие соблюдено, то решение задачи имеет вид
$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - f(x-t),$$
где f — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $f(0) = \varphi(0)$.

509. В характеристических переменных $\xi = x+t$, $\eta = x-t$ уравнение (3) принимает вид $v_{\xi\eta} = 0$, где $v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$. Функция Римана $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ для этого уравнения единственным образом определяется из условий
$$R(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 1, \quad \frac{\partial R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial\eta} = \frac{\partial R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial\xi} = \frac{\partial^2 R}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0.$$
Всем этим условиям, очевидно, удовлетворяет функция $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \equiv 1$.

510. Условия задачи Коши по данным на дуге σ можно записать в виде

$$v(\xi, \eta)\big|_\sigma = \varphi(P'), \quad \frac{\partial v}{\partial N}\bigg|_\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \xi} = \psi(P'),$$

и, стало быть, в силу формулы (20) получаем

$$v(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\varphi(Q) + \frac{1}{2}\varphi(Q') - \frac{1}{2}\int\limits_{QQ'} \psi(P')\, ds_{P'},$$

где Q и Q' — точки пересечения прямых $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$ с дугой σ: $\xi_1 = \xi_1(s)$, $\eta_1 = \eta_1(s)$.

Условия же задачи Гурса, например,

$$u(x, x) = \varphi(x), \quad u(x, -x) = \psi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0)$$

для функции v имеют вид

$$v(\xi, 0) = u\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad v(0, \eta) = u\left(\frac{\eta}{2}, -\frac{\eta}{2}\right) = \psi\left(\frac{\eta}{2}\right).$$

Поэтому из формулы (19) получаем

$$u(x, t) = v(\xi, \eta) = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) + \psi\left(\frac{\eta}{2}\right) - \varphi(0) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0).$$

511. Запишем рассматриваемое уравнение в характеристических координатах $\xi = x + t$, $\eta = x - t$:

$$v_{\xi\eta} + \frac{\lambda}{4} v = 0, \quad \text{где } v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Представляя бесселеву функцию $J_0(\mu\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)})$ в виде суммы степенного ряда

$$J_0\left(\mu\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k \frac{(\xi-\xi_1)^k(\eta-\eta_1)^k}{(k!)^2},$$

находим

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial\xi\,\partial\eta} = -\frac{\lambda}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k \frac{(\xi-\xi_1)^k(\eta-\eta_1)^k}{(k!)^2} = -\frac{\lambda}{4}J_0,$$

откуда и следует, что $\frac{\partial^2 J_0}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\lambda}{4}J_0 = 0$. Кроме того, $\frac{\partial J_0(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1)}{\partial\eta} = 0$, $\frac{\partial J_0(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1)}{\partial\xi} = 0$, $J_0(\xi_1, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = 1$. Следовательно, функция $J_0(\mu\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)})$ удовлетворяет всем требованиям, которые однозначно ее определяют.

512. Ввиду того, что условия задачи Коши для функции u дают соответствующие условия для v,

$$v(\xi, \xi) = \varphi(\xi), \quad \frac{\partial v}{\partial N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\xi),$$

и, кроме того, $ds_{P'} = \sqrt{2}\,d\xi_1$, $P = P(\xi, \eta)$, $Q = Q(\xi, \xi)$, $Q' = Q'(\eta, \eta)$, $v(\xi, \xi) = \varphi(x+t)$, $v(\eta, \eta) = \varphi(x-t)$, $R(Q, P) = 1$, $R(Q', P) = 1$, из (19) получаем

$$u(x, t) = v(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \frac{1}{2}\varphi(x-t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} J_0\left(\mu\sqrt{(x+t-\xi_1)(x-t-\xi_1)}\right)\psi(\xi_1)\,d\xi_1 -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \frac{\partial}{\partial\eta_1}\right) J_0\left(\mu\sqrt{(\xi-\xi_1)(\eta-\eta_1)}\right)\Big|_{\eta_1=\xi_1}\varphi(\xi_1)\,d\xi_1.$$

513. Условия задачи Гурса для $u(x, t)$ порождают условия для $v(\xi, \eta)$:

$$v(\xi, \xi) = u\left(\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad v(\eta, \eta) = u\left(\frac{\eta}{2}, -\frac{\eta}{2}\right) = \psi\left(\frac{\eta}{2}\right).$$

Кроме того, $R(\xi, 0; \xi, \eta) = 1$, $R(0, \eta; \xi, \eta) = 1$, $R(0, 0; \xi, \eta) = J_0(\mu\sqrt{x^2 - t^2})$. Поэтому искомое решение в силу формулы (19) имеет вид

$$u(x, t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - J_0\left(\mu\sqrt{x^2-t^2}\right)\varphi(0) -$$

$$- \int_0^{x+t}\frac{\partial}{\partial\tau}J_0\left(\mu\sqrt{(\tau-x-t)(t-x)}\right)\varphi\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau -$$

$$- \int_0^{x-t}\frac{\partial}{\partial\tau}J_0\left(\mu\sqrt{(x+t)(x-t-\tau)}\right)\psi\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau.$$

514. Искомое решение в силу (19) дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^{\xi}d\xi_1\int_0^{\eta}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k\frac{(\xi-\xi_1)^k(\eta-\eta_1)^k}{(k!)^2}\,d\eta_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k\frac{\xi^{k+1}\eta^{k+1}}{[(k+1)!]^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\lambda}{4}\right)^k\frac{(x^2-t^2)^{k+1}}{[(k+1)!]^2}.$$

515. Решение задачи Коши. В результате замены искомой функции $u(x, t) = e^{-\frac{a}{2}x}v(x, t)$ для $v(x, t)$ получаем задачу Коши:

$$v_{xx} - v_{tt} = 0, \quad v(0, t) = \varphi(t), \quad v_x(0, t) = \frac{a}{2}\varphi(t) + \psi(t).$$

Пользуясь общим решением уравнения колебаний струны $v(x, t) = f_1(x+t) + f_2(x-t)$, заключаем, что

$$f_1(t) + f_2(-t) = \varphi(t), \quad f_1'(t) + f_2'(-t) = \frac{a}{2}\varphi(t) + \psi(t),$$

или

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{a}{2}\varphi(\tau) + \psi(\tau)\right] d\tau + C,$$

$$f_2(-t) = \frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{a}{2}\varphi(\tau) + \psi(\tau)\right] d\tau - C,$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно,

$$u(x, t) = e^{-\frac{a}{2}x} v(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{a}{2}x}\left\{\varphi(x+t) + \varphi(t-x) + \int_{t-x}^{x+t} \left[\frac{a}{2}\varphi(\tau) + \psi(\tau)\right] d\tau\right\}.$$

Решение задачи Гурса. Сделав замену $u(x, t) = e^{-\frac{a}{2}x} v(x, t)$, получим задачу Гурса для функции $v(x, t)$:

$$v_{xx} - v_{tt} = 0, \quad v(x, x) = e^{\frac{a}{2}x}\varphi(x), \quad v(x, -x) = e^{\frac{a}{2}x}\psi(x).$$

Следовательно,

$$u(x, t) = e^{-\frac{a}{2}x} v(x, t) = e^{-\frac{a}{2}x}\left\{e^{\frac{a}{4}(x+t)}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + e^{\frac{a}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0)\right\}.$$

516. Решение задачи Коши:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{b}{2}x}\varphi(x+t) + e^{\frac{b}{2}x}\varphi(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} e^{\frac{b}{2}(t-\tau)}\psi(\tau)\, d\tau.$$

Решение задачи Гурса:

$$u(x, t) = e^{\frac{b}{2}t}\left[e^{-\frac{b}{4}(x+t)}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + e^{\frac{b}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0)\right].$$

517. Решение задачи Коши:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{a}{2}x + \frac{b}{2}t}\left\{e^{-\frac{b}{2}(x+t)}\varphi(x+t) + e^{\frac{b}{2}(x-t)}\varphi(t-x) + \right.$$

$$\left. + \int_{t-x}^{t+x} e^{-\frac{b}{2}\tau}\left[\frac{a}{2}\varphi(\tau) + \psi(\tau)\right] d\tau\right\}.$$

Решение задачи Гурса:

$$u(x, t)=e^{-\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}t}\left[e^{\frac{(a-b)(x+t)}{4}}\varphi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{(a+b)(x-t)}{4}}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)\right].$$

518 (515). $u(x, t)=e^{-\frac{a}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{-\frac{a}{2}t}\varphi(x-t)-e^{-\frac{a}{4}(x+t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right).$

(516). $u(x, t)=e^{-\frac{b}{4}(x-t)}\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{b}{2}t}\varphi(x-t)-e^{-\frac{b}{4}(x-3t)}\psi\left(\frac{x-t}{2}\right).$

(517). $u(x, t)=e^{-\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}t}\left[e^{\frac{(a-b)(x+t)}{4}}\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{a(x-t)}{2}}\varphi(x-t)-\right.$

$$\left.-e^{\frac{(a-b)(x-t)}{4}}\psi(x-t)\right].$$

519. В переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$ система записывается в виде $u_\xi+u_\eta-v_\xi+v_\eta=0$, $u_\xi-u_\eta-v_\xi-v_\eta=0$, или $(u-v)_\xi=0$, $(u+v)_\eta=0$. Поэтому $u-v=2f_1(\eta)$, $u+v=2f(\xi)$. Отсюда

$$u(x, y)=f(x+y)+f_1(x-y),\quad v(x, y)=f(x+y)-f_1(x-y).$$

520. $u(x, y)=\frac{1}{2}[\varphi(x+y)+\psi(x+y)+\varphi(x-y)-\psi(x-y)],$

$$v(x, y)=\frac{1}{2}[\varphi(x+y)+\psi(x+y)-\varphi(x-y)+\psi(x-y)].$$

521. $u(x, y)=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+\psi(0),$

$$v(x, y)=\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\varphi(0).$$

522. $u(x, y)=\varphi(x+y)+\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x-y}{2}\right),$

$$v(x, y)=\varphi(x+y)+\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\varphi(0)-\psi(0).$$

523. $u(x, y)=\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\varphi(x-y)-\psi\left(\frac{x-y}{2}\right),$

$$v(x, y)=\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)-\varphi(x-y)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)+\varphi(0)-\psi(0).$$

524. $u(x, y)=f_1(x+y)+f_2(x-y),$

$$v(x, y)=f_1(x+y)-f_2(x-y),$$

где $f_1(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\varphi\left(\frac{\tau}{3^k}\right)+\psi\left(\frac{2\tau}{3^{k+1}}\right)\right]$, $f_2(\tau)=\varphi(\tau)-f_1(\tau)$.

525. Характеристический детерминант для рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} a\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix}=a\lambda_1^2-\lambda_2^2.$$

откуда следует, что для гиперболичности этой системы необходимо и достаточно условие $a > 0$. В результате неособой замены независимых переменных $\xi = x + \sqrt{a}y$, $\eta = x - \sqrt{a}y$ система принимает вид

$$\sqrt{a}u_\xi + \sqrt{a}u_\eta + v_\xi - v_\eta = 0, \quad \sqrt{a}\,u_\xi - \sqrt{a}u_\eta + v_\xi + v_\eta = 0,$$

или

$$(\sqrt{a}u + v)_\xi = 0, \quad (\sqrt{a}u - v)_\eta = 0.$$

Следовательно, $\sqrt{a}u + v = 2f_1(\eta)$, $\sqrt{a}u - v = 2f(\xi)$. Тогда

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a}}\{f(x + \sqrt{a}y) + f_1(x - \sqrt{a}y)\},$$

$$v(x, y) = -f(x + \sqrt{a}y) + f_1(x - \sqrt{a}y).$$

526. $u(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\left[\sqrt{a}\varphi\left(\dfrac{x + \sqrt{a}y}{2}\right) + \psi\left(\dfrac{x - \sqrt{a}y}{2}\right) - \psi(0)\right],$

$$v(x, y) = -\sqrt{a}\varphi\left(\frac{x + \sqrt{a}y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x - \sqrt{a}y}{2}\right) + \sqrt{a}\varphi(0).$$

527. $\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - \gamma^2c^2 = 0.$

528. Замена переменных $\xi = \frac{1}{a}x$, $\eta = \frac{1}{b}y$, $\zeta = \frac{1}{c}z$, $u(x, y, z) = u(a\xi, b\eta, c\zeta) = v(\xi, \eta, \zeta)$ приводит рассматриваемое уравнение к уравнению $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} = 0$, решением которого является (см. задачу 364) функция

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\zeta^{2n}}{(2n)!}\Delta^n v(\xi, \eta, 0) + \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!}\Delta^n v_\zeta(\xi, \eta, 0)\right\},$$

откуда находим

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{c^{2n}}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n \tau\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{c^{2n+1}}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n \nu\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right).$$

529. $u(x, y, z) = x^2 - y^2 + \dfrac{(a^2 - b^2)z^2}{c^2} + xyz.$

532. $u(x, t) =$

$$= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\left\{\varphi_1\left(x + \frac{t}{a}\right) - (b+c)\int_0^{x+\frac{t}{a}}\varphi_2(\tau)\,d\tau + bc\int_0^{x+\frac{t}{a}}d\tau\int_0^{\tau}\varphi_3(\tau_1)\,d\tau_1\right\} +$$
$$+ \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}\left\{\varphi_1\left(x + \frac{t}{b}\right) - (a+c)\int_0^{x+\frac{t}{b}}\varphi_2(\tau)\,d\tau + ac\int_0^{x+\frac{t}{b}}d\tau\int_0^{\tau}\varphi_3(\tau_1)\,d\tau_1\right\} +$$
$$+ \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\left\{\varphi_1\left(x + \frac{t}{c}\right) - (a+b)\int_0^{x+\frac{t}{c}}\varphi_2(\tau)\,d\tau + ab\int_0^{x+\frac{t}{c}}d\tau\int_0^{\tau}\varphi_3(\tau_1)\,d\tau_1\right\}.$$

533. Система гиперболична, так как корни характеристического детерминанта

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+1 & 2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)^2$$

все действительные. В результате неособой замены переменных $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ она приводится к виду

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=0, \quad u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}-v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}=0,$$

или

$$(u+v)_{\eta\eta}=0, \quad (u-v)_{\xi\xi}=0.$$

Отсюда следует, что

$$u+v=2\eta\varphi(\xi)+2\psi(\xi), \quad u-v=2\xi\varphi_1(\eta)+2\psi_1(\eta).$$

Поэтому

$$u(x, y)=(x-y)\varphi(x+y)+(x+y)\varphi_1(x-y)+\psi(x+y)+\psi_1(x-y),$$
$$v(x, y)=(x-y)\varphi(x+y)-(x+y)\varphi_1(x-y)+\psi(x+y)-\psi_1(x-y).$$

534. $$u(x, y)=\frac{3(x-y)}{16(x+y)}\left\{\nu[2(x+y)]+\nu_1[2(x+y)]-\right.$$
$$\left.-\tau\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]-\tau_1\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]\right\}+\frac{3(x+y)}{16(x-y)}\left\{\tau[2(x-y)]-\right.$$
$$\left.-\tau_1[2(x-y)]-\nu\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]+\nu_1\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]\right\}+\frac{1}{16}\left\{9\tau\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]+\right.$$
$$\left.+9\tau_1\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]-\nu[2(x+y)]-\nu_1[2(x+y)]\right\}+\frac{1}{16}\left\{9\nu\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]-\right.$$
$$\left.-9\nu_1\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]-\tau[2(x-y)]+\tau_1[2(x-y)]\right\},$$

$$v(x, y)=\frac{3(x-y)}{16(x+y)}\left\{\nu[2(x+y)]+\nu_1[2(x+y)]-\tau\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]-\right.$$
$$\left.-\tau_1\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]\right\}-\frac{3(x+y)}{16(x-y)}\left\{\tau[2(x-y)]-\tau_1[2(x-y)]-\right.$$
$$\left.-\nu\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]+\nu_1\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]\right\}+\frac{1}{16}\left\{9\tau\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]+\right.$$
$$\left.+9\tau_1\left[\frac{2}{3}(x+y)\right]-\nu[2(x+y)]-\nu_1[2(x+y)]\right\}-\frac{1}{16}\left\{9\nu\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]-\right.$$
$$\left.-9\nu_1\left[\frac{2}{3}(x-y)\right]-\tau[2(x-y)]+\tau_1[2(x-y)]\right\}.$$

535. $u(x, y)=$
$$=\frac{(x-y)}{4}\left[\tau_1'(x+y)+\tau_2'(x+y)-\nu_1(x+y)-\nu_2(x+y)\right]+$$
$$+\frac{(x+y)}{4}\left[\tau_1'(x-y)-\tau_2'(x-y)+\nu_1(x-y)-\nu_2(x-y)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\tau_1(x+y)+\tau_2(x+y)+\tau_1(x-y)-\tau_2(x-y)\right]-$$

$$-\frac{(x+y)}{4}\left[\tau_1'(x+y)+\tau_2'(x+y)-\nu_1(x+y)-\nu_2(x+y)\right]-$$

$$-\frac{(x-y)}{4}\left[\tau_1'(x-y)-\tau_2'(x-y)+\nu_1(x-y)-\nu_2(x-y)\right],$$

$$v(x,y)=\frac{(x-y)}{4}\left[\tau_1'(x+y)+\tau_2'(x+y)-\nu_1(x+y)-\nu_2(x+y)\right]-$$

$$-\frac{(x+y)}{4}\left[\tau_1'(x-y)-\tau_2'(x-y)+\nu_1(x-y)-\nu_2(x-y)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\tau_1(x+y)+\tau_2(x+y)-\tau_1(x-y)+\tau_2(x-y)\right]-$$

$$-\frac{(x+y)}{4}\left[\tau_1'(x+y)+\tau_2'(x+y)-\nu_1(x+y)-\nu_2(x+y)\right]+$$

$$+\frac{(x-y)}{4}\left[\tau_1'(x-y)-\tau_2'(x-y)+\nu_1(x-y)-\nu_2(x-y)\right].$$

536. Система гиперболическая при любых действительных a, b, c, k, когда a^2-c^2 и b не обращаются в нуль одновременно, поскольку корни характеристического детерминанта

$$\begin{vmatrix} a\lambda-b & kc\lambda \\ \frac{c}{k}\lambda & a\lambda-b \end{vmatrix}=(a^2-c^2)\lambda^2-2ab\lambda+b^2$$

действительны, причем

$$\lambda_1=\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a-c},\quad \lambda_2=\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a+c}.$$

В характеристических переменных

$$\xi=(a-c)y-bx,\quad \eta=(a+c)y-bx$$

рассматриваемая система имеет вид

$$u_\xi-u_\eta+kv_\xi+kv_\eta=0,\quad u_\xi+u_\eta+kv_\xi-kv_\eta=0,$$

или

$$(u+kv)_\xi=0,\quad (u-kv)_\eta=0.$$

Следовательно, $u+kv=2f_1(\eta)$, $u-kv=2f(\xi)$. Поэтому общее решение системы дается формулами

$$u(x,y)=f[(a-c)y-bx]+f_1[(a+c)y-bx],$$

$$v(x,y)=-\frac{1}{k}f[(a-c)y-bx]+\frac{1}{k}f_1[(a+c)y-bx].$$

537. Прямая $y=0$ может служить носителем данных Коши $u(x,0)=\tau(x)$, $v(x,0)=\tau_1(x)$ при всех действительных значениях a, b, c, k при условии, что $k\neq 0$, $k\neq\infty$.

538. Решение можно построить по формуле (2) гл. II. Оно имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\left[\frac{y^{2k}}{(2k)!}p_n^{(2k)}(x)+\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}q_m^{(2k)}(x)\right].$$

Ряды обрываются, начиная со значений k, удовлетворяющих условиям $2k > n$ и $2k > m$ соответственно.

539. Решение дается формулой $u(x, y) = \dfrac{\operatorname{sh} ny \cdot \sin nx}{n^2}$, которая получается из формулы (2) гл. II в предположении, что

$$u(x, 0) = \tau(x) = 0, \quad \left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x) = \frac{\sin nx}{n}.$$

Неустойчивость полученного решения следует из того, что для достаточно большого n функцию $\nu(x)$ можно сделать как угодно малой, тогда как $u(x, y)$ не ограничена при $n \to \infty$.

540. Любое решение $u(x, t)$ уравнения (3), обращающееся в нуль на характеристике $x + t = 0$, в силу формулы (10) имеет вид $u(x, t) = f(x + t) - f(0)$. Отсюда видно, что значение $u(x_1, t_1) = f(x_1 + t_1) - f(0)$, принимаемое функцией $u(x, t)$ в точке (x_1, t_1) области D (в том числе экстремальное), принимается ею в точке $(x_1 + t_1, 0)$ отрезка AB.

541. В результате преобразования (неособого при $y < 0$) $\xi = x + \frac{2}{3} \times (-y)^{3/2}$, $\eta = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$ уравнение приводится к виду $u_{\xi\eta} = 0$, откуда следует, что его общим решением является функция

$$u(x, y) = f_1\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + f_2\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right],$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Чтобы функция $u(x, y)$ удовлетворяла начальным условиям Коши, необходимо и достаточно выполнение равенств $(0 < x < 1)$

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{1/2}\left\{-f_1'\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + f_2'\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right]\right\} = \psi(x).$$

Последнее равенство невозможно, если $\psi(x) \not\equiv 0$. Когда же $\psi(x) \equiv 0$, $0 < x < 1$, решение существует, но оно не единственно, поскольку в этом случае

$$u(x, y) = \varphi\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] - f_2\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + f_2\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right],$$

где $f_2(t)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

542. $u(x, y) =$

$$= \frac{1}{2}\tau\left[x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] + \frac{1}{2}\tau\left[x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] - \frac{1}{2}\int\limits_{x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}}^{x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}} \nu(\xi)\, d\xi.$$

543. В результате замены переменных $\xi = x + 2y^{1/2}$, $\eta = x - 2y^{1/2}$ уравнение приводится к виду $u_{\xi\eta} = 0$, интегрируя которое, находим

$$u(x, y) = f_1(x + 2y^{1/2}) + f_2(x - 2y^{1/2}).$$

544. $u(x, y) = \frac{1}{2}\tau(x + 2y^{1/2}) + \frac{1}{2}\tau(x - 2y^{1/2})$.

545. $u(x, y) = \frac{1}{2}\tau(x + 2y^{1/2}) + \frac{1}{2}\tau(x - 2y^{1/2}) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-2y^{1/2}}^{x+2y^{1/2}} \nu(\xi)\, d\xi$.

546. Заменой переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ уравнение (22) приводится к эквивалентному уравнению $\frac{\partial^4 u}{\partial\xi^2 \partial\eta^2} = 0$, интегрируя которое, находим общее решение

$$u(x, y) = \xi\varphi(\eta) + \varphi_1(\eta) + \eta\psi(\xi) + \psi_1(\xi) =$$
$$= (x + y)\varphi(x - y) + \varphi_1(x - y) + (x - y)\psi(x + y) + \psi_1(x + y).$$

547. Пользуясь общим решением уравнения (22) (см. задачу 546), получаем

$$x\varphi(x) + \varphi_1(x) + x\psi(x) + \psi_1(x) = \tau(x),$$
$$\varphi(x) - x\varphi'(x) - \varphi_1'(x) - \psi(x) + x\psi'(x) + \psi_1'(x) = 0,$$
$$-2\varphi'(x) - 2\psi'(x) + x\varphi''(x) + x\psi''(x) + \varphi_1''(x) + \psi_1''(x) = 0,$$
$$3\varphi''(x) - 3\psi''(x) - x\varphi'''(x) + x\psi'''(x) - \varphi_1'''(x) + \psi_1'''(x) = 0.$$

Определяя из этой системы равенств функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, находим

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\tau(x + y) + \frac{1}{2}\tau(x - y) + \frac{1}{4}y\tau'(x - y) - \frac{1}{4}y\tau'(x + y).$$

548. $u(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)\tau_3\left(\frac{x - y}{2}\right) + \frac{1}{2}(x - y)\tau_4\left(\frac{x + y}{2}\right) + \tau_2\left(\frac{x - y}{2}\right) +$
$+ \tau_1\left(\frac{x + y}{2}\right) - \frac{1}{4}(x^2 - y^2)\tau_4'(0) - \frac{(x + y)}{2}\tau_2'(0) - \frac{(x - y)}{2}\tau_4(0) - \tau_2(0)$.

549. Записывая уравнение (23) в виде $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$, заключаем, что

$$u_{xx} - u_{yy} = -f_3''(y), \qquad (*)$$

где $f_3(y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Поскольку одним из частных решений уравнения $(*)$ является $f_3(y)$, а общим решением соответствующего $(*)$ однородного уравнения в силу формулы (10) является выражение $f_1(x + y) + f_2(x - y)$, где f_1 и f_2 — произвольные трижды непрерывно дифференцируемые функции, то

$$u(x, y) = f_1(x + y) + f_2(x - y) + f_3(y).$$

550. Нет. Пользуясь формулой, дающей общее решение уравнения (23) (см. задачу 549), получаем

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(0) = \varphi_1(x),$$
$$f_1'(x) - f_2'(x) + f_3'(0) = \varphi_2(x),$$
$$f_1''(x) + f_2''(x) + f_3''(0) = \varphi_3(x).$$

Из написанных равенств следует, что рассматриваемая задача не может иметь решения, если $\varphi_1''(x) \not\equiv \varphi_3(x) - f_3''(0)$. Когда же $\varphi_1''(x) \equiv \varphi_3(x) - f_3''(0)$, то

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \varphi_2(t)\,dt - \frac{1}{2}f_3'(0)\,x - \frac{1}{2}f_3(0) + C,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \varphi_2(t)\,dt + \frac{1}{2}f_3'(0)\,x - \frac{1}{2}f_3(0) - C,$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно, искомое решение

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\varphi_1(x+y) + \frac{1}{2}\varphi_1(x-y) + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \varphi_1(t)\,dt + f_3(y) - f_3'(0)\,y - f_3(0)$$

не единственно.

551. $$u(x, y) = \varphi_1(y) + \frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x} \varphi_2(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{x+y} d\tau \int_0^{\tau} \varphi_3(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{y-x} d\tau \int_0^{\tau} \varphi_3(t)\,dt - \int_0^{y} d\tau \int_0^{\tau} \varphi_3(t)\,dt$$

(см. задачу (549)).

552. Задача поставлена не корректно, так как она разрешима лишь при условии, что $\nu(x) = 2\varphi'(0)$, и при соблюдении этого условия решение задачи не единственно (оно определено с точностью до произвольного слагаемого $\varphi(x-t)$, где $2\varphi'(0) = \nu(x)$).

553. Решение задачи имеет вид

$$u(x, t) = \tau\left(\frac{x+t}{2}\right) + \varphi(x-t) - \varphi(0).$$

Оно не единственно, так как определено с точностью до произвольной функции $\varphi(x-t)$, удовлетворяющей, однако, условию связи между начальными данными

$$\tau'(x) - 2\nu(x) = 2\varphi'(0),$$

554. $$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x+t}{2} - \varphi(0) - f(0), & 0 < x+t \leqslant \dfrac{1}{2}, \quad 0 < x-t < 1, \\ \dfrac{1}{4} - \varphi(0) - f(0), & \dfrac{1}{2} \leqslant x+t < 1, \quad 0 < x-t < 1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует, что само решение рассматриваемой задачи непрерывно в квадрате Q, а его производные претерпевают разрывы вдоль характеристики $x + t = 1/2$.

555. а) $u(x, t) = \begin{cases} 0, & -1 < x-t < 0, \quad -1 < x+t < 0, \\ \dfrac{x+t}{2}, & -1 < x-t < 0, \quad 0 < x+t < 1, \\ x, & 0 < x-t < 1, \quad 0 < x+t < 1, \\ \dfrac{x-t}{2}, & 0 < x-t < 1, \quad -1 < x+t < 0. \end{cases}$

Решение непрерывно всюду в Q, а его производные претерпевают разрывы вдоль характеристик $x+t=0$ и $x-t=0$.

б) $u(x, t) =$

$$= \begin{cases} x, & -1 < x-t < 0, \quad -1 < x+t < 0, \\ \frac{1}{2}[x-t+\sin(x+t)], & -1 < x-t < 0, \quad 0 < x+t < 1, \\ \frac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)], & 0 < x-t < 1, \quad 0 < x+t < 1, \\ \frac{1}{2}[x+t+\sin(x-t)], & 0 < x-t < 1, \quad -1 < x+t < 0. \end{cases}$$

Решение непрерывно всюду в Q, а его производные претерпевают разрывы вдоль характеристик $x+t=0$ и $x-t=0$.

556. а) $u(x, t) =$

$$= \begin{cases} 0, & -1 < x-t < 0, \quad -1 < x+t < 0, \\ \dfrac{(x+t)^n}{2}, & -1 < x-t < 0, \quad 0 < x+t < 1, \\ \dfrac{(x+t)^n+(x-t)^n}{2}, & 0 < x-t < 1, \quad 0 < x+t < 1, \\ \dfrac{(x-t)^n}{2}, & 0 < x-t < 1, \quad -1 < x+t < 0. \end{cases}$$

При $n=1$, $n=2$ претерпевают разрыв, соответственно, производные первого и второго порядков функции $u(x, y)$ вдоль характеристик $x+t=0$, $x-t=0$, а при $n \geqslant 3$ функция $u(x, t)$ является регулярным решением задачи всюду в квадрате Q.

б) $u(x, t) =$

$$= \begin{cases} 0, & -1 < x-t < 0, \quad -1 < x+t < 0, \\ \dfrac{(x+t)^{n+1}}{2(n+1)}, & -1 < x-t < 0, \quad 0 < x+t < 1, \\ \dfrac{1}{2(n+1)}[(x+t)^{n+1}-(x-t)^{n+1}], & 0 < x-t < 1, \quad 0 < x+t < 1, \\ -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{2(n+1)}, & 0 < x-t < 1, \quad -1 < x+t < 0. \end{cases}$$

Характер гладкости полученного решения очевиден.

557. $u(x, t) = x/(x^2-t^2)$. Носителями особенностей решения являются характеристики $x+t=0$ и $x-t=0$.

558. $u(x, t) = (x+t)/(2-x-t)$. Носителем особенностей решения $u(x, t)$ является луч $x+t=2$, $x<1$.

$$559.\ u(x, t) = \begin{cases} 0, & t>0, \quad x+t<0, \\ \frac{2}{3}(x+t)^n, & x+t>0, \quad t>\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Вдоль характеристики $x+t=0$ при $n=1$ претерпевают разрыв производные первого порядка, а при $n=2$ — производные второго порядка решения задачи $u(x, t)$. При $n \geqslant 3$ решение задачи $u(x, t)$ является регулярным всюду в угле D.

560. Ограничимся рассмотрением той части D_1 области D, которая определяется неравенствами

$$0<t<1/2, \quad t<\sqrt{x_1^2+x_2^2}<1-t.$$

Определенные по формуле (26) функции $u_{mn}(x_1, x_2, t)$ являются (задача 336) регулярными в области D_1 решениями уравнения (24), удовлетворяющими условию

$$u_{mn}(x_1, x_2, 0) = 0.$$

Справедливость условия

$$u_{mn}(x_1, x_2, r) = 0, \quad r = \sqrt{x_1^2+x_2^2},$$

проверим непосредственно. В обозначениях $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $\psi = \varphi - \theta$ имеем

$$u_{mn}(x_1, x_2, r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y-x|^2<r^2} \frac{\rho^{m+1}\cos n\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{r^2-(y_1-x_1^2)-(y_2-x_2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y-x|<r} \frac{\rho^{m+1}\cos n\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{2r\rho\cos(\varphi-\theta)-\rho^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\rho<2r\cos\psi} \frac{\rho^{m+1/2}(\cos n\theta\cos n\psi - \sin n\theta\sin n\psi)\, d\rho\, d\psi}{\sqrt{2r\cos\psi-\rho}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\rho<2r\cos\psi} \frac{\rho^{m+1/2}\sin n\theta\sin n\psi}{\sqrt{2r\cos\psi-\rho}}\, d\rho\, d\psi = 0,$$

имеем

$$u_{mn}(x_1, x_2, r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\rho<2r\cos\psi} \frac{\rho^{m+1/2}\cos n\theta\cos n\psi}{\sqrt{2r\cos\psi-\rho}}\, d\rho\, d\psi =$$

$$= \frac{\cos n\theta}{2\pi} \int\limits_{\rho<2r\cos\psi} \frac{\rho^{m+1/2}\cos n\psi}{\sqrt{2r\cos\psi-\rho}}\, d\rho\, d\psi =$$

$$= \frac{\cos n\theta}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos n\psi \, d\psi \int_0^{2r\cos\psi} \frac{\rho^{m+1/2} d\rho}{\sqrt{2r\cos\psi - \rho}} =$$

$$= \frac{(2r)^{m+1}}{\pi} \cos n\theta \int_0^1 \frac{t^{m+1/2}}{\sqrt{1-t}} dt \int_0^{\pi/2} \cos n\psi \cos^{m+1} \psi \, d\psi = 0,$$

так как при $n \geqslant 4$, $m = n-3, n-5, \ldots, n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]$

$$\int_0^{\pi/2} \cos n\psi \cos^{m+1}\psi \, d\psi = 0.$$

Таким образом доказано, что $u_{mn}(x_1, x_2, r) = 0$.

561. $v_{mn}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y-x|^2 < t^2} \frac{\rho^m \sin n\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}$,

где $|y-x|^2 = (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2$, $y_1 = \rho\cos\varphi$, $y_2 = \rho\sin\varphi$, $n > 4$, $m = n-3$, $n-5, \ldots, n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Этот класс нетривиальных решений получается, если в правой части формулы (26) вместо $\cos n\varphi$ взять $\sin n\varphi$ и считать $n > 4$, $m = n-3, n-5, \ldots, n-2\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

562. Чтобы убедиться в справедливости утверждения задачи, следует учесть, что

$$2\sin ax \sin at = \cos a(x-t) - \cos a(x+t),$$

$$2\cos ax \cos at = \cos a(x-t) + \cos a(x-t),$$

$$2\sin ax \cos at = \sin a(x-t) + \sin a(x+t).$$

563. Чтобы доказать утверждение задачи, можно воспользоваться единственностью решения характеристической задачи Гурса или формулой среднего значения из задачи 413.

564. Граничные значения задачи Дирихле можно задавать произвольно лишь на любых двух смежных сторонах прямоугольника П, например, M_1M_2 и M_1M_4. На двух других сторонах этого прямоугольника (M_2M_3 и M_3M_4) граничные значения задачи Дирихле должны совпадать со значениями решения характеристической задачи Гурса в этом же прямоугольнике П, данные которой задаются на M_1M_2 и M_1M_4 и совпадают с граничными значениями задачи Дирихле на этих сторонах.

565. Если отношение $\frac{p}{q}$ — рациональное число, то можно положить $\frac{p}{q} = \frac{m}{k}$, где m, k — натуральные числа. Очевидно, что для любого целого числа $n \neq 0$ функции

$$u_n(x, t) = \sin\frac{\pi knx}{q} \sin\frac{\pi knt}{q}$$

являются регулярными нетривиальными решениями рассматриваемой задачи Дирихле в прямоугольнике Q.

Глава IV

566. $a^2 v_{\xi\xi} + 2a v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} - v_\xi = 0$. Полагая в уравнении (1) $n = 1$, $x = x_1$, сделать преобразования

$$x = \eta, \quad t = \xi - a\eta, \quad v(\xi, \eta) = u(\eta, \xi - a\eta).$$

567. При соблюдении условий, гарантирующих равномерную сходимость ряда (4) и рядов, полученных из него почленным дифференцированием один раз по t и дважды по x, для суммы $u(x, t)$ этого ряда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} - u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^{k+1}\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \Delta^k \tau =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^{k+1}\tau - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^{k+1}\tau = 0.$$

568. При $t > t_0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} E_{x_i x_i} - E_t = -\frac{n}{2}\frac{E}{t-t_0} + \frac{E}{4(t-t_0)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 +$$
$$+ \frac{n}{2}\frac{E}{t-t_0} - \frac{E}{4(t-t_0)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = 0.$$

570. Ограничимся рассмотрением максимума. Пусть $M = \max u(x, t)$, $(x, t) \in D \cup \partial D$, $m = \max u(x, t)$, $(x, t) \in S$, регулярного в D и непрерывного в $D \cup \partial D$ решения $u(x, t)$ уравнения (1). Предположим, что $m < M$. Тогда значения M функция $u(x, t)$ достигает в некоторой точке $(x_0, t_0) \in \in D$, где $0 < t_0 \leqslant T_1$, $M = u(x_0, t_0)$. Построим функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{2nd^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0i})^2,$$

где d — диаметр области D. Так как $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0i})^2 \leqslant d^2$ и $m < M$, то, очевидно,

1) $v(x, t) \leqslant m + \frac{M-m}{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)m + \frac{M}{2n} < M$ при $(x, t) \in S$,

2) $v(x_0, t_0) = M$.

Из 1) и 2) следует, что функция $v(x, t)$ принимает свое максимальное значение, как и $u(x, t)$, не на S, а в некоторой точке $(x^*, t^*) \in D$, где $0 < t^* \leqslant T_1$. В этой точке $v_{x_i x_i} \leqslant 0$, $v_t \geqslant 0$ ($v_t = 0$, если $t^* < T_1$ и $v_t \geqslant 0$, если $t^* = T_1$), откуда следует, что в точке (x^*, t^*) должно быть

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i} - v_t \leqslant 0. \qquad (*)$$

С другой стороны, учитывая выражение для $v(x, t)$, находим

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i} - v_t = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + \frac{M-m}{d^2} - u_t = \frac{M-m}{d^2} > 0$$

в точке (x^*, t^*), что противоречит $(*)$. Из полученного противоречия вытекает равенство $m = M$, что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай минимума.

571. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — регулярные в D и непрерывные в $D \cup \partial D$ решения задачи (1), (2). Функция $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ является также регулярным в D и непрерывным в $D \cup \partial D$ решением уравнения (1), удовлетворяющим условию $u|_S = 0$. В силу принципа экстремума $u(x, t) = 0$ всюду в $D \cup \partial D$, т. е.

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

572. Приняв в формуле (4) из задачи 567 $\tau(x_1, x_2) = \sin\frac{i\pi}{l_1} x_1 \sin\frac{j\pi}{l_2} x_2$ и учитывая, что

$$\Delta^k \tau(x_1, x_2) = (-1)^k \left[\left(\frac{i\pi}{l_1}\right)^{2k} + \left(\frac{j\pi}{l_2}\right)^{2k}\right] \sin\frac{i\pi}{l_1} x_1 \sin\frac{j\pi}{l_2} x_2,$$

получаем функцию

$$u(x_1, x_2, t) = \sin\frac{i\pi}{l_1} x_1 \sin\frac{j\pi}{l_2} x_2 \exp\left[-\pi^2\left(\frac{i^2}{l_1^2} + \frac{j^2}{l_2^2}\right) t\right],$$

удовлетворяющую всем требованиям рассматриваемой задачи.

573. $u(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin kx\, e^{-k^2 t}$. Предполагая, что функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$, ее можно представить как сумму абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx\, dx.$$

Учитывая, что функция $u_k(x, t) = \sin kx\, e^{-k^2 t}$ является решением уравнения (1′) в прямоугольнике $0 < x < \pi$, $0 < t < T_0$, $T_0 > 0$ (см. задачу 572), удовлетворяющим условиям $u(x, 0) = \sin kx$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, заключаем, что решением рассматриваемой задачи является функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx e^{-k^2 t}.$$

Поскольку в окрестности каждой точки (x, t) прямоугольника $0 < x < \pi$, $0 < t < T_0$,

$$\lim_{k\to\infty} k^m e^{-k^2 t} = 0,$$

ряд, суммой которого является $u(x, t)$, можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

574. Интеграл

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\varphi(y)\,dy, \quad t>0, \tag{*}$$

сходится. Действительно, обозначая $M=\max\limits_{-\infty<y<\infty}|\varphi(y)|$, имеем

$$|u(x, t)|\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\frac{dy}{2\sqrt{t}}=\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta=M.$$

Также нетрудно проверить сходимость интегралов, полученных из (*) дифференцированием под знаком интеграла по x и по t, повторенным сколько угодно раз. При этом все интегралы равномерно сходятся в окрестности любой точки (x, t), если $t>0$. Отсюда следует, что при $t>0$ функция $u(x, t)$ имеет производные всех порядков, которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial^{m+n}u(x, t)}{\partial x^m\partial t^n}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial t^n}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(x-y)^2/4t}\right]dy.$$

Чтобы убедиться в справедливости условия

$$\lim_{t\to 0}u(x, t)=u(x, 0)=\varphi(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

достаточно заметить, что интеграл в правой части (*) равномерно сходится вблизи каждой точки $(x, 0)$ при $t>0$. В результате замены переменного по формуле $y=x+2\eta\sqrt{t}$, получим

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\eta\sqrt{t})\,e^{-\eta^2}d\eta.$$

Отсюда на основании равномерной сходимости интеграла и непрерывности функции φ следует

$$\lim_{t\to 0}u(x, t)=\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta=\varphi(x).$$

575. Пусть $u(x, t)$ — непрерывное и ограниченное при $t\geqslant 0$ решение уравнения (1′). Докажем, что $u(x, t)\leqslant M$ (доказательство неравенства $u(x, t)\geqslant m$ сводится к этому переменой знака у функции u). Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Покажем, что $u(x_0, t_0)\leqslant M+\varepsilon$ в любой точке (x_0, t_0) полупространства $t\geqslant 0$. Построим функцию $v(x, t)=x^2+2t$, которая удовлетворяет уравнению (1′). Пусть $N=\sup|u(x, t)|$, $t\geqslant 0$. Функция $\frac{\varepsilon v(x, t)}{v(x_0, t_0)}+M-u(x, t)$, удовлетворяющая при $t>0$ уравнению (1′), не-

отрицательна при $t=0$ и при $|x| = \left[\frac{1}{\varepsilon}(N-M)\,v(x_0, t_0) + |x_0|\right]^{1/2}$.
гласно принципу экстремума для ограниченной области (см. ответ к
че 570) эта функция должна быть неотрицательной всюду в прямоуголь
$\left\{0 \leqslant t < T,\ |x| \leqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}(N-M)\,v(x_0, t_0)\right]^{1/2}\right\}$, в котором лежит точка $(x_0$
Следовательно, в этом прямоугольнике $u(x, t) \leqslant M + \frac{\varepsilon v(x, t)}{v(x_0, t_0)}$, откуда
дует, что $u(x_0, t_0) \leqslant M + \varepsilon$. Так как (x_0, t_0) и число ε произвольны
$u(x, t) \leqslant M$ при $t \geqslant 0$.

576. Применить полученные в задаче 575 неравенства к разн
$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ двух решений задачи (1′), (3′).

578. В результате замены искомой функции $u(x, t) = v(x, t) + \alpha($
$+ x[\beta(t) - \alpha(t)]$ получаем задачу

$$v_{xx} - v_t = f(x, t) + \alpha'(t) + x[\beta'(t) - \alpha'(t)], \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) =$$

579. $u(x, t) = \sin nx \int\limits_0^t e^{-n^2(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau.$

580. $u(x, t) = e^{x_1} \operatorname{ch} x_2 e^{2t}$ (решение не единственно).

581. $$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right] \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Чтобы получить эту формулу, продолжим $\varphi(x)$ нечетно на отрицатель
полуось $-\infty < x < 0$, т. е. построим функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

и рассмотрим задачу Коши — Дирихле

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \ U(x, 0) = \Phi(x), \quad -\infty < x <$$

Решение этой задачи, как известно, определяется по формуле

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \Phi(\xi)\, d\xi.$$

Очевидно, что $U(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leqslant x < \infty$. Далее, из (**) и (*) получ

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Отсюда находим, что $U(0\ t) = 0$, и стало быть, $U(x, t) = u(x, t)$ при x

582. $$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right] \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Чтобы получить приведенный здесь ответ, следует решить вспомогател задачу:

$$U_t - a^2U_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$U(x, 0) = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$

583. $u(x, t) = \dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi$. В результате замены искомой функции по формуле $u(x, t) = e^{-ht}v(x, t)$ для $v(x, t)$ приходим к задаче 581.

584. $u(x, t) = \dfrac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi$.

585. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$.

Чтобы получить эту формулу, рассмотрим вспомогательную задачу:

$$U_t = a^2U_{xx} + F(x, t), \quad U(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

где

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x, t) & x > 0, \\ -f(-x, t), & x < 0, \end{cases} \qquad (*)$$

решение которой дается формулой

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

В силу $(*)$ эта формула записывается в виде

$$U(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau)\, d\xi - \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau)\, d\xi \right\} d\tau.$$

Следовательно, $U_t = a^2U_{xx} + f(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$, $U(0, t) = 0$, $t \geqslant 0$, $U(x, 0) = 0$, $x \geqslant 0$ и, стало быть, $U(x, t) = u(x, t)$ при $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

586. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$.

587. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$.

С помощью замены $u(x, t) = e^{-ht}v(x, t)$ приходим к задаче для функции $v(x, t)$, рассмотренной в 585.

$$588.\ u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

$$589.\ u(x, t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

$$590.\ u(x, t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-h(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

$$591.\ u(x, y, t) =$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right) f(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi.$$

Чтобы получить такой вид решения, следует продолжить нечетно в полуплоскость $y < 0$ функцию $\varphi(x, y)$ по переменной y. Далее см. решение задачи 581.

$$592.\ u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}} \right) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta\, d\xi\, d\eta.$$

$$593.\ u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\xi\, d\zeta.$$

$$594.\ u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right) \times$$

$$\times \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}} \right) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta\, d\eta\, d\xi.$$

Чтобы получить эту формулу, продолжим функцию $f(x, y, z)$ нечетно по y и нечетно по z на все пространство. Это можно осуществить последовательно. Сначала продолжим $f(x, y, z)$ нечетно по y, т. е. построим функцию

$$f_1(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & y > 0, \\ -f(x, -y, z), & y < 0. \end{cases}$$

Затем функцию $f_1(x, y, z)$ продолжим нечетно по z, т. е. построим функцию

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} f_1(x, y, z), & z > 0, \\ -f_1(x, y, -z), & z < 0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим задачу Коши

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}),$$
$$U(x, y, z, 0) = f_2(x, y, z), \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0,$$

решение которой определяется по формуле

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} f_2(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению и начальному условию исходной задачи (при $-\infty < x < \infty$, $0 < y, z < \infty$). Далее, учитывая формулы продолжения функций f и f_1, преобразуем полученное решение $U(x, y, z, t)$ так, чтобы подынтегральное выражение явно содержало функцию $f(x, y, z)$. Сначала, пользуясь формулой продолжения функции f_1, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} f_2(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta = \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}} \right) f_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta.$$

Следовательно,

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} \times$$
$$\times \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}} \right) f_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta\, d\xi\, d\eta.$$

Аналогично, пользуясь формулой продолжения функции f, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} f_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta = \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta.$$

Тогда

$$U(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta\, d\eta\, d\xi.$$

Из этой формулы следует, что

$$U(x, 0, z, t) = 0, \quad U(x, y, 0, t) = 0.$$

Поэтому

$$U(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) \text{ при } -\infty < x < \infty, \quad 0 < y, z < \infty.$$

595. $$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}}\right) f(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta\, d\eta\, d\xi.$$

596. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{e^{-ht}}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right) f(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi.$$

597. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{e^{-ht}}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}} f(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi.$$

598. $$u(x, y, t) = \int_0^t \frac{1}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right) g(\xi, \eta, \tau)\, d\eta\, d\xi\, d\tau.$$

599. $$u(x, y, t) = \int_0^t \frac{e^{-h(t-\tau)}}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right) g(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau.$$

Чтобы получить решения задач 600—614, удобно пользоваться формулой (4) (см. задачу 567), в которой следует положить $\tau = u(x, 0)$, $x = x_1, \ldots, x_n$.

600. $u = 1 - x^2 - y^2 - 4t$.

601. $u = 1 - (x^2 + y^2)^2 - 16(x^2 + y^2)t - 32t^2$.

602. $u = x^2 + y^2 + 4t$. 603. $u = e^{x+y+2t}$.

604. $u = I_0(r)e^t$. 605. $u = e^{-l^2t}\sin lx_1$.

606. $u = e^{-l^2t}\cos lx_1$. 607. $u = e^{l^2t}\operatorname{ch} lx_1$.

608. $u = e^{l^2t}\operatorname{sh} lx_1$.

609. $u = e^{-\left(l_1^2+l_2^2\right)t}\sin l_1x_1 \sin l_2x_2$.

610. $u = e^{-\left(l_1^2+l_2^2\right)t}\sin l_1x_1 \cos l_2x_2$.

611. $u = e^{-\left(l_1^2+l_n^2\right)t}\cos l_1x_1 \cos l_nx_n$.

612. $u = e^{-\left(l_1^2+l_2^2\right)t}\cos l_1x_1 \sin l_2x_2$.

613. $u = e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} l_i^2 t}\sin l_1x_1 \sin l_2x_2 \ldots \sin l_nx_n$.

614. $u = e^{-l_1^2t}\sin l_1x_1 + e^{-l_n^2t}\cos l_nx_n$.

615. $u = xy\left(1 - e^{-t}\right) + bxe^{-a^2t}\sin y$.

616. $u = xy + \dfrac{1}{2a^2}\left[t - \dfrac{1}{2a^2}\left(1 - e^{-2a^2t}\right)\right]\sin x\cos y$.

617. $u = \left[\dfrac{t}{a^2} - \dfrac{1}{a^4} + \left(1 + \dfrac{1}{a^4}\right)e^{-a^2t}\right]x\sin y$.

618. $u = e^{-2a^2t}\cos(x + y) + \left[\dfrac{t}{2a^2} - \dfrac{1}{4a^4}\left(1 - e^{-2a^2t}\right)\right]\sin(x + y)$.

619. $u = e^{-2a^2t}\sin(x - y) + \left(1 - e^{-t}\right)e^y\sin x$.

620. $u = \varphi(x, y) + f(x, y)\displaystyle\int_0^t g(\tau)\,d\tau$.

621. $u(x, y) = yf_1(ay - x) + f_2(ay - x)$, где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Чтобы проинтегрировать уравнение, следует сделать замену переменных $\xi = ay - x$, $\eta = y$, в результате чего уравнение принимает вид $u_{\eta\eta} = 0$.

622. В переменных $x, y, z = t/p$, $v(x, y, z) = u(x, y, pz)$ рассматриваемое уравнение принимает вид $v_{xx} + v_{yy} - v_z = 0$. Поэтому формула (4′) является непосредственным следствием формулы (4) из задачи 567.

623. $u(x, y, t) = 1 - (x^2 + y^2)^2 - 16(x^2 + y^2)(t - 1) - 32(t - 1)^2$. В переменных $x, y, z = t - 1$, $v(x, y, z) = u(x, y, z + 1)$ исходная задача имеет

вид $v_{xx} + v_{yy} - v_z = 0$, $z > 0$, $v(x, y, 0) = u(x, y, 1) = 1 - (x^2 + y^2)^2$. Согласно формуле (4) (см. задачу 567), в которой положено $\tau = u(x, y, 1)$, получаем $v(x, y, z) = 1 - (x^2 + y^2)^2 - 16(x^2 + y^2)z - 32z^2$, откуда находим искомое решение.

$$624.\quad u(x, t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p(x-y)^2}{4t}}\varphi(y)\,dy.$$

$$625.\quad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi b(by - x)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(by-z)^2}{4b(by-x)}}\varphi(z)\,dz,\quad x < by.$$ В результ-

[illegible]

$= v(\xi, t)$ исходная задача приводится к задаче

$$v_{\xi\xi} - v_t = 0,\quad -\infty < \xi < \infty,\quad t > 0,$$

$$v(\xi, 0) = u(b\xi, \xi) = \varphi(b\xi),\quad -\infty < \xi < \infty,\quad b > 0.$$

$$626.\quad u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2(by-x)}{b}}\sin k\pi y,$$

$$a_k = 2\int\limits_0^1 \varphi(b\xi)\sin k\pi\xi\,d\xi,\quad k = 1, 2, \ldots$$

С помощью замены переменных $\xi = y$, $t = y - x/b$, $u(x, y) = u(b\xi - bt, \xi) = v(\xi, t)$ исходная задача приводится к задаче

$$v_{\xi\xi} - v_t = 0,\quad 0 < \xi < 1,\quad 0 < t < 1,$$

$$v(\xi, 0) = u(b\xi, \xi) = \varphi(b\xi),\quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

$$v(0, t) = u(-bt, 0) = 0,\quad v(1, t) = u(b - bt, 1) = 0,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

решение которой (см. задачу 573) имеет вид

$$v(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t}\sin k\pi\xi,$$

$$a_k = 2\int\limits_0^1 \varphi(b\xi)\sin k\pi\xi\,d\xi,\quad k = 1, 2, \ldots$$

627. $u(x, y) = e^{-\left(\frac{p}{2}x + y\right)}\sin x$. Сделать замену искомой функции по формуле $u(x, y) = e^{-\frac{p}{2}x}v(x, y)$, в результате чего постановка задачи упрощается.

628. $u(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2}{4y} + \frac{p(x-\xi)}{2}\right]}\varphi(\xi)\,d\xi$, $\varphi(x)$ непрерывна, а $e^{-\frac{p}{2}x}\varphi(x)$ ограничена при $-\infty < x < \infty$.

629. Если искать функцию $u(x, t)$ в виде $u(x, t) = e^{-\lambda t}v(x, t)$, то для $v(x, t)$ получим уравнение Гельмгольца $v_{xx} + v_{yy} + \lambda^2 v = 0$, которому удовлетворяют функции $J_k(\lambda r)\cos k\varphi$ и $J_k(\lambda r)\sin k\varphi$ (см. задачу 285).

630. $u(x, y, t) = e^{-\lambda t}J_0(\lambda r)$.

631. Параболический. Соответствующая уравнению (7) характеристическая форма $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^2$ не содержит параметра λ_{n+1}.

632. $u(x, t) = \sum\limits_{k=0}^{[n/4]} \frac{t^k}{k!} \Delta^{2k} P_n(x)$.

633. $u(x, t) = e^{-\left(l_1^2+l_n^2\right)^2 t} \sin l_1 x_1 \cos l_n x_n$.

634. Параболический (см. ответ к задаче 631).

635. $u(x, t) = \sum\limits_{k=0}^{[n/4]} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \Delta^{2k} P_n(x)$.

636. $u(x, t) = \sin x_1 \operatorname{ch} t + \cos x_1 \operatorname{sh} t$.

Глава V

637. Требуемый набор имеет вид $u_\lambda(x, t) = v_\lambda(x) w_\lambda(t)$, где $v_\lambda(x)$, $w_\lambda(t)$ — решения обыкновенных дифференциальных уравнений $v''(x) + \lambda v(x) = 0$, $w''(t) + \lambda w(t) = 0$ соответственно.

638. Задача имеет бесконечное множество решений вида

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{\pi n}{b-a} t + b_n \sin \frac{\pi n}{b-a} t\right) \sin \frac{\pi n}{b-a}(x-b), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где a_n, b_n — произвольные действительные постоянные.

639. $u(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sin nx$, где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin nx\, dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \psi(x) \sin nx\, dx.$$

640. Да. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, задача имеет только тривиальное решение. Известно, что задача Коши $u_{xx} = u_{tt}$, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, в треугольнике с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(\pi, 0)$, $C(\pi/2, \pi/2)$ имеет только тривиальное решение $u(x, t) \equiv 0$. Решение $u(x, t)$ рассматриваемой задачи равно нулю и в треугольнике с вершинами в точках $A(0, 0)$, $C(\pi/2, \pi/2)$, $D(0, \pi/2)$. Действительно, интегрируя очевидное тождество $-2(u_x u_t)_x + (u_x^2)_t + (u_t^2)_t = 0$ по треугольной области с вершинами в точках $A(0, 0)$, $C_\tau(\tau, \tau)$, $D_\tau(0, \tau)$ при любом фиксированном τ, $0 < \tau < \pi/2$, ввиду того, что

$u(x, t) = 0$, на отрезках AC_τ и AD_τ получаем

$$\int\limits_{C_\tau D_\tau} \left(u_x^2 + u_t^2\right) dx = 0.$$

Следовательно, $u_x = u_t = 0$ вдоль $D_\tau C_\tau$ и, стало быть, $u(x, t) = 0$ в треугольнике ACD. Аналогично доказывается, что $u(x, t) = 0$ и в треугольнике BCD_1, где $D_1 = D_1(\pi, \pi/2)$. Таким образом, имеем

$$u(x, \pi/2) = u_t(x, \pi/2) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Повторяя приведенное выше рассуждение, заключаем, что $u(x, t) = 0$ всюду в полуполосе $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$.

641. $u_n(x, t) = [a_n \cos(n + 1/2)t + b_n \sin(n + 1/2)t] \sin(n + 1/2)x$, где [illegible] постоянные, $n = 0, 1$ [illegible]

642. $u(x, t) = \dfrac{1}{2\pi a} \sin \dfrac{2\pi a}{l} t \sin \dfrac{2\pi}{l} x.$

643. $u(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \dfrac{ak\pi}{l} t + b_k \sin \dfrac{ak\pi}{l} t\right) \sin \dfrac{k\pi}{l} x,$

$$a_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x\, dx, \quad b_k = \frac{2}{ak\pi} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x\, dx.$$

644. $u(x, t) = \dfrac{2l}{a\pi} \sin \dfrac{a\pi}{2l} t \sin \dfrac{\pi}{2l} x + \cos \dfrac{5a\pi}{2l} t \sin \dfrac{5\pi}{2l} x.$

645. $u(x, t) = \dfrac{2l}{a\pi} \sin \dfrac{a\pi}{2l} t \sin \dfrac{\pi}{2l} x + \dfrac{2l}{3a\pi} \sin \dfrac{3a\pi}{2l} t \sin \dfrac{3\pi}{2l} x +$

$$+ \frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\, a\pi}{2l} t \sin \frac{(2k+1)\,\pi}{2l} x.$$

646. $u(x, t) = \cos \dfrac{a\pi}{2l} t \cos \dfrac{\pi}{2l} x + \dfrac{2l}{3a\pi} \sin \dfrac{3a\pi}{2l} t \cos \dfrac{3\pi}{2l} x +$

$$+ \frac{2l}{5a\pi} \sin \frac{5a\pi}{2l} t \cos \frac{5\pi}{2l} x.$$

647. $u(x, t) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{(2k+1)\, a\pi}{2l} t + b_k \sin \frac{(2k+1)\, a\pi}{2l} t\right] \cos \frac{(2k+1)\,\pi}{2l} x,$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \frac{(2k+1)\,\pi}{2l} x\, dx, \quad b_k = \frac{4}{(2k+1)\, a\pi} \int\limits_0^l \psi(x) \cos \frac{(2k+1)\,\pi}{2l} x\, dx.$$

648. $u(x, t) = t + \dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} \cos \dfrac{(2k+1)\, a\pi}{l} t \cos \dfrac{(2k+1)\,\pi}{l} x.$

649. $u(x, t) = a_0 + b_0 t + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \dfrac{ka\pi}{l} t + b_k \sin \dfrac{ka\pi}{l} t\right) \cos \dfrac{k\pi}{l} x,$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx, \quad b_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx, \quad b_k = \frac{2}{ka\pi}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx.$$

650. $u(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t + b_k\sin a\lambda_k t)\sin\lambda_k x,$

$$a_k = \frac{1}{\|\sin\lambda_k x\|^2}\int_0^l \varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\sin\lambda_k x\|^2}\int_0^l \psi(x)\sin\lambda_k x\,dx,$$

$$\|\sin\lambda_k x\|^2 = \int_0^l \sin^2\lambda_k x\,dx = \frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}{2\left(h^2+\lambda_k^2\right)},$$

λ_k — положительные корни уравнения $h\operatorname{tg}\lambda l = -\lambda$.

651. $u(x, t) = \frac{2h}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2\left[l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h\right]}\sin a\lambda_k t\cos\lambda_k x$, λ_k — положительные корни уравнения $\lambda\operatorname{tg}\lambda l = h$.

652. $u(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t + b_k\sin a\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x),$

$$a_k = \frac{1}{\|\Phi_k(x)\|^2}\int_0^l (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,\varphi(x)\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\Phi_k(x)\|^2}\int_0^l (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,\psi(x)\,dx,$$

$$\|\Phi_k(x)\|^2 = \int_0^l (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)^2dx = \frac{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h}{2},$$

λ_k — положительные корни уравнения $h\operatorname{ctg}\lambda l = \lambda$.

653. $u(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t + b_k\sin a\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x),$

$$a_k = \frac{1}{\|\Phi_k(x)\|^2}\int_0^l (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,\varphi(x)\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\Phi_k(x)\|^2}\int_0^l (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,\psi(x)\,dx,$$

$$\| \Phi_k(x) \|^2 = \int_0^l (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x)^2 dx = \frac{l\left(h^2 + \lambda_k^2\right) + 2h}{2},$$

λ_k — неотрицательные корни уравнения $\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda}\right)$.

654. $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$, где

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{ka\pi}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

$$a_k = -\frac{2}{l} \int_0^l w(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx,$$

$$w(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \left[\int_0^y f(\xi) \, d\xi \right] dy + \frac{x}{la^2} \int_0^l \left[\int_0^y f(\xi) \, d\xi \right] dy + \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha.$$

655. $u(x, t) = \frac{\beta - \alpha}{2l} x^2 + \alpha x + \Phi_0 + \psi_0 t + \frac{F_0}{2} t^2 +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{l}{ak\pi}\right)^2 F_k + \left[\Phi_k - \left(\frac{l}{ak\pi}\right)^2 F_k\right] \cos \frac{ak\pi t}{l} + \frac{l\psi_k}{ak\pi} \sin \frac{ak\pi t}{l} \right\} \cos \frac{k\pi x}{l},$$

$$F_k = \frac{\varepsilon_k}{l} \int_0^l \left[f(x) + \frac{(\beta - \alpha) a^2}{l} \right] \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx,$$

$$\Phi_k = \frac{\varepsilon_k}{l} \int_0^l \left[\varphi(x) - \frac{(\beta - \alpha) x^2}{2l} - \alpha x \right] \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx,$$

$$\psi_k = \frac{\varepsilon_k}{l} \int_0^l \psi(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \ \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Решение искать в виде $u(x, t) = w(x) + v(x, t)$, где $w(x) = (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x)\alpha + (\alpha_2 x^2 + \beta_2 x)\beta$, причем постоянные α_1, β_1, α_2, β_2 подобрать так, чтобы $w(x)$ удовлетворяла краевым условиям исходной задачи, т. е. чтобы $w_x(0) = \alpha$, $w_x(l) = \beta$.

656. $u(x, t) = w(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos a\lambda_k t + b_k \sin a\lambda_k t)(\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x)$,

$$w(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \left[\int_0^y f(\xi) \, d\xi \right] dy + \left\{ \beta - \alpha l + \frac{1}{a^2} \int_0^l \left[\int_0^y f(\xi) \, d\xi \right] dy \right\} \frac{1 + hx}{1 + hl} + \alpha x,$$

$$a_k = \frac{2}{h + l\left(h^2 + \lambda_k^2\right)} \int_0^l [\varphi(x) - w(x)] (\lambda_k \cos \lambda_k x + h \sin \lambda_k x) \, dx,$$

$$b_k=\frac{2}{a\lambda_k\left[h+l\left(h^2+\lambda_k^2\right)\right]}\int\limits_0^l \psi(x)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x\right)dx,$$

где λ_k — положительные корни уравнения $h\operatorname{tg}\lambda l=-\lambda$.

657. $u(x,t)=$

$$=w(x)-2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{h^2+\lambda_k^2}{h+l\left(h^2+\lambda_k^2\right)}\int\limits_0^l w(\xi)\cos\lambda_k\xi\,d\xi\right]\cos a\lambda_k t\cos\lambda_k x,$$

$$w(x)=-\frac{1}{a^2}\int\limits_0^x\left[\int\limits_0^y f(\xi)\,d\xi\right]dy+\frac{\beta-\alpha}{h}-\alpha(l-x)+$$

$$+\frac{1}{a^2}\int\limits_0^l\left[\int\limits_0^y f(\xi)\,d\xi\right]dy+\frac{1}{a^2h}\int\limits_0^l f(\xi)\,d\xi,$$

где λ_k — положительные корни уравнения $\lambda\operatorname{tg}\lambda l=h$.

658. $u(x,t)=-\frac{\alpha}{h}+$

$$+4\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{2n+1}\left[2h+l\left(h^2+\lambda_{2n+1}^2\right)\right]}(\lambda_{2n+1}\cos\lambda_{2n+1}x+$$

$$+h\sin\lambda_{2n+1}x)\cos\lambda_{2n+1}t,$$

где λ_{2n+1} — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\lambda l=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right)$.

659. $w(x,t)=\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu(t)+\frac{x}{l}\nu(t)$. Функцию $w(x,t)$ искать в виде $w(x,t)=(\alpha_1x+\beta_1)\mu(t)+(\alpha_2x+\beta_2)\nu(t)$. Потребовав, чтобы $w(x,t)$ удовлетворяла (неоднородным) краевым условиям задачи, определить коэффициенты α_1, β_1, α_2, β_2.

660. $w(x,t)=(x-l)\mu(t)+\nu(t)$. См. указание к решению задачи **659**.

661. $w(x,t)=\left(1-\frac{hx}{1+lh}\right)\mu(t)+\frac{x}{1+lh}\nu(t)$.

662. $w(x,t)=-\frac{1}{h}\mu(t)+\left(x+\frac{1}{h}\right)\nu(t)$.

663. $w(x,t)=\frac{[g(x-l)-1]\mu(t)+(1+hx)\nu(t)}{g+h(1+lg)}$. См. указание к решению задачи 659.

664. $u(x,t)=\frac{A}{1+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\frac{a\pi}{l}t+\frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{l}t\right)\sin\frac{\pi}{l}x.$

Решение ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,\Phi_k(x), \tag{а}$$

где $\Phi_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x$ — собственные функции спектральной задачи (Штурма — Лиувилля) $\Phi'' + \lambda^2\Phi = 0$, $0 < x < l$, $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$, соответствующие собственным значениям $\lambda_k = k\pi/l$, $k = 1, 2, \ldots$ Для определения коэффициентов $T_k(t)$ ряда (а) потребуем, чтобы функция $u(x, t)$, определяемая рядом (а), удовлетворяла исходному уравнению; получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x = Ae^{-t}\sin\frac{\pi}{l}x. \tag{б}$$

Из (б) следует

$$T_1''(t) + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 T_1(t) = Ae^{-t}, \tag{в}$$

$$T_k''(t) + \left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{г}$$

Из (а) и начальных условий задачи находим

$$T_k(0) = T_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{д}$$

Решая уравнения (в) и (г) с использованием условий (д), получим

$$T_1(t) = \frac{A}{1 + \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi}{l}t + \frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{l}t\right),$$

$$T_k(t) \equiv 0, \quad k = 2, 3, \ldots$$

665. $u(x, t) =$

$$= \frac{2lA}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{1 + \left(\frac{ka\pi}{l}\right)^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{ka\pi}{l}t + \frac{l}{ka\pi}\sin\frac{ka\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

666. $$u(x, t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\left\{\left[\frac{a\pi(2k+1)}{2l}\right]^2 - 1\right\}} \times$$

$$\times\left[\sin t - \frac{2l}{a\pi(2k+1)}\sin\frac{a\pi(2k+1)}{2l}t\right]\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x.$$

667. Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_k T_k(t)\,\Phi_k(x) \tag{а}$$

по собственным функциям $\Phi_k(x)$ соответствующей спектральной задачи Штурма — Лиувилля (Ш — Л). Чтобы определить собственные функции вспомогательной задачи

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad v(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad t > 0 \qquad (б)$$

в виде

$$v(x, t) = P(t)\Phi(x) \not\equiv 0. \qquad (в)$$

Подставляя (в) в (б) и разделяя переменные, получаем для отыскания $\Phi(x)$ следующую задачу Ш — Л:

$$\Phi''(x) + \lambda^2\Phi(x), \quad 0 < x < l, \quad \Phi(0) = \Phi'(l) = 0,$$

решая которую, находим собственные значения $\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2l}$ и соответствующие им собственные функции

$$\Phi_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Далее разложим функцию $f(x, t)$ также в ряд по найденным собственным функциям $\Phi_k(x)$:

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k(t)\,\Phi_k(x), \qquad (г)$$

где $\tau_k(t) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x, t)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots$

Теперь приступим к определению коэффициентов $T_k(t)$ ряда (а). Подставляя (а) и (г) в уравнение исходной задачи, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{T_k''(t) + \left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2 T_k(t) - \tau_k(t)\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x = 0,$$

откуда

$$T_k''(t) + \left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2 T_k(t) = \tau_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (д)$$

Аналогично, подставляя (а) в начальные условия исходной задачи, находим

$$T_k(0) = T_k'(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (е)$$

Решая задачи (д), (е), получаем

$$T_k(t) = \frac{2l}{(2k+1)a\pi}\int_0^t \tau_k(\xi)\sin\frac{(2k+1)a\pi}{2l}(t-\xi)\,d\xi, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Подставляя найденные выражения для $\Phi_k(x)$ и $T_k(t)$ в (а), находим решение исходной задачи:

$$u(x, t) = \frac{2l}{a\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left[\int_0^t \tau_k(\xi)\sin\frac{(2k+1)a\pi}{2l}(t-\xi)\,d\xi\right]\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x.$$

668. $u(x,t)=\dfrac{A}{1+\left(\dfrac{a\pi}{2l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{a\pi}{2l}t+\dfrac{2l}{a\pi}\sin\dfrac{a\pi}{2l}t\right)\cos\dfrac{\pi}{2l}x.$

669. $u(x,t)=$

$$-\int_0^t\left[\int_0^\tau f_0(\xi)\,d\xi\right]d\tau+\frac{l}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\xi)\sin\frac{ka\pi}{l}(t-\xi)\,d\xi\right]\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$f_0(\xi)=\frac{1}{l}\int_0^l f(x,\xi)\,dx,\quad f_k(\xi)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,\xi)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx,\quad k=1,2,\ldots$$

670. $u(x,t)=\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right)t^2+\dfrac{x}{\pi}t^3+\sin x\cos t+$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[(-1)^k 3t-1+\cos kt-\frac{(-1)^k 3}{k}\sin kt\right]\sin kx.$$

Решение искать в виде $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$, где $w(x,t)$ подобрать так (см. ответ к задаче 659), чтобы она удовлетворяла краевым условиям задачи.

671. $u(x,t)=\left(1-\dfrac{x}{\pi}\right)e^{-t}+\dfrac{xt}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos 2t\sin 2x-$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(1+k^2)}\left[e^{-t}+k^2\cos kt-\left(2k+\frac{1}{k}\right)\sin kt\right]\sin kx.$$

См. указание к решению задачи 670.

672. $u(x,t)=$

$$=x+t+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)}{2}t\sin\frac{(2k+1)}{2}x.$$

См. указание к решению задачи 670.

673. $u(x,t)=\dfrac{Aa}{\operatorname{sh}\dfrac{l}{a}}e^{-t}\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$. Решение искать в виде $u(x,t)=v(x,t)+$ $+e^{-t}f(x)$.

674. $u(x,t)=\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{1}{4}+\cos\dfrac{2}{a}x\right)\sin 2t$. Решение искать в виде $u(x,t)=v(x,t)+f(x)\sin 2t$.

675. а) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,\quad u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t>0,$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\alpha,\\ v_0, & \alpha<x<\beta,\\ 0, & \beta<x\leqslant l,\end{cases}$$

является функция

$$u(x,t)=\frac{2l\,v_0}{a\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\alpha k\pi}{l}-\cos\frac{\beta k\pi}{l}}{k^2}\sin\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

б) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0),\quad 0<x<l,$$

($\delta(x-x_0)$ — δ-функция Дирака)

является функция

$$u(x,t)=\frac{2I}{a\pi\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x_0}{l}\sin\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

ρ — линейная плотность струны.

676. а) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u_x(0,t)=u(l,t)=0,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\frac{I}{\rho}\delta(x),\quad 0\leqslant x<l,$$

($\delta(x)$ — δ-функция Дирака)

является функция

$$u(x,t)=\frac{4I}{a\pi\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin\frac{(2k+1)\,a\pi t}{2l}\cos\frac{(2k+1)\,\pi x}{2l},$$

ρ — плотность стержня.

б) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\frac{F_0}{ES}x,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0<x<l,$$

является функция

$$u(x,t)=\frac{8lF_0}{ES\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\,a\pi t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\,\pi x}{2l},$$

где E — модуль упругости, S — площадь поперечного сечения стержня.

Для определения начального отклонения $u(x,0)=\frac{F_0}{ES}x$ следует решить вспомогательную задачу о стационарном отклонении стержня под действием силы F_0.

677. Решением задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho}\,\delta(x), \quad (\delta(x) \text{ — } \delta\text{-функция Дирака})$$

является функция

$$u(x, t) = \frac{I}{l\rho}\,t + \frac{2I}{a\pi\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{ak\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l},$$

ρ — плотность стержня.

678. Решением задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = 0, \quad Tu_x(0, t) - Mu_{tt}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l,$$

является функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\lambda_k t + B_k\sin a\lambda_k t)\,\Phi_k(x),$$

$$A_k = \frac{1}{\|\Phi_k(x)\|^2}\left[\rho_0\int_0^l \varphi(x)\,\Phi_k(x)\,dx + M\varphi(0)\right],$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\Phi_k(x)\|^2}\left[\rho_0\int_0^l \psi(x)\,\Phi_k(x)\,dx + M\psi(0)\right],$$

$$\Phi_k(x) = \cos\lambda_k x - h\lambda_k\sin\lambda_k x,$$

λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\lambda l = h\lambda$, $h = Ma^2/T$, T — натяжение, ρ_0 — линейная плотность струны,

$$\|\Phi_k(x)\|^2 = \int_0^l[\rho_0 + M\delta(x)]\,\Phi_k^2(x)\,dx = \frac{\left[l\left(1 + h^2\lambda_k^2\right) - h\right]}{2} + M, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При решении задачи следует учесть ортогональность собственных функций $\Phi_k(x)$ на промежутке $(0, l)$ с весом $\rho(x) = \rho_0 + M\delta(x)$.

679. а) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = U, \quad 0 < x < l,$$

является функция

$$u(x, t) = \frac{gx}{a^2}\left(l - \frac{x}{2}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{gl^2}{(2k+1)^3\pi^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + \right.$$
$$\left. + \frac{2Ul^2}{(2k+1)^2\pi^2 a}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

б) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0, t) = 0, \quad SEu_x(l, t) + Mu_{tt}(l, t) = Mg, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = U, \quad 0 < x < l,$$

является функция

$$u(x, t) = -\frac{gx^2}{2a^2} + \frac{g(l+h)x}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos a\lambda_k t + B_k\sin a\lambda_k t)\sin\lambda_k x,$$

$$A_k = \frac{1}{\|\sin\lambda_k x\|^2}\left[\frac{(-1)^{k+1}gl(l+2h)(M+h\rho_0)}{\sqrt{1+h^2\lambda_k^2}} - \frac{g\rho_0}{a^2\lambda_k^3}\right],$$

$$B_k = \frac{U}{a\lambda_k\|\sin\lambda_k x\|^2}\left[\frac{\rho_0}{\lambda_k} + \frac{(-1)^{k+1}(M-h\rho_0)}{\sqrt{1+h^2\lambda_k^2}}\right],$$

$$\|\sin\lambda_k x\|^2 = \int_0^l[\rho_0 + M\delta(x-l)]\sin^2\lambda_k x\,dx =$$
$$= \frac{l^2\rho_0}{2} + \frac{2M-h\rho_0}{2\left(1+h^2\lambda_k^2\right)}, \quad h = \frac{Ma^2}{SE},$$

ρ_0 — плотность, E — модуль Юнга стержня, g — ускорение свободного падения, λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\lambda l = h\lambda$.

Следует учесть, что собственные функции $\sin\lambda_k x$ ортогональны на промежутке $(0, l)$ с весом $\rho(x) = \rho_0 + M\delta(x-l)$.

680. Функция $v(x, y)$ является решением задачи

$$v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0, \quad (x, y) \in G, \quad v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in C,$$

а функция $w(t)$ — решением уравнения $w''(t) + \lambda w(t) = 0$. Наличие набора решений

$$u_n(x, y, t) = (a_n\cos\mu_n t + b_n\sin\mu_n t)v_n(x, y),$$

где $v_n(x, y)$ — нетривиальные решения задачи (34), (35) при $\lambda = \mu_n$, а a_n и b_n — произвольные действительные постоянные, позволяет построить решение $u(x, y, t)$ исходной задачи, удовлетворяющее и начальным условиям.

681. В силу единственности решения задачи Коши

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0, \quad u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0$$

заключаем, что $u(x, y, t) = 0$ в области, ограниченной конусом $\sqrt{x^2+y^2} =$

$=1-t$ и плоскостью $t=0$. Интегрируя тождество

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=0$$

по области D_τ, ограниченной цилиндром $x^2+y^2=1$, конусом $\sqrt{x^2+y^2}=1-t$ и плоскостью $t=\tau$, $\tau>0$, в силу условий $u(x, y, t)=0$ при $x^2+y^2=1$, $t\geqslant 0$, $u(x, y, t)=0$ при $t=1-\sqrt{x^2+y^2}$ находим

$$\int\limits_{1-\tau<\sqrt{x^2+y^2}<1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]_{t=\tau}dx\,dy=0,$$

т. е. $u(x, y, \tau)=\left.\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=0$. Повторяя это рассуждение при $t>1$, заключаем, что $u(x, y, t)=0$ в полуцилиндре $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$, $t\geqslant 0$.

682. Пусть $v(x, y)$ — решение задачи (34), (35). Интегрируя тождество

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)-v\Delta v$$

по области G, получаем

$$\int\limits_G\left(v_x^2+v_y^2\right)dx\,dy=\int\limits_G v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds-\int\limits_G v\Delta v\,dx\,dy=\lambda\int\limits_G v^2dx\,dy,$$

откуда получаем требуемое утверждение.

683. Если $v_k(x, y)$ и $v_m(x, y)$ — соответствующие λ_k и λ_m ($\lambda_k\neq\lambda_m$) собственные функции задачи (34), (35), то в результате интегрирования тождества

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v_k\frac{\partial v_m}{\partial x}-v_m\frac{\partial v_k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v_k\frac{\partial v_m}{\partial y}-v_m\frac{\partial v_k}{\partial y}\right)=v_k\Delta v_m-v_m\Delta v_k$$

получаем

$$\int\limits_G\left(v_k\Delta v_m-v_m\Delta v_k\right)dx\,dy=\left(\lambda_m-\lambda_k\right)\int\limits_G v_kv_m dx\,dy=0.$$

684. а) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0<x<s,\quad 0<y<p,\quad t>0,$$

$$u(0, y, t)=u(s, y, t)=u(x, 0, t)=u(x, p, t)=0,\quad t>0,$$

$$u(x, y, 0)=\sin\frac{\pi}{s}x\sin\frac{\pi}{p}y,\quad u_t(x, y, 0)=0,\quad 0<x<s,\quad 0<y<p,$$

является функция

$$u(x, y, t)=\cos\frac{\sqrt{s^2+p^2}\,a\pi t}{sp}\sin\frac{\pi x}{s}\sin\frac{\pi y}{p}.$$

б) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0<x<s,\quad 0<y<p,\quad t>0,$$

$$u(0, y, t)=u(s, y, t)=u(x, 0, t)=u(x, p, t)=0,\quad t>0,$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \frac{I}{\rho}\,\delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0),$$
$$0 < x < s, \quad 0 < y < p,$$

является функция

$$u(x, y, t) =$$
$$= \frac{4I}{a\pi\rho} \sum_{k, n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi x_0}{s}\sin\frac{n\pi y_0}{p}}{\sqrt{k^2p^2 + n^2s^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2} + \frac{n^2}{p^2}}\,a\pi t\right)\sin\frac{k\pi}{s}x\sin\frac{n\pi}{p}y,$$

где ρ — поверхностная плотность массы мембраны.

в) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{1}{\rho}e^{-t}x\sin\frac{2\pi}{p}y, \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$
$$u(0, y, t) = u(s, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p,$$

является функция

$$u(x, y, t) = \sin\frac{2\pi}{p}y\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(e^{-t} - \cos a\pi\omega_k t + \frac{1}{a\pi\omega_k}\sin a\pi\omega_k t\right)\sin\frac{k\pi}{s}x,$$

где $a_k = \dfrac{(-1)^{k+1}2s}{\pi\rho k\,(1 + a^2\pi^2\omega_k^2)}$, $\omega_k = \sqrt{\dfrac{k^2}{s^2} + \dfrac{4}{p^2}}$, ρ — поверхностная плотность массы мембраны.

685. а) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$
$$u(0, y, t) = u_x(s, y, t) = u(x, 0, t) = u_y(x, p, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, y, 0) = Axy, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p,$$

является функция

$$u(x, y, t) =$$
$$= \sum_{k, n=0}^{\infty} a_{kn}\cos\left(a\pi\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4s^2} + \frac{(2n+1)^2}{4p^2}}\,t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2s}x\sin\frac{(2n+1)\pi}{2p}y,$$

где $a_{kn} = \dfrac{(-1)^{k+n}64spA}{\pi^4(2k+1)^2(2n+1)^2}$.

б) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$
$$u(0, y, t) = u_x(s, y, t) = u(x, 0, t) = u_y(x, p, t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \frac{I}{\rho}\,\delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0),$$
$$0 < x < s, \quad 0 < y < p,$$

является функция

$$u(x, y, t) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} \sin\left(\frac{a\pi}{2}\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{s^2} + \frac{(2n+1)^2}{p^2}}\, t\right) \times$$

$$\times \sin\frac{(2k+1)\pi}{2s} x \sin\frac{(2n+1)\pi}{2p} y,$$

где $a_{kn} = \dfrac{8I}{a\pi^2\rho sp} \dfrac{\sin\dfrac{(2k+1)\pi x_0}{2s} \sin\dfrac{(2n+1)\pi y_0}{2p}}{\sqrt{\dfrac{(2k+1)^2}{s^2} + \dfrac{(2n+1)^2}{p^2}}}$, ρ — поверхностная плотность массы мембраны.

686. а) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = u(s, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \cos\frac{\pi x}{2s} \sin\frac{\pi y}{p}, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p,$$

является функция

$$u(x, y, t) = A\cos\left(a\pi\sqrt{\frac{1}{4s^2} + \frac{1}{p^2}}\, t\right) \cos\frac{\pi x}{2s} \sin\frac{\pi y}{p}.$$

б) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = u(s, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

$$0 < x < s, \quad 0 < y < p,$$

является функция

$$u(x, y, t) = \frac{4I}{\rho\pi a p s} \sum_{k=0,n=1}^{\infty} A_{kn} \sin\left(a\pi\sqrt{\mu_k^2 + \frac{n^2}{p^2}}\, t\right) \cos\mu_k\pi x \sin\frac{n\pi y}{p},$$

где $A_{kn} = \dfrac{\cos\mu_k\pi x_0 \sin\dfrac{n\pi y_0}{p}}{\sqrt{\mu_k^2 + \dfrac{n^2}{p^2}}}$, $\mu_k = \dfrac{2k+1}{2s}$, ρ — поверхностная плотность массы мембраны.

в) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = u(s, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0, \quad t > 0,$$

$u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) =$ [illegible] $\sin\frac{\pi y}{p}$, $0 < x < s$, $0 < y < p$

является функция

$$u(x, y, t) = \frac{8As}{a\pi^3} \sin\frac{\pi y}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\omega_k} \sin(a\pi\omega_k t) \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2s},$$

где $\omega_k = \sqrt{\left(\frac{2k+1}{2s}\right)^2 + \frac{1}{p^2}}$.

г) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + B(s - x)\sin\frac{\pi y}{p}\sin t, \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = u(s, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, p, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < s, \quad 0 < y < p,$$

является функция

$$u(x, y, t) = g(y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a\mu_k \cos a\mu_k t + \sin a\mu_k t - a\mu_k \sin t}{(2k+1)^2\mu_k(1 - a^2\mu_k^2)} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2s},$$

где $g(y) = \frac{8Bs}{a\pi^2}\sin\frac{\pi y}{p}$, $\mu_k = \pi\sqrt{\left(\frac{2k+1}{2s}\right)^2 + \frac{1}{p^2}}$.

687. $u(x, t) = \frac{2lA}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi}{l}x.$

688. $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2 t} \sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x,$

где $a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\,dx.$

689. $u(x, t) = \frac{8lA}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\left[\frac{(2k+1)a\pi}{2l}\right]^2 t} \cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x.$

690. $u(x, t) = U.$

691. $u(x, t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{h^2 + \lambda_k^2}{l(h^2 + \lambda_k^2) + h} \int_0^l \varphi(\xi)\cos\lambda_k\xi\,d\xi \right\} e^{-a^2\lambda_k^2 t} \cos\lambda_k x,$

λ_k — положительные корни уравнения $\lambda \operatorname{tg}\lambda l = h$.

692. $u(x, t) = 2U \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h - (-1)^k\sqrt{h^2 + \lambda_k^2}}{\lambda_k\left[l(h^2 + \lambda_k^2) + h\right]} e^{-a^2\lambda_k^2 t} \Phi_k(x),$

где $\Phi_k(x) = \lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x$, λ_k — положительные корни уравнения $h\operatorname{tg}\lambda l = -\lambda$.

693. $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x),$

где $a_k = \dfrac{2U}{l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+2h}\left(\dfrac{h}{\lambda_k}+\dfrac{h^2+\lambda_k^2}{2\lambda_k^2}\sin\lambda_k l\right)$, λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\lambda l = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{h}-\dfrac{h}{\lambda}\right)$.

694. $$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\,d\xi\right)e^{-\left[\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2+\beta\right]t}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

695. $$u(x,t)=e^{-\left(\frac{a^2\pi^2}{4l^2}+\beta\right)t}\sin\frac{\pi}{2l}x.$$

696. $$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\left[\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2+\beta\right]t}\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\,dx,\quad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx,\quad k=1,2,\ldots$$

697. $$u(x,t)=2hU\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\left[l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h\right]}e^{-\left(a^2\lambda_k^2+\beta\right)t}\Phi_k(x),$$

где $\Phi_k(x)=\lambda_k\cos\lambda_k x+h\sin\lambda_k x$, λ_k — положительные корни уравнения $h\operatorname{ctg}\lambda l=\lambda$.

698. $$u(x,t)=\frac{(U-T)}{l}x+T+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[(-1)^kU-T\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

699. $$u(x,t)=w(x)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{-\frac{(2k+1)^2a^2\pi^2}{4l^2}t}\sin\frac{(k+1)\pi}{2l}x,$$

где

$$w(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)\,d\xi\right]dy+\frac{x}{a^2}\int_0^l f(\xi)\,d\xi+qx,$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\psi(x)-w(x)\right]\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\,dx.$$

700. $$u(x,t)=qx+$$

$$+\frac{(A-q)\,l}{2}-\frac{4l\,(A-q)}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2a^2\pi^2}{l^2}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

701. $$u(x,t)=\frac{U-hT}{1+lh}x+T-$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^2+\lambda_k^2}{\lambda_k\left[l\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h\right]}\left[T-\frac{(-1)^kU}{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}\right]e^{-a^2\lambda_k^2t}\sin\lambda_k x,$$

λ_k — положительные корни уравнения $h\operatorname{tg}\lambda l=-\lambda$.

702. $u(x,t)=\dfrac{1}{\beta+\left(\dfrac{a\pi}{l}\right)^2}\left[1-e^{-\left[\beta+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\right]t}\right]\sin\dfrac{\pi}{l}x.$

703. $u(x,t)=\dfrac{aA}{\cos\dfrac{l}{a}}e^{-t}\sin\dfrac{x}{a}+\dfrac{2}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\dfrac{T}{\omega_k}+\dfrac{(-1)^kAa^2}{1-a^2\omega_k^2}\right]e^{-a^2\omega_k^2t}\sin\omega_kx,$

где $\omega_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}$, $\omega_k\neq\dfrac{1}{a}$, $k=0,1,\ldots$ Решение задачи искать в виде $u(x,t)=f(x)e^{-t}+v(x,t)$, требуя при этом, чтобы $v(x,t)$ удовлетворяла однородным уравнению и краевым условиям.

704. $u(x,t)=-\dfrac{a^2A}{2l}t^2-\left(\dfrac{A}{2l}x^2-Ax+\dfrac{Al}{3}-\dfrac{a^2T}{l}\right)t+\dfrac{T}{2l}x^2-$

$$-\frac{lT}{6}+\frac{2l}{a^2\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\left\{Al^2-[Al^2+(-1)^kT(ak\pi)^2]\,e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Решение задачи искать в виде $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$, где $w(x,t)$ взять в виде $w(x,t)=(\alpha_1x^2+\beta_1x)At+(\alpha_2x^2+\beta_2x)T$, подобрав постоянные α_1, β_1, α_2, β_2 так, чтобы $w(x,t)$ удовлетворяла краевым условиям задачи.

705. $u(r,t)=\dfrac{2}{Rr}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^R rf(r)\sin\dfrac{k\pi r}{R}\,dr\right]e^{-\left(\frac{ak\pi}{R}\right)^2t}\sin\dfrac{k\pi r}{R}.$

Чтобы получить это решение, перейдем к новой неизвестной функции $v(r,t)=ru(r,t)$, в результате чего исходная задача редуцируется к задаче

$$v_t=a^2v_{rr},\quad 0<r<R,\quad t>0,$$

$$v(0,t)=v(R,t)=0,\quad t>0,\quad v(r,0)=rf(r),\quad 0<r<R.$$

706. $u(r,t)=\dfrac{3}{R^3}\displaystyle\int_0^R r^2f(r)\,dr+$

$$+\frac{2}{R^3r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+R^2\lambda_k^2}{\lambda_k^2}\left[\int_0^R rf(r)\sin\lambda_kr\,dr\right]e^{-a^2\lambda_k^2t}\sin\lambda_kr,$$

λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}R\lambda=R\lambda$.

707. $u(r,t)=$

$$=\frac{2(1-Rh)}{Rr}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-Rh-\cos^2R\lambda_k}\left[\int_0^R rf(r)\sin\lambda_kr\,dr\right]e^{-a^2\lambda_k^2t}\sin\lambda_kr,$$

λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}R\lambda=\dfrac{R\lambda}{1-Rh}$.

708. а) Решением задачи

$u_t=a^2\Delta u,\ 0\leqslant r<R,\ t>0$, где $\Delta u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$,

$$|u(0,t)|<\infty,\quad u(R,t)=P,\quad t>0,\quad u(r,0)=T,\quad 0\leqslant r<R,$$

является функция

$$u(r,t) = P + \frac{2R(T-P)}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{k} e^{-\left(\frac{k a \pi}{R}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi r}{R}.$$

б) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0, \text{ где } \quad \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

$$k u_r(R, t) = q, \quad t > 0, \quad u(r, 0) = T, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r,t) = T + \frac{qR}{k}\left(\frac{3a^2t}{R^2} - \frac{3R^2 - 5r^2}{10R^2}\right) - \frac{2q}{kRr}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \cos R\lambda_n} e^{-a^2\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n r,$$

k — коэффициент теплопроводности, λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} R\lambda = R\lambda$.

в) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = hP, \quad t > 0, \quad h > 0,$$

$$u(r, 0) = T, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r,t) = P + \frac{2Rh(T-P)}{r}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos R\lambda_k}{\lambda_k\left(1 - Rh - \cos^2 R\lambda_k\right)} e^{-a^2\lambda_k^2 t} \sin \lambda_k r,$$

λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} R\lambda = \dfrac{R\lambda}{1 - Rh}$.

709. а) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = U, \quad t > 0, \quad u(r, 0) = T, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r,t) = U + \frac{Q}{6k}(R^2 - r^2) +$$

$$+ \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(U - T - \frac{QR^2}{kn^2\pi^2}\right) e^{-\left(\frac{an\pi}{R}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{R} r,$$

$a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, k — коэффициент теплопроводности шара.

б) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0, \text{ где } \quad \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

$$k u_r(R, t) = -q, \quad t > 0, \quad u(r, 0) = T, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r, t) = T + \frac{(QR - 3q)}{c\rho R} t + \frac{q}{10kR}(3R^2 - 5r^2) + \\ + \frac{2q}{kRr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \cos R\lambda_n} e^{-a^2\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n r,$$

$a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность, k — коэффициент теплопроводности шара, λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} R\lambda = R\lambda$.

в) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = hP, \quad t > 0, \quad h > 0,$$

$$u(r, 0) = T, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r, t) = P + \frac{QR}{3kh} + \frac{Q(R^2 - r^2)}{6k} + \\ + \frac{2Rh}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(T - P - \frac{Q}{k\lambda_n^2}\right) \frac{\cos R\lambda_n}{\lambda_n\left(1 - Rh - \cos^2 R\lambda_n\right)} e^{-a^2\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n r,$$

λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} R\lambda = \frac{R\lambda}{1 - Rh}$.

710. $u(r, t) = e^{-\beta t}\left\{\frac{U}{8} + \frac{2U}{r}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin\frac{R\lambda_k}{2} - R\lambda_k \cos\frac{R\lambda_k}{2}}{2R\lambda_k - \sin 2R\lambda_k} e^{-a^2\lambda_k^2 t} \sin \lambda_k r\right\}$,

λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} R\lambda = R\lambda$.

711. $u(r, t) = \frac{2}{Rr}\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin\frac{k\pi r}{R}$.

$$c_k(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{R}\right)^2 (t-\tau)} \int_0^R \xi f(\xi, \tau) \sin\frac{k\pi\xi}{R}\, d\xi\, d\tau.$$

712. а) Решением задачи

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = u(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s,$$

является функция

$$u(x, y, t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} a_{kn} e^{-a^2\omega_{kn}^2 t} \sin\frac{k\pi}{p} x \sin\frac{n\pi}{s} y,$$

где

$$a_{kn} = \frac{4}{ps} \int_0^p \int_0^s f(x, y) \sin \frac{k\pi}{p} x \sin \frac{n\pi}{s} y \, dx \, dy,$$

$$\omega_{kn}^2 = \frac{k^2\pi^2}{p^2} + \frac{n^2\pi^2}{s^2}.$$

б) Решением задачи

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = u(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s,$$

является функция

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty} a_{kn} e^{-a^2\omega_{kn}^2 t} \sin \frac{k\pi}{s} y \cos \frac{(2n+1)\pi}{2p} x,$$

где

$$a_{kn} = \frac{4}{ps} \int_0^p \int_0^s f(x, y) \sin \frac{k\pi}{s} y \cos \frac{(2n+1)\pi}{2p} x \, dx \, dy,$$

$$\omega_{kn}^2 = \frac{k^2\pi^2}{s^2} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4p^2}.$$

в) Решением задачи

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u_x(p, y, t) + hu(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$

$$u_y(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s,$$

является функция

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty} a_{kn} e^{-a^2\omega_{kn}^2 t} \sin \mu_k x \cos \frac{(2n+1)\pi}{2s} y,$$

где

$$a_{kn} = \frac{4\left(h^2 + \mu_k^2\right)}{s\left[p\left(h^2 + \mu_k^2\right) + h\right]} \int_0^p \int_0^s f(x, y) \sin \mu_k x \cos \frac{(2n+1)\pi}{2s} y \, dx \, dy,$$

$$\omega_{kn}^2 = \mu_k^2 + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4s^2},$$

μ_k — положительные корни уравнения $h \operatorname{tg} p\mu = -\mu$.

$$u(x, y, t) = \sum_{k=0, n=1}^{\infty} T_{kn}(t) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2p} \sin \frac{n\pi y}{s},$$

где

$$T_{kn}(t)=\frac{4}{ps}\int_0^t e^{-a^2\omega_{kn}^2(t-\tau)}\int_0^p\int_0^s f(\xi,\ \eta,\ \tau)\sin\frac{(2k+1)\pi\xi}{2p}\sin\frac{n\pi\eta}{s}\,d\xi\,d\eta\,d\tau,$$

$$\omega_{kn}^2=\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4p^2}+\frac{n^2\pi^2}{s^2}.$$

714. $$u(x,\ y,\ t)=Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2}\right)t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s}+$$

$$+\frac{4A}{a^2\pi^2\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)}\left[1-e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}\left(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2}\right)t}\right]\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s}.$$

715. $u(x,\ y,\ t)=$

$$=\frac{A}{a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)-1}\left[e^{-t}-e^{-a^2\pi^2\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2}\right)t}\right]\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s}.$$

716. Решением задачи

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})-\beta u,\quad 0<x,\ y,\ z<l,\quad t>0,$$
$$u(0,\ y,\ z,\ t)=u(l,\ y,\ z,\ t)=0,\quad 0<y,\ z<l,\quad t>0,$$
$$u(x,\ 0,\ z,\ t)=u(x,\ l,\ z,\ t)=0,\quad 0<x,\quad z<l,\quad t>0,$$
$$u(x,\ y,\ 0,\ t)=u(x,\ y,\ l,\ t)=0,\quad 0<x,\ y<l,\quad t>0,$$
$$u(x,\ y,\ z,\ 0)=U,\quad 0<x,\ y,\ z<l,$$

является функция

$u(x,\ y,\ z,\ t)=$

$$=\frac{64U}{\pi^3}\sum_{k,m,n=0}^{\infty}A_{kmn}e^{-\omega_{kmn}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{l},$$

$$A_{kmn}=[(2k+1)(2m+1)(2n+1)]^{-1},$$

$$\omega_{kmn}=\beta+\frac{a^2\pi^2}{l^2}[(2k+1)^2+(2m+1)^2+(2n+1)^2],$$

β — коэффициент распада.

717. а) $$u(x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}x\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{2p}y,$$

$$a_k=\frac{2}{p}\operatorname{sh}^{-1}\frac{(2k+1)\pi s}{2p}\int_0^p f(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2p}x\,dx.$$

б) $u(x, y) = \frac{(pB - 2A)y}{2s} + A -$

$$- \frac{4pB}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi s}{p}} \cos \frac{(2k+1)\pi}{p} x \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{p} y.$$

в) $u(x, y) =$

$$= \frac{8Bp^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^2 (2k+1)^2 - 2}{(2k+1)^3 \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi s}{2p}} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{2p} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2p}.$$

г) $u(x, y) = U + \frac{2}{\pi}\left[T \operatorname{sh} \frac{\pi}{2p} y - \left(\operatorname{ch} \frac{\pi s}{2p}\right)\left(\frac{2U}{p} + T \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2p}\right) \operatorname{ch} \frac{\pi}{2p} y\right] \times$

$$\times \sin \frac{\pi}{2p} x - \frac{4U}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^{-1} \frac{(2k+1)\pi s}{2p}}{2k+1} \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi}{2p} y \sin \frac{(2k+1)\pi}{2p} x.$$

д) $u(x, y) =$

$$= \frac{4qs}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \cos \frac{(2k+1)\pi p}{s}} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{s} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{s} +$$

$$+ \frac{4U}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi s}{2p}} \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi y}{2p} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2p}.$$

е) $u(x, y) =$

$$= \frac{2sT}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi s}{p}} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{p} \sin \frac{k\pi x}{p} + \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi p}{s}} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{s} \sin \frac{k\pi y}{s} \right).$$

718. а) $u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\frac{(2k+1)\pi x}{2l}} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2l},$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2l} \, dy.$$

б) $u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(h^2 + \lambda_k^2)}{l(h^2 + \lambda_k^2) + h} \int_0^l f(\xi) \cos \lambda_k \xi \, d\xi \right\} e^{-\lambda_k x} \cos \lambda_k y,$

где λ_k — положительные корни уравнения $\lambda \operatorname{tg} \lambda l = h$.

в) $u(x, y) = \frac{8l}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{(2k+1)\pi x}{l}} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{l}.$

г) $u(x, y) = 2(1 + hl) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k \left[h + l(h^2 + \lambda_k^2)\right]} X_k(y)$

где $Y_k(y) = \lambda_k \cos\lambda_k y + h\sin\lambda_k y$, λ_k — положительные корни уравнения $h\,\mathrm{tg}\,\lambda l = -\lambda$.

719. а) $$u(r,\varphi) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k\varphi.$$

б) $$u(r,\varphi) = -1 - \frac{r}{2R}\cos\varphi + \frac{\pi r}{R}\sin\varphi + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}\left(\frac{r}{R}\right)^k\cos k\varphi.$$

в) $$u(r,\varphi) = \frac{T}{h} + \frac{Qr}{1+Rh}\sin\varphi + \frac{Ur^3}{R^2(3+Rh)}\cos 3\varphi.$$

г) $$u(r,\varphi) = C + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (A_k\cos k\varphi + B_k \sin k\varphi),$$

где C — произвольная постоянная,

$$A_k = \frac{1}{k\pi R^{k-1}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi,$$

$$B_k = \frac{1}{k\pi R^{k-1}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi, \quad \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

720. а) $$u(r,\varphi) = \frac{2T}{\pi} + \frac{4T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}\left(\frac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi.$$

б) $$u(r,\varphi) = C + \frac{4R^2}{3r}\cos\varphi + \frac{R^3}{4r^2}\cos 2\varphi -$$

$$- \frac{\pi R^3}{r^2}\sin 2\varphi + 4R\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{4-k^2}\left(\frac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi.$$

в) $$u(r,\varphi) = -\frac{A_0}{2\pi h} - \frac{R}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+hR}\left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k\cos k\varphi + B_k\sin k\varphi),$$

где $A_k = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi$, $B_k = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi$.

г) $$u(r,\varphi) = \pi U - \frac{RU}{r}\sin\varphi + 2U\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k^2-1}{k(1-k^2)}\left(\frac{R}{r}\right)^k\sin k\varphi.$$

721. а) $$u(r,\varphi) = \frac{b}{b^2-a^2}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\cos\varphi.$$

б) $$u(r,\varphi) = A\frac{\ln\frac{r}{b}}{\ln\frac{a}{b}} + \frac{Bb^2}{b^4-a^4}\left(r^2 - \frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi.$$

в) $u(r, \varphi) = Q + \dfrac{a^2 q}{a^2 + b^2}\left(r - \dfrac{b^2}{r}\right)\cos\varphi + \dfrac{b^2 T}{a^4 + b^4}\left(r^2 + \dfrac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi.$

г) $u(r, \varphi) = T\,\dfrac{1 + hb\ln\dfrac{b}{r}}{1 + hb\ln\dfrac{b}{a}} + abU\,\dfrac{(1 - hb)\dfrac{r}{b} + (1 + hb)\dfrac{b}{r}}{b^2 + a^2 + hb\,(b^2 - a^2)}\cos\varphi.$

722. а) $u(r, \varphi) = \dfrac{2A\alpha}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{k\pi\varphi}{\alpha}.$

б) $u(r, \varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2\alpha}\varphi,$

$$a_k = \frac{2}{\alpha} R^{-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}\int\limits_0^{\alpha} f(\varphi)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}\varphi\,d\varphi.$$

в) $u(r, \varphi) = \dfrac{\alpha U}{2} - \dfrac{4\alpha U}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\cos\dfrac{k\pi\varphi}{\alpha}.$

г) $u(r, \varphi) = \dfrac{4\alpha QR}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{k\pi\varphi}{\alpha}.$

д) $u(r, \varphi) = 2RQ\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(h^2 + \lambda_k^2\right)(1 - \cos\alpha\lambda_k)}{\lambda_k(\gamma R + \lambda_k)\left[1 + \alpha\left(h^2 + \lambda_k^2\right)\right]}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\lambda_k}\sin\lambda_k\varphi,$

λ_k — положительные корни уравнения $h \operatorname{tg} \lambda\alpha = -\lambda$.

723. Действительно,

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n-1+2k}}{2^{n-1+2k}(k-1)!\,(n-1+k)!}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}\right) =$$

$$= \frac{2n}{x}\left[\frac{x^n}{2^n n!} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!\,(n+k)!}\right] = \frac{2n}{x}J_n(x).$$

Аналогично проверяются остальные два тождества.

724. Поскольку

$$\int\limits_0^1\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k}\frac{\pi}{2},$$

то

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\int_0^1\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = J_0(x).$$

725. Первое тождество проверяется так же, как и тождество из задачи **723.** Далее имеем

$$J_0''(x) = -J_1'(x) = -\frac{1}{2}\left[J_0(x) - J_2(x)\right].$$

Последнее равенство следует из второго тождества задачи 723.

726. Справедливость обоих тождеств проверяется непосредственно на основании тождеств из задачи 723. Действительно, учитывая, что

$$J_n'(\alpha x) = J_{n-1}(\alpha x) - \frac{n}{\alpha x}J_n(\alpha x),$$

$$J_n'(\alpha x) = \frac{n-1}{\alpha x}J_{n-1}(\alpha x) - J_n(\alpha x),$$

имеем

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left[\beta J_n(\alpha x)J_n'(\beta x) - \alpha J_n(\beta x)J_n'(\alpha x)\right]\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\beta x J_n(\alpha x)\left[\frac{n}{\beta x}J_n(\beta x) - J_{n+1}(\beta x)\right] - \right.$$

$$\left. - \alpha x J_n(\beta x)\left[\frac{n}{\alpha x}J_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x)\right]\right\} =$$

$$= \alpha J_n(\beta x)J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x)J_{n+1}(\beta x) + x\left[\alpha^2 J_{n+1}'(\alpha x)J_n(\beta x) + \right.$$

$$\left. + \alpha\beta J_n'(\beta x)J_{n+1}(\alpha x) - \beta^2 J_{n+1}'(\beta x)J_n(\alpha x) - \alpha\beta J_n'(\alpha x)J_{n+1}(\beta x)\right] =$$

$$= \alpha J_n(\beta x)J_{n+1}(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x)J_{n+1}(\beta x) +$$

$$+ \alpha^2 x J_n(\beta x)\left[J_n(\alpha x) - \frac{n+1}{\alpha x}J_{n+1}(\alpha x)\right] +$$

$$+ \alpha\beta x J_{n+1}(\alpha x)\left[\frac{n}{\beta x}J_n(\beta x) - J_{n+1}(\beta x)\right] -$$

$$- \alpha\beta x J_{n+1}(\beta x)\left[\frac{n}{\alpha x}J_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x)\right] -$$

$$- \beta^2 x J_n(\alpha x)\left[J_n(\beta x) - \frac{n+1}{\beta x}J_{n+1}(\beta x)\right] = (\alpha^2 - \beta^2)\,xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x).$$

Точно так же

$$\frac{d}{dx}\left\{(\alpha^2x^2 - n^2)J_n^2(\alpha x) + \left[x\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right]^2\right\} =$$

$$= 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x) + 2\alpha^3x^2 J_n(\alpha x)J_n'(\alpha x) + 2\alpha^2 x J_{n-1}^2(\alpha x) +$$

$$+ 2\alpha^3x^2 J_{n-1}(\alpha x)J_{n-1}'(\alpha x) - 2n\alpha J_{n-1}(\alpha x)J_n(\alpha x) -$$

$$- 2n\alpha^2 x J_{n-1}'(\alpha x)J_n(\alpha x) - 2n\alpha^2 x J_{n-1}(\alpha x)J_n'(\alpha x) = 2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x).$$

727. Поскольку в силу задачи 726

$$(\alpha^2-\beta^2)\, xJ_n(\alpha x)\, J_n(\beta x) = \frac{d}{dx}\left[\alpha x J_n(\beta x)\, J_{n+1}(\alpha x) - \beta x J_n(\alpha x)\, J_{n+1}(\beta x)\right],$$

$$2\alpha^2 x J_n^2(\alpha x) = \frac{d}{dx}\left\{\left(\alpha^2x^2-n^2\right) J_n^2(\alpha x) + \left[nJ_n(\alpha x) - \alpha x J_{n+1}(\alpha x)\right]^2\right\},$$

то в результате интегрирования получаем

$$(\alpha^2-\beta^2)\int\limits_0^1 xJ_n(\alpha x)\, J_n(\beta x)\, dx = 0,$$

$$2\alpha^2\int\limits_0^1 xJ_n^2(\alpha x)\, dx = \begin{cases} \alpha^2 J_{n+1}^2(\alpha) & \text{при} \quad J_n(\alpha)=0, \\ \alpha^2 J_n^2(\alpha) & \text{при} \quad J_{n+1}(\alpha)=0. \end{cases}$$

728. Действительно, если α — комплексный нуль функции $J_n(x)$, то $\bar{\alpha}$ также будет ее нулем. Поэтому (см. задачу 727) получаем

$$\int\limits_0^1 xJ_n(\alpha x)\, J_n(\bar{\alpha} x)\, dx = \int\limits_0^1 x\,|J_n(\alpha x)|^2\, dx = 0,$$

т. е. $J_n(\alpha x) = 0$ тождественно при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Отсюда в силу аналитичности $J_n(\alpha x)$ следует, что $J_n(\alpha x) = 0$ для всех значений x (как действительных, так и комплексных), что невозможно. Точно так же, допуская, что $J_n(\alpha) = J_{n+1}(\alpha) = 0$ при $\alpha \neq 0$, пришли бы к противоречию

$$\int\limits_0^1 x\,|J_n(\alpha x)|^2\, dx = 0.$$

Следовательно, $J_n(\alpha)$ и $J_{n+1}(\alpha)$ не могут иметь общих нулей (корней). Отсюда, на основании первого тождества из задачи 723, следует, что при любых целых неотрицательных индексах m и n функции $J_m(x)$ и $J_n(x)$ не могут иметь общих нулей (корней).

729. Записывая оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ в полярных координатах $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vartheta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2},$$

например, для $u_n(r, \vartheta)$ получаем

$$\Delta u_n(r,\vartheta) - \mu^2 u_n(r,\vartheta) = \frac{\partial^2 I_n(\mu r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial I_n(\mu r)}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2}+\mu^2\right) I_n(\mu r) = 0,$$

поскольку $I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$ является решением уравнения

$$I_n'' + \frac{1}{x} I_n' - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) I_n(x) = 0.$$

730. Так как $\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}$, то

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1/2}}{2^{2k+1/2}\,k!\,\Gamma(k+1+1/2)}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Аналогично получается и второе тождество.

731. Справедливость утверждения следует из того, что при замене $x=\cos\vartheta$, $-1<x<1$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=-\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}.$$

732. Поскольку при $x=\cos\vartheta$

$$T_n(x)=T_n(\cos\vartheta)=\frac{1}{2}\left[(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^n+(\cos\vartheta-i\sin\vartheta)^n\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{in\vartheta}+e^{-in\vartheta}\right]=\cos n\vartheta=\cos^n\vartheta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\vartheta\sin^2\vartheta+\ldots,$$

то

$$T_n(x)=x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2)+\ldots$$

733. Пользуясь формулой для $T_n(x)$ (см. решение задачи 732), получаем

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_2(x)=2x^2-1,\quad T_3(x)=4x^3-3x.$$

734. Пользуясь формулой $T_n(x)=\cos n\vartheta$ (см. решение задачи 732), получаем

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^{\pi}\cos n\vartheta\cos m\vartheta\,d\vartheta=0,\quad n\neq m.$$

735. $\|T_0\|=\sqrt{\pi}$, $\|T_n\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $n=1,2,\ldots$

736. Пользуясь формулой Лейбница, находим

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^ke^{-x}}{dx^k}\,\frac{d^{n-k}x^n}{dx^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k,$$

откуда и следует, что

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left[\binom{n}{n-k}\frac{n}{k!}-\right.$$

$$\left.-\binom{n}{n-k}\frac{1}{(k-1)!}-\binom{n}{n-k+1}\frac{1}{(k-1)!}-\binom{n}{n-k-1}\frac{1}{k!}\right]x^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\left[\binom{n}{n-k}(n-k)-\binom{n}{n-k+1}(k+1)\right]=0.$$

737. $L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - x, \quad L_2 = 1 - 2x + \frac{x^2}{2!}, \quad L_3 = 1 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}.$

738. Пусть $n < m$. В результате интегрирования по частям $n + 1$ раз получаем

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = \frac{1}{m!} \int_0^\infty L_n(x) \frac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x})\, dx =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{1}{(m+1)!} \int_0^\infty \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} L_n(x) \frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} (x^m e^{-x})\, dx = 0.$$

739. Интегрирование по частям n раз дает

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x)\, dx = \frac{1}{n!} \int_0^\infty L_n(x) \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\, dx = (-1)^{2n} \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1,$$

поскольку, как известно, $\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$

740. $u_0^3 = y^3 - 3yz^2, \quad u_1^3 = xy^2 - xz^2, \quad u_2^3 = yx^2 - yz^2,$

$u_3^3 = x^3 - 3xz^2, \quad u_4^3 = zy^2 - \frac{1}{3} z^3, \quad u_5^3 = xyz, \quad u_6^3 = x^2 z - \frac{1}{3} z^3.$

741. $Y_3^0 = \sin\varphi \sin\vartheta\, (\sin^2\varphi \sin^2\vartheta - 3\cos^2\vartheta),$

$Y_3^1 = \cos\varphi \sin\vartheta\, (\sin^2\varphi \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta),$

$Y_3^2 = \sin\varphi \sin\vartheta\, (\cos^2\varphi \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta),$

$Y_3^3 = \cos\varphi \sin\vartheta\, (\cos^2\varphi \sin^2\vartheta - 3\cos^2\vartheta),$

$Y_3^4 = \cos\vartheta \left(\sin^2\varphi \sin^2\vartheta - \frac{1}{3}\cos^2\vartheta\right),$

$Y_3^5 = \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta,$

$Y_3^6 = \cos\vartheta \left(\cos^2\varphi \sin^2\vartheta - \frac{1}{3}\cos^2\vartheta\right).$

742. Поскольку функция

$$\frac{1}{r} u_5^3\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = \frac{1}{r^4} Y_3^5(\varphi, \vartheta)$$

является гармонической, ее множители

$$u(r) = \frac{1}{r^4}, \quad Y(\varphi, \vartheta) = Y_3^5(\varphi, \vartheta)$$

являются решениями уравнений

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dw}{dr}\right)-12w=0,$$

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)+12Y=0,$$

в чем легко убедиться, если пользоваться записью оператора Лапласа в сферических координатах.

745. Справедливость утверждения следует из тождества

$$(t^2-1)\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}(t^2-1)^m+2t\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2-1)^m-m(m+1)\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m=0,$$

полученного дифференцированием $m+1$ раз очевидного тождества

$$(t^2-1)\frac{d}{dt}(t^2-1)^m=2mt(t^2-1)^m.$$

746. Справедливость этих соотношений проверяется легко, если пользоваться представлением $P_n(t)$ из задачи 745. Так, например, в силу указанного представления имеем

$$P'_{n+1}(t)-P'_{n-1}(t)=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^n}{dt^n}\left[2(n+1)(t^2-1)^n+4n(n+1)t^2(t^2-1)^{n-1}\right]-$$

$$-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^{n-1}=P_n(t)+\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^n}{dt^n}t^2(t^2-1)^{n-1}-$$

$$-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^{n-1}=P_n(t)+2nP_n(t)=(1+2n)P_n(t).$$

747. В справедливости утверждения легче всего убедиться непосредственной проверкой, т. е. подстановкой выражения (38) для $P_m(t)$ в левую часть уравнения (36).

748. Пусть $m>n$. В этом случае, интегрируя n раз по частям, находим

$$\int_{-1}^{1}P_m(t)P_n(t)\,dt=\frac{1}{2^{m+n}m!\,n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{m+n}m!\,n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}}(t^2-1)^m\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(t^2-1)^n\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{m+n}m!\,n!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}}(t^2-1)^m\,dt=0.$$

749. При $n=m$ (см. ответ к задаче 748) имеем

$$\int_{-1}^{1}P_m^2(x)\,dx=\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^m\,dt=\frac{2}{2m+1}.$$

750. Поскольку (см. ответ к задаче 741)

$$Y_3^5(\varphi, \vartheta) = \sin\varphi\cos\varphi\sin^2\vartheta\cos\vartheta,$$

то для $P_3^2(\cos\vartheta) = P_3^2(t)$ имеем выражение

$$P_3^2(\cos\vartheta) = 15\sin^2\vartheta\cos\vartheta = 15(1-\cos^2\vartheta)\cos\vartheta = 15t(1-t^2),$$

которое, очевидно, удовлетворяет уравнению (37) при $m = 3$, $n = 2$.

751. Результат получится сразу, если продифференцировать n раз уравнение (36), а затем принять

$$y(t) = \frac{d^n v(t)}{dt^n}.$$

754. В справедливости утверждения убеждаемся, если в уравнение из задачи 751 подставить

$$y(t) = (1-t^2)^{-n/2} P_m^n(t).$$

755. В уравнении из задачи 751 положить

$$y(t) = (1-t^2)^{-n/2} Q_m^n(t).$$

757. Справедливость утверждения следует из формулы (39), если учесть оценку

$$|\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos t| = \sqrt{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2 t} \leqslant 1.$$

758. Пусть $r_n(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$ — произвольный полином степени меньше m. В результате интегрирования n раз по частям находим

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)\, r_n(t)\, dt = \frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1} r_n(t)\frac{d^m}{dt^m}(t^2-1)^m\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^n a_n n!}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-n}}{dt^{m-n}}(t^2-1)^m\, dt = 0.$$

759. Справедливость утверждения следует из формулы (39), если положить в ней $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ соответственно.

760. $P_{2m+1}(0) = 0$, $P_{2m}(0) = (-1)^m \dfrac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}$.

761. Поскольку оператор Лапласа можно внести под знак интеграла, справедливость утверждения следует из соотношения

$$\Delta f(z + ix\cos t + iy\sin t,\ t) = (1 - \cos^2 t - \sin^2 t)\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\xi = z + ix\cos t + iy\sin t.$$

762. В соответствии с утверждением задачи 756 имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos t+iy\sin t)^m\,dt=\frac{r^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos(t-\varphi)]^m\,dt=$$

$$=\frac{r^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos\tau]^m\,d\tau=r^mP_m(\cos\vartheta).$$

763. Если искать решение уравнения (42) по формуле (40), в которой

$$K(z,\ t)=\mp\frac{1}{\pi}e^{-iz\sin t},$$

то уравнение (41) примет вид

$$v_{tt}+n^2v=0,$$

решением которого является функция $v(t)=e^{\pm int}$.

764. $$H_n^{(1)}(z)=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{0}\exp(z\operatorname{sh}\eta-n\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\exp(-iz\sin\xi+in\xi)\,d\xi+\frac{1}{i\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-z\operatorname{sh}\eta-n\eta-in\pi)\,d\eta,$$

$$H_n^{(2)}(z)=-\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{0}\exp(z\operatorname{sh}\eta-n\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\exp(-iz\sin\xi+in\xi)\,d\xi-\frac{1}{i\pi}\int_{0}^{\infty}\exp(-z\operatorname{sh}\eta-n\eta+in\pi)\,d\eta.$$

765. $$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-iz\sin\xi+in\xi)\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(z\sin\xi-n\xi)\,d\xi.$$

766. Пользуясь выражением для $J_n(z)$ (см. задачу 765), имеем

$$J_{-n}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(z\sin\xi+n\xi)\,d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos[z\sin(\pi-t)+n(\pi-t)]\,dt=$$

$$=(-1)^n\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(z\sin t-nt)\,dt=(-1)^nJ_n(z).$$

767. Утверждение следует из оценки $|\cos t|\leqslant 1$, справедливой для всех действительных значений t.

768. Пользуясь выражением для $J_n(z)$ из задачи 767, имеем

$$u(x,\ y,\ z) = \frac{1}{2\pi} e^{\lambda z} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\rho\sin(t-\varphi)} e^{imt}\, dt = \frac{1}{2\pi} e^{\lambda z} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda\rho\sin\psi} e^{im(\varphi+\psi)}\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{\lambda z} e^{im\varphi} \int\limits_0^{\pi} \cos(\lambda\rho\sin\psi + m\psi)\, d\psi = e^{\lambda z} e^{im\varphi} J_{-m}(\lambda\rho).$$

769. $$u(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{a\mu_k t}{R} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{R} \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где

$$A_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^R \rho\varphi(\rho)\, J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{R}\right) d\rho,$$

$$B_k = \frac{2}{aR\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^R \rho\psi(\rho)\, J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{R}\right) d\rho,$$

μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

770. $$u(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где

$$T_k(t) = \frac{2}{aR\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^t \int\limits_0^R \rho f(\rho,\ \tau)\, J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{R}\right) \sin\frac{a\mu_k}{R}(t-\tau)\, d\rho\, d\tau,$$

λ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

771. а) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

$$|u(0,\ t)| < \infty, \quad u(R,\ t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(r,\ 0) = 0, \quad u_t(r,\ 0) = f(r), \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r,\ t) = \frac{UR}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{2}\right)}{\mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} \sin\frac{a\mu_k t}{R}\, J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

б) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

$$|u(0,\ t)| < \infty, \quad u_r(R,\ t) + hu(R,\ t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(r,\ 0) = 0, \quad u_t(r,\ 0) = f(r), \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r, t) = \frac{RU}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{2}\right)}{\left(h^2R^2 + \mu_k^2\right) J_0^2(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{R} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hRJ_0(\mu) = 0$.

772. а) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, 0) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(r, 0) = A(R^2 - r^2), \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r, t) = 8AR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos \frac{a\mu_k t}{R} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

б) Решением задачи

$$u_{tt} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = U, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r, t) = \frac{2RU}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{R} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

773. $$u(r, t) = \left(\frac{F}{2} + \frac{a^2U}{R}\right) t^2 + \frac{Ur^2}{2R} - \frac{UR}{4} - \\ - 2RU \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} \cos \frac{a\mu_k t}{R} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Решение искать в виде $u(r, t) = v(r, t) + w(r) + At^2$, где A — постоянная.

774. $$u(r, t) = \frac{U}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \sin \omega t + \\ + 2\omega aRU \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\omega^2R^2 - a^2\mu_k^2\right) J_1(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{R} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Решение искать в виде $u(r, t) = v(r, t) + w(r) \sin \omega t$.

775. $$u(r,\ t)=-\frac{aU}{\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cos\omega t+\frac{2a^2U}{\omega^2 R}+$$

$$+2a^2U\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\omega^2R^2-a^2\mu_k^2\right)J_0(\mu_k)}\cos\frac{a\mu_k t}{R}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu)=0$.

776. а) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{q}{\rho}\cos\omega t,\quad 0\leqslant r<R,\quad t>0,$$

$$|u(0,\ t)|<\infty,\quad u(R,\ t)=0,\quad t>0,\quad u(r,\ 0)=u_t(r,\ 0)=0,\quad 0\leqslant r<R,$$

является функция

$$u(r,\ t)=\frac{q\cos\omega t}{\rho\omega^2J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}\left[J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)-J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)\right]+$$

$$+\frac{2qR^2}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\omega^2R^2-a^2\mu_k^2\right)J_1(\mu_k)}\cos\frac{a\mu_k t}{R}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

б) Решением задачи

$$u_{tt}=a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{q}{\rho}\cos\omega t,\quad 0\leqslant r<R,\quad t>0,$$

$$|u(0,\ t)|<\infty,\quad u_r(R,\ t)+hu(R,\ t)=0,\quad t>0,$$

$$u(r,\ 0)=u_t(r,\ 0)=0,\quad 0\leqslant r<R,$$

является функция

$$u(r,\ t)=\frac{q}{\rho\omega^2}\left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right]\cos\omega t+$$

$$+\frac{2q}{\rho\omega^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2J_1(\mu_k)}{\left(R^2h^2+\mu_k^2\right)J_0^2(\mu_k)}\left(\frac{1}{\mu_k}-\frac{a^2hR}{a^2\mu_k^2-\omega^2R^2}\right)\cos\frac{a\mu_k t}{R}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu)+RhJ_0(\mu)=0$.

777. а) $u(r,\ t)=$

$$=\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_k)+J_1^2(\mu_k)}\left[\int_0^R\rho\varphi(\rho)J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{R}\right)d\rho\right]e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu)+RhJ_0(\mu)=0$.

б) $u(r,t) =$

$$= \frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_1^2(\mu_k)}\left[\int_0^t\int_0^R e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2(t-\tau)}\rho f(\rho,\tau)\, J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{R}\right)d\rho\, d\tau\right]J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

$$\text{в)}\ u(r,t) = e^{-ht}\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $c_k = \dfrac{2}{R^2J_0^2(\mu_k)}\displaystyle\int_0^R \rho\varphi(\rho)\, J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{R}\right)d\rho$, μ_k — последовательные неотрицательные корни уравнения $J_0'(\mu) = 0$, причем $\mu_0 = 0$.

$$\text{г)}\ u(r,t) = \frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{a^2\mu_k^2}{R^2}+h^2\right)t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $A_k = \dfrac{1}{J_1(\mu_k)} - \dfrac{2}{R^2J_1^2(\mu_k)\, I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}\displaystyle\int_0^R \rho J_0\left(\frac{\mu_k\rho}{R}\right) I_0\left(\frac{h\rho}{a}\right)d\rho$, μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Решение задачи следует искать в виде $u(r,t) = v(r,t)\,e^{-h^2t} + w(r) + T$.

$$\text{д)}\ u(r,t) = \frac{U\left[J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right]}{h^2J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}e^{-h^2t} -$$

$$- 2UR^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k\left(a^2\mu_k^2 - h^2R^2\right)J_1(\mu_k)}e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

$$\text{е)}\ u(r,t) = \frac{Te^{-h^2t}}{J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - 2a^2T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{a^2\mu_k^2 - h^2R^2}e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

$$\text{ж)}\ u(r,t) = -\frac{aT}{hJ_1\left(\frac{hR}{a}\right)}J_0\left(\frac{hr}{a}\right)e^{-h^2t} + \frac{U}{\gamma^2}\left(1 - e^{-\gamma^2t}\right) + \frac{2a^2T}{Rh^2} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{J_0^2(\mu_k)}\left[\frac{UJ_1(\mu_k)}{\gamma^2\mu_k} - \frac{a^2TRJ_0(\mu_k)}{a^2\mu_k^2 - h^2R^2}\right]e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

$$\text{в)}\quad u(r, t) = \frac{qr^2}{2R} - \frac{qR}{4} + \frac{2a^2qt}{R} - 2qR\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

778. а) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u,\ \ 0 \leqslant r < R,\ \ t > 0,\ \text{ где }\ \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

$$|u(0, t)| < \infty,\ \ u_r(R, 0) = 0,\ \ t > 0,\ \ u(r, 0) = Ur^2,\ \ 0 \leqslant r \leqslant R.$$

является функция

$$u(r, t) = \frac{UR^2}{2} + 4UR^2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_0(\mu_k)} e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$;

б) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u,\ \text{ где }\ \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \ 0 \leqslant r < R,\ t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty,\ \ u_r(R, t) + hu(R, t) = 0,\ \ t > 0,$$

$$u(r, 0) = Ur^2,\ \ 0 \leqslant r \leqslant R,$$

является функция

$$u(r, t) = 2UR^2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4hR + (2 - hR)\mu_k^2}{\mu_k^2\left(\mu_k^2 + h^2R^2\right)J_0(\mu_k)} e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hRJ_0(\mu) = 0$;

в) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u,\ \text{ где }\ \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \ 0 \leqslant r < R,\ t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty,\ \ u(R, t) = T,\ \ t > 0,\ \ u(r, 0) = Ur^2,\ \ 0 \leqslant r \leqslant R,$$

является функция

$$u(r, t) = T + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(UR^2 - T)\mu_k^2 - 4UR^2}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

779. Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho},\ \text{ где }\ \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \ 0 \leqslant r < R,\ t > 0,$$

$$|u(0, t)| < \infty,\ \ u(R, t) = T,\ \ t > 0,\ \ u(r, 0) = 0,\ \ 0 \leqslant r \leqslant R$$

является функция

$$u(r, t) = T + \frac{Q}{4k}(R^2 - r^2) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k\mu_n^2 T + QR^2)}{k\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где k — коэффициент теплопроводности, c — коэффициент теплоемкости, μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

780. а) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad b < r < d, \; t > 0,$$

$$u(b, t) = u(d, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(r, 0) = U, \quad b < r < d,$$

является функция

$$u(r, t) = \pi U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n d)\, e^{-a^2\lambda_n^2 t}}{J_0(\lambda_n b) - J_0(\lambda_n d)} [N_0(\lambda_n b) J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n b) N_0(\lambda_n r)],$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\lambda b)N_0(\lambda d) - J_0(\lambda d)N_0(\lambda b) = 0.$$

б) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad b < r < d, \quad t > 0,$$

$$u_r(b, t) = 0, \quad u(d, t) = T, \quad t > 0, \quad u(r, 0) = U, \quad b < r < d,$$

является функция

$$u(r, t) = T +$$

$$+ \pi(U - T)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n b)\, e^{-a^2\lambda_n^2 t}}{J_1^2(\lambda_n b) - J_0^2(\lambda_n d)} [N_0(\lambda_n d) J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n d) N_0(\lambda_n r)],$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$N_0(\lambda d)J_1(\lambda b) - J_0(\lambda d)N_1(\lambda b) = 0.$$

в) Решением задачи

$$u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, \qquad \text{где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad b < r < d, \quad t > 0,$$

$$u(b, t) = u(d, t) = U, \quad t > 0, \quad u(r, 0) = U, \quad b < r < d,$$

является функция

$$u(r, t) = w(r) + T +$$

$$+ \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\lambda_n d) e^{-a^2\lambda_n t}}{J_0^2(\lambda_n d) - J_0^2(\lambda_n b)} \left[\int_b^d \rho w(\rho)\, \Phi_0(\lambda_n\rho)\, d\rho\right] \Phi_0(\lambda_n r),$$

$$w(r) = \frac{Q}{4k}(d^2 - r^2) - \frac{Q(d^2 - b^2)}{4k \ln\frac{d}{b}} \ln\frac{d}{r},$$

$$\Phi_0(\lambda_n r) = N_0(\lambda_n b)J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n b)N_0(\lambda_n r),$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$N_0(\lambda b) J_0(\lambda d) - J_0(\lambda b) N_0(\lambda d) = 0.$$

781. а) Решением задачи

$$u_t = a^2 \Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0,$$

$$|u(0, z, t)| < \infty, \quad u(r, 0, t) = u(r, l, t) = u(R, z, t) = U,$$

$$u(r, z, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant z \leqslant l, \quad t \geqslant 0,$$

является функция

$$u(r, z, t) = U +$$

$$+ \frac{4U}{\pi} \sum_{k=0,\, n=1} \frac{1}{(2k+1) J_1(\mu_n)} e^{-a^2\left[\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\mu_n^2}{R^2}\right] t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin \frac{(2k+1)\pi z}{l}$$

μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

б) Решением задачи

$$u_t = a^2 \Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(0, z, t)| < \infty, \quad u(r, 0, t) = U, \quad u_z(r, l, t) = u_r(R, z, t) = 0,$$

$$u(r, z, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0,$$

является функция

$$u(r, z, t) \equiv u(z, t) = U - \frac{2U}{l} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-a^2 \pi^2 (2k+1)^2}{4l^2} t} \sin \frac{(2k+1)\pi z}{2l}.$$

в) Решением задачи

$$u_t = a^2 \Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(0, z, t)| < \infty, \quad u_z(r, 0, t) = u_z(r, l, t) = 0, \quad u(R, z, t) = U,$$

$$u(r, z, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0,$$

является функция

$$u(r, z, t) \equiv u(r, t) = U - 2U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

782. а) Решением задачи

$$u_t = a^2 \Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(0, z, t)| < \infty, \quad u(R, z, t) = u(r, 0, t) = u_z(r, l, t) = 0,$$

$$u(r, z, 0) = A(R^2 - r^2)z, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0,$$

является функция

$$u(r, z, t) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty} a_{kn} e^{-a^2\left(\lambda_k^2+\eta_n^2\right)t} J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} z,$$

где

$$a_{kn} = (-1)^n \frac{64AlR^2}{\pi^2 \mu_k^3 (2n+1)^2 J_1(\mu_k)}, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \eta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l},$$

μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$;

б) Решением задачи

$$u_t = a^2 \Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(0, z, t)| < \infty, \quad u_z(r, 0, t) = u(r, l, t) = u_r(R, z, t) + hu(R, z, t) = 0,$$

$$u(r, z, 0) = A(R^2 - r^2)z, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0,$$

является функция

$$u(r, z, t) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty} a_{kn} e^{-a^2\left(\lambda_k^2+\eta_n^2\right)t} J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} z,$$

где

$$a_{kn} = \frac{16AlR^2 \left[(-1)^n (2n+1)\pi - 2\right] \left(2hR - \mu_k^2\right)}{\pi^2 \mu_k^2 (2n+1)^2 \left(\mu_k^2 + h^2R^2\right) J_0(\mu_k)}, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad \eta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l},$$

μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hRJ_0(\mu) = 0$.

783. а) Решением задачи

$$\Delta u + Ue^{-hz} = 0, \quad h > 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(0, z)| < \infty, \quad u_r(R, z) = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad u(r, 0) = Q, \quad 0 < r < R,$$

является функция

$$u(r, z) = Q + \frac{U}{h^2}\left(1 - e^{-hz}\right).$$

б) Решением задачи

$$\Delta u + Ue^{-\alpha z} = 0, \quad \alpha > 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u_r(R, z) + hu(R, z) = 0,$$

$$u(r, 0) = Q, \quad u(r, \infty) = 0, \quad z > 0, \quad 0 < r < R,$$

является функция

$$u(r, z) = \left[\frac{hJ_0(\alpha r)}{hJ_0(\alpha R) - \alpha J_1(\alpha R)} - 1\right] \frac{Ue^{-\alpha z}}{\alpha^2} +$$

$$+ 2Rh \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\mu_k^2 + h^2R^2\right) J_0(\mu_k)} \left(Q - \frac{UR^2}{\mu_k^2 - \alpha^2 R^2}\right) e^{-\frac{\mu_k z}{R}} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hRJ_0(\mu) = 0$.

в) Решением задачи

$$\Delta u + Ue^{-\alpha z} = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \alpha > 0,$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u(R, z) = Qe^{-\beta z}, \quad u(r, 0) = Q, \quad u(r, \infty) = 0,$$

$$0 \leqslant r \leqslant R, \quad 0 \leqslant z < \infty,$$

является функция

$$u(r, z) = \left[\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha R)} - 1\right]\frac{U}{\alpha^2}e^{-\alpha z} + \frac{QJ_0(\beta r)}{J_0(\beta R)}e^{-\beta z} -$$

$$- 2R^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)}\left(\frac{U}{\mu_k^2 - \alpha^2 R^2} + \frac{Q\beta^2}{\mu_k^2 - \beta^2 R^2}\right)e^{-\frac{\mu_k z}{R}}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Решение искать в виде

$$u(r, z) = v(r, z) + w_1(z)e^{-\alpha z} + w_2(z)e^{-\beta z}.$$

784. Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < 2l,$$

$$|u(0, z)| < \infty, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2l, \quad u(r, 0) = V_1, \quad u(r, 2l) = V_2, \quad 0 \leqslant r < R,$$

$$u(R, z) = f(z) = \begin{cases} V_1, & 0 \leqslant z < l, \\ V_2, & l < z \leqslant 2l, \end{cases}$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{V_2 - V_1}{2l}z + V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n I_0\left(\frac{n\pi r}{l}\right)}{nI_0\left(\frac{n\pi R}{l}\right)}\sin\frac{n\pi z}{l};$$

$I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

785. $u(r, z) = \dfrac{4U}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(r)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{l}$, где

$$f(r) = \frac{K_0\left[\frac{(2n+1)\pi b}{l}\right]I_0\left[\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right] - I_0\left[\frac{(2n+1)\pi b}{l}\right]K_0\left[\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right]}{K_0\left[\frac{(2n+1)\pi b}{l}\right]I_0\left[\frac{(2n+1)\pi d}{l}\right] - I_0\left[\frac{(2n+1)\pi b}{l}\right]K_0\left[\frac{(2n+1)\pi d}{l}\right]},$$

$K_0(z)$ — цилиндрическая функция Макдональда.

786. а) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u(R, z) = u(r, l) = 0, \quad u(r, 0) = T, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l,$$

является функция

$$u(r, z) = 2T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)} \left(\operatorname{ch} \frac{\mu_k}{R} z - \operatorname{cth} \frac{\mu_k}{R} l \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{R} z \right) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right),$$

μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

б) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u(r, 0) = u_z(r, l) = 0, \quad u(R, z) = f(z), \quad 0 \leqslant r < R,$$
$$0 < z < l,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^l f(\xi) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} \xi \, d\xi}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi R}{2l}\right]} I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{2l} r\right] \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} z;$$

$I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

в) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l,$$

$$|u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = Uz(l - z), \qquad 0 < z < l,$$
$$u(r, 0) = u(r, l) = 0, \quad 0 \leqslant r < R,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{8Ul^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\frac{(2n+1)\pi r}{l}\right]}{(2n+1)^2 I_0\left[\frac{(2n+1)\pi R}{l}\right]} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{l}$$

г) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l,$$

$$|u(0, z)| < \infty, \quad u(R, z) = T, \quad 0 \leqslant z \leqslant l,$$

$$u_z(r, 0) = -\frac{q}{k}, \quad u(r, l) = T, \quad 0 \leqslant r \leqslant R,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{q}{k}(l - z) + T - \frac{8ql}{k\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\frac{(2n+1)\pi r}{2l}\right]}{(2n+1)^2 I_0\left[\frac{(2n+1)\pi R}{2l}\right]} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l},$$

k — коэффициент теплопроводности;

д) Решением задачи

$$\Delta u = -\frac{Q}{k}, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u(r, 0) = u(r, l) = u(R, z) = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{Q}{4k}(R^2 - r^2) + \frac{2QR^2}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)\operatorname{sh}\frac{\mu_n}{R}l}\left\{\left(\operatorname{ch}\frac{\mu_n}{R}l - 1\right)\operatorname{sh}\frac{\mu_n}{R}z - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh}\frac{\mu_n}{R}l\operatorname{ch}\frac{\mu_n}{R}z\right\} J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right),$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Решение искать в виде $u(r, z) = w(r) + v(r, z)$ так, чтобы $\Delta w = -Q/k$.

787. а) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u(r, 0) = u(r, l) = 0, \quad u(R, z) = T,$$

$$R < r < \infty, \quad 0 < z < l,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{4T}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_0\left[\frac{(2n+1)\pi}{l}r\right]\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}z}{(2n+1)K_0\left[\frac{(2n+1)\pi}{l}R\right]},$$

$K_0(\xi)$ — цилиндрическая функция Макдональда.

б) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u_r(R, z) = -\frac{q}{k}, \quad u_z(r, 0) = 0, \quad u(r, l) = T,$$

$$R < r < \infty, \quad 0 < z < l,$$

является функция

$$u(r, z) = T + \frac{4q}{k\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n K_0\left[\frac{(2n+1)\pi r}{2l}\right]}{(2n+1)^2 K_1\left[\frac{(2n+1)\pi R}{2l}\right]}\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l},$$

k — коэффициент теплопроводности;

в) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad \text{где} \quad \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$|u(r, z)| < \infty, \quad u(R, z) = \frac{T}{l}z, \quad u(r, 0) = 0, \quad u_z(r, l) + hu(r, l) = hT,$$

$$R < r < \infty, \quad 0 < z < l,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{hT}{1+hl} z - \frac{2T}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{h^2+\lambda_k^2}\, K_0(\lambda_k r)}{\lambda_k \left[h + l\left(h^2+\lambda_k^2\right)\right] K_0(\lambda_k l)} \sin \lambda_k z,$$

λ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \lambda l = -\frac{\lambda}{h}$.

788. а) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$|u(r, \theta)| < \infty, \quad u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leqslant \theta < \alpha, \\ T_2, & \alpha < \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

является функция

$$u(r, \theta) = \frac{(T_1+T_2)(1-\cos\alpha)}{2} +$$

$$+ \frac{T_2 - T_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)] \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра;

б) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$|u(r, \theta)| < \infty, \quad u_r(R, \theta) + hu(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} \frac{q}{k}\cos\theta + hT, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}, \\ hT, & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

является функция

$$u(r, \theta) = T + \frac{qR}{2k}\left[\frac{1}{2Rh} + \frac{r\cos\theta}{R(1+hR)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1) P_{2n}(0)}{(2n+hR)(2n-1)(2n+2)} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\right],$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра;

в) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$|u(r, \theta)| < \infty, \quad u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

является функция

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2n+2} P_{2n}(0)\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta)\right],$$

где $P_n(x)$ — многочлен Лежандра;

г) Решением задачи

$$\Delta u + \frac{Q}{k} = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$|u(r, \theta)| < \infty, \quad u_r(R, \theta) = \begin{cases} -\frac{q}{k}, & 0 \leqslant \theta < \alpha, \\ 0, & \alpha < \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

является функция

$$u(r, \theta) = \frac{QR^2}{3k}\left[-\frac{r^2}{2R^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-\cos\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)\right] + \text{const},$$

где k — коэффициент теплопроводности.

Решение искать в виде $u(r, \theta) = v(r, \theta) + w(r)$. Учесть, что количество тепла, поступающего в шар от источников, равно количеству тепла, уходящему через поверхность шара;

д) Решением задачи

$$\Delta u + \frac{Q}{k} = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$|u(r, \theta)| < \infty, \quad u_r(R, \theta) + hu(R, \theta) = T + \cos\theta,$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

является функция

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{6k}(R^2 - r^2) + \frac{QR}{3kh} + \frac{T}{h} + \frac{r\cos\theta}{1+Rh}.$$

789. Решением задачи

$$\Delta u = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$|u(r, \theta)| < \infty, \quad u(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leqslant \theta < \pi/2, \\ 0, & \theta = \pi/2, \end{cases}$$

является функция

$$u(r, \theta) = T\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2n+2} P_{2n}(0)\left(\frac{r}{R}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

790. а) $u(r, \theta) = 3 + \frac{10r^2}{3R^2} P_2(\cos\theta)$;

б) $u(r, \theta) = -3 + \frac{2r}{R} P_1(\cos\theta) + \frac{2r^2}{R^2} P_2(\cos\theta)$;

в) $u(r, \theta) = -\frac{3r}{R} P_1(\cos\theta) + \frac{6r^3}{5R^3} P_3(\cos\theta)$;

г) $u(r, \theta) = -\frac{8}{15} + \frac{40r^2}{21R^2} P_2(\cos\theta) - \frac{48r^4}{35R^4} P_4(\cos\theta)$.

791. а) $u(r, \theta) = -\frac{1}{3} + \frac{2R^2}{r^2} P_1(\cos\theta) - \frac{2R^3}{3r^3} P_2(\cos\theta)$;

б) $u(r, \theta) = \frac{3R^2}{5r^2} P_1(\cos\theta) + \frac{2R^4}{5r^4} P_3(\cos\theta)$;

в) $u(r, \theta) = \frac{7R}{3r} + \frac{4R^3}{3r^3} P_2(\cos\theta)$.

792. Решением задачи

$$\Delta u = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right),$$

$$|u(r, \vartheta)| < \infty, \quad u(R, \vartheta) = f(\vartheta),$$

является функция

а) $$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2} \left\{\int_0^{\pi} f(\xi) P_n(\cos\xi) \sin\xi\, d\xi\right\} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\vartheta)$$

$$\text{при } 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi;$$

б) $$u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2} \left\{\int_0^{\pi} f(\xi) P_n(\cos\xi) \sin\xi\, d\xi\right\} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\vartheta)$$

$$\text{при } R \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi.$$

793. а) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$$

является функция

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^k(\cos\theta),$$

где

$$A_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi\alpha_k (n+k)!} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \cos k\varphi P_n^k(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$B_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi\alpha_k (n+k)!} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) \sin k\varphi P_n^k(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

$$\alpha_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 1, & k \neq 0, \end{cases}$$

$P_n^k(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра.

б) Решением задачи

$$\Delta u = 0, \quad R < r < \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi),$$

является функция

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^k(\cos\theta),$$

где $P_n^k(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра, а коэффициенты A_{nk} и B_{nk} определяются по формулам задачи 793 а).

794. а) Решением задачи

$$u_t = a^2 \Delta u, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right),$$

$$|u(r, \theta, t)| < \infty, \quad u(R, \theta, t) = 0, \quad u(r, \theta, 0) = f(r, \theta),$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad t > 0,$$

является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0, m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-\left(\frac{a\mu_{nm}}{R}\right)^2 t} P_n(\cos\theta) \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm}}{R} r\right)}{\sqrt{r}},$$

где

$$a_{nm} = \frac{2n+1}{R^2 \left[J'_{n+1/2}(\mu_{nm})\right]^2} \int_0^R \int_0^{\pi} r^{3/2} f(r, \theta) J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nm}}{R} r\right) P_n(\cos\theta) \sin\theta \, dr \, d\theta,$$

μ_{nm} — положительные корни уравнения $J_{n+1/2}(\mu) = 0$.

б) Решением задачи

$$u_t = a^2 \Delta u,$$

где

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

$$|u(r, \theta, \varphi, t)| < \infty, \quad u(R, \theta, \varphi, t) = 0, \quad u(r, \theta, \varphi, 0) = f(r, \theta, \varphi),$$

$$0 \leqslant r < R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t > 0,$$

является функция

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{a^2 \mu_{n,m}^2}{R^2} t} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{n,m} r}{R}\right) \times$$

$$\times (A_{nmk} \cos k\varphi + B_{nmk} \sin k\varphi) P_n^k(\cos\theta),$$

где $\mu_{n,m}$ — положительные корни уравнения $J_{n+1/2}(\mu) = 0$.

799. Условие $|\arg z| \leqslant \pi - \delta < \pi$ гарантирует возможность последовательного повторения интегрирования по частям. Имеем

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+z}\,dt = \frac{-e^{-t}}{t+z}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+z)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{z} - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+z)^2}\,dt = \frac{1}{z} + \frac{e^{-t}}{(t+z)^2}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+z)^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n} + (-1)^n n! \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+z)^{n+1}}\,dt.$$

800. $$\int_z^\infty e^{-t}t^{a-1}dt = -e^{-t}t^{a-1}\Big|_z^\infty + (a-1)\int_z^\infty e^{-t}t^{a-2}dt =$$

$$= e^{-z}z^{a-1} - (a-1)e^{-t}t^{a-2}\Big|_z^\infty + (a-1)(a-2)\int_z^\infty e^{-t}t^{a-3}dt =$$

$$= e^{-z}\left[z^{a-1} + (a-1)z^{a-2} + (a-1)(a-2)z^{a-3} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)z^{a-k}\right] +$$
$$+ (a-1)(a-2)\ldots(a-k+1)(a-k)\int_z^\infty e^{-t}t^{a-k-1}dt.$$

Учитывая тождество $\Gamma(a+k) = (a+k-1)\Gamma(a+k-1)$ и оценку

$$\left|\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)}\int_z^\infty e^{-t}t^{a-k-1}dt\right| < \left|\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)}\right| z^{a-k-1}\int_z^\infty e^{-t}dt =$$
$$= \left|\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)}\right| z^{a-k-1}e^{-z},$$

справедливую для $k > a-1$, получаем искомое асимптотическое разложение.

801. Условие $a > 0$ гарантирует законность последовательного повторения процесса интегрирования по частям. Имеем

$$\int_z^\infty t^{-a}e^{it}dt = \frac{ie^{iz}}{z^a} - ia\int_z^\infty t^{-a-1}e^{it}dt.$$

Интегрируя по частям еще k раз, получаем

$$\int_z^\infty t^{-a}e^{it}dt = \frac{ie^{iz}}{z^a}\left[1 + \frac{a}{iz} + \frac{a(a+1)}{(iz)^2} + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{(iz)^k}\right] +$$
$$+ \frac{a(a+1)\ldots(a+k)}{i^{k+1}}\int_z^\infty \frac{e^{it}}{t^{a+k+1}}\,dt.$$

$$A_{nmk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{\pi\alpha_k (n+k)! \left[J'_{n+1/2}(\mu_{n,m})\right]^2 R^2} \times$$

$$\times \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{3/2} f(r, \theta, \varphi) J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{n,m}}{R} r\right) \cos k\varphi P_n^k(\cos\theta) \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

$$B_{nmk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{\pi\alpha_k (n+k)! \left[J'_{n+1/2}(\mu_{n,m})\right]^2 R^2} \times$$

$$\times \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^{3/2} f(r, \theta, \varphi) J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{n,m}}{R} r\right) \sin k\varphi P_n^k(\cos\theta) \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

$$\alpha_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 1, & k \neq 0, \end{cases}$$

$P_n^k(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра.

795. $e^{-z} \sim 0 + \frac{0}{z} + \ldots + \frac{0}{z^n} + \ldots = 0.$

796. Указанный в ответе к задаче 795 ряд служит асимптотическим рядом для всех функций вида $f(z) = e^{-\omega z}$, где ω — произвольное положительное число.

797. Ввиду того, что $0 < z < t < \infty$, в результате последовательного повторения процесса интегрирования по частям имеем

$$\int_z^\infty e^{z^2-t^2} dt = -\frac{1}{2}\int_z^\infty \frac{1}{t}\, de^{z^2-t^2} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\int_z^\infty e^{z^2-t^2}\frac{dt}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2 z^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3 z^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 z^7} + \ldots + (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2^{k+1} z^{2k+1}} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}} \int_z^\infty \frac{e^{z^2-t^2}}{t^{2k+2}}\, dt.$$

Интегрируя по частям интеграл, получаем для остатка оценку

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}} \int_z^\infty \frac{e^{z^2-t^2}}{t^{2k+2}}\, dt < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)}{2^{k+2} z^{2k+3}},$$

откуда и следует требуемое асимптотическое разложение.

798. $\int_z^\infty e^{z-t} \frac{t\,dt}{z^2} = -e^{z-t}\frac{t}{z^2}\Big|_z^\infty + \frac{1}{z^2}\int_z^\infty e^{z-t} dt = \frac{1}{z}$

Учитывая тождество $\Gamma(a+k)=(a+k-1)\Gamma(a+k-1)$ и оценку

$$\frac{\Gamma(a+k+1)}{\Gamma(a)}\left|\int\limits_z^\infty \frac{e^{it}}{t^{a+k+1}}\,dt\right| \leqslant \frac{\Gamma(a+k+1)}{\Gamma(a)}\int\limits_z^\infty \frac{dt}{t^{a+k+1}}=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\,z^{a+k}},$$

получаем искомое асимптотическое разложение.

802. Пользуясь результатом задачи 797, имеем

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_z^\infty e^{-\tau^2}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-z^2}\int\limits_z^\infty e^{z^2-\tau^2}d\tau \sim$$

$$\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-z^2}\left[\frac{1}{2z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^{k+1}z^{2k+1}}\right]=e^{-z^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{1-2k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}.$$

803. Полагая в задаче 801 $a=1/2$, $t=\vartheta^2$, $u=\sqrt{z}$, получаем

$$\int\limits_u^\infty e^{i\vartheta^2}d\vartheta \sim \frac{ie^{iu^2}}{2\sqrt{\pi}\,u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,i^k\Gamma(k+1/2)}{u^{2k}}=$$

$$=\frac{ie^{iu^2}}{2\sqrt{\pi}\,u}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(2k+1/2)}{u^{4k}}\left[1-\frac{i\,(2k+1/2)}{u^2}\right]$$

или

$$\int\limits_u^\infty \cos\vartheta^2\,d\vartheta \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(2k+1/2)}{u^{4k+1}}\left[\frac{(2k+1/2)}{u^2}\cos u^2-\sin u^2\right],$$

$$\int\limits_u^\infty \sin\vartheta^2\,d\vartheta \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(2k+1/2)}{u^{4k+1}}\left[\frac{(2k+1/2)}{u^2}\sin u^2+\cos u^2\right].$$

804. $\operatorname{Ei}(z)\sim\dfrac{e^z}{z}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{z^k}.$

805. $\operatorname{Ci}(z)\sim\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2k)!}{z^{2k+1}}\left(\sin z-\frac{2k+1}{z}\cos z\right).$

806. $\operatorname{Si}(z)\sim-\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,(2k)!}{z^{2k+1}}\left(\cos z+\frac{2k+1}{z}\sin z\right).$

807. В рассматриваемом случае $N=\infty$, $m=0$, $\alpha=1$, $\varphi(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,t^{2nk}$ и при $z_0>0$ интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{e^{-z_0t}}{1+t^{2n}}\,dt$ абсолютно сходится. Поэтому в силу формулы Ватсона (45) искомое асимптотическое

разложение имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(2nk+1)}{z^{2nk+1}}.$$

808. Так как $m = p - 1 > -1$, $\alpha = 1$, $\psi(t) \equiv 1$, то из формулы Ватсона (45) получаем требуемое утверждение.

809. Справедливость утверждения следует из того, что $\sin t + \sin(-t) = 0$, и формулы Ватсона (45′).

810. Учесть, что в этом случае $A = -1$, $N = 2$, $\varphi(t) + \varphi(-t) = 2\cos t$, и воспользоваться формулой Ватсона (45′).

811. $F(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2 t^2}\, dt \sim \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) z^{-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}.$

812. Обозначим $F(z) = e^{-z^2} \int\limits_0^z e^{\xi^2} d\xi$. Тогда, применяя дважды правило Лопиталя, находим $\lim 2zF(z) = 1$, или $2zF(z) = 1 + o(1)$, или $F(z) = \frac{1}{2z}[1 + o(1)]$ при $z \to +\infty$, что и требовалось.

815. Пользуясь интегральным преобразованием Фурье по переменной x

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t)\, dx,$$

преобразуем уравнение исходной задачи к виду

$$U_{tt} + a^2\xi^2 U = 0,$$

откуда находим $U(\xi, t) = A(\xi)e^{-i\xi a t} + B(\xi)e^{i\xi a t}$, где $A(\xi)$ и $B(\xi)$ — произвольные функции параметра ξ. С помощью обратного преобразования Фурье получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} U(\xi, t)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[A(\xi)\, e^{i\xi(x-at)} + B(\xi)\, e^{i\xi(x+at)}\right] d\xi = A(x - at) + B(x + at).$$

Пользуясь начальными условиями задачи, получим ее решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz.$$

816. Пользуясь интегральным преобразованием Фурье по переменной x

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t)\, dx.$$

редуцируем исходную задачу к задаче

$$U_{tt} + a^2\xi^2 U = F(\xi, t), \quad U(\xi, 0) = U_t(\xi, 0) = 0,$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x, t)\, dx.$$

Решая ее, получаем

$$U(\xi, t) = \frac{1}{a\xi} \int_0^t F(\xi, \tau) \sin a\xi (t - \tau)\, d\tau. \qquad (*)$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} U(\xi, t)\, d\xi. \qquad (**)$$

Учитывая, что $\sin a\xi (t - \tau) = \frac{1}{2i}\left[e^{ia\xi(t-\tau)} - e^{-ia\xi(t-\tau)}\right]$, из $(*)$ и $(**)$ получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\xi}\left\{e^{i\xi[x+a(t-\tau)]} - e^{i\xi[x-a(t-\tau)]}\right\} F(\xi, \tau)\, d\xi.$$

Так как

$$\frac{1}{i\xi}\left\{e^{i\xi[x+a(t-\tau)]} - e^{i\xi[x-a(t-\tau)]}\right\} = \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} e^{i\xi\eta} d\eta,$$

то

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\eta} F(\xi, \tau)\, d\xi\right\} d\eta,$$

или

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta, \tau)\, d\eta.$$

817. Пользуясь преобразованием Фурье по переменной x:

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t)\, dx,$$

редуцируем исходную задачу к задаче

$$U_t + a^2\xi^2 U = 0, \quad U(\xi, 0) = \Phi(\xi),$$

где $\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \varphi(x)\, dx$. Ее решение записывается в виде

$$U(\xi, t) = \Phi(\xi)\, e^{-a^2\xi^2 t}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} U(\xi, t)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta)\, d\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2 t} e^{-i\xi(\eta - x)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta)\, d\eta \int\limits_{0}^{\infty} e^{-a^2\xi^2 t} \cos \xi(\eta - x)\, d\xi.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2\xi^2 t} \cos \xi(\eta - x)\, d\xi = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}}, \qquad (*)$$

получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta)\, e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}}\, d\eta.$$

818. $$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\eta, \tau) \frac{e^{-(x-\eta)^2/4a^2(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\eta.$$

См. решение задачи 817.

819. Для решения задачи воспользуемся синус-преобразованием Фурье

$$U(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} u(x, t) \sin \xi x\, dx.$$

Используя граничное условие $u(0, t) = \mu(t)$ и предполагая, что функция u и ее производная по x стремятся достаточно быстро к нулю при $x \to \infty$, имеем

$$U_t(\xi, t) = a^2 \sqrt{2/\pi} \int\limits_0^{\infty} u_{xx} \sin \xi x\, dx = a^2 \sqrt{2/\pi}\, u_x \sin \xi x \Big|_0^{\infty} -$$

$$- a^2\xi \sqrt{2/\pi} \int\limits_0^{\infty} u_x \cos \xi x\, dx = -a^2\xi \sqrt{2/\pi} \int\limits_0^{\infty} u_x \cos \xi x\, dx =$$

$$= -a^2 \sqrt{2/\pi}\, \xi \left\{ u \cos \xi x \Big|_0^{\infty} + \xi \int\limits_0^{\infty} u(x, t) \sin \xi x\, dx \right\} =$$

$$= a^2 \sqrt{2/\pi}\, \xi \mu(t) - a^2 \xi^2 U(\xi, t).$$

Таким образом, исходная задача редуцируется к задаче

$$U_t + a^2\xi^2 U = a^2\sqrt{2/\pi}\,\xi\mu(t), \quad U(\xi, 0) = 0,$$

из которой находим

$$U(\xi, t) = a^2\sqrt{2/\pi}\,\xi\int_0^t e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\mu(\tau)\,d\tau.$$

Пользуясь обратным синус-преобразованием Фурье, имеем

$$u(x, t) = \sqrt{2/\pi}\int_0^\infty U(\xi, t)\sin\xi x\,d\xi = \frac{2a^2}{\pi}\int_0^t \mu(\tau)\,d\tau\int_0^\infty \xi e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\sin\xi x\,d\xi =$$

$$= -\int_0^t \frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\pi(t-\tau)}\left[e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\sin\xi x\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - x\int_0^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos\xi x\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{x}{\pi}\int_0^t \frac{\mu(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)}\int_0^\infty e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos\xi x\,d\xi.$$

Отсюда, с учетом равенства (*) из решения задачи 817, получаем решение задачи

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

820. $u(x, t) = -\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau.$

Воспользоваться косинус-преобразованием Фурье; см. также решение задачи 819.

821. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]f(\xi, \tau)\,d\xi.$

822. $u(x, y, t) = \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$

Воспользоваться кратным (двумерным) преобразованием Фурье, которое определяется формулами

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-i(\xi x+\eta y)}f(x, y)\,dx\,dy,$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{i(\xi x+\eta y)}F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

823. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^2} \int_0^t \frac{d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta.$$

См. указание к решению задачи 822.

824. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right] f(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Воспользоваться преобразованием Фурье с ядром

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-ix\xi} \sin y\eta$$

при $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$.

825. $u(x, y, t) = \dfrac{y}{(2a\sqrt{\pi})^2} \displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau)\, d\xi.$

См. указание к решению задачи 824.

826. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}} \right] f(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Воспользоваться преобразованием Фурье с ядром

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\xi x} \cos y\eta$$

при $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$.

827. $u(x, y, t) = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi, \tau)\, d\xi.$

828. $u(x, y, t) =$

$$= \frac{y}{8\pi a^2} \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{1}{(t-\tau)^2} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] g(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{2a\pi} \int_0^t \int_0^{\infty} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{x^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{x^2+(y+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] f(\eta, \tau)\, d\eta\, d\tau.$$

829. Решением задачи

$$\Delta u = 0, \text{ где } \Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$u(r, 0) = u(b, z) = 0, \quad u(a, z) = f(z),$$

$$u(r, \infty) = u_z(r, \infty) = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < z < \infty,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(a, b, p, r) f(t) \sin pt \sin pz\, dt\, dp.$$

Здесь $\Phi(a, b, p, r) = \dfrac{I_0(bp) K_0(pr) - K_0(bp) I_0(pr)}{I_0(bp) K_0(ap) - I_0(ap) K_0(bp)}$. Воспользоваться синус-преобразованием Фурье.

830. Пусть $U(\zeta, y)$ и $F(\zeta)$ — образы по Лапласу функций $u(x, y)$ и $f(x)$ соответственно относительно переменной x. Тогда исходная задача преобразуется к уравнению

$$U_y - (\zeta^2 + a^2)U = F.$$

Отсюда

$$U(\zeta, y) = Ce^{(\zeta^2+a^2)y} - \frac{F(\zeta)}{\zeta^2 + a^2}.$$

Так как $y > 0$, то в силу того, что $U(\zeta, y) \to 0$, $\zeta \to \infty$, должно быть $C = 0$, т. е. $U(\zeta, y) = -\dfrac{F(\zeta)}{\zeta^2 + a^2}$. Следовательно,

$$U(x, y) = -\frac{1}{a}\int_0^x f(x - \xi) \sin a\xi\, d\xi.$$

831. $u(x, y) = Ae^{-3y} \cos 2x - \dfrac{B}{2} x \sin x$. См. решение задачи 829.

832. $u(x, t) = t \cos x + \dfrac{1}{2} x \sin x + \displaystyle\int_0^x f(\xi) \sin(x - \xi)\, d\xi$.

833. $u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - t) + \psi(t), & x - t > 0, \\ \psi(t), & x - t < 0. \end{cases}$

При решении задачи воспользоваться преобразованием Лапласа дважды: сначала по переменной x, а затем по t.

834. $u(x, t) = xe^{2t} \sin 3t$.

835. $u(x, t) = \begin{cases} 3g\left(x - \frac{2}{3}t\right) - 2g(x - t), & x > t, \\ 3g\left(x - \frac{2}{3}t\right) + 2\displaystyle\int_0^t f(\xi - x)\, d\xi, & \frac{2}{3}t < x < t, \\ 2\displaystyle\int_0^t \left[f(\xi - x) - f\left(\xi - \frac{3}{2}x\right)\right] d\xi, & x < \frac{2}{3}t; \end{cases}$

$$
836.\quad u(x, y) = \begin{cases} \varphi(x-y)\sin y + \\ \qquad + \int\limits_{x-y}^{x} f(t, y-x+t)\sin(x-t)\,dt, & x > y, \\ \psi(y-x)\cos x + \psi'(y-x)\sin x + \\ \qquad + \int\limits_{y-x}^{y} f(x-y+t, t)\sin(y-t)\,dt, & x < y. \end{cases}
$$

837. а) Математическая постановка задачи

$$
u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,
$$

$$
u(+0, t) = \delta(t), \quad u(l-0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, +0) = 0, \quad 0 < x < l.
$$

Пользуясь преобразованием Лапласа по переменной t:

$$
U(x, \zeta) = \int\limits_0^\infty e^{-\zeta t} u(x, t)\,dt.
$$

редуцируем эту задачу к задаче

$$
U_{xx} - \frac{\zeta}{a^2} U = 0, \quad 0 < x < l, \quad U(+0, \zeta) = 1, \quad U(l-0, \zeta) = 0,
$$

решая которую, находим

$$
U(x, \zeta) = \frac{\operatorname{sh} \frac{l-x}{a}\sqrt{\zeta}}{\operatorname{sh} \frac{l}{a}\sqrt{\zeta}}.
$$

Для получения искомого решения $u(x, t)$ (оригинала функции $U(x, \zeta)$) преобразуем $U(x, \zeta)$. Имеем

$$
U(x, \zeta) = \frac{e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\zeta}} - e^{-\frac{(2l-x)}{a}\sqrt{\zeta}}}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\zeta}}} = \left(e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\zeta}} - e^{-\frac{(2l-x)}{a}\sqrt{\zeta}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2nl}{a}\sqrt{\zeta}} =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(2nl+x)}{a}\sqrt{\zeta}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2nl-x)}{a}\sqrt{\zeta}}. \qquad (*)
$$

Так как при $\xi > 0$ изображением (по Лапласу) функции $\psi(\xi, t) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\xi^2/4t}$ является функция $e^{-\xi\sqrt{\zeta}}$ (см. таблицы оригиналов и изображений), то из $(*)$ находим оригинал $u(x, t)$ образа $U(x, \zeta)$ в виде

$$
u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi\left(\frac{2nl+x}{a}, t\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi\left(\frac{2nl-x}{a}, t\right).
$$

Отсюда, учитывая нечетность функции $\psi(x, t)$ по переменной x, получаем

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{2nl+x}{a}, t\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2nl+x)\, e^{-\frac{(2nl+x)^2}{4a^2t}},$$

б) Решением задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(+0, t) = \delta(t), \quad u(\infty - 0, t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x, +0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

является функция (см. также случай а))

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

в) Решением задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(+0, t) = \mu(t), \quad u(\infty - 0, t) = 0, \; t > 0, \quad u(x, +0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

является функция (см. также случай а))

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \mu(\tau) \frac{e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau.$$

Сравните с решением задачи 819.

838. а) Математическая постановка задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad a = 1/\sqrt{LC},$$

$$u(0, t) = E(t), \quad t > 0, \quad u(x, t) \text{ — ограничена при } x \to \infty,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Пользуясь преобразованием Лапласа по переменной t, получаем решение этой задачи в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{x}{a} = x\sqrt{LC}, \\ E\left(t - x\sqrt{LC}\right), & t > x\sqrt{LC}. \end{cases}$$

б) Решением задачи

$$u_{xx} = a^2 u_{tt} + 2bu_t + c^2 u, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = E(t), \quad t > 0, \quad u(x, t) \text{ — ограничена при } x \to \infty,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$a^2 = LC, \quad b = \frac{1}{2}(CR + LG), \quad c^2 = RG,$$

является функция

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & t < ax, \\ e^{-amx} E(t - ax), & t > ax, \end{cases} \quad \text{где } m = b/a^2.$$

$$839.\quad u(x,t)=\begin{cases} 0, & x>at,\\ -ae^{h(x-at)}\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} e^{ah\tau}\varphi(\tau)\,d\tau, & x<at.\end{cases}$$

840. а) Математическая постановка задачи для определения температуры $u=u(r, z)$:

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\quad 0\leqslant r<\infty,\quad z>0,$$

$$u(r, 0)=f(r),\quad u(r, \infty)=0,\quad 0\leqslant r<\infty,$$

$$u(\infty, z)=u_r(\infty, z)=0,\quad z>0.$$

Умножим обе части уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

на $rJ_0(\eta r)$ и проинтегрируем по r от 0 до ∞. Интегрируя по частям и пользуясь граничными условиями $u(\infty, z)=u_r(\infty, z)=0$, получим

$$\int_0^\infty rJ_0(\eta r)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dr=-\int_0^\infty J_0(\eta r)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr=$$

$$=-rJ_0(\eta r)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0}^{r=\infty}+\eta\int_0^\infty rJ_0'(\eta r)\frac{\partial u}{\partial r}\,dr=\eta\int_0^\infty rJ_0'(\eta r)\frac{\partial u}{\partial r}\,dr=$$

$$=\eta\left\{ruJ_0'(\eta r)\Big|_{r=0}^{r=\infty}-\int_0^\infty u\,\frac{\partial}{\partial r}\left[rJ_0'(\eta r)\right]dr\right\}=$$

$$=-\eta\int_0^\infty u\,\frac{\partial}{\partial r}\left[rJ_0'(\eta r)\right]dr=-\eta\int_0^\infty uJ_0'(\eta r)\,dr-\eta^2\int_0^\infty ruJ_0''(\eta r)\,dr.$$

Выражая далее $J_0''(\eta r)$ из уравнения

$$\frac{d^2}{dr^2}J_0(\eta r)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}J_0(\eta r)+\eta^2 J_0(\eta r)=0,$$

получаем

$$\int_0^\infty rJ_0(\eta r)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dr=\eta^2\int_0^\infty rJ_0(\eta r)\,u\,dr$$

или

$$U_{zz}=\eta^2 U,$$

где $U(\eta, z)=\int_0^\infty rJ_0(\eta r)\,u(r, z)\,dr$ — изображение Ханкеля функции $u(r, z)$.

Таким образом, с помощью преобразования Ханкеля рассматриваемая задача редуцируется к задаче

$$U_{zz} - \eta^2 U = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad U(\eta, 0) = F(\eta), \quad U(\eta, \infty) = 0,$$

где $F(\eta) = \int\limits_0^\infty rJ_0(\eta r) f(r)\, dr$, решая которую, находим

$$U(\eta, z) = F(\eta) e^{-\eta z}.$$

Отсюда, пользуясь обратным преобразованием Ханкеля, получаем решение исходной задачи

$$u(r, z) = \int\limits_0^\infty \eta J_0(\eta r) F(\eta) e^{-\eta z}\, d\eta = \int\limits_0^\infty \eta J_0(\eta r) e^{-\eta z} \left[\int\limits_0^\infty \rho J_0(\eta\rho) f(\rho)\, d\rho \right] d\eta.$$

б) $u(r, z) = TR \int\limits_0^\infty J_0(\eta r) J_1(R\eta) e^{-\eta z}\, d\eta.$

См. решение задачи для случая а).

в) Решением задачи

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad z > 0,$$

$$u_z(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{q}{k} + hu(r, 0), & 0 \leqslant r < R, \\ hu(r, 0), & R \leqslant r < \infty, \end{cases}$$

$$u(r, \infty) = 0, \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad u(\infty, z) = u_r(\infty, z) = 0, \quad z > 0,$$

является функция

$$u(r, z) = \frac{qR}{k} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\eta z}}{\eta + h} J_0(\eta r) J_1(\eta R)\, d\eta.$$

См. решение задачи для случая а).

841. $u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y) = 0.$

842. Конечноразностная замена уравнения Лапласа в рассматриваемом случае имеет вид

$$u(x+1, y) + u(x-1, y) + u(x, y+1) + u(x, y-1) - 4u(x, y) = 0.$$

В вершины квадратов Q_5 по указанной выше схеме переносятся краевые значения $u(x, y)$, а в узлах $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ значения $u(x, y)$ определяются из линейной системы

$$\begin{aligned} &u(1, 0) + u(-1, 0) + u(0, 1) + u(0, -1) - 4u(0, 0) = 0, \\ &4u(1, 0) - u(0, 0) = u(2, 0) + u(1, 1) + u(1, -1), \\ &4u(0, 1) - u(0, 0) = u(1, 1) + u(-1, 1) + u(0, 2), \end{aligned}$$

$$4u(-1, 0) \qquad - u(0, 0) = u(-2, 0) + u(-1, 1) + u(-1, -1),$$
$$4u(0, -1) - u(0, 0) = u(1, -1) + u(-1, -1) + u(0, -2),$$

детерминант которой отличен от нуля. Решая эту систему для каждого из рассматриваемых случаев, получаем:

а) $u(1, 0) = u(-1, 0) = u(0, 1) = u(0, -1) = u(0, 0) = 0$; точное решение $u(x, y) = 0$.

б) $u(1, 0) = u(-1, 0) = u(0, 1) = u(0, -1) = u(0, 0) = 1$; точное решение $u(x, y) = 1$.

в) $u(1, 0) = -u(-1, 0) = 1 + \sqrt{2}$, $u(0, 1) = u(0, -1) = u(0, 0) = 0$, точное решение $u(x, y) = x$.

843. Значения $u(x, y)$ в вершинах квадратов Q_5 определяются по указанной выше схеме, а $u(0, 0)$, $u(0, 1)$, $u(0, -1)$ — из линейной системы

$$\begin{aligned} 4u(0, 0) - u(0, 1) - u(0, -1) &= u(1, 0) + u(-1, 0), \\ u(0, 0) - 4u(0, 1) &= -u(1, 1) - u(-1, 1) - u(0, 2), \\ u(0, 0) - 4u(0, -1) &= -u(1, -1) - u(-1, -1) - u(0, -2). \end{aligned}$$

а) $u(0, 0) = u(0, 1) = u(0, -1) = 1$; точное решение $u(x, y) = 1$.

б) $u(0, 0) = 0$, $u(0, 1) = 3/2$, $u(0, -1) = -3/2$; точное решение $u(x, y) = y$.

в) $u(0, 0) = 0$, $u(0, 1) = 3/2$, $u(0, -1) = -3/2$; точное решение $u(x, y) = x + y$.

844. $u(x + h, t) + u(x - h, t) - 2u(x, t) - hu(x, t) + hu(x, t - h) = 0$.

845. В узлах (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5) значения $u(x, t)$ выражаются через краевые значения по указанной выше схеме, а для определения $u(2, 2)$, $u(2, 3)$, $u(2, 4)$ имеем линейную систему

$$\begin{aligned} u(2, 2) - 3u(2, 3) &= -u(1, 3) - u(3, 3), \\ u(2, 3) - 3u(2, 4) &= -u(1, 4) - u(3, 4), \\ 3u(2, 2) &= u(1, 2) + u(2, 1) + u(3, 2) \end{aligned}$$

с отличным от нуля детерминантом.

В рассматриваемом случае $u(2, 2) = u(2, 3) = u(2, 4) = 2$; точное решение — $u(x, y) = x$.

846. $u(2, 2) = 31/8$, $u(3, 2) = 61/8$.

847. Конечноразностной заменой уравнения является

$$u(x + h, y + h) - u(x + h, y) - u(x, y + h) + u(x, y) = 0.$$

В качестве значения $u(x, y)$ в каждом узле, являющемся вершиной квадрата, примыкающего к координатной оси, примем заданное значение $u(x, y)$ в ближайшей к этому узлу точке оси. Для определения $u(2, 2)$, $u(2, 3)$, $u(2, 4)$ имеем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} u(2, 2) - u(2, 3) &= u(1, 2) - u(1, 3), \\ u(2, 3) - u(2, 4) &= u(1, 3) - u(1, 4), \\ u(2, 2) &= u(2, 1) + u(1, 2) - u(1, 1), \end{aligned}$$

решениями которой в каждом из рассматриваемых случаев являются:

а) $u(2, 2) = u(2, 3) = u(2, 4) = 2$ или $u(2, 2) = u(2, 3) = u(2, 4) = 1$.

б) $u(2, 2) = 2$, $u(2, 3) = 3$, $u(2, 4) = 4$ или $u(2, 2) = 1$, $u(2, 3) = 2$, $u(2, 4) = 3$.

в) $u(2, 2) = 3$, $u(2, 3) = 4$, $u(2, 4) = 5$.

Два решения в случаях а) и б) обусловлены двумя значениями $u(1, 1)$ в узле $(1, 1)$, равноотстоящем от осей координат с различными данными на них.

848. Предположим дополнительно, что граница S области D и рассматриваемые ниже функции $u(x, y)$, $h(x, y)$ таковы, что справедливы тождества

$$u_x h_x + u_y h_y = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h\Delta u, \quad (x, y) \in D,$$

$$D(u, h) = \int_D (h_x u_x + h_y u_y)\, dx\, dy = \int_S h \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds - \int_D h\Delta u\, dx\, dy. \qquad (*)$$

В этом случае, если $u(x, y)$ — решение задачи Дирихле $\Delta u(x, y) = 0$, $(x, y) \in D$, $u(x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in S$, то класс допустимых функций можно представить в виде $u(x, y) + \varepsilon h(x, y)$, где ε — произвольная постоянная, а $h(x, y)$ — произвольная функция из класса допустимых функций, удовлетворяющая краевому условию $h(x, y) = 0$, $(x, y) \in S$. Тогда из тождества

$$D(u + \varepsilon h) = D(u) + 2\varepsilon D(u, h) + \varepsilon^2 D(h) \qquad (**)$$

заключаем, что $D(u) \leqslant D(u + \varepsilon h)$, т. е. $u(x, y)$ — минимизирующая функция. Пусть теперь обратно: $u(x, y)$ — минимизирующая функция. Из тождества $(**)$ следует, что $D(u, h) = 0$. В противном случае, подобрав постоянную ε так, чтобы выражение $\varepsilon D(u, h)$ было отрицательным, из тождества $(**)$ получим противоречие $D(u) > D(u + \varepsilon h)$. На основании равенств $D(u, h) = 0$, $h(x, y) = 0$, $(x, y) \in S$, из $(*)$ заключаем, что

$$\int_D h\Delta u\, dx\, dy = 0,$$

откуда в силу произвольности h следует, что $\Delta u = 0$, т. е. $u(x, y)$ — решение задачи Дирихле.

849. В классе непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ выполнение условия $y(0) = 0$ гарантирует существование функционала I_n. Так как $y(0) = 0$, $y(1) = a$, то можем написать

$$I_n(y) = \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}\, y\right)^2 x\, dx + 2n \int_0^1 y \frac{dy}{dx}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}\, y\right)^2 x\, dx + na^2.$$

Отсюда следует, что минимизирующая функция должна быть решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}\, y = 0,$$

т. е. $y = ax^n$, $\min I_n = na^2$.

850. Так как

$$D\left(\frac{2}{\pi}\sin x\sin y\right)=2,\quad H\left(\frac{2}{\pi}\sin x\sin y\right)=1,$$

то для любой допустимой функции $u(x, y)$ имеем

$$\frac{D(u)}{H(u)}\geqslant\frac{D\left(\frac{2}{\pi}\sin x\sin y\right)}{H\left(\frac{2}{\pi}\sin x\sin y\right)}=2,\quad \text{т. е.}\quad H(u)\leqslant\frac{1}{2}D(u).$$

851. В качестве координатных возьмем систему функций $\{\sin kx\}$, $k = 1, 2, \ldots$ По схеме Ритца имеем $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \sin kx$. Минимум выражения

$$D(y_n)=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k^2k^2,\quad n=1, 2, \ldots,$$

при условии, что $H(y_n)=\frac{\pi}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}c_k^2=1$, реализуется при $c_1^2=2/\pi$, $c_k=0$, $k=2, 3, \ldots$ Следовательно,

$$y_n=\sqrt{2/\pi}\sin x,\quad \lim_{n\to\infty}D(y_n)=D(y)=1.$$

852. Так как в силу задачи 851 $\min\frac{D(y)}{H(y)}=1$, то для любой непрерывно дифференцируемой на сегменте $0\leqslant x\leqslant\pi$ функции $y(x)$, удовлетворяющей условиям $y(0)=y(\pi)=0$, имеем оценку $H(y)\leqslant D(y)$.

853. $y_1(x)=\frac{5}{2}x(x-1)$. 854. $u_1(x, y)=\frac{5}{16}(x^2-1)(y^2-1)$.

855. Рассматриваемое уравнение является уравнением Эйлера для функционала

$$D(u)=\int\limits_D\left(u_x^2+u_y^2-2xyu\right)dx\,dy.$$

Определяя минимум выражения $D(u_1)=\frac{c^2}{45}-\frac{c}{72}$, находим $c=5/16$. Следовательно, $u_1(x, y)=\frac{5}{16}xy(x-1)(y-1)$.

856. Систему координатных функций возьмем в виде

$$v_{kl}=J_k(\rho_{kl}r)\cos k\vartheta,\quad v_{kl}^*=J_{kl}(\rho_{kl}r)\sin k\vartheta,\quad k, l=0, 1, \ldots,$$

где $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, а ρ_{kl} — положительные нули бесселевой функции $J_k(z)$, занумерованные по l в порядке их возрастания, v_{kl} и v_{kl}^* являются собственными функциями уравнения Гельмгольца $\Delta v+\rho_{kl}^2v=0$ в круге Q. Пусть

$$[\text{illegible}]=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left([\text{illegible}]\right),\quad m, n=0, 1, \ldots,$$

где α_{kl}, β_{kl} — произвольные действительные постоянные. В силу очевидных равенств

$$D(u, v) = \lambda^2 H(u, v) = \mu^2 H(u, v),$$

справедливых для любой пары собственных функций u и v, соответствующих собственным числам λ и μ,

$$d_{mn} = D(u_{mn}) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \rho_{kl}^2 \int_Q \left(\alpha_{kl}^2 v_{kl}^2 + \beta_{kl}^2 v_{kl}^{*2}\right) dx\, dy.$$

Очевидно, что при любых m, n минимум этого функционала реализуется тогда, когда кроме α_{00} все α_{kl}, β_{kl} равны нулю и

$$2\pi\alpha_{00}^2 \int_0^1 J_0^2(\rho_{00} r)\, r\, dr = 1,$$

причем

$$\min d_{mn} = d_{00} = 2\pi\alpha_{00}^2\rho_{00}^2 \int_0^1 r J_0^2(\rho_{00} r)\, dr = \rho_{00}^2$$

и минимизирующей функцией является

$$u_{00} = \frac{J_0(\rho_{00} r)}{\sqrt{\pi}\, J_1(\rho_{00})}.$$

857. Поскольку

$$\min \frac{D(u)}{H(u)} = \rho_{00}^2,$$

то для любой допустимой функции из задачи 856 имеем

$$\rho_{00}^2 H(u) \leqslant D(u),$$

т. е. $C = 1/\rho_{00}^2$, где ρ_{00} — наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_0(r)$.

Приложения

I. Квадратные матрицы и квадратичные формы

Совокупность скалярных величин a_{ik}, $i, k = 1, \ldots, n$, из некоторого ком- [illegible]

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

называется *квадратной матрицей порядка* n или $(n \times n)$*-матрицей*, а сами величины a_{ik} — *элементами матрицы* a.

Множество элементов a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, называется *главной диагональю* матрицы a. Говорят, что матрица a является *треугольной*, если ее элементы a_{ik} при $i > k$ все равны нулю. Треугольная матрица a называется *диагональной*, если все $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Диагональная матрица называется *единичной*, если $a_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Единичную матрицу принято обозначать буквами E или J.

Выражение

$$\det a = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

называется *детерминантом* матрицы a. Матрица a называется *невырожденной* или *неособенной*, если $\det a \neq 0$. Для невырожденной матрицы a, определенной по формуле (1), вводится *обратная* матрица a^{-1}, элементами которой являются величины

$$\frac{A_{ki}}{\det a}, \quad i, k = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где A_{ki} — *алгебраические дополнения элементов* a_{ik} в детерминанте (2) матрицы a.

Матрица a' с элементами $a'_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, \ldots, n$, называется *транспонированной* по отношению к матрице a. Матрица a над полем действительных чисел называется *симметричной*, если $a_{ik} = a_{ki}$, i, $k = 1, \ldots, n$. *Суммой* двух $(n \times n)$-матриц $a = \|a_{ik}\|$, $b = \|b_{ik}\|$ называется $(n \times n)$-матрица c, элементами которой служат величины

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

а *произведением* этих матриц называется матрица c с элементами

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},\quad i,k=1,\ldots,n. \tag{4}$$

В силу (4) очевидно, что для $(n\times n)$-матриц a, E справедливы равенства

$$aE=Ea=a.$$

Произведением скалярной величины λ из поля P на $(n\times n)$-матрицу a называется $(n\times n)$-матрица c с элементами

$$c_{ik}=\lambda a_{ik},\quad i,k=1,\ldots,n.$$

На основании равенств (4) в силу определения произведения детерминантов заключаем, что если матрицы a и b одинакового порядка, то

$$\det ab=\det a\cdot\det b. \tag{5}$$

В свою очередь из равенства (5) в силу (3) следует, что если матрица a невырожденная, то

$$\det aa^{-1}=1.$$

Матрица a называется *ортогональной*, если

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ji}a_{jk}=\delta_{ik},\quad i,k=1,\ldots,n,$$

где

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

Для n-мерного вектора p с компонентами $p_1,\ldots,p_n$ из поля P примем обозначение $p=(p_1,\ldots,p_n)$.

Под *произведением* скаляра λ из поля p на n-мерный вектор p понимается n-мерный вектор

$$r=\lambda p=(\lambda p_1,\ldots,\lambda p_n),$$

под *суммой* двух *n-мерных векторов* $p=(p_1,\ldots,p_n)$, $q=(q_1,\ldots,q_n)$ понимается n-мерный вектор

$$r=p+q=(p_1+q_1,\ldots,p_n+q_n),$$

а под *скалярным* (*внутренним*) *произведением* двух n-мерных векторов $p=(p_1,\ldots,p_n)$, $q=(q_1,\ldots,q_n)$ — скаляр

$$pq=\sum_{i=1}^{n}p_iq_i.$$

Произведение $(n\times n)$-матрицы a на n-мерный вектор $p=(p_1,\ldots,p_n)$, по определению, есть вектор $q=ap$ с компонентами

$$q_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}p_k,\qquad i=1,\ldots,n. \tag{6}$$

Говоря, что матрица a или вектор p действительны, непрерывны, дифференцируемы, принадлежат к классу гладкости $C^{(m,h)}$, имеют особенности данного порядка и т. д., мы будем подразумевать, что каждый элемент матрицы a или каждая компонента вектора p обладает указанными свойствами.

Точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ евклидова n-мерного пространства E_n с декартовыми ортогональными координатами $x_1, \ldots, x_n$ представляет собой n-мерный вектор, носящий название *радиус-вектора*.

По данному выше определению произведения $(n \times n)$-матрицы a на n-мерный вектор, выраженного формулами (6), *линейное преобразование* в пространстве E_n

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

можно записать в виде

$$y = ax. \tag{8}$$

Каждая из функций y_i, определенная по формуле (7), представляет собой линейную форму n переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Преобразование (7) называется *невырожденным*, если матрица a невырождена. Невырожденность линейного преобразования гарантирует его однозначную обратимость.

Когда матрица a линейного преобразования (8) симметрична или ортогональна, преобразование (7) или, что то же самое, (8) называется, соответственно, *симметричным* или *ортогональным*.

Форма второй степени переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$

$$A(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k \tag{9}$$

называется *билинейной*. Пользуясь понятиями произведения $(n \times n)$-матрицы a на n-мерный вектор x и внутренним произведением двух n-мерных векторов, билинейной форме (9) можно придать вид

$$A(x, y) = (ay)x.$$

Билинейная форма (9) называется *квадратичной*, если радиус-векторы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ совпадают. Для квадратичной формы $A(x, x)$ принято обозначение $Q(x)$:

$$Q(x) = A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = (ax)\, x. \tag{10}$$

Матрица $a = \|a_{ik}\|$ называется *матрицей квадратичной формы* $Q(x)$.

Существует такое невырожденное линейное преобразование

$$x = by \tag{11}$$

с $(n \times n)$-матрицей b, в результате которого *квадратичная форма* (10) *приводится к каноническому виду*

$$Q(x) = Q(by) = Q^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2, \tag{12}$$

где α_i принимают значения 1, -1, 0. При этом имеет место следующий весьма важный

З а к о н и н е р ц и и к в а д р а т и ч н ы х ф о р м. *Число отрицательных (положительных) коэффициентов (индекс инерции) и число нулевых коэффициентов (дефект формы) в правой части формулы (в канонической форме)* (12) *являются инвариантными относительно всех линейных невырожденных преобразований* (11).

II. Принцип Гамильтона

При выводе дифференциальных уравнений математической физики чаще всего пользуются вариационным принципом Гамильтона.

Пусть имеется материальная система, положение которой определяется конечным числом пространственных параметров $q_1, \ldots, q_n$. Закон движения системы нам будет известен, если известны значения этих параметров как функции времени t из промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Кинетическую и потенциальную энергии этой системы обозначим соответственно через

$$T = T(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$$

и

$$U = U(t, q_1, \ldots, q_n),$$

где $\dot{q}_i$ — производная первого порядка от q_i по t. Как известно, кинетическая энергия T представляет собой положительно определенную квадратичную форму переменных $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ с коэффициентами, зависящими от t, $q_1, \ldots, q_n$:

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} T_{ik}\,(t, q_1, \ldots, q_n)\,\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{1}$$

Допустимыми будем называть движения, описываемые системой функций

$$q_i^*(t) = q_i(t) + \delta q_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\delta q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$,— произвольные достаточно малые величины, удовлетворяющие условиям

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

П р и н ц и п Г а м и л ь т о н а. *Движение системы происходит так, что описывающие его функции* $q_1, \ldots, q_n$ *дают стационарное значение интегралу*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt, \tag{4}$$

по сравнению со всеми допустимыми движениями (2). *Следовательно, для действительного движения* $q_i = q_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, *необходимо и достаточно, чтобы вариация интеграла* (4) *равнялась нулю:*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt = 0. \tag{5}$$

Пользуясь формулой конечного приращения, в силу (2) из (5) получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = 0. \tag{6}$$

На основании (3) в результате интегрирования по частям равенство (6) запишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt = 0. \tag{7}$$

[illegible]

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В силу произвольности величин δq_i из (7) получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Равенства (8) представляют собой систему дифференциальных уравнений движения имеющейся материальной системы.

Когда функции T и U явно не зависят от времени t и система находится в положении равновесия, в силу (1) из (8) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Как известно, выполнение равенств (9) является условием, необходимым для экстремума функции U. Состояние равновесия, определенное значениями $q_1, \ldots, q_n$, удовлетворяющими системе конечных уравнений (9), будет *устойчивым*, если функция U для этих значений ее аргументов имеет минимум.

Будем опять предполагать, что T и U явно не зависят от времени. Умножая каждое из равенств (8) на величину $\dot{q}_i dt = dq_i$ и складывая, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) dq_i + d \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = 0. \tag{10}$$

Учитывая то обстоятельство, что выражение (1) для T является однородной функцией второй степени относительно переменных $\dot{q}_i$, в силу известной теоремы Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

равенство (10) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) dq_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + 2dT = d(U - T) + 2dT = d(U + T) = 0,$$

т. е.
$$U+T=\text{const}. \tag{11}$$

Поскольку выражение $U+T$ представляет собой полную энергию рассматриваемой механической системы, равенство (11) есть не что иное, как закон сохранения энергии.

При принятых предположениях, определяя U из равенства (11) и подставляя ее значение в (5), получаем
$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt=0. \tag{12}$$

Принцип Гамильтона, записанный в виде равенства (12), называется *принципом наименьшего действия Лагранжа.*

III. Записи оператора Лапласа

а) в декартовых ортогональных координатах x, y, z:
$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

б) в цилиндрических координатах r, φ, z:
$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$
$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z;$$

в) в сферических координатах r, φ, ϑ:
$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$
$$x=r\cos\varphi\sin\vartheta,\quad y=r\sin\varphi\sin\vartheta,\quad z=r\cos\vartheta.$$

IV. Некоторые специальные функции

1. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(z)$ и некоторые ее свойства:

а) представляется в виде интеграла
$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\quad \operatorname{Re} z>0;$$

б) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$;

в) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z>0$, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$;

г) аналитически продолжается через ось $\operatorname{Re} z=0$ на всю плоскость переменного z с полюсами первого порядка в точках $z=0, -1, \ldots, -n, \ldots$, в которых
$$\operatorname{res}\Gamma(-n)=\frac{(-1)^n}{n!},\quad n\geqslant 0;$$

д) не имеет нулей.

2. Цилиндрические функции. Уравнение цилиндрических функций $y = y(\xi)$ имеет вид

$$y'' + \frac{1}{\xi} y' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) y = 0, \quad k = \mathrm{const}, \quad \nu = \mathrm{const}.$$

С помощью замены переменного $x = k\xi$ оно переходит в уравнение Бесселя

$$z'' + \frac{1}{x} z' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) z = 0, \quad z = z(x) = y\left(\frac{x}{k}\right).$$

Общие решения этих уравнений имеют, соответственно, вид

$$y_\nu(\xi) = C_1 J_\nu(k\xi) + C_2 N_\nu(k\xi),$$

$$z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

— функция Бесселя порядка ν, а

$$N_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} & \text{при нецелом } \nu, \\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^\nu \dfrac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right] & \text{при целом } \nu \end{cases}$$

— функция Неймана порядка ν.

Некоторые свойства функций Бесселя:

а) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, n — целое число,

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{\sin x}{x},$$

$$J_{n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n \frac{\cos x}{x},$$

$n \geqslant 0$ — целое число,

$$J_\nu(x) Y_{\nu+1}(x) - J_{\nu+1}(x) Y_\nu(x) = -2/\pi x;$$

б) $$\int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, dx = \frac{\alpha J_\nu(\beta) J'_\nu(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha) J'_\nu(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2},$$

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\alpha x)\, dx = \frac{\alpha \left[J'_\nu(\alpha)\right]^2 - \alpha J_\nu(\alpha) J''_\nu(\alpha) - J_\nu(\alpha) J'_\nu(\alpha)}{2\alpha},$$

$\nu > -1$, α и β — любые вещественные числа;

в) ортогональность: если α и β — вещественные корни уравнения

$$\mu J_\nu(x) + \eta x J'_\nu(x) = 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \eta \geqslant 0, \quad \mu + \eta > 0,$$

то при $\nu > -1$

$$\int_0^l x J_\nu\left(\frac{\alpha}{l}x\right) J_\nu\left(\frac{\beta}{l}x\right) dx = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta;$$

г) $$\int_0^l x J_\nu^2\left(\frac{\alpha}{l}x\right) dx = \frac{l^2}{2}\left\{\left[J'_\nu(\alpha)\right]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right) J_\nu^2(\alpha)\right\};$$

д) рекуррентные соотношения:

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_\nu(x).$$

Формулы пункта д) справедливы и для функций Неймана $Y_\nu(x)$.

е) Квадрат нормы на отрезке $[a, b]$ всякой цилиндрической функции $G_\nu(k\xi)$, удовлетворяющей уравнению (13), вычисляется по формуле

$$\int_a^b \xi G_\nu^2(k\xi)\, d\xi = \frac{z^2}{2k^2}\left\{\left[\frac{dG_\nu(z)}{dz}\right]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) G_\nu^2(z)\right\}\Bigg|_{z=ak}^{z=bk}.$$

3. Цилиндрические функции мнимого аргумента. В результате замены $x = it$ уравнение Бесселя переходит в уравнение

$$v'' + \frac{1}{t}v' - \left(1 + \frac{\nu^2}{t^2}\right) v = 0, \quad v = v(t) = z(it),$$

общее решение которого имеет вид

$$v(t) = C_1 I_\nu(t) + C_2 K_\nu(t),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

$$I_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$$

— функция Бесселя мнимого аргумента порядка ν,

$$K_\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left[I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)\right] & \text{при нецелом } \nu, \\ \dfrac{(-1)^\nu}{2}\left[\dfrac{\partial I_{-\nu}(t)}{\partial\nu} - \dfrac{\partial I_\nu(t)}{\partial\nu}\right] & \text{при целом } \nu \end{cases}$$

— функция Макдональда порядка ν.

4. **Асимптотические формулы:**

$$J_\nu(x) = \sqrt{2/\pi x}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \to +\infty,$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{2/\pi x}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \to +\infty,$$

$$I_\nu(x) = \sqrt{1/2\pi x}\, e^{x}\left[1 + O(x^{-1})\right], \quad x \to +\infty,$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\pi/2x}\, e^{-x}\left[1 + O(x^{-1})\right], \quad x \to +\infty.$$

5. **Многочлены Лежандра** $P_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$

а) являются решениями уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0;$$

б) представляются в виде

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right];$$

в) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right];$$

г) ортогональны в промежутке $(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-1}^{1} q_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \quad q_m(x) \text{ — многочлен степени } m < n;$$

д) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$;

е) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$,

$$P_{2n}(0) = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)\,2n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

$n = 1, 2, \ldots$;

ж) имеют интегральное представление:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x + (x^2 - 1)^{1/2}\cos\varphi\right]^n d\varphi.$$

Пусть r и r_0 — расстояния точек $M = M(x, y, z)$ и $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$ от начала прямоугольной декартовой системы координат, а θ — угол между радиусами-векторами этих точек. Тогда справедливо разложение

$$\frac{1}{R}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r<r_0,\\ \dfrac{1}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r>r_0,\end{cases}$$

где $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние между точками M и M_0.

6. Присоединенные функции Лежандра $P_n^m(x)$

а) удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0;$$

б) представляются в виде

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x);$$

в) ортогональны на промежутке $(-1, 1)$:

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)\,P_k^m(x)\,dx=0, \qquad k\neq n;$$

г) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[P_n^m(x)\right]^2dx=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$

7. Многочлены Эрмита $H_n(x)$, $n=0, 1, \ldots$

а) являются решениями уравнения

$$y''-2xy'+2ny=0;$$

б) представляются в виде

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k};$$

в) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0,$$

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x), \qquad n=1, 2, \ldots;$$

г) ортогональны на промежутке $(-\infty, \infty)$ с весом e^{-x^2}:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)\,H_m(x)\,dx=0, \quad n\neq m;$$

д) $\displaystyle\|H_n(x)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx=2^n n!\sqrt{\pi};$

е) $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x), \quad H_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$;

ж) имеют интегральные представления:

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt\, dt,$$

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt\, dt.$$

8. Многочлены Лагерра $L_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$

а) являются решениями уравнения

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0;$$

б) представляются в виде

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,(-1)^k x^k}{(k!)^2 (n-k)!};$$

в) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(n+2) L_{n+2}(x) - (2n + 3 - x) L_{n+1}(x) + (n+1) L_n(x) = 0,$$

$$L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0,$$

$$xL'_n(x) + (n + 1 - x) L_n(x) - (n+1) L_{n+1}(x) = 0;$$

г) ортогональны на промежутке $(0, \infty)$ с весом e^{-x}:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n;$$

д) $\|L_n(x)\|^2 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} L_n^2(x)\, dx = 1$;

е) имеют интегральное представление:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \int_0^\infty t^n J_0(2\sqrt{xt})\, e^{-t} dt.$$

V. Преобразования Лапласа

Интегральное преобразование

$$F(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} f(t)\, dt, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

называется *преобразованием Лапласа* и записывается в виде $f(t) \div F(\zeta)$, где f — оригинал, а F — его образ.

Пусть $f(t)$ и $g(t)$, $|f(t)| \leqslant Ae^{at}$, $|g(t)| \leqslant Be^{bt}$,— оригиналы, а $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ — их образы соответственно. Тогда

а) $\lim F(\zeta) = 0$ при $\zeta \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} \zeta \to +\infty$;

б) $\alpha f(t) + \beta g(t) \div \alpha F(\zeta) + \beta G(\zeta)$, α, β — любые комплексные постоянные;

в) $f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0;$

г) $f^{(n)}(t) \div \zeta^n F(\zeta) - \zeta^{n-1} f(0) - \zeta^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0);$

д) $F^{(n)}(\zeta) \div (-1)^n t^n f(t);$

е) $\int_0^t f(t)\,dt \div \frac{F(\zeta)}{\zeta};$

ж) $\frac{f(t)}{t} \div \int_\zeta^\infty F(\zeta)\,d\zeta;$

з) $f(t-\tau) \div e^{-\zeta\tau} F(\zeta);$

и) $e^{\zeta_0 t} f(t) \div F(\zeta - \zeta_0);$

к) $F(\zeta)\cdot G(\zeta) \div \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau;$

л) $f(t)\cdot g(t) \div \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\mu)\,G(\zeta-\mu)\,d\mu, \quad c > a, \quad \operatorname{Re}\zeta > b + c;$

м) если $F(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\zeta^k}, \quad |\zeta| \geqslant R > 0,$ то

$$F(\zeta) \div f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!}\, t^{k-1};$$

н) если $F(\zeta) = \frac{q_m(\zeta)}{q_n(\zeta)}, \quad m < n,$ где $q_i(\zeta)$ — многочлен степени i, то

$$F(\zeta) \div f(t) = \sum_{(\zeta_k)} \operatorname{Res}\left[F(\zeta)\, e^{\zeta t}\right], \quad \zeta_k \text{ — полюсы } F(\zeta).$$

VI. Таблица некоторых оригиналов и их изображений

№№ пп	Оригинал	Изображение
1	1	$1/\zeta$
2	e^{at}	$\frac{1}{\zeta - a}$
3	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\zeta^2 + \omega^2}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{\zeta}{\zeta^2 + \omega^2}$

Продолжение

№ пп	Оригинал	Изображение
5	$\operatorname{sh} \omega t$	$\dfrac{\omega}{\zeta^2 - \omega^2}$
6	$\operatorname{ch} \omega t$	$\dfrac{\zeta}{\zeta^2 - \omega^2}$
7	$t^\alpha,\ \alpha > -1$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\zeta^{\alpha+1}}$
8	$e^{-\beta t} t^\alpha$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(\zeta+\beta)^{\alpha+1}}$
9	$\delta(t)$	1
10	$\dfrac{e^{bt} - e^{at}}{t}$	$\ln \dfrac{\zeta - a}{\zeta - b}$
11	$\dfrac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\zeta+\alpha}}$
12	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2/4t}$	$\dfrac{e^{-\alpha\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}}$
13	$\dfrac{\xi}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\xi^2/4t}$	$e^{-\zeta\sqrt{\zeta}}$
14	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \sin 2\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{1}{\zeta\sqrt{\zeta}} e^{-\alpha/\zeta}$
15	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \cos 2\sqrt{\alpha t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\zeta}} e^{-\alpha/\zeta}$
16	$J_n(t),\ n > -1$	$\dfrac{\left(\sqrt{\zeta^2+1} - \zeta\right)^n}{\sqrt{\zeta^2+1}}$
17	$t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}),\ n > -1$	$\zeta^{-(n+1)} e^{-1/2\zeta}$
18	$e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \alpha)$	$\dfrac{\omega\cos\alpha + (\zeta+\lambda)\sin\alpha}{(\zeta+\lambda)^2 + \omega^2}$
19	$e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha)$	$\dfrac{(\zeta+\lambda)\cos\alpha - \omega\sin\alpha}{(\zeta+\lambda)^2 + \omega^2}$
20	$\delta(t - \tau)$	$e^{-\zeta\tau}$