

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ
В. П. ЧИСТЯКОВ
А. М. ЗУБКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УДК 519.51



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1980

519.2
С.Л.8

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ
В. П. ЧИСТЯКОВ
А. М. ЗУБКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



22.171

С 28

УДК 519.2

Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.,
Зубков А. М. Сборник задач по теории
вероятностей.— М.: Наука, Главная редакция
физико-математической литературы, 1980.

Входящие в сборник задачи обеспечивают
упражнения по всем разделам теории вероят-
ностей, включаемым в начальный курс. Текст
задач, указания и ответы помещаются раздельно.
Перед каждой темой дается перечень основных
теоретических положений. Приводятся необхо-
димые для решения задач таблицы.

С $\frac{20203-109}{053(02)-80}$ 19-80. 1702060000

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1980

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
часть I. задачи	7
Глава 1. Простейшие вероятностные схемы	7
§ 1. Классическое определение вероятности	10
§ 2. Геометрические вероятности	17
Глава 2. Последовательности испытаний	21
§ 1. Условные вероятности	27
§ 2. Независимость событий	29
§ 3. Формула полной вероятности	31
§ 4. Схема Бернулли	34
§ 5. Полиномиальная схема	38
Глава 3. Случайные величины	40
§ 1. Распределения вероятностей случайных величин	50
§ 2. Математические ожидания	58
§ 3. Условные распределения	71
§ 4. Нормальное распределение	75
Глава 4. Предельные теоремы. Производящие и характеристические функции	78
§ 1. Закон больших чисел. Лемма Бореля—Кантелли	85
§ 2. Прямые методы доказательства предельных теорем	89
§ 3. Характеристические и производящие функции	98
§ 4. Неравенства Бонферрони и сходимость к распределению Пуассона	107
§ 5. Применения центральной предельной теоремы и метода характеристических функций	110
Глава 5. Цепи Маркова	116
Глава 6. Элементы математической статистики	125
часть II. указания	135

часть III. решения	180
часть IV. ответы	198
Таблицы:	215
Нормальное распределение	215
Распределение Пуассона	217
Распределение Стьюдента	218
χ^2 -распределение	219
Равномерно распределенные случайные числа	220
Нормально распределенные случайные числа	221
Литература	223

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот сборник задач предназначен для студентов университетов и технических вузов в качестве учебного пособия по начальному курсу теории вероятностей. Для решения большей части задач не требуется знаний, выходящих за пределы обычного курса по математике для технических вузов. Лишь задачи 1.19—1.22, 2.18—2.20, 3.114—3.132, 3.147—3.160, 4.9—4.22, 4.41—4.55, 4.89—4.94, 4.101—4.115, 4.135—4.140 рассчитаны главным образом на студентов университетов.

Свободное владение понятиями и методами теории вероятностей необходимо не только математикам, но и прикладникам, потому что при решении практических задач огромную роль играет правильность выбора вероятностной модели: она должна, во-первых, отражать существенные черты исследуемого явления, а во-вторых, быть доступной для исследования. Подобрать модель и оценить это ее последнее качество, не имея представления о теории вероятностей и ее методах, невозможно.

В нашем сборнике сравнительно мало задач, сформулированных в «прикладных» терминах. Это объясняется несколькими причинами: общностью курса теории вероятностей и разнообразием узких специализаций технических вузов, ограниченностью объема книги и желанием авторов дать учащимся больше сведений о методах теории вероятностей. Как уже отмечалось, решение «прикладных» задач состоит из двух этапов: формулировки «прикладной» задачи как математической и решения этой математической задачи. Авторы считают, что прежде всего нужно ознакомить студентов со стандартными моделями теории вероятностей и научить их преодолевать трудности второго этапа; именно с таким расчетом и проводился отбор задач. Обучение способам построения математических моделей реальных явлений не следует подменять решением задач, отличающихся от простых математических задач только «прикладной» терминологией; здесь, видимо, нужно использовать те модели реальных явлений, которые на самом деле используются в областях науки и техники, близких к специализации того или иного технического вуза. Ряд задач последнего типа можно найти в сборнике задач [3] под общей редакцией А. А. Свешникова.

В нашем сборнике задачи, решение которых сводится к постановке чисел в формулы, составляют меньшую часть. Авторы стремились подобрать задачи так, чтобы помочь учащемуся не только освоиться с основными понятиями и методами теории вероятностей, но и почувствовать взаимосвязь между понятиями, а также оценить возможности методов.

В связи с этим ряд задач имеет «теоретический» характер: в них требуется доказать справедливость того или иного утверждения или провести небольшое исследование. Как правило, такие задачи образуют довольно четко выделенные циклы, и при последовательном решении эти задачи не должны представлять больших трудностей. Трудность задач значительно понижается, если пользоваться указаниями (часть II). Для задач, номера которых отмечены звездочкой, приведены решения.

Теоретические задачи часто содержат материал, которому уделяется мало внимания в стандартных курсах теории вероятностей, но который является важным в принципиальном отношении. Особенно это относится к таким «техническим» приемам решения задач, как представление искомой случайной величины в виде суммы индикаторов, использование линейности математического ожидания, введение производящих и характеристических функций, метод моментов, рассмотрение случайных величин, мало отличающихся от заданных, но проще исследуемых, и т. п.

При составлении задачника был использован ряд отечественных и зарубежных источников (учебников, задачников, журнальных статей и т. п.), а также задачи, известные в научных и педагогических коллективах, хорошо знакомых авторам (МИАН, мех.-мат. МГУ, МФТИ, МИФИ и др.).

Авторы

Глава 1

ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Математические модели случайных явлений, рассматриваемые в теории вероятностей, основываются на понятии *вероятностного пространства*, т. е. тройки $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где $\Omega = \{\omega\}$ — непустое множество, элементы ω которого интерпретируются как взаимно исключающие исходы изучаемого случайного явления; $\mathcal{A}$ — набор подмножеств множества Ω , называемых *событиями* (предполагается, что множество $\mathcal{A}$ содержит Ω и замкнуто относительно взятия противоположного события и суммы событий в не более чем счетном числе, т. е. $\mathcal{A}$ является σ -алгеброй); вероятность P — функция, определенная на событиях $A \in \mathcal{A}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $P(A) \geq 0$ при любом $A \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega) = 1$. (1.1)
3. $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, если $A_i A_j = \emptyset$ при лю-

бых $i \neq j$. Здесь символ $\emptyset$ обозначает пустое множество (или невозможное событие).

Определение операций над событиями, определение алгебры и σ -алгебры событий можно найти в учебниках по теории вероятностей (см., например, [4], [2], [12]). В этой главе рассматриваются два простейших класса вероятностных пространств.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$. В σ -алгебру событий $\mathcal{A}$ включаются все 2^s подмножеств $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ множества Ω . В классическом определении вероятности полагают все $P(\omega_i) = 1/s$, поэтому вероятность $P(A)$ события $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ равна отношению числа эле-

ментарных событий*) ω_i , входящих в A , к общему числу элементарных событий в Ω :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{s}. \quad (1.2)$$

Классическое определение вероятности является хорошей математической моделью тех случайных явлений, для которых исходы опыта в каком-либо смысле симметричны, и поэтому представляется естественным предположение об их равновероятности.

Дадим описание двух часто встречающихся вероятностных схем, в которых детализируется общее классическое определение. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество из N чисел: $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, N\}$; пусть $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ — упорядоченный набор из n элементов множества $\mathcal{M}$. Вероятностную схему, в которой

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k \in \mathcal{M}, k = 1, 2, \dots, n\} \quad (1.3)$$

и все элементарные события ω равновероятны, называют схемой *случайного выбора с возвращением*.

Схемой *случайного выбора без возвращения* называют вероятностную схему, в которой

$$\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k \in \mathcal{M}, k = 1, 2, \dots, n, \text{ среди } i_1, \dots, i_n \text{ нет одинаковых}\} \quad (1.4)$$

и элементарные события ω равновероятны.

При вычислении вероятности по формуле (1.2) часто оказываются полезными различные комбинаторные формулы. Приведем основные из них. Пусть дано множество $\mathcal{M}$ из N элементов: $\mathcal{M} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. Подмножества множества $\mathcal{M}$ называют *сочетаниями*. Число сочетаний, которые можно образовать из N элементов $\mathcal{M}$, выбирая различными способами подмножества по n элементов, обозначают C_N^n или $\binom{N}{n}$. Справедливы формулы:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!}, \quad C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}, \quad C_N^n = C_N^{N-n},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ и

$$N! = N(N-1) \dots (N-n+1). \quad (1.5)$$

*) Здесь и ниже число элементов любого конечного множества M будем обозначать $|M|$.

Упорядоченные цепочки $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$, образованные из различных элементов $\mathcal{N}$, называют *размещениями*. Число размещений, образованных выбором различных упорядоченных цепочек длины n из N элементов $\mathcal{N}$, обозначают A_n^N . Для A_n^N имеем формулу $A_n^N = N^{(n)}$. Частный случай размещений при $n = N$ называют *перестановками*. Число различных перестановок, образованных из N элементов, равно $N!$

Часто оказывается полезной следующая классическая формула, известная как уточненная формула Стирлинга (см. [11], стр. 67, (9.8)):

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \frac{12n}{12n+1} < \theta_n < 1. \quad (1.6)$$

В формулировках некоторых задач используется выражение: «целое число a сравнимо с целым числом b по модулю m » (m — целое), или в символической записи

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (1.7)$$

Сравнение (1.7) эквивалентно утверждению: *существует такое целое число t , что $a - b = tm$* (т. е. a и b при делении на m дают одинаковые остатки). В частности, запись $a \equiv 0 \pmod{m}$ означает, что a делится без остатка на m .

Целую часть действительного числа x (наименьшее целое число, не превосходящее x) будем обозначать $[x]$ (не путать с $a^{[x]}$, где x — целое число, см. (1.5)).

Рассмотрим второй класс общих вероятностных пространств. Пусть Ω — ограниченное множество n -мерного евклидова пространства. Будем предполагать, что Ω имеет объем. Рассмотрим систему $\mathcal{A}$ подмножеств Ω , имеющих объем. Для любого $A \in \mathcal{A}$ положим

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \quad (1.8)$$

где $\mu(C)$ — объем множества C . Если под объемом множества понимать его меру Лебега, то система $\mathcal{A}$ — это σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств, и тогда функция $P(A)$, определенная формулой (1.8), является вероятностью. Отметим, что система $\mathcal{A}$, в частности, содержит все подмножества Ω , измеримые по Жордану, т. е. обычные квадратуемые или кубируемые фигуры, которые изучаются в любом курсе математического анализа. В большинстве задач рассматривается именно

этот частный случай. Определение вероятности (1.8) называют *геометрическим определением вероятности*.

Приведем формулы, которые часто используются при решении задач. Для любых событий $A_1, A_2, \dots$ имеем

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}, \quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}. \quad (1.9)$$

При любых A и B верна формула

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad (1.10)$$

в частности, при $AB = \emptyset$ имеем

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (1.11)$$

Вероятность суммы произвольных n событий находится по формуле

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2}) + \\ &+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} P(A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3}) - \\ &- \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} P(A_{k_1} \dots A_{k_i}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Во всех задачах § 1 данной главы предполагается, что элементарные события равновероятны; слова «случайно», «случайно выбирается» нужно понимать как предположение о равновероятности элементарных событий. В § 2 выражение «точка равномерно распределена на множестве Ω » означает, что вероятности нужно вычислять по формуле (1.8).

§ 1. Классическое определение вероятности

1.1. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2, 3, вынимают по одному все билеты. Предполагается, что все последовательности номеров билетов имеют одинаковые вероятности. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.

1.2. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности событий:

$A = \{\text{четыре туза расположены рядом}\},$

$B = \{\text{места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом 7}\}.$

1.3. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А. С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

1.4. Брошено три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{\text{первая монета выпала «гербом» вверх}\},$

$B = \{\text{выпало ровно два «герба»}\},$

$C = \{\text{выпало не больше двух «гербов»}\}.$

1.5. Из множества всех последовательностей длины n , состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна. Найти вероятности событий:

$A = \{\text{последовательность начинается с 0}\},$

$B = \{\text{последовательность содержит ровно } m + 2 \text{ нуля, причем 2 из них находятся на концах последовательности}\},$

$C = \{\text{последовательность содержит ровно } m \text{ единиц}\},$

$D = \{\text{в последовательности ровно } m_0 \text{ нулей, } m_1 \text{ единиц, } m_2 \text{ двоек}\}.$

1.6. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность P_2 того, что из них можно составить «цепочку» согласно правилам игры.

1.7. В записанном телефонном номере 135—3.—.. три последние цифры стерлись. В предположении, что все комбинации трех стершихся цифр равновероятны, найти вероятности событий:

$A = \{\text{стерлись различные цифры, отличные от 1, 3, 5}\},$

$B = \{\text{стерлись одинаковые цифры}\},$

$C = \{\text{две из стершихся цифр совпадают}\}.$

1.8. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе:
а) имеет все цифры разные? б) имеет только две оди-

наковые цифры? в) имеет две пары одинаковых цифр? г) имеет только три одинаковые цифры? д) имеет все цифры одинаковые?

1.9. Найти вероятность p_N того, что случайно взятое натуральное число из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ делится на фиксированное натуральное число k . Найти $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$.

1.10. Из чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ случайно выбирается число a . Найти вероятность p_N того, что: а) число a не делится ни на a_1 , ни на a_2 , где a_1 и a_2 — фиксированные натуральные взаимно простые числа; б) число a не делится ни на какое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, где числа a_i — натуральные и попарно взаимно простые. Найти $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$ в случаях а) и б).

1.11. Из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ случайно выбирается число a . Найти $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$, где p_N — вероятность того, что $a^2 - 1$ делится на 10.

1.12. Из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ случайно выбирается число a . Найти вероятность p_N того, что a при делении на целое число $r \geq 1$ дает остаток q . Найти $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$.

1.13. Целое число ξ случайно выбирается из множества $\{0, 1, 2, \dots, 10^n - 1\}$. Найти вероятность того, что в десятичной записи это число k -значно, т. е. представимо в виде $\xi = \xi_k \cdot 10^{k-1} + \xi_{k-1} \cdot 10^{k-2} + \dots + \xi_2 \cdot 10 + \xi_1$, где $0 \leq \xi_i \leq 9$ при всех $i = 1, \dots, k$ и $\xi_k > 0$ ($k \geq 1$).

1.14. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ выбираются числа ξ и η . Найти вероятность q_N того, что ξ и η взаимно просты. Найти $\lim_{N \rightarrow \infty} q_N$, используя из-

вестное равенство $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.15. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ выбираются числа ξ и η . Обозначим p_N вероятность события $\xi^2 + \eta^2 \leq N^2$. Найти $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$.

1.16. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \dots, 10^n - 1\}$ выбираются числа ξ и η . Обозначим p_n вероятность того,

что сумма $\xi + \eta$ будет m -значным натуральным числом в десятичной записи. Найти вероятности p_{n-k+1} , $k=0, 1, \dots, n$, и $q_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-k+1}$, $k=0, 1, 2, \dots$

1.17. По схеме случайного выбора с возвращением из множества целых чисел $\{0, 1, 2, \dots, 10^n - 1\}$ выбираются числа ξ и η . Обозначим $p_{\#}$ вероятность того, что произведение $\xi\eta$ будет m -значным натуральным числом в десятичной записи. Найти $q_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n-k}$, $k=0, 1, 2, \dots$

1.18. Показать, что в задачах 1.14—1.17 предельные вероятности останутся теми же самыми, если числа ξ и η выбираются из того же самого множества по схеме случайного выбора без возвращения.

1.19*. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, $N \geq 3$, выбираются числа X и Y . Что больше:

$$P_1 = P\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 2\}$$

или

$$P_2 = P\{X^2 - Y^2 \text{ делится на } 3\}?$$

1.20. По схеме случайного выбора с возвращением из множества натуральных чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, $N \geq 6$, выбираются числа X и Y . Показать, что

$$P\{X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod{2}\} < P\{X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod{3}\} < P\{X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod{5}\}.$$

1.21. По схеме случайного выбора с возвращением из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ выбираются числа X и Y . Используя малую теорему Ферма (если p — простое число и целое число a не делится на p , то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$), найти вероятность $Q_N(p)$ того, что число $X^{p-1} - Y^{p-1}$ делится на простое число p . Найти $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(p) = Q(p)$, $\lim_{p, N \rightarrow \infty} Q_N(p) = Q$.

1.22*. По схеме случайного выбора с возвращением из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ выбираются числа X и Y . Показать, что при $N \geq 4$

$$P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{3}\} < P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{7}\}.$$

1.23. Из совокупности всех подмножеств множества $S = \{1, 2, \dots, N\}$ по схеме выбора с возвращением

выбираются множества A_1, A_2 . Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

1.24. Из совокупности всех подмножеств множества $S = \{1, 2, \dots, N\}$ по схеме выбора с возвращением выбираются подмножества $A_1, A_2, \dots, A_r$. Найти вероятность того, что множества $A_1, A_2, \dots, A_r$ попарно не пересекаются.

1.25*. В урне содержится $(2n+1)^2$ карточек, на каждой из которых написана упорядоченная пара целых чисел (x, y) (x и y принимают значения от $-n$ до n , каждая пара чисел написана ровно на одной карточке). Из урны по схеме выбора без возвращения извлекаются три карточки: $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$. Рассмотрим эти пары как координаты случайных точек E_1, E_2, E_3 плоскости в декартовой системе координат. Найти вероятность p_n того, что E_1 симметрична E_3 относительно E_2 .

1.26. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятности событий:

- а) не выпало ни одной «6»;
- б) выпало ровно три «6»;
- в) выпала хотя бы одна «6».

1.27. Некоторые москвичи шестизначный номер трамвайного, троллейбусного или автобусного билета считают «счастливым», если сумма первых его трех цифр совпадает с суммой последних трех цифр. Найти вероятность получить «счастливый» билет.

1.28 (см. 1.27). Вычислить вероятность появления хотя бы одного счастливого билета в случае, когда покупается подряд n билетов, $1 < n < 9$.

1.29. Из 30 чисел $(1, 2, \dots, 29, 30)$ случайно отбирается 10 различных чисел. Найти вероятности событий:
 $A = \{\text{все числа нечетные}\},$
 $B = \{\text{ровно 5 чисел делится на 3}\},$
 $C = \{\text{5 чисел четных и 5 нечетных, причем ровно одно число делится на 10}\}.$

1.30. Из урны, содержащей M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером 2, $\dots$, M_N шаров с номером N , случайно без возвращения выбирается n шаров. Найти вероятности событий:

- 1) появилось m_1 шаров с номером 1, m_2 шаров с номером 2, $\dots$, m_N шаров с номером N ;
- 2) каждый из N номеров появился хотя бы один раз.

1.31. Из множества чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ по схеме выбор без возвращения выбираются числа ξ_1 и ξ_2 . Найти $P\{\xi_2 > \xi_1\}$. При выборе трех чисел найти вероятность того, что второе число лежит между первым и третьим.

1.32. Из множества чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ по схеме выбора без возвращения отобрано n различных чисел. Расположим их в порядке возрастания: $z_{(1)} < z_{(2)} < \dots < z_{(n)}$. Найти вероятность того, что $z_{(m)} \leq M < z_{(m+1)}$; вычислить ее предел при $N, M \rightarrow \infty, M/N \rightarrow \alpha \in [0, 1]$.

1.33. Из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ случайно без возвращения выбирается $k+1$ чисел: $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$. Первые k чисел, расположенные в порядке возрастания, обозначим $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(k)}$. Найти

$$P\{x_{(k)} < x_{k+1} < x_{(k+1)}\}.$$

1.34. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись 3 папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных 6 папках не содержится целиком ни одной рукописи.

1.35. За круглый стол рассаживаются в случайном порядке $2n$ гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разбить на n непересекающихся пар так, чтобы каждая пара состояла из сидящих рядом мужчины и женщины?

1.36. Участник лотереи «Спортлото-6» на первой карточке отметил номера (4, 12, 20, 31, 32, 33), а на второй — (4, 12, 20, 41, 42, 43). Найти вероятность того, что участник получит ровно два минимальных выигрыша.

1.37. *Равновероятной схемой размещения частиц по ячейкам* называют схему размещения, в которой номера ячеек, последовательно занимаемых частицами, получают посредством случайного выбора с возвращением.

Обозначим $\mu_r = \mu_r(n, N)$ число ячеек, содержащих ровно по r частиц после размещения n частиц по N ячейкам. Найти вероятности следующих событий:

- 1) $\mu_0(n, N) > 0$ (при $n = N$);
- 2) $\mu_0(n, N) = 0$ (при $n = N + 1$);
- 3) $\mu_0(n, N) = 1$ (при $n = N + 1$);

4) найдется ячейка, содержащая хотя бы две частицы (при любых соотношениях между n и N).

1.38. (См. 1.37). Найти $P\{\mu_0(n, N) = 0\}$ при произвольных n, N .

1.39. По N различным ячейкам размещается случайно n неразличимых частиц. (Элементарными событиями являются наборы чисел $(r_1, r_2, \dots, r_N)$, где r_k — число частиц в k -й ячейке, $k=1, 2, \dots, N$.) Найти вероятности событий:

1) $\mu_0(n, N) > 0$; 2) $\mu_0(n, N) = 1$.

1.40. В первом ряду кинотеатра, состоящем из N кресел, сидит n человек. Предполагая, что все возможные размещения этих n человек в первом ряду равновероятны, найти вероятности следующих событий:

а) $A_{n, N} = \{\text{никакие 2 человека не сидят рядом}\}$;

б) $B_{n, N} = \{\text{каждый из } n \text{ человек имеет ровно одного соседа}\}$;

в) $C_{n, N} = \{\text{из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно}\}$.

1.41. В зале кинотеатра в первых двух рядах, каждый из которых состоит из N кресел, сидит n человек. Найти вероятности следующих событий:

а) в первом ряду никакие 2 человека не сидят рядом;

б) во втором ряду каждый человек имеет ровно одного соседа;

в) в первом ряду из любых двух кресел, расположенных симметрично относительно середины ряда, хотя бы одно свободно.

1.42. Из всех отображений множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в себя случайно выбирается отображение. Найти вероятности событий:

а) выбранное отображение каждый из n элементов переводит в 1;

б) элемент i имеет ровно k прообразов;

в) элемент i переводится в j ;

г) выбранное отображение элементы $i_1, i_2, \dots, i_k$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) переводит в элементы $j_1, j_2, \dots, j_k$ соответственно.

1.43. Из множества всех подстановок *) степени n случайно выбирается одна. Если элементы $i_1, i_2, \dots, i_k$ различны и выбранная подстановка переводит i_1 в i_2 , i_2 в i_3 , ..., i_{k-1} в i_k и i_k в i_1 ($i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow$

*) Подстановкой степени n называется взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя.

$\rightarrow i_{k-1} \rightarrow i_k \rightarrow i_1$), то говорят, что элементы $i_1, i_2, \dots, i_k$ образуют цикл длины k . Найти вероятности событий:

а) выбрана тождественная подстановка

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix};$$

б) выбранная подстановка элементы $i_1, i_2, \dots, i_k$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$) переводит в элементы $j_1, j_2, \dots, j_k$ соответственно;

в) элемент i в выбранной подстановке образует единичный цикл, т. е. $i \rightarrow i$;

г) элементы 1, 2, 3 образуют цикл длины 3: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ или $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$;

д) все элементы образуют один цикл.

1.44 (см. 1.43). Найти вероятность P_n того, что в случайно выбранной подстановке степени n найдется хотя бы один цикл единичной длины. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

1.45. Обозначим символом $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ (см. [9]) множество подстановок, у которых α_i циклов длины 1, $\dots$, α_n циклов длины n (определение цикла см. в задаче 1.43). Из множества $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$ случайно выбирается одна подстановка. Найти вероятности событий:

а) выбрана заранее указанная подстановка;

б) элемент i образует единичный цикл;

в) выбранная подстановка переводит i в j ($i \neq j$).

§ 2. Геометрические вероятности

1.46. Случайная точка A равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$ и делит этот отрезок на две части. Пусть η_1 — длина большей части и η_2 — длина меньшей части. Найти $P\{\eta_1 \leq x\}$, $P\{\eta_2 \leq x\}$ при любом x .

1.47 Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от точки A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x ;

б) расстояние от точки A до ближайшей стороны квадрата не превосходит x ;

в) расстояние от точки A до центра квадрата не превосходит x ;

г) расстояние от точки A до фиксированной вершины квадрата не превосходит x .

1.48. Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найти вероятности следующих событий:

а) расстояние от A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x ;

б) расстояние от A до любой стороны прямоугольника не превосходит x ;

в) расстояние от A до диагоналей прямоугольника не превосходит x .

1.49. Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной a . Найти вероятность того, что расстояние от A до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от A до ближайшей диагонали квадрата.

1.50. Случайная точка A имеет равномерное распределение в правильном n -угольнике. Найти вероятность P_n того, что A находится ближе к границе многоугольника, чем к его диагоналям. Найти такие числа C и a , что

$$P_n = Cn^a (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

1.51. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в единичном квадрате $K = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$. Обозначим η число действительных корней многочлена $f_{\xi_1, \xi_2}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \xi_1^2x + \xi_2$. Найти вероятности

$$P\{\eta = k\}, \quad k = 1, 3.$$

1.52. На паркет, составленный из правильных k -угольников со стороной a , случайно бросается монета радиуса r . Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из k -угольников паркета для:

а) $k = 3$;

б) $k = 4$;

в) $k = 6$.

1.53. Случайно подброшена монета. Будем считать, что толщина монеты равна 0 и что вектор нормали, приложенной к стороне монеты с гербом, при вращении образует конус (рис. 1). Ось конуса образует угол θ ($-\pi/2 < \theta < \pi/2$) с горизонтальной плоскостью, α — угол между образующей конуса и его осью ($0 < \alpha \leq \pi/2$). В момент падения монеты конец вектора

нормали равномерно распределен на окружности основания конуса. Найти вероятность $p(\alpha, \theta)$ того, что монета упадет гербом вверх. При каких условиях $p(\alpha, \theta) = 1/2$?

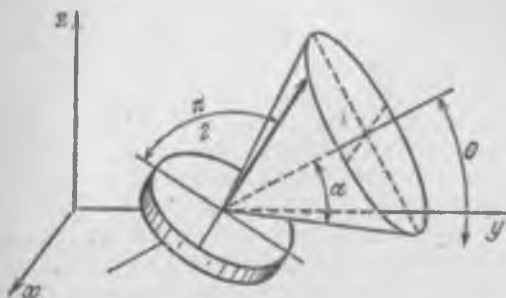


Рис. 1.

1.54. Парадокс Бертрана. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим ξ ее длину. Найти вероятность $Q_x = P\{\xi > x\}$, если середина хорды равномерно распределена в круге. Вычислить вероятности Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$ того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника и треугольника соответственно.

Результат зависит от того, как понимать слово «случайно». См. задачи 1.55 и 1.56.

1.55. Решить задачу 1.54, если направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению.

1.56. Решить задачу 1.54, если один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

1.57. На плоскость, разлинованную параллельными прямыми (расстояние между соседними прямыми равно $2a$), брошена полуокружность радиуса $r < a$; точка (φ, x) (x — расстояние от центра окружности до ближайшей прямой, $0 \leq x \leq a$; φ — угол между этой прямой и диаметром, соединяющим концы дуги) равномерно распределена в прямоугольнике $[0, a] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Найти вероятность того, что прямая будет иметь k ($k = 0, 1, 2$) пересечений с полуокружностью.

1.58. В интервале времени $[0, T]$ в случайный момент u появляется сигнал длительности Δ . Приемник включается в случайный момент $v \in [0, T]$ на время t .

Предположив, что точка (u, v) равномерно распределена в квадрате $[0, T] \times [0, T]$, найти вероятность обнаружения сигнала.

1.59. Пассажир может воспользоваться трамваями двух маршрутов, следующих с интервалами T_1, T_2 . Момент прихода пассажира определяет на отрезках $[0, T_1], [0, T_2]$ точки u и v , равные времени, оставшемуся до прихода трамвая соответствующего маршрута. Предполагая, что точка (u, v) равномерно распределена на $\Omega = \{(u, v): 0 \leq u \leq T_1, 0 \leq v \leq T_2\}$, найти вероятность того, что пассажир, пришедший на остановку, будет ждать не дольше t ($0 < t < \min(T_1, T_2)$).

1.60. Однородный прямой круговой цилиндр случайно бросается на горизонтальную плоскость. Найти вероятность того, что цилиндр упадет на боковую поверхность, если его высота h , а радиус основания r . Вычислить эту вероятность при $h = 2r$. При каких h и r вероятности упасть на основание и на боковую поверхность одинаковы?

1.61. Неоднородный прямой круговой цилиндр случайно бросается на горизонтальную плоскость. Радиус основания цилиндра r , центр тяжести расположен на оси симметрии цилиндра на расстоянии a от одного основания и $b > a$ от другого основания цилиндра. Найти вероятность того, что цилиндр упадет: а) на основание, расположенное ближе к центру; б) на основание, более удаленное от центра тяжести; в) на боковую поверхность.

1.62. Однородный прямой круговой конус с высотой h и радиусом основания r случайно бросается на горизонтальную плоскость. а) Найти вероятность того, что он упадет на основание; б) вычислить эту вероятность при $r = h$; в) при каком отношении r/h эта вероятность равна $1/4$?

1.63. Однородное тело, ограниченное сферой и плоскостью, проходящей через центр сферы (полушар), случайно бросается на горизонтальную плоскость. Найти вероятность того, что полушар упадет на плоскую часть своей границы.

1.64. Длинный однородный брус прямоугольного поперечного сечения размера $a \times b$, $b > a$, случайно бросается на горизонтальную плоскость так, что его ось параллельна этой плоскости, а угол поворота относительно этой оси равномерно распределен в $[0, 2\pi]$.

Найти вероятность того, что он упадет на более широкую боковую грань.

1.65*. На плоскости проведено n окружностей $S_1, \dots, S_n$ с общим центром O ; радиус окружности S_k равен k ($k=1, 2, \dots, n$). Случайная точка A имеет равномерное распределение в круге, ограниченном окружностью S_n ; ABC — правильный треугольник, одной из вершин которого является A , а центром — точка O . Найти вероятность P_m того, что граница треугольника ABC пересекает ровно m окружностей, $m=0, 1, \dots, n$.

Глава 2

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ

В построении математической модели последовательности испытаний важную роль играют понятия независимости событий и условной вероятности. Условная вероятность $P(B | A)$ события B при условии, что событие A произошло, определяется формулой

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0. \quad (2.1)$$

Это равенство может быть записано в виде «теоремы умножения»

$$P(AB) = P(A)P(B | A). \quad (2.2)$$

Обобщением (2.2) является формула

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \quad (2.3)$$

Равенство

$$P(B | A) = P(B) \quad (2.4)$$

естественно интерпретировать как *независимость* события B от A . За определение независимости двух событий A и B принимается более симметричное условие

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad (2.5)$$

эквивалентное (2.4), если $P(A) > 0$. Из (2.5) следует независимость (см. задачу 2.15) еще трех пар событий: $\bar{A}$ и B , A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *взаимно независимыми* (или *независимыми в совокупности*, или просто *независимыми*), если для всех

комбинаций индексов $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ($k = 2, \dots, n$) имеем

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}). \quad (2.6)$$

Если (2.6) выполняется только при $k=2$, то события $A_1, \dots, A_n$ называют *попарно независимыми*; о связи попарной и взаимной независимости см. задачи 2.19 и 2.20.

В приложениях часто оказывается, что модели серии опытов со случайными исходами описываются либо условными вероятностями, либо предположением о независимости исходов различных опытов и заданием безусловных вероятностей исходов. В таких случаях по формулам (2.3) или (2.6) можно, используя заданные условные вероятности или независимость, вычислить вероятности элементарных событий.

Схема случайного выбора без возвращения (см. гл. 1) естественно определяется в терминах условных вероятностей: если известен результат первых k испытаний, то при $(k+1)$ -м испытании с равными вероятностями может появиться любой из оставшихся элементов. Модель случайного выбора, сформулированная в терминах условных вероятностей, совпадает с определением из гл. 1. В терминах независимости и равновероятности результатов отдельных испытаний может быть описана и схема случайного выбора с возвращением, определенная в гл. 1.

Дадим определение *последовательности испытаний*. Пусть

$$\Omega_n = \{(i_1, i_2, \dots, i_n) : i_k \in \{1, 2, \dots, N\}, \\ k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (2.7)$$

Элементарное событие $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ интерпретируется как цепочка исходов в n последовательных испытаниях, каждое из которых имеет N несовместных исходов: $1, 2, \dots, N$. Если положить

$$P(\omega) = p_{i_1} p_{i_2 | i_1} \dots p_{i_n | i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}, \quad (2.8)$$

где $p_{i_s | i_1, \dots, i_{s-1}} \geq 0$, $\sum_{i_s=1}^N p_{i_s | i_1, \dots, i_{s-1}} = 1$ ($s = 1, \dots, n$;

$i_k \in \{1, \dots, N\}$, $1 \leq k \leq s$), то на подмножествах множества Ω_n однозначно определяется вероятность

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \quad A \subseteq \Omega_n.$$

Построенное вероятностное пространство является математической моделью последовательности n испытаний.

Последовательностью *независимых однородных испытаний* является частный случай приведенной общей модели, в которой формулу (2.8) надо заменить формулой

$$P(\omega) = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n} \quad (i_k \in \{1, \dots, N\}, \quad 1 \leq k \leq n), \quad (2.9)$$

где $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Определение последовательности независимых испытаний можно дать в форме произведения вероятностных пространств. Положим $\Omega_0 = \{1, 2, \dots, N\}$; тогда Ω_n в (2.7) можно записать в виде

$$\Omega_n = \Omega_0 \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_0 = \Omega_0^n$$

и для любого $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, где $A_1, \dots, A_n \subset \Omega_0$, имеем

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Здесь $P(A_i) = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_s}$, если $A_i = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$.

Обозначим $A_i^{(n)}$ событие, состоящее в том, что в i -м испытании наступил исход i_i . Оказывается, что в модели (2.7), (2.8)

$$P\{A_i^{(n)} | A_i^{(1)} A_i^{(2)} \dots A_i^{(n-1)}\} = p_{i_1} i_1, \dots, i_{n-1},$$

а в модели (2.7), (2.9)

$$P\{A_i^{(n)} | A_i^{(1)} A_i^{(2)} \dots A_i^{(n-1)}\} = p_{i_i}.$$

Обозначим $B_{S_i}^{(n)}$ событие, состоящее в том, что в i -м испытании исход принадлежит множеству $S_i = \{i_1, \dots, i_{s_i}\}$. Для независимых испытаний события $B_{S_1}^{(1)}, B_{S_1}^{(2)}, \dots, B_{S_n}^{(n)}$ являются взаимно независимыми при любом выборе $S_1, \dots, S_n$.

Если в (2.8) положить $p_{i_1} i_1, \dots, i_{n-1} = p_{i_i}^{(n)} \geq 0$, $p_1^{(n)} + \dots + p_N^{(n)} = 1$, то получится *последовательность независимых (неоднородных) испытаний*, в которых вероятности исходов зависят от номера испытаний (но не от результатов предыдущих испытаний).

Вероятностную модель, определенную формулами (2.7), (2.9), называют также *полиномиальной схемой*.

Обозначим через $\xi_{n,i}$ число появлений исхода i в n испытаниях полиномиальной схемы. При решении задач полезна формула

$$P\{\xi_{n,1}=m_1, \xi_{n,2}=m_2, \dots, \xi_{n,N}=m_N\} = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_N!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_N^{m_N}, \quad (2.10)$$

если $m_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) целые и $n = m_1 + m_2 + \dots + m_N$.

Частный случай полиномиальной схемы с $N=2$ называют *схемой Бернулли*. Ниже два исхода каждого испытания в схеме Бернулли будем обозначать символами 1 и 0 или называть *успехом* и *неудачей*, а соответствующие им вероятности — буквами p и $q = 1-p$. Если μ_n — число успехов (или число единиц) в n испытаниях Бернулли, то

$$P\{\mu_n = m\} = P_n(m, p) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Если в формуле (2.11) положить $p = \lambda_n/n$, где $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ($0 < \lambda < \infty$) при $n \rightarrow \infty$, то получим следующее утверждение (*теорема Пуассона*):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m, p_n) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Правая часть формулы (2.12) используется в приложениях как приближенное значение вероятности $P\{\mu_n = m\}$ при больших значениях n и малых значениях p . Известно (см. [2], гл. 5, § 4, теорема 8, стр. 116), что при любом множестве $B \subset \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\left| P\{\mu_n \in B\} - \sum_{m \in B} \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \right| \leq np^2.$$

Более громоздкую оценку для $P_n(m, p)$ дает соотношение

$$P_n(m, p) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np} \exp \left\{ mp - \frac{(n-m)p^2}{2} - \frac{C_n^3}{n} \left(1 + \frac{m-1}{4n} \right) \right\} \theta,$$

где $-\frac{np^3}{1-p} - \frac{m^3}{6n^3} \frac{n+m-1}{n-m+1} < \ln \theta < 0$ при $0 < p < 1$, $0 \leq m \leq n$.

Приведем формулировки двух теорем Муавра — Лапласа.

Локальная теорема. Если $n \rightarrow \infty$, $p = \text{const}$, $0 < p < 1$, $0 < c_1 \leq x_{n,m} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq c_2 < \infty$, то

$$P\{\mu_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{x_{n,m}^2}{2}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad (2.13)$$

равномерно по значениям $x_{n,m} \in [c_1, c_2]$.

Интегральная теорема. Если $n \rightarrow \infty$, $p = \text{const}$, $0 < p < 1$, то

$$P\left\{x_1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x_2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-u^2/2} du \quad (2.14)$$

равномерно по x_1, x_2 ($-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq \infty$).

Правые части формул (2.13) и (2.14) дают хорошее приближение, когда n достаточно велико, а p и q не очень близки к нулю. Часто нормальным приближением пользуются при $npq > 20$. Ошибка при использовании нормального приближения может увеличиваться из-за дискретности допредельного распределения (см. задачи 2.54, 2.55). Эта ошибка может иметь порядок $O(1/\sqrt{npq})$. Приведенные замечания очень приближены и носят скорее качественный характер.

Предельное выражение в (2.14) легко можно выразить через значения одной из функций

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du.$$

Для вычисления предельных выражений в (2.12) и (2.14) можно использовать таблицы 3 и 1. Иногда в задачах требуется указать пределы, в которых с заданной вероятностью лежат значения μ_n . В этом случае требуется находить решения уравнений $1 - \Phi(x) = \alpha$. В таблице 2 приведены величины u_α , удовлетворяющие уравнению $1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$. При наличии микрокалькулятора для вычисления $\Phi(x)$ и u_α можно также поль-

зоваться приближенными формулами *)

$$P_x = 2(1 - \Phi(x)) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{(83x+351)x+562}{703/x+165} \right\}, \quad 0 < x \leq 5,5;$$

$$x = \sqrt{\frac{((4y+100)y+205)y^2}{((2y+56)y+192)y+131}},$$

$$y = -\ln P_x, \quad 2 \cdot 10^{-7} \leq P_x \leq 1;$$

в указанных интервалах значений x и P_x относительная ошибка первой формулы не превышает 0,042%, а абсолютная ошибка второй — 0,00013. Для значений x и P_x , лежащих вне указанных интервалов, можно использовать приближенные формулы

$$P_x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} - \frac{0,94}{x^4} \right\}, \quad x \geq 5,5,$$

$$x = \sqrt{\frac{((2y+280)y+572)y}{(y+144)y+603}}, \quad y = -\ln P_x,$$

$$10^{-113} < P_x < 2 \cdot 10^{-7}.$$

Во многих задачах приходится рассматривать бесконечные последовательности испытаний. В этом случае полагают

$$\Omega_{\infty} = \{(i_1, i_2, \dots): i_k \in \{1, 2, \dots, N\}\}, \quad (2.15)$$

σ -алгебра событий $\mathcal{A}$ порождается событиями вида

$$A_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_n} = \{(i_1, i_2, \dots): i_{k_1} = j_1, \dots, i_{k_n} = j_n\}. \quad (2.16)$$

В случае независимых испытаний

$$P\{A_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_n}\} = p_{i_1} \dots p_{i_n}. \quad (2.17)$$

Равенства (2.17) однозначно определяют вероятность на $\mathcal{A}$ (см. [5]).

Приведем еще две формулы, полезные в тех случаях, когда заданы или могут быть легко вычислены условные вероятности. Если события $B_1, B_2, \dots, B_n$

*) См.: Derenzo S. E. Approximations for hand calculators using small integer coefficients. — Math. Comput., 1977, 31, 137 214—225.

попарно несовместны и $B_1 + \dots + B_n = \Omega$, то для любого события A имеем

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k) P(A | B_k) \quad (2.18)$$

(формула полной вероятности) и

$$P(B_m | A) = \frac{P(B_m) P(A | B_m)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) P(A | B_k)}, \quad m = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

(формула Байеса).

§ 1. Условные вероятности

В задачах 2.1—2.6 вероятностное пространство считается заданным; для вычисления условных вероятностей нужно использовать формулу (2.1).

2.1. Из множества чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ по схеме случайного выбора без возвращения выбираются три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

2.2. Брошено две игральные кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

2.3. Из 100 карточек с числами 00, 01, ..., 98, 99 случайно выбирается одна. Пусть η_1 и η_2 — соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найти $P\{\eta_1 = i | \eta_2 = 0\}$.

2.4. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, последовательно без возвращения извлекают n шаров. Пусть $A_0^{(i)}$ ($A_1^{(i)}$) — событие, состоящее в том, что i -й шар был черный (белый). Используя классическое определение случайного выбора (гл. 1), найти

$$P\{A_1^{(s+1)} | A_{e_1}^{(1)} A_{e_2}^{(2)} \dots A_{e_s}^{(s)}\}, \quad e_i = 0, 1.$$

2.5. Решить задачу 2.4 в случае выбора с возвращением (см. введение к гл. 1, (1.3)).

2.6. Случайный выбор двух подмножеств A_1 и A_2 из множества $S = \{1, 2, \dots, N\}$ производится так же,

как и в задаче 1.23. Найти условную вероятность $P\{|A_1|=l_1, |A_2|=l_2 | A_1 \cap A_2 = \emptyset\}$ того, что множества A_1 и A_2 состоят из l_1 и l_2 элементов соответственно при условии, что A_1 и A_2 не пересекаются.

В задачах 2.7—2.11 предполагаются заданными условные вероятности; при решении используются формулы (2.2), (2.3).

2.7. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:

- первый студент взял «хороший» билет,
- второй студент взял «хороший» билет,
- оба студента взяли «хорошие» билеты.

2.8. Два игрока поочередно извлекают шары (без возвращения) из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Используя формулу (2.3), найти вероятность выигрыша первого участника, если а) $N = 3$, $M = 1$; б) $N = 4$, $M = 1$; в) $N = 6$, $M = 2$.

2.9. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, по одному без возвращения извлекаются все шары. Используя определение случайного выбора в терминах условных вероятностей, найти вероятности событий:

$$A_k = \{k\text{-й шар белый}\},$$

$$B_{k,l} = \{k\text{-й и } l\text{-й шары белые}\},$$

$$C_{k,l} = \{k\text{-й шар черный, а } l\text{-й белый}\}.$$

2.10. Из урны, содержащей 3 белых шара, 5 черных и 2 красных, два игрока поочередно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Пусть $A_1 = \{\text{выигрывает игрок, начавший игру}\}$, $A_2 = \{\text{выигрывает второй участник}\}$, $B = \{\text{игра закончилась вничью}\}$. Найти $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(B)$.

2.11. Из урны, содержащей N_1 белых шаров, N_2 черных и N_3 красных, последовательно без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится красный шар. Используя формулу (2.3), найти вероятности следующих событий:

- вынуто n_1 белых шаров и n_2 черных;
- не появилось ни одного белого шара;
- всего вынуто k шаров.

§ 2. Независимость событий

В задачах 2.12—2.16 предполагается, что задано вероятностное пространство; требуется выяснить зависимости или независимости некоторые события.

2.12. Брошено две игральные кости. Положим

$A_l = \{\text{число очков, выпавшее на первой кости, делится на } l\}$,

$B_l = \{\text{число очков, выпавшее на второй кости, делится на } l\}$,

$C_l = \{\text{сумма очков, выпавших на первой и второй костях, делится на } l\}$.

Отправляясь от классического определения вероятности, установить, являются ли независимыми следующие пары событий: а) A_l, B_k —при любых l, k ; б) A_2, C_2 ; в) A_4, C_4 ?

2.13. Игральная кость брошена 2 раза, X_1 и X_2 —числа очков, выпавшие при этих испытаниях. Рассмотрим события

$A_1 = \{X_1 \text{ делится на } 2, X_2 \text{ делится на } 3\}$,

$A_2 = \{X_1 \text{ делится на } 3, X_2 \text{ делится на } 2\}$,

$A_3 = \{X_1 \text{ делится на } X_2\}$, $A_4 = \{X_2 \text{ делится на } X_1\}$,

$A_5 = \{X_1 + X_2 \text{ делится на } 2\}$, $A_6 = \{X_1 + X_2 \text{ делится на } 3\}$.

Найти все пары $\{A_i, A_j\}$, тройки $\{A_i, A_j, A_k\}$ и т. д. взаимно независимых событий.

2.14. Случайная точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x_1, x_2): 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$. При каких значениях r независимы события

$$A_r = \{|\xi_1 - \xi_2| \geq r\} \quad \text{и} \quad B_r = \{\xi_1 + \xi_2 \leq 3r\}?$$

2.15. События A и B независимы. Являются ли независимыми события: а) A и $\bar{B}$, б) $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

2.16. Случайная точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $0 \leq x, y \leq 1$. Пусть

$$A_1 = \left\{ \xi_1 \leq \frac{1}{2} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \xi_2 \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$A_3 = \left\{ \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \left(\xi_2 - \frac{1}{2} \right) < 0 \right\}.$$

Показать, что любые два события из A_1, A_2, A_3 независимы, но все три события A_1, A_2, A_3 зависимы. Являются ли зависимыми события $A_1 A_2$ и A_3 ?

2.17 (см. 2.16). Обобщая пример, приведенный в предыдущей задаче, показать, что для любого целого $n \geq 4$ существует совокупность $\{A_1, \dots, A_n\}$ событий, обладающая следующими свойствами:

а) события $A_1, \dots, A_n$ не являются независимыми,
 б) при удалении из $A_1, \dots, A_n$ любого события остающаяся совокупность оказывается совокупностью независимых событий.

2.18*. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ удовлетворяют условиям

$$P\{A_i\} = p_i, \quad P\left\{\bigcap_{j=1}^i A_j\right\} = p_1 \dots p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Является ли $\{A_1, \dots, A_n\}$ совокупностью независимых событий?

2.19*. Пространство элементарных событий Ω состоит из n элементов. При каких k на подмножествах Ω можно определить вероятность P и события $A_1, \dots, A_k$ так, чтобы события $A_1, \dots, A_k$ были независимыми в совокупности и $0 < P(A_i) < 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$)?

2.20*. Пространство элементарных событий Ω состоит из $n \geq 3$ элементов. При каких k можно так определить на подмножествах Ω вероятность P и события $A_1, \dots, A_k$, что $P(A_i) > 0$ ($i = 1, \dots, k$) и события $A_1, \dots, A_k$ попарно независимы?

В задачах с 2.21 по 2.25 предполагается независимость некоторых событий; требуется вычислить вероятности других событий.

2.21. Упрощенная система контроля изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k -й проверки ($k = 1, 2$) изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью β_k , а бракованное изделие принимается с вероятностью α_k . Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий:

а) бракованное изделие будет принято;
 б) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

2.22. Измерительное устройство состоит из двух приборов. Вероятность безотказной работы k -го прибора за рассматриваемый период времени равна $1 - \alpha_k$ ($k = 1, 2$). Оценить вероятность того, что оба прибора будут работать:

- а) если поломки происходят независимо;
- б) если ничего не известно о зависимости между поломками этих приборов.

2.23. Два человека купили по одной карточке лотереи «Спортлото-6» и независимо друг от друга отметили по 6 номеров. Найти вероятности событий:

- а) каждый получит минимальный выигрыш;
- б) каждый получит какой-либо выигрыш.

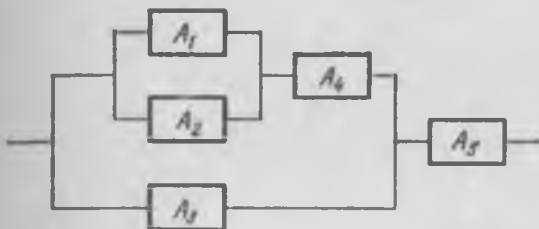


Рис. 2.

2.24. Электрическая цепь составлена из элементов A_k , $k=1, 2, \dots, 5$, по схеме, приведенной на рис. 2. При выходе из строя любого элемента цепь в месте его включения разрывается. Вероятность выхода из строя за данный период элемента A_k равна p_k , $k=1, \dots, 5$. Предполагается, что элементы выходят или не выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность события

$C = \{\text{за рассматриваемый период по цепи может проходить ток}\}.$

2.25. По цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадания при i -м выстреле равна p_i , $i=1, \dots, n$. Найти вероятность того, что при n выстрелах будет не менее двух попаданий.

§ 3. Формула полной вероятности

2.26. В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй — 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны по схеме случайного выбора без возвращения удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

2.27. Изделия поступают на проверку, описанную в задаче 2.21. Предполагая, что каждое изделие удовлетворяет стандарту с вероятностью p , найти следующие вероятности:

а) вероятность того, что поступившее на проверку изделие не будет отбраковано;

б) вероятность того, что неотбракованное изделие удовлетворяет стандарту.

2.28. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, утеряно r шаров. Сравнить вероятности извлечения белого шара: а) до утери; б) после утери при $r = 1$; в) после утери при $r > 1$.

2.29. Отрезок $[0, a]$ случайной точкой делится на две части, из которых случайно выбирается одна часть. Обозначим η длину выбранной части. Найти $P\{\eta \leq x\}$, $0 \leq x \leq a$, предполагая, что координата ξ случайной точки равномерно распределена на отрезке $[0, a]$ и вероятности выбора любой из полученных частей отрезка одинаковы.

2.30. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно переливать только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% — вторую, 20,9% — третью и 7,9% — четвертую группы крови. а) Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора. б) Найти вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеются два донора; три донора.

2.31. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии помех равна 0,99, при перегреве — 0,95, при вибрации — 0,9, при вибрации и перегреве — 0,8. Найти вероятность P_1 отказа этого реле при работе в жарких странах (вероятность перегрева равна 0,2, вероятность вибрации 0,1) и вероятность P_2 отказа при работе в передвижной лаборатории (вероятность перегрева 0,1, вероятность вибрации 0,3), предполагая перегрев и вибрацию независимыми событиями.

2.32 (см. 2.31). Найти границы, в которых могут изменяться вероятности P_1 и P_2 в предыдущей задаче,

если отказаться от предположения о независимости перегрева и вибрации.

2.33. Имеется пять урн. В 1-й, 2-й и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-й и 5-й урнах — по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова условная вероятность того, что выбрана 4-я или 5-я урна, если извлеченный шар оказался белым?

2.34. В стройотряде 70% первокурсников и 30% студентов второго курса. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса — 5% девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

2.35. По каналу связи передается одна из последовательностей букв АААА, ВВВВ, СССС с вероятностями p_1 , p_2 , p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью α и с вероятностями $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ и $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ принимается за две другие буквы. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано АААА, если принято АВСА.

2.36. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α . Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ .

а) Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

б) Вычислить найденную в п. а) условную вероятность при следующих числовых значениях *): $1-\beta = 0,9$, $\alpha = 0,01$, $\gamma = 0,001$.

2.37. Отдел технического контроля (ОТК) проводит сортировку выпускаемых заводом приборов. Каждый прибор независимо от остальных имеет дефекты с вероятностью p . При проверке в ОТК наличие дефектов обнаруживается с вероятностью α ; кроме того, с вероятностью β исправный прибор при проверке может вести себя как дефектный. Все приборы, у которых

*) Эти значения приведены в книге: За к с Л. Статистическое оценивание. — М.: Статистика, 1976, стр. 49.

при проверке обнаружены отклонения от стандарта, бракуются. Найти вероятность q_0 того, что забракованный прибор имеет дефекты, и вероятность q_1 того, что забракованный прибор имеет дефекты. При каких условиях $q_0 > q_1$?

2.38. В урне находится 3 черных и 2 белых шара. Первый игрок по схеме выбора без возвращения извлекает 3 шара. Обратно он возвращает черный шар, если среди вынутых шаров больше было черных; в противном случае возвращается белый шар. Второй игрок после этого извлекает один шар и по его цвету должен угадывать число белых шаров среди трех шаров, вынутых первым игроком. Найти условную вероятность того, что у первого игрока было: а) 0 белых, б) 1 белый, в) 2 белых шара, — если второй игрок вытащил белый шар.

§ 4. Схема Бернулли

2.39. Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании появятся три «герба».

2.40. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна $1/10$. Каковы вероятности того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено, б) содержит ровно 3 искажения, в) содержит не более трех искажений?

2.41. Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы.

2.42. Найти вероятность того, что в $2n$ испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p и неудачи $q = 1 - p$ появится $m + n$ успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.

2.43. Из множества $S = \{1, 2, \dots, N\}$ случайно и независимо выбираются два подмножества A_1 и A_2 так, что каждый элемент из S независимо от других элементов с вероятностью p включается в подмножество A_1 и с вероятностью $q = 1 - p$ не включается. Найти вероятность того, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

2.44. По той же схеме выбора подмножеств из $S = \{1, 2, \dots, N\}$, что в задаче 2.43, независимо вы-

бираются r подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_r, r \geq 2$. Найти вероятность того, что выбранные подмножества попарно не пересекаются.

2.45 (см. 2.43). Из множества $S = \{1, 2, \dots, N\}$ независимо выбираются r подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_r$. Механизм выбора состоит в следующем: любой элемент множества S независимо от других элементов с вероятностью p_i включается в множество A_i и с вероятностью $q_i = 1 - p_i$ не включается ($i = 1, \dots, r$). Найти вероятность того, что подмножества $A_1, A_2, \dots, A_r$ попарно не пересекаются.

2.46 (см. 2.43). Из множества $S = \{1, 2, \dots, N\}$ случайно и независимо выбираются подмножества $A_1, \dots, A_r$. Механизм выбора такой же, как в задаче 2.43. Найти: а) $P\left\{\left|\bigcap_{i=1}^r A_i\right| = k\right\}$; б) $P\left\{\left|\bigcup_{i=1}^r A_i\right| = k\right\}$,

где $|B|$ обозначает число элементов множества B .

2.47. Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомашина. Пешеходу для перехода дороги необходимо 3 с. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода: а) 3 с; б) 4 с; в) 5 с?

2.48. В одном из матчей на первенство мира по шахматам ничьи не учитывались, и игра шла до тех пор, пока один из участников матча не набирал 6 очков (выигрыш — 1 очко, проигрыш и ничья — 0 очков). Считая участников матча одинаковыми по силе, а результаты отдельных игр независимыми, найти вероятность того, что при таких правилах в момент окончания матча проигравший набирает k очков, $k = 0 \div 5$.

2.49. Обрабатываемые на станке детали сортируются по размерам на две группы. Каждая очередная деталь независимо от предыдущих с равными вероятностями попадает в первую или вторую группу. Пусть в начале смены для каждой группы деталей приготовлено по ящику емкости r . Какова вероятность того, что в момент, когда очередную деталь будет некуда класть, в другом ящике будет m деталей?

2.50. По каналу связи передаются сообщения из нулей и единиц. Из-за помех вероятность правильной передачи знака равна 0,55. Для повышения вероятности правильной передачи каждый знак сообщения

повторяют n раз. Полагают, что последовательности из n принятых знаков в сообщении соответствует знак, составляющий в ней большинство. Найти вероятность правильной передачи одного знака при n -кратном повторении, если $n = 5$.

2.51 (см. 2.50). Подобрать n так, чтобы вероятность правильной передачи знака была не меньше 0,99.

2.52. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

2.53. В таблице случайных чисел цифры сгруппированы по две. Найти приближенное значение вероятности того, что среди 100 пар пара 09 встретится не менее двух раз.

2.54*. Пусть ξ_n — число успехов в n независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха, равной $1/2$.

а) С помощью теоремы Муавра—Лапласа найти приближенные значения

$$P\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right\}, \quad P\left\{\left|\xi_n - \frac{n}{2}\right| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right\}$$

при $n = 100$.

б) Вычислить те же вероятности, что в п. а), с погрешностью 10^{-4} , используя уточненную формулу Стирлинга.

Сравнить результаты пп. а) и б) и истолковать их.

2.55*. Решить предыдущую задачу, полагая $n = 128$.

2.56. Найти приближенное значение вероятности того, что число «девяток» среди 10 000 случайных чисел заключено между 940 и 1060. (Случайными числами, если не указан закон распределения, называют реализацию последовательности независимых испытаний с равновероятными исходами 0, 1, ..., 9.)

2.57 (см. 2.56). Из таблицы случайных чисел отбирают числа, делящиеся на 3, до тех пор, пока не наберется 1025 таких чисел. Найти приближенное значение вероятности того, что потребуется таблица, содержащая не меньше 2500 чисел.

2.58. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из

гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

2.59. В поселке 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд ходит раз в сутки).

2.60. Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна p . Найти вероятность того, что k -й по порядку успех происходит при l -м испытании.

В задачах с 2.61 по 2.66 рассматриваются бесконечные последовательности испытаний. Воспользоваться частным случаем вероятностного пространства, определяемым формулами (2.15) — (2.17) при $N=2$.

2.61. Две игральные кости бросают до выпадения «6» хотя бы на одной из них. Найти вероятность того, что впервые «6» появляется при k -м бросании, $k=1, 2, 3, \dots$

2.62. Двое по очереди бросают монету. Выигрывает тот, кто первым получит «герб». Найти вероятности событий:

- а) игра закончится до 4-го бросания;
- б) выиграет начавший игру (первый игрок);
- в) выиграет второй игрок.

2.63. В схеме Бернулли p — вероятность исхода 1 и $q=1-p$ — вероятность исхода 0. Найти вероятность того, что цепочка 00, состоящая из двух нулей подряд, появится раньше цепочки 01. В частности, вычислить эту вероятность при $p=1/2$.

2.64. Пусть выполнены условия задачи 2.63. Найти вероятность того, что цепочка 00 (два нуля подряд) появится раньше цепочки 10. В частности, вычислить эту вероятность при $p=1/2$.

2.65. Пусть выполнены условия задачи 2.63. Найти вероятность $P_{00|111}$ того, что цепочка 00 появится раньше цепочки 111. В частности, вычислить эту вероятность при $p=1/2$.

2.66. Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1: если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае — в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m .

§ 5. Полиномиальная схема

2.67. Отрезок $[0, 10]$ точками 1, 2, 3, 4, 7 разделен на 4 отрезка длины 1 и 2 отрезка длины 3. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — независимые случайные точки, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0, 10]$. Какова вероятность того, что из этих точек в два каких-либо отрезка длиной 1 попадет по 2 точки, а в каждый из оставшихся отрезков — по одной точке?

2.68. При прохождении одного порога байдарка не получает повреждений с вероятностью p_1 , полностью ломается с вероятностью p_2 , получает серьезное повреждение с вероятностью p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Два серьезных повреждения приводят к полной поломке. Найти вероятность того, что при прохождении n порогов байдарка не будет полностью сломана.

2.69. Сообщения, передаваемые по каналу связи, состояются из трех знаков А, В, С. Из-за помех каждый знак принимается правильно с вероятностью 0,6 и принимается ошибочно за любой из двух других знаков с вероятностью 0,2. Для увеличения вероятности правильного приема каждый знак передается 5 раз. За переданный знак принимается знак, который чаще всего встречается в принятой пятерке знаков. Если наиболее частых знака два, то из них выбирается равновероятно один. Найти вероятность правильного приема знака при указанном способе передачи.

2.70. Пусть $\xi_{n,i}$ — число появлений исхода i в n первых испытаниях полиномиальной схемы (см. введение к гл. 2). Найти $P\{\xi_{n,1} = m_1\}$.

2.71. В схеме, описанной в задаче 2.70, найти условную вероятность

$$P\{\xi_{n,2} = m_2, \dots, \xi_{n,N} = m_N | \xi_{n,1} = m_1\}.$$

2.72. В N ячейках, разбитых на две группы по N_1 и N_2 ячеек соответственно ($N_1 + N_2 = N$), независимо одну от другой размещают n частиц; пусть p_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, N_i$) — вероятность попадания частицы в j -ю ячейку i -й группы, а $\eta_{ij}^{(n)}$ — число частиц, попавших в j -ю ячейку i -й группы после размещения n частиц. Найти:

- а) $P\{\eta_{ij}^{(n)} = k_{ij}, i = 1, 2, j = 1, \dots, N_i\}$,
- б) $P\{\eta_{11}^{(n)} + \dots + \eta_{2N_2}^{(n)} = n_2\}$,
- в) $P\{\eta_{1j} = k_{1j}, j = 1, \dots, N_1 | \eta_{21} + \dots + \eta_{2N_2} = n_2\}$.

2.73. В N ячейках независимо размещают n частиц. Вероятность попадания каждой частицы в i -ю ячейку равна $1/N$, $i = 1, 2, \dots, N$. Обозначим через $\mu_0(n, N)$ число ячеек, оставшихся пустыми. Найти $P\{\mu_0(n, N) = k\}$.

2.74. Игральную кость бросают до тех пор, пока впервые не выпадет меньше пяти очков. Какова вероятность получить при последнем бросании не меньше двух очков?

2.75. Исходы $\theta_1, \theta_2, \dots$ последовательности испытаний с $N = 3$ возможными исходами 1, 2, 3 и вероятностями исходов p_1, p_2, p_3 объединяются в тройки $(\theta_{3k+1}, \theta_{3k+2}, \theta_{3k+3})$. Из первой тройки $(\theta_{3v+1}, \theta_{3v+2}, \theta_{3v+3})$, в которой все исходы различны, выбирается θ_{3v+1} . Найти $P\{\theta_{3v+1} = i\}$.

2.76. Испытания в полиномиальной схеме с исходами 1, 2, 3, имеющими вероятности p_1, p_2, p_3 соответственно, заканчиваются, когда впервые не появится исход 3. Найти вероятность того, что испытания закончатся исходом 1.

2.77. Игрок A подбрасывает 3 игральные кости, а игрок B — 2 кости. Эти испытания они проводят вместе и последовательно до первого выпадения «6» хотя бы на одной кости. Найти вероятности событий:

- а) $A = \{\text{впервые «6» появилось у игрока } A, \text{ а не } B\}$
- б) $B = \{\text{впервые «6» появилось у игрока } B, \text{ а не } A\}$;
- в) $C = \{\text{впервые «6» появилось одновременно у } A \text{ и } B\}$.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Случайной величиной называется действительная функция от элементарного события $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, для которой при любом действительном x множество $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\}$ принадлежит $\mathcal{A}$ (т. е. является событием) и для него определена вероятность $P\{\omega: \xi(\omega) \leq x\}$, записываемая кратко $P\{\xi \leq x\}$. Эта вероятность, рассматриваемая как функция x , называется *функцией распределения* случайной величины ξ и обозначается обычно либо $F_\xi(x)$, либо $F(x)$ (иногда функцией распределения называют вероятность $P\{\xi < x\}$).

С помощью функции распределения $F_\xi(x)$ можно однозначно определить вероятности $P\{\xi \in B\}$ для борелевских множеств B на числовой прямой (определение борелевских множеств см. в [5], гл. II, § 3, с. 32, или в [2], гл. 2, § 1, с. 28—29). В частности, борелевскими множествами являются интервалы вида $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, (x_1, x_2) , их конечные и счетные суммы. Вероятность $P\{\xi \in B\}$, рассматриваемая как функция от борелевского множества B , называется *распределением вероятностей* случайной величины ξ и обозначается $P_\xi(B)$. Иногда $P_\xi(B)$ называют *законом распределения* случайной величины ξ или просто *распределением* ξ . Таким образом, распределение вероятностей $P_\xi(B)$ можно задать функцией распределения $F_\xi(x)$.

Важным классом распределений вероятностей являются *абсолютно непрерывные* распределения, задаваемые плотностью вероятности $p_\xi(x) = p(x)$, т. е. такой неотрицательной функцией $p(x)$, что для любого борелевского множества B

$$P\{\xi \in B\} = \int_B p(x) dx;$$

в общем случае рассматривается интеграл Лебега, который совпадает с интегралом Римана (собственным или несобственным), если последний существует. Другой класс составляют *дискретные* распределения, зада-

ваемые конечным или счетным набором вероятностей $P\{\xi = x_k\}$, для которых

$$\sum_k P\{\xi = x_k\} = 1.$$

Функция распределения $F_\xi(x)$ в этом случае ступенчатая и задается суммой

$$F_\xi(x) = \sum_{x_k \leq x} P\{\xi = x_k\}.$$

Если распределение случайной величины абсолютно непрерывно или дискретно, то говорят также, что сама случайная величина или ее функция распределения соответственно абсолютно непрерывны или дискретны.

В задачах обычно говорится о случайной величине ξ и о ее распределении $P_\xi(\cdot)$ без явного указания того вероятностного пространства, на котором она определена. Это означает, что соответствующее утверждение или вычисление справедливо для любого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, на котором можно определить случайную величину $\xi = \xi(\omega)$ с заданным распределением $P_\xi(\cdot)$; в частности, таким вероятностным пространством можно считать $(R, \mathcal{B}, P_\xi)$, где $R = \{x\}$ — числовая прямая, $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра ее подмножеств, P_ξ — распределение вероятностей случайной величины ξ , которая задается функцией $\xi(x) = x$.

Если на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ определены случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, то иногда говорят, что задан случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$. Многомерной функцией распределения (или совместной функцией распределения) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ называется вероятность $P\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_r \leq x_r\}$, рассматриваемая как функция от точки $x = (x_1, \dots, x_r)$ r -мерного евклидова пространства R^r и обозначаемая $F_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r)$ (кратко $F_\xi(x)$) или $F(x_1, \dots, x_r)$ (кратко $F(x)$). С помощью функции распределения однозначно определяются вероятности $P\{\xi \in B\}$ для r -мерных борелевских множеств B . Функция множеств $P_\xi(B) = P\{\xi \in B\}$ называется r -мерным распределением вероятностей ξ . Абсолютно непрерывное r -мерное распределение вероятностей задается r -мерной плотностью $P_\xi(x) = p_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r)$, т. е. такой неотрицатель-

ной функцией $p_{\xi}(x)$, что для любого борелевского множества $B \subset R^r$

$$P\{\xi \in B\} = \int \dots \int_B p_{\xi}(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r.$$

Дискретное r -мерное распределение задается с помощью конечного или счетного набора вероятностей $P\{\xi = x(k)\}$, $x(k) \in R^r$, так что для любого борелевского множества B

$$P\{\xi \in B\} = \sum_{k: x(k) \in B} P\{\xi = x(k)\}.$$

Если s -мерный случайный вектор η есть функция $g(\xi)$ от r -мерного случайного вектора ξ , т. е. $\eta_k = g_k(\xi_1, \dots, \xi_r)$, $k=1, \dots, s$, $g(\cdot) = (g_1(\cdot), \dots, g_s(\cdot))$, то

$$P\{\eta \in B\} = P\{\xi \in g_{-1}(B)\},$$

где $g_{-1}(B)$ — прообраз борелевского множества B при отображении g . В частности, если $r=s=1$, функция $g(x)$ непрерывна и возрастает, то $F_{\eta}(x) = F_{\xi}(g_{-1}(x))$. Если еще $g(x)$ дифференцируема и распределение ξ имеет плотность $p_{\xi}(x)$, то распределение η имеет плотность

$$p_{\eta}(x) = p_{\xi}(g_{-1}(x)) \frac{1}{|g'(g_{-1}(x))|}.$$

Если $r=s$, отображение $y=g(x)$ взаимно однозначно и якобиан $J(x) = \frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)}$ не обращается в нуль, то плотность $p_{\eta}(x)$ можно вычислить по плотности $p_{\xi}(x)$ с помощью равенства

$$p_{\eta}(x) = p_{\xi}(g_{-1}(x)) \frac{1}{|J(g_{-1}(x))|}. \quad (3.1)$$

Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_r$ называются *независимыми*, если для любых борелевских множеств $B_1, \dots, B_r$ имеет место равенство

$$P\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_r \in B_r\} = \prod_{k=1}^r P\{\xi_k \in B_k\}. \quad (3.2)$$

Следующие определения независимости равносильны определению (3.2):

в общем случае: для любых $x_1, \dots, x_r \in R$

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r) = \prod_{k=1}^r F_{\xi_k}(x_k);$$

для абсолютных непрерывных распределений: для любых $x = (x_1, \dots, x_r) \in R^r$ (кроме, может быть, точек, образующих множество меры нуль)

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r) = \prod_{k=1}^r p_{\xi_k}(x_k);$$

для дискретных распределений: для всех $x = (x_1, \dots, x_r) \in R^r$

$$P\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_r = x_r\} = \prod_{k=1}^r P\{\xi_k = x_k\}.$$

Если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_r$ независимы, то функции от них $\eta_k = g_k(\xi_k)$, $k = 1, \dots, r$, также будут независимыми случайными величинами.

Если ξ и η — независимые случайные величины, то по плотностям $p_\xi(x)$, $p_\eta(x)$ можно вычислить плотность $p_{\xi+\eta}(x)$ их суммы с помощью формулы композиции (или свертки):

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y) p_\eta(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x-y) p_\eta(y) dy. \quad (3.3)$$

Полезны также формулы композиции для функций распределения

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-y) p_\eta(y) dy, \quad (3.4)$$

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-y) dF_\eta(y)$$

(последний интеграл в общем случае надо понимать как интеграл Лебега — Стильеса).

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega),$$

если интеграл Лебега, стоящий в правой части этого равенства, существует (см. [5], гл. IV, § 2. с. 60 или [2], гл. 4, § 1).

Если ξ имеет плотность, то $M\xi$ может быть вычислено по формуле

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx. \quad (3.5)$$

Для случайной величины ξ с дискретным распределением

$$M\xi = \sum_k x_k P\{\xi = x_k\}, \quad (3.6)$$

если ряд (3.5) сходится абсолютно. В общем случае

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x), \quad (3.7)$$

где интеграл понимается как интеграл Стильеса.

Если $\eta = g(\xi)$, то для вычисления $M\eta = Mg(\xi)$ можно применять следующие формулы, аналогичные (3.5)–(3.7) (также с оговоркой об абсолютной сходимости):

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_{\xi}(x) dx, \quad (3.8)$$

$$Mg(\xi) = \sum_k g(x_k) P\{\xi = x_k\}, \quad (3.9)$$

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_{\xi}(x) \quad (3.10)$$

(в формуле (3.10) в общем случае интеграл понимается как интеграл Лебега — Стильеса). Формулы (3.8) — (3.10) обобщаются на случай, когда $\eta = g(\xi_1, \dots, \xi_r)$ — функция, отображающая R^r в R^1 . В частности, формула (3.8) в этом случае превращается в

$$\begin{aligned} Mg(\xi_1, \dots, \xi_r) = \\ = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_r) p_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для действительной случайной величины ξ математическое ожидание $M\xi^k$ называется k -м моментом или моментом k -го порядка, $M|\xi|^k$ называется абсолютным моментом k -го порядка, $M(\xi - M\xi)^k$ — центральным моментом k -го порядка, $M|\xi - M\xi|^k$ — абсолютным центральным моментом k -го порядка. Факториальным моментом k -го порядка называется $M\xi^{(k)} = M\xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1)$. Второй центральный момент называется дисперсией и обозначается $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Корень квадратный из дисперсии называется средним квадратическим отклонением.

Математическое ожидание $M\xi\eta$ произведения двух случайных величин ξ и η называется смешанным вторым моментом. Смешанный центральный второй момент $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$ называется ковариацией случайных величин ξ и η и обозначается $\text{cov}(\xi, \eta)$. Коэффициентом корреляции ξ и η называется отношение $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$. При вычислении математических ожиданий часто используются следующие свойства:

1. Свойство аддитивности: для любых ξ и η с конечными $M\xi$ и $M\eta$

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta. \quad (3.12)$$

2. Свойство линейности: для любого числа c

$$M(c\xi) = cM\xi. \quad (3.13)$$

3. Свойство мультипликативности: для любых независимых ξ и η с конечными $M\xi$ и $M\eta$

$$M\xi\eta = M\xi M\eta. \quad (3.14)$$

С помощью этих свойств легко получаются следующие формулы для вычисления дисперсии и ковариации:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M\xi^{(2)} + M\xi - (M\xi)^2, \\ \text{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta;$$

для независимых $\xi_1, \dots, \xi_n$

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k, \quad \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0 \quad (i \neq j). \quad (3.15)$$

В общем случае

$$D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \text{cov}(\xi_k, \xi_l).$$

Если имеются две дискретные случайные величины ξ и η , то *условная вероятность* события $\{\xi = x_i\}$ при условии $\eta = y_j$ определяется равенством

$$P\{\xi = x_i | \eta = y_j\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}}. \quad (3.16)$$

Совокупность условных вероятностей (3.16) при всех i задает *условное распределение* случайной величины ξ при условии $\eta = y_j$. *Условное математическое ожидание* ξ при условии $\eta = y_j$ определяется формулой

$$\begin{aligned} M\{\xi | \eta = y_j\} &= \sum_i x_i P\{\xi = x_i | \eta = y_j\} = \\ &= \sum_i \frac{x_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Условные вероятности (3.16) и условное математическое ожидание (3.17) можно рассматривать как случайные величины $f_i(\eta) = P\{\xi = x_i | \eta\}$ и $g(\eta) = M\{\xi | \eta\}$, которые при $\eta = y_j$ принимают значения $P\{\xi = x_i | \eta = y_j\}$ и $M\{\xi | \eta = y_j\}$ соответственно. Вычисляя математическое ожидание от условного математического ожидания $M\{\xi | \eta\}$, получаем полезную формулу

$$M\xi = M[M\{\xi | \eta\}]. \quad (3.18)$$

В частности,

$$P\{\xi = x_i\} = MP\{\xi = x_i | \eta\}. \quad (3.19)$$

Для вычисления $D\xi$ можно использовать формулу

$$D\xi = M[D\{\xi | \eta\}] + D[M\{\xi | \eta\}], \quad (3.20)$$

где *условная дисперсия* $D\{\xi | \eta\}$ определяется формулой

$$D\{\xi | \eta\} = \sum (x_i - M\{\xi | \eta\})^2 P\{\xi = x_i | \eta\}. \quad (3.21)$$

Аналогичные формулы верны и для абсолютно непрерывных распределений. *Условная плотность* ξ при условии $\eta = y$ определяется формулой

$$p_{\xi | \eta = y}(x) = \frac{p_{\xi, \eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)} = \frac{p_{\xi, \eta}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi, \eta}(x, y) dx}, \quad (3.22)$$

а условное математическое ожидание — формулой

$$M\{\xi | \eta = y\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi | \eta = y}(x) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi, \eta}(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi, \eta}(x, y) dx}.$$

Рассматривая условную плотность $p_{\xi | \eta}(x)$ как случайную величину, которая при $\eta = y$ принимает значение $p_{\xi | \eta = y}(x)$, получаем

$$M\{\xi | \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi | \eta}(x) dx,$$

$$D(\xi | \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\{\xi | \eta\})^2 p_{\xi | \eta}(x) dx.$$

Формулы (3.18) и (3.20) остаются справедливыми и в этом случае, а (3.19) заменяется формулой

$$p_{\xi}(x) = M p_{\xi | \eta}(x).$$

Общие определения условных распределений и условных математических ожиданий можно найти в книгах А. А. Боровкова [2] и А. Н. Колмогорова [5].

Перечислим основные способы вычисления математического ожидания. При подходящем способе задания закона распределения случайной величины наиболее удобным может оказаться *прямое вычисление* по формулам (3.5), (3.6) или (3.8), (3.10), (3.11).

Иногда легко вычисляются или имеют простой вид условные математические ожидания. Тогда для вычисления безусловных математических ожиданий используется *формула полного математического ожидания* (3.18).

Использование свойств аддитивности и мультипликативности математического ожидания позволяет свести вычисление $M\xi$ к более простым вычислениям математических ожиданий величин, через которые удастся выразить ξ . Наиболее частым среди таких приемов является прием введения *сумм индикаторов*. *Индикатором* события A называется случайная величина $\chi_A = \chi_A(\omega)$, принимающая значение 1, если $\omega \in A$, и значение 0, если $\omega \notin A$. Часто оказывается (см., например, задачи 3.81—3.103), что можно указать

такие события $A_1, A_2, \dots, A_N$, что интересующая нас величина представляется в виде

$$\xi = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \dots + \chi_{A_N}.$$

Особенно удобно то, что свойство аддитивности верно и для зависимых слагаемых. Таким образом,

$$M\xi = \sum_{k=1}^N M\chi_{A_k} = \sum_{k=1}^N P\{A_k\}.$$

Способы вычисления математических ожиданий с помощью *производящих* и *характеристических функций* рассматриваются в гл. 4.

При вычислении математического ожидания можно пользоваться также *теоремой о монотонной сходимости*: (если $\xi_n \leq \xi_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$ и $M\xi_n, M\xi$ конечны, то $M\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n$), и *теоремой о мажорируемой сходимости* (если $|\xi_n| \leq \eta$, $M\eta < \infty$, и $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ с вероятностью 1, то $M\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n$). В частности,

если $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$, где $\xi_n \geq 0$ и $\sum_n M\xi_n$ сходится, то

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n.$$

Приведем в заключение часто встречающиеся законы распределения. Сначала перечислим некоторые дискретные распределения.

1. *Выврожденное* распределение:

$$P\{\xi = a\} = 1, \quad a - \text{постоянная.}$$

2. *Гипергеометрическое* распределение (параметры: N, M, n — натуральные числа, $M \leq N, n \leq N$):

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \dots, \min(M, n).$$

3. *Биномиальное* распределение (параметры: n — натуральное число, $0 \leq p \leq 1$):

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

4. *Распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. *Геометрическое* распределение с параметром p ($0 < p \leq 1$):

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Далее перечисляются некоторые абсолютно непрерывные распределения, определяемые плотностью $p(x)$.

1. *Равномерное* распределение на отрезке $[a, b]$, $a < b$: $p(x) = \frac{1}{b-a}$, если $a \leq x \leq b$, $p(x) = 0$, если $x \notin [a, b]$.

2. *Нормальное* (или *гауссовское*) распределение с параметрами a, σ^2 , $-\infty < a < \infty$, $0 < \sigma < \infty$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ называют также *стандартным нормальным* распределением.

3. *Показательное* распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0), \quad p(x) = 0 \quad (x < 0).$$

4. *Гамма-распределение* с параметрами $\lambda > 0, \alpha > 0$:

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \quad (x > 0), \quad p(x) = 0 \quad (x \leq 0)$$

(здесь $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ — гамма-функция).

5. *Распределение Коши* с параметром $b > 0$:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{1+b^2 x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Введем еще *многомерное нормальное* распределение.

Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ независимы и имеют нормальные распределения с параметрами (a_k, σ_k^2) , $k = 1, 2, \dots, r$, соответственно, то r -мерная плотность нормального распределения имеет вид

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sigma_1 \dots \sigma_r} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \frac{(x_k - a_k)^2}{\sigma_k^2}\right\}. \quad (3.23)$$

Если в (3.23) $a_1 = \dots = a_r = 0$ и $\sigma_1 = \dots = \sigma_r = \sigma$, то мы имеем плотность сферического нормального распределения

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sigma^r} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^r x_k^2 \right\}. \quad (3.24)$$

Эта плотность инвариантна относительно ортогональных преобразований пространства R^r . В общем случае r -мерная плотность невырожденного нормального распределения задается формулой

$$p_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sqrt{\det B}} e^{-\frac{1}{2} Q(x-a)}, \quad (3.25)$$

где $B = \|b_{kl}\|$ — невырожденная $(r \times r)$ -матрица, $b_{kl} = \text{cov}(\xi_k, \xi_l)$, $b_{kk} = \text{cov}(\xi_k, \xi_k) = D\xi_k$, $\det B$ — определитель матрицы B , $x = (x_1, \dots, x_r)$, $a = (a_1, \dots, a_r)$, $a_k = M\xi_k$, $Q(x) = \sum_{k,l=1}^r b_{kl}^* x_k x_l$ — квадратичная форма, коэффициенты которой образуют матрицу $\|b_{kl}^*\|$, обратную к матрице B .

§ 1. Распределения вероятностей случайных величин

В задачах 3.1—3.7 рассматриваются одномерные распределения; в 3.8—3.24 — законы совместного распределения нескольких случайных величин; в 3.25—3.30 — случайные величины, связанные с последовательностями испытаний; в 3.31—3.38 — законы распределения, заданные функциями распределения.

3.1. Плотность распределения ξ задана формулой

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} Cx^{-3/2} & (x \geq 1), \\ 0 & (x < 1). \end{cases}$$

Найти: а) постоянную C ; б) плотность распределения $\eta = \frac{1}{\xi}$; в) $P\{0, 1 < \eta < 0, 2\}$.

3.2. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α : $P\{\xi \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}$ ($x \geq 0$). Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$; б) $\eta_2 = \xi^2$; в) $\eta_3 = \frac{1}{\alpha} \ln \xi$; г) $\eta_4 = \{\xi\}$ ($\{z\}$ — дробная часть числа z); д) $\eta_5 = 1 - e^{-\alpha \xi}$.

3.3. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти плотности распределения случайных величин: а) $\eta_1 = 2\xi + 1$; б) $\eta_2 = -\ln(1-\xi)$; в) $\eta_3 = \operatorname{tg}(\pi(\xi - 1/2))$; г) $\eta_4 = \begin{cases} \ln 2 + \ln \xi, & \text{если } 0 < \xi \leq 1/2, \\ -\ln(1-\xi) - \ln 2, & \text{если } 1/2 \leq \xi < 1. \end{cases}$

3.4. Случайная точка B имеет равномерное распределение на окружности $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ с центром в точке $A = (0, a)$, а случайная точка $C = (\xi, 0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через A и B . Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ . (Распределение ξ называется *распределением Коши*.)

3.5. Показать, что если случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x) = P(\xi \leq x)$, то случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Если же η имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а

$$F_{-1}(y) = \sup \{x: F(x) \leq y\} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

— функция, обратная к функции распределения $F(x)$ (не обязательно непрерывной!), то случайная величина $\xi = F_{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$.

3.6. Построить пример такого абсолютно непрерывного распределения случайной величины ξ , задаваемого плотностью $p_\xi(x)$, и такой непрерывной функции $g(x)$, что распределение случайной величины $\eta = g(\xi)$ не вырождено и дискретно.

3.7. Функция распределения $F(x)$ непрерывна в каждой точке. Доказать, что она равномерно непрерывна на всей прямой $-\infty < x < \infty$.

3.8. Совместное распределение случайных величин ξ_1, ξ_2 задано таблицей

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

в которой на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i = -1, 1$; $j = -1, 0, 1$) приведена вероятность $p_{ij} =$

$=P\{\xi_1=i, \xi_2=j\}$. Найти: а) одномерные законы распределения $p_{i.} = P\{\xi_1=i\}$, $p_{.j} = P\{\xi_2=j\}$; б) совместный закон распределения $q_{i,j} = P\{\eta_1=i, \eta_2=j\}$ случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 \xi_2$; в) закон распределения $q_{i.} = P\{\eta_1=i\}$ случайной величины $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$; г) закон распределения $q_{.j} = P\{\eta_2=j\}$ случайной величины $\eta_2 = \xi_1 \xi_2$.

3.9. Сумму двух независимых равномерно распределенных на $\{0, 1, \dots, 9\}$ однозначных чисел ξ и η можно записать в виде $\xi + \eta = 10\zeta_2 + \zeta_1$ ($0 \leq \zeta_i \leq 9$). Найти законы распределения ζ_1 и ζ_2 . Зависимы ли ζ_1 и ζ_2 ?

3.10. Произведение двух независимых равномерно распределенных на $\{0, 1, \dots, 9\}$ однозначных чисел ξ и η можно записать в виде $\xi\eta = 10\zeta_2 + \zeta_1$, где ζ_1, ζ_2 — целые числа, принимающие значения от 0 до 9. Зависимы ли ζ_1 и ζ_2 ?

3.11. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Найти плотности распределения случайных величин: а) $\xi + \eta$; б) $\xi - \eta$; в) $\xi\eta$; г) ξ/η .

3.12. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с плотностью e^{-x} ($x \geq 0$) каждая. Найти плотность распределения: а) $\xi + \eta$; б) $\xi - \eta$; в) $|\xi - \eta|$; г) ξ/η .

3.13. Найти плотность распределения суммы $\xi + \eta$, если ξ и η независимы, ξ имеет равномерное распределение в отрезке $[0, 1]$, а η — равномерное распределение в отрезке $[0, 2]$.

3.14. Найти плотность распределения суммы независимых случайных величин ξ и η , если ξ равномерно распределена в $[0, 1]$, а η имеет показательное распределение с плотностью e^{-x} ($x \geq 0$).

3.15. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют равномерное распределение в $[0, 1]$. Найти плотности распределения сумм а) $\xi_1 + \xi_2$, б) $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и в) $P\{0,5 \leq \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 2,5\}$.

3.16. Точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$. Показать, что распределения случайных величин $|\xi_1 - \xi_2|$ и $\min\{\xi_1, \xi_2\}$ совпадают, т. е. что для любого t

$$P\{|\xi_1 - \xi_2| \leq t\} = P\{\min\{\xi_1, \xi_2\} \leq t\}.$$

3.17. Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2 , если слагаемые распределены:

- а) показательно с одним и тем же параметром α ;
- б) по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 .

3.18. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и распределены показательно с одинаковым параметром α . Найти плотность распределения величин:

- а) $\eta_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$;
- б) $\eta_2 = \min \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

3.19. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}$, если ξ_1, ξ_2 независимы и равномерно распределены в отрезке $[0, 1]$.

3.20. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, n \geq 2$, независимы и имеют показательное распределение с плотностью $e^{-x} (x \geq 0)$. Обозначим $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \dots + \xi_n}$.

Найти плотность распределения $p_n(x)$.

3.21. Совместное распределение ξ, η является равномерным в единичном круге $x^2 + y^2 \leq 1$. Найти вероятность $P \{ |\xi| \leq 3/4, |\eta| \leq 3/4 \}$.

3.22. Величины ξ_1, ξ_2 независимы; $P \{ \xi_1 = 0 \} = P \{ \xi_1 = 1 \} = 1/2$, ξ_2 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти закон распределения величины $\xi_1 + \xi_2$.

3.23. Случайная точка $A = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$ имеет равномерное распределение на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Найти распределение проекций (ξ_1, ξ_2) и ξ_1 точки A на плоскость (x, y) и на ось x .

3.24. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на множестве целых чисел от $-n$ до n . Подберем многочлен второй степени $A(x) = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$, принимающий при $x = 1, 2, 3$ значения ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответственно. Найти вероятность P_n того, что числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ целые.

3.25. В схеме Бернулли с вероятностью успеха p обозначим через $\tau_k (k=2, 3, \dots)$ разность номеров испытаний, при которых происходят k -й и $(k-1)$ -й успехи, а через τ_1 — число испытаний до первого успеха. Найти совместное распределение величин τ_1, τ_2 . Являются ли эти величины независимыми?

3.26. В полиномиальной схеме с исходами $(1, 2, \dots, N)$ вероятность i -го исхода в каждом испытании

равна p_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Положим

$$e_{s,i} = \begin{cases} 1, & \text{если в } s\text{-м испытании появился } i\text{-й исход,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Являются ли независимыми случайные величины:

- $e_{s,i}, e_{s,j}$ (s, i, j фиксированы);
- $e_{s,i}, e_{t,i}$ ($s \neq t$);
- $e_{1,i}, e_{2,i}, \dots, e_{n,i}$
- $e_{1,1}c_1 + e_{1,2}c_2 + \dots + e_{1,N}c_N, \dots, e_{n,1}c_1 + e_{n,2}c_2 + \dots + e_{n,N}c_N$, если $c_1, c_2, \dots, c_N$ — константы?

3.27. Игральную кость бросают до тех пор, пока впервые не выпадет меньше пяти очков. Обозначим через θ число очков, выпавших при последнем бросании игральной кости, и через ν — число бросаний кости. Найти совместное распределение θ и ν . Являются ли случайные величины θ и ν зависимыми?

3.28. В N ячеек независимо бросают частицы; вероятность попадания данной частицы в i -ю ячейку равна $p_i = 1/N$ ($i = 1, \dots, N$). Обозначим через τ_1 число испытаний до первого попадания частицы в пустую ячейку (очевидно, $\tau_1 \equiv 1$); а через τ_k ($k \geq 2$) — разность номеров испытаний, соответствующих k -му и $(k-1)$ -му попаданиям в пустую ячейку; номер той пустой ячейки, которая заполняется k -й, обозначим через θ_k . Найти:

- совместное и одномерные распределения величин τ_1, τ_2 ;
- совместное и одномерные распределения величин $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ (являются ли эти величины независимыми?);
- совместное распределение $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$.

3.29. В схеме размещения частиц, описанной в задаче 3.28 (с $p_i \neq 1/N$), найти совместное распределение $\theta_1, \dots, \theta_N$.

3.30. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, по схеме случайного выбора без возвращения вынимаются все шары. Обозначим через ξ_1 число черных шаров, извлеченных до появления 1-го белого шара; ξ_i — число черных шаров, извлеченных между $(i-1)$ -м и i -м ($i = 2, \dots, M$) белыми шарами, ξ_{M+1} — число черных шаров, появившихся после последнего белого. Найти

- $P\{\xi_1 = k\}$;
- $P\{\xi_1 = k, \xi_2 = l\}$;
- $P\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_{M+1} = k_{M+1}\}$.

3.31. Дана функция распределения $F(x, y)$ пары случайных величин ξ, η . Найти $P\{\xi > x, \eta > y\}$.

3.32. Случайные величины ξ и η независимы и имеют непрерывные функции распределения. Доказать, что $P\{\xi = \eta\} = 0$.

3.33. Случайные величины ξ, η независимы, одинаково распределены и имеют дискретное распределение $P\{\xi = x_k\} = P\{\eta = x_k\} = p_k$. Найти $P\{\xi = \eta\}$.

3.34. Двумерное распределение случайных величин ξ, η задано функцией распределения

$$P\{\xi \leq x, \eta \leq y\} = F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \min(x, y) < 0, \\ \min(x, y), & \text{если } 0 \leq \min(x, y) \leq 1, \\ 1, & \text{если } \min(x, y) > 1. \end{cases}$$

Найти $P\{(\xi - 1/2)^2 + (\eta - 1/2)^2 \leq 1/4\}$.

3.35. Построить пример непрерывной в точке (x_0, y_0) двумерной функции распределения $F_{\xi, \eta}(x, y)$, для которой одномерные функции распределения $F_{\xi}(x)$ и $F_{\eta}(y)$ разрывны в точках x_0 и y_0 соответственно.

3.36. Построить такой пример непрерывной во всех точках двумерной функции распределения $F_{\xi, \eta}(x, y)$, чтобы функция распределения $F_{\xi_1, \eta_1}(x, y)$, где $\xi_1 = \xi + \eta$, $\eta_1 = \xi - \eta$, имела точки разрыва.

3.37. Доказать, что двумерная функция распределения $F_{\xi, \eta}(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0) , если соответствующие одномерные функции распределения $F_{\xi}(x)$, $F_{\eta}(y)$ непрерывны в точках x_0 и y_0 соответственно.

3.38. Пусть случайные величины ξ и η независимы, ξ имеет функцию распределения $F(x)$, а η равномерно распределена в интервале $[a, b]$. Показать, что $\xi + \eta$ имеет плотность $\frac{F(x-a) - F(x-b)}{b-a}$.

3.39. К переговорному пункту с двумя кабинками подошли три клиента: 1-й и 2-й клиенты заняли соответственно кабинки № 1 и № 2, а 3-й клиент остался ждать. Предполагая, что времена τ_1, τ_2, τ_3 разговоров клиентов независимы и распределены показательно с параметром λ , найти: а) вероятность того, что 3-й клиент попадет в кабинку № 1; б) плотность распределения времени ожидания 3-го клиента; в) вероятность того, что 3-й клиент закончит разговор раньше 1-го или 2-го клиентов.

3.40. В переговорном пункте телефоны-автоматы расположены в трех залах: в i -м зале n_i автоматов ($i = 1, 2, 3$; $n = n_1 + n_2 + n_3$). После перерыва посетители одновременно заняли все автоматы. Введем события $A_i = \{\text{посетитель, закончивший разговор первым, находился в } i\text{-м зале}\}$, $i = 1, 2, 3$. Найти вероятности событий A_i , $i = 1, 2, 3$, если времена разговора посетителей являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с непрерывной функцией распределения.

3.41. Случайная величина ξ с равномерным распределением на $[0, 1]$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби: $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 10^{-n}$, где ξ_n — целые, $0 \leq \xi_n \leq 9$. Доказать, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. При каждом $\omega \in \Omega$ расположим числа $\xi_k(\omega)$, $k = 1, \dots, n$, в порядке возрастания и перенумеруем их заново: $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$. Полученная последовательность случайных величин называется *вариационным рядом*, а сами случайные величины $\xi_{(k)}$ — *членами* вариационного ряда. Таким образом, в частности, $\xi_{(1)} = \min_{1 \leq k \leq n} \xi_k$, $\xi_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$.

Задачи 3.42—3.48 связаны с вариационным рядом.

3.42. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($n \geq 2$) независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$. Найти: а) функцию распределения $\xi_{(1)}$; б) функцию распределения $\xi_{(n)}$; в) двумерную функцию распределения $\xi_{(1)}, \xi_{(n)}$.

3.43. По независимым одинаково распределенным случайным величинам $\xi_1, \dots, \xi_n$, имеющим функцию распределения $F(x)$ и плотность $p(x)$, построен вариационный ряд $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$. Найти: а) плотность распределения $\xi_{(m)}$; б) совместную плотность распределения $\xi_{(k)}$ и $\xi_{(m)}$ ($k < m$).

3.44. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}$ независимы и имеют одну и ту же непрерывную функцию распределения. Пусть $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(k)}$ — вариационный ряд величин $\xi_1, \dots, \xi_k$. Найти

$$P\{\xi_{k+1} \in [\xi_{(l)}, \xi_{(l+1)}]\}, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

$$P\{\xi_{k+1} < \xi_{(1)}\}, \quad P\{\xi_{k+1} > \xi_{(k)}\}.$$

3.45. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и имеют одинаковое распределение с плотностью $p(x)$. Найти n -мерную плотность $p_n(x_1, \dots, x_n)$ распределения членов вариационного ряда $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$.

3.46. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α :

$$P\{\xi_i \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

а $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$ — значения $\xi_1, \dots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания (вариационный ряд). Показать, что случайные величины

$$\Delta_1 = \xi_{(1)}, \quad \Delta_i = \xi_{(i)} - \xi_{(i-1)}, \quad i = 2, \dots, n,$$

независимы и что

$$P\{\Delta_i \leq x\} = 1 - e^{-\alpha(n-i+1)x}, \quad i = 1, \dots, n.$$

3.47*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ . Доказать, что случайные величины

$$\max\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \quad \text{и} \quad \xi_1 + \frac{\xi_2}{2} + \frac{\xi_3}{3} + \dots + \frac{\xi_n}{n}$$

одинаково распределены.

3.48. Пусть $\xi_n = (\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,k})$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность независимых векторов, у которых координаты $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,k}$ — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же непрерывную функцию распределения $F(x)$. Положим

$$A_n = \left\{ \xi_{n,i} < \min_{1 \leq m < n} \xi_{m,i}, \quad i = 1, \dots, k \right\}.$$

Доказать, что при $k \geq 2$

$$P\left\{ \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right\} < \frac{1}{2^{k-1} \cdot 3}.$$

3.49*. Случайная величина ξ_1 распределена по закону Пуассона с параметром λ_1 :

$$P\{\xi_1 = k\} = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а случайная величина ξ_2 распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_2 > \lambda_1$. Доказать, что при любом целом k

$$P\{\xi_1 \leq k\} > P\{\xi_2 \leq k\}.$$

3.50. Функции распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ удовлетворяют условию

$$F_1(t) \leq F_2(t) \text{ для любого } t.$$

Показать, что можно так задать на одном вероятностном пространстве случайные величины ξ_1 и ξ_2 с функциями распределения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ соответственно, что

$$P\{\xi_1 \geq \xi_2\} = 1.$$

3.51. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина ζ удовлетворяет условиям

$$P\{\zeta = \xi\} = P\{\zeta = \eta\} = \frac{1}{2}.$$

Найти максимально и минимально возможные значения $P\left\{\left|\zeta - \frac{1}{2}\right| \leq t\right\}$ и указать, при каких совместных распределениях ξ , η и ζ эти значения достигаются.

3.52. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одно и то же распределение с непрерывной функцией распределения $F(x)$, а случайная величина ζ удовлетворяет условиям

$$P\{\zeta = \xi\} = P\{\zeta = \eta\} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $m_\zeta = \sup\{x: P\{\zeta \leq x\} \leq 1/2\}$ — медиана распределения ζ . Найти минимальное и максимальное значения m_ζ и указать, при каких совместных распределениях ξ , η и ζ эти значения достигаются.

3.53. Пусть X, Y — независимые целочисленные случайные величины, $Z = X + Y$,

$$a = \min\{n: P\{Z = n\} > 0\},$$

$$b = \max\{n: P\{Z = n\} > 0\}.$$

Доказать, что

$$\min\{P\{Z = a\}, P\{Z = b\}\} \leq \frac{1}{4}.$$

§ 2. Математические ожидания

Задачи 3.54—3.60 содержат полезные для решения последующих задач формулы для математических ожиданий различных функций от случайных величин,

в задачах 3.61—3.80 используются прямые способы вычисления математических ожиданий, задачи 3.81—3.103 иллюстрируют возможности метода индикаторов (см. введение к гл. 3), в задачах 3.104—3.124 используются различные методы вычисления и оценок математических ожиданий, а само понятие математического ожидания применяется для решения вероятностных задач. Последняя группа задач (3.125—3.132) связана с математическими ожиданиями функций от зависимых случайных величин.

3.54. Случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X \geq k\}.$$

3.55. Случайная величина X принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что для любого целого $k \geq 2$

$$MX(X-1)\dots(X-k+1) = k \sum_{n=1}^{\infty} n^{(k-1)} P\{X > n\}.$$

3.56. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — совокупность событий, χ_i — индикатор события A_i ($i = 1, 2, \dots$), т. е.

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A_i \text{ происходит,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и $\xi = \chi_1 + \chi_2 + \dots$ — число одновременно происходящих событий из $A_1, A_2, \dots$. Доказать, что

$$\begin{aligned} M\xi^{(k)} &= k! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\} = \\ &= k! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} P\{\chi_{i_1} = \dots = \chi_{i_k} = 1\}. \end{aligned}$$

3.57*. Неотрицательная случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}.$$

Доказать, что

$$M\xi = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx.$$

3.58. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x) = P\{\xi \leq x\}$. Доказать, что

$$M\xi = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx.$$

3.59. Неотрицательная случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x) = P\{\xi \leq x\}$. Доказать, что для любого действительного $\alpha \neq 0$

$$M\xi^\alpha = |\alpha| \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (1 - F(x)) dx.$$

3.60. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x) = P\{\xi \leq x\}$. Показать, что если

$$F_{-1}(y) = \sup\{x: F(x) \leq y\},$$

то для любой интегрируемой функции $h(x)$

$$Mh(\xi) = \int_0^1 h(F_{-1}(y)) dy.$$

3.61. Совместное распределение ξ_1, ξ_2 определяется условиями $P\{\xi_1 \xi_2 = 0\} = 1$, $P\{\xi_i = 1\} = P\{\xi_i = -1\} = 1/4$, $i = 1, 2$. Найти $M\xi_1$, $M\xi_2$, $D\xi_1$, $D\xi_2$, $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

3.62. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$; $\eta_1 = \cos \xi$, $\eta_2 = \sin \xi$. Найти $\text{cov}(\eta_1, \eta_2)$. Являются ли η_1 и η_2 независимыми?

3.63. Случайная точка A имеет в круге радиуса R равномерное распределение. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния ξ точки A от центра.

3.64. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены:

$$\begin{aligned} P\{\xi_i = 1\} &= P\{\xi_i = -1\} = 1/4, \\ P\{\xi_i = 0\} &= 1/2, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

3.65. Случайные величины $e_1, e_2, \dots$ независимы и одинаково распределены:

$$\begin{aligned} P\{e_i = 0\} &= P\{e_i = 1\} = 1/2, \quad i = 1, 2, \dots, \\ \text{а } \delta_i &= e_i - e_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

а) Показать, что случайные величины $\delta_1, \delta_2, \dots$ распределены так же, как случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ в задаче 3.64, и что при любом $i = 1, 2, \dots$ случайные величины δ_i и δ_{i+1} независимы.

б) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $R_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$, $n \geq 2$.

3.66. Найти $M\xi$, $D\xi$, $M\xi^{(k)}$, если:

а) $P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, 2, \dots$;

б) $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, \dots, n$.

3.67. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и равномерно распределены в отрезке $[0, 1]$. Найти $P\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq x\}$ при $0 \leq x \leq 1$.

3.68. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и равномерно распределены в отрезке $[0, 1]$. Определим случайную величину v равной тому значению k , при котором впервые сумма $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k$ превзойдет 1. Найти Mv .

3.69. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы; $D\xi_i = \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, n$. При каких $c_1, \dots, c_n$, удовлетворяющих условиям $c_k \geq 0$, $c_1 + \dots + c_n = 1$, случайная величина $\eta_n = c_1 \xi_1 + \dots + c_n \xi_n$ имеет минимальную дисперсию? Найти минимальную дисперсию.

3.70. По известному «правилу трех сигм» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на три корня из дисперсии мала. Найти $P\{|\xi - M\xi| < 3\sqrt{D\xi}\}$, если ξ имеет:

а) нормальное распределение;

б) показательное распределение;

в) равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$;

г) $P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = 1/10$, $P\{\xi = 0\} = 9/10$;

д) распределение Пуассона с $M\xi = 0,09$.

3.71. Случайные величины ξ, η (возможно, зависимые) обладают конечными дисперсиями: $D\xi = \sigma_1^2$, $D\eta = \sigma_2^2$. Указать пределы, в которых может изменяться $D(\xi + \eta)$.

3.72. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ независимы. Положим

$$\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \zeta_n^* = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n.$$

Найти $M\zeta_n$, $M\zeta_n^*$, $D\zeta_n$, $D\zeta_n^*$, $\text{cov}(\zeta_n, \zeta_n^*)$, если:

$$M\xi_k = a, \quad D\xi_k = \sigma^2, \\ P\{\eta_k = 1\} = p, \quad P\{\eta_k = 0\} = q = 1 - p.$$

3.73. В экспедиции, рассчитанной на n дней, ежедневно от запаса продуктов нужно отделять соответствующую часть: в 1-й день $1/n$ -ю часть, во 2-й день — от остатка $1/(n-1)$ -ю часть и т. д. В действительности нужная часть продуктов отделяется с ошибкой. Пусть η_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) — часть от остатка продуктов, которая отделяется в k -й день. Предполагается, что величины η_k независимы, $M\eta_k = a_k = \frac{1}{n-k+1}$. Найти математическое ожидание случайной величины, равной части продуктов, оставшейся к последнему дню:

$$\zeta = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \dots (1 - \eta_{n-1}).$$

3.74. Вычислить математическое ожидание и дисперсию определителя $\Delta = |\xi_{ij}|_{i,j=1}^n$, элементы которого ξ_{ij} — независимые случайные величины с $M\xi_{ij} = 0$ и $D\xi_{ij} = \sigma^2$.

3.75. Пусть матрица $\Xi = \|\xi_{ij}\|_{i,j=1}^n$, где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие симметричные распределения (т. е. распределение ξ_i совпадает с распределением $-\xi_i$, $i = 1, \dots, n$). Показать, что если $M|\xi_i|^k < \infty$, $i = 1, \dots, n$, для целого $k \geq 1$, то $M\Xi^k$ — диагональная матрица.

3.76. Неотрицательная случайная величина ξ имеет монотонно убывающую выпуклую вниз плотность распределения $f(x)$, $f''(x) > 0$. Что можно сказать о знаках величин $M \sin \xi$, $M \cos \xi$?

3.77. Обозначим $\eta_n = \max\{\mu_n, n - \mu_n\}$, где μ_n — число успехов в схеме Бернулли с n испытаниями и с вероятностью успеха p . Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} M\eta_n$.

3.78. Пусть (ξ, η) — координаты случайной точки, имеющей равномерное распределение в области $D \subseteq R^2$. Найти коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$, если:

а) D — часть единичного круга, лежащая в первом квадранте: $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;

б) D — треугольник: $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

3.79. По последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ испытаний Бернулли ($P\{\xi_i = 1\} = p > 0$, $P\{\xi_i = 0\} = q = 1 - p > 0$, $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы) построим последовательность

пар $(\xi_1, \xi_2), (\xi_3, \xi_4), \dots$ и вычеркнем из этой новой последовательности все пары вида $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Для $k=1, 2, \dots$ положим η_k равным первому члену k -й невычеркнутой пары.

а) Показать, что $\eta_1, \eta_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин.

б) Найти математическое ожидание числа v членов исходной последовательности, использованных для того, чтобы определить значение η_1 .

3.80. По той же последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$, что в задаче 3.79, построим последовательность троек $(\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\xi_4, \xi_5, \xi_6), \dots$ и вычеркнем из нее все тройки вида $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$. Для $k=1, 2, \dots$ положим η_k равным 1, 2 или 3 в соответствии с номером того члена k -й невычеркнутой тройки, который отличается от двух остальных.

а) Показать, что $\eta_1, \eta_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, $P\{\eta_k = i\} = 1/3, i=1, 2, 3$, для $k=1, 2, \dots$

б) Найти математическое ожидание числа членов исходной последовательности, использованных для того, чтобы определить значение η_1 .

3.81. Обозначим через θ_r число циклов длины r в подстановке, случайно выбранной из множества всех $n!$ подстановок степени n . Найти: а) $M\theta_1, D\theta_1$; б) $M\theta_2$; в) $M\theta_r, (r \geq 1)$.

3.82. В урне содержится M_1 шаров с номером 1, M_2 шаров с номером 2, $\dots$, M_N шаров с номером N . По схеме случайного выбора без возвращения выбирается n шаров. Найти математическое ожидание числа появившихся номеров.

3.83. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, по схеме выбора без возвращения извлекается выборка объема n . Число белых шаров ξ в выборке имеет гипергеометрическое распределение:

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \text{ Найти } M\xi \text{ и } D\xi.$$

3.84. Из урны, содержащей M белых и $N-M$ черных шаров, по схеме случайного выбора без возвращения вынимаются все шары. Обозначим через τ_1 число шаров, извлеченных до появления 1-го белого шара (включая этот шар), через τ_i — число шаров, извлеченных после $(i-1)$ -го белого до появления i -го белого

включительно, τ_{M+1} — число шаров, извлеченных после M -го белого шара. Найти $M\tau_i$.

3.85. В N ячейках случайно размещаются n частиц. Каждая частица независимо от остальных с вероятностью $1/N$ может попасть в любую фиксированную ячейку. Обозначим через $\mu_0(n, N)$ число пустых ячеек. Найти $M\mu_0(n, N)$, $D\mu_0(n, N)$ и асимптотические формулы для них при $n, N \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \alpha \in (0, \infty)$.

3.86. В группе учатся 25 студентов. Предполагая, что дни рождения студентов независимы и равномерно распределены по 12 месяцам года, найти математическое ожидание и дисперсию числа месяцев, на которые не приходится ни один день рождения.

3.87. Для случайной величины $\mu_0(n, N)$, определенной в задаче 3.85, найти $M(\mu_0(n, N))^{(k)}$ при $k = 1, 2, \dots$ и $\lim M(\mu_0(n, N))^{(k)}$ при $n, N \rightarrow \infty$, $\frac{n}{N} \rightarrow \ln N \rightarrow \rightarrow \ln \frac{1}{\lambda}$, $0 < \lambda < \infty$.

3.88. По N ячейкам случайно размещаются n неразличимых частиц. Все размещения равновероятны. Обозначим через μ_r число ячеек, содержащих ровно r частиц. Для $M\mu_r$ найти точную формулу и асимптотическую формулу при $n, N \rightarrow \infty$, $n/N \rightarrow \alpha \in (0, \infty)$.

3.89. Пусть $\xi_{n,i}$ — число появлений i -го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами и вероятностью p_j появления j -го исхода в s -м испытании ($j = 1, \dots, N$; $s = 1, \dots, n$; $p_1 + \dots + p_N = 1$). Найти: а) $M\xi_{n,i}$; б) $D\xi_{n,i}$; в) $\text{cov}(\xi_{n,i}, \xi_{n,j})$ ($i \neq j$).

3.90. Сопоставим описанной в задаче 3.89 последовательности n независимых испытаний процесс размещения n частиц по N ячейкам, интерпретируя появление j -го исхода в k -м испытании как попадание k -й частицы в j -ю ячейку. Обозначим через $\mu_r = \mu_r(n; p_1, \dots, p_N)$ число ячеек, в которых после размещения n частиц оказалось ровно по $r = 0, 1, \dots$ частиц. Найти: а) $M\mu_0$; б) $M\mu_r$; в) $\min_{p_1, \dots, p_N} M\mu_0(n; p_1, \dots, p_N)$.

3.91. В N ячейках последовательно размещают частицы. Каждая частица независимо от остальных попадает в любую фиксированную ячейку с вероятностью $1/N$. Обозначим через v_k минимальный номер

частицы, после размещения которой число занятых (т. е. не пустых) ячеек станет равным k . Найти Mv_k , Dv_k и асимптотическую формулу для Mv_N при $N \rightarrow \infty$.

3.92. По маршруту ходит N автобусов без кондуктора. В каждом автобусе имеется касса, в которой перед выходом в рейс было r билетов. Всего эти автобусы перевезли n пассажиров. Найти математическое ожидание числа ξ пассажиров, которым не досталось билетов, предполагая, что каждый пассажир независимо от остальных может сесть в любой из автобусов с одной и той же вероятностью $1/N$.

3.93. В партии n изделий, каждое из которых независимо от остальных с вероятностью p удовлетворяет стандарту, а с вероятностью $q = 1 - p$ — не удовлетворяет ему. Изделия проходят проверку, описанную в задаче 2.21. За каждое изделие, удовлетворяющее стандарту и прошедшее проверку, предприятие получает a рублей; за изделие, прошедшее проверку, но не удовлетворяющее стандарту, уплачивается штраф b рублей; за изделие, не прошедшее проверку (забракованное), уплачивается штраф c рублей. Найти математическое ожидание прибыли предприятия, полученной за партию из n изделий.

3.94. Два участника лотереи «Спортлото-6» купили по 7 карточек. Первый участник выбрал 7 различных номеров и образовал из них семь различных шестерок номеров, которыми заполнил карточки. Второй участник выбрал 42 различных номера и заполнил карточки так, что любые две не имеют общих номеров. Обозначим через η_k ($k = 1, 2$) число карточек k -го участника, на которых ровно по 3 номера совпали с номерами, выигравшими в тираже. Найти $M\eta_1$, $M\eta_2$, $D\eta_1$, $D\eta_2$, $D\eta_1/D\eta_2$.

3.95. Продано n карточек лотереи «Спортлото-6». Обозначим $\xi_{n,i}$ число карточек, на которых угадано ровно i номеров ($i = 0, 1, \dots, 6$). Найти $M\xi_{n,i}$, $D\xi_{n,i}$. Найти вероятность того, что хотя бы на одной карточке будут угаданы все номера. Рассмотреть два случая:

а) Все проданные карточки заполняются равновероятно и независимо.

б) Каждый из m участников имеет r карточек, которые он заполняет одинаково, но независимо от остальных участников, $n = mr$.

3.96. На бесконечный лист клетчатой бумаги (сторона клеточки равна 1) случайно бросается круг единичного радиуса. Считая, что центр круга равномерно распределен на том единичном квадрате, на который он попал, найти математическое ожидание числа ξ точек с целочисленными координатами (x, y) , покрытых этим кругом.

3.97. Каждую целочисленную точку числовой оси независимо от остальных назовем *белой* с вероятностью p и *черной* с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть S — множество всех таких целочисленных точек x , что расстояние от x до ближайшей черной точки (включая x) не меньше расстояния от x до начала координат. Найти математическое ожидание числа $|S|$ элементов множества S .

3.98. Точки $C_1, \dots, C_n$ независимы и имеют равномерное распределение в круге K с центром O и радиусом 1. Пусть случайное множество A состоит из тех и только тех точек круга, которые находятся ближе к центру O , чем к границе круга и к любой из точек $C_1, \dots, C_n$. Найти математическое ожидание площади ξ множества A .

3.99. На плоскость независимо брошено N кругов радиуса r так, что центры этих кругов равномерно распределены в круге радиуса R . Обозначим через μ_m площадь множества точек плоскости, покрытых ровно m кругами. Найти

$$\lim_{N, R \rightarrow \infty} \frac{\mu_m}{\pi R^2}, \quad \text{если} \quad N \left(\frac{r}{R} \right)^2 \rightarrow \lambda.$$

3.100. В схеме Бернулли с n испытаниями и с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$ найти асимптотические формулы (при $n \rightarrow \infty$) для математического ожидания и дисперсии числа μ_{00} появлений цепочек НН из двух неудач подряд (мы будем считать, что при i -м испытании появилась цепочка НН, если при $(i-1)$ -м и при i -м испытаниях были неудачи).

3.101. В схеме Бернулли задачи 3.100 найти асимптотические формулы (при $n \rightarrow \infty$) для математического ожидания и дисперсии числа μ_{111} появлений цепочек УУУ из трех успехов подряд (мы будем считать, что при i -м испытании появилась цепочка УУУ, если при $(i-2)$ -м $(i-1)$ -м и i -м испытаниях были успехи).

3.102. Пусть проведено n испытаний по той же схеме Бернулли, что в задачах 3.100, 3.101. Считая для удобства, что дополнительные испытания с номерами 0 и $n+1$ закончились неудачами, введем понятие серии успехов как такой цепочки последовательных испытаний, в которой каждое испытание закончилось успехом, а испытание, предшествующее цепочке, и испытание, следующее за ней, — неудачей. Пусть η_n — число серий успехов в последовательности n испытаний Бернулли. Найти: а) $P\{\eta_n = 0\}$; б) $P\{\eta_n = 1\}$; в) $M\eta_n$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} D\eta_n$.

3.103. Из 30 чисел $(1, 2, \dots, 29, 30)$ по схеме равновероятного выбора без возвращения отбираются 10 чисел. Найти математическое ожидание суммы выбранных чисел.

3.104. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$ — построенный по $\xi_1, \dots, \xi_n$ вариационный ряд, т. е. значения $\xi_1, \dots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания. Найти плотность $p_k(x)$ распределения $\xi_{(k)}$, $M\xi_{(k)}^k$ ($k = 1, 2, \dots$), $D\xi_{(k)}$.

3.105. Пусть $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по независимым случайным величинам $\xi_1, \dots, \xi_n$, имеющим равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ (см. задачу 3.104). Найти ковариацию и коэффициент корреляции $\xi_{(i)}$ и $\xi_{(j)}$. При каких условиях $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\xi_{(i)}, \xi_{(j)}) = 0$?

3.106. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in R^k$ — векторная случайная величина. Доказать, что если $M|\xi_i| < \infty$, $i = 1, \dots, k$, то

$$|M\xi| \leq M|\xi|.$$

3.107. Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ — случайная величина, принимающая комплексные значения. Доказать, что если $M|\xi| < \infty$, $M|\eta| < \infty$, то $|M\zeta| \leq M|\zeta|$.

3.108. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Доказать, что если все эти величины одинаково коррелированы, т. е. $\rho(\xi_i, \xi_j) = C$ при любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, то $C \geq -\frac{1}{n-1}$.

3.109*. Доказать, что если $M|\xi|^k < \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^k P\{|\xi| > x\} = 0.$$

3.110. Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ положительны и имеют одинаковое невырожденное распределение. Обозначим $\eta_k = \frac{\xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n}$. Найти: а) математическое ожидание η_k ; б) коэффициент корреляции η_k и η_i ; в) коэффициент корреляции $\eta_1 + \dots + \eta_k$ и $\eta_1 + \dots + \eta_l$.

3.111. Найти на прямой такую точку B , чтобы математическое ожидание расстояния между ней и случайной точкой A , распределение координаты ξ которой имеет непрерывную плотность, было минимальным.

3.112. Случайные величины ξ, η имеют непрерывную совместную плотность распределения. Как выбрать точку $B = (x, y) \in R^2$, чтобы функция $\varphi(x, y) = M\{|\xi - x| + |\eta - y|\}$ была минимальной?

3.113. Случайная величина ξ имеет конечный второй момент $M\xi^2$. Найти $\min_x M(\xi - x)^2$ и то значение x , при котором этот минимум достигается.

3.114. Будем говорить, что случайная величина ξ сосредоточена на отрезке $[a, b]$, если $P\{a \leq \xi \leq b\} = 1$ и при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{a \leq \xi < a + \varepsilon\} > 0 \text{ и } P\{b - \varepsilon < \xi \leq b\} > 0.$$

Доказать, что дисперсия случайной величины, сосредоточенной на отрезке длины l , не превосходит $l^2/4$.

3.115. Доказать, что если случайные величины η_1, η_2 независимы и η_i сосредоточена на отрезке длины l_i , $i = 1, 2$, то сумма $\eta_1 + \eta_2$ сосредоточена на отрезке длины $l = l_1 + l_2$.

3.116. Говорят, что случайная величина ξ имеет *безгранично делимое распределение*, если при любом натуральном n ее можно представить в виде суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин. Доказать, что невырожденное безгранично делимое распределение не может быть сосредоточено на конечном отрезке.

3.117. Пусть вероятностное распределение P на плоскости R^2 таково, что если точки $X_1, X_2, X_3 \in R^2$

независимы и имеют распределение P , то

$$P\{X_1, X_2, X_3 \text{ лежат на одной прямой}\} = 0.$$

Показать, что если точки $X_1, X_2, X_3 \in R^3$ независимы и имеют распределение P , то

$$P_3 = P\{\text{один из углов } \triangle X_1 X_2 X_3 \text{ не меньше } 120^\circ\} \geq 1/20.$$

3.118. Пусть вероятностное распределение P на плоскости такое же, как в задаче 3.117. Показать, что если точки $X_1, X_2, X_3, X_4 \in R^3$ независимы и имеют распределение P , то

$$P_4 = P\{X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ образуют выпуклый четырехугольник}\} \geq 1/5.$$

3.119. Показать, что если ξ — действительная случайная величина с конечным математическим ожиданием и $f(x)$ — функция, выпуклая вниз, то

$$Mf(\xi) \geq f(M\xi),$$

а если $f(x)$ выпукла вверх, то

$$Mf(\xi) \leq f(M\xi).$$

3.120. Показать, что для любых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ с конечными r -ми ($r \geq 1$) моментами справедливо соотношение

$$M|\xi_1 + \dots + \xi_k|^r \leq k^{r-1}(M|\xi_1|^r + \dots + M|\xi_k|^r).$$

3.121. Доказать, что при $1 \leq r \leq 2$ справедливо неравенство

$$|x+y|^r + |x-y|^r \leq 2(|x|^r + |y|^r), \quad -\infty < x, y < \infty,$$

и с его помощью показать, что если случайные величины ξ и η независимы и распределение η симметрично (т. е. распределения η и $-\eta$ совпадают), то при любом r , $1 \leq r \leq 2$,

$$M|\xi + \eta|^r \leq M|\xi|^r + M|\eta|^r.$$

3.122. Показать, что если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, имеют симметричные распределения и $M|\xi_i|^r < \infty$, $i = 1, \dots, n$, для некоторого $r \in [1, 2]$, то

$$M|\xi_1 + \dots + \xi_n|^r \leq M|\xi_1|^r + \dots + M|\xi_n|^r.$$

3.123*. Показать, что если случайные величины ξ и η независимы, $M\eta = 0$, и $M|\xi|^r < \infty$, $M|\eta|^r < \infty$ для некоторого действительного $r \geq 1$, то

$$M|\xi + \eta|^r \geq M|\xi|^r.$$

8.124. Используя задачи 3.120—3.123, доказать, что если $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $M\xi_i = 0$, $M|\xi_i|^r < \infty$, $i = 1, \dots, n$, для некоторого r , $1 \leq r \leq 2$, то

$$M|\xi_1 + \dots + \xi_n|^r \leq 2^r (M|\xi_1|^r + \dots + M|\xi_n|^r).$$

3.125. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ принимает значения в R^k , и существует такой набор чисел

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, 0, \dots, 0),$$

что $P\{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k + \alpha_0 = 0\} = 1$. Доказать, что если все элементы матрицы ковариаций $B = \|b_{ij}\|$ компонент вектора ξ конечны, то:

а) $\det B = 0$;

б) $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) B = B(\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$, где T — знак транспонирования.

3.126*. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ принимает значения в R^k и имеет математическое ожидание $m \in R^k$ и матрицу ковариаций $B = \|b_{ij}\|$. Доказать, что:

а) матрица B неотрицательно определена, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^k b_{ij} a_i a_j = (a, Ba) \geq 0 \text{ для любого } a \in R^k;$$

б) если ранг матрицы B равен r , то существует r -мерная гиперплоскость $L_r \subset R^k$, для которой $P\{\xi \in L_r\} = 1$, и $P\{\xi \in L_{r-1}\} < 1$ для любой $(r-1)$ -мерной гиперплоскости $L_{r-1} \subset R^k$.

3.127. Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_n$ таковы, что $P\{A_i\} = p$, $i = 1, \dots, n$, и событие $B_m = \{\text{происходит не менее } m \text{ из событий } A_1, \dots, A_n\}$. Показать, что

$$\max \left\{ 0, \frac{np - m + 1}{n - m + 1} \right\} \leq P\{B_m\} \leq \min \left\{ 1, \frac{np}{m} \right\}.$$

3.128. Случайные величины ξ и η заданы на одном вероятностном пространстве. Описать множество возможных значений $P\{\xi \leq \eta\}$ в следующих случаях:

а) $M\xi = 1$, $M\eta = 10$;

б) ξ и η одинаково распределены;

в) ξ распределена равномерно на $[0, 1]$, а η — равномерно на $[0, a]$, $a \neq 1$.

3.129. Случайные величины ξ и η имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что при любом характере зависимости между ξ и η

$$M|\xi - \eta| \leq 1/2.$$

3.130. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина ζ удовлетворяет условию

$$P\{\zeta = \xi\} = P\{\zeta = \eta\} = 1/2.$$

Указать совместные распределения ξ , η , ζ , при которых достигаются экстремальные значения $M\zeta$, и найти максимальное и минимальное возможные значения $M\zeta$.

3.131. Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x)$, случайная величина χ принимает только значения 0 и 1: $P\{\chi = 1\} = a$, $P\{\chi = 0\} = 1 - a$. Указать совместные распределения ξ и χ , при которых достигаются экстремальные значения $M\xi\chi$, и найти эти экстремальные значения.

3.132. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, а случайная величина ζ удовлетворяет условию

$$P\{\zeta = \xi\} = p \leq 1/2, \quad P\{\zeta = \eta\} = 1 - p.$$

Указать совместные распределения ξ , η , ζ , при которых достигаются экстремальные значения $M\zeta$, и найти эти экстремальные значения.

§ 3. Условные распределения

3.133. Случайные величины ξ и η независимы;

$$P\{\xi = k\} = P\{\eta = k\} = pq^{k-1}, \\ q = 1 - p, \quad 0 < p < 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Найти:

- а) $P\{\xi = \eta\}$; б) $P\{\xi > \eta\}$; в) $P\{\xi < \eta\}$;
 г) $P\{\xi = k | \xi > \eta\}$; д) $P\{\xi = k | \xi < \eta\}$;
 е) $P\{\xi = k | \xi = \eta\}$; ж) $P\{\xi = k | \xi + \eta = l\}$;
 з) $M\{\xi | \xi + \eta = l\}$, $l \geq 2$.

3.134. Случайные величины ξ , η независимы и одинаково распределены. Найти условную плотность $p_{\xi|\xi+\eta=z}(x)$ распределения ξ при условии $\xi + \eta = z$ в следующих случаях: а) ξ и η имеют показательное распределение с плотностью $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$; б) ξ и η равномерно распределены в $[0, 1]$; в) ξ и η имеют распределение с плотностью $\lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$.

3.135. Найти условную дисперсию $D\{\xi|\xi + \eta = z\}$ в случаях а), б), в), определенных в предыдущей задаче.

3.136. Случайные величины ξ , η независимы и одинаково распределены. Найти $M\{\xi|\xi + \eta = z\}$. Разобрать отдельно случаи, когда ξ имеет дискретное распределение или положительную плотность.

3.137. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Найти: а) $P\{\xi_1 + \dots + \xi_k = m | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}$; б) $M\{\xi_1 + \dots + \xi_k | \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}$.

3.138. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, сначала извлекается без возвращения выборка объема n , а затем из этой выборки извлекается без возвращения выборка объема $n_0 < n$. Найти закон распределения числа белых шаров ξ во второй выборке.

3.139. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и распределены нормально с одинаковыми параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$; положим $\eta = \frac{\xi_1 + \xi_2 \xi_3}{\sqrt{1 + \xi_3^2}}$. Найти плотность распределения η .

3.140. На отрезок $[0, a]$ брошено три точки, их координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, a]$. Найти двумерную функцию распределения ξ_2, ξ_3 при условии, что $\xi_1 = z \leq \min\{\xi_2, \xi_3\}$, $0 < z < a$.

3.141. Пусть $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}), \dots, \xi_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2})$ — независимые случайные точки, имеющие равномерное распределение в квадрате $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. Назовем точку $\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$ *границкой*, если для любого $j = 1, \dots, n$ выполняется хотя бы одно из условий

$$\xi_{j,1} \leq \xi_{i,1}, \xi_{j,2} \leq \xi_{i,2},$$

и обозначим через x_n число граничных точек. Найти Mx_n .

3.142. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $a > 0$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$, случайная величина v не зависит от $\xi_1, \xi_2, \dots$ и принимает целые положительные значения, $Mv = b$, а

$$\tau = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v.$$

Найти $M\tau$ и (при дополнительном условии $Dv = \delta^2$) $D\tau$.

3.143. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 . Показать, что при любых $x > 0$, $C > 0$

$$P\left\{\xi - x > \frac{C}{x} \mid \xi > x\right\} < e^{-C/\sigma^2}.$$

3.144. В схеме Бернулли с вероятностью p исхода 1 и вероятностью $q = 1 - p$ исхода 0 найти математическое ожидание числа v_{00} испытаний до первого появления цепочки из двух нулей. В частности, вычислить Mv_{00} при $p = 1/2$.

3.145. В схеме Бернулли предыдущей задачи найти математическое ожидание числа v_{111} испытаний до первого появления цепочки из трех единиц. В частности, вычислить это математическое ожидание при $p = 1/2$.

3.146. В схеме Бернулли задачи 3.144 найти математическое ожидание числа v_{01} испытаний до первого появления цепочки 01. В частности, вычислить это математическое ожидание при $p = 1/2$.

3.147. Точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности единичной длины. Найти вероятность того, что длина наименьшей дуги, содержащей все эти точки, не больше $x \leq 1/2$.

3.148. Точки $A_1, \dots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности S с центром O . Найти вероятность того, что O лежит внутри выпуклого многоугольника с вершинами $A_1, \dots, A_n$.

3.149. Точки $A_1, \dots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности с центром O , а случайная величина v равна наименьшему n , при котором выпуклый многоугольник с вершинами $A_1, \dots, A_n$ содержит O . Найти Mv и Dv .

3.150. Точки $A_1, \dots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение на окружности радиуса R . Найти вероятность того, что выпуклый многоугольник с вершинами $A_1, \dots, A_n$ имеет непустое пересечение

чение с окружностью радиуса $r = R/2$, concentричной исходной окружности.

3.151. Точки $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) независимы и имеют равномерное распределение на окружности радиуса r . Пусть $A_{(1)} = A_1, A_{(2)}, A_{(3)}, \dots, A_{(n)}$ — точки $A_1, \dots, A_n$, расположенные в том порядке, в котором они встречаются при обходе окружности по часовой стрелке. Найти закон распределения длины ξ дуги $A_{(1)}A_{(2)}$ и значения $M\xi, D\xi$.

3.152. Пусть выполнены условия задачи 3.151 и ξ_i — длина дуги $A_{(i)}A_{(i+1)}$. Найти совместное распределение и коэффициент корреляции ξ_1, ξ_2 .

3.153. Пусть выполнены условия задачи 3.152. Найти закон совместного распределения $\xi_1, \dots, \xi_k$ при $k \leq n$.

3.154. Пусть выполнены условия задачи 3.152. Показать, что совместное распределение $\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}$ с $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ совпадает с распределением $\xi_1, \dots, \xi_k$.

3.155. Пусть выполнены условия задачи 3.152 и v — число дуг $A_{(i)}A_{(i+1)}$ длины больше Δ , $0 \leq \Delta \leq 2\pi r$. Найти Mv, Dv и асимптотические формулы для них при

$$r = \frac{\pi}{2\pi\lambda}, \quad \pi \rightarrow \infty.$$

3.156. Пусть выполнены условия задачи 3.152. Найти закон распределения случайной величины

$$\eta_n = \max \{ \xi_1, \dots, \xi_n \}.$$

3.157. Пусть выполнены условия задачи 3.156. Найти $M\eta_n$ и асимптотическую формулу для $M\eta_n$ при $n \rightarrow \infty$.

3.158. Точки A, B, C независимы и имеют равномерное распределение на окружности единичного радиуса. Пусть S — площадь $\triangle ABC$, p — его периметр, r — радиус вписанного круга. Найти MS, Mp, Mr .

3.159. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы,

$$M\xi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$M \{ S_n^2 | |S_k| \geq \varepsilon \} \geq \varepsilon^2.$$

3.160. Неравенство Колмогорова. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы,

$$M\xi_i = 0, \quad D\xi_i = \sigma^2 < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

и $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$. Используя результат предыдущей задачи, показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{DS_n}{\varepsilon^2}.$$

§ 4. Нормальное распределение

3.161. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Какое из двух событий $\{|\xi| \leq 0,7\}$ или $\{|\xi| \geq 0,7\}$ имеет большую вероятность?

3.162. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (0, 1). Что больше:

$$P\{-0,5 \leq \xi \leq -0,1\} \quad \text{или} \quad P\{1 \leq \xi \leq 2\}?$$

3.163. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 . Найти $M\xi^k, \quad k = 1, 2, \dots$

3.164. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2 . Показать, что при любом $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left\{ \frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right\} < P\{\xi \geq x\} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma}{x}.$$

3.165. Случайная величина ξ распределена нормально с параметрами (a, σ^2) . Найти:

а) плотность распределения величины $\eta_1 = \xi^2$ при $a = 0$;

б) плотность распределения величины $\eta_2 = e^{\xi}$ при произвольных a, σ .

3.166. Найти $M\xi$ и $D\xi$, если $\ln \xi$ имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2) (в этом случае говорят, что ξ имеет логарифмически нормальное распределение).

3.167. Некоторая категория людей имеет средний вес m кг и среднее квадратическое отклонение веса 3 кг. Для случаев $m = 60$ и $m = 10$ определить вероятность того, что вес случайно взятого человека отличается от m не более чем на 5 кг, если: а) вес

имеет нормальное распределение; б) вес имеет логарифмически нормальное распределение.

3.168. Для случайных величин η_1, η_2 , определенных в 3.165, найти $M\eta_1^k, M\eta_2^k$.

3.169. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Найти $M\xi \cos \xi, M \frac{\xi}{1+\xi^2}, M \sin \xi$.

3.170. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Найти $M \cos \xi, D \cos \xi$.

3.171. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Что больше: $D \sin \xi$ или $D \cos \xi$?

3.172. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $1/2$. Найти $M \cos(\xi^2), M \sin(\xi^2)$.

3.173. Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и нормально распределены с параметрами (0, 1). Являются ли независимыми величины $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2, \eta_2 = \xi_1 - \xi_2$?

3.174. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами (0, 1). Положим

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq 1, \\ -\xi, & \text{если } |\xi| > 1. \end{cases}$$

а) Найти закон распределения η .

б) Имеет ли величина $\xi + \eta$ нормальное распределение?

3.175. Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (0, 1). Найти математическое ожидание величины $\eta = e^{(\xi_1^2 + \xi_2^2)/2} (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2)^{-3/2}$.

3.176. Случайные величины ξ, η независимы и нормально распределены с параметрами (0, σ_1^2), (0, σ_2^2) соответственно. Вычислить при $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$ вероятность попадания случайной точки $(\xi, \eta) \in R^2$ в следующие области: а) прямоугольник $|x| \leq 1, |y| \leq 2$; б) прямоугольник $0 \leq x \leq 2, |y| \leq 2$; в) прямоугольник $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$; г) трапецию $x + y \leq 0, |x| \leq 1, y \geq -2$; д) область $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, ограниченную эллипсом, вписанным в прямоугольник $|x| \leq 1, |y| \leq$

≤ 2 ; е) область $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{4c^2} \leq 1$, ограниченную эллипсом, описанным около прямоугольника $|x| \leq 1, |y| \leq 2$.

3.177. Мост через реку представляет собой прямоугольник, координаты которого в декартовой системе координат удовлетворяют неравенствам: $|x| \leq 10, |y| \leq 100$. При артиллерийском обстреле моста точка попадания снаряда (ξ, η) в той же системе координат имеет двумерное нормальное распределение с независимыми координатами и со средними квадратическими отклонениями $\sigma_\xi = 10, \sigma_\eta = 40$. «Точкой прицеливания» назовем (M_ξ, M_η) . Определить вероятность попадания в мост при одном выстреле, если точка прицеливания равна: а) $(0, 0)$; б) $(10, 0)$; в) $(5, 20)$.

3.178. Случайные величины ξ, η имеют сферически симметричное нормальное распределение с $D\xi = D\eta = 4$. Найти вероятность попадания точки (ξ, η) в прямоугольник с вершинами $(0; 3), (4; 0), (1, 8; 5, 4), (5, 8; 2, 4)$.

3.179. Случайные величины ξ, η имеют двумерное нормальное сферически симметричное распределение с $M_\xi = M_\eta = 0, D\xi = D\eta = 1$. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в:

а) треугольник с вершинами $(0; 0), (1; 1), (2; 0)$;

б) треугольник с вершинами $(0, 2), (2, 0), (2, 2)$;

в) треугольник с вершинами $(2, 0), (1, 1), (1, 2)$.

3.180. Случайная точка (ξ, η) имеет сферически симметричное нормальное распределение с $D\xi = D\eta = 1$. Найти совместную плотность распределения ее полярных координат.

3.181. Случайная точка (ξ, η) имеет сферически симметричное нормальное распределение с $D\xi = D\eta = 1$. Найти вероятность попадания (ξ, η) :

а) в квадрат $C = \{(x, y): |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$;

б) во вписанный в C круг;

в) в описанный около C круг.

3.182. Случайные величины ξ, η независимы и нормально распределены с $M_\xi = M_\eta = 0, D\xi = D\eta = 4$. Найти вероятность того, что случайная точка (ξ, η) попадет в:

а) кольцо $\{(x, y): 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$;

б) область $\{(x, y): 2 \leq \min(|x|, |y|), \max(|x|, |y|) \leq 3\}$;

в) область $\{(x, y): 2 \leq |x| + |y| \leq 3\}$.

3.183. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ имеет двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий, область A — угол с вершиной в начале координат и раствором α . Доказать, что если область A' симметрична области A относительно начала координат, то $P\{\xi \in A'\} = P\{\xi \in A\}$.

3.184. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$ имеет невырожденное двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\|\sigma_{ij}\|_{i,j=1,2}$, $|\sigma_{12}|^2 < \sigma_{11}\sigma_{22}$. Найти

$$\begin{aligned} p_{00} &= P\{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\}, & p_{01} &= P\{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \leq 0\}, \\ p_{10} &= P\{\xi_1 \leq 0, \xi_2 \geq 0\}, & p_{11} &= P\{\xi_1 \leq 0, \xi_2 \leq 0\}. \end{aligned}$$

3.185. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Найти минимальное значение k , при котором

$$P\{\max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \dots, |\xi_k|\} \geq 2\} \geq 1/2.$$

3.186. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, имеет k -мерное нормальное распределение с математическим ожиданием $a \in R^k$ и ковариационной матрицей A . Что больше: $M \ln |\xi_1 \dots \xi_k|$, $\ln |M \xi_1 \dots \xi_k|$ или $\ln M |\xi_1 \dots \xi_k|$?

3.187. Случайная величина $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, имеющая нормальное распределение в R^n с нулевым математическим ожиданием и невырожденной матрицей ковариаций $A = \|a_{ij}\|$, не зависит от случайной действительной величины η , имеющей функцию распределения $F(x)$, $M\eta^2 = 1$. Найти математическое ожидание и матрицу ковариаций случайной величины $\eta\xi = (\eta\xi_1, \dots, \eta\xi_n)$.

Глава 4

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

ПРОИЗВОДЯЩИЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В курсе математического анализа рассматриваются различные виды сходимости последовательностей функций: равномерная сходимость, сходимость почти всюду, сходимость в среднем квадратичном и т. п. По аналогии с этим и в теории вероятностей рассматриваются различные виды сходимости последовательностей случайных величин (как функций, заданных на пространстве

элементарных событий), а также сходимость функций распределения.

Приведем определения тех видов сходимости последовательностей случайных величин, которые используются в приведенных ниже задачах. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ заданы случайные величины $\xi_n = \xi_n(\omega)$ ($\omega \in \Omega$, $n = 1, 2, \dots$) и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ с вероятностью 1 (почти наверное), если

$$P \left\{ \omega \in \Omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \right\} = 1.$$

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \} = 0.$$

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ в среднем квадратичном, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M |\xi_n - \xi|^2 = 0.$$

Последовательность функций распределения $F_n(x) = P \{ \xi_n \leq x \}$, $n = 1, 2, \dots$, слабо сходится к функции распределения $F(x) = P \{ \xi \leq x \}$, если для любой точки x , где $F(x)$ непрерывна, выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

(в этом случае говорят также, что последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к ξ по распределению; при этом $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ могут быть заданы на различных вероятностных пространствах).

Все эти определения естественным образом распространяются и на случай, когда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ и ξ принимают векторные значения.

Понятие сходимости по вероятности чаще всего используется, когда предельная случайная величина ξ имеет вырожденное распределение ($P \{ \xi = a \} = 1$ для некоторого числа a) и

$$\xi_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n},$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — случайные величины (не обязательно независимые или одинаково распределенные): если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n} - a \right| > \varepsilon \right\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, (4.1)

то говорят, что последовательность $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ удовлетворяет закону больших чисел. Из неравенства Чебышева

$$P \{ |\xi - M\xi| \geq \varepsilon \} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

нетрудно вывести, что если случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ не коррелированы, $M\zeta_n = a$, $D\zeta_n = \sigma^2 < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$), то (4.1) выполняется; однако закону больших чисел могут удовлетворять и другие последовательности случайных величин (см. задачи § 1).

Если вместо (4.1) выполнено соотношение

$$P \left\{ \omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\zeta_1(\omega) + \dots + \zeta_n(\omega)}{n} = a \right\} = 1, \quad (4.2)$$

т. е. последовательность $\frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n}{n}$ сходится к числу a с вероятностью 1, то говорят, что последовательность $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ удовлетворяет *усиленному закону больших чисел*. Соотношение (4.2) выполняется, например, если случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ не коррелированы, $M\zeta_n = a$, $D\zeta_n = \sigma^2 < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$), см. задачи 4.20—4.22.

Пример сходимости по распределению дает

Центральная предельная теорема. Если $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $M\zeta_n = a$, $D\zeta_n = \sigma^2 < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$), то для любого x , $-\infty < x < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\zeta_1 + \dots + \zeta_n - na}{\sigma \sqrt{n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \Phi(x).$$

Сходимость распределений центрированных и нормированных сумм случайных величин к стандартному нормальному распределению имеет место и при других предположениях о случайных слагаемых (см. задачи 4.124 и другие задачи из § 5).

Другим важным примером сходимости по распределению являются теоремы о сходимости к распределению Пуассона (см. задачи 4.101 и 4.109).

Практическое значение предельных теорем состоит в том, что они позволяют аппроксимировать распределения допредельных случайных величин ξ_n (при достаточно больших n) распределением предельной случайной величины ξ ; это особенно полезно в тех случаях, когда аналитическая запись функции распределения ξ проще выражения для функции распределения ξ_n . Следует иметь в виду, однако, что вопрос о том, достаточно ли велико n для того, чтобы обеспечить нужную точность приближения, в каждом случае требует особого исследования; см., например, задачи 2.54, 2.55, а также 4.103.

Доказательства предельных теорем могут использоваться как прямые вероятностные методы (изучение распределений допредельных случайных величин или их моментов, см. задачи из § 2), так и аналитические методы, основанные на использовании свойств производящих или характеристических функций распределений допредельных случайных величин (см. задачи из § 5).

Если случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения, то *производящей функцией* распределения ξ называется функция комплексного переменного z

$$\varphi_{\xi}(z) = Mz^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{\xi = k\}, \quad |z| \leq 1;$$

производящую функцию можно рассматривать и в случае, когда ξ принимает и отрицательные значения, если область сходимости ряда в правой части последнего равенства отлична от окружности $|z| = 1$.

Если случайная величина ξ принимает действительные значения, то *характеристической функцией* распределения ξ называется функция действительного переменного t

$$f_{\xi}(t) = Me^{it\xi}, \quad -\infty < t < \infty;$$

в частности, если распределение ξ абсолютно непрерывно и имеет плотность $p_{\xi}(x)$, то

$$f_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx.$$

Перечислим важнейшие свойства производящих и характеристических функций:

1. Если $P\{|\xi| < \infty\} = 1$, то $f_{\xi}(0) = \varphi_{\xi}(1) = 1$.
2. Если $M|\xi|^k < \infty$ для некоторого целого $k \geq 1$, то

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} f_{\xi}(t) \right|_{t=0} = i^k M\xi^k, \quad \left. \frac{d^k}{dz^k} \varphi_{\xi}(z) \right|_{z=1-} = M\xi_0^{(k)}$$

(по поводу обращения этих утверждений см. задачи 4.65, 4.92).

3. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, то

$$f_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(t) = f_{\xi_1}(t) \dots f_{\xi_n}(t), \\ \varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(z) = \varphi_{\xi_1}(z) \dots \varphi_{\xi_n}(z)$$

(обратное утверждение неверно, см. задачу 4.89).

4. Если производящие (или характеристические) функции распределений случайных величин ξ_1 и ξ_2 совпадают, то совпадают и функции распределения ξ_1 и ξ_2 .

5. (Теорема непрерывности.) Последовательность $F_n(x) = P\{\xi_n \leq x\}$ ($n = 1, 2, \dots$) функций распределения слабо сходится к функции распределения $F(x) = P\{\xi \leq x\}$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad \text{где} \quad f_n(t) = M e^{it\xi_n}.$$

В этом случае $f(t) = M e^{it\xi}$, и сходимость $f_n(t) \rightarrow f(t)$ равномерна на каждом конечном интервале значений t .

6. (Формулы обращения.) Если функция $f(t) = M e^{it\xi}$ абсолютно интегрируема, то распределение случайной величины ξ имеет ограниченную непрерывную плотность $p(x)$ и

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt.$$

Если x и $x+h$ — точки непрерывности функции распределения $F(x) = P\{\xi \leq x\}$, то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a f(t) e^{-itx/h} \frac{1 - e^{-it} h}{it h} e^{-itx} dx.$$

Производящие и характеристические функции векторных случайных величин $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in R^k$ определяются формулами

$$f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) = M \exp \{i(t_1 \xi_1 + \dots + t_k \xi_k)\},$$

$$\varphi_{\xi}(z_1, \dots, z_k) = M z_1^{\xi_1} \dots z_k^{\xi_k}.$$

Их свойства аналогичны свойствам производящих и характеристических функций одномерных случайных величин. Например, если $M |\xi_1|^{r_1} \dots |\xi_k|^{r_k} < \infty$ для целых $r_1, \dots, r_k \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_k}}{\partial t_1^{r_1} \dots \partial t_k^{r_k}} f_{\xi}(t_1, \dots, t_k) \Big|_{t_1 = \dots = t_k = 0} &= \\ &= i^{r_1 + \dots + r_k} M \xi_1^{r_1} \dots \xi_k^{r_k}, \\ \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_k}}{\partial z_1^{r_1} \dots \partial z_k^{r_k}} \varphi_{\xi}(z_1, \dots, z_k) \Big|_{z_1 = \dots = z_k = 1} &= M \xi_1^{r_1} \dots \xi_k^{r_k}. \end{aligned}$$

Таблицы А и Б содержат формулы для производящих и характеристических функций наиболее часто встречающихся распределений.

Отметим, что приведенная в таблице Б формула для плотности многомерного нормального распределения в R^k имеет смысл лишь в случае, когда матрица ковариаций B не вырождена (т. е. определитель B отличен от 0). Если матрица ковариаций случайной величины ξ вырождена, то (см. задачу 3.126) в R^k существует такая гиперплоскость L , размерность которой равна рангу B , что $P\{\xi \in L\} = 1$. Многомерные нормальные распределения в R^k с вырожденной матрицей ковариаций B существуют, но не являются абсолютно непрерывными. Поэтому при $\det B = 0$ приведенная в таблице Б формула для плотности неверна, однако формула для характеристической функции справедлива.

Многомерные нормальные распределения с вырожденной матрицей ковариаций естественным образом появляются как предельные распределения в *многомерном варианте центральной предельной теоремы*: если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в k -мерном евклидовом

Таблица А

Производящие функции

Название распределения	Формула для $P\{k=k\}$	Производящая функция
Равномерное	$\frac{1}{N}, \quad k=1, 2, \dots, N$	$\frac{1-z^N}{1-z} z$
Геометрическое	$(1-p) p^k, \quad k=0, 1, \dots$	$\frac{1-p}{1-pz}$
Биномиальное	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n$	$(1+p(z-1))^n$
Пуассоновское	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, \dots$	$e^{\lambda(z-1)}$

Таблица Б

Характеристические функции

Название распределения	Формула для плотности	Характеристическая функция
Равномерное	$\frac{1}{a}, \quad 0 \leq x \leq a$	$\frac{e^{iat} - 1}{iat}$
Равномерное	$\frac{1}{2a}, \quad -a \leq x \leq a$	$\frac{\sin at}{at}$
Показательное	$\alpha e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0$	$\frac{1}{1-it/\alpha}$
Гамма-распределение	$\frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \geq 0$	$\frac{1}{(1-it)^\alpha}$
Нормальное распределение	$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Распределение Коши	$\frac{1}{\pi} \frac{b}{b^2 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty$	$e^{-b t }$
Многомерное нормальное распределение в R^k	$\frac{e^{-(x-a, B^{-1}(x-a))/2}}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{\det B}}, \quad x \in R^k$	$e^{i(t, a) - \frac{1}{2}(t, Bt)}$

пространстве R^k , с математическим ожиданием $a \in R^k$ и матрицей ковариаций B (не обязательно невырожденной), то последовательность распределений случайных величин

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - na}{\sqrt{n}}$$

при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится к многомерному нормальному распределению в R^k с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций B .

§ 1. Закон больших чисел.

Лемма Бореля — Кантелли

4.1. Пусть функция $g(x)$, $x \geq 0$, неотрицательна и монотонно возрастает. Показать, что для любой действительной случайной величины ξ справедливо неравенство

$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(x)}.$$

4.2. Пусть случайная величина η_n равна сумме очков, появившихся при n подбрасываниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3,5\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

4.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$ — результаты $n+1$ испытаний схемы Бернулли ($P\{\xi_i = 1\} = p$, $P\{\xi_i = 0\} = 1 - p$) и случайная величина η_n равна числу таких i , $1 \leq i \leq n$, что $\xi_i = \xi_{i+1} = 1$. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$P\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

4.4. Последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ образованы одинаково распределенными случайными величинами, независимыми внутри каждой последовательности (случайные величины ξ_i и η_i могут не быть независимыми), $M\xi_i = M\eta_j = a$, $D\xi_i = D\eta_j < \infty$. Выполняется ли закон больших чисел для последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$:

$$\xi_{2k-1} = \xi_k, \quad \xi_{2k} = \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

4.5. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение,

$$\eta_n = \cos \frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Удовлетворяют ли последовательности $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$ закону больших чисел?

4.6. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ образована независимыми случайными величинами, имеющими нормальные распределения,

$$M\xi_k = 0, \quad D\xi_k = Ck^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Описать множество тех значений α , при которых последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ удовлетворяет закону больших чисел.

4.7. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ образована независимыми случайными величинами,

$$M\xi_k = 0, \quad D\xi_k = Ck^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

При каких значениях α последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ может удовлетворять закону больших чисел и при каких значениях α может не удовлетворять ему?

4.8. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин, $M\xi_k = 0, \quad D\xi_k = \sigma^2 < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$ Удовлетворяют ли закону больших чисел последовательности случайных величин

$$\zeta_n = \xi_n + \xi_{n+1}, \quad \eta_n = \sum_{k=0}^{[n^{1/2}]} \xi_{n+k}, \quad n = 1, 2, \dots?$$

4.9. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, $M\xi_i = a, \quad D\xi_i = \sigma^2 < \infty$. Пусть $\zeta_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \xi_i \xi_j$. Показать, что последовательность ζ_n удовлетворяет закону больших чисел: для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\zeta_n}{C_n} - a^2 \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

4.10. Показать, что утверждение предыдущей задачи останется справедливым, если в ее формулировке заменить условие независимости $\xi_1, \xi_2, \dots$ условием их некоррелированности:

$$M(\xi_i - a)(\xi_j - a) = 0, \quad 1 \leq i < j < \infty.$$

4.11. Пусть случайный вектор $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)})$ имеет нормальное распределение в R^n с нулевым вектором математических ожиданий и единичной матрицей ковариаций, а $B_{r, \varepsilon}$ — множество всех таких точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, что

$$(1 - \varepsilon)r \leq \|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \leq (1 + \varepsilon)r.$$

Показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \xi^{(n)} \in B_{r/\sqrt{n}, \varepsilon} \} = 1.$$

4.12*. Пусть случайный вектор $\xi^{(n)}$ тот же, что в предыдущей задаче, а $C_{r, \varepsilon}$ — множество всех таких точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, что

$$(1 - \varepsilon)r \leq |x_1| + \dots + |x_n| \leq (1 + \varepsilon)r, \quad \varepsilon > 0.$$

Показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \xi^{(n)} \in C_{r/\sqrt{2/n}, \varepsilon} \} = 1.$$

Сравнить с результатом задачи 4.11.

4.13. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, одинаково распределены, имеют математическое ожидание a и для некоторого ε , $0 < \varepsilon < 1$,

$$m_\varepsilon = M |\xi_1 - a|^{1+\varepsilon} < \infty.$$

Показать, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a \right| > \delta \right\} = 0.$$

4.14. Лемма Бореля — Кантелли. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — события, заданные на одном вероятностном пространстве, и случайная величина ν равна числу одновременно происходящих событий. Показать, что:

а) если $\sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\} < \infty$, то $P\{\nu < \infty\} = 1$,

б) если события $A_1, A_2, \dots$ попарно независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\} = \infty$, то $P\{\nu = \infty\} = 1$.

4.15. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — события, заданные на одном вероятностном пространстве, и случайная величина ν равна числу одновременно происходящих собы-

тий. Показать, что если $P\{A_n\} \geq a > 0, n = 1, 2, \dots$, то $P\{v = \infty\} \geq a$.

4.16. Последовательность чисел c_n удовлетворяет условиям $0 \leq c_n \leq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. Всегда ли существует такая последовательность событий $A_1, A_2, \dots$, что $P\{A_n\} = c_n$ и для числа v одновременно происходящих событий справедливо соотношение $P\{v < \infty\} = 1$?

4.17. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин и случайная величина ζ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n - \zeta| > \varepsilon\} < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Показать, что $P\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \zeta\} = 1$.

4.18. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин и случайная величина ζ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(\xi_n - \zeta)^2 < \infty.$$

Показать, что $P\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \zeta\} = 1$.

4.19. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют одно и то же показательное распределение с параметром λ :

$$P\{\xi_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть ε — произвольное число из интервала $(0, 1/\lambda)$, случайная величина v_ε равна числу одновременно происходящих событий $A_n^\varepsilon = \left\{ \frac{\xi_n}{\ln n} > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon \right\}$, а μ_ε — числу одновременно происходящих событий

$$B_n^\varepsilon = \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\xi_k}{\ln k} < \frac{1}{\lambda} - \varepsilon \right\}.$$

а) Показать, что $P\{v_\varepsilon < \infty\} = P\{\mu_\varepsilon < \infty\} = 1$ при любом $\varepsilon \in (0, 1/\lambda)$.

б) Вывести из результата п. а), что последовательность случайных величин $\zeta_n = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\xi_k}{\ln k}, n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \frac{1}{\lambda}\right\} = 1.$$

4.20. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ имеют математическое ожидание a и дисперсию $\sigma^2 < \infty$ и не коррелированы:

$$M(\xi_i - a)(\xi_j - a) = 0 \quad \text{при любых } i \neq j.$$

Доказать, что

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n^2}}{n^2} = a \right\} = 1.$$

4.21. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ имеют математическое ожидание a и дисперсию $\sigma^2 < \infty$ и не коррелированы, а

$$\eta_n = \max_{n^2 < k \leq (n+1)^2} |\xi_{n^2+1} + \xi_{n^2+2} + \dots + \xi_k - (k - n^2)a|, \\ n = 1, 2, \dots$$

Доказать, что $P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{n^2} = 0 \right\} = 1$.

4.22*. Усиленный закон больших чисел. Доказать, что если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ имеют математическое ожидание a , дисперсию $\sigma^2 < \infty$ и не коррелированы, то

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = a \right\} = 1.$$

§ 2. Прямые методы доказательства предельных теорем

В этом параграфе задачи 4.23—4.33 связаны с нахождением предельных распределений с помощью анализа свойств допредельных распределений, задачи 4.34—4.44—с применениями закона больших чисел, в задачах 4.45—4.55 изучаются свойства различных видов сходимости последовательностей случайных величин.

4.23. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение с параметром p , $0 < p < 1$:

$$P\{\xi_i = k\} = (1-p)p^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

а) Показать, что

$$P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = k\} = C_{k+n-1}^{n-1} (1-p)^n p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

б) Найти

$$q_k^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} P \{ \xi_1 + \dots + \xi_n - m = k \mid \xi_1 + \dots + \xi_n \geq m \},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

4.24 (см. задачу 1.40). Первый ряд кинотеатра состоит из N кресел. Зрители один за другим заполняют этот ряд, причем каждый из них может с равной вероятностью занять любое из кресел, свободных в момент его прихода. Пусть $\tau_1(N)$ — порядковый номер первого зрителя, который сел в кресло, находящееся рядом с уже занятым креслом, $\tau_2(N)$ — порядковый номер первого зрителя, который сел в кресло, симметричное относительно середины ряда одному из занятых кресел. Найти законы распределения $\tau_1(N)$ и $\tau_2(N)$ и предельные при $N \rightarrow \infty$ распределения случайных величин $\frac{\tau_i(N)}{\sqrt{N}}$, $i = 1, 2$, т. е. функции $G_i(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\tau_i(N)}{\sqrt{N}} \leq x \right\}$.

4.25. Плотность $\rho_\xi(x)$ случайной величины ξ непрерывна и ограничена на отрезке $[a, b]$ и равна 0 вне $[a, b]$. Положим $\eta_n = \{n\xi\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x . Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \eta_n \leq x \}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

4.26. Показать, что утверждение предыдущей задачи справедливо для случайной величины ξ с кусочно-непрерывной плотностью.

4.27. Случайная величина ξ имеет непрерывную плотность распределения $p(x)$. Найти предельное распределение случайной величины $\lg n\xi$ при $n \rightarrow \infty$.

4.28 (см. задачи 4.26 и 4.27). Случайная величина ξ имеет непрерывную плотность распределения $p(x)$. Найти предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = \frac{1}{i} \frac{(1+i\xi)^n - (1-i\xi)^n}{(1+i\xi)^n + (1-i\xi)^n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (\text{здесь } i = \sqrt{-1}).$$

4.29*. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 . Найти предельное (при $x \rightarrow \infty$) распределение для условного распределения случайной величины $(\xi - x)x$ при условии $\xi > x$. (Ср. с задачей 3.143.)

4.30. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, а $x_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Найти такие последовательности чисел a_n и b_n , что последовательность $a_n x_n + b_n$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к невырожденной случайной величине x , и найти функцию распределения x в случаях, когда

а) $F(x) = 0 \quad (x \leq 1), F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} \quad (x \geq 1, \alpha > 0),$

б) $F(x) = \max\{0, 1 - |x|^\alpha\} \quad (x \leq 0, \alpha > 0), F(x) = 1 \quad (x \geq 0),$

в) $F(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}.$

4.31. Последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$, последовательности действительных чисел $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ ($b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) и непрерывная функция распределения $F(x)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\xi_n - a_n}{b_n} \leq x\right\} = F(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k: |n-k| < \Delta b_n} \left| \frac{P\{\xi_n = k\}}{P\{\eta_n = k\}} - 1 \right| = 0 \text{ для любого } \Delta < \infty.$$

Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_n - a_n}{b_n} \leq x\right\} = F(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

4.32. В последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайная величина ξ_n имеет распределение Пуассона с параметром n :

$$P\{\xi_n = k\} = \frac{n^k}{k!} e^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Пользуясь теоремой Муавра — Лапласа и результатом предыдущей задачи, показать, что при любом x , $-\infty < x < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\xi_n - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

4.33. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение с параметром $1/2$:

$$P\{\xi_i = k\} = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - n}{\sqrt{2n}} \leq x \right\} = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

4.34. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ — такие последовательности случайных величин, что для некоторых чисел a, b для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\xi_n - a| > \varepsilon \} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\eta_n - b| > \varepsilon \} = 0.$$

Доказать, что при любом характере зависимости между ξ_n и η_n для любого $\varepsilon > 0$:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\xi_n - a| < \varepsilon, |\eta_n - b| < \varepsilon \} = 1;$

б) если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b) , то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |f(\xi_n, \eta_n) - f(a, b)| < \varepsilon \} = 1.$$

4.35. Пусть $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots$, — независимые одинаково распределенные векторы в R^2 ,

$$M\xi_1^{(i)} = a_1 > 0, \quad M\xi_2^{(i)} = a_2 > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Доказать, что последовательность случайных величин

$$\eta_n = \frac{\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)} + \dots + \xi_1^{(n)}}{\xi_2^{(1)} + \xi_2^{(2)} + \dots + \xi_2^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится по распределению к a_1/a_2 , если либо

а) $D\xi_1^{(i)} < \infty$, $D\xi_2^{(i)} < \infty$, либо б) $M|\xi_1^{(i)}|^{1+\varepsilon} < \infty$, $M|\xi_2^{(i)}|^{1+\varepsilon} < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

4.36. Последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$ и $\eta_1, \eta_2, \dots$ случайных величин таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\xi_n| \leq \varepsilon \} = 1 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0,$$

и существует функция распределения $F(x)$, для каждой точки непрерывности которой выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \eta_n \leq x \} = F(x).$$

Доказать, что при любом характере зависимости между ξ_n и η_n для каждой точки непрерывности $F(x)$

справедливы равенства:

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \eta_n + \xi_n \leq x \} = F(x);$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \eta_n (1 + \xi_n) \leq x \} = F(x).$$

4.37. В последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайная величина ξ_n при любом $n=1, 2, \dots$ имеет геометрическое распределение с параметром q_n , $q_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Найти предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = q_n \xi_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

4.38. Время ξ безотказной работы прибора имеет математическое ожидание $a > 0$ и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. При каждом отказе прибор подвергается ремонту (и тогда время до следующего отказа не зависит от предыстории и распределено так же, как ξ), после k -го отказа прибор списывается как негодный. Пусть τ_k — суммарное время, которое прибор проработал до списания.

а) Найти $M\tau_k$, $D\tau_k$.

б) Показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\tau_k}{M\tau_k} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

4.39. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $a > 0$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$, случайная величина v не зависит от $\xi_1, \xi_2, \dots$ и принимает целые положительные значения, $Mv = b$ и

$$\tau = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v.$$

Найти $M\tau$ и предельное распределение случайной величины $\tau/(M\tau)$, когда распределение v изменяется так, что $Mv \rightarrow \infty$ и существует непрерывная функция распределения $F(x)$, удовлетворяющая условиям $F(0) = 0$,

$$\lim P \left\{ \frac{v}{Mv} \leq x \right\} = F(x), \quad 0 \leq x < \infty.$$

4.40. Время ξ безотказной работы прибора имеет математическое ожидание $a > 0$ и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. Каждый отказ прибора независимо от предыстории

и длин периодов безотказной работы с вероятностью p является несущественным (прибор требует только наладки), а с вероятностью $q = 1 - p$ — существенным (прибор нужно ремонтировать). Пусть τ_q — время от начала работы прибора до его ремонта.

а) Найти $M\tau_q$, $D\tau_q$.

б) Найти предельное распределение случайной величины $\tau_q/M\tau_q$, когда параметры $a > 0$ и $\sigma^2 < \infty$ фиксированы, а $q \rightarrow 0$.

4.41*. На одном вероятностном пространстве заданы событие A , $P\{A\} = p$, и случайная величина ξ , имеющая математическое ожидание a и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. Доказать, что при любом характере зависимости между ξ и A

$$P\{\xi \geq x | A\} \leq \frac{\sigma^2}{p(x-a)^2}, \quad x > a,$$

$$|M\{\xi | A\} - a| \leq \sigma \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{\sqrt{1-p}}{p} \right\}.$$

4.42*. Последовательность (ξ_1, ε_1) , (ξ_2, ε_2) , ... состоит из независимых пар случайных величин (внутри пар случайные величины могут быть зависимыми),

$$M\xi_i = a, \quad D\xi_i \leq \sigma^2,$$

$$P\{\varepsilon_i = 1\} = 1 - P\{\varepsilon_i = 0\} = q.$$

Положим $v = \min\{i \geq 1: \varepsilon_i = 1\}$,

$$\tau_1 = \xi_1 + \dots + \xi_{v-1} \quad (\tau_1 = 0 \text{ при } v = 1),$$

$$\tau_v = \xi_1 + \dots + \xi_v.$$

Найти предельные распределения случайных величин $q\tau_1$, $q\tau_v$, когда параметры $a > 0$ и $\sigma^2 < \infty$ фиксированы, а $q \rightarrow 0$.

4.43. Процесс работы прибора состоит из независимых одинаково распределенных циклов; длина ξ цикла имеет математическое ожидание $a > 0$ и дисперсию $\sigma^2 < \infty$. Вероятность того, что за один цикл прибор не сломается, равна p , вероятность поломки прибора на любом фиксированном цикле равна $q = 1 - p$ (поломка прибора может зависеть от длины цикла). Пусть τ — время до первой поломки прибора.

Найти предельное распределение случайной величины $q\tau/a$, когда $q \rightarrow 0$, $a \rightarrow a_0 > 0$, $\sigma^2 \rightarrow \sigma_0^2 < \infty$.

4.44. В бункер помещается не более $N = 150$ деталей. Ежеминутно в бункер поступает случайное число деталей, имеющее распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$; числа деталей, поступающих в бункер в непересекающиеся интервалы времени, независимы. Через каждый час все находящиеся в бункере детали перегружаются в тележку и отправляются на дальнейшую обработку. В начальный момент времени бункер свободен. Пользуясь предельными теоремами, указать приближенное значение вероятности того, что за время $T = 100$ часов не произойдет ни одного переполнения бункера.

4.45. Показать, что если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к ξ с вероятностью 1 или в среднем квадратичном, то она сходится по вероятности и по распределению. Привести пример последовательности $\xi_1, \xi_2, \dots$, сходящейся к ξ по вероятности, но не сходящейся ни в среднем квадратичном, ни с вероятностью 1.

4.46. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, сходится к ξ по распределению. Показать, что можно задать на одном вероятностном пространстве случайные величины $\xi'_1, \xi'_2, \dots$ и ξ' так, что для всех x

$$P\{\xi' \leq x\} = P\{\xi \leq x\}, \quad P\{\xi'_n \leq x\} = P\{\xi_n \leq x\}, \\ n = 1, 2, \dots,$$

и последовательность $\xi'_1, \xi'_2, \dots$ сходится к ξ' с вероятностью 1.

4.47. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, $x \in (-\infty, \infty)$, а последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ (с вероятностью 1, по вероятности или по распределению).

а) Сходится ли (в тех же смыслах) последовательность $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots$ к $f(\xi)$?

б) Сходится ли (в тех же смыслах) последовательность $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots$ к $f(\xi)$, если $f(x)$ кусочно-непрерывна (имеет конечное число разрывов на любом конечном интервале), а функция распределения F непрерывна?

4.48. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ случайных величин удовлетворяет условиям

$$P\{\xi_{n+1} \geq \xi_n\} = 1 \text{ для любого } n = 1, 2, \dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n = a < \infty.$$

Доказать, что существует случайная величина ξ , для которой

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \right\} = 1.$$

Верно ли равенство $M\xi = a$?

4.49. Последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \dots$ на отрезке $[0, 1]$ строится по следующему правилу: ξ_1 имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, и если значения $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ ($k \geq 2$) определены, то точка ξ_k имеет равномерное распределение на минимальном по длине из k отрезков, на которые $[0, 1]$ разбивается точками $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$.

а) Доказать, что существует случайная величина ξ , удовлетворяющая условию $P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \right\} = 1$.

б) Найти $M\xi, D\xi$.

4.50. Последовательность точек $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ на отрезке $[0, 1]$ строится по следующему правилу: $\xi_0 = 0$, ξ_1 имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, а ξ_n при любом $n \geq 2$ имеет равномерное распределение на интервале, образованном ξ_{n-1} и ξ_{n-2} .

а) Доказать, что существует случайная величина ξ , удовлетворяющая условию $P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \right\} = 1$.

б) Найти $M\xi, D\xi$.

4.51*. Функция распределения $F(x)$, последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ и последовательность чисел a_n, b_n удовлетворяют условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \leq x \right\} = F(x)$$

в каждой точке непрерывности $F(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1;$$

последовательность функций $g_n(x)$ ($-\infty < x < \infty$, $n = 1, 2, \dots$) такова, что если

$$w_n(A) = \sup_{|y| < Ab_n} \frac{1}{|yg'_n(a_n)|} |g_n(a_n + y) - g_n(a_n) - yg'_n(a_n)|,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(A) = 0$ для любого $A < \infty$. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{g_n(\xi_n) - g_n(a_n)}{b_n g'_n(a_n)} \leq x \right\}.$$

4.52. Функция распределения $F(x)$, последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ и последовательности чисел a_n, b_n удовлетворяют условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \leq x \right\} = F(x)$$

в каждой точке непрерывности $F(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1;$$

последовательность функций $g_n(x)$ ($-\infty < x < \infty$, $n = 1, 2, \dots$) такова, что если $g_n^{(k)}(a_n) \neq 0$ и при некотором натуральном k

$$w_n(A) = \sup_{|y| < A b_n} \frac{1}{|y|^k g_n^{(k)}(a_n)} \left| g_n(a_n + y) - g_n(a_n) - \frac{y^k}{k!} g_n^{(k)}(a_n) \right|,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(A) = 0$ для любого $A < \infty$. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{g_n(\xi_n) - g_n(a_n)}{b_n^k g_n^{(k)}(a_n)} \leq x \right\}.$$

4.53. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ и последовательности чисел $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \leq x \right\} = \Phi(x) \text{ для любого } x, \quad |x| < \infty.$$

Пусть $a'_1, a'_2, \dots$ и $b'_1, b'_2, \dots$ — две другие последовательности чисел. Рассмотрим три группы условий:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b'_n}{b_n} = 1,$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a'_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b'_n - b_n) = 0,$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n - a_n}{b_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b'_n}{b_n} = 1.$$

Какие из условий а), б), в) обеспечивают выполнение соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi_n - a'_n}{b'_n} \leq x \right\} = \Phi(x) \text{ для любого } x, \quad |x| < \infty?$$

4.54. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ по распределению.

а) Пусть существуют и конечны величины

$$m = M\xi, \quad m_n = M\xi_n, \quad m_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n.$$

Какие из соотношений $m < m_\infty$, $m = m_\infty$, $m > m_\infty$ могут, а какие не могут выполняться?

б) Ответить на вопрос п. а) при дополнительном условии $M\xi^2 < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n^2 < \infty$.

4.55. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к случайной величине ξ по распределению.

а) Пусть существуют и конечны величины

$$M = M\xi^2, \quad M_n = M\xi_n^2, \quad M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n.$$

Какие из соотношений $M < M_\infty$, $M = M_\infty$, $M > M_\infty$ могут, а какие не могут выполняться?

б) Пусть существуют и конечны величины

$$\sigma^2 = D\xi, \quad \sigma_n^2 = D\xi_n, \quad \sigma_\infty^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2.$$

Какие из соотношений $\sigma^2 < \sigma_\infty^2$, $\sigma^2 = \sigma_\infty^2$, $\sigma^2 > \sigma_\infty^2$ могут, а какие не могут выполняться?

§ 3. Характеристические и производящие функции

В этом параграфе задачи 4.56—4.70 связаны с вычислением производящих функций и моментов случайных величин, задачи 4.71—4.81 — с вычислением характеристических функций, в задачах 4.82—4.95 рассматриваются различные свойства характеристических функций, а в задачах 4.96—4.100 вычисляются характеристические функции специальных распределений и исследуются свойства многомерного нормального распределения.

4.56. Найти производящие функции целочисленных распределений:

а) пуассоновского: $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $0 < \lambda < \infty$;

б) геометрического: $P\{\xi = k\} = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $p, q > 0$, $p + q = 1$;

в) биномиального: $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$; $p, q > 0$, $p + q = 1$.

4.57. Найти производящую функцию $\varphi(z)$ числа ξ_n успехов в n независимых испытаниях, если вероятность успеха в каждом испытании равна p . Используя этот результат, найти формулы для $M\xi_n$, $M\xi_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$), $D\xi_n$.

4.58. Производящая функция распределения случайной величины ξ , принимающей целые неотрицательные значения, равна $\varphi(z) = Mz^\xi$.

а) Найти $M\xi$, $D\xi$, $M(\xi - M\xi)^2$.

б) Найти производящие функции величин $\xi/2$, 2ξ , $-\xi$ и случайной величины $\xi_1 - \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что ξ .

в) Доказать, что при $b > a > 0$

$$M \frac{1}{\xi + a} = \int_0^1 z^{a-1} \varphi(z) dz,$$

$$M \frac{1}{(\xi + a)(\xi + b)} = \int_0^1 z^{b-a-1} \int_0^z u^{a-1} \varphi(u) du dz.$$

4.59. Пусть τ_1 — порядковый номер первого из испытаний схемы Бернулли (т. е. последовательности независимых испытаний), которое окончилось успехом (вероятность успеха в каждом испытании равна p , неудачи — $q = 1 - p$). Найти $M\tau_1$, $D\tau_1$, Mz^{τ_1} .

4.60. В схеме Бернулли обозначим через θ_k порядковый номер испытания, в котором появился k -й успех; считая вероятность успеха в каждом испытании равной p , найти:

1) $M\theta_k$, $D\theta_k$;

2) $\varphi_{\theta_k}(z) = Mz^{\theta_k}$.

4.61. Закон распределения случайной величины ξ определяется формулой

$$P\{\xi = n\} = C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m}, \quad n = m, m+1, \dots,$$

где m — целое положительное число, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Найти производящую функцию распределения ξ и $M\xi$, $D\xi$. Показать, что распределение ξ совпадает с распределением суммы m независимых одинаково распределенных случайных величин.

4.62. Найти закон распределения $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, если ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и при $k = 1, 2, 3$; $0 < p < 1$, $q = 1 - p$:

$$P\{\xi_k = l\} = C_{l-1}^{m_k-1} p^{m_k} q^{l-m_k}, \quad l = m_k, m_k + 1, \dots$$

4.63. Случайная величина v распределена по закону Пуассона с параметром λ и не зависит от результатов испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха p . Обозначим μ_v число успехов в первых v испытаниях схемы Бернулли. Найти:

а) $\varphi_{\mu_v}(z) = Mz^{\mu_v}$;

б) $M\mu_v$, $D\mu_v$.

4.64. Производящая функция совместного распределения величин ξ_1, ξ_2 равна

$$\varphi_{\xi_1, \xi_2}(z) = e^{\lambda(p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_1 z_2 - 1)},$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Найти:

а) одномерные распределения ξ_1 и ξ_2 ;

б) $M\xi_1$, $M\xi_2$, $D\xi_1$, $D\xi_2$, $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

Являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми?

4.65. Целочисленная неотрицательная с вероятностью 1 случайная величина ξ имеет производящую функцию $\varphi_\xi(z)$. Доказать, что если для целого $k \geq 1$

$$\lim_{u \uparrow 1} \frac{d^k}{dz^k} \varphi_\xi(z) \Big|_{z=u} = m_k < \infty,$$

то $M\xi^{[k]} = M\xi(\xi - 1) \dots (\xi - k + 1) = m_k$.

4.66. Пусть $\xi_{n,i}$ — число появлений i -го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами и вероятностью p_j появления j -го исхода в каждом испытании ($j = 1, \dots, N$). Найти

а) $\varphi(z_1, \dots, z_N) = Mz_1^{\xi_{n,1}} \dots z_N^{\xi_{n,N}}$,

б) $M\xi_{n,i}^{[k]}, M\xi_{n,i}^{[k]} \xi_{n,j}^{[l]} (i \neq j; k, l = 1, 2, \dots)$.

4.67. Пусть выполнены условия предыдущей задачи и $N=4$,

$$\eta_{n,1} = \xi_{n,1}, \quad \eta_{n,2} = \xi_{n,2} + \xi_{n,3}, \quad \eta_{n,3} = \xi_{n,4}, \\ \xi_{n,i} = \xi_{n,i} + \xi_{n,i+1} \quad (i=1, 2, 3).$$

Найти производящие функции распределений векторов $(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \eta_{n,3})$, $(\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \xi_{n,3})$ и коэффициенты корреляции $\rho(\eta_{n,1}, \eta_{n,2})$, $\rho(\xi_{n,1}, \xi_{n,2})$.

4.68. Пусть величина v имеет распределение Пуассона с параметром λ и не зависит от исходов испытаний полиномиальной схемы, описанной в задаче 4.66. Найти производящую функцию распределения случайного вектора $(\xi_{v,1}, \dots, \xi_{v,N})$.

4.69. При каких значениях параметров дробно-линейная функция $\varphi(z) = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$ будет производящей функцией целочисленной случайной величины?

4.70. Производящая функция распределения случайной величины ξ , принимающей целые неотрицательные значения, равна $\varphi(z) = Mz^{\frac{1}{2}}$. Выяснить, при каких условиях следующие выражения являются производящими функциями вероятностных распределений, и если являются, то указать, как соответствующие распределения связаны с распределением ξ :

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(1-)}, \quad \varphi_2(z) = \frac{1}{\varphi'(1-)} \frac{1-\varphi(z)}{1-z}, \\ \varphi_3(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\varphi(z)}, \quad \varphi_4(z) = -\frac{\ln \varphi(z)}{\ln \varphi(0)} + 1, \\ \varphi_5(z) = \sqrt{\varphi_3(z)}.$$

4.71. Производящая функция целочисленной случайной величины ξ равна $\varphi_{\xi}(z)$. Найти характеристическую функцию ξ .

4.72. Найти характеристические функции распределений:

а) пуассоновского: $P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, m=0, 1, \dots;$

б) биномиального: $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, m=0, 1, \dots, n;$

в) показательного: $p_{\xi}(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x > 0.$

4.73. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α :

$$P\{\xi_i \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}, x \geq 0, i=1, 2, \dots$$

Найти $M(\xi_1 + \dots + \xi_n)^k$ при любых значениях $k, n = 1, 2, \dots$

4.74. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, одинаково распределены и имеют характеристическую функцию $f(t) = Me^{it\xi_1}$ (производящую функцию $\varphi(s) = Ms^{\xi_1}$), случайная величина v не зависит от $\xi_1, \xi_2, \dots$, принимает только целые неотрицательные значения и имеет производящую функцию $g(s) = Ms^v$. Найти характеристическую функцию (производящую функцию) случайной величины

$$\zeta = \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v & \text{при } v \geq 1, \\ 0 & \text{при } v = 0. \end{cases}$$

4.75. Случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) , т. е.

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

При каких условиях можно представить ξ в виде

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_m$ независимы и при любом $i = 1, \dots, m$ случайная величина ξ_i имеет биномиальное распределение с параметрами (n_i, p_i) ($n_i \geq 1, 0 < p_i < 1$)?

4.76. Случайная величина ξ принимает только целые значения, и $f(t) = Me^{it\xi}$ — характеристическая функция распределения ξ . Найти:

а) $P\{\xi \equiv 0 \pmod{k}\};$

б) $P\{\xi \equiv m \pmod{k}\}.$

4.77. Независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ имеют равномерное распределение на множестве $\{1, 2, \dots, 3k\}$. Найти

$$\max_{n > 1} P\{\xi_1^3 + \dots + \xi_n^3 \equiv 0 \pmod{3}\},$$

$$\min_{n > 1} P\{\xi_1^3 + \dots + \xi_n^3 \equiv 0 \pmod{3}\}.$$

4.78. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы. Доказать, что для любого действительного λ , удовлетворяющего условиям

$$Me^{\lambda \xi_i} < \infty, \quad i = 1, \dots, n,$$

справедливо равенство

$$Me^{\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n)} = \prod_{i=1}^n Me^{\lambda \xi_i}.$$

4.79. Случайная величина ξ принимает действительные значения. Доказать, что для любого действительного x

$$P\{\xi \geq x\} \leq \inf_{\lambda > 0} e^{-\lambda x} Me^{\lambda \xi},$$

$$P\{\xi \leq x\} \leq \inf_{\lambda > 0} e^{\lambda x} Me^{-\lambda \xi}.$$

4.80. Пусть μ_n обозначает число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью p успеха в каждом испытании. Доказать, что при $\alpha < p$

$$P\{\mu_n \leq \alpha n\} \leq \left\{ \left(\frac{1-p}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{p}{\alpha} \right)^{\alpha} \right\}^n.$$

Найти аналогичную оценку для $P\{\mu_n \geq \beta n\}$ при $\beta > p$ и для $P\{\mu_n \leq n/2\}$ при $p > 1/2$.

4.81. Пусть μ_n — число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью p успеха в каждом испытании. Положим $\eta_n = \max\{\mu_n, n - \mu_n\}$. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$, $p > q = 1 - p$

$$M\eta_n^{[k]} = M\mu_n^{[k]} + O(n^k \beta^n),$$

где $\beta = 2\sqrt{pq} < 1$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} D\eta_n$.

4.82. Случайные величины ξ_1 , ξ_2 и κ независимы, характеристические функции ξ_1 и ξ_2 равны $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно, $P\{\kappa = 1\} = 1 - P\{\kappa = 0\} = p \in (0, 1)$. Найти характеристическую функцию случайной величины

$$\eta = \kappa \xi_1 + (1 - \kappa) \xi_2$$

(распределение η называется *смесью* распределений ξ_1 и ξ_2).

4.83. Показать, что если $P\{|\xi| < \infty\} = 1$, то функция $f(t) = Me^{it\xi}$, $-\infty < t < \infty$, равномерно непрерывна.

4.84. Характеристическая функция $f(t) = Me^{it\xi}$ принимает только действительные значения. Доказать, что при любом действительном t

$$f(t) = f(-t).$$

- 4.85. Найти характеристическую функцию:
 а) равномерного распределения на отрезке $[0, a]$;
 б) «треугольного» распределения с плотностью

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(1 - \alpha|x|) & \text{при } |x| \leq \alpha^{-1}; \\ 0 & \text{при } |x| > \alpha^{-1}; \end{cases}$$

- в) распределения с плотностью

$$q_\alpha(x) = \frac{C_\alpha}{x^2} \left(1 - \cos \frac{x}{\alpha}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

В случае в) найти значение C_α , при котором $q_\alpha(x)$ оказывается плотностью вероятности.

4.86. Функция $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, обладает следующими свойствами:

- а) $f(0) = 1$, $f(t) \geq 0$ для любого t ;
 б) $f(t) = f(-t)$ для любого t ;
 в) графиком $f(t)$, $0 \leq t < \infty$, является выпуклая вниз ломаная линия, состоящая из конечного числа звеньев.

Является ли $f(t)$ характеристической функцией распределения вероятностей?

4.87. Функция $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, обладает следующими свойствами: $f(0) = 1$, $f(t) \geq 0$, $f(t) = f(-t)$ для любого t , $f(t)$ непрерывна и $f''(t) \geq 0$ для любого $t \neq 0$. Является ли $f(t)$ характеристической функцией распределения вероятностей?

4.88. Пусть $a > 0$ и функция $f_1(t)$ имеет период $4a$,

$$f_1(t) = 1 - \frac{|t|}{a}, \quad |t| \leq 2a.$$

- а) Является ли $f_1(t)$ характеристической функцией?
 б) Является ли характеристической функцией функция $f_2(t) = |f_1(t)|$?

4.89. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_k$ ($k > 1$) независимы и имеют функцию распределения $F(x)$, случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_k$ независимы и имеют функцию распределения $G(x)$. Следует ли из условия

$$P\{\xi_1 + \dots + \xi_k \leq x\} = P\{\eta_1 + \dots + \eta_k \leq x\} \text{ для каждого } x$$

совпадение функций распределения $F(x)$ и $G(x)$?

4.90. Изменится ли ответ на вопрос предыдущей задачи, если дополнительно потребовать, чтобы

$P\{|\xi_1 + \dots + \xi_n| < \infty\} = 1$ и характеристическая функция распределения ξ_1 нигде не обращалась в нуль?

4.91. Показать, что если характеристическая функция $f(t) = Me^{it\xi}$ удовлетворяет условиям

$$f(t_1) = f(t_2) = 1,$$

то при любых целых $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$f(mt_1 + nt_2) = 1.$$

4.92*. Характеристическая функция $f(t) = Me^{it\xi}$ дифференцируема при $t=0$. Верно ли равенство

$$M\xi = \frac{1}{i} f'(0)?$$

Рассмотреть случай, когда ξ имеет плотность распределения $p(x)$, причем

$$p(x) = p(-x), \quad p(x) = \frac{1+o(1)}{x^2 \ln x} \quad (x \rightarrow \infty).$$

4.93*. Характеристическая функция $f(t) = Me^{it\xi}$ удовлетворяет условию $|f''(0)| < \infty$. Показать, что

$$M\xi^2 \leq |f''(0)| < \infty.$$

4.94. Показать, что если характеристическая функция $f(t) = Me^{it\xi}$ дважды дифференцируема при $t=0$ и $|f''(0)| < \infty$, то $|f'(t)| < \sqrt{|f''(0)|}$ при любом t .

4.95. Являются ли характеристическими функциями вероятностных распределений следующие функции:

а) $e^{\frac{1}{2}(e^{it}-1)}$; д) $|\cos t|^{1/2}$;

б) $\cos(t^2)$; е) $\frac{\sin t}{t} (t \neq 0), 1 (t=0)$;

в) $\cos^2 t$; ж) $e^{-t^2} (t \geq 0); \frac{1}{1+t^2} (t \leq 0)$;

г) $\cos(|t|^{1/2})$; з) $e^{-|t|}$?

4.96. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Распределение случайной величины

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2$$

называют χ^2 -распределением с r степенями свободы.

а) Найти функцию распределения и характеристическую функцию χ^2 -распределения с двумя степенями свободы.

б) Найти характеристическую функцию и формулы для моментов k -го ($k=1, 2, \dots$) порядка χ^2 -распределения с r степенями свободы.

4.97. Исходя из формулы для плотности гамма-распределения (см. введения к гл. 3 и 4), проверить, что если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 имеет гамма-распределение с параметром α , а ξ_2 — гамма-распределение с параметром β , то $\xi_1 + \xi_2$ имеет гамма-распределение с параметром $\alpha + \beta$. Используя это свойство семейства гамма-распределений, найти характеристическую функцию $f_\alpha(t)$ и формулы для моментов $m_k^{(\alpha)}$ ($k=1, 2, \dots$) k -го порядка гамма-распределения с параметром $\alpha > 0$.

4.98. Случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a=(a_1, \dots, a_k)$ и матрицей ковариаций B . Найти распределение случайной величины

$$\zeta = c_1 \xi_1 + \dots + c_k \xi_k$$

где $c_1, \dots, c_k$ — действительные числа.

4.99. Случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a=(a_1, \dots, a_k)$ и матрицей ковариаций B ; матрица $C=\|c_{ij}\|$ ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, k$) состоит из действительных чисел. Найти распределение случайного вектора $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, где

$$\zeta_i = c_{i1} \xi_1 + \dots + c_{ik} \xi_k, \quad i=1, \dots, m.$$

4.100. Случайный вектор $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_k)$ имеет многомерное нормальное распределение в R^k с вектором математических ожиданий $a=(a_1, \dots, a_k)$ и невырожденной матрицей ковариаций B . Показать, что существует такое ортогональное преобразование C пространства R^k в себя, что вектор $\eta=(\eta_1, \dots, \eta_k)=C\xi$ имеет многомерное нормальное распределение с независимыми компонентами.

§ 4. Неравенства Бонферрони и сходимость к распределению Пуассона

4.101. Случайные величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ независимы,

$$P\{\xi_k^{(n)} = 1\} = 1 - P\{\xi_k^{(n)} = 0\} = p_k(n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть при $n \rightarrow \infty$

$$\max_{1 \leq k \leq n} p_k(n) \rightarrow 0, \quad p_1(n) + \dots + p_n(n) \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Используя метод производящих функций, найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)} = m\}, \quad m = 0, 1, \dots$$

4.102. Случайная величина ξ принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, а случайная величина η имеет распределение Пуассона с параметром p : $P\{\eta = k\} = \frac{p^k}{k!} e^{-p}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Доказать, что ξ и η можно задать на одном вероятностном пространстве так, что $P\{\xi \neq \eta\} < p^2$.

4.103. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, $P\{\xi_i = 1\} = 1 - P\{\xi_i = 0\} = p_i$, $i = 1, \dots, n$. Используя результаты задачи 4.102, доказать, что

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} |P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = k\} - \frac{(p_1 + \dots + p_n)^k}{k!} e^{-(p_1 + \dots + p_n)}| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

4.104. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_N$ — совокупность событий и событие B_r состоит в том, что одновременно происходит ровно r из событий $A_1, \dots, A_N$. Доказать, что при любом $r = 0, 1, \dots, N$

$$P\{B_r\} = \sum_{k=r}^N (-1)^{k-r} C_k^r S_k,$$

$$\text{где } S_0 = 1, \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\}.$$

4.105*. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что если

$m_k = M\xi^{[k]} = M\xi(\xi-1)\dots(\xi-k+1)$, $k=1, 2, \dots$, и для целого $d \geq 1$ величина $m_{2d-1} < \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{2d} (-1)^{k-1} \frac{m_k}{k!} \leq P\{\xi > 0\} \leq \sum_{k=1}^{2d-1} (-1)^{k-1} \frac{m_k}{k!}.$$

4.106. Пусть выполнены условия задачи 4.105. Доказать, что

$$\sum_{k=n}^{n+2d-1} (-1)^{k-n} C_k^{n+2d-1} \frac{m_k}{k!} \leq P\{\xi = n\} \leq \sum_{k=n}^{n+2d} (-1)^{k-n} C_k^{n+2d} \frac{m_k}{k!},$$

если $n=0, 1, \dots$ и $m_{n+2d-1} < \infty$.

4.107. Пусть выполнены условия задачи 4.105. Доказать, что при любом $n=1, 2, \dots$

$$\sum_{k=n}^{n+2d-1} (-1)^{k-n} C_k^{n+2d-1} \frac{m_k}{k!} \leq P\{\xi \geq n\} \leq \sum_{k=n}^{n+2d} (-1)^{k-n} C_k^{n+2d} \frac{m_k}{k!},$$

если $m_{n+2d-1} < \infty$.

4.108. Метод моментов. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин и

$$m_k^{(n)} = M\xi_n^{[k]} \quad (n, k=1, 2, \dots).$$

Доказать, что если существует такая целочисленная неотрицательная случайная величина ξ , что при любом $k=1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_k^{(n)} = M\xi^{[k]} = m_k < \infty$$

и $m_k = o(k! k^{-r})$, $k \rightarrow \infty$, для любого $r < \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi_n = k\} = P\{\xi = k\}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

4.109. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин. Доказать, что если при любом $k=1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n^{[k]} = \lambda^k, \quad 0 < \lambda < \infty,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi_n = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ для любого $m=0, 1, 2, \dots$, т. е. распределение ξ_n сходится к распределению Пуассона с параметром λ при $n \rightarrow \infty$.

4.110. Пассажирский поезд состоит из N вагонов по s мест в каждом вагоне. В момент отправления в поезде находилось n пассажиров. Обозначим символом $\mu_i = \mu_i(n, N, s)$ число вагонов, в которых при отправлении поезда находилось ровно i пассажиров, $i = 0, 1, \dots, s$. Предполагая, что все $n!C_{N,s}^n = (Ns)^{(n)}$ вариантов размещения пассажиров в поезде равновероятны, найти формулы для факториальных моментов величин $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s$. Проанализировать поведение математических ожиданий μ_i при изменении n от 0 до Ns .

4.111. Пусть выполнены условия задачи 4.110. Найти явное выражение для $P\{\mu_i(n, N, s) = k\}$.

4.112. Пусть выполнены условия задачи 4.110. Показать, что если s и i фиксированы, а $n, N \rightarrow \infty$ так, что $M\mu_i(n, N, s) \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, то при любом $k = 1, 2, \dots$

$$M(\mu_i(n, N, s))^{(k)} \rightarrow \lambda^k.$$

Вывести отсюда, что тогда для любого $m = 0, 1, \dots$

$$P\{\mu_i(n, N, s) = m\} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

4.113. Пусть n частиц размещаются по N ячейкам, причем каждая частица независимо от остальных с одинаковыми вероятностями (равными $1/N$) может попасть в любую из N ячеек. Обозначим через $\mu_r(n, N)$ число ячеек, в которых находится ровно по r частиц. Найти формулу для $M\mu_r(n, N)$ и доказать, что если $r = 0, 1, 2, \dots$ фиксировано, а $n, N \rightarrow \infty$ так, что $M\mu_r(n, N) \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$P\{\mu_r(n, N) = m\} \rightarrow \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots$$

4.114. Пусть частицы последовательно и независимо друг от друга размещаются по N ячейкам так, что i -я ($i = 1, 2, \dots$) частица попадает в j -ю ($j = 1, \dots, N$) ячейку с вероятностью $1/N$. Положим

$$v_r(N) = \min\{n: \mu_r(n, N) > 0\}, \quad r = 2, 3, \dots,$$

где $\mu_r(n, N)$ — число ячеек, содержащих после размещения n частиц ровно по r частиц. Найти такую последовательность чисел $b_1, b_2, \dots$, что распределения случайных величин $v_r(N)/b_N$ при $N \rightarrow \infty$ и фиксиро-

ванном r сходятся к невырожденному закону, и сам предельный закон.

4.115. Пусть n частиц независимо размещаются по N^2 ячейкам, расположенным в виде квадратной таблицы размером $N \times N$. Назовем ячейку *свободной*, если после размещения n частиц ни в нее, ни в ячейки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбце, не попало ни одной частицы. Найти предельное распределение числа $x(n, N)$ свободных ячеек, когда

$$n = N (\ln \lambda N + o(1)), \quad N \rightarrow \infty.$$

§ 5. Применения центральной предельной теоремы и метода характеристических функций

4.116 (см. 4.2). Случайная величина η_n равна сумме очков, выпавших при n независимых подбрасываниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$P \left\{ \left| \frac{\eta_n}{n} - 3,5 \right| \geq 0,1 \right\} \leq 0,1.$$

4.117. Складывается 10^4 чисел, округленных с точностью до 10^{-m} . Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0,5 \cdot 10^{-m}, 0,5 \cdot 10^{-m})$, найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, будет лежать суммарная ошибка.

4.118. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$$

называется *распределением χ^2 (хи-квадрат) с n степенями свободы*.

а) Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\chi_n^2}{n} - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0$ при любом $\varepsilon > 0$.

б) Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\chi_n^2 - n \chi_n^2}{\sqrt{n \chi_n^2}} \leq x \right\}$, $-\infty < x < \infty$.

4.119. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Распределение случайной величины

$$\tau_n = \frac{\xi_n}{\sqrt{(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)/n}}$$

называется *распределением Стьюдента с n степенями свободы*. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\tau_n \leq x\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

4.120. Пусть $\xi_{n,i}$ обозначает число появлений i -го исхода в n независимых испытаниях с N несовместными исходами; вероятности появления этих исходов в каждом из испытаний равны $p_1, p_2, \dots, p_N \geq 0$ соответственно, $p_1 + \dots + p_N = 1$. Далее, пусть $a_1, \dots, a_N$ — действительные числа и

$$\eta_n = a_1 \xi_{n,1} + \dots + a_N \xi_{n,N}.$$

Найти $M\eta_n$, $D\eta_n$ и предельное распределение $\frac{\eta_n - M\eta_n}{\sqrt{D\eta_n}}$ при $n \rightarrow \infty$.

4.121. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и одинаково распределены; $M\xi_k = a$, $D\xi_k = b^2$, $k = 1, 2, \dots$. Положим $\eta_k = \xi_k + \xi_{k+1} + \xi_{k+2}$, $k = 1, 2, \dots$. Найти:

а) $M\eta_k$, $\text{cov}(\eta_k, \eta_l)$ ($k \neq l$), $D\eta_k$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\eta_1 + \dots + \eta_n - 3na}{b\sqrt{3n}} \leq x\right\}.$

4.122. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ . Найти

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x\right\}.$$

4.123. Два игрока заняты азартной игрой, состоящей в подбрасывании несимметричной монеты, которая падает «гербом» с вероятностью $p > 0$ и «решкой» с вероятностью $q = 1 - p > 0$. Ставки игроков в каждом туре равны соответственно $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ руб.; если монета падает «гербом», то выигрыш $a_1 + a_2$ получает первый игрок, если «решкой» — то второй. Предположим, что исходные капиталы игроков бесконечны, и обозначим через $S_n^{(1)}$ суммарный выигрыш первого игрока за n туров, а через $S_n^{(2)} (= -S_n^{(1)})$ — второго. Показать, что:

а) существует только одно такое значение $x > 0$, что при $a_1/a_2 = x$ для любого y , $|y| < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{S_n^{(1)} > y\} < 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \{S_n^{(2)} > y\} < 1.$$

б) если $a_1 = a_2 x$, где значение x то же, что в п. а), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{S_n^{(1)} > S_n^{(2)}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \{S_n^{(1)} < S_n^{(2)}\} = \frac{1}{2}.$$

4.124. Последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ такова, что при любом $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n = \zeta_{n,1} + \zeta_{n,2} + \dots + \zeta_{n,n},$$

где $\zeta_{n,1}, \dots, \zeta_{n,n}$ — независимые случайные величины,

$$M \zeta_{n,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^n D \zeta_{n,k} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^n M |\zeta_{n,k}|^3 = 0.$$

Доказать, что распределения случайных величин ξ_n/s_n при $n \rightarrow \infty$ сходятся к стандартному нормальному распределению.

4.125. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы,

$$P \{\xi_n = 1\} = \frac{1}{n}, \quad P \{\xi_n = 0\} = \frac{n-1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Найти предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - M(\xi_1 + \dots + \xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1 + \dots + \xi_n)}} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

4.126. Пусть для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ независимы и одинаково распределены:

$$P \{\xi_j^{(n)} = \sqrt[3]{n}\} = P \{\xi_j^{(n)} = -\sqrt[3]{n}\} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{n^2}},$$

$$P \{\xi_j^{(n)} = 0\} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

при любом $j = 1, \dots, n$. Найти $M \xi_j^{(n)}$, $D \xi_j^{(n)}$ и предельное распределение случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{n D \xi_1^{(n)}}} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

4.127*. Пусть для каждого $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ независимы и одинаково распределены:

$$P\{\xi_j^{(n)} = \sqrt{n}\} = P\{\xi_j^{(n)} = -\sqrt{n}\} = \frac{1}{2n},$$

$$P\{\xi_j^{(n)} = 0\} = \frac{n-1}{n}$$

при любом $j = 1, \dots, n$. Найти $M\xi_j^{(n)}$, $D\xi_j^{(n)}$ и предельное распределение случайной величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{n D\xi_1^{(n)}}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

4.128. Случайная величина ξ_n имеет распределение с дробно-линейной производящей функцией $\varphi_n(z) = \frac{a_n + (1-d_n-a_n)z}{1-d_nz}$, $0 \leq a_n \leq 1$, $0 \leq d_n < 1$. Какие невырожденные законы распределения $F(x)$ могут быть предельными для последовательности $F_n(x) = P\left\{\frac{\xi_n}{A_n} \leq x\right\}$, где $A_n \rightarrow \infty$ — некоторые нормирующие константы? Какие условия надо наложить на последовательности a_n, d_n, A_n , чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$, $x > 0$?

4.129. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, неотрицательны и одинаково распределены:

$$P\{\xi_1 \geq 0\} = 1, \quad M\xi_1 = \mu > 0, \\ D\xi_1 = \sigma^2, \quad 0 < \sigma^2 < \infty;$$

пусть $N_t = \max\{n \geq 0: \xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\}$, $t \geq 0$ (если $\xi_1 > t$, то $N_t = 0$). Показать, что для любого x , $-\infty < x < \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left\{N_t < \frac{t}{\mu} + \frac{x\sigma}{\mu} \sqrt{\frac{t}{\mu}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

4.130. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют показательное распределение с параметром α :

$$P\{\xi_i \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$ — значения $\xi_1, \dots, \xi_n$, расположенные в порядке неубывания (вариационный ряд).

Используя результаты задачи 3.46, показать, что если $n, m \rightarrow \infty$ и $n - m \rightarrow \infty$, то:

$$\begin{aligned} \text{а) } M_{\xi(m)}^{\varepsilon} &= \frac{1+o(1)}{\alpha} \ln \frac{n}{n-m}, \\ D_{\xi(m)}^{\varepsilon} &= \frac{1+o(1)}{\alpha} \frac{m}{n(n-m)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim P \left\{ \frac{\xi(m) - M_{\xi(m)}^{\varepsilon}}{\sqrt{D_{\xi(m)}^{\varepsilon}}} \leq x \right\} &= \\ = \lim P \left\{ \left(\alpha \xi(m) - \ln \frac{n}{n-m} \right) \sqrt{\frac{n(n-m)}{m}} \leq x \right\} &= \Phi(x), \\ &-\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

4.131. Случайные величины $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ независимы и одинаково распределены:

$$P \{ \zeta_i \leq x \} = F(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

а $\zeta_{(1)} \leq \dots \leq \zeta_{(n)}$ — их вариационный ряд (см. задачу 4.130). Доказать, что если в некоторой окрестности точки $x = z_0$ существует непрерывная производная $p(x) = F'(x) > 0$, то при $m/n \rightarrow F(z_0)$, $n \rightarrow \infty$,

$$\lim P \left\{ \frac{\zeta_{(m)} - z_0}{\sqrt{F(z_0)(1-F(z_0))}} p(z_0) \leq x \right\} = \Phi(x).$$

4.132. Частицы последовательно размещаются в N ячейках так, что вероятность попадания j -й ($j = 1, 2, \dots$) частицы в i -ю ($i = 1, 2, \dots, N$) ячейку равна $1/N$ и номер ячейки, в которую попадает частица, не зависит от номеров ячеек, в которые попали предыдущие частицы. Пусть v_k — порядковый номер частицы, после размещения которой впервые число занятых (т. е. не пустых) ячеек становится равным k , и $\tau_k = v_k - v_{k-1}$ ($v_0 = 0$).

а) Найти производящую функцию распределения τ_m и $P \{ \tau_m > v_k - v_l \}$, $m > k > l$.

б) Найти

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{r \leq m \leq N} P \{ \tau_m > v_{m-1} - v_{m-r} \}, \quad r = 2, 3, \dots$$

4.133. Пусть случайная величина v_k та же, что в задаче 4.132. Найти предельное распределение случайной величины $v_k - k$, когда $N \rightarrow \infty$, $k^2/N \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$.

4.134. Пусть выполнены условия задачи 4.132. Найти асимптотические формулы для Mv_m , Dv_m и пре-

дельное распределение $\frac{v_m - Mv_m}{\sqrt{Dv_m}}$, когда $N \rightarrow \infty$ и $\alpha_1 N \leq m \leq \alpha_2 N$ при некоторых $\alpha_1, \alpha_2, 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

4.135. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы и имеют одно и то же распределение с характеристической функцией $f(t)$. Доказать, что если при некоторых $C > 0, 0 < \alpha \leq 2$,

$$f(t) = 1 - C|t|^\alpha(1 + o(1)), \quad t \rightarrow 0,$$

то при $n \rightarrow \infty$ существует предельное распределение случайных величин

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n^{1/\alpha}}.$$

Найти его характеристическую функцию.

4.136*. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное симметричное распределение с плотностью $p(x) \sim C|x|^{-\alpha} (|x| \rightarrow \infty)$, где $C > 0, 1 < \alpha < 3$. Доказать, что

$$Me^{it\xi} = 1 - 2C|t|^{\alpha-1}(1 + o(1)) \int_0^\infty \frac{1 - \cos u}{u^\alpha} du, \quad t \rightarrow 0.$$

4.137. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с параметром a , т. е. имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Показать, что характеристическая функция $Me^{it\xi}$ распределения ξ равна $e^{-a|t|}$. Вывести отсюда и из задачи 4.136, что

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

4.138. Независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ имеют абсолютно непрерывное симметричное распределение с плотностью $p(x)$, непрерывной в точке $x=0, p(0) < \infty$. Используя результаты задач 4.135—4.137, найти предельное распределение последовательности случайных величин

$$\zeta_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \dots + \frac{1}{\xi_n} \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

4.139. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 имеют распределение Коши с параметром a ; при этом ξ_1 и ξ_2 независимы, а $P\{\xi_3 = \xi_1\} = 1$. Сравнить характеристические функции и функции распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ независимых и суммы $\xi_1 + \xi_3$ зависимых одинаково распределенных случайных величин.

4.140. Используя результат задачи 4.137, вычислить

$$I_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)(b^2 + (x-u)^2)}.$$

Глава 5

ЦЕПИ МАРКОВА

Во введении к гл. 2 была определена общая схема последовательности зависимых испытаний с исходами $1, \dots, N$, в которой вероятность появления цепочки исходов $i_1, \dots, i_k$ в испытаниях с номерами $1, \dots, k$ представлялась в виде

$$P(i_1, \dots, i_k) = p(i_1) p(i_2|i_1) \dots p(i_k|i_1 \dots i_{k-1}), \quad (5.1)$$

где $p(i_j|i_1 \dots i_{j-1}) \geq 0$ — функции, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i_j=1}^N p(i_j|i_1 \dots i_{j-1}) = 1 \quad (5.2)$$

для любого $j \geq 1$ и любых $i_1, \dots, i_{j-1} \in \{1, \dots, N\}$

В предыдущих главах, как правило, рассматривался частный случай однородной последовательности независимых испытаний, когда функции $p(i_j|i_1 \dots i_{j-1}) \equiv p(i_j)$ не зависели ни от j , ни от $i_1, \dots, i_{j-1}$. В этой главе рассматривается другой важный частный случай общей схемы (5.1), в котором для любого $j \geq 2$ и любых $i_1, \dots, i_{j-1}$

$$p(i_j|i_1 \dots i_{j-1}) = p_{i_{j-1}, i_j}; \quad (5.3)$$

если выполнено (5.3), то говорят, что последовательность испытаний образует *однородную цепь Маркова*. Условие (5.3) часто называют *марковским свойством*; оно означает, что если исход какого-то испытания фиксирован, то результаты испытаний, следующих за выбранным, не зависят от результатов испытаний,

предшествовавших ему. При построении математических моделей ряда реальных явлений предположение (5.3) оказывается довольно естественным.

Для цепей Маркова начальному испытанию приписывают номер 0 (а не 1, как в (5.1)), исходы $1, \dots, N$ называют состояниями цепи, вектор

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_N^{(0)}) = (p(1), \dots, p(N))$$

— вектором начальных вероятностей, а матрицу

$$P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

— матрицей вероятностей перехода. В силу (5.2) все элементы матрицы P неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1; матрицы, обладающие этими свойствами, называют стохастическими.

Отметим, что все введенные здесь определения легко распространяются на бесконечные последовательности испытаний (цепи Маркова) с бесконечным множеством исходов (состояний) $\{1, 2, \dots\}$.

Из определений (5.1), (5.3) следует, что если ξ_t — состояние цепи Маркова в момент t и

$$p_{ij}(t) = P\{\xi_t = j | \xi_0 = i\} = P\{\xi_{t+s} = j | \xi_s = i\}, \quad s, t \geq 0,$$

— вероятность перехода из состояния i в состояние j за t шагов, то матрица

$$P(t) = \|p_{ij}(t)\|_{i,j=1}^N = P^t,$$

а векторы $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \dots, p_N^{(n)})$, где $p_j^{(n)} = P(\xi_t = j)$, удовлетворяют соотношению

$$p^{(t+s)} = p^{(t)} P^s;$$

далее для любых $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $i_0, \dots, i_k \in \{1, \dots, N\}$

$$P\{\xi_{t_0} = i_0, \xi_{t_1} = i_1, \dots, \xi_{t_k} = i_k\} =$$

$$= P\{\xi_{t_0} = i_0\} \prod_{j=1}^k p_{i_{j-1} i_j}(t_j - t_{j-1}).$$

Таким образом, с формальной точки зрения исследование многих свойств цепей Маркова сводится к изучению соответствующих свойств степеней матриц веро-

яностей перехода (об одном из способов получения явных формул для элементов степеней матриц см. задачи 5.20, 5.21).

Важную роль при изучении цепей Маркова играет классификация их состояний. Говорят, что состояние j *следует* за состоянием i ($i \rightarrow j$), если $p_{ij}(t) > 0$ для некоторого целого $t > 0$; если $i \rightarrow j$ и $j \rightarrow i$, то состояния i и j называют *сообщающимися* ($i \leftrightarrow j$). Если для состояния i найдется такое состояние $j = j(i)$, что $i \rightarrow j$, но $j \not\rightarrow i$ (т. е. $p_{ji}(t) \equiv 0$), то состояние i называется *несущественным*; в противном случае состояние i *существенное*. Множество всех существенных состояний с помощью отношения $\leftrightarrow$ (нетрудно проверить, что это отношение является *отношением эквивалентности*) разбивается на *классы сообщающихся существенных состояний*; переходы траектории цепи из одного такого класса в другой невозможны. Множество несущественных состояний тоже разбивается на классы сообщающихся состояний; траектория цепи Маркова может выходить из любого такого класса, но, выйдя из такого класса, вернуться в него уже не может. Если множество состояний цепи Маркова конечно, то с вероятностью 1 траектория цепи рано или поздно выходит из множества несущественных состояний и после этого остается в одном из классов существенных сообщающихся состояний.

Говорят, что класс $\mathcal{A}$ сообщающихся состояний *периодический* с периодом $d > 1$, если для состояния $i \in \mathcal{A}$

$$\{t: p_{ii}(t) > 0\} \subset \{d, 2d, 3d, \dots\} \quad (5.4)$$

и любое число $d_1 > d$ не удовлетворяет (5.4); определенное по формуле (5.4) число d зависит от класса $\mathcal{A}$, но не от выбора элемента $i \in \mathcal{A}$. Если (5.4) выполняется только при $d = 1$, то класс $\mathcal{A}$ называют *аперiodическим*.

Пусть все состояния цепи Маркова ξ_t с матрицей вероятностей перехода P образуют один аперiodический класс сообщающихся состояний. Тогда существует такое целое число t_0 , что при любом $t \geq t_0$ все элементы матрицы P^t положительны и справедлива следующая

Теорема. Если для цепи Маркова с $N < \infty$ состояниями при некотором $t_0 > 0$ все элементы матрицы P^{t_0}

положительны, то существуют

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j > 0, \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Распределение $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ не зависит от начального состояния i цепи ξ_i и называется *предельным* или *финальным* распределением ξ_i . Кроме того, распределение π *стационарно*, т. е. $\pi P^t = \pi$ для любого $t = 1, 2, \dots$. В случае, рассмотренном в теореме, стационарное распределение единственно и совпадает с предельным; если цепь Маркова имеет несколько апериодических классов существенных сообщающихся состояний, то существует много стационарных распределений и предельное распределение зависит от начального; если цепь содержит несущественные состояния, то соответствующие им предельные вероятности равны 0.

Наконец, если все состояния цепи Маркова ξ_i образуют один класс периода $d > 1$, то предельного распределения, вообще говоря, не существует; существуют только

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(td + k) = \pi_j^k, \\ i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

5.1. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени $t = 0$ определяется вектором $(0,7; 0,2; 0,1)$. Найти:

- 1) распределение по состояниям в момент $t = 2$;
- 2) вероятность того, что в моменты $t = 0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2;
- 3) стационарное распределение.

5.2. Пусть ξ_i — номер состояния в цепи Маркова в момент времени i ; $P(\xi_0 = 1) = 1$, и матрица вероятностей перехода имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 3/11 & 6/11 \end{pmatrix};$$

положим

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_i = 1, \\ 2, & \text{если } \xi_i \neq 1. \end{cases}$$

Показать, что последовательность η_i является цепью Маркова. Найти ее матрицу вероятностей перехода.

5.3. Случайные величины ξ_i , $i=1, 2, \dots$, независимы и

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = -1) = 1 - p = q.$$

Положим $\eta_0 = 0$; $\eta_{i+1} = \eta_i + \xi_{i+1}$. Является ли последовательность η_i цепью Маркова? Найти $P(\eta_i = m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$

5.4. Пусть ξ_i , $i=1, 2, \dots$, — независимые случайные величины, $P(\xi_i = 1) = 1 - P(\xi_i = -1) = p$. Являются ли цепями Маркова последовательности случайных величин:

- 1) $\eta_i = \xi_i \xi_{i+1}$;
- 2) $\eta_i = \xi_i \xi_{i+1} \dots \xi_{i+k}$;
- 3) $\eta_i = \varphi(\xi_i, \xi_{i+1})$, где $\varphi(-1, -1) = 1$, $\varphi(-1, 1) = 2$, $\varphi(1, -1) = 3$, $\varphi(1, 1) = 4$?

Для цепей Маркова найти вероятности перехода за один шаг.

5.5. В N ячейках последовательно независимо друг от друга равновероятно размещают частицы. Пусть $\mu_0(n)$ — число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n частиц. Показать, что последовательность $\mu_0(n)$, $n=1, 2, \dots$, является цепью Маркова. Найти вероятности перехода.

5.6. В N ячейках независимо друг от друга размещаются комплекты, состоящие из m частиц. Частицы одного комплекта размещаются в ячейках по одной, и все возможные выборы m мест из N имеют одинаковые вероятности. Обозначим через $\mu_0(n)$ число ячеек, оставшихся пустыми после размещения n комплектов. Показать, что последовательность $\mu_0(n)$, $n=1, 2, \dots$, является цепью Маркова. Найти вероятности перехода.

5.7. Матрица $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ с неотрицательными элементами называется дважды стохастической, если $p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1N} = p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2N} = 1$ для любого $i=1, 2, \dots, N$. Показать, что если цепь Маркова ξ_i с состояниями $1, \dots, N$ имеет дважды стоха-

стическую матрицу вероятностей перехода $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$, то равномерное распределение на множестве $\{1, \dots, N\}$ является стационарным для цепи ξ_t .

5.8. Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots$ — цепь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, 3\}$, матрицей вероятностей перехода $\|p_{ij}\|$ и стационарным распределением π_j . Показать, что если $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$ и $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$, то $p_{12} = p_{23} = p_{31}$ и $p_{13} = p_{31} = p_{22}$.

5.9. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, и $f(x, y)$ — функция, принимающая значения в множестве $\{1, \dots, N\}$. Является ли последовательность случайных величин

$$\xi_0 \quad (P(\xi_0 = k) = p_k^{(0)}), \quad \xi_{t+1} = f(\xi_t, \eta_{t+1}), \\ t = 0, 1, 2, \dots,$$

цепью Маркова?

5.10. Пусть $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Показать, что для любого начального распределения $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, \dots, p_N^{(0)})$ и для любой матрицы переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ можно указать такие функции $f(x, y)$ и $g(y)$ ($x \in \{1, \dots, N\}$, $y \in [0, 1]$), что последовательность $\xi_0 = g(\eta_0)$, $\xi_{t+1} = f(\xi_t, \eta_{t+1})$, $t = 0, 1, \dots$, будет цепью Маркова с начальным распределением $p^{(0)}$ и матрицей вероятностей перехода P .

5.11. Игральная кость последовательно перекидывается с одной грани равновероятно на любую из четырех соседних независимо от предыдущего. К какому пределу стремится при $t \rightarrow \infty$ вероятность того, что при t -м перекидывании кость окажется на грани «6», если сначала она находилась в этом же положении?

5.12. Матрица вероятностей перехода $\|p_{ij}\|$ цепи Маркова ξ_t с $n+1$ состояниями имеет вид: $p_{ii} = 1 - \alpha$, $i = 1, 2, \dots, n+1$; $p_{ij} = \alpha/n$, $i \neq j$. В процессе, начавшемся из состояния k , $k \neq n+1$, обозначим через τ_n момент первого попадания в состояние $n+1$. Подобрать последовательность A_n ($A_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$) так, чтобы существовал предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau_n/A_n > x),$$

и найти его.

5.13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $P\{\xi_1=1\} = P\{\xi_1=-1\} = 1/2$; $z_0=0, z_k=z_{k-1}+\xi_k, k=1, 2, \dots$. Положим $\tau_N = \min\{n \geq 1: |z_n|=N\}$. Найти $M\tau_1, M\tau_2, M\tau_3$.

5.14. Пусть последовательность $z_0, z_1, \dots$ определена как в задаче 5.13. Показать, что $M\tau_N = N^2$.

5.15. Движение частицы по целым точкам отрезка $[0, N]$ описывается цепью Маркова с $N+1$ состояниями и вероятностями перехода за один шаг $p_{01}=p_{NN}=1$; $p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=1-p=q$ ($i=1, \dots, N-1$). Пусть $\xi(t)$ — положение частицы в момент t и $\tau = \min\{t: \xi(t)=N\}$. Показать, что

$$m_k = M\{\tau | \xi(0)=k\} = \begin{cases} \frac{2pq}{(p-q)^2} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k \right) - \frac{N-k}{q-p} & (p \neq q), \\ (N-k)(N+k) & (p=q=1/2). \end{cases}$$

5.16. Движение частицы по целым точкам отрезка $[0, N]$ описывается цепью Маркова с $N+1$ состояниями и вероятностями перехода за один шаг $p_{00}=p_{NN}=1$, $p_{i,i+1}=p, p_{i,i-1}=q$ ($i=1, \dots, N-1$). Пусть $\xi(t)$ — положение частицы в момент t , $p_{ij}(t) = P\{\xi(t)=j | \xi(0)=i\}$. Найти вероятности поглощения частицы в точках 0 и N :

$$\pi_k^{(0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{k0}(t), \quad \pi_k^{(N)} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{kN}(t).$$

5.17. В городе N каждый житель имеет одну из трех профессий: A, B, C . Дети отцов, имеющих профессии A, B, C , сохраняют профессии отцов с вероятностями $3/5, 2/3, 1/4$ соответственно, а если не сохраняют, то с равными вероятностями выбирают любую из двух других профессий. Найти:

1) распределение по профессиям в следующем поколении, если в данном поколении профессию A имело 20% жителей, B — 30%, C — 50%;

2) предельное распределение по профессиям, когда число поколений растет;

3) распределение по профессиям, не меняющееся при смене поколений.

5.18. По двум урнам разложено N черных и N белых шаров так, что каждая урна содержит N шаров. Число черных шаров в первой урне в момент $t=0$,

1, 2, ... обозначим ξ_t . В каждый целочисленный момент времени случайно выбирают по одному шару из каждой урны и меняют их местами. Показать, что ξ_t является цепью Маркова со стационарным распределением

$$\pi_k = (C_N^k)^2 / C_{2N}^N, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

5.19. Матрица вероятностей перехода P и распределение q по состояниям в момент $t=0$ цепи Маркова ξ_t имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 3/12 & 2/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 2/12 \\ 1/12 & 1/12 & 3/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$q = (1/3, 1/3, 0, 0, 0, 0).$$

Найти:

- несущественные состояния;
- математическое ожидание времени τ до выхода из множества несущественных состояний;
- вероятности $p_i^{(\alpha)}$, $p_i^{(\beta)}$ попадания в классы состояний $\alpha = \{3, 4\}$, $\beta = \{5, 6\}$, если начальным состоянием является $i \in \{1, 2\}$;
- предельное при $t \rightarrow \infty$ распределение по состояниям, т. е. величины $\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\xi_t = k)$.

5.20. Показать, что если все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ различны, то элементы матрицы $A^m = \|a_{ij}^{(m)}\|_{i,j=1}^n$ представляются в виде

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n c_{ij}^{(k)} \lambda_k^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

5.21. Показать, что если матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ имеет собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, причем кратность λ_j равна s_j , $s_1 + \dots + s_r = n$, то элементы матрицы $A^m = \|a_{ij}^{(m)}\|_{i,j=1}^n$ представляются в виде

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^r \lambda_k^m \sum_{l=0}^{s_k-1} c_{ij}^{(k,l)} m^l, \quad m = 1, 2, \dots$$

5.22. Используя задачи 5.20 и 5.21, показать, что получение формулы для вероятности перехода за n шагов из состояния i в состояние j в цепи Маркова

с N состояниями может быть сведено к нахождению собственных чисел матрицы $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ вероятностей перехода за один шаг, вычислению $P, P^2, \dots, P^{N-1}$ и решению системы линейных уравнений.

5.23. Матрица вероятностей перехода $P = \|p_{ij}\|$ цепи Маркова ξ_t с состояниями 1 и 2 определяется формулами

$$p_{11} = 1 - \alpha, \quad p_{12} = \alpha, \quad p_{21} = \beta, \quad p_{22} = 1 - \beta.$$

Найти вероятности $p_{ij}(t)$ перехода за время t и стационарные вероятности π_j .

5.24. Для цепи Маркова ξ_t , рассмотренной в задаче 5.23, обозначим через $v_j(t)$ число попаданий в состояние 1 за время t . Показать, что для любого $j = 1, 2$ при $t \rightarrow \infty$

$$M \{v_j(t) | \xi_0 = j\} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} t (1 + o(1)),$$

$$D \{v_j(t) | \xi_0 = j\} = o(t^2).$$

5.25. Пусть выполнены условия задачи 5.24. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $j = 1, 2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{v_j(t)}{t} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right| > \varepsilon | \xi_0 = j \right\} = 0.$$

5.26. Пусть цепь Маркова ξ_t с состояниями $1, \dots, N$ имеет матрицу вероятностей перехода $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$, удовлетворяющую условию

$$\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \left| p_{ij} - \frac{1}{N} \right| \leq \varepsilon.$$

Показать, что если $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ — стационарное распределение цепи ξ_t , то

$$\sum_{j=1}^N \left| \pi_j - \frac{1}{N} \right| \leq \varepsilon.$$

5.27. Пусть ξ_t и ξ'_t — цепи Маркова с матрицами вероятностей перехода $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^N$ и $P' = \|p'_{ij}\|_{i,j=1}^N$ соответственно, а $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ и $\pi' = (\pi'_1, \dots, \pi'_N)$ — стационарные распределения этих цепей. Следует ли из близости элементов матриц P и P' (например, из

малости величины $\sum_{i,j=1}^N |p_{ij} - p'_{ij}|$ близость векторов π и π' ?

5.28*. Частица совершает случайное блуждание по множеству точек плоскости с целочисленными координатами. За единицу времени частица перемещается на единичное расстояние параллельно одной из осей координат. После прохождения каждого единичного отрезка частица выбирает направление дальнейшего движения: либо продолжать движение в том же направлении, либо повернуть налево, либо направо (каждый из этих вариантов выбирается с вероятностью $1/3$ независимо от предыдущих движений частицы). Пусть $z_n = (z_n^{(1)}, z_n^{(2)})$ — положение частицы в момент n . Найти Mz_n при условии, что $z_0 = (0, 0)$, $z_1 = (1, 0)$.

5.29*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, принимают значения 1 и -1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, и

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Обозначим через v число таких n , что $S_n = 0$.

а) Показать, что если $p \neq q$, то $P\{v < \infty\} = 1$;

б) показать, что если $p = q = 1/2$, то $P\{v = \infty\} = 1$.

5.30*. Независимые случайные векторы $\xi_n = (\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,s}) \in R^s$, $n = 1, 2, \dots$, имеют независимые компоненты и $P\{\xi_{n,i} = 1\} = P\{\xi_{n,i} = -1\} = \frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq s$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$, и обозначим через v число таких n , что $S_n = (0, \dots, 0)$. Показать, что $P\{v = \infty\} = 1$ при $s = 2$ и что $P\{v < \infty\} = 1$ при $s \geq 3$.

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В математической статистике исследуются выводы, которые могут быть сделаны на основе эмпирических данных. Случайной выборкой объема n (или просто выборкой) называется случайный вектор

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (6.1)$$

где x_i независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $F(x) = P(x_i \leq x)$. Случайная выборка

является математической моделью последовательно проводимых измерений или наблюдений.

Обычно для выборки (6.1) известен только тип распределения (например, нормальный), но неизвестны параметры, от которых зависит распределение. В этом случае по выборке требуется каким-либо образом определить приближенные значения неизвестных параметров.

Пусть $P(x_i \leq x) = F_i(x, \theta)$. Оценкой неизвестного параметра θ назовем произвольную функцию $\theta_n^* = \theta_n^*(x_1, \dots, x_n)$. Оценка θ_n^* является несмещенной оценкой θ , если $M\theta_n^* = \theta$. Если θ_n^* при $n \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к θ , то оценка θ_n^* называется *состоятельной*.

Может оказаться, что существуют такие функции $\theta_n = \theta_n(x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{\theta}_n = \bar{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$, что $P(\theta_n < \theta < \bar{\theta}_n) = 1 - 2\alpha$ одинакова при всех значениях неизвестного параметра θ . В этом случае интервал $(\theta_n, \bar{\theta}_n)$ называют *доверительным интервалом*, и вероятность $1 - 2\alpha$ того, что интервал $(\theta_n, \bar{\theta}_n)$ накроет неизвестный параметр θ , называют *доверительной вероятностью*.

Если при $n \rightarrow \infty$

$$P(\theta_n < \theta < \bar{\theta}_n) \rightarrow 1 - 2\alpha$$

и предельная вероятность не зависит от θ , то интервал $(\theta_n, \bar{\theta}_n)$ будем называть *асимптотическим доверительным интервалом*.

В случае, когда выборка (6.1) соответствует нормальной случайной величине ξ с параметрами $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$, можно построить для неизвестных параметров a и σ^2 доверительные интервалы.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые нормально распределенные величины с параметрами $(0, 1)$. Положим

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2, \quad \tau_n = \frac{\xi_n}{\sqrt{\chi_n^2/n}}.$$

Законы распределения этих величин называются соответственно *распределением χ^2* и *распределением Стьюдента с n степенями свободы*. Определим величины $t_{\alpha, n}$ и $\chi_{\alpha, n}^2$ как решения уравнений

$$P(\tau_n > t_{\alpha, n}) = \alpha, \quad P(\chi_n^2 > \chi_{\alpha, n}^2) = \alpha.$$

Тогда (см. [10])

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - 2\alpha,$$

$$P\left(\chi^2_{1-\alpha, n-1} < \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha, n-1}\right) = 1 - 2\alpha,$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n), \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $\bar{x}$ и s^2 независимы.

Случайные величины (6.1), расположенные в порядке возрастания их значений,

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad (6.2)$$

называют *вариационным рядом*. В частности,

$$x_{(1)} = \min \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_{(n)} = \max \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Эмпирической функцией распределения называется функция $\bar{F}_n(x) = k/n$, если $x \in [x_{(k)}, x_{(k+1)}]$, $k = 0, 1, \dots, n$, где $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(n+1)} = \infty$. Нетрудно проверить, что $\bar{F}_n(x)$ является несмещенной и состоятельной оценкой $F(x)$ при любом x .

Одним из методов получения оценок является *метод наибольшего правдоподобия*. Пусть (6.1) — независимая выборка, соответствующая случайной величине ξ , имеющей плотность распределения $p_{\xi}(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$. *Функцией правдоподобия* называется функция

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n p_{\xi}(x_i, \theta_1, \dots, \theta_k).$$

Оценками наибольшего правдоподобия параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$ называется решение $\theta_1^*, \dots, \theta_k^*$ системы уравнений

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_l} = 0, \quad l = 1, \dots, k.$$

Оценки наибольшего правдоподобия при достаточно общих условиях (см. [7]) оказываются состоятельными и асимптотически нормальными. Аналогично определяется функция L для дискретных случайных величин.

Другой круг задач математической статистики связан с проверкой различных гипотез. Пусть о выборке (6.1) выдвинуто два предположения (две гипотезы):

$H_0: (x_1, \dots, x_n)$ имеет распределение P_0 ,

$H_1: (x_1, \dots, x_n)$ имеет распределение P_1 ,

где P_0, P_1 — два известных распределения.

Тогда правило выбора одной из этих гипотез, или статистический критерий, определяется подмножеством B множества значений $(x_1, \dots, x_n)$ и имеет вид: *если $(x_1, \dots, x_n) \in B$, то принимается гипотеза H_1 , в противном случае — H_0* . Вероятность $\alpha = P_0(B)$, т. е. вероятность принять гипотезу H_1 , когда в действительности верна H_0 , называется *ошибкой 1-го рода*. Вероятность $\beta = P_1(B)$, т. е. вероятность принять H_0 , когда верна H_1 , называется *ошибкой 2-го рода*. Если множество B задано в виде

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in B\} = \{\eta_n = \eta_n(x_1, \dots, x_n) > C\},$$

то функцию $\eta_n = \eta_n(x_1, \dots, x_n)$ называют *статистикой критерия*. Например, пусть $p_0(x)$ плотность распределения каждого x_i при гипотезе H_0 и $p_1(x)$ — соответствующая плотность при гипотезе H_1 . Положим

$$\eta_n = \frac{p_1(x_1) p_1(x_2) \dots p_1(x_n)}{p_0(x_1) p_0(x_2) \dots p_0(x_n)}.$$

Согласно критерию *Неймана — Пирсона* при $\eta_n > C$ (C — некоторая постоянная, определяемая по ошибке 1-го рода) принимается гипотеза H_1 , а в противном случае — H_0 . Этот критерий среди всех критериев с фиксированной ошибкой 1-го рода имеет наименьшую ошибку 2-го рода (см. [7], § 35.3, с. 576, 577). Аналогично формулируется критерий для дискретных распределений.

Иногда формулируется только одна гипотеза о выборке (6.1). Эту гипотезу нужно либо принять, либо отвергнуть. Пусть, например, гипотеза состоит в том, что выборка (6.1) соответствует случайной величине ξ с $P(\xi \leq x) = F_\xi(x)$. Для статистической проверки этой гипотезы используется так называемый *критерий χ^2* . Разобьем числовую ось на $r+1$ непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{r+1}, \bigcup_{i=1}^{r+1} \Delta_i = (-\infty, \infty)$. Положим $p_k = P(\xi \in \Delta_k)$, $k = 1, \dots, r+1$. Обозначим через m_k

число x_i , попавших в Δ_k . Статистикой критерия χ^2 является величина

$$\eta_{n,r} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Оказывается, что (см. [10], гл. 7, § 3) для любого x при $n \rightarrow \infty$

$$P(\eta_{n,r} \leq x) \rightarrow P(\chi_r^2 \leq x). \quad (6.3)$$

По критерию χ^2 предположение о законе распределения отвергается, если $\eta_{n,r} > C$. Величина C выбирается так, чтобы вероятность $P(\eta_{n,r} > C) = \alpha$ была мала. При таком выборе C в случае $\eta_{n,r} > C$ говорят, что гипотеза отвергается с уровнем значимости α . Используя предельное распределение (6.3), можно положить $C = \chi_{\alpha,r}^2$, где $P(\chi_r^2 > \chi_{\alpha,r}^2) = \alpha$. В приложениях интервалы Δ_k , $k = 1, \dots, r+1$, выбирают так, чтобы число членов выборки в каждом из них было не очень маленьким (например, np_k не меньше 7). Если распределение $F_\xi(x)$ зависит от неизвестных параметров, то вероятности $p_k = P(\xi \in \Delta_k)$ вычисляют, заменяя параметры их достаточно хорошими оценками. В этом случае в предельном распределении (6.3) r должно быть уменьшено на число неизвестных параметров (см. [7], § 30.3, с. 460—463).

6.1. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — случайная выборка с $Mx_k = a$, $Dx_k = \sigma^2$, $M(x_k - a)^4 < \infty$, $k = 1, \dots, n$. Найти математическое ожидание величины

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \quad \left(\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right);$$

является ли s^2 состоятельной оценкой σ^2 ?

6.2. Найти математическое ожидание и дисперсию эмпирического момента $m_r = \frac{x_1^r + \dots + x_n^r}{n}$ независимой выборки, соответствующей случайной величине ξ с $M\xi^k = a_k$, $1 \leq k \leq 2r$.

6.3. По неоднородной выборке $x_1, \dots, x_n$, где x_k , $k = 1, \dots, n$, независимы, $Mx_k = a$, $Dx_k = \sigma_k^2$ (σ_k известны), найти несмещенную линейную относительно x_k ($k = 1, \dots, n$) оценку a^* параметра a с наименьшей дисперсией.

6.4. Пусть $x_{i1}, \dots, x_{in_i}$ ($i = 1, \dots, l$) — независимые нормально распределенные величины с параметрами (a, σ_i^2) ;

$$\bar{x} = \frac{1}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l} x_{lk}, \quad s_l^2 = \frac{1}{n_l - 1} \sum_{k=1}^{n_l} (x_{lk} - \bar{x}_l)^2,$$

является ли оценка

$$\bar{x} = \sum_{l=1}^l c_l \bar{x}_l, \quad c_l = \frac{\bar{s}_l^2}{\bar{s}_1^2 + \dots + \bar{s}_l^2},$$

несмещенной оценкой параметра a ?

6.5. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — выборка, $Mx_k^4 < \infty$, $k = 1, \dots, n$. Положим

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{\bar{x} - Mx_1}{s/\sqrt{n}} < x \right).$$

6.6. Пусть $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ — независимая выборка, соответствующая случайной величине (ξ, η) , т. е. $P(x_i \leq x, y_i \leq y) = P(\xi \leq x, \eta \leq y)$. Показать, что величина

$$m_{11} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}),$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k,$$

является несмещенной и состоятельной оценкой $\text{cov}(\xi, \eta)$.

6.7. Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Методом наибольшего правдоподобия найти оценку p^* параметра p . Доказать ее несмещенность и состоятельность.

6.8. Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании.

нии. Построить для p асимптотический доверительный интервал с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$.

6.9. Используя таблицу случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, \dots, x_n$, где x_k равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$ (значения x_k взять с тремя знаками; $n = 50$). Найти:

а) вариационный ряд $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$;

б) эмпирическую функцию распределения (построить ее график и график теоретической функции распределения);

в) $\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$ (сравнить с Mx_k);

г) $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ (сравнить с Dx_k).

6.10. Используя таблицу нормальных случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, \dots, x_n$, где x_k имеет нормальное распределение с параметрами $a = Mx_k = 0,5$, $\sigma^2 = Dx_k = 1$; $n = 50$. Найти: а) вариационный ряд, б) эмпирическую функцию распределения, в) $\bar{x}$, г) s^2 (см. задачу 6.9).

6.11. По выборке, полученной в задаче 6.10, построить доверительный интервал для a (считая a и σ неизвестными) с доверительной вероятностью 0,95.

6.12. Используя метод наибольшего правдоподобия, найти по выборке $x_1, \dots, x_n$, где $P(x_k = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, \dots$, оценку λ^* параметра λ . Будет ли эта оценка несмещенной и состоятельной? Найти $M\lambda^*$, $D\lambda^*$.

6.13. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — выборка, соответствующая показательному распределению с параметром λ . Найти оценку максимального правдоподобия λ^* для λ . Вычислить $M \frac{1}{\lambda^*}$, $D \frac{1}{\lambda^*}$.

6.14. Для оценки параметров a, b, c имеются три независимые выборки $a_1, \dots, a_n$; $b_1, \dots, b_n$; $c_1, \dots, c_n$. Известно, что $c = a + b$ и величины a_i, b_i, c_i распределены нормально с $Ma_i = a$, $Mb_i = b$, $Mc_i = c$. Дисперсии $Da_i = \sigma_a^2$, $Db_i = \sigma_b^2$, $Dc_i = \sigma_c^2$ известны. Найти:

а) оценки наибольшего правдоподобия a^*, b^*, c^* параметров a, b, c , используя для каждого параметра только соответствующую ему выборку, а также найти $Ma^*, Mb^*, Mc^*, Da^*, Db^*, Dc^*$;

б) оценки наибольшего правдоподобия a^{**}, b^{**}, c^{**} , используя сразу три выборки и связь $c = a + b$, и также найти $Ma^{**}, Mb^{**}, Mc^{**}, Da^{**}, Db^{**}, Dc^{**}$;

в) отношения $Da^{**}/Da^{**}, Db^{**}/Db^{**}, Dc^{**}/Dc^{**}$.

6.15. Имеется ml независимых случайных величин, равномерно распределенных в области $G \subset R^n$:

$$\xi_{i1}, \dots, \xi_{im}, \quad i = 1, \dots, l.$$

Для вычисления интеграла $a = \int_G f(x) dx$ образованы величины

$$\eta_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}), \quad \bar{\eta} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \eta_i.$$

Найти несмещенную оценку b^{**} дисперсии $D\eta_i$. Построить асимптотический при $l \rightarrow \infty$ доверительный интервал для a с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$.

6.16. Для величины $A = \alpha + \beta a + \gamma b$ получены оценки

$$A_1^* = a + \beta z_1 + \gamma z_2, \quad A_2^* = a + \beta z_2 + \gamma z_3,$$

где α, β, γ — известные постоянные, z_1, z_2, z_3 — независимые оценки неизвестных параметров: $Mz_2 = b, Mz_1 = Mz_3 = a, Dz_i = \sigma_i^2, i = 1, 2, 3$. Подобрать постоянные c_1, c_2 так, чтобы оценка $A^* = c_1 A_1^* + c_2 A_2^*$ была несмещенной и имела среди несмещенных оценок наименьшую дисперсию. Найти дисперсию полученной оценки.

6.17*. Пусть z_1, z_2, z_3 — несмещенные оценки параметра a ; $Dz_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$), $\text{cov}(z_1, z_2) = \rho, \text{cov}(z_i, z_3) = 0, i = 1, 2$. Найти несмещенную линейную оценку $z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3$ с наименьшей дисперсией и дисперсию этой оценки. Рассмотреть случаи:

$$a) |\rho| < 1, \quad б) \rho = -1, \quad в) \rho = 1.$$

Объяснить результаты в случаях б) и в).

6.18. Функция $y = Ax$ измерена в точке x_i ($i = 1, \dots, k$) n_i раз. Пусть результаты измерений y_{ij} ($j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, k$) не коррелированы и имеют вид

$$y_{ij} = Ax_i + \delta_{ij},$$

где $M\delta_{ij} = 0, D\delta_{ij} = \sigma^2$. Найти оценку A^* параметра A , используя метод наименьших квадратов, т. е. ми-

минимизируя по A выражение

$$I(A) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - Ax_i)^2.$$

Найти MA^* и DA^* .

6.19. В предыдущей задаче обозначим

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Подобрать $c_1, \dots, c_k$ так, чтобы несмещенная оценка

$$A^* = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 + \dots + c_k \bar{y}_k$$

имела наименьшую дисперсию. Найти DA^* при наилучшем выборе $c_1, \dots, c_k$.

6.20. Из урны, содержащей неизвестное число шаров N (шары занумерованы), производится выборка объема n с возвращением. Для оценки числа N используется величина $1/\eta_n$, где

$$\eta_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^N \xi_k (\xi_k - 1),$$

ξ_k — число шаров с номером k в выборке. Найти $M\eta_n$ и асимптотическую формулу для $D\eta_n$ при $n, N \rightarrow \infty$, $\alpha = n/N = \text{const}$.

6.21. Пусть $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, \dots, x_n$, где x_k независимы и равномерно распределены на отрезке $[a, b]$. Являются ли оценки $a^* = x_{(1)}$, $b^* = x_{(n)}$ несмещенными оценками a и b ? Найти Ma^* , Mb^* , Da^* , Db^* .

6.22. Пусть $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, \dots, x_n$, где x_k имеет показательное распределение с плотностью $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$. Найти $Mx_{(1)}$, $Mx_{(n)}$, $Dx_{(1)}$, $Dx_{(n)}$.

6.23. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — выборка и $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ — ее вариационный ряд. Положим

$$\theta_1^* = \bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad \theta_2^* = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}.$$

Найти $M\theta_k^*$, $D\theta_k^*$ ($k = 1, 2$), если:

- x_k равномерно распределены на отрезке $[a, b]$.
- $p_{x_k}(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$.

6.24. Пусть $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, \dots, x_n$, где x_k имеет плотность распределения, равную e^{c-x} при $x \geq c > 0$. Является ли оценка $c^* = x_{(1)} - 1/n$ несмещенной и состоятельной оценкой c ? Найти Mc^* и Dc^* .

6.25. Используя критерий χ^2 , проверить гипотезу о том, что выборка, полученная в задаче 6.9, соответствует равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

6.26. Используя критерий χ^2 , проверить гипотезу о том, что выборка, полученная в задаче 6.10, соответствует нормальному распределению; параметры a и σ считать неизвестными. Уровень значимости положить равным 0,05.

6.27. Найти статистику η_n критерия Неймана — Пирсона для различения по выборке $x_1, \dots, x_n$ гипотез

H_0 : x_k распределены нормально с параметрами (a_0, σ^2) ,

H_1 : x_k распределены нормально с параметрами (a_1, σ^2) .

6.28. Найти статистику η_n критерия Неймана — Пирсона для различения по выборке $x_1, \dots, x_n$ гипотез

H_0 : $P(x_k = i) = p_i^{(0)}, i = 1, 2, \dots, N$,

H_1 : $P(x_k = i) = p_i^{(1)}, i = 1, 2, \dots, N$.

6.29. Статистика ξ_n при гипотезе H_i ($i=0,1$) имеет нормальное распределение с $M\xi_n = a_i n$, $D\xi_n = n\sigma_i^2$; $a_0 < a_1$. Гипотеза H_1 принимается, если $\xi_n > C$, в противном случае принимается H_0 . Найти: а) постоянную $C = C_\alpha$ так, чтобы ошибка 1-го рода была равна α ; б) формулу, связывающую α и β_n ; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$.

6.30. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — выборка. Гипотеза H_0 состоит в том, что x_i равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$, а H_1 — в том, что x_i имеют плотность распределения $g(x)$; $g(x) \neq 1$ при $0 \leq x \leq 1$, $g(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$. Обозначим μ_k число интервалов среди $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ ($k=0, 1, \dots, N-1$), не содержащих ни одного x_i . При гипотезах H_i ($i=0,1$) найти $a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (M\mu_0/n)$, когда $n \rightarrow \infty$, $n/N = \gamma = \text{const}$.

6.31. При гипотезе H_1 , определенной в задаче 6.30, найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\mu_0}{N} = \sigma_1^2$, если $n/N = \gamma$.

Глава 1

1.3. Предположить, что все расположения книг равновероятны. Найти число расположений книг с фиксированным расположением трехтомника.

1.4. За множество Ω принять множество всех последовательностей длины 3, составленных из символов Γ —«герб», P —«решетка».

1.8. Для простоты считать, что в каждой буквенной серии имеются все 10^4 номеров от 0000 до 9999. (На самом деле номер 0000 не выдается. Кроме того, в некоторых сериях не все номера выданы, а часть номеров отсутствует в связи со снятием автомобиля с учета.)

1.10. Положим $A_i = \{ \text{выбранное число } a \text{ делится на } a_i \}$. Воспользоваться тем, что

$$P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \bar{A}_i \right\} = P \left\{ \overline{\bigcup_{i=1}^k A_i} \right\} = 1 - P \left\{ \bigcup_{i=1}^k A_i \right\}.$$

Далее применить формулу (1.12).

1.11. Поскольку $a^2 \equiv 1 \pmod{10}$ тогда и только тогда, когда $a \equiv 1 \pmod{10}$ или $a \equiv 9 \pmod{10}$, надо подсчитать среди чисел $1, 2, \dots, N$ число тех, которые в десятичной записи оканчиваются на 1 или 9. Положив $N = 10k + l$, рассмотреть следующие случаи: $l=0, 1 \leq l < 9, l=9$.

1.12. Если среди чисел $1, \dots, N$ есть ровно m чисел, дающих при делении на r остаток q , то $(m-1)r + q \leq N < mr + q$, т. е. $mr \leq N + r - q < (m+1)r$.

1.14. Введем обозначения для следующих событий:

$$A_k = \{ \xi \text{ делится на } k \},$$

$$B_k = \{ \eta \text{ делится на } k \},$$

$$C_N = \{ \text{числа } \xi \text{ и } \eta \text{ взаимно просты} \}.$$

Тогда $\bar{C}_N = \bigcup_{2 \leq p \leq N} (A_p \cap B_p)$, где объединение берется по всем простым числам p , не превосходящим N . Вероятность $P(\bar{C}_N)$ находится по формуле (1.12). Воспользоваться решением задачи 1.10

и равенством $A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \dots \cap A_{p_r} = A_{p_1 p_2 \dots p_r}$, верным для любых простых $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Показать, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{q_N} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

1.15. Искомая вероятность $p_N = A_N/N^2$, где A_N — число точек плоскости с целыми координатами (x, y) , удовлетворяющими условиям $x \geq 1, y \geq 1, x^2 + y^2 \leq N^2$. Показать, что $A_N \sim \frac{\pi}{4} N^2$ при $N \rightarrow \infty$.

1.16. Число $\xi + \eta$ будет $(n-k+1)$ -значным тогда и только тогда, когда

$$10^{n-k} \leq \xi + \eta < 10^{n-k+1}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (1)$$

поэтому $p_{n-k+1} = \frac{A_{n,k}}{10^{2n}}$, где $A_{n,k}$ — число точек плоскости с целыми координатами (x, y) , $0 \leq x, y \leq 10^n - 1$, для которых выполнены неравенства (1).

1.17. Произведение ξ и η будет $(2n-k)$ -значным тогда и только тогда, когда

$$10^{2n-k-1} \leq \xi \eta < 10^{2n-k}, \quad (1')$$

поэтому $p_{2n-k} = \frac{B_{n,k}}{10^{2n}}$, где $B_{n,k}$ — число точек плоскости с целыми координатами (x, y) , $0 \leq x, y \leq 10^n - 1$, для которых справедливы неравенства (1'). Показать, что $B_{n,k} \sim B_k \cdot 10^{2n}$ при $n \rightarrow \infty$, где B_k — площадь части единичного квадрата $0 \leq x, y \leq 1$, для координат (x, y) точек которой справедливы неравенства $10^{-k-1} \leq xy < 10^{-k}$.

1.18. Показать, что в этом случае вероятность определяется дробью, числитель и знаменатель которой отличаются от числителя и знаменателя соответствующей дроби для выборки с возвращением множителями вида $1 + o(1)$.

1.19. Разность $X^2 - Y^2$ делится на 2 тогда и только тогда, когда четность X и Y одинакова; $X^2 - Y^2$ делится на 3 тогда и только тогда, когда X и Y одновременно либо делятся, либо не делятся на 3.

1.20. При $k=2, 3, 5$ имеем

$$\{X^k - Y^k \equiv 0 \pmod{k}\} = \{X, Y \equiv 0 \pmod{k}\} \cup \{X, Y \not\equiv 0 \pmod{k}\}.$$

1.21. Вывести из теоремы Ферма, что

$$\begin{aligned} \{X^{p-1} - Y^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}\} = \\ = \{X, Y \equiv 0 \pmod{p}\} \cup \{X, Y \not\equiv 0 \pmod{p}\}. \end{aligned}$$

1.22. Чтобы получить явные формулы для указанных в условии вероятностей, воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{3}\} &= \{X, Y \equiv 0 \pmod{3}\} \cup \\ &\cup \{X \equiv 1, Y \equiv -1 \pmod{3}\} \cup \{X \equiv -1, Y \equiv 1 \pmod{3}\}, \\ \{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{7}\} &= \{X, Y \equiv 0 \pmod{7}\} \cup \\ &\cup \{X \in M_1, Y \in M_2\} \cup \{X \in M_2, Y \in M_1\}, \end{aligned}$$

где M_1 — множество всех чисел вида $7k+1, 7k+2, 7k+4$, M_2 — множество всех чисел вида $7k+3, 7k+5, 7k+6$. Для доказательства неравенства при $n > 7$ воспользоваться тем, что $a^2/4 - 1 \leq uv \leq a^2/4$ при $u+v=a, |u-v| \leq 2$. При $4 \leq N \leq 7$ неравенство проверяется непосредственно с помощью явных формул.

1.23. Подсчет числа случаев, приводящих к событию $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, надо производить последовательно, фиксируя сначала число элементов $|A_1| = k$, а затем суммируя полученные результаты по k от 0 до N .

1.24. Согласно задаче 1.23 искомая вероятность при $r=2$ равна $(3/4)^N$. Далее надо действовать по индукции по r . Подсчет числа элементарных событий, входящих в рассматриваемое событие, надо производить, предполагая сначала, что $|A_1| = k$, и пользуясь индукционным предположением, а затем суммируя полученные результаты по k .

1.25. Разбить указанное в условии задачи событие на непересекающиеся события по значениям разностей $\xi_2 - \xi_1 = \xi_3 - \xi_2$ и $\eta_2 - \eta_1 = \eta_3 - \eta_2$.

1.27. Будем считать, что номер билета случайно взят из 1 000 000 номеров, начиная с 000 000 и кончая 999 999. Тогда искомая вероятность равна $10^{-6} \cdot (b_0^2 + b_1^2 + \dots + b_{27}^2)$, где b_k ($k=0, 1, \dots, 27$) — число всех чисел вида $10^3 a_2 + 10 a_1 + a_0$ с $0 \leq a_i \leq 9$, для которых $a_0 + a_1 + a_2 = k$. Показать, что

$$\sum_{k=0}^{27} b_k x^k = (1+x+\dots+x^9)^3 = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x} \right)^3 = (1-x^{10})^3 \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+3}^3 x^k.$$

1.28. Пусть событие $A_i = \{i\text{-й билет счастливый}\}$. Так как при $n < 9$ события A_i попарно несовместны, то вероятность события $A = \bigcup_{i=1}^n A_i = \{\text{имеется хотя бы один счастливый билет}\}$ равна $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. (Показать, что при $n \geq 9$ события A_1 и A_9 уже сов-

местны.) Нетрудно видеть, что вероятность $P(A_i)$ отличается от вероятности в задаче 1.27 весьма незначительно, так как $P(A_i) =$

$$= \frac{1}{10^6 - n + 1} \left(\sum_{k=0}^{27} b_k^2 - \delta_i \right), \text{ где } \delta_i = 1, \text{ если } i=1 \text{ или } i=n, \text{ и}$$

$\Delta_i = 2$, если $1 < i < n$ (номер i -го билета не может равняться 000 000 при $i > 1$ и 999 999 при $i < n$).

1.30. 2) Найти вероятность противоположного события A , состоящего в том, что хотя бы один номер не появился. Событие A представить в виде $A = A_1 + \dots + A_N$, где A_k ($k = 1, \dots, N$) — событие, состоящее в том, что шар с номером k не появился.

1.33. Воспользоваться равенством

$$P\{x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_{k+1}}\} = P\{x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}\}$$

при любых попарно различных $i_1, i_2, \dots, i_{k+1} \in \{1, 2, \dots, k+1\}$.

1.34. Найти вероятность противоположного события, состоящего в том, что в отобранных папках содержится целиком либо две рукописи, либо ровно одна.

1.35. В условии не указаны числа женщин и мужчин среди гостей. Задача имеет тривиальное решение, если эти числа не равны друг другу. Если же в гостях находятся n женщин и n мужчин, то для подсчета искомой вероятности можно воспользоваться формулой $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A = \{\text{«пары» занимают места (1, 2), (3, 4), \dots, (2n-1, 2n)}\}$ (при некоторой нумерации мест по кругу), $B = \{\text{«пары» занимают места (2, 3), (4, 5), \dots, (2n-2, 2n-1), (2n, 1)}\}$.

1.36. Шесть номеров, вышедших в тираж, выбираются без возвращения из 49 номеров. Предположим, что все возможные шестерки номеров равновероятны. Если на данной карточке ровно 3 номера совпадут с номерами, вышедшими в тираж, то по данной карточке игрок получит минимальный выигрыш. Найти вероятность события A_k , состоящего в том, что на каждой карточке угадано ровно 3 номера, причем $k = 0, 1, 2, 3$ из них являются общими для двух карточек.

1.37. 3) Рассмотреть заполнения двух типов: а) в одной из ячеек нет частиц, в двух ячейках — по две частицы и в $(N-3)$ ячейках — по одной; б) в одной из ячеек нет частиц; в одной — три частицы и в $(N-2)$ ячейках — по одной частице.

4) Найти вероятность противоположного события.

1.38. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что i -я ячейка осталась пустой. Найти $P(A_1 + A_2 + \dots + A_N)$.

1.39. Рассмотреть расположение $N + n - 1$ символов: n частиц и $N - 1$ «перегородок». Найденное отсюда число расположений совпадает, очевидно, с числом представлений числа n в виде $n = r_1 + r_2 + \dots + r_N$, где все $r_k \geq 0$ — целые числа.

1) Событие $\mu_0 = 0$ происходит тогда и только тогда, когда все $r_k \geq 1$. Число наборов $(r_1, \dots, r_N)$, удовлетворяющих этому условию, равно числу представлений числа $n - N$ в виде $n - N = (r_1 - 1) + \dots + (r_N - 1)$, где $r_k - 1 \geq 0$.

2) Фиксировать пустую ячейку, а в остальных разместить частицы, как в 1).

1.40. а) Число таких вариантов размещения n человек в ряду из N кресел, когда никакие 2 человека не сидят рядом, есть произведение $n!$ и числа решений уравнения $x_0 + x_1 + \dots + x_n = N - n + 2$ в целых положительных числах (x_i — расстояние между занятыми креслами, $0 \leq i \leq n$). Последнее число есть C_{N-n+1}^n . См. указания к задаче 1.39.

б) Каждый человек имеет ровно одного соседа тогда и только тогда, когда все сидят парами, изолированными одна от другой. Поэтому при нечетном n искомая вероятность равна 0. При четном n рассуждать аналогично п. а).

в) Если $D_{n, N}$ — число таких способов размещения n человек в ряду из N кресел, когда выполняется условие в), то при четном N число $D_{n, N}$ равно произведению 2^n и числа размещений n человек в $N/2$ креслах. При нечетном N

$$D_{n, N} = D_{n, N-1} + n D_{n-1, N-1}.$$

1.41. Использовать указания к задаче 1.40.

1.44. Пусть A_i — событие состоящее в том, что в выбранной подстановке $i \rightarrow i$. Найти $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$.

1.45. а) Найти число подстановок в классе $[1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}]$.

б) Если исключить единичный цикл $i \rightarrow i$, то получится подстановка из множества $[1^{\alpha_1-1} 2^{\alpha_2} \dots (n-1)^{\alpha_{n-1}}]$.

в) Показать, что события $i \rightarrow j$ ($j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$) равновероятны.

1.46. Использовать равенства

$$\begin{aligned} \{\eta_1 < x\} &= \{\xi < x\} \cap \{1 - \xi < x\}, \\ \{\eta_2 > x\} &= \{\xi > x\} \cap \{1 - \xi > x\}. \end{aligned}$$

где ξ — координата точки A .

1.50. Проверить, что геометрическое место точек, расположенных ближе к границе многоугольника, чем к его диагоналям, состоит из равнобедренных треугольников, построенных на сторонах многоугольника как на основаниях и имеющих при основании углы $\pi/(2n)$.

1.51. Установить зависимость числа корней от значений многочлена в точках максимума и минимума.

1.52. Центр монеты можно считать равномерно распределенным в том k -угольнике, в который он попал. Монета не заденет границу k -угольника, если центр будет отдален от нее на расстояние, большее r .

1.53. Монета падает гербом вверх, если вектор нормали расположен выше горизонтальной плоскости.

1.54. Пусть (ρ, φ) — полярные координаты середины хорды. Выразить ξ через R и ρ .

1.59. Интересующее нас событие описывается подмножеством $A = \{(u, v): \min(u, v) \leq t\}$.

1.60. Слова «случайно бросается» здесь естественно понимать как случайную равномерно распределенную ориентацию цилиндра относительно вертикального направления. Так как цилиндр однородный, то центр описанного вокруг него шара совпадает с его центром тяжести. Цилиндр упадет на боковую поверхность, если вертикальный направленный вниз луч пересечет боковую поверхность. Соответствующая вероятность находится как отношение площади сферического пояса описанной около цилиндра сферы, ограничивающего боковую поверхность цилиндра, к площади всей сферы.

1.61. (См. указание к задаче 1.60.) Вероятность того, что цилиндр упадет на какое-то основание, пропорциональна телесному углу, под которым это основание видно из центра тяжести.

1.62. (См. указания к задачам 1.60, 1.61.) Центр тяжести конуса расположен на его высоте на расстоянии $h/4$ от основания.

1.63. (См. указания к задачам 1.60, 1.61.) Найти центр тяжести полушара и определить величину телесного угла, под которым видна плоская часть границы полушара из центра тяжести.

1.64. Положение бруса определяется положением прямоугольника в плоском сечении, перпендикулярном оси бруса. Брус упадет на ту грань, которую пересечет направленный по вертикали вниз луч из центра тяжести прямоугольника. Ср. с задачами 1.60, 1.61.

1.65. Если A находится между S_k и S_{k+1} , то расстояние от 0 до сторон $\triangle ABC$ находится в интервале $(k/2, (k+1)/2)$, т. е. $\triangle ABC$ содержит внутри себя окружности S_i с $1 \leq i \leq [k/2]$, находится внутри окружности S_i , $k+1 \leq i \leq n$, и граница $\triangle ABC$ пересекает окружности S_i с $[k/2] < i \leq k$.

Глава 2

2.3. Вероятность выбора любой заданной карточки равна 0.01.

2.6. Использовать определение условной вероятности и результат задачи 1.23.

2.7. Пусть событие A_i состоит в том, что i -й ($i = 1, 2$) студент возьмет «хороший» билет. Положить $\Omega = \{A_1 A_2, A_1 \bar{A}_2, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2\}$. $P(A_1) = 1/3$, $P(A_2 | A_1) = 1/24$, $P(A_2' | \bar{A}_1) = 20/24$. Отсюда однозначно определяются вероятности элементарных событий.

2.8. а) Пусть событие $C_i = \{\text{появление белого шара в } i\text{-м испытании}\}$ (испытания с нечетными номерами относятся к игроку, начавшему игру); событие $A = \{\text{выигрыш игрока, начавшего игру}\}$. Воспользоваться равенствами $A = C_1 + \bar{C}_1 \bar{C}_2 C_3$, $\bar{A} = \bar{C}_1 C_2 + \bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3 C_4$. б, в) Решение аналогично а).

2.9. Пусть $D_0^{(i)}$ ($D_1^{(i)}$) — событие, состоящее в том, что i -й шар черный (белый). Воспользовавшись формулой (2.3), показать, что все события $D_{k_1}^{(1)} D_{k_2}^{(2)} \dots D_{k_N}^{(N)}$ с $e_1 + e_2 + \dots + e_N = M$ ($e_i = 0, 1$; $i = 1, \dots, N$) равновероятны. Поэтому $P(A_k) = P(A_1)$, $P(B_{k,1}) = P(B_{1,2})$, $P(C_{k,1}) = P(C_{1,2})$. Воспользоваться равенствами $B_{1,2} = D_1^{(1)} D_1^{(2)}$, $C_{1,2} = D_0^{(1)} D_1^{(2)}$.

2.10. Цепочками из букв к, ч, б будем обозначать появление красного, черного, белого шаров в испытаниях, соответствующих месту буквы в цепочке. Например, событие $kчч = \{\text{в } 1\text{-м испытании появился красный шар, во } 2\text{-м — черный, в } 3\text{-м — черный}\}$. Использовать равенства

$$A_1 = б + ччб + ччччб,$$

$$A_2 = чб + чччб + чччччб,$$

$$B = к + чк + ччк + чччк + чччччк + ччччччк.$$

2.15. Использовать равенство $AB + \bar{A}B = B$.

2.17. Пусть $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ — координаты точки, равномерно распределенной в $(n-1)$ -мерном кубе $\{(x_1, \dots, x_{n-1}): 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$. Рассмотреть события

$$A_l = \{\xi_l \leq 1/2\}, l = 1, 2, \dots, n-1, A_n = \left\{ \prod_{j=1}^n (\xi_j - 1/2) < 0 \right\}.$$

2.18. При $n=3$ попытаться так приписать вероятности 8 событиям $A_1 A_2 A_3, A_1 A_2 \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, чтобы условия задачи выполнялись, но события A_1 и A_3 не были бы независимыми.

2.19. Рассмотреть совокупность событий $\left\{ \prod_{i=1}^k A_i^{(\epsilon_i)}, \epsilon_i = 0 \text{ или } 1 (i = 1, \dots, k) \right\}$, где $A_i^{(0)} = A_i, A_i^{(1)} = \bar{A}_i$.

2.20. Сопоставить каждому событию $A_i \subset \{1, 2, \dots, n\} = \Omega$ вектор $a_i \in R^n$, у которого j -я ($j = 1, \dots, n$) координата равна 0 (если $j \notin A_i$) или $\sqrt{p_j}$ (если $j \in A_i$). Переходя к векторам $b_1, \dots, b_k \in R^k$:

$$b_i = ((a_i, a_1), (a_i, a_2), \dots, (a_i, a_k)).$$

показать, что если события $A_1, \dots, A_k$ попарно независимы, то векторы $a_1, \dots, a_k \in R^n$ линейно независимы.

2.21. Пусть $A_i = \{\text{изделие прошло } i\text{-ю проверку}\}$, $i = 1, 2$. По условию задачи события A_1 и A_2 независимы в обоих случаях.

2.22. б) Воспользоваться неравенством $P(\overline{A_1 A_2}) \leq P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2})$, где A_1 и A_2 — события, состоящие в том, что 1-й и 2-й приборы будут работать.

2.23. Участник лотереи получает минимальный выигрыш, если он угадал ровно 3 номера, и какой-либо выигрыш, если число угаданных им номеров не меньше 3. Положим $A_k = \{k\text{-й участник получает минимальный выигрыш}\}$, $B_k = \{k\text{-й участник получает какой-либо выигрыш}\}$, $k = 1, 2$. Найти $P(A_k)$, $P(B_k)$, $k = 1, 2$.

2.24. Положим $A^{(k)} = \{k\text{-й элемент не вышел из строя}\}$, $\overline{A^{(k)}} = \{k\text{-й элемент вышел из строя}\}$, $k = 1, 2, \dots, 5$. По условию задачи события любого набора, составленного из событий $A^{(k)}$, $\overline{A^{(k)}}$, $k = 1, \dots, 5$, с попарно различными индексами, являются взаимно независимыми. Обозначим B событие, состоящее в том, что по участку, содержащему элементы A_1, A_2, A_3 , может проходить ток. Воспользоваться равенствами

$$B = (A^{(1)} + A^{(2)}) A^{(4)} = A^{(1)} A^{(4)} + \overline{A^{(1)}} A^{(2)} A^{(4)}, \\ C = A^{(5)} A^{(3)} + A^{(5)} \overline{A^{(3)}} B.$$

Заметим, что для вычисления вероятности $P(B)$ непосредственно использовать равенство $B = A^{(1)} A^{(4)} + \overline{A^{(1)}} A^{(2)} A^{(4)}$ нельзя, так как $A^{(1)} A^{(4)}$ и $\overline{A^{(1)}} A^{(2)} A^{(4)}$ не являются несовместными событиями.

2.25. Положим $A_0^{(i)} = \{\text{при } i\text{-м выстреле допущен промах}\}$, $A_1^{(i)} = \{\text{при } i\text{-м выстреле происходит попадание}\}$. По условию задачи события $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(n)}$ ($\varepsilon_i = 0, 1$; $i = 1, \dots, n$) взаимно независимы. Найти вероятность того, что было меньше двух попаданий.

2.27. Пусть $C = \{\text{изделие, поступившее на проверку, удовлетворяет стандарту}\}$. В задаче 2.21 вычислены вероятности $P\{A_1 A_2 | C\}$, $P\{A_1 A_2 | \overline{C}\}$, где $A_1 = \{\text{изделие прошло первую проверку}\}$, $A_2 = \{\text{изделие прошло вторую проверку}\}$.

2.28. в) Использовать равенства

$$(M \text{ } \text{ } m) C_M^m = M C_{M-1}^{m-1}, \quad \sum_{m=0}^M C_{M-1}^{m-1} C_N^{m-M} = C_{N-1}^r.$$

2.30. Введем события $C = \{\text{перелить кровь можно}\}$, $A_i = \{\text{дonor имеет } i\text{-ю группу крови}\}$, $B_i = \{\text{больной имеет } i\text{-ю группу крови}\}$. Найти $P(A_i)$, $P(B_i)$, $P(C | B_i)$ в предположении, что группы крови донора и больного независимы и распределены согласно приведенной в задаче статистике.

2.31. Положим $C = \{\text{вибрация}\}$, $B = \{\text{персгрев}\}$. Найти вероятности событий $\overline{CB}$, $C\overline{B}$, $\overline{CB}$, CB .

2.32. Используем те же обозначения, что в указаниях к задаче

2.31. Положим $P(BC) = x$. Найти вероятности событий $\overline{BC}$, $B\overline{C}$, $\overline{BC}$ как функции от x , $P(B)$, $P(C)$. Показать, что $0 \leq x \leq \min(P(B), P(C))$.

2.33. Положим $A = \{\text{случайно выбранная урна содержит 2 белых и 3 черных шара}\}$, $B = \{\text{случайно выбранная урна содержит 1 белый и 1 черный шар}\}$, $C = \{\text{из выбранной урны извлечен белый шар}\}$. Используя условие задачи, определить вероятности $P(A)$, $P(B)$, $P(C|A)$, $P(C|B)$.

2.35. Введем следующие обозначения событий: $A = \{\text{передана последовательность AAAA}\}$, $B = \{\text{передана последовательность BBBB}\}$, $C = \{\text{передана последовательность CCCC}\}$, $D = \{\text{принято ABCA}\}$. Так как при приеме ABCA вместо AAAA буква A была искажена два раза, то нужно положить $P(D|A) = \alpha \frac{1-\alpha}{2} \frac{1-\alpha}{2} \alpha$.

Аналогично определяются вероятности $P(D|B)$, $P(D|C)$. Воспользоваться формулой Байеса.

2.38. Пусть $A_k^{(i)}$ — событие, состоящее в том, что i -й игрок ($i = 1, 2$) извлек k белых шаров. Из условия задачи естественно определяются вероятности $P\{A_k^{(i)}\}$ ($k = 0, 1, 2$), $P\{A_k^{(2)} | A_l^{(1)}\}$ ($k = 0, 1$; $l = 0, 1, 2$). Найти $P\{A_k^{(1)} | A_l^{(2)}\}$, $k = 0, 1, 2$.

2.39. Найти вероятность противоположного события.

2.43. Искомую вероятность можно найти, используя то, что для любого элемента $x \in S$

$$P\{x \notin A_1 A_2\} = 1 - P\{x \in A_1 A_2\} = 1 - P\{x \in A_1\} P\{x \in A_2\}$$

и что отбор разных элементов в множества A_i происходит независимо.

2.44. Множества $A_1, \dots, A_r$ попарно не пересекаются, если каждый элемент $x \in S$ либо не включается ни в одно из r множеств, либо включается ровно в одно множество.

2.45. Решать так же, как и задачу 2.44.

2.46. а) Каждый элемент $x \in S$ независимо от остальных включается в $\bigcap_{i=1}^r A_i$ с вероятностью p^r . б) Воспользоваться со-

отношением $\bigcup_{i=1}^r A_i = \bigcap_{i=1}^r \overline{A_i}$ и свести задачу к п. а).

2.47. Моделью исследуемого явления можно считать схему Бернулли. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что в момент i по дороге мимо пешехода проезжает машина, $i = 1,$

2, 3, ... События $A_1, A_2, \dots$ независимы, $P(A_i) = p$, $P(\bar{A}_i) = 1 - p = q$. Выразить интересующие нас события через $A_1, A_2, \dots$. Например:

$$\{\text{пешеход ожидает 4 с.}\} = \overline{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7};$$

использовать взаимную независимость событий.

2.48. Результативные партии рассматривать как испытания Бернулли с одинаковыми вероятностями исходов.

2.49. Последовательно обрабатываемые детали по принадлежности к 1-й или 2-й группе образуют симметричную схему Бернулли. Событие, вероятность которого мы ищем, можно записать в виде $A_{m,r} \cap C + B_{m,r} \cap \bar{C}$, где $A_{m,r} = \{\text{из } r+m \text{ первых деталей в 1-ю емкость попало } r \text{ деталей, а во 2-ю попало } m \text{ деталей}\}$, $B_{m,r} = \{\text{из } r+m \text{ первых деталей во 2-ю емкость попало } r \text{ деталей, а в 1-ю попало } m \text{ деталей}\}$, $C = \{(r+m+1)\text{-я деталь попала в 1-ю емкость}\}$. Предлагаемая задача является переформулировкой известной задачи Банаха (см. [11]).

2.51. Воспользоваться теоремой Муавра—Лапласа.

2.52. Воспользоваться предельной теоремой Пуассона.

2.53. Использовать теорему Пуассона.

2.54. При решении п. б) вывести равенство

$$P\{|\xi_{2m} - m| \leq k\} = \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} \left(1 + \frac{2m}{m+1} \left(1 + \frac{m-1}{m+2} \left(1 + \dots \left(1 + \frac{m-k+1}{m+k} \right) \dots \right) \right) \right),$$

а затем применить уточненную формулу Стирлинга для вычисления $2^{-2m} C_{2m}^m$.

2.56. Использовать теорему Муавра—Лапласа. В ответе оставить знаки, не меняющиеся при изменении границ 940, 1060 на ± 1 . (См. введение к гл. 2, а также задачи 2.54, 2.55.)

2.57. Пусть v — порядковый номер 1025-го числа, делящегося на 3, μ_n — число чисел, делящихся на 3, среди первых n чисел таблицы. Использовать равенство

$$P\{v \geq 2500\} = P\{\mu_{2400} < 1025\}.$$

В ответе сохранить разумное число знаков. (См. указание к задаче 2.56.)

2.58. а) Пусть в гардеробах по x мест; обозначим через μ число пар, выбравших гардероб одного входа; тогда $500 - \mu$ — число пар, выбравших другой гардероб. Используя теорему

Муавра — Лапласа, подобрать x так, чтобы

$$P\{2\mu < x, \quad 1000 - 2\mu < x\} \approx 0,99.$$

2.59. Воспользоваться схемой Бернулли с $n = 2500$, $p = \theta/30 = 0,2$, $q = 0,8$.

2.60. Рассмотреть все цепочки исходов длины l , содержащие k успехов, из которых один стоит на конце цепочки.

2.61. Воспользоваться схемой Бернулли, в которой испытанием является бросание двух костей; за два исхода каждого испытания принять выпадение или невыпадение хотя бы одной «6». Рассматриваемая схема является частным случаем (2.15) — (2.17).

2.62. Занумеруем подряд бросания монеты. Бросания с нечетными номерами производятся первым игроком; остальные — вторым. Пусть C_i — событие, состоящее в том, что в i -м бросании выпал «герб».

а) Событие, состоящее в том, что игра закончится до 4-го бросания, представляется в виде $C_1 + \bar{C}_1 C_2 + \bar{C}_1 \bar{C}_2 C_3$.

б), в) рассматриваются аналогично.

2.63. Вероятностное пространство определяется формулами (2.15) — (2.17) с $N = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = q$. Обозначим рассматриваемое событие A . Положим $B_k = \{\text{нуль впервые появился при } k\text{-м испытании}\}$. Тогда $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(AB_k)$.

2.64. (См. указание к задаче 2.63.) Нетрудно установить, что рассматриваемое событие может произойти лишь в том случае, когда первые два испытания приводят к двум нулям.

2.65. Обозначим рассматриваемое событие A . Исход i -го испытания (0 или 1) обозначим ξ_i . Для условных вероятностей $p_0 = P\{A | \xi_1 = 0\}$, $p_1 = P\{A | \xi_1 = 1\}$, $p_{11} = P\{A | \xi_1 \xi_2 = 1\}$ можно, пользуясь формулой полной вероятности, составить систему линейных уравнений. Решив ее, находим $P_{00|111} = P\{A\} = qp_0 + rp_1$. При составлении системы использовать равенства вида

$$\begin{aligned} P\{A | \xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} &= P\{A | \xi_1 = 1\} = p_1, \\ P\{A | \xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} &= P\{A | \xi_1 = 0\} = p_0, \dots \end{aligned}$$

2.66. Число единиц в n испытаниях схемы Бернулли однозначно определяет положение частицы.

2.69. Найти вероятность противоположного события. Неправильная передача происходит в следующих случаях: $A = \{\text{искажено не менее 4 знаков}\}$, $B = \{\text{два знака приняты правильно, а остальные знаки одинаковы}\}$, $C = \{\text{два знака приняты правильно; среди остальных ровно два одинаковых; из двух пар частных знаков выбирается пара неверно принятых знаков}\}$.

2.70. Возможны два подхода.

1) Воспользоваться формулами

$$P\{\xi_{n,1}=m_1, \dots, \xi_{n,N}=m_N\} = \frac{n!}{m_1! \dots m_N!} p_1^{m_1} \dots p_N^{m_N}$$

$$(n = m_1 + \dots + m_N),$$

$$(a_1 + \dots + a_k)^s = \sum_{s_1 + \dots + s_k = s} \frac{s!}{s_1! \dots s_k!} a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k}.$$

2) Положим $B_1^{(j)} = \{\text{в } j\text{-м испытании появился исход } 1\}$, $B_k^{(j)} = \{\text{в } j\text{-м испытании не появился исход } 1\}$. Тогда события $B_{e_1}^{(1)}, B_{e_2}^{(2)}, \dots, B_{e_n}^{(n)} (e_j = 0, 1)$ взаимно независимы и $P\{B_1^{(j)}\} = p_1$,

$$P\{B_k^{(j)}\} = p_2 + \dots + p_N = 1 - p_1.$$

2.71. Использовать решение задачи 2.70.

2.72. Решается аналогично 2.70.

2.73. Положим $A_i = \{i\text{-я ячейка осталась пустой}\}$. Тогда $\{\mu_0(n, N) = k\} =$

$$= \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k} \prod_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \bar{A}_j \right).$$

Из решения задачи 2.72 следует, что

$$P \left\{ \prod_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \bar{A}_j \mid A_{i_1} \dots A_{i_k} \right\}$$

совпадает с вероятностью того, что после размещения n частиц по $N - k$ ячейкам, отличным от $i_1, \dots, i_k$, среди этих ячеек нет пустых. Воспользоваться решением задачи 1.38.

2.74. Обозначим θ_n число очков, выпавшее при n -м бросании; v — номер последнего бросания. Положим $A_n = \{\theta_n \geq 5\}$, $B_n = \{2 \leq \theta_n < 5\}$. Возможны два подхода к решению.

1) Событие C , вероятность которого требуется найти, можно представить в виде $C = B_1 + \bigcup_{n=2}^{\infty} A_1 A_2 \dots A_{n-1} B_n$.

2) Доказать равенства

$$P\{C\} = P\{B_1\} + P\{A_1\} P\{C \mid A_1\},$$

$$P\{C \mid A_1\} = P\{C\}.$$

2.75. Найти вероятность того, что в k -й тройке все исходы различны. См. указания к задаче 2.74.

2.76. См. указания к задаче 2.74.

2.77. Обозначим через A_i появление хотя бы одной «6» у игрока A при i -м бросании; аналогично определяем B_i для игрока B . Можно воспользоваться любым из подходов, описанных в указаниях к задаче 2.74.

Глава 3

3.4. Угол между положительным направлением оси ординат и лучом AB имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$.

3.5. Показать, что $\{F(\xi) \leq x\} = \{\xi \leq F^{-1}(x)\}$ для любого x , $0 \leq x \leq 1$, и $\{F^{-1}(\eta) \leq x\} = \{\eta \leq F(x)\}$ для любого x , $-\infty < x < \infty$.

3.6. Распределение величины $\eta = g(\xi)$ будет иметь атом в точке y , т. е. $P(\eta = y) > 0$, если, например, уравнению $g(x) = y$ удовлетворяют все точки интервала $x_1 \leq x \leq x_2$ и вероятность события $\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}$ положительна.

3.7. Воспользоваться тем, что при достаточно больших N значения $F(-N)$ и $1 - F(N)$ могут быть сделаны как угодно малыми, а на любом замкнутом интервале $[-N, N]$ непрерывная функция равномерно непрерывна.

3.11. Найти сначала функции распределения, рассматривая пару (ξ, η) как случайную точку, равномерно распределенную в квадрате со стороной a , и вычисляя площади соответствующих фигур.

3.12. Воспользоваться тем, что двумерная плотность распределения ξ, η равна e^{-x-y} , $x \geq 0, y \geq 0$. Вычислить сначала функцию распределения.

3.14. Воспользоваться формулой композиции (3.3). Учесть, что плотности $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ на разных интервалах определяются разными аналитическими выражениями.

3.15. См. указания к задаче 3.14.

3.16. Показать, что при любом $t \in [0, a]$

$$P(|\xi_1 - \xi_2| \leq t) = \frac{t^2 + 2t(a-t)}{a^2} = \left(2 - \frac{t}{a}\right) \frac{t}{a},$$

$$P(\min(\xi_1, \xi_2) \leq t) = \frac{(2a-t)t}{a^2} = \left(2 - \frac{t}{a}\right) \frac{t}{a}.$$

3.19. Найти сначала функцию распределения η .

3.20. Найти

$$P(\eta \leq x) = P\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_x\},$$

где

$$B_x = \{(u_1, \dots, u_n): u_1/(u_1 + \dots + u_n) \leq x\}.$$

3.22. Воспользоваться равенством

$$\{\xi_1 + \xi_2 \leq x\} = \{\xi_2 \leq x, \xi_1 = 0\} \cup \{\xi_2 \leq x-1, \xi_1 = 1\}$$

и независимостью случайных величин.

3.24. Показать, что

$$P_n = P\{\xi_1 + \xi_2 - \text{четное число}\}.$$

3.27. Пусть ξ_s — число очков, выпавших в s -м испытании. Выразить событие $(\theta = l, \nu = n)$ через события, связанные со случайными величинами $\xi_s, s = 1, 2, \dots$

3.28. а) Найти

$$P(\theta_1 = l, \tau_2 = l_2, \theta_2 = j, \tau_2 = l_2, \theta_2 = k).$$

б), в) Найти совместное распределение

$$(\theta_1, \dots, \theta_N, \tau_1, \dots, \tau_N).$$

3.29. См. указание к задаче 3.28.

3.30. а), б) Использовать равенства

$$\{\xi_1 = k\} = A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(k)} A_1^{(k+1)},$$

$$\{\xi_1 = k, \xi_2 = l\} = A_0^{(1)} \dots A_0^{(k)} A_1^{(k+1)} A_0^{(k+2)} \dots A_0^{(k+l+1)} A_1^{(k+l+2)},$$

где

$$A_0^{(k)} = \{k\text{-й шар черный}\},$$

$$A_1^{(k)} = \{k\text{-й шар белый}\}.$$

в) Событие $\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_{M+1} = k_{M+1}\}$ однозначно определяет моменты появлений белых и черных шаров.

3.32. Оценить вероятность $P(\xi = \eta)$ сверху суммой

$$P\{|\xi| > N, |\eta| > N\} +$$

$$+ \sum_{k=-Nn}^{Nn-1} P\left\{\frac{k}{n} < \xi \leq \frac{k+1}{n}, \frac{k}{n} < \eta \leq \frac{k+1}{n}\right\}$$

и показать, что при достаточно больших целых N и n эта сумма может быть сделана как угодно малой.

3.34. Показать, что ξ и η равномерно распределены на $[0, 1]$ и $P(\xi = \eta) = 1$.

3.35. Рассмотреть распределение двумерной случайной величины (ξ, η) : $P(\xi = 0, \eta = 1) = P(\xi = 1, \eta = 0) = 1/2$.

3.36. Пусть действительная случайная величина ζ имеет плотность. Рассмотреть двумерную случайную величину (ξ, η) с $\xi = \zeta, \eta = \zeta$.

3.37. Воспользоваться при $a_1 < a_2, b_1 < b_2$ соотношением

$$\{\xi < a_2, \eta < b_2\} \setminus \{\xi < a_1, \eta < b_1\} \subset \{a_1 < \xi < a_2\} \cup \{b_1 < \eta < b_2\}.$$

3.38. Воспользоваться формулой композиции (3.4).

3.39. а) Воспользоваться тем, что $P(\tau_1 = \tau_2) = 0$ (см. задачу 3.32), а также тем, что $\tau_1 - \tau_2$ и $\tau_2 - \tau_1$ одинаково распределены.

б) Время ожидания 3-го клиента равно $\min(\tau_1, \tau_2)$.

в) Событие, состоящее в том, что 3-й клиент закончит разговор раньше 2-го, можно записать в виде: $\tau_1 + \tau_2 < \tau_3$. Найти сначала плотность распределения $\tau_1 + \tau_2$.

3.40. Пусть τ_k — время разговора k -го посетителя. Вероятность P_k того, что k -й посетитель закончит разговор первым, равна

$$P_k = P(\tau_k < \tau_1, \tau_k < \tau_2, \dots, \tau_k < \tau_{k-1}, \tau_k < \tau_{k+1}, \dots, \tau_k < \tau_n).$$

Используя результат задачи 3.32, показать, что $P_1 = \dots = P_n$.

3.42. а) Использовать равносильность событий $\{\xi_{(1)} > x\}$ и $\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i > x\}$ и независимость ξ_i ; б) использовать равносильность

событий $\{\xi_{(n)} \leq x\}$ и $\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \leq x\}$ и независимость ξ_i ; в) использовать равносильность событий $\{x_1 < \xi_{(1)}\} \cap \{\xi_{(n)} \leq x_2\}$ и $\bigcap_{i=1}^n \{x_1 < \xi_i \leq x_2\}$ и независимость ξ_i .

3.43. Пусть $B_m = \{\text{значения } m-1 \text{ величин из } \xi_1, \dots, \xi_n \text{ попали в } (-\infty, x), \text{ одно значение — в } [x, x + \Delta x) \text{ и } n-m \text{ значений в } [x + \Delta x, +\infty)\}$. Показать, что

$$P\{(\xi_{(m)} \in (x, x + \Delta x)) \setminus B_m\} = o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Воспользоваться полиномиальной схемой.

3.44. Использовать равенства

$$P\{\xi_{i_1} < \xi_{i_2} < \dots < \xi_{i_{k+1}}\} = P\{\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{k+1}\},$$

где $(i_1, i_2, \dots, i_{k+1})$ — любая перестановка $(1, 2, \dots, k+1)$, и учесть, что $P(\xi_i = \xi_j) = 0$ при $i \neq j$ (см. задачу 3.32).

3.45. Пусть $x_i < y_i < x_{i+1} < y_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$). Найти вероятность $P\{x_i < \xi_{(i)} \leq y_i, i = 1, \dots, n\}$. Разделив эту вероятность на $\prod_{i=1}^n (y_i - x_i)$ и устремив y_i к x_i , $i = 1, \dots, n$, получаем искомую плотность.

3.46. Найти плотность совместного распределения $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, преобразовав найденную при решении задачи 3.45 плотность совместного распределения $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)}$.

3.47. Воспользоваться результатом задачи 3.46.

3.48. Вывести из задачи 3.44, что $P(A_n) = n^{-k}$, $n = 2, 3, \dots$, и воспользоваться неравенствами

$$P\left\{\bigcup_n A_n\right\} \leq \sum_n P\{A_n\},$$

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right).$$

3.49. Воспользоваться результатом п. б) задачи 3.17.

3.50. Выбрать любое вероятностное пространство, на котором задана случайная величина η , имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и воспользоваться задачей 3.5.

3.51. Показать, что $P\{\zeta = \xi \text{ или } \zeta = \eta\} = 1$ и что поэтому

$$P\left\{\min\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\} \leq \left|\zeta - \frac{1}{2}\right| \leq \max\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\}\right\} = 1.$$

Далее заметить, что случайные величины ζ_1 и ζ_2 : $\zeta_1 = \xi$, $\zeta_2 = \eta$ при $\left|\xi - \frac{1}{2}\right| < \left|\eta - \frac{1}{2}\right|$, $\zeta_1 = \eta$, $\zeta_2 = \xi$ в противном случае — удовлетворяют условиям $P\{\zeta_i = \xi\} = P\{\zeta_i = \eta\} = 1/2$, $i = 1, 2$. Тем самым все сводится к вычислению функций распределения случайных величин

$$\max\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\}, \min\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right|, \left|\eta - \frac{1}{2}\right|\right\}.$$

3.52. Использовать соотношения

$$P\{\xi < \eta\} = P\{\xi > \eta\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\min(\xi, \eta) \leq \zeta \leq \max(\xi, \eta)\} = 1$$

и указания к задаче 3.51.

3.53. Заметить, что если $a_x = \min\{n: P(X=n) > 0\}$, $b_x = \max\{n: P(X=n) > 0\}$ и аналогично определены a_y и b_y , то $a = a_x + a_y$, $b = b_x + b_y$. Вывести отсюда, что

$$\min\{P(Z=a), P(Z=b)\} \leq \min\{xy, (1-x)(1-y)\},$$

где $x = P(X=a_x)$, $y = P(Y=a_y)$. Максимизировать правую часть неравенства сначала по y (при фиксированном x), а затем по x .

3.55. Предварительно доказать, что $n^{[k]} = k \sum_{m=1}^{n-1} m^{[k-1]}$ для

любых n , $k \geq 2$, где $x^{[k]} = x(x-1) \dots (x-k+1)$, а затем преоб-

разовать правую часть равенства

$$M_{\xi}^{[k]} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{[k]} P \{ \xi = n \}.$$

3.56. Заметить, что если $y = x_1 + x_2 + \dots$, где все слагаемые принимают только значения 0 и 1, то

$$y^{[k]} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

3.57. Использовать результат задачи 3.5 и геометрическое истолкование интеграла.

3.58. Использовать равенство $\xi = \max(0, \xi) - \max(0, -\xi)$ и задачу 3.57.

3.59. Рассмотреть отдельно случаи $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$. Найти функцию распределения ξ^α и воспользоваться задачей 3.57.

3.60. Использовать результат задачи 3.5.

3.62. Заметить, что $P \{ \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1 \} = 1$.

3.65. б) Выразить R_n через $e_1, e_2, \dots$

3.67. Применить математическую индукцию.

3.68. Воспользоваться соотношением $P \{ v > n \} = P \{ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leq 1 \}$ и результатами задач 3.54 и 3.67.

3.69. Использовать метод неопределенных множителей Лагранжа.

3.71. Выписать явную формулу для $D(\xi + \eta)$ и заметить, что коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$ может принимать любые значения в интервале $[-1, +1]$.

3.74. Воспользоваться формулой $\Delta = \sum_{\alpha} (\pm \xi_{1\alpha_1} \dots \xi_{n\alpha_n})$, где сумма берется по всем подстановкам $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

3.75. Заметить, что если матрица $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^n$, то

$$A^k = \left\| \sum_{r_1, \dots, r_{k-1}=1}^n a_{ir_1} a_{r_1 r_2} \dots a_{r_{k-2} r_{k-1}} a_{r_{k-1} i} \right\|_{i,j=1}^n.$$

Воспользоваться тем, что $M_{\xi}^{[m]} = 0$ для любого нечетного $m \leq k$.

3.76. Представить $M \sin \xi$ и $M \cos \xi$ в виде суммы интегралов по $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$, $k=0, 1, \dots$, а затем показать, что каждый из этих интегралов может быть представлен в виде интеграла по $(0, \pi/2)$ или по $(0, \pi)$ от положительной функции.

3.77. Установить равенство $M \frac{\eta_n}{n} = \frac{1}{2} + M \left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2} \right|$. При $p = 1/2$ воспользоваться неравенством $M \left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2} \right| < \sqrt{D \frac{\mu_n}{n}}$. При $p \neq 1/2$, например, при $p > 1/2$, положить $\left| \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\mu_n}{n} - \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2\mu_n}{n}\right) \xi_n$, где $\xi_n = 1$, если $\mu_n \leq n - \mu_n$, и $\xi_n = 0$, если $\mu_n > n - \mu_n$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} M \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\mu_n}{n} \leq \frac{1}{2} \right\}$ с помощью теоремы Муавра—Лапласа.

3.79. а) Положить $A_k^e = \{\xi_{2k-1} = e \neq \xi_{2k}\}$, $B_k = \{\xi_{2k-1} = \xi_{2k}\}$ и использовать разложение

$$\{\eta_1 = e_1, \dots, \eta_k = e_k\} =$$

$$= \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \left\{ A_{i_1}^{e_1} \dots A_{i_k}^{e_k} \bigcap_{j=1, \dots, i_k}^{i_k-1} B_j \right\}.$$

б) Заметить, что $\{v=2k\} = (A_k^0 + A_k^1) B_1 \dots B_{k-1}$.

3.80. См. указания к задаче 3.79.

3.81. а) Положить $\theta_1 = \xi_1 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i = 1$, если $i \rightarrow i$, и $\xi_i = 0$ в противном случае; тогда

$$\theta_1^2 = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^n \xi_i + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j.$$

б) Положить $\theta_2 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \xi_{ij}$, где $\xi_{ij} = 1$, если $i \rightarrow j \rightarrow i$, и $\xi_{ij} = 0$ в остальных случаях.

в) Написать для θ_r формулу, аналогичную случаям $r=1$ и $r=2$.

3.82. Пусть μ_0 —число появившихся номеров. Тогда $\mu_0 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$, где $\xi_k = 1$, если k -й номер не появился, и $\xi_k = 0$ в противном случае.

3.83. Представить ξ в виде суммы индикаторов $\xi = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$, где $\delta_i = 1$, если i -й шар в выборке белый, и $\delta_i = 0$ в остальных случаях (предполагается, что шары вынимаются из урны поочередно). Воспользоваться тем, что

$$P(\delta_i = 1) = \frac{M}{N}, \quad P(\delta_i \delta_j = 1) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)} \quad (i \neq j, i, j \leq M).$$

3.84. Показать, что случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_{M+1}$, определенные в задаче 3.80, одинаково распределены и что $\tau_i = \xi_i + 1$,

$i = 1, \dots, M, \tau_{M+1} = \xi_{M+1}$. Использовать равенство $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{M+1} = N - M$.

3.85. Воспользоваться равенством

$$\mu_0(n, N) = \theta_1 + \dots + \theta_N,$$

где $\theta_i = 1$, если i -я ячейка пуста, и $\theta_i = 0$ в противном случае.

3.86. Воспользоваться результатом задачи 3.85.

3.87. См. указания к задаче 3.85 и задачу 3.56.

3.88. Положить $\mu_r = \theta_1^{(r)} + \dots + \theta_N^{(r)}$, где $\theta_j^{(r)} = 1$, если j -я ячейка содержит ровно r частиц, и $\theta_j^{(r)} = 0$ в противном случае. См. далее указания к задаче 1.39.

3.89. Использовать равенство $\xi_{n,i} = e_{1,i} + \dots + e_{n,i}$, где $e_{k,j} = 1$, если в k -м испытании появился j -й исход, и $e_{k,j} = 0$ в противном случае.

3.90. См. указания к задачам 3.85 и 3.88. При решении п. в) использовать выпуклость вниз функции x^n .

3.91. Использовать равенство $v_k = \tau_1 + \dots + \tau_k$, где $\tau_1 = 1$, $\tau_j = v_j - v_{j-1}$ ($j = 2, 3, \dots, N$), и результаты задачи 3.28.

3.92. Если δ_i — число пассажиров i -го автобуса, которым не досталось билетов, то

$$\xi = \delta_1 + \dots + \delta_N.$$

3.93. Прибыль предприятия η представить в виде $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где ξ_k — прибыль за k -е изделие.

3.94. Положить $\eta_k = \xi_1^{(k)} + \dots + \xi_7^{(k)}$, где $\xi_i^{(k)} = 1$, если на i -й карточке k -го игрока совпало 3 номера с номерами, выпавшими в тираже, $\xi_i^{(k)} = 0$ в противном случае.

3.95. б) Использовать равенство $\xi_{m,r,i} = r \bar{\xi}_{m,i}$, где $\bar{\xi}_{m,i}$ — число участников, угадавших ровно i номеров.

3.96. Представить ξ в виде суммы $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$, где $\theta_i = 1$, если i -я вершина квадрата, в который попал центр круга, лежит в круге.

3.97. Представить $|S|$ в виде $|S| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k$, где $\alpha_k = 1$, если

$k \in S$, и $\alpha_k = 0$, если $k \notin S$.

3.98. Определить на круге случайную функцию

$$\chi(P) = \begin{cases} 1, & \text{если } P \in A, \\ 0, & \text{если } P \notin A. \end{cases}$$

Тогда $\xi = \iint_K \chi(r, \varphi) r dr d\varphi$, где r, φ — полярные координаты точки P . В данном случае знаки математического ожидания и ин-

теграла можно поменять местами (см. [6], теорема Фубини), так как $\iint_K M |\chi(r, \varphi)| r dr d\varphi < \infty$.

3.99. Пусть $\chi_m(x, y) = 1$, если точка (x, y) покрыта ровно m кругами, и $\chi_m(x, y) = 0$ в остальных случаях. Тогда

$$\mu_m = \iint_{-\infty}^{\infty} \chi_m(x, y) dx dy.$$

Воспользоваться тем, что

$$0 < \mu_m - \iint_{x^2+y^2 \leq R-r} \chi_m(x, y) dx dy < \pi(R+r)^2 - \pi(R-r)^2 = 4\pi r R$$

с вероятностью 1. По теореме Фубини

$$M \iint_{x^2+y^2 \leq R-r} \chi_m(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq R-r} M \chi_m(x, y) dx dy.$$

Найти $M \chi_m(x, y)$ и вычислить последний интеграл, переходя к полярным координатам.

3.100. Представить μ_{00} в виде суммы индикаторов $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$, где $\eta_k = 1$, если при k -м испытании появилась цепочка НН, и $\eta_k = 0$ в остальных случаях. При вычислении главного члена асимптотики дисперсии необходимо использовать не 1, а 2 первых члена асимптотических разложений $(M\mu_{00})^2$ и $M\mu_{00}$.

3.102. Заметить, что j -е испытание является первым в серии успехов тогда и только тогда, когда оно привело к успеху, а $(j-1)$ -е — к неудаче. Поэтому если $\theta_j = 1$, когда j -е испытание является началом серии успехов, и $\theta_j = 0$ в противном случае, то: 1) $\eta_n = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$; 2) $M\theta_j = pq$ ($j > 1$); 3) $P\{\theta_j \theta_{j+1} = 0\} = 1$; θ_j и θ_k независимы при $|j-k| \geq 2$. Далее см. указания к задаче 3.100.

3.103. Пусть ξ_k ($k = 1, 2, \dots, 10$) — k -е по порядку извлечения число. Доказать, что ξ_k одинаково распределены.

3.104. Плотность распределения $\xi_{(j)}$ найдена в задаче 3.43. Для интегралов, возникающих при вычислении моментов, получить рекуррентные формулы с помощью интегрирования по частям.

3.105. Показать, что для вычисления $M\{\xi_{(i)} | \xi_{(j)} = x\}$, $1 \leq i < j \leq n$, можно воспользоваться результатами задачи 3.104, так как совместное условное распределение $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(j-1)}$ при условии $\xi_{(j)} = x$ совпадает с распределением $x\eta_{(1)}, \dots, x\eta_{(j-1)}$, где $\eta_{(1)} \leq \dots \leq \eta_{(j-1)}$ — вариационный ряд, построенный по независи-

мым случайным величинам $\eta_1, \dots, \eta_{j-1}$, имеющим равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

3.106. При $M\xi = m \neq (0, 0, \dots, 0)$ рассмотреть случайную величину (ξ, e_m) , где $e_m = \frac{m}{|m|}$, и заметить, что

$$|(\xi, e_m)| \leq |\xi|, \quad |M(\xi, e_m)| = |m|.$$

3.107. Рассмотреть векторную случайную величину $\xi' = (\xi, \eta) \in R^2$ и воспользоваться результатом задачи 3.106 и равенством $|\xi| = |\xi'|$.

3.108. Выразить $D(\xi_1 + \dots + \xi_n)$ через C и воспользоваться неотрицательностью дисперсии.

3.109. Воспользоваться неравенством

$$x^k P\{|\xi| \geq x\} \leq M(|\xi|^k / (|\xi| > x)),$$

где I_A — индикатор событий A ($I_A = 1$, если A происходит, $I_A = 0$ в противном случае). Показать, что $M(|\xi|^k / (|\xi| > x)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

3.110. Воспользоваться тем, что $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n = 1$ и распределения $\eta_1, \dots, \eta_n$ одинаковы. Распределения пар η_i, η_j ($i \neq j$) также одинаковы.

3.111. Найти производную по x функции $\varphi(x) = M|\xi - x|$, где x — координата точки B .

3.112. Воспользоваться решением задачи 3.111.

3.113. Воспользоваться равенством

$$M(\xi - x)^2 = M(\xi - M\xi)^2 + (x - M\xi)^2.$$

3.114. Пусть $P\{a \leq \xi \leq b\} = 1$, $b - a = l$. Воспользоваться тем, что $D\xi \leq M\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2$ (см. задачу 3.113).

3.115. Воспользоваться тем, что при $a_i \leq b_i$

$$\{a_1 \leq \eta_1 \leq b_1\} \cap \{a_2 \leq \eta_2 \leq b_2\} \cap \{a_1 + a_2 \leq \eta_1 + \eta_2 \leq b_1 + b_2\}.$$

3.116. Воспользоваться задачами 3.114, 3.115 и доказать, что из предположения о том, что ξ сосредоточена на отрезке длины $l < \infty$, и из безграничной делимости распределения ξ следует равенство $D\xi = 0$, т. е. вырожденность распределения ξ .

3.117. Рассмотреть независимые точки $X_1, \dots, X_6 \in R^2$, имеющие распределение P . Показать, что если κ_6 — число треугольников $X_i X_j X_k$, $1 \leq i < j < k \leq 6$, имеющих хотя бы один угол не меньше 120° , то: а) $M\kappa_6 = C_6^3 P_6$; б) $P\{\kappa_6 \geq 1\} = 1$, т. е. $M\kappa_6 \geq 1$. Доказательство п. б) сводится к рассмотрению двух случаев:

1) точки $X_1, \dots, X_6$ образуют выпуклый 6-угольник, 2) одна из точек находится внутри треугольника, образованного какими-то тремя другими.

3.118. Рассмотреть совокупность X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 независимых случайных точек R^2 , имеющих распределение P . По-

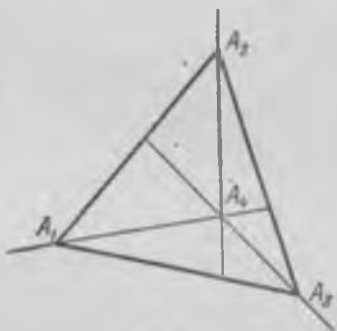


Рис. 3.

казать, что если x_5 — число выпуклых четырехугольников, образованных точками $X_i, i = 1, \dots, 5$, то: а) $Mx_5 = 5P^4$, б) $P\{x_5 \geq 1\} = 1$, и поэтому $Mx_5 \geq 1$. При доказательстве б) использовать рис. 3.

3.119. Воспользоваться тем, что выпуклая вниз функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$f(x) \geq f(x_0) + C_{x_0}(x - x_0), \\ -\infty < x < \infty,$$

где $\lim_{x \uparrow x_0} f'(x) \leq C_{x_0} \leq \lim_{x \downarrow x_0} f'(x)$.

3.120. Использовать выпуклость вниз функции $f(x) = |x|^r$ ($r \geq 1$) и задачу 3.119.

3.121. При доказательстве первого неравенства показать, что можно ограничиться случаем $0 \leq y \leq x$ и что при $0 \leq y \leq x$ производная по y разности правой и левой частей неотрицательна. Далее заметить, что при указанных в формулировке задачи условиях распределения случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ совпадают, и поэтому $M|\xi + \eta|^r = \frac{1}{2}(M|\xi + \eta|^r + M|\xi - \eta|^r)$.

3.122. Применить метод математической индукции и задачу 3.121.

3.123. Использовать задачу 3.119 и равенство

$$M|\xi + \eta|^r = M(M\{|\xi + \eta|^r | \xi\}).$$

3.124. Показать, что если $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ и случайная величина ξ_{k+1} не зависит от S_k , ξ_{k+1} и распределена так же, как ξ_{k+1} , то распределение $\xi_{k+1} - \xi_{k+1}$ симметрично и

$$M|S_{k+1}|^r \leq M|S_k + \xi_{k+1} - \xi_{k+1}|^r \leq M|S_k|^r + 2^r M|\xi_{k+1}|^r.$$

3.125. Утверждение п. а) следует из утверждения п. б), а это последнее следует из линейности операции $\text{cov}(\xi, \zeta)$ по каждой из переменных.

3.126. а) Показать, что $(a, Ba) = D(a, B)$.

б) Воспользоваться тем, что условие {ранг B не больше r } эквивалентно условию {существуют линейно независимые векторы $b_1, \dots, b_{k-r}$, для которых $Bb_i = 0$ }, условие $\{D\eta = 0\}$ — условию $\{P\{\eta = C\} = 1 \text{ для некоторого } C\}$, а также п. б) задачи 3.125.

3.127. Вводя индикаторы $\chi_1, \dots, \chi_n$ событий $A_1, \dots, A_n$, установить равенство

$$np = M(\chi_1 + \dots + \chi_n) = \sum_{k=1}^n P\{B_k\} = \sum_{k=1}^n k(P(\{B_k\} \setminus \{B_{k+1}\})),$$

и вывести из него, что для любого $m = 1, 2, \dots, n$

$$mP\{B_m\} \leq np \leq m-1 + (n-m+1)P\{B_m\}.$$

3.128. а) Рассмотреть случайные величины $\xi = 1$ и η : $P(\eta = 0) = 1 - p$, $P(\eta = 10/p) = p$, $p \in (0, 1]$.

б) Рассмотреть случайные величины ξ и η , имеющие равномерное распределение на $[0, 1]$ и такие, что $\eta = \{\xi + p\}$, т. е. η равно дробной части числа $\xi + p$.

в) Показать, что $P\{\xi \leq \eta\} \leq a$ при $a < 1$. Рассмотреть случай, когда

$$\xi = \{p + \eta/a\}.$$

Случай $a > 1$ сводится к $a < 1$ делением на a :

$$P\{\xi \leq \eta\} = 1 - P\{\eta/a < \xi/a\}.$$

3.129. Вычислить $M|\xi - 1/2|$ и $M|\eta - 1/2|$ и воспользоваться неравенством $|x - y| \leq |x| + |y|$.

3.130. Показать, что случайные величины $\min(\xi, \eta)$ и $\max(\xi, \eta)$ удовлетворяют условиям задачи и что

$$P\{\min(\xi, \eta) \leq \xi \leq \max(\xi, \eta)\} = 1.$$

3.131. Показать, что если

$$F_{-1}(y) = \sup\{x: F(x) \leq y\} \quad \text{и} \quad \{\chi = 1\} = \{\xi \geq F_{-1}(1-a)\} = A,$$

то для любой другой случайной величины χ' , $P\{\chi' = 1\} = a$, $P\{\chi' = 0\} = 1 - a$ и $\{\chi' = 1\} = A' \neq A$, справедливо неравенство $M\xi\chi - M\xi\chi' \geq 0$, так как

$$M(\xi \max(\chi - \chi', 0)) \geq F_{-1}(1-a)P(A \setminus A'),$$

$$M(\xi \max(\chi' - \chi, 0)) \leq F_{-1}(1-a)P(A' \setminus A)$$

$$P(A' \setminus A) = P(A \setminus A').$$

Минимальное значение $M(\xi\chi)$ достигается при $\{\chi=1\} = \{\xi \leq F_{-1}(a)\}$. Для вычисления экстремальных значений $M(\xi\chi)$ воспользоваться задачами 3.57 и 3.58.

3.132. Представить ξ в виде $\xi = \eta + (\xi - \eta)\chi$, где случайная величина χ принимает значения 0 и 1 и $\{\chi=0\} = \{\xi=\eta\}$, $\{\chi=1\} = \{\xi=\xi\}$. Далее воспользоваться аддитивностью математического ожидания и результатом задачи 3.131 (предварительно вычислив плотность распределения $\xi - \eta$).

3.133. а), б), в) Найти $P(\xi = \eta)$; использовать равенство $P(\xi > \eta) = P(\xi < \eta)$.

3.134. а), в) Воспользоваться решением задачи 3.18. б) Воспользоваться решением задачи 3.11 (п. а)).

3.135. Использовать результаты задачи 3.134.

3.136. Условные распределения ξ и η при условии $\xi + \eta = z$ совпадают. Если $P(|\xi + \eta - z| < \varepsilon) = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$, то условное распределение ξ или η при условии $\xi + \eta = z$ не определено.

3.138. Обозначим через η число белых шаров в первой выборке. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(\xi = m) = \sum_{l=0}^n P(\eta = l) P(\xi = m | \eta = l).$$

3.139. Найти условную плотность распределения η при фиксированном ξ_2 .

3.141. Вводя индикаторы событий A_j , показать, что

$$Mx_n = nP(\xi_{j1} \leq \xi_{i1} \text{ или } \xi_{j2} \leq \xi_{i2} \text{ для } j=2, \dots, n),$$

и вычислить последнюю вероятность, используя независимость $\xi_1, \dots, \xi_n$ и формулу полной вероятности.

3.142. Использовать условные математические ожидания и формулу $D\tau = M\tau^2 - (M\tau)^2$.

3.143. Представить $P\left\{\xi - x > \frac{C}{x}\right\}$ и $P(\xi > x)$ в виде интегралов по промежутку $[x, \infty)$.

3.144. Положим $\xi_i = 1$, если в испытании с номером i появилась 1, и $\xi_i = 0$ в противном случае. Для условных математических ожиданий $m_0 = M\{v_{00} | \xi_1 = 0\}$, $m_1 = M\{v_{00} | \xi_1 = 1\}$ составить систему линейных уравнений, используя равенства

$$\begin{aligned} M\{v_{00} | \xi_1 = \xi_2 = 0\} &= 2, \\ M\{v_{00} | \xi_1 = 0, \xi_2 = 1\} &= 1 + m_1, \\ M\{v_{00} | \xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} &= 1 + m_0, \\ M\{v_{00} | \xi_1 = \xi_2 = 1\} &= 1 + m_1 \end{aligned}$$

и формулу (3.18). Найдя из этой системы m_0, m_1 , получаем $Mv_{00} = pm_1 + qm_0$.

3.145. Для условных математических ожиданий

$$m_0 = M\{v_{111} | \xi_1 = 0\}, m_1 = M\{v_{111} | \xi_1 = 1\}, \\ m_{11} = M\{v_{111} | \xi_1 = \xi_2 = 1\}$$

составить систему линейных уравнений. Найдя из этой системы m_0 и m_1 , получим $Mv_{111} = qm_0 + pm_1$. См. также указание к задаче 3.144.

3.146. См. указание к задаче 3.144.

3.147. Пусть $B_i = \{\text{точки } A_1, \dots, A_n \text{ лежат на дуге } A_iC \text{ длины } x \text{ (направление от } A_i \text{ к } C \text{ — по часовой стрелке)}\}$. Искомое событие есть $B_1 \cup \dots \cup B_n$. Показать, что $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и найти $P\{B_i | A_i = X\}$.

3.148. Указанное в условии событие не происходит тогда и только тогда, когда длина дуги, содержащей $A_1, \dots, A_n$, не превосходит половины длины окружности. См. задачу 3.147.

3.149. Если B_n — событие, описанное в задаче 3.148, то $\{v \leq n\} = B_n$. Для вычисления Mv и Dv использовать задачи 3.54 и 3.55.

3.150. Найти длину дуги, на которой должны быть сосредоточены точки $A_1, \dots, A_n$, чтобы событие, указанное в условии задачи, не выполнялось. Использовать результат задачи 3.147.

3.151. Если длина дуги A_1B равна x , то $\{\xi > x\} = \{A_2, \dots, A_n \text{ не принадлежат дуге } A_1B\}$.

3.152. Использовать формулу полной вероятности

$$P(\xi_1 > x, \xi_2 > y) = \int_x^{2\pi r} P(\xi_2 > y | \xi_1 = z) p_{\xi_1}(z) dz,$$

где $p_{\xi_1}(z)$ — плотность распределения ξ_1 , и указания к задаче 3.151.

3.153. Использовать формулу полной вероятности

$$P(\xi_1 > x_1, \dots, \xi_k > x_k) = \\ = \int_{x_1}^{2\pi r} P(\xi_2 > x_2, \dots, \xi_k > x_k | \xi_1 = z) p_{\xi_1}(z) dz,$$

метод математической индукции (по k) и результаты задач 3.151 и 3.152.

3.154. Воспользоваться результатом задачи 3.153 и тем, что

$$P(\xi_{i_1} > x_{i_1}, \dots, \xi_{i_k} > x_{i_k}) = \\ = P(\xi_{i_j} > x_{i_j} \quad (j = 1, \dots, k), \xi_m > 0 \quad (m \neq i_1, \dots, i_k)).$$

3.155. Заметить, что $v = \theta_1 + \dots + \theta_n$, где $\{\theta_i = 1\} = \{\xi_i > \Delta\}$, $\{\theta_i = 0\} = \{\xi_i \leq \Delta\}$. Далее использовать задачи 3.54 и 3.55.

3.156. Заметить, что $\{\eta_n > x\} = \bigcap_{k=1}^n \{\xi_k > x\}$. Использовать формулу (1.12) из введения к гл. 1 и результат задач 3.153, 3.154.

3.157. Использовать задачи 3.156, 3.57 и равенство

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^n}{x} dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

3.158. Пусть α, β, γ — длины дуг BC, CA, AB . Использовать равенства $S = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$,

$$\rho = 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right),$$

$$r = \frac{2S}{\rho} = \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} - 1,$$

результаты задачи 3.151 и свойство аддитивности математического ожидания.

3.159. Показать, что $M\{S_n | S_k = s\} = s$, и, пользуясь выпуклостью вниз функции $f(x) = x^2$, что

$$M\{S_n^2 | S_k = s\} \geq (M\{S_n | S_k = s\})^2 = s^2.$$

3.160. Ввести случайную величину

$$\tau = \begin{cases} \min \{k: |S_k| \geq \varepsilon\}, & \text{если } \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon, \\ n+1 & , \text{если } \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| < \varepsilon, \end{cases}$$

и оценить снизу

$$DS_n = MS_n^2 = \sum_{k=1}^{n+1} P\{\tau = k\} M\{S_n^2 | \tau = k\},$$

используя результат задачи 3.159.

3.163. Получить рекуррентную формулу для $M\xi^k$, используя интегрирование по частям.

3.164. Представить каждую часть неравенства в виде интеграла по интервалу (x, ∞) от ее производной и сравнить подынтегральные выражения.

3.167. б) Заметить, что

$$P(a \leq \xi \leq b) = \Phi\left(\frac{\ln b - M \ln \xi}{\sqrt{D \ln \xi}}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - M \ln \xi}{\sqrt{D \ln \xi}}\right).$$

Найти $M \ln \xi$ и $D \ln \xi$, используя результаты задачи 3.166.

3.169. Воспользоваться тем, что случайные величины ξ и $-\xi$ одинаково распределены.

3.170. Разложить $\cos \xi$ в ряд Тейлора по ξ и с помощью результатов задачи 3.163 найти математическое ожидание каждого слагаемого. При вычислении $M \cos^2 \xi$ предварительно перейти к функции от двойного угла.

3.171. Воспользоваться результатами задач 3.169 и 3.170 и равенством $M \sin^2 \xi = 1 - M \cos^2 \xi$.

3.172. Вычислить $(M \cos \xi^2 + i M \sin \xi^2)^n = (M e^{i \xi^2})^n$, записав эту величину в виде двойного интеграла и затем переходя к полярным координатам. При определении знака квадратного корня найти знак $\operatorname{Im} M e^{i \xi^2}$, делая в интеграле замену переменных $u = x^2$ и рассматривая интегралы по u от $2\pi k$ до $2\pi(k+1)$, $k=0, 1, \dots$

3.173. Найти плотность совместного распределения η_1, η_2 .

3.174. а) Использовать равенство $P(-\xi < x, |\xi| \geq 1) = P(\xi < x, |\xi| \geq 1)$.

б) Найти $P(\xi + \eta = 0)$.

3.176. а) — в) Воспользоваться независимостью ξ и η ; г) воспользоваться решением а) и симметричностью двумерной плотности распределения (ξ, η) относительно начала координат; д), е) вычислить с помощью интегрирования двумерной плотности.

3.178. Воспользовавшись тем, что плотность сферически симметричного нормального распределения инвариантна относительно поворота вокруг начала координат, повернуть прямоугольник так, чтобы его стороны стали параллельны осям, а вероятность попадания в него не изменилась.

3.179. Воспользоваться симметричностью двумерной плотности относительно любой прямой, проходящей через начало координат, и ее инвариантностью относительно вращений вокруг начала координат.

3.181. б), в) Найти плотность (ξ, η) в полярных координатах.

3.182. а) Выразить искомую вероятность через плотность в полярных координатах (см. задачу 3.180).

б), в) См. указания к задаче 3.178.

3.183. Заметить, что распределения случайных величин ξ и $-\xi$ совпадают.

3.184. Из результата задачи 3.183 вывести, что достаточно найти p_{00} . Подобрать числа a_1, b_1, b_2 так, чтобы случайный вектор

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = (a_1 \xi_1, b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2)$$

имел сферически симметричное нормальное распределение с плотностью $\frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + y^2)/2}$ и чтобы

$$\{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\} = \{\zeta_1 \geq 0, \zeta_2 \geq b_2/a_1\}.$$

Для вычисления P_{00} воспользоваться последним равенством и сферической симметричностью распределения ζ .

3.185. Найти функцию распределения $\zeta_k = \max_{1 \leq i \leq k} |\xi_i|$.

3.186. Воспользоваться соотношением $|\mathcal{M}\zeta| \leq \mathcal{M}|\zeta|$ и результатом задачи 3.119.

Глава 4

4.1. Заметить, что если $f_x(t) = 0$ при $|t| < x$, $f_x(t) = 1$ при $|t| \geq x$, то $P\{|\xi| \geq x\} = Mf_x(\xi)$ и $g(t) \geq f_x(t)g(x)$.

4.4. Показать, что для любых $\varepsilon > 0$ и $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} &\subseteq \\ &\subseteq \left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{(n+1)/2}}{(n+1)/2} - a\right| > \varepsilon\right\} \cup \\ &\cup \left\{\left|\frac{\eta_1 + \dots + \eta_{[n/2]}}{[n/2]} - a\right| > \varepsilon\right\}, \end{aligned}$$

и использовать приведенные во введении к гл. 4 условия выполнения закона больших чисел.

4.5. Применить результат задачи 4.4.

4.6. Показать, что $D \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = (1 + o(1)) \frac{C}{\alpha + 1} n^{\alpha-1}$, $n \rightarrow \infty$, найти распределение $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ и использовать точную формулу для $P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right\}$.

4.7. Воспользоваться неравенством Чебышева и результатом задачи 4.6. Рассмотреть случайные величины ξ_k :

$$P\{\xi_k = \nu_j\} = 1 - 2^{-k},$$

$$P\{\xi_k = 2^k C k^\alpha\} = P\{\xi_k = -2^k C k^\alpha\} = 2^{-k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

4.8. Оценить сверху дисперсии $\xi_1 + \dots + \xi_n$ и $\eta_1 + \dots + \eta_n$ и применить неравенство Чебышева.

4.9. Вычислить математическое ожидание, дисперсию ζ_n/C_n^2 и воспользоваться неравенством Чебышева.

4.10. Заметить, что

$$\zeta_n = \frac{1}{2} ((\xi_1 + \dots + \xi_n)^2 - (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2))$$

и что поэтому

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{\zeta_n}{C_n^2} - a^2\right| > \varepsilon\right\} &\leq P\left\{\left|\frac{(\xi_1 + \dots + \xi_n)^2}{n^2} - a^2\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} + \\ &+ P\left\{\frac{(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)}{n^2(n-1)} > \frac{\varepsilon}{3}\right\} + P\left\{\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n(n-1)} > \frac{\varepsilon}{3}\right\}. \quad (1) \end{aligned}$$

Оценить первое слагаемое в правой части (1) с помощью неравенства Чебышева, а второе и третье — с помощью неравенства из задачи 4.1 для функции $g(x) = |x|$.

4.11. Утверждение задачи можно вывести из закона больших чисел.

4.12. Применить закон больших чисел.

4.13. Воспользоваться результатом задачи 3.124 и неравенством из задачи 4.1.

4.14. а) Показать, что $Mv < \infty$.

б) Ввести случайные величины $v_n = \chi_1 + \dots + \chi_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $\chi_j = 1$, если происходит A_j , и $\chi_j = 0$ в противном случае. Показать, что $P\{v \geq v_n\} = 1$, $n = 1, 2, \dots$; вычислить математическое ожидание и дисперсию v_n и с помощью неравенства Чебышева убедиться в том, что для любого $N < \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{v_n > N\} = 1.$$

4.15. Показать, что предположение «существует такое $N < \infty$, что $P\{v > N\} < a - \varepsilon < \infty$ » приводит к противоречию при вычислении математического ожидания случайной величины v' , совпадающей с v при $v \leq N$ и равной 0 при $v > N$, двумя способами: а) исходя из условия $v' \leq N$, б) исходя из соотношения

$$Mv' = \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n \cap \{v \leq N\}\} \geq \sum_{n=1}^{\infty} (P\{A_n\} - P\{v < N\}).$$

4.16. Связать события A_n со значениями случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

4.17. Показать, что если v_ε — число одновременно происходящих событий $\{|\xi_n - \zeta| > \varepsilon\}$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \neq \zeta \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - \zeta| > \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{v_{1/k} = \infty\},$$

и применить лемму Бореля—Кантелли (задачу 4.14).

4.18. Показать, что выполняются условия задачи 4.17.

4.19. а) Показать, что $P\{A_n^c\} = n^{-1-\varepsilon\lambda}$, $P\{B_n^c\} < \exp\left\{-\frac{n^{\lambda\varepsilon}}{2\lambda\varepsilon}\right\}$,

и применить лемму Бореля—Кантелли (см. задачу 4.14).

б) Использовать соотношение

$$\left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \xi_n - \frac{1}{\lambda} \right| \geq \varepsilon \right\} \subseteq \{v_\varepsilon = \infty\} \cup \{\mu_\varepsilon = \infty\}.$$

4.20. Найти $D((\xi_1 + \dots + \xi_n)/n^2)$, применить неравенство Чебышева и результат задачи 4.17.

4.21. Найти $D(\xi_1^2 + 1 + \xi_2^2 + 2 + \dots + \xi_k)$, использовать оценку

$$P\{\max\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M\} > \varepsilon\} \leq \sum_{i=1}^M P\{\zeta_i > \varepsilon\},$$

неравенство Чебышева и результат задачи 4.17.

4.22. Вывести утверждение задачи из результатов задач 4.20 и 4.21.

4.23. а) Применить метод математической индукции (по n).

б) Найти $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = k+1\}}{P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = k\}}.$

4.24. Показать, что можно воспользоваться результатами задачи 1.40 и что

$$P\{\tau_1(N) > n\} = P\{A_n, N\}, \quad P\{\tau_2(N) > n\} = P\{C_n, N\}.$$

При нахождении предельных распределений полезно соотношение $\ln(1-x) = -x + O(x^2)$, $x \rightarrow 0$.

4.25. Представить вероятность $P\{\eta_n < x\}$ ($0 < x < 1$) в виде суммы интегралов от плотности $p_\xi(x)$; к каждому слагаемому применить теорему о среднем.

4.26. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечный набор $\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ непересекающихся отрезков так, что $P\left\{\xi \in \bigcup_{i=1}^m \delta_i\right\} \geq 1 - \varepsilon$ и плотность $p_\xi(x)$ на $\bigcup_{i=1}^m \delta_i$ непрерывна и ограничена. Далее воспользоваться решением задачи 4.25.

4.27. Воспользоваться равенством $\lg n\xi = \lg\left(\pi \left\{\frac{n\xi}{\pi}\right\}\right)$ и результатами задач 4.26 и 3.4.

4.28. Используя тригонометрическую форму записи комплексных чисел, показать, что $\zeta_n = \lg(n \operatorname{arctg} \xi)$, и применить результаты задач 4.26 и 3.4.

4.29. Использовать неравенства из задачи 3.164 и определение условной вероятности.

4.30. Использовать равенство $P\{x_n \leq x\} = F^n(x)$ и асимптотическое соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^n = e^{-c}$.

4.31. Используя оценку

$$\left| \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \dots + \beta_n} - 1 \right| \leq \max_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \alpha_k, \beta_k > 0}} \left| \frac{\alpha_k}{\beta_k} - 1 \right|,$$

показать, что для любых $x_1, x_2, -\infty < x_1 < x_2 < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ x_1 < \frac{\eta_n - a_n}{b_n} < x_2 \right\} = F(x_2) - F(x_1).$$

4.32. Ввести независимые одинаково распределенные случайные величины $\zeta_1, \zeta_2, \dots$:

$$P\{\zeta_k = 0\} = P\{\zeta_k = 1\} = 1/2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и положить $x_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{2n} - n$, $n = 1, 2, \dots$. Применить формулу Стирлинга для доказательства того, что при $k, n \rightarrow \infty$, $k = n + O(\sqrt{n})$,

$$\ln \frac{P\{x_n = k\}}{P\{\xi_n = k\}} \rightarrow 0.$$

4.33. См. указания к задаче 4.32. В отличие от задачи 4.32 нужно положить $x_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_{2n} - 3n$.

4.34. а) Воспользоваться неравенством

$$P(AB) \leq \min\{P(A), P(B)\},$$

справедливым для любых двух событий A, B .

б) Использовать определение непрерывности функции двух переменных и результат п. а).

4.35. Показать, что последовательности $\zeta_i^{(n)} = (\xi_1^{(1)} + \dots + \xi_i^{(n)})/n$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся по распределению к a_i ($i = 1, 2$), и применить результат задачи 4.34. В случае а) сходимость $\zeta_i^{(n)}$ к a_i следует из закона больших чисел (см. введение к гл. 4), в случае б) — из задачи 4.13.

4.36. а) Воспользоваться тем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\{\eta_n < x - \varepsilon, |\xi_n| < \varepsilon\} \subseteq \{\eta_n + \xi_n < x, |\xi_n| < \varepsilon\} \subseteq \{\eta_n < x + \varepsilon, |\xi_n| < \varepsilon\}.$$

и тем, что

$$P\{A\} - P\{B\} \leq P\{AB\} \leq P\{A\}.$$

б) Доказывается аналогично а).

4.37. При вычислении $P\{\zeta_n > x\}$ воспользоваться соотношением $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon)^{1/\varepsilon} = e^{-1}$.

4.38. Заметить, что τ_k можно представить в виде суммы k независимых случайных величин, распределенных так же, как ξ . Воспользоваться неравенством Чебышева.

4.39. Значение $M\tau$ вычислялось в задаче 3.142. Чтобы найти предельное распределение τ , заметить, что

$$\frac{\tau}{M\tau} = \frac{v}{Mv} \cdot \frac{\xi_1 + \dots + \xi_v}{v}, \quad (1)$$

используя оценку

$$P \left\{ \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_v}{v} - a \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ \leq P \{v < n\} + \sup_{m \geq n} P \left\{ \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_m}{m} - a \right| > \varepsilon \right\},$$

показать, что второй сомножитель в (1) сходится по вероятности к 1, и воспользоваться п. б) задачи 4.36.

4.40. Заметить, что случайная величина τ_q имеет такое же распределение, как сумма $\xi_1 + \dots + \xi_v$, в которой $\xi_1, \xi_2, \dots$ и v независимы, $\xi_1, \xi_2, \dots$ распределены так же, как ξ , а v имеет геометрическое распределение с параметром q . Далее при решении п. а) использовать задачу 4.37, а при решении п. б) — задачу 4.39.

4.41. Первая оценка следует из неравенства Чебышева. Для доказательства второй можно ввести индикатор χ_A события A и воспользоваться результатами задач 3.131, 3.60, неравенством Коши—Буняковского и переходом к дополнительному событию.

4.42. Используя задачи 4.41 и 4.39, показать, что нахождение предельного распределения $q\tau_1$ сводится к применению задачи 4.37. Далее, с помощью задач 4.36 и 4.41 показать, что предельные распределения $q\tau_1$ и $q\tau_2$ совпадают.

4.43. Убедиться в том, что процесс работы прибора удовлетворяет схеме, описанной в задаче 4.42, и что для искомой случайной величины τ и случайных величин τ_1 и τ_2 из задачи 4.42 справедливо соотношение

$$P \{ \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \} = 1.$$

4.44. Применить результат задачи 4.43. Использовать аппроксимацию пуассоновского распределения нормальным.

4.45. Использовать определения указанных видов сходимости. При построении примера рассмотреть такие независимые случайные величины ξ_n , что $P\{\xi_n = \xi\} = 1 - n^{-1}$, $P\{\xi_n \neq \xi, |\xi_n - \xi| > n\} = n^{-1}$. Вычислить $M(\xi_n - \xi)^2$ и использовать лемму Бореля—Кантелли для доказательства того, что

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - \xi| = 0 \right\} = 0.$$

4.46. Если $F(x)$ и $F_n(x)$ — функции распределения ξ и ξ_n ($n = 1, 2, \dots$) соответственно, $F^*(x)$ и $F_n^*(x)$ — обратные функции а случайная величина ζ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то последовательность $\xi_n^* = F_n^*(\zeta)$ сходится к $\xi^* = F^*(\zeta)$ с вероятностью 1.

4.47. а) В случае, когда ξ_n сходится к ξ по вероятности, воспользоваться равномерной непрерывностью $f(x)$ на любом конечном отрезке и включением

$$\{ |f(\xi_n) - f(\xi)| > \varepsilon \} \subseteq \{ |\xi| \geq T \} \cup \{ |\xi| < T, |\xi_n - \xi| > \varepsilon' \},$$

справедливым для любых $\varepsilon > 0$, $T < \infty$ при некотором $\varepsilon' = \varepsilon'(T)$. Случай сходимости с вероятностью 1 рассматривается аналогично, а случай сходимости по распределению сходится к любому из рассмотренных с помощью результатов задач 4.45 и 4.46.

б) Рассуждения проводятся так же, как в п. а), но при построении множества, на котором $f(x)$ равномерно непрерывна, нужно исключить из отрезка $[-T, T]$ окрестности всех точек разрыва $f(x)$.

4.48. Существование величины $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ следует из монотонности последовательности ξ_n , а равенство $M\xi = a$ — из интегрального представления $M\xi$ (см. задачу 3.60) и из теоремы о монотонной сходимости (см. введение к гл. 3).

4.49. а) Показать, что если Δ_k ($k \geq 2$) — минимальный по длине отрезок из тех, на которые отрезок $[0, 1]$ разбивается точками $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$, а $|\Delta_k|$ — его длина, то $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$ ($k = 2, 3, \dots$) и $M|\Delta_k| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

б) Вычислить $M\xi^2$ и $M\xi^3$, пользуясь тем, что условное распределение ξ при условии $\xi_1 = x$ совпадает с распределением $x\xi$ при $x \leq 1/2$ и с распределением $1 - (1-x)\xi$ при $x \geq 1/2$.

4.50. а) Показать, что $P \{ \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n - \xi_{n-1}| = 0 \} = 1$, и воспользоваться леммой о вложенных отрезках.

б) Воспользоваться тем, что условное распределение ξ при условии $\xi_1 = x$ совпадает с безусловным распределением $x(1-\xi)$.

4.51. Представить случайную величину $\frac{g_n(\xi_n) - g_n(a_n)}{b_n g_n'(a_n)}$ в виде,

допускающем применение задачи 4.36.

4.52. См. указания к задаче 4.51 и ее решение.

4.53. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\xi_n - a_n}{b_n} - \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \right| > \varepsilon \right\} = 0,$$

если выполнены условия в). При построении примеров, показывающих, что условия а) и б) не обеспечивают совпадения предельных распределений $\frac{\xi_n - a_n}{b_n}$ и $\frac{\xi_n - a_n}{b_n'}$, рассмотреть случайные ве-

личины $\xi_n = b_n \xi + a_n$, где случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, и подобрать соответствующим образом последовательности a_n, b_n, a_n', b_n' .

4.54. а) Рассмотреть случайные величины $\xi_n = \chi_n \xi + (1 - \chi_n) \zeta$, $n = 1, 2, \dots$, где $\chi_1, \chi_2, \dots$ — случайные величины, не зависящие от ξ , $P\{\chi_n = 0\} + P\{\chi_n = 1\} = 1$.

б) Сравнивая $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dP\{\xi \leq x\}$ и $M\xi_n = \int_{-\infty}^{\infty} x dP\{\xi_n \leq x\}$,

показать, что за счет выбора достаточно большого T интегралы

$$\int_{|x| > T} |x| dP\{|\xi| \leq x\} \quad \text{и} \quad \int_{|x| > T} |x| dP\{\xi_n \leq x\}$$

можно сделать сколь угодно малыми, а разность интегралов по области $\{|x| < T\}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к 0.

4.55. а) Рассуждая так же, как в п. б) задачи 4.54, показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n - M) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T^{\infty} x^2 dP\{|\xi_n| \leq x\} \geq 0.$$

Построение примера, в котором $M_n > M$, провести аналогично п. а) задачи 4.54.

б) Случайные величины $\xi_n - M\xi_n$, $\xi - M\xi$ удовлетворяют условиям п. а).

4.57. Случайная величина ξ_n имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) .

4.58. а) Использовать равенство $M\xi^{(k)} = \varphi^{(k)}(1)$.

б) См. определение производящей функции и ее свойства.

в) Использовать равенство $\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}$, $\alpha > -1$.

4.60. Показать, что $\theta_k = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$, где $\tau_1, \dots, \tau_k$ — независимые случайные величины, распределенные так же, как величина τ_1 в задаче 4.59.

4.61. Сравнить ряды

$$Mz\xi = \sum_{n=m}^{\infty} C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m} z^n \quad \text{и} \quad \frac{1-qz}{pz} Mz\xi.$$

4.62. Пользуясь результатом задачи 4.61, найти производящие функции распределений ξ_1, ξ_2, ξ_3 и их суммы.

4.63. а) Воспользоваться формулой полного математического ожидания.

б) Использовать результат п. а).

4.64. Найти $P\{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$, $P\{\xi_1 = 0\}$, $P\{\xi_2 = 0\}$.

4.65. Представить $\varphi_\xi(z)$ в виде степенного ряда и воспользоваться правилами почленного дифференцирования рядов и неотрицательностью коэффициентов ряда.

4.66. Сопоставить k -му испытанию вектор $(e_{k,1}, \dots, e_{k,N})$, $k=1, 2, \dots, n$, где $e_{k,j}=1$, если в k -м испытании появился j -й исход, и $e_{k,j}=0$ в противном случае. Воспользоваться равенством

$$(\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,N}) = \sum_{k=1}^n (e_{k,1}, \dots, e_{k,N})$$

и свойствами производящих функций векторных случайных величин.

4.67. Использовать результат задачи 4.66.

4.68. Воспользоваться формулой полного математического ожидания и результатом задачи 4.66.

4.69. Воспользоваться тем, что $\varphi(z)$ — аналитическая функция в $|z| < 1$, $\varphi(1) = 1$, и что $\varphi(z)$ разлагается в ряд по степеням z с неотрицательными коэффициентами.

4.70. Представить $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ в виде степенных рядов по z , $\varphi_3(z)$ и $\varphi_4(z)$ — в виде степенных рядов по $\varphi(z)$; показать, что коэффициенты разложения $\varphi_4(z)$ в ряд Маклорена неотрицательны только в случае, когда $\varphi(z) = \text{const}$.

4.73. Вычислить характеристическую функцию $\xi_1 + \dots + \xi_n$.

4.74. Использовать формулу полного математического ожидания и свойства характеристических функций (производящих функций).

4.75. Вычислить производящие функции Mz^{ξ_i} , $Mz^{\xi_i^2}$, $i=1, \dots, m$, и заметить, что если выполняются условия задачи, то $Mz^{\xi} = Mz^{\xi_1} \dots Mz^{\xi_m}$.

4.76. а) Использовать соотношение

$$\sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi i j}{k}} i = \begin{cases} k, & \text{если } n \text{ делится на } k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

б) Заметить, что $\{\xi \text{ при делении на } k \text{ дает остаток } m\} = \{\xi - m \equiv 0 \pmod{k}\}$, и воспользоваться п. а).

4.77. Заменить ξ_i^2 случайными величинами ζ_i — остатком от деления ξ_i^2 на 3, найти распределение и характеристическую функцию ζ_i и воспользоваться результатом задачи 4.76.

4.78. Воспользоваться независимостью $\xi_1, \dots, \xi_n$.

4.79. Представить $Me^{\pm \lambda \xi}$ в виде интеграла и оценить его снизу, пользуясь положительностью и монотонностью показательной функции.

4.80. Использовать задачи 4.78 и 4.79.

4.81. Пусть $\xi_n = 0$, если $\mu_n \geq n - \mu_n$, и $\xi_n = 1$, если $\mu_n < n - \mu_n$. Тогда

$$\eta_n = (1 - \xi_n) \mu_n + \xi_n (n - \mu_n) = \mu_n + \xi_n (n - 2\mu_n).$$

Показать, что $P\{|\eta_n^{(k)} - \mu_n^{(k)}| \leq C \xi_n n^k\} = 1$, где $C > 0$ — некоторая постоянная. Воспользоваться результатами задачи 4.80.

4.82. Применить формулу полной вероятности.

4.83. Воспользоваться неравенством

$$|Me^{i\xi} - Me^{i\xi_0}| \leq M |e^{i\xi} - e^{i\xi_0}| \leq \\ \leq T |t - t_0| P\{|\xi| < T\} + 2P\{|\xi| \geq T\}.$$

4.84. Представить $f(t)$ в виде суммы действительной и мнимой частей и воспользоваться условием задачи и четностью функции $\cos x$.

4.85. б) Показать, что разность двух независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0, \alpha^{-1}]$, имеет плотность $p_\alpha(x)$.

в) Использовать формулу обращения для преобразования Фурье (см. введение к гл. 4) и результат п. б).

4.86. Показать, что описанная в условии задачи функция $f(t)$ может быть представлена в виде $f(t) = p_0 + \sum_{i=1}^k p_i \max\{1 - a_i |t|, 0\}$, где k — число звеньев ломаной (графика $f(t)$, $t \geq 0$), $a_1, \dots, a_k, p_1, \dots, p_k > 0$, $p_0 + p_1 + \dots + p_k = 1$. Далее воспользоваться результатами задач 4.82 и 4.85.

4.87. Рассмотреть последовательность $f_1(t), f_2(t), \dots$ характеристических функций, удовлетворяющих условиям задачи 4.86 и таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ для любого t , $|t| < \infty$. Далее воспользоваться теоремой непрерывности для характеристических функций (см. введение к гл. 4).

4.88. а) Разложить $f_1(t)$ в ряд Фурье и убедиться в том, что коэффициенты этого разложения определяют распределение вероятностей.

б) Заметить, что $f_1(t) = \frac{1 + f_1(2t)}{2}$, и получить разложение $f_2(t)$ в ряд Фурье с помощью результата п. а).

4.89. Использовать результат задачи 4.88.

4.90. Заметить, что функции $f(t) = Me^{i t \xi_1}$ и $g(t) = Me^{i t (\xi_1 + \dots + \xi_k)}$ связаны соотношением $f^k(t) = g(t)$ и что, согласно задаче 4.83, функции $g(t)$ и $f(t)$ непрерывны.

4.91. Показать, что $Me^{i t \xi} = 1$ тогда и только тогда, когда $P\{\xi t / (2\pi) - \text{целое число}\} = 1$,

4.92. Показать, что если ξ имеет плотность $p(x)$, указанную в условии задачи, то

$$1 - f(t) = 2 \int_0^{\infty} (1 - \cos tx) p(x) dx = o(|t|) \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

и поэтому $f'(0) = 0$. Для оценки интеграла разбить его на два: от 0 до T и от T до ∞ — и использовать неравенство $1 - \cos y \leq y^2/2$ и асимптотическую формулу для $p(x)$, $x \rightarrow \infty$.

4.93. Показать, что функция $u(t) = \operatorname{Re} f(t)$ четная и при условиях задачи удовлетворяет соотношениям $u'(0) = 0$, $|u''(0)| \leq |f''(0)| < \infty$. Далее, пользуясь интегральным представлением для $u(t)$, показать, что

$$u''(0) = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - u(t)}{t^2/2} = - M\xi^2.$$

4.94. Воспользоваться результатом задачи 4.93 и оценкой $(M|\xi|)^2 \leq M\xi^2$.

4.95. Использовать результаты задач 4.84, 4.91, 4.94.

4.96. а) При вычислении функции распределения χ^2_3 перейти в интеграле к полярным координатам.

б) Воспользоваться результатом п. а) и задачей 4.90 для вычисления $M\xi^2$.

4.97. Найти сначала характеристическую функцию гамма-распределения с параметром $\alpha = 1$, затем (пользуясь задачей 4.90) для $\alpha = 1/q$, $q = 1, 2, \dots$, затем для $\alpha = p/q$ ($p, q = 1, 2, \dots$) и, наконец, с помощью теоремы непрерывности — для произвольного $\alpha > 0$.

4.98. Найти характеристическую функцию

$$Me^{i\zeta} = Me^{i(\zeta_1 \xi_1 + \dots + \zeta_n \xi_n)}.$$

4.99. Найти характеристическую функцию распределения $(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

4.100. Воспользоваться теоремой из курса линейной алгебры о приведении симметричной квадратичной формы к диагональному виду с помощью ортогональной замены координат.

4.101. Используя формулу Тейлора для $\ln(1-x)$, найти предел логарифма производящей функции $\xi_1^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$.

4.102. Рассмотреть случайную величину ζ , имеющую равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, и построить такие функции $f_p(x)$, $g_p(x)$, $x \in [0, 1]$, что случайная величина $f_p(\zeta)$ распределена так же, как ξ , $g_p(\zeta)$ — так же, как η , и

$$P\{f_p(\zeta) = g_p(\zeta) = k\} = \min\{P\{\xi = k\}, P\{\eta = k\}\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

4.103. Тем же способом, что в задаче 4.102, построить по независимым случайным величинам $\xi_1, \dots, \xi_n$ имеющим равномерное распределение на $[0, 1]$, случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ и максимально совпадающие с ними независимые случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_n$, имеющие распределения Пуассона с параметрами $p_1, \dots, p_n$ соответственно. Далее воспользоваться соотношением

$$\{\xi_1 + \dots + \xi_n \neq \eta_1 + \dots + \eta_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \neq \eta_i\}$$

и свойствами распределения Пуассона (см. также книгу: А. А. Боровков. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1976, с. 117—120).

4.104. Рассматривая непересекающиеся события вида $A_{i_1} \dots A_{i_q} \bar{A}_{j_1} \dots \bar{A}_{j_{N-q}}$, где $\{j_1, \dots, j_{N-q}\} = \{1, \dots, N\} \setminus \{i_1, \dots, i_q\}$

и $\bar{A}$ — событие, дополнительное к A , показать, что $S_k = \sum_{q=k}^N C_q^k P\{B_q\}$,

$k=0, 1, \dots$. Подставить эти выражения в правую часть равенства, указанного в условии задачи, и привести подобные члены, изменяя порядок суммирования.

4.105. Разложить производящую функцию $\varphi(z) = Mz^{\xi}$ по формуле Тейлора (с остаточным членом в формуле Лагранжа) в точке $z=1$ и заметить, что $\varphi(0) = P\{\xi=0\}$, $\varphi^{(k)}(1) = m_k$ и $\varphi^{(k)}(z) \geq 0$ для любых $k=0, 1, 2, \dots$ и $z \in [0, 1]$.

4.106. Заметить, что если $\varphi(z) = Mz^{\xi}$, то $\varphi^{(n)}(z) = M\xi^{(n)} z^{\xi-n}$, т. е. $\varphi^{(n)}(0) = n! P\{\xi=n\}$. Далее рассуждать так же, как в задаче 4.105.

4.107. Заметить, что если $\varphi(z) = Mz^{\xi}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi \geq n\} z^{n-1} = \frac{1-\varphi(z)}{1-z}$ (ср. с задачей 4.70). Далее рассуждения аналогичны проведенным в задачах 4.105, 4.106. Равенство

$$\frac{d^k}{dz^k} \frac{1-\varphi(z)}{1-z} \Big|_{z=1} = \frac{\varphi^{(k+1)}(1)}{k+1}$$

установить, используя формулу Лейбница и формулу Тейлора.

4.108. Воспользоваться неравенством из задачи 4.106.

4.109. Воспользоваться задачей 4.108, выбрав в качестве ξ случайную величину, распределенную по закону Пуассона с параметром λ .

4.110. Представить случайную величину $\mu_i(n, N, s)$ в виде суммы индикаторов

$$\mu_i(n, N, s) = \chi_i^{(1)} + \chi_i^{(2)} + \dots + \chi_i^{(N)}$$

и воспользоваться формулой задачи 3.56 для факториальных моментов. Для исследования функции $f_i(n) = M\mu_i(n, N, s)$ рассмотреть отношение $f_i(n+1)/f_i(n)$.

4.111. Использовать задачу 4.104.

4.112. Воспользовавшись результатами, полученными при решении задачи 4.110, показать, что при указанном предельном переходе выполняется соотношение $\min(n, N-n) = o(N)$. Далее использовать явные формулы для факториальных моментов $\mu_i(n, N, s)$ и задачу 4.109.

4.113. Представить $\mu_r(n, N)$ в виде $\mu_r(n, N) = \chi_1 + \dots + \chi_N$, где $\chi_i = 1$, если i -я ячейка содержит ровно r частиц, и $\chi_i = 0$ в противном случае. Вычислить факториальные моменты $\mu_r(n, N)$, используя результат задачи 3.56, и применить утверждение задачи 4.109.

4.114. Так как $\{\mu_r(n, N) + \mu_{r+1}(n, N) + \dots = 0\} = \{v_r(N) > n\} \subseteq \{\mu_r(n, N) = 0\}$, то при

$$P\{\mu_r(n, N) = 0\} \rightarrow C, \quad P\left\{\sum_{k=r+1}^{\infty} \mu_k(n, N) = 0\right\} \rightarrow 1 \quad (1)$$

выполняется соотношение $P\{v_r(N) > n\} \rightarrow C$. Соотношение между n и N , при котором справедливо (1), и значение C найти с помощью задачи 4.109.

4.115. Если $\mu_0^{(1)}(n, N)$ — число строк, в которые не попало ни одной частицы, а $\mu_0^{(2)}(n, N)$ — число таких же столбцов, то случайные величины $\mu_0^{(1)}(n, N)$ и $\mu_0^{(2)}(n, N)$ независимы и их предельные распределения можно найти с помощью результата задачи 4.113, а $\kappa(n, N) = \mu_0^{(1)}(n, N) \mu_0^{(2)}(n, N)$.

4.117. Применить центральную предельную теорему.

4.118. Применить закон больших чисел и центральную предельную теорему.

4.119. Использовать результаты п. а) задачи 4.118 и п. б) задачи 4.36.

4.120. Ввести случайные величины $e_{j,i}$ ($1 \leq i \leq N, j = 1, 2, \dots$): $e_{j,i} = 1$, если в j -м испытании появился i -й исход, и $e_{j,i} = 0$ в противном случае, и заметить, что $\eta_n = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N a_i e_{j,i} \right)$. Далее воспользоваться независимостью внутренних сумм и центральной предельной теоремой.

4.122. Найти предел логарифма характеристической функции $(\xi_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$.

4.123. Представить $S_n^{(n)}$ в виде суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин и воспользоваться центральной предельной теоремой.

4.124. Показать, что $M e^{it \xi_n / s_n} \rightarrow e^{-t^2/2}$, $n \rightarrow \infty$, для любого t , $|t| < \infty$, используя независимость $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n}$ равенство

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2} + \frac{\theta |t|^3}{6}, \quad |\theta| \leq 1,$$

и оценку $M |\xi|^3 \geq (D\xi)^{3/2}$ (из которой можно вывести, что $s_n^{-3} \max_{1 \leq k \leq n} D\xi_{n,k} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$).

4.125. Использовать результат задачи 4.124.

4.126. Использовать результат задачи 4.124.

4.127. Воспользоваться методом производящих функций для нахождения предельного распределения η_n при $n \rightarrow \infty$.

4.128. Характеристическая функция распределения ξ_n/A_n при $n \rightarrow \infty$ должна сходиться к характеристической функции предельного распределения.

4.129. Заметить, что $\{N_t < k\} = \{\xi_1 + \dots + \xi_k > t\}$, и воспользоваться центральной предельной теоремой.

4.130. Используя результат задачи 3.46, представить $\xi_{(m)}$ в виде суммы m независимых случайных величин. Для доказательства асимптотической нормальности $(\xi_{(m)} - M\xi_{(m)})/\sqrt{D\xi_{(m)}}$ показать, что выполняются условия задачи 4.124 (при этом удобно применить результаты задачи 4.73). Второе утверждение п. б) вывести из результата п. а) и задачи 4.53.

4.131. Заметить, что если $F_{-1}(y)$ — функция, обратная к $F(x)$, то, согласно задаче 3.5, распределения $\xi_{(m)}$ и $F_{-1}(1 - \exp\{-\alpha \xi_{(m)}\})$ совпадают (здесь $\xi_{(1)} < \dots < \xi_{(m)}$ — те же случайные величины, что в задаче 4.130). Далее воспользоваться утверждениями п. б) задачи 4.130 и задачи 4.51.

4.132. а) Показать, что τ_m не зависит от $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$, вычислив $P\{\tau_m > n \mid v_0, v_1, \dots, v_{m-1}\}$; для нахождения $P\{\tau_m > v_k - v_l\}$ воспользоваться формулой полной вероятности по значениям $v_k - v_l$ и равенством $v_k = \tau_1 + \dots + \tau_k$.

б) Из точной формулы для $P\{\tau_m > v_{m-1} - v_{m-r}\}$ получить двусторонние неравенства, воспользовавшись оценкой

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{1-x}{1-xy} \leq \frac{1}{1+y}, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

4.133. Найти предел логарифма производящей функции $v_k - k$, используя результаты задачи 4.132.

4.134. Для нахождения предельного распределения использовать утверждение задачи 4.124, а для вычисления моментов — полу-

чения в решении задачи 4.132 равенства $v_m = \tau_1 + \dots + \tau_m$ (где $\tau_1, \dots, \tau_m$ — независимые случайные величины) и формулу для производящей функции τ_d .

4.136. Пользуясь симметричностью распределения ξ , представить $1 - Me^{it\xi}$ в виде интеграла от 0 до ∞ . Чтобы исследовать асимптотическое поведение $1 - Me^{it\xi}$ при $t \rightarrow 0$, разбить этот интеграл на два: от 0 до $T = T(t)$ и от T до ∞ — и оценить первый интеграл по модулю, а при исследовании второго использовать асимптотическую формулу для $p(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

4.137. Используя формулу обращения для характеристических функций (см. введение к гл. 4), показать, что распределение с характеристической функцией $e^{-a|t|}$ имеет плотность $p(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}$.

4.138. Показать, что плотность распределения случайной величины $1/\xi_1$ удовлетворяет условиям задачи 4.136 с $\alpha = 2$ и $C = \pi p(0)$. Использовать задачи 4.135, 4.137 и теорему непрерывности для характеристических функций.

4.139. Воспользоваться свойствами характеристических функций и тем, что $\xi_1 + \xi_2 = 2\xi_1$.

4.140. Заметить, что $I_{a,b}(x)$ лишь постоянным множителем отличается от плотности суммы двух независимых случайных величин, имеющих распределения Коши с параметрами a и b . Рассматривая характеристические функции, показать, что эта сумма сама имеет распределение Коши.

Глава 5

5.1. Найти P^2 .

5.4. Найти $p_1 = P(\eta_2 = 1 | \eta_2 = -1)$, $p_2 = P(\eta_2 = 1 | \eta_1 = 1, \eta_2 = -1)$.

5.5. Вычислить $P\{\mu_0(n+1) = l | \mu_0(n) = k\}$, $k, l = 0, 1, \dots, N$, и $P\{\mu_0(n+1) = l | \mu_0(n) = k, \mu_0(n-1) = k_1, \dots, \mu_0(0) = k_n\}$ при любых допустимых значениях $k_1, \dots, k_n$.

5.6. См. указания к задаче 5.5.

5.8. Показать, что матрица $\|p_{ij}\|_{i,j=1}^n$ — дважды стохастическая, т. е. что в ней суммы элементов как в любой строке, так и в любом столбце равны 1.

5.9. Показать, что при фиксированном значении ξ_i распределение ξ_{i+1} не зависит от $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}$.

5.10. Построить кусочно-постоянные функции $g(y)$ и $f(x, y)$ так, чтобы при любых $i, j \in \{1, \dots, N\}$ мера множества тех значений y , при которых $g(y) = j$, $f(i, y) = j$, была равна соответственно $p_i^{(0)}$, p_{ij} .

5.11. За состояние принять число очков грани, на которой лежит кость. (Сумма очков на противоположных гранях равна 7.) Выписать матрицу вероятностей перехода; применить теорему о финальных вероятностях.

5.12. Заметить, что $p_{j, n+1} = \alpha/n$ для любого $j = 1, \dots, n$ и что поэтому распределение τ_n совпадает с распределением $\tau'_n = \min\{t = 1, 2, \dots: \zeta_t = 1\}$, где $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — последовательность Бернулли,

$$P\{\zeta_t = 1\} = \alpha/n, \quad P\{\zeta_t = 0\} = 1 - \alpha/n, \\ t = 1, 2, \dots$$

Воспользоваться задачей 4.37.

5.13. Заметить, что $P\{\tau_1 = 1\} = 1$. Для вычисления $m_0(N) = M\{\tau_N | z_0 = 0\}$, $N = 1, 2, \dots$, составить и решить системы линейных уравнений для $m_k(N) = M\{\tau_N | z_0 = k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, пользуясь формулой полного математического ожидания (разложением по значениям z_1). Сократить число неизвестных, замечая, что $m_k(N) = m_{-k}(N)$.

5.14. Так же, как в задаче 5.13, составить систему линейных уравнений для $m_k(N)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Получить общую формулу для $m_k(N)$, рассматривая в случаях $N = 2, 3$ значения $m_0(N) - m_k(N)$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.

5.15. Используя формулу полной вероятности (разложения по возможным значениям $\xi(1)$), составить систему линейных уравнений, которым должны удовлетворять $m_0, m_1, \dots, m_N$, и убедиться в том, что указанные значения m_k являются единственным решением этой системы.

5.16. Так же, как в задаче 5.13, составить систему линейных уравнений, связывающих $p_{k, N}(t+1)$, $p_{k-1, N}(t)$, $p_{k+1, N}(t)$ и, пользуясь монотонностью по t величин $p_{iN}(t)$, перейти от этой системы к системе линейных уравнений относительно $\pi_k^{(N)}$, $k = 0,$

$1, \dots, N$. Вывести из этой системы, что отношение $\frac{\pi_{k+1}^{(N)} - \pi_k^{(N)}}{\pi_k^{(N)} - \pi_{k-1}^{(N)}}$ не зависит от k , и воспользоваться равенствами $\pi_0^{(N)} = 0$, $\pi_N^{(N)} = 1$.

Аналогично получить формулы для $\pi_k^{(0)}$, $k = 1, \dots, N$.

5.18. Найти матрицу вероятностей перехода P цепи Маркова ξ_t и проверить, что $\pi P = \pi$, где $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$, и что $\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_N = 1$. Использовать равенство $C_N^k = C_N^{N-k}$ и метод производящих функций.

5.19. б) Используя формулу полного математического ожидания (разложение по значениям ξ_1 в классе несущественных состояний), составить систему линейных уравнений для величин $m_i =$

$= M\{\tau | \xi_0 = i\}$, $i = 1, 2$. Решить эту систему и заметить, что в нашем случае

$$M\tau = P(\xi_0 = 1) m_1 + P(\xi_0 = 2) m_2.$$

я) Аналогично п. б) составить системы линейных уравнений для $p_1^{(\alpha)}$, $p_2^{(\alpha)}$ и для $p_1^{(\beta)}$, $p_2^{(\beta)}$.

г) Заметить, что если $q_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_t = j | \xi_0 = i\}$, $i = 3, 4, 5, 6$, — предельные вероятности для цепи, начальное состояние которой принадлежит существенному классу, то

$$p_j = P(\xi_0 = 1) p_1^{(\alpha)} q_j + P(\xi_0 = 2) p_2^{(\alpha)} q_j, \quad j = 3, 4,$$

$$p_j = P(\xi_0 = 1) p_1^{(\beta)} q_j + P(\xi_0 = 2) p_2^{(\beta)} q_j, \quad j = 5, 6.$$

5.20. Пусть $c_1, \dots, c_n$ — собственные векторы (векторы-столбцы) A , соответствующие $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, вектор-столбец $a_j^{(m)}$ имеет координаты $a_{1j}^{(n)}, \dots, a_{nj}^{(n)}$, и все координаты вектора-столбца e_j равны 0, кроме j -й координаты, равной 1. Если $e_j = \alpha_1^{(j)} c_1 + \dots + \alpha_n^{(j)} c_n$, то

$$a_j^{(m)} = A^m e_j = A^m \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(j)} c_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(j)} \lambda_k^m c_k.$$

5.21. Использовать указания к задаче 5.20 и приведение матрицы A к жордановой нормальной форме.

5.22. По собственным числам матрицы P и по значениям $P, P^2, \dots, P^{N-1}$ мы можем составить систему N линейных уравнений относительно коэффициентов c_{ij} в формулах задач 5.20 и 5.21.

5.23. Использовать результат задачи 5.22.

5.24. Представить $v_1(t)$ в виде суммы индикаторов: $v_1(t) = \theta_1 + \dots + \theta_t$, где $\{\theta_k = 1\} = \{\xi_k = 1\}$, $\{\theta_k = 0\} = \{\xi_k = 2\}$, $k = 1, 2, \dots$. Заметить, что $M\theta_k = p_{j1}(k)$, $M\theta_k \theta_l = p_{j1}(k) p_{11}(l-k)$ ($1 \leq k \leq l$).

Используя результат задачи 5.23: $p_{j1}(k) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \varepsilon_{jk}$, где $|\varepsilon_{jk}| < |1 - \alpha - \beta|^k$, показать, что

$$M\{v_1(t) | \xi_0 = j\} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} t (1 + o(1)).$$

$$M\{v_1^{[2]}(t) | \xi_0 = j\} = (M\{v_1(t) | \xi_0 = j\})^2 \cdot (1 + o(1)),$$

$$D(v_1(t) | \xi_0 = j) =$$

$$= M\{v_1^{[2]}(t) | \xi_0 = j\} + M\{v_1(t) | \xi_0 = j\} - \\ - (M\{v_1(t) | \xi_0 = j\})^2 = o(t^2).$$

Проводя вычисления более аккуратно, можно показать, что

$$D\{v_1(t) | \xi_0 = j\} = Ct (1 + o(1)).$$

5.25. Использовать результат задачи 5.24 и неравенство Чебышева.

5.26. Использовать равенство

$$\pi_j - \frac{1}{N} = \sum_{k=1}^N \pi_k p_{kj} - \frac{1}{N} = \sum_{k=1}^N \pi_k \left(p_{kj} - \frac{1}{N} \right).$$

5.27. Рассмотреть матрицы $P = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix}$ и $P' = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

5.28. Показать, что последовательность $\zeta_n = z_{n+1} - z_n$ образует цепь Маркова с 4 состояниями. Найти явное выражение для k -й степени переходной матрицы этой цепи, представляя ее в виде разности двух коммутирующих матриц I и G (т.е. удовлетворяющих условию $IG=GI$). Далее вычислить $M\zeta_k$ и воспользоваться равенством

$$z_n = \zeta_0 + \zeta_1 + \dots + \zeta_{n-1}.$$

5.29. а) Использовать лемму Бореля—Кантелли (п. а) задачи 4.14) и формулу Стирлинга.

б) Убедиться в том, что п. б) задачи 4.14 неприменим. Вычислить Mv двумя способами: вводя индикаторы событий $\{S_n=0\}$ и вводя случайные величины $\tau_1 = \min\{n \geq 1: S_n=0\}$, $\tau_{k+1} = \min\{n > \tau_k: S_n=0\}$, $k=1, 2, \dots$ (которые удовлетворяют условиям $\{v \geq k\} = \{\tau_k < \infty\}$).

5.30. Заметить, что компоненты $S_{n,1}, \dots, S_{n,s}$ вектора S_n являются независимыми реализациями величин, рассматривавшихся в п. б) задачи 5.29. При $s \geq 3$ использовать лемму Бореля—Кантелли, при $s=2$ рассуждать так же, как в п. б) задачи 5.29.

Глава 6

6.1. Положим $y_k = x_k - a$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$. Показать, что $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2$. Найти Ms^2 . Доказать, что $Os^2 = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$.

6.3. См. задачу 3.69.

6.4. Использовать независимость $\bar{x}_l$ и s_l^2 .

6.5. Величина s^2 является состоятельной оценкой Dx_1 (см. задачу 6.1). Показать, что s^2/Dx_1 при $n \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к 1. Воспользоваться решением задачи 4.36, б).

6.6. Выразить величину m_{11} через $x'_j = x_j - M\xi$, $y'_j = y_j - M\eta$. Доказать, что $Dm_{11} = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$.

6.7. Найти Mr^* , Dp^* . Использовать неравенство Чебышева.

6.8. Используя теорему Муавра—Лапласа и результаты задач 6.7, 4.36, б), доказать, что при $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \frac{p^* - p}{\sqrt{p^*(1-p^*)/n}} \leq x \right\} \rightarrow \Phi(x).$$

6.14. б) Написать функцию правдоподобия с $Ma_i = a$, $Mb_i = b$, $Mci = a + b$.

6.15. Воспользоваться результатом задачи 6.1, центральной предельной теоремой и задачей 4.36, б).

6.16. Оценки A_1^* и A_2^* зависят от общей оценки z_2 и, следовательно, нельзя воспользоваться решением задачи 6.3. Из условия несмещенности $MA^* = A$ получим: $c_1 + c_2 = 1$. Отсюда $A^* = \alpha + \beta[c_1 z_1 + (1 - c_1) z_2] + \gamma z_2$. Найти DA^* и подобрать c_1 так, чтобы дисперсия была минимальной.

6.20. Воспользоваться формулами

$$x^2 = x^{(2)} + x,$$

$$x^3 = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x,$$

$$x^4 = x^{(4)} + 6x^{(3)} + 7x^{(2)} + x \quad (x^{(k)} = x(x-1)\dots(x-k+1))$$

и решением задачи 3.85.

6.21. Использовать результат задачи 3.43.

6.22. Использовать результат задачи 3.46.

6.23. Использовать результаты задач 6.21, 6.22, 3.43, 3.46.

6.24. Использовать результат задачи 3.43.

6.29. Использовать квантили u_α нормального распределения: $1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$.

6.30. Воспользоваться решением задач 3.85, 3.90 и формулой

$$p_k = \int_{k/N}^{(k+1)/N} g(x) dx = \frac{1}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) - \frac{1}{2N^2} g'\left(\frac{k}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^3}\right),$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$.

6.31. Воспользоваться решением задач 3.90, 6.30 и указанием к задаче 6.30.

Глава 1

1.19. Легко проверяется, что

$$P_1 = \frac{1}{N^2} \left(\left[\frac{N}{2} \right]^2 + \left(N - \left[\frac{N}{2} \right] \right)^2 \right) = 1 - \frac{2}{N} \left[\frac{N}{2} \right] + \frac{2}{N^2} \left[\frac{N}{2} \right]^2,$$

$$P_2 = \frac{1}{N^2} \left(\left[\frac{N}{3} \right]^2 + \left(N - \left[\frac{N}{3} \right] \right)^2 \right) = 1 - \frac{2}{N} \left[\frac{N}{3} \right] + \frac{2}{N^2} \left[\frac{N}{3} \right]^2.$$

Покажем, что $P_2 < P_1$ при $N \geq 3$:

$$P_1 - P_2 = \frac{2}{N} \left(\left[\frac{N}{2} \right] - \left[\frac{N}{3} \right] \right) + \frac{2}{N^2} \left(\left[\frac{N}{3} \right]^2 - \left[\frac{N}{2} \right]^2 \right) =$$

$$= \frac{2}{N} \left(\left[\frac{N}{2} \right] - \left[\frac{N}{3} \right] \right) \left(1 - \frac{1}{N} \left(\left[\frac{N}{3} \right] + \left[\frac{N}{2} \right] \right) \right) > 0.$$

1.22. Нетрудно проверить, что

$$\{X^2 + Y^2 \equiv 0 \pmod{3}\} = \{X \equiv Y \equiv 0 \pmod{3}\} \cup$$

$$\cup \{X \equiv -Y \equiv 1 \pmod{3}\} \cup \{X \equiv -Y \equiv -1 \pmod{3}\},$$

т. е.

$$P \{X^2 + Y^2 \equiv 0 \pmod{3}\} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \left(\left[\frac{N}{3} \right]^2 + 2 \left[\frac{N+1}{3} \right] \left[\frac{N+2}{3} \right] \right). \quad (1)$$

Так как $\left[\frac{N}{3} \right] + \left[\frac{N+1}{3} \right] + \left[\frac{N+2}{3} \right] = N$ и функция

$$f(x) = x(a-x) = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4}, \quad (2)$$

то

$$P \{X^2 + Y^2 \equiv 0 \pmod{3}\} \leq \frac{1}{N^2} \left(\left[\frac{N}{3} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(N - \left[\frac{N}{3} \right] \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{N^2} \left(\frac{N^2}{2} - N \left[\frac{N}{3} \right] + \frac{3}{2} \left[\frac{N}{3} \right]^2 \right). \quad (3)$$

Далее, если M_1 — множество чисел, дающих при делении на 7 остатки 1, 2 или 4, M_2 — множество чисел, дающих при делении

на 7 остатки 3, 5 или 6, то для любого $n \in M_1$ число n^3 при делении на 7 дает остаток 1, а для $n \in M_2$ число n^3 при делении на 7 дает остаток -1 . Поэтому

$$\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{7}\} = \{X = Y \equiv 0 \pmod{7}\} \cup \\ \cup \{X \in M_1, Y \in M_2\} \cup \{X \in M_2, Y \in M_1\}$$

$$\text{и} \\ P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{7}\} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \left(\left[\frac{N}{7} \right]^3 + 2 \left(\left[\frac{N+6}{7} \right] + \left[\frac{N+5}{7} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{N+3}{7} \right] \right) \left(\left[\frac{N+4}{7} \right] + \left[\frac{N+2}{7} \right] + \left[\frac{N+1}{7} \right] \right) \right). \quad (4)$$

Пользуясь равенством в (2) и тем, что для любого $N \geq 1$

$$\sum_{k=0}^6 \left[\frac{N+k}{7} \right] = N.$$

$$\left| \left[\frac{N+6}{7} \right] + \left[\frac{N+5}{7} \right] + \left[\frac{N+3}{7} \right] - \right. \\ \left. - \left[\frac{N+4}{7} \right] - \left[\frac{N+2}{7} \right] - \left[\frac{N+1}{7} \right] \right| \leq 2.$$

получаем

$$P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{7}\} \geq \\ \geq \frac{1}{N^2} \left(\left[\frac{N}{7} \right]^3 + 2 \left(\frac{1}{4} \left(N - \left[\frac{N}{7} \right] \right)^3 - 1 \right) \right) = \\ = \frac{1}{N^2} \left(\frac{N^3}{2} - N \left[\frac{N}{7} \right] + \frac{3}{2} \left[\frac{N}{7} \right]^3 - 2 \right). \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует, что

$$N^2 (P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{7}\} - P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{3}\}) \geq \\ \geq N \left[\frac{N}{3} \right] - \frac{3}{2} \left[\frac{N}{3} \right]^3 - N \left[\frac{N}{7} \right] + \frac{3}{2} \left[\frac{N}{7} \right]^3 - 2 = \\ = \left(\left[\frac{N}{3} \right] - \left[\frac{N}{7} \right] \right) \left(N - \frac{3}{2} \left(\left[\frac{N}{3} \right] + \left[\frac{N}{7} \right] \right) \right) - 2 \geq \\ \geq \left(\left[\frac{N}{3} \right] - \left[\frac{N}{7} \right] \right) \frac{2}{7} N - 2 > 0$$

при $N > 7$. Для $N = 4, 5, 6, 7$ соотношение $P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{7}\} > P\{X^3 + Y^3 \equiv 0 \pmod{3}\}$ проверяется непосредственно с помощью формул (1) и (4).

1.25. Если Ξ_1 симметрична Ξ_2 относительно Ξ_3 , то

$$\xi_2 - \xi_1 = \xi_3 - \xi_3 = d_1, \quad \eta_2 - \eta_1 = \eta_3 - \eta_3 = d_2 \quad (1)$$

для некоторых целых чисел d_1 и d_2 , не равных одновременно 0 и удовлетворяющих условиям $|d_1| \leq n, |d_2| \leq n$. При фиксирован-

ных d_1 и d_2 число троек карточек $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$, для которых выполнено (1), равно $(2n+1-2|d_1|)(2n+1-2|d_2|)$. Суммируя по d_1 и d_2 , находим число троек попарно различных карточек, для которых E_1 симметрична E_2 относительно E_3 :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d_1, d_2 = -n \\ d_1^2 + d_2^2 \neq 0}}^n (2n+1-2|d_1|)(2n+1-2|d_2|) = \\ = (2n+1)^2 \sum_{d_1=1}^n (2n+1-2d_1) + \\ + 2 \sum_{d_1=1}^n (2n+1-2d_1) \left(2n+1+2 \sum_{d_2=1}^n (2n+1-2d_2) \right) = \\ = 2(2n+1)(n(2n+1)-n(n+1)) + 2(n(2n+1) + \\ + 1 - n(n+1))(2n+1+2(n(2n+1)-n(n+1))) = 4n^3(n+1)^2. \end{aligned}$$

Так как общее число упорядоченных троек попарно различных карточек есть

$$(2n+1)^2((2n+1)^2-1)((2n+1)^2-2) = 4n(n+1)((4n(n+1))^2-1),$$

то искомая вероятность равна

$$p_n = \frac{n(n+1)}{(4n(n+1))^2-1}.$$

1.65. Граница $\triangle ABC$ пересекает ровно m окружностей, если A находится между S_{2m-1} и S_{2m+1} (при $m=0$ —внутри S_1 , при $2m-1 < n < 2m+1$ —между S_n и S_{n-1}), и поэтому

$$P_m = \begin{cases} 1/n^2, & m=0, \\ 8m/n^2, & 1 \leq m \leq [(n-1)/2], \\ (2n-1)/n^2, & m=n/2, \text{ } n \text{ четное,} \\ 0, & m > n/2. \end{cases}$$

Глава 2

2.18. Если $n=2$, то из условий задачи

$$P(A_1)=p_1, \quad P(A_2)=p_2, \quad P(A_1A_2)=p_1p_2$$

следует независимость A_1 и A_2 .

При $n=3$ уже можно привести пример совокупности зависимых событий, удовлетворяющих условию задачи:

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2\bar{A}_3)=1/8,$$

$$P(A_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1A_2A_3)=1/8-\varepsilon,$$

$$P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)=1/8+\varepsilon,$$

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=1/8+2\varepsilon, \quad P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1/8-2\varepsilon,$$

где $0 < \varepsilon \leq 1/16$. В этом случае $P(A_i) = 1/2$, $i = 1, 2, 3$, $P(A_1 A_2) = 1/4$, $P(A_1 A_2 A_3) = 1/8$, но $P(A_1 A_2) = 1/4 - \varepsilon \neq P(A_1)P(A_2)$.

2.19. Пусть события $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условиям задачи. Оценим снизу число элементов множества Ω . Для любого набора $(e_1, \dots, e_k)$, $e_i = 0$ или 1 ($i = 1, 2, \dots, k$), $P\left\{\bigcap_{i=1}^k A_i^{(e_i)}\right\} > 0$,

где $A_i^{(0)} = A_i$, $A_i^{(1)} = \overline{A_i}$, т. е. $\bigcap_{i=1}^k A_i^{(e_i)} \neq \emptyset$. Так как при $(e_1, \dots, e_k) \neq (e'_1, \dots, e'_k)$ события $\bigcap_{i=1}^k A_i^{(e_i)}$ и $\bigcap_{i=1}^k A_i^{(e'_i)}$ не пересекаются, и число различных наборов $(e_1, \dots, e_k)$ равно 2^k , то

$k \leq \log_2 n$. Экстремальным примером является $\Omega = \{(e_1, \dots, e_k) : e_i = 0 \text{ или } 1\}$ с $P\{(e_1, \dots, e_k)\} = 2^{-k}$ и $A_i = \{e_i = 0\}$, $i = 1, \dots, k$.

2.20. Пусть на подмножествах $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ задана вероятность $P(\cdot)$ ($P(\{i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) и выделена совокупность попарно независимых событий $A_1, \dots, A_k$. Сопоставим каждому событию A_i вектор $a_i \in R^n$:

$$a_i = (e_1^{(i)} \sqrt{p_1}, e_2^{(i)} \sqrt{p_2}, \dots, e_n^{(i)} \sqrt{p_n}), \quad i = 1, \dots, k,$$

где $e_j^{(i)} = 1$, если $j \in A_i$, и $e_j^{(i)} = 0$ в противном случае. Покажем, что если события $A_1, \dots, A_k$ попарно независимы, то векторы $a_1, \dots, a_k$ линейно независимы. Ввиду попарной независимости $A_1, \dots, A_k$

$$(a_i, a_j) = P\{A_i A_j\} = P\{A_i\}P\{A_j\} \quad \text{при } i \neq j \quad (1)$$

и $(a_i, a_i) = P\{A_i\}$, $i = 1, \dots, k$. Как известно из курса линейной алгебры, векторы $a_1, \dots, a_k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы векторы

$$b_i = ((a_i, a_1), (a_i, a_2), \dots, (a_i, a_k)) \in R^k, \quad i = 1, \dots, k.$$

(Действительно, если $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$, то в силу линейности скалярного произведения $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k = 0$; обратно, если $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k = 0$, т. е. $(a_i, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) = 0$, $i = 1, \dots, k$, то $(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k, \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) = 0$, или $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$.) Согласно (1) векторы b_i имеют вид

$$b_i = P\{A_i\}[(P\{A_1\}, \dots, P\{A_k\}) + (1 - P\{A_i\})e_i],$$

где e_i — единичный вектор i -й координатной оси. Поэтому при любых числах $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$\begin{aligned} \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k &= \\ &= (\alpha_1 P\{A_1\} + \dots + \alpha_k P\{A_k\})(P\{A_1\}, \dots, P\{A_k\}) + \\ &\quad + \alpha_1 P\{A_1\}(1 - P\{A_1\})e_1 + \dots + \alpha_k P\{A_k\}(1 - P\{A_k\})e_k. \end{aligned}$$

т. е. $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k = 0$ только в случае, когда

$$\alpha_i (P\{A_i\})^2 + P\{A_i\} (1 - P\{A_i\}) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Так как по условию $P\{A_i\} > 0$, $i = 1, \dots, k$, то из (2) следует, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, т. е. векторы $b_1, \dots, b_k$ линейно независимы, т. е. линейно независимы векторы $a_1, \dots, a_k \in R^n$. Однако это возможно только при $k \leq n$.

Приведем пример совокупности, состоящей из $n > 3$ попарно независимых событий. Положим

$$A_1 = \{1, \dots, n\}, \quad A_i = \{1, i\}, \quad i = 2, \dots, n,$$

и пусть $P\{1\} = 1 - (n-1)x$, $P\{i\} = x$, $i = 2, \dots, n$, где $x > 0$ удовлетворяет условию

$$1 - (n-1)x = (x + 1 - (n-1)x)^2, \quad \text{т. е. } x = \frac{n-3}{(n-2)^2}.$$

Нетрудно проверить, что такие события $A_1, \dots, A_n$ попарно независимы, если $n > 3$. При $n=3$, согласно задаче 2.19, на $\Omega = \{1, \dots, n\}$ нельзя задать такие события A_1, A_2 , что $P\{A_1 A_2\} = P\{A_1\} P\{A_2\}$ и $0 < P\{A_i\} < 1$, $i = 1, 2$, и поэтому при $n=3$ можно построить только 2 попарно независимых события A_1, A_2 . (При этом либо $P\{A_1\} = 1$, либо $P\{A_2\} = 1$.)

2.54. а) Согласно теореме Муавра—Лапласа

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \xi_n - \frac{n}{2} \right| < \frac{\sqrt{n}}{2} \right\} = 2\Phi_0(1) = 0,68269\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \xi_n - \frac{n}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{n}}{2} \right\} = 1 - 2\Phi_0(1) = 0,31730\dots$$

Эти предельные значения и являются приближениями для искоемых вероятностей.

б) При $p=q=1/2$ из формулы (2.11) находим

$$P\{\xi_n = k\} = C_n^k 2^{-n}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Отсюда и из равенств

$$P\{|\xi_{100} - 50| \leq 5\} = P\{45 \leq \xi_{100} \leq 55\},$$

$$P\{|\xi_{100} - 50| \geq 5\} = P\{\xi_{100} \leq 45\} + P\{\xi_{100} \geq 55\} = 1 - P\{46 \leq \xi_{100} \leq 54\}$$

находим

$$\begin{aligned}
 P\{45 \leq \xi_{100} \leq 55\} &= 2^{-100} \sum_{k=45}^{55} C_{100}^k = \\
 &= 2^{-100} C_{100}^{50} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^5 \frac{C_{100}^{50-k}}{C_{100}^{50}} \right) = \\
 &= \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} \left(1 + 2 \frac{50}{51} \left(1 + \frac{49}{52} \left(1 + \frac{48}{53} \left(1 + \frac{47}{54} \left(1 + \frac{46}{55} \right) \right) \right) \right) \right) = \\
 &= 9,15635 \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Используя уточненную формулу Стирлинга (см. стр. 9), находим

$$\begin{aligned}
 100! &= \sqrt{200\pi} \left(\frac{100}{e} \right)^{100} \exp \left\{ \frac{1}{1200} - \frac{\theta_1}{1200 \cdot 1201} \right\}, \\
 50! &= \sqrt{100\pi} \left(\frac{50}{e} \right)^{50} \exp \left\{ \frac{1}{600} - \frac{\theta_2}{600 \cdot 601} \right\},
 \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$. Поэтому при некоторых $\theta_i, |\theta_i| \leq 1, i=3, 4, 5$,

$$\begin{aligned}
 \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} &= \frac{1}{5 \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{400} + \frac{\theta_3}{1,8 \cdot 10^5} \right\} = \\
 &= \frac{1}{5 \sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{400} + \frac{\theta_3}{1,8 \cdot 10^5} + \frac{\theta_4}{2 \cdot 399^2} \right) = \frac{0,9975 + \theta_5 \cdot 10^{-5}}{5 \sqrt{2\pi}}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$P\{45 \leq \xi_{100} \leq 55\} = 0,72874 + \theta_6 \cdot 10^{-5}, \quad |\theta_6| \leq 1.$$

Аналогично находим, что

$$P\{|\xi_{100} - 50| \geq 5\} = 0,36820 + \theta_7 \cdot 10^{-5}, \quad |\theta_7| \leq 1.$$

Отличие значений вероятностей, полученных в п. а), от истинных значений объясняется двумя причинами: заменой допредельных значений вероятностей предельными, а также тем, что события $\{|\xi_{100} - 50| \leq 5\}$ и $\{|\xi_{100} - 50| \geq 5\}$ пересекаются.

2.55. а) То же, что в предыдущей задаче.

б) Аналогично решению задачи 2.54 получаем

$$\begin{aligned}
 P\{|\xi_{128} - 64| \leq 4 \sqrt{2}\} &= P\{59 \leq \xi_{128} \leq 69\} = \\
 &= \frac{C_{128}^{64}}{2^{128}} \left(1 + \frac{128}{65} \left(1 + \frac{63}{66} \left(1 + \frac{62}{67} \left(1 + \frac{61}{68} \left(1 + \frac{60}{69} \right) \right) \right) \right) \right) = \\
 &= 9,50563 \frac{C_{128}^{64}}{2^{128}} = 0,66906 + \theta \cdot 10^{-5}, \quad |\theta| \leq 1,
 \end{aligned}$$

и так как $4\sqrt{2}$ — число не целое, то

$$P\{|\xi_{128} - 64| > 4\sqrt{2}\} = \\ = 1 - P\{|\xi_{128} - 64| \leq 4\sqrt{2}\} = 0.33094 - 0 \cdot 10^{-5}, \\ |0| \leq 1.$$

Глава 3

3.47. Согласно задаче 3.46 соответствующие вариационному ряду $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$ (построенному по $\xi_1, \dots, \xi_n$) случайные величины

$$\Delta_1 = \xi_{(1)}, \quad \Delta_k = \xi_{(k)} - \xi_{(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

независимы и Δ_k имеет показательное распределение с параметром $(n - k + 1)\lambda$, $k = 1, \dots, n$. Остается заметить, что

$$\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = \xi_{(n)} = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

и что случайные величины ξ_k/k , $k = 1, 2, \dots, n$, независимы и ξ_k/k имеет показательное распределение с параметром $k\lambda$, т. е. распределено так же, как Δ_{n-k+1} .

3.49. Введем вспомогательную случайную величину ξ_2 , не зависящую от ξ_1 и имеющую распределение Пуассона с параметром $\lambda_2 = \lambda_1$. Согласно п. б) задачи 3.17 распределение $\xi_1 + \xi_2$ совпадает с распределением ξ_3 . Поэтому для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$P(\xi_3 \leq k) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq k) = \\ = \sum_{m=0}^k P(\xi_2 = m) P(\xi_1 \leq k - m) < \\ < P(\xi_1 \leq k) P(\xi_2 \leq k) < P(\xi_1 \leq k).$$

3.57. Пусть $F_{-1}(y) = \sup\{x: F(x) \leq y\}$; тогда, согласно задаче 3.5,

$$M\xi = \int_0^1 F_{-1}(y) dy,$$

т. е. $M\xi$ — площадь области $\{(x, y): 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq F_{-1}(y)\}$. Но

$$\int_0^1 F_{-1}(y) dy = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx.$$

3.109. Для любой последовательности $x_n \uparrow \infty$

$$|\xi|^k / (|\xi| < x_n) \uparrow |\xi|^k.$$

По теореме о мажорируемой сходимости

$$M(|\xi|^k / (|\xi| < x_n)) \uparrow M|\xi|^k.$$

Так как

$$M|\xi|^k = M(|\xi|^k / (|\xi| < x_n)) + M(|\xi|^k / (|\xi| > x_n)),$$

то $M(|\xi|^k / (|\xi| > x_n)) \rightarrow 0$.

3.123. Так как функция $f(x) = |x|^r$ при $r \geq 1$ выпукла вниз, то при любом действительном x , согласно задаче 3.119,

$$M|x + \eta|^r \geq |M(x + \eta)|^r = |x|^r.$$

Поэтому при $r \geq 1$

$$M|\xi + \eta|^r = M(M(|\xi + \eta|^r | \xi)) \geq M|\xi|^r.$$

3.126. б) Если ранг матрицы B равен r , то существуют такие линейно независимые векторы $b_1, \dots, b_{k-r} \in R^k$, что $Bb_i = 0$, $i = 1, \dots, k-r$. Поэтому $D((b_i, \xi)) = (b_i, Bb_i) = 0$, $i = 1, \dots, k-r$, т. е. $P\{(b_i, \xi) = c_i\} = 1$ для некоторых чисел $c_1, \dots, c_{k-r}$. Значит, существует r -мерная гиперплоскость $L_r \subset R^k$, ортогональная подпространству, натянутому на $b_1, \dots, b_{k-r}$, и удовлетворяющая условию $P\{\xi \in L_r\} = 1$.

Обратно, если существует q -мерная гиперплоскость $L_q \subset R^k$, для которой $P\{\xi \in L_q\} = 1$, то существуют линейно независимые векторы $b_1, \dots, b_{k-q}$, ортогональные L_q , и числа $c_1, \dots, c_{k-q}$, удовлетворяющие условиям

$$P\{(\xi, b_i) = c_i\} = 1, \quad i = 1, \dots, k-q.$$

Согласно п. б) задачи 3.125 тогда $Bb_i = 0$, $i = 1, \dots, k-q$, т. е. ранг B не превышает q . Так как по условию ранг B равен r , то соотношение $P\{\xi \in L_{r-1}\} = 1$ не может выполняться ни для какой $(r-1)$ -мерной гиперплоскости $L_{r-1} \subset R^k$.

Глава 4

4.12. Так же, как в задаче 4.11, находим, что

$$P\{\xi^{(n)} \in C_{n\sqrt{2/\pi}, \varepsilon}\} = P\left\{\left|\frac{|\xi_1^{(n)}| + \dots + |\xi_n^{(n)}|}{n\sqrt{2/\pi}} - 1\right| < \varepsilon\right\}, \quad (1)$$

что случайные величины $|\xi_1^{(n)}|, \dots, |\xi_n^{(n)}|$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение; так как, наконец,

$$M|\xi_1^{(n)}| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty xe^{-x^2/2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$D|\xi_1^{(n)}| = M(\xi_1^{(n)})^2 - (M|\xi_1^{(n)}|)^2 = 1 - \frac{2}{\pi} < \infty,$$

то стремление к 1 правой части (1) при $n \rightarrow \infty$ следует из закона больших чисел.

Сравнение результатов задач 4.11 и 4.12 (с учетом сферической симметричности распределения $\xi^{(n)}$) показывает, что при достаточно больших n гиперсфера $B_{\sqrt{n}, 0} = \{x \in R^n: x_1^2 + \dots + x_n^2 = n\}$ и поверхность $G_{n, \sqrt{2/n}, 0} = \{x \in R^n: |x_1| + \dots + |x_n| = n \sqrt{2/n}\}$ близки друг к другу: для любого $\varepsilon > 0$ отношение $(n-1)$ -мерного объема множества тех точек $x \in B_{\sqrt{n}, 0}$, для которых отрезок $[(1-\varepsilon)x, (1+\varepsilon)x]$ не пересекается с $G_{n, \sqrt{2/n}, 0}$, к $(n-1)$ -мерному объему $B_{\sqrt{n}, 0}$, стремится к 0.

4.22. Используя обозначение, введенное в задаче 4.21, мы получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a &= \\ &= \frac{(\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a)}{n} = \frac{(\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a)}{[\sqrt{n}]^2} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} + \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} \frac{\eta_{[\sqrt{n}]}}{[\sqrt{n}]^2}, \\ & \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из результатов задач 4.20 и 4.21 следует, что

$$\begin{aligned} P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a)}{[\sqrt{n}]^2} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} = 0 \right\} &= 1, \\ P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_{[\sqrt{n}]}}{[\sqrt{n}]^2} \frac{[\sqrt{n}]^2}{n} = 0 \right\} &= 1, \end{aligned}$$

значит,

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a \right) = 0 \right\} = 1,$$

что и требовалось доказать.

4.29. Согласно задаче 3.164 при $x > a$

$$\frac{e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\sigma}{x-a} - \frac{\sigma^3}{(x-a)^3} \right\} < P \{ \xi > x \} < \frac{e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{x-a}$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} P \{ \xi > x \} \sqrt{2\pi} e^{(x-a)^2/2\sigma^2} \frac{x-a}{\sigma} = 1$. Поэтому для любого $y \geq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} P \{ (\xi - x)x > y \mid \xi > x \} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P \{ \xi > x + yx^{-1} \}}{P \{ \xi > x \}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\left(x + \frac{y}{x} - a \right)^2 - (x-a)^2 \right) \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\frac{y(2 + (y-2ax)x^{-2})}{2\sigma^2} \right\} = e^{-y/\sigma^2} \end{aligned}$$

4.41. Первое утверждение является следствием неравенства Чебышева:

$$P(\xi \geq x | A) = \frac{P(\xi \geq x, A)}{P(A)} \leq \frac{1}{p} P(\xi \geq x) \leq \frac{\sigma^2}{p(x-a)^2}.$$

Для доказательства второго утверждения введем индикатор события A :

$\chi_A = 1$, если A происходит, $\chi_A = 0$ в противном случае.

Тогда
$$M\{\xi | A\} = \frac{M\xi\chi_A}{P\{A\}} = \frac{1}{p} M\xi\chi_A = a + \frac{1}{p} M(\xi - a)\chi_A. \quad (1)$$

При $F_{-1}(y) = \sup\{t: P\{\xi - a < t\} \leq y\}$ согласно задаче 3.131

$$\int_0^p F_{-1}(u) du \leq M(\xi - a)\chi_A \leq \int_{1-p}^1 F_{-1}(u) du, \quad (2)$$

а согласно задаче 3.60

$$\sigma^2 = D\xi = M(\xi - a)^2 = \int_0^1 F_{-1}^2(u) du. \quad (3)$$

Применяя к (2) неравенство Коши — Буняковского и пользуясь (3), получаем

$$\begin{aligned} |M(\xi - a)\chi_A| &\leq \\ &\leq \max \left\{ \int_0^p |F_{-1}(y)| dy, \int_{1-p}^1 |F_{-1}(y)| dy \right\} < \\ &\leq \max \left\{ \sqrt{\int_0^p F_{-1}^2(u) du \int_0^p du}, \sqrt{\int_{1-p}^1 F_{-1}^2(u) du \int_{1-p}^1 du} \right\} < \\ &\leq \sigma \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (1) следует, что

$$|M\{\xi | A\} - a| \leq \sigma \sqrt{p}. \quad (4)$$

Если $p \geq 1/2$, то с помощью равенства

$$a = pM\{\xi | A\} + (1-p)M\{\xi | \bar{A}\}$$

и оценки (4), примененной к $M\{\xi | \bar{A}\}$, находим:

$$\begin{aligned} |M\{\xi | A\} - a| &= \frac{1-p}{p} |M\{\xi | \bar{A}\} - a| < \\ &< \frac{1-p}{p} \frac{\sigma}{\sqrt{1-p}} = \sigma \frac{\sqrt{1-p}}{p}. \end{aligned}$$

4.42. Рассмотрим сначала случайную величину τ_1 . Из условий задачи следует, что образующие τ_1 слагаемые $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы, не зависят от числа слагаемых $v-1$, распределение каждого слагаемого совпадает с условным распределением ξ_1 при условии $\varepsilon_1=0$, и при $q \rightarrow 0$

$$P\{q(v-1) \leq x\} \rightarrow 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Из задачи 4.41 следует, что

$$M\{\xi_l | \varepsilon_l=0\} = a + \theta \frac{\sigma \sqrt{q}}{1-q} \quad (|\theta| \leq 1), \quad l=1, 2, \dots;$$

кроме того,

$$\begin{aligned} D\{\xi_l | \varepsilon_l=0\} &= M\{\xi_l^2 | \varepsilon_l=0\} - (M\{\xi_l | \varepsilon_l=0\})^2 \leq \\ &\leq \frac{M\xi_l^2}{1-q} \leq \frac{a^2 + \sigma^2}{1-q} < \infty, \quad l=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Применяя задачи 4.39 и 4.37, получаем, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} P\{q\tau_1 \leq x\} = 1 - e^{-x/a}, \quad x \geq 0.$$

Покажем теперь, что предельные распределения случайных величин $q\tau_1$ и $q\tau_2$ при $q \rightarrow 0$ совпадают. Согласно п. а) задачи 4.36 для этого достаточно показать, что для любого $\delta > 0$

$$P\{q\xi_l \leq \delta | \varepsilon_l=1\} \rightarrow 1, \quad q \rightarrow 0.$$

Но из первого неравенства задачи 4.41 следует, что

$$P\{q\xi_l > \delta | \varepsilon_l=1\} \leq \frac{q^2\sigma^2}{q(\delta - aq)^2} \rightarrow 0, \quad q \rightarrow 0.$$

4.51. Из условий задачи следует, что

$$\frac{g_n(\xi_n) - g_n(a_n)}{b_n g_n(a_n)} = \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \left(1 + \theta \omega_n \left(\left| \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \right| \right) \right), \quad (1)$$

далее, так как функции $\omega_n(A)$ монотонны, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\left\{ \omega_n \left(\left| \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \right| \right) \geq \varepsilon \right\} = \left\{ \left| \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \right| \geq v_n(\varepsilon) \right\},$$

где $v_n(\cdot)$ — функция, обратная к $\omega_n(\cdot)$. Из условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(A) = 0 \text{ для любого } A < \infty$$

вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(\varepsilon) = \infty$ для любого $\varepsilon > 0$; поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \omega_n \left(\left| \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \right| \right) \geq \varepsilon \right\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\xi_n - a_n}{b_n} \right| \geq v_n(\varepsilon) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Из (1), (2) и результата задачи 4.36 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{g_n(\xi_n) - g_n(a_n)}{b_n g_n'(a_n)} \leq x \right\} = F(x).$$

4.92. Если $M|\xi| < \infty$, то (см. введение к гл. 4) $f'(0) = iM\xi$ по свойствам характеристических функций. Покажем, что если распределение ξ имеет плотность $p(x)$, указанную в условии задачи, то $|f'(0)| < \infty$, а $M|\xi| = \infty$. Последнее соотношение очевидно:

$$M|\xi| = 2 \int_0^{\infty} x p(x) dx = 2 \int_0^2 x p(x) dx + 2 \int_2^{\infty} \frac{\alpha(x) dx}{x \ln x} = \infty,$$

где $0 \leq \alpha(x) < \infty$ и $\alpha(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Для доказательства соотношения $|f'(0)| < \infty$ покажем, что

$$|1 - f(t)| = o(t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0$$

(тогда $f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - f(t)}{t} = 0$). Действительно, из оценки $1 - \cos y \leq y^2/2$ следует, что если

$$T \rightarrow \infty, \quad T = o(|t|^{-1}),$$

то

$$\begin{aligned} |1 - f(t)| &= 2 \int_0^{\infty} (1 - \cos tx) p(x) dx = \\ &= O \left(t^2 T^2 \int_0^T p(x) dx + \int_T^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{x^2 \ln x} dx \right) = \\ &= O \left((tT)^2 + t \int_{tT}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2 \ln(u/t)} du \right) = O \left((tT)^2 + \frac{t}{\ln T} \int_T^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du \right). \end{aligned}$$

Если $T \sim (|t \ln |t||)^{-1/2}$ при $t \rightarrow 0$, то последняя оценка дает

$$1 - f(t) = O\left(\frac{|t|}{\ln |t|}\right) = o(|t|),$$

что и требовалось показать.

4.93. Пусть $u(t) = \operatorname{Re} f(t)$, $v(t) = \operatorname{Im} f(t)$. Из условия $|f'(0)| < \infty$ следует, что $|u''(0)| < \infty$ и что $u'(t)$ существует в некоторой окрестности точки $t=0$ и непрерывна при $t=0$. Далее,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \, dP\left\{\xi \leq x\right\},$$

т. е. функция $u(t)$ — четная, и поэтому $u'(0) = 0$. По формуле Тейлора

$$u(t) = 1 + \frac{t^2}{2} u''(0) (1 + o(1)), \quad t \rightarrow 0,$$

т. е.

$$u''(0) = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - u(t)}{t^2/2} = - \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2 x^2/2} x^2 \, dP\left\{\xi \leq x\right\}.$$

Для любого x , $0 < |x| < \infty$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos tx}{t^2 x^2/2} = 1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} u''(0) &= - \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos tx}{t^2 x^2/2} x^2 \, dP\left\{\xi \leq x\right\} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dP\left\{\xi \leq x\right\} = - M\xi^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $M\xi^2 = |u''(0)| \leq |f''(0)| < \infty$.

4.105. Пусть $\varphi^{(N)}(1) < \infty$. Разложим производящую функцию $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\xi = k\} z^k$ по формуле Тейлора в точке $z_0 = 1$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^N \frac{\varphi^{(k)}(1)}{k!} (z-1)^k + \frac{\varphi^{(N+1)}(1 + \theta(z-1))}{(N+1)!} (z-1)^{N+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

Полагая здесь $z=0$ и замечая, что $\varphi^{(k)}(z) \geq 0$ при любом $z \in [0, 1]$, получаем

$$\varphi(0) = P\{\xi=0\} = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(1)}{k!} + (-1)^{N+1} a_{N+1}, \quad a_{N+1} \geq 0.$$

Отсюда и из того, что $\varphi^{(k)}(1) = m_k$, следуют неравенства, указанные в условии задачи.

4.127. Математическое ожидание и дисперсия $\xi_l^{(n)}$ вычисляются непосредственно:

$$M\xi_l^{(n)} = 0, \quad D\xi_l^{(n)} = 1.$$

Вычислим производящую функцию η_n , пользуясь независимостью слагаемых:

$$\begin{aligned} Mz^{\eta_n} &= \left(Mz^{\xi_1^{(n)}/\sqrt{n}} \right)^n = \left(\frac{n-1}{n} + \frac{z+z^{-1}}{2n} \right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{z-1}{2n} + \frac{z^{-1}-1}{2n} \right)^n. \end{aligned}$$

Поэтому при любом фиксированном z

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Mz^{\eta_n} = \exp \left\{ \frac{z-1}{2} \right\} \exp \left\{ \frac{z^{-1}-1}{2} \right\}.$$

Так как $e^{(z-1)/2}$ — производящая функция случайной величины ζ , имеющей распределение Пуассона с параметром $1/2$, а $e^{(z^{-1}-1)/2} = Mz^{-\zeta}$, то распределение η_n при $n \rightarrow \infty$ сходится к распределению разности двух независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона с параметром $1/2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\eta_n = k\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!} e^{-1/2} \frac{1}{2^{|k|+m} (|k|+m)!} e^{-1/2},$$

$$k=0, \pm 1, \dots$$

4.136. Так как распределение ξ симметрично, т. е. $p(x) = p(-x)$, то $Me^{-it\xi} = Me^{it\xi} = M \cos t\xi$ и

$$Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx = 2 \int_0^{\infty} p(x) \cos tx dx.$$

Выберем ε так, чтобы выполнялось условие $0 < \varepsilon < 3 - \alpha$, тогда при $t \downarrow 0$, используя соотношение $1 - \cos u \sim u^2/2$ ($u \rightarrow 0$), находим

$$\begin{aligned} 1 - M e^{t^2} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos tx) p(x) dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos tx) p(x) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos tx) p(x) dx = \\ &= O(t^{2-\varepsilon}) + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos u) p\left(\frac{u}{t}\right) \frac{du}{t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, используя условие $p(x) \sim C|x|^{-\alpha}$, $|x| \rightarrow \infty$, получаем при $t \downarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos u) p\left(\frac{u}{t}\right) \frac{du}{t} &= (1 + o(1)) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos u) \frac{C u^{-\alpha}}{t^{1-\alpha}} du = \\ &= (1 + o(1)) C t^{\alpha-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos u}{u^{\alpha}} du. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1), (2) и того, что $O(t^{2-\varepsilon}) = o(t^{\alpha-1})$ при $t \rightarrow 0$ и $0 < \varepsilon < 3 - \alpha < 2$, следует, что

$$M e^{t^2} = 1 - 2C |t|^{\alpha-1} (1 + o(1)) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos u}{u^{\alpha}} du, \quad |t| \rightarrow 0.$$

Глава 5

5.28. Обозначим через e_1 и e_2 единичные векторы на осях координат и положим $\zeta_n = z_{n+1} - z_n$. Тогда $z_n = \zeta_0 + \zeta_1 + \dots + \zeta_{n-1}$, т. е. $M z_n = M \zeta_0 + \dots + M \zeta_{n-1}$, и последовательность $\zeta_0, \zeta_1, \dots$ образует цепь Маркова с множеством состояний $\{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$, матрицей переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (I - G),$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и начальным состоянием $\zeta_0 = e_1$. Чтобы вычислить $M \zeta_k$, заметим, что при начальном условии $\zeta_0 = e_1$

$$(P \{\zeta_k = e_1\})_{k=1}^4 = (1, 0, 0, 0) P^k.$$

Так как $IG = GI = I$, то

$$(I - G)^k = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m C_{k-1}^m I^{k-m} + (-1)^k G^k,$$

далее, $I^r = 4^{r-1} I$, $G^k = G$ при нечетном k и

$$G^k = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при четном } k,$$

учитывая равенство $\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m C_{k-1}^m 4^{k-m} = (4-1)^k - (-1)^k$, находим: $P^k = \frac{1}{4} \left(I - (-1)^k \frac{I - 4G^k}{3^k} \right)$, т. е. при $\zeta_0 = e_1$

$$P \{\zeta_k = e_1\} = \frac{1}{4} + \frac{2 - (-1)^k}{4 \cdot 3^k},$$

$$P \{\zeta_k = e_2\} = P \{\zeta_k = -e_2\} = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^k}{4 \cdot 3^k},$$

$$P \{\zeta_k = -e_1\} = \frac{1}{4} - \frac{2 - (-1)^k}{4 \cdot 3^k}.$$

Отсюда следует, что $M \zeta_k = \frac{1}{3^k} e_1$ и

$$M z_n = e_1 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{3^m} = e_1 \frac{1 - 3^{-n}}{1 - 3^{-1}} = \frac{3}{2} e_1 \left(1 - \frac{1}{3^n} \right).$$

5.29. а) Согласно лемме Бореля—Кантелли (см. задачу 4.14) достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \{S_n = 0\} < \infty. \quad (1)$$

Но $P \{S_n = 0\} = 0$ при любом нечетном n , а если $n = 2k$, то по формуле Стирлинга при $k \rightarrow \infty$

$$P \{S_n = 0\} = C_{2k}^k p^k q^k \sim \frac{\sqrt{4\pi k} (2k)^{2k}}{2^{2k} k^{2k}} p^k q^k = \frac{(4pq)^k}{\sqrt{\pi k}}. \quad (2)$$

При $p \neq q$ имеем $4pq < 1$, а отсюда следует (1).

б) Хотя, согласно (2), при $p = q = 1/2$

$$P\{S_{2k}=0\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3)$$

и, значит, $\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n=0\} = \infty$, мы не можем применить лемму

Бореля—Кантелли, так как события $\{S_n=0\}$, $n=1, 2, \dots$, являются зависимыми.

Введем случайные величины

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \min \{n \geq 1: S_n=0\}, \\ \tau_{k+1} &= \min \{n > \tau_k: S_n=0\}, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

(в случае, если множество, стоящее под знаком $\min$, пусто, следует положить $\min$ равным ∞). Из независимости и одинаковой распределенности $\xi_1, \xi_2, \dots$ следует, что случайные величины $\tau_{k+1} - \tau_k$, $k=1, 2, \dots$, независимы, не зависят от τ_1 и распределены так же, как τ_1 . Поэтому

$$\begin{aligned} P\{v \geq k\} &= P\{\tau_k < \infty\} = \\ &= P\{\tau_1 < \infty\} \prod_{i=1}^{k-1} P\{\tau_{i+1} - \tau_i < \infty\} = (P\{\tau_1 < \infty\})^k, \end{aligned} \quad (4)$$

и, согласно задаче 3.54,

$$Mv = \sum_{k=1}^{\infty} (P\{\tau_1 < \infty\})^k = \frac{1}{1 - P\{\tau_1 < \infty\}}. \quad (5)$$

С другой стороны, если $\chi_n=1$ при $S_n=0$ и $\chi_n=0$ в остальных случаях, то $v = \chi_1 + \chi_2 + \dots$, и в силу (3)

$$Mv = \sum_{n=1}^{\infty} M\chi_n = \sum_{k=1}^{\infty} P\{S_{2k}=0\} = \infty. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что $P\{\tau_1 < \infty\} = 1$, а тогда в силу (4) $P\{v \geq k\} = 1$ при любом $k < \infty$, т. е. $P\{v = \infty\} = 1$.

5.30. Заметим, что компоненты $S_{n,1}, \dots, S_{n,s}$ вектора S_n являются независимыми реализациями случайных величин, рассматривавшихся в п. б) задачи 5.29, и поэтому при $n=2k$

$$P\{S_n = (0, \dots, 0)\} = (P\{S_{n,1}=0\})^s \sim \left(\frac{1}{\pi k}\right)^{s/2}, \quad k \rightarrow \infty,$$

и $P\{S_n = (0, \dots, 0)\} = 0$, если n нечетно. Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = (0, \dots, 0)\} < \infty$$

при $s \geq 3$ и в силу леммы Бореля—Кантелли $P\{v < \infty\} = 1$ при $s \geq 3$. В случае $s = 2$, повторяя рассуждения из п. б) задачи 5.29, находим, что $Mv = \infty$, и если $\tau_1 = \min\{n: S_n = (0, \dots, 0)\}$, то $Mv = \frac{1}{1 - P\{\tau_1 < \infty\}}$. Значит, $P\{\tau_1 < \infty\} = 1$ и $P\{v \geq k\} = (P\{\tau_1 < \infty\})^k = 1$ при любом $k < \infty$, т. е. $P\{v = \infty\} = 1$.

Глава 6

6.17. Из условия несмещенности следует, что $c_3 = 1 - c_1 - c_2$. Дифференцируя $Dz = c_1^2 + c_2^2 + (1 - c_1 - c_2)^2 + 2c_1c_2\rho$ по c_1 и c_2 , получим для определения c_1, c_2 систему уравнений

$$2c_1 + (1 + \rho)c_2 = 1, \quad (1 + \rho)c_1 + 2c_2 = 1. \quad (1)$$

а) Вычитая из первого уравнения второе, получим $(1 - \rho)c_1 - (1 - \rho)c_2 = 0$, или $c_1 = c_2$. Следовательно, $c_1 = c_2 = \frac{1}{3 + \rho}$, $c_3 = \frac{1 + \rho}{3 + \rho}$ и $Dz = \frac{1 + \rho}{3 + \rho}$.

б) Если $\rho = -1$, то из первого уравнения (1) получим $c_1 = 1/2$, а из второго $c_2 = 1/2$. Следовательно, $c_3 = 0$, т. е. в наилучшую оценку включаются в этом случае только коррелированные оценки z_1 и z_2 . При $\rho = -1$ величины z_1 и z_2 имеют вид $z_1 = a + \xi$, $z_2 = a - \xi$, где $M\xi = 0$, $D\xi = 1$. Таким образом, $z = (z_1 + z_2)/2 = a$.

в) При $\rho = 1$ уравнения в (1) одинаковы: $c_1 + c_2 = 1/2$. В этом случае $z_1 = a + \xi$, $z_2 = a + \xi$, где $M\xi = 0$, $D\xi = 1$. Таким образом, очевидно, что при любых c_1, c_2 ($c_1 + c_2 = 1/2$) и $c_3 = 1/2$ получаем одно и то же выражение $z = (a + \xi + z_2)/2$, и $Dz = 1/2$.

Глава I

1.1. 2/3. 1.2. $P(A) = 1/1785 = 0,0005602\dots$, $P(B) = 1/3927 = 0,0002546\dots$ 1.3. 1/6. 1.4. 1/2, 3/8, 7/8. 1.5. $P(A) = 1/3$, $P(B) = C_{n-2}^m 2^{n-m-2} 3^{-n}$ ($0 \leq m \leq n-2$), $P(C) = C_n^m 2^{n-m} 3^{-n}$

($0 \leq m \leq n$), $P(D) = \frac{n!}{m_0!m_1!m_2!} \frac{1}{3^n}$ ($m_0 + m_1 + m_2 = n$). 1.6. $7/18 = 0,38888\dots$ 1.7. $P(A) = 0,21$, $P(B) = 0,01$, $P(C) = 0,27$. 1.8. а) 0,504; б) 0,432; в) 0,027; г) 0,036; д) 0,001. 1.9. $p_N = \frac{1}{N} \left[\frac{N}{k} \right] \rightarrow \frac{1}{k}$ ($N \rightarrow \infty$).

1.10. а) $p_N = 1 - \frac{1}{N} \left(\left[\frac{N}{a_1} \right] + \left[\frac{N}{a_2} \right] - \left[\frac{N}{a_1 a_2} \right] \right) \rightarrow \left(1 - \frac{1}{a_1} \right) \left(1 - \frac{1}{a_2} \right)$ ($N \rightarrow \infty$); б) $p_N = 1 - \frac{1}{N} \sum_{r=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} (-1)^{r-1} \left[\frac{N}{a_{i_1} \dots a_{i_r}} \right] \rightarrow \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{a_i} \right)$ ($N \rightarrow \infty$).

1.11. Если $N = 10k + l$, то $p_N = 2k/N$ при $l = 0$, $p_N = (2k+1)/N$ при $1 \leq l < 9$, $p_N = 2(k+1)/N$ при $l = 9$; $p_N \rightarrow 1/5$ ($N \rightarrow \infty$).

1.12. $p_N = \frac{1}{N} \left[\frac{N+r-q}{r} \right] \rightarrow \frac{1}{r}$ ($N \rightarrow \infty$). 1.13. $9 \cdot 10^{-(n-k+1)}$.

1.14. $q_N = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sum_{p_1 < \dots < p_k} \frac{1}{N^2} \left[\frac{N}{p_1 \dots p_k} \right]^2$, где суммирования производятся по всем простым числам $p_1, p_2, \dots$;

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_N = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{6}{\pi^2} = 0,607927\dots$$

где произведение берется по всем простым p . 1.15. $\pi/4 = 0,7853981\dots$

1.16. $p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 10^n}$, $p_{n-k+1} = \frac{99}{2 \cdot 10^{2k}} + \frac{9}{2 \cdot 10^{k+n}}$ ($k = 1,$

$2, \dots, n$), $q_0 = \frac{1}{2}$, $q_k = \frac{99}{2 \cdot 10^{2k}}$ ($k = 1, 2, \dots$). 1.17. $q_k = 9 \cdot 10^{-k-1} + (9k-1) \cdot 10^{-k-1} \ln 10$, $k = 0, 1, \dots$. 1.18. $P_2 < P_3$

при $N \geq 3$. 1.21. $Q_N(p) = 1 - \frac{2}{N} \left[\frac{N}{p} \right] + \frac{2}{N^2} \left[\frac{N}{p^2} \right]^2$, $Q(p) = 1 -$

$-\frac{2}{p} + \frac{2}{p^2}$, $Q = 1$. 1.23. $\left(\frac{3}{4} \right)^N$. 1.24. $\left(\frac{r+1}{2r} \right)^N$.

$$1.25. \frac{n(n+1)}{(4n(n+1))^2 - 1}. \quad 1.26. \text{ а) } (5/6)^{10} = 0,1615055...; \\ \text{б) } C_{10}^2 5^2 6^{-10} = 0,1550453...; \quad \text{в) } 1 - (5/6)^{10} = 0,8384944...$$

$$1.27. 0,055252. \quad 1.28. \frac{55250n+2}{10^n - n + 1}. \quad 1.29. \frac{1}{10005} = 0,00009995..., \\ \frac{62016}{476906} = 0,1300384..., \quad \frac{99}{667} = 0,1484257...$$

$$1.30. 1) \frac{C_{M_1}^m C_{M_2}^m \dots C_{M_N}^m}{C_M^n}, \text{ если } M = M_1 + \dots + M_N, n = m_1 + \dots + m_N, m_i \geq 0;$$

$$2) 1 + \sum_{i=1}^N (-1)^i \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq N} \frac{(M - M_{k_1} - \dots - M_{k_i})^{[n]}}{M^{[n]}}.$$

$$1.31. 1/2; 1/3. \quad 1.32. C_M^n C_{N-M}^{n-m} / C_N^n, C_n^m \alpha^m (1-\alpha)^{n-m}, m=0, \\ 1, 2, \dots, n. \quad 1.33. \frac{1}{k+1}. \quad 1.34. \frac{12546}{13195} = 0,9508147... \quad 1.35. 0,$$

$$\text{если числа мужчин и женщин не равны друг другу; } \frac{2^{n+1} - 2}{C_n^n},$$

$$\text{если число мужчин равно } n. \quad 1.36. \frac{2911}{1271256} = 0,00228986...$$

$$1.37. 1) 1 - \frac{N!}{NN}; \quad 2) \frac{N! C_{N+1}^1}{NN+1}; \quad 3) \left(\frac{1}{2} C_{N+1}^1 C_{N-1}^1 + C_{N+1}^2 \right) \frac{N!}{NN+1};$$

$$4) 1, \text{ если } n \geq N+1; 0, \text{ если } n=0 \text{ или } n=1; 1 - \frac{N^{[n]}}{N^n}, \text{ если}$$

$$2 \leq n \leq N. \quad 1.38. \sum_{i=0}^N C_N^i (-1)^i \left(1 - \frac{i}{N} \right)^n. \quad 1.39. 1) 1 - \frac{C_{n-1}^{N-1}}{C_{N+n-1}^{N-1}};$$

$$2) \frac{N C_{N-1}^{N-2}}{C_{N+n-1}^{N-1}}. \quad 1.40. \text{ а) } \frac{(N-n+1)^{[n]}}{N^{[n]}}; \quad \text{б) } \frac{n^{[n/2]} (N-n+2)^{[n/2]}}{N^{[n]}},$$

$$\text{если } n \text{ четно, и } 0, \text{ если } n \text{ нечетно; в) } \frac{2^n}{N^{[n]}} \left(\frac{N}{2} \right)^{[n]}, \text{ если } N$$

$$\text{четно, } \frac{1}{N^{[n]}} \left\{ 2^n \left(\frac{N-1}{2} \right)^{[n]} + n 2^{n-1} \left(\frac{N-1}{2} \right)^{[n-1]} \right\}, \text{ если } N$$

нечетно.

$$1.41. \text{ а) } \frac{1}{(2N)^{[n]}} \sum_{k=0}^n (N-k+1)^{[k]} N^{[n-k]},$$

$$\text{б) } \frac{1}{(2N)^{[n]}} \sum_{k=0}^{[n/2]} (2k)^{[k]} (N-2k+2)^{[k]} N^{[n-2k]},$$

$$в) \frac{1}{(2N)^{[n]}} \sum_{k=0}^n 2^k \left(\frac{N}{2}\right)^{[k]} N^{[n-k]}, \text{ если } N \text{ четное};$$

$$\frac{1}{(2N)^{[n]}} \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{N-1}{2}\right)^{[k]} 2^k + k \left(\frac{N-1}{2}\right)^{[k-1]} 2^{k-1} \right),$$

если N нечетное.

1.42. а) n^{-n} ; б) $(n-1)^{n-k} C_n^k n^{-n}$; в) n^{-1} ; г) n^{-k} . 1.43. а) $1/n!$; б) 0, если среди $i_1, \dots, i_k$ есть одинаковые; $1/n^{[k]}$, если все $i_1, \dots, i_k$ различны; в) $1/n$; г) $2/n^{[3]}$; д) $1/n$. 1.44. $P_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \rightarrow 1 - \frac{1}{e} \quad (n \rightarrow \infty)$. 1.45. а) $\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \alpha_k! (k!)^{\alpha_k}$;

б) $\frac{\alpha_1}{n}$; в) $\frac{n - \alpha_1}{n(n-1)}$.

1.46. $P\{\eta_1 \leq x\} = 2x - 1 \quad (1/2 \leq x \leq 1)$,
 $P\{\eta_2 \leq x\} = 2x \quad (0 \leq x \leq 1/2)$.

1.47. а) $\min(x, 1) \quad (x \geq 0)$; б) $4x(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1/2)$, $1 \quad (x \geq 1/2)$; в) $\pi x^2 \quad (0 \leq x \leq 1/2)$, $1 \quad (x \geq 1/\sqrt{2})$, $x^2 \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{2x} \right) + \sqrt{4x^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$; г) $\frac{1}{4} \pi x^2 \quad (0 \leq x \leq 1)$, $1 \quad (x \geq \sqrt{2})$, $x^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{x} \right) + \sqrt{x^2 - 1} \quad (1 \leq x \leq \sqrt{2})$.

1.48. а) $x(3-2x) \quad (0 \leq x \leq 1/2)$, $1 \quad (x \geq 1/2)$; б) $0 \quad (x \leq 1)$, $\min(x-1, 1) \quad (x \geq 1)$; в) $1 - (1-x\sqrt{5})^2 \quad (0 \leq x \leq 1/\sqrt{5})$, $1 \quad (x \geq 1/\sqrt{5})$. 1.49. $\operatorname{tg}(\pi/8) = \sqrt{2} - 1 = 0,4142135\dots$. 1.50. $P_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{\pi^2}{2n^2} (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty)$. 1.51. $5/6, 1/6$.

1.52. $\left(1 - 2 \frac{r}{a} \operatorname{tg} \frac{\pi}{k}\right)^2$, если $r < \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k}$; 0 при $r \geq \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{k}$, $k=3, 4, 6$.

1.53. 1, если $\theta \geq \alpha$, $1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha}$, если $|\theta| < \alpha$, 0, если $\theta < -\alpha$; $p(\alpha, 0) = p\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 1/2$.

1.54. $Q_x = 1 - \left(\frac{x}{2R}\right)^2$, $Q_R = \frac{3}{4}$.

$Q_{RV\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$. 1.55. $Q_x = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2R}\right)^2}$, $Q_R = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025\dots$,

$Q_{RV\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$. 1.56. $Q_x = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2R}$, $Q_R = \frac{2}{3}$, $Q_{RV\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

1.57. $P(A_0) = 1 - \frac{r}{a\pi} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$, $P(A_1) = \frac{2r}{a\pi}$, $P(A_2) = \frac{r}{a\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$,

где A_k — событие, состоящее в том, что было k пересечений.

1.58. $1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{T}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$. 1.59. $1 - \left(1 - \frac{t}{T_1}\right) \left(1 - \frac{t}{T_2}\right)$.

1.60. $\frac{h}{\sqrt{4r^2 + h^2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707106\dots$; $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660254\dots$

1.61. а) $\frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{a^2+r^2}}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{b}{2\sqrt{b^2+r^2}}$; в) $\frac{1}{2} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2+r^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}} \right)$. 1.62. а) $\frac{1}{2} - \frac{h}{2\sqrt{(4r)^2+h^2}}$; б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{17}} = 0,378732\dots$; в) $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,4330127\dots$ 1.63. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{73}} = 0,3244382\dots$ 1.64. $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. 1.65. $P_0 = 1/n^2$, $P_m = 8m/n^2$ ($1 \leq m < n/2$), $P_{n/2} = (2n-1)/n^2$ (n четное), $P_m = 0$ ($m > n/2$).

Глава 2

2.1. $1/3$. 2.2. $1/7$. 2.3. $1/19$ ($i=0$), $2/19$ ($i=1, 2, \dots, 9$). 2.4. $\frac{M - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_s}{N - s}$. 2.5. M/N . 2.6. $\frac{N!}{l_1! l_2! (N-l_1-l_2)!} \cdot \frac{1}{3^N}$. 2.7. а) $1/5$; б) $1/5$; в) $1/30$. 2.8. а) $1/2$; б) $3/5$; в) $4/7$. 2.9. $P\{A_k\} = \frac{M}{N}$, $P\{B_k, i\} = \frac{M^{[i]}}{N^{[i]}}$, $P\{C_k, i\} = \frac{M(N-M)}{N^{[i]}}$. 2.10. $P\{A_1\} = \frac{83}{210} = 0,3952\dots$, $P\{A_2\} = \frac{43}{210} = 0,2047\dots$, $P\{A_3\} = \frac{2}{5}$.

2.11. 1) $C_{n_1+n_2}^{n_1} N_1^{[n_1]} N_2^{[n_2]} N_3 / N^{[n_1+n_2+1]}$

2) $\sum_{m \geq 0} N_2^{[m]} N_3 / N^{[m+1]}$

3) $(N_1 + N_2)^{[k-1]} N_3 / N^{[k]}$, $N = N_1 + N_2 + N_3$.

2.12. а) A_i, B_k независимы при любых i, k ; б) A_2, C_3 независимы; в) A_1, C_4 зависимы. 2.13. Независимы пары A_i, A_j с $i, j \in \{1, 2, 5, 6\}$, и события наборов $\{A_1, A_5, A_6\}$ и $\{A_2, A_5, A_6\}$. 2.14. Только при $r \leq 0$, $r \geq 2/3$ и $r = 1/3$. 2.15. а), б) Являются. 2.16. $A_1 A_2$ и A_2 зависимы. 2.18. Является при $n=2$; не обязательно является при $n \geq 3$. 2.19. $k \leq \log_2 n$. 2.20. $k \leq n$ ($n > 3$), $k=2$ ($n=3$). 2.21. а) $\alpha_1 \alpha_2$; б) $1 - (1 - \beta_1)(1 - \beta_2)$. 2.22. а) $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$; б) $\geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2$. 2.23. а) $(C_0^3 C_{13}^3 / C_{16}^3)^2 = 0,0003115\dots$

б) $\left(\sum_{k=2}^6 C_0^k C_{12}^{3-k} / C_{15}^3 \right)^2 = 0,0003473\dots$

2.24. $q_3 \{q_3 + p_3 q_4 (q_1 + p_1 q_2)\}$, где $q_i = 1 - p_i$.

2.25. $1 - \prod_{l=1}^n (1 - p_l) \left(1 + \sum_{k=1}^n p_k / (1 - p_k) \right)$. 2.26. $38/105 = 0,3619047\dots$ 2.27. а) $p(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) + (1 - p) \alpha_1 \alpha_2$; б) $p(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) / [p(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) + (1 - p) \alpha_1 \alpha_2]$.

2.28. а), б), в) M/N . 2.29. x/a .

2.30. а) 0,573683; б) 0,7776829...; 0,8732712... 2.31. $P_1 = 0,0282$, $P_2 = 0,0428$. 2.32. $0,027 < P_1 < 0,033$, $0,041 < P_2 < 0,047$. 2.33. 5/11. 2.34. $14/17 = 0,8235294...$ 2.35. $2\alpha p_1/[2\alpha p_1 + (1-\alpha)(p_2 + p_3)]$. 2.36. а) $\gamma(1-\beta)/[\gamma(1-\beta) + \alpha(1-\gamma)]$; б) 0,9173... 2.37. $q_0 = p(1-\alpha)/[p(1-\alpha) + (1-p)(1-\beta)]$. $q_1 = \alpha p/[\alpha p + \beta(1-p)]$, $q_0 > q_1 \Leftrightarrow \beta > \alpha$. 2.38. а) 2/11; б) 6/11; в) 3/11. 2.39. $1 - (7/8)^{20} = 0,980791...$ 2.40. а) 0,348678...; б) 0,057395...; в) 0,987204... 2.41. $C_1^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 = 0,00021137...$

2.42. $C_n^m p^m + n q^{n-m}$. 2.43. $(1-p^2)^N$. 2.44. $(r q r^{-1} p + q r)^N$. 2.45. $\left[q_1 q_2 \dots q_r \left(1 + \sum_{i=1}^r p_i / q_i \right) \right]^N$. 2.46. а) $C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$;

б) $C_N^k q^k (1-q)^{N-k} (1-q)^k$. 2.47. а) $p q^2$, б) $(1-q^2) p q^2$, в) $(1-q^2 - p q^2) p q^2$. 2.48. $q_k = C_{k,k}^k 2^{-k-k}$; $q_0 = 1/32$, $q_1 = 3/32$, $q_2 = 21/128$, $q_3 = 7/32$, $q_4 = 63/256$, $q_5 = 63/256$. 2.49. $C_{m+r}^m 2^{-r-m}$. 2.50. 0,593126... 2.51. 536. 2.52. 0,26502. 2.53. 0,26424. 2.54. а) 0,68269, 0,31731; б) 0,72874, 0,36820. 2.55. а) 0,68269, 0,31731; б) 0,66906, 0,33094. 2.56. 0,95. 2.57. 0,846. 2.58. а) 558; б) 541. 2.59. 547.

2.60. $C_{l-1}^{k-1} p^k q^{l-k}$. 2.61. $\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \frac{11}{36}$. 2.62. а) 7/8; б) 2/3; в) 1/3.

2.63. q ; 0,5. 2.64. q^2 ; 0,25. 2.65. $q(1-p^2)/(q+p^2)$; 0,7. 2.66. $C_N^{(n+m)/2} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}$, если $(n+m)/2$ — целое, 0 в противном

случае. 2.67. $C_3^1 8! (21)^{-2} (0,1)^2 (0,3)^2 = 0,0054432...$ 2.68. $p_1^n + n p_1^{n-1} p_2$.

2.69. 0,76896. 2.70. $C_{n_1}^{m_1} p_1^{m_1} (1-p_1)^{n-m_1}$.

$$2.71. \frac{(n-m_1)!}{m_1! \dots m_N!} \prod_{j=2}^N \left(\frac{p_j}{1-p_1} \right)^{m_j}.$$

$$2.72. \text{ а) } n! \left(\prod_{j=1}^N k_{1j}! \cdot \prod_{j=1}^N k_{2j}! \right)^{-1} \prod_{j=1}^N p_1^{k_{1j}} \cdot \prod_{j=1}^N p_2^{k_{2j}}$$

$$\text{ б) } \frac{n!}{(n-n_2)! n_2!} p_1^{n-n_2} p_2^{n_2}, \text{ где } p_l = p_{1l} + \dots + p_{lN_l}, \quad l=1, 2,$$

$$\text{ в) } \frac{(n-n_2)!}{k_{11}! \dots k_{1N_1}!} \prod_{j=1}^{N_1} \left(\frac{p_{1j}}{p_1} \right)^{k_{1j}}, \text{ если } k_{11} + k_{12} + \dots + k_{1N_1} =$$

$n - n_2$, 0 в противном случае. 2.73. $C_N^k \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \sum_{l=0}^{N-k} C_{N-k}^l \times$

$\times (-1)^l \left(1 - \frac{l}{N-k}\right)^n$. 2.74. 3/4. 2.75. $P\{\theta_{2v+1}=i\}=1/3$, $i=1, 2, 3$.

2.76. $p_1/(p_1+p_2)$. 2.77. а) 0,489142...; б) 0,295635...; в) 0,215222...

- 3.1. а) $C=1/2$; б) $p_n(x)=1/2\sqrt{x}$, $0 < x \leq 1$; в) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}} = 0,13098\dots$ 3.2. а) $2\alpha x e^{-\alpha x^2}$ ($x > 0$); б) $\alpha e^{-\alpha\sqrt{x}}/2\sqrt{x}$ ($x > 0$); в) $\alpha^2 e^{-\alpha(e^{\alpha x}-x)}$ ($-\infty < x < \infty$); г) $\alpha e^{-\alpha x}/(1-e^{-\alpha})$ ($0 \leq x \leq 1$); д) 1 ($x \in [0, 1]$). 3.3. а) $1/2$ ($x \in [1, 3]$); б) e^{-x} ($x > 0$); в) $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ($-\infty < x < \infty$); г) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ ($-\infty < x < \infty$). 3.4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, $\frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}$ ($-\infty < x < \infty$). 3.5. $p_x(x)=1/2$ при $1 \leq |x| \leq 2$ и $p_x(x)=0$ в остальных точках; $g(x)=x$ при $|x| \leq 1$, $g(x)=x/|x|$ при $|x| \geq 1$. 3.8. а) $p_{-1,\cdot} = p_{1,\cdot} = 1/2$, $p_{\cdot,-1} = 1/3$, $p_{\cdot,0} = 1/4$, $p_{\cdot,1} = 5/12$; б) $q_{-2,1} = 1/8$, $q_{-1,0} = 1/12$, $q_{0,-1} = 1/2$, $q_{1,0} = 1/6$, $q_{2,1} = 1/8$, остальные $q_{i,j} = 0$; в) $q_{-2,\cdot} = 1/8$, $q_{-1,\cdot} = 1/12$, $q_{0,\cdot} = 1/2$, $q_{1,\cdot} = 1/6$, $q_{2,\cdot} = 1/8$; г) $q_{\cdot,-1} = 1/2$, $q_{\cdot,0} = q_{\cdot,1} = 1/4$. 3.9. $P\{\xi_1=k\} = 0,1$, $0 \leq k \leq 9$, $P\{\xi_2=0\} = 0,55$, $P\{\xi_2=1\} = 0,45$. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы. 3.10. Зависимы. 3.11. а) $\frac{1}{a} \left(1 - \left| \frac{x}{a} - 1 \right| \right)$ ($0 \leq x \leq 2a$), 0 ($x \notin [0, 2a]$); б) $\frac{1}{a} \left(1 - \left| \frac{x}{a} \right| \right)$ ($|x| \leq a$), 0 ($|x| > a$); в) $\frac{1}{a^2} \ln \frac{a^2}{x}$ ($0 < x \leq a^2$), 0 ($x \notin (0, a^2]$); г) $1/2$ ($0 \leq x \leq 1$), $1/(2x^2)$ ($x \geq 1$), 0 ($x < 0$). 3.12. а) $x e^{-x}$ ($x \geq 0$); б) $\frac{1}{2} e^{-|x|}$ ($-\infty < x < \infty$); в) e^{-x} ($x \geq 0$); г) $\frac{1}{(1+x)^2}$ ($x \geq 0$). 3.13. $\frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{3}{2} - \left| x - \frac{3}{2} \right| \right\}$ ($0 \leq x \leq 3$); 0 ($x \notin [0, 3]$). 3.14. $1 - e^{-x}$ ($0 \leq x \leq 1$); $e^{-(x-1)} - e^{-x}$ ($1 \leq x$). 3.15. а) $1 - |1-x|$ при $0 \leq x \leq 1$, 0 в остальных точках; б) $\frac{x^2}{2}$ при $0 \leq x \leq 1$, $\frac{3}{4} - \left(x - \frac{3}{2} \right)^2$ при $1 \leq x \leq 2$, $\frac{(3-x)^2}{2}$ при $2 \leq x \leq 3$, 0 в остальных точках; в) $\frac{23}{24} = 0,96033\dots$ 3.17. а) $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}$ ($x > 0$); б) $P\{\xi_1+\xi_2=m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m=0, 1, \dots$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. 3.18. а) $\alpha \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}$ ($x > 0$); б) $\alpha n e^{-\alpha n x}$ ($x > 0$). 3.19. $\frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{x^2}, \frac{1}{(1-x)^2} \right\}$ ($0 \leq x \leq 1$), 0 ($x \notin [0, 1]$). 3.20. $(n-1)(1-x)^{n-2}$ ($0 \leq x \leq 1$). 3.21. $1 - \frac{1}{\pi} \left(4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{63}}{4} \right) = 0,7114\dots$ 3.22. $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = 1/2$, $x \in [0, 2]$. 3.23. $p_{\xi_1, \xi_2}(x, y) =$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{1-x^2-y^2}} \quad (x^2+y^2 \leq 1); \quad p_{\xi_1}(x) = 1/2 \quad (|x| \leq 1). \quad 3.24. \quad \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2(2n+1)^2}. \quad 3.25. \quad P(\tau_1 = l_1, \tau_2 = l_2) = q^{l_1+l_2-2} p^2, \quad l_1, l_2 \geq 1;$$

$q = 1 - p$; $P(\tau_1 = l) = P(\tau_2 = l) = q^{l-1} p, \quad l \geq 1$. Случайные величины независимы. 3.26. а) зависимы; б), в), г) независимы. 3.27. $P(\theta = l,$

$$v = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \quad (l = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots); \quad P(\theta = l) = 1/4,$$

$$P(v = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}. \quad \text{Случайные величины } v \text{ и } \theta \text{ независимы.}$$

$$3.28. \quad б) \quad P(\tau_2 = l_2, \dots, \tau_N = l_N) = \prod_{k=2}^N P(\tau_k = l_k); \quad P(\tau_k = l_k) =$$

$$= \left(\frac{k-1}{N}\right)^{l_k-1} \left(1 - \frac{k-1}{N}\right). \quad \text{Величины независимы. в) } P(\theta_1 = i_1,$$

$$\theta_2 = i_2, \dots, \theta_N = i_N) = 1/N!, \quad \text{если } i_1, \dots, i_N \text{ различны.}$$

$$3.29. \quad P(\theta_1 = i_1, \theta_2 = i_2, \dots, \theta_N = i_N) =$$

$$= p_{i_1} \cdot \frac{p_{i_2}}{1-p_{i_1}} \cdot \frac{p_{i_3}}{1-p_{i_1}-p_{i_2}} \cdot \dots \cdot \frac{p_{i_N}}{1-p_{i_1}-\dots-p_{i_{N-1}}}.$$

$$3.30. \quad а) \quad M(N-M)^{(k)}/N^{(k+1)};$$

$$б) \quad M^{(2)}(N-M)^{(k+1)}/N^{(k+1+1)};$$

$$в) \quad M!(N-M)!/N!, \quad \text{если } k_1 + k_2 + \dots + k_{M+1} = N-M.$$

$$3.31. \quad 1 + F(x, y) - \lim_{z \rightarrow +\infty} (F(x, z) + F(z, y)). \quad 3.33. \quad \sum_k p_k^2.$$

$$3.34. \quad 1 - \sqrt{2}/2 = 0,29289\dots \quad 3.39. \quad а) \quad 1/2; \quad б) \quad 2\lambda e^{-2\lambda t} \quad (t > 0); \quad в) \quad 1/2.$$

$$3.40. \quad P(A_i) = n_i/n, \quad i = 1, 2, 3. \quad 3.42. \quad а) \quad F_{k(n)}(x) = 1 - (1 - F(x))^n;$$

$$б) \quad F_{k(n)}(x) = F^n(x); \quad в) \quad F_{k(n)k(n)}(x_1, x_2) = F^n(x_2) - (F(x_2) - F(x_1))^n, \\ x_1 \leq x_2.$$

$$3.43. \quad а) \quad \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} F^{m-1}(x) [1 - F(x)]^{n-m} p(x);$$

$$б) \quad \frac{n!}{(k-1)!(m-k-1)!(n-m)!} F^{k-1}(x_1) \times \\ \times [F(x_2) - F(x_1)]^{m-k-1} (1 - F(x_2))^{n-m} p(x_1) p(x_2) \quad (x_1 < x_2).$$

$$3.44. \quad 1/(k+1). \quad 3.45. \quad n! p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n), \quad \text{если } x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

$$\text{и } 0 \text{ в остальных случаях. } 3.51. \quad 4t^2 \leq P\left\{\left|\xi - \frac{1}{2}\right| < t\right\} \leq 4t(1-t)$$

$$\text{при } 0 \leq t \leq 1/2. \quad 3.52. \quad F_{-1}(1 - 1/\sqrt{2}) \leq m_{\xi} \leq F_{-1}(1/\sqrt{2}), \quad \text{где} \\ F_{-1}(y) = \sup\{x: F(x) < y\}. \quad 3.61. \quad M\xi_1 = M\xi_2 = 0, \quad D\xi_1 = D\xi_2 = 1/2, \\ \text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0. \quad 3.62. \quad M\eta_1 = M\eta_2 = 0; \quad \text{cov}(\eta_1, \eta_2) = 0; \quad \text{случай-}$$

$$\text{ные величины зависимы. } 3.63. \quad M\xi = \frac{2}{3} R, \quad D\xi = \frac{R^2}{18}. \quad 3.64. \quad MS_n = 0,$$

$$DS_n = n/2. \quad 3.65. \quad MR_n = 0, \quad DR_n = 1, \quad n \geq 2. \quad 3.66. \quad а) \quad M\xi = D\xi = \lambda, \\ M\xi^{(k)} = \lambda^k; \quad б) \quad M\xi = np, \quad D\xi = npq, \quad M\xi^{(k)} = n^{(k)} p^k. \quad 3.67. \quad x^n/n!$$

3.68. $e = 2,71828 \dots$ 3.69. $c_k = 1/(\lambda \sigma_k^2)$, где $\lambda = 1/\sigma_1^2 + \dots + 1/\sigma_n^2$; $D\eta_n = 1/\lambda$. 3.70. а) 0,99730...; б) 0,98168...; в) 1; г) $8/9 = 0,88888 \dots$; д) 0,91393... 3.71. $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \leq D(\xi + \eta) \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2$. 3.72. $M\zeta_n = na$, $M\zeta_n^* = npa$, $D\zeta_n = n\sigma^2$, $D\zeta_n^* = np(\sigma^2 + a^2q)$, $\text{cov}(\zeta_n, \zeta_n^*) = np\sigma^2$.

3.73. $M\zeta = \frac{1}{k}$, $D\zeta = \frac{1}{k^2} \left[\prod_{k=1}^{n-1} (1 + b_k^2) - 1 \right]$. 3.74. $M\Delta = 0$, $D\Delta = M\Delta^2 = n! \sigma^{2n}$. 3.76. $M \sin \xi > 0$, $M \cos \xi > 0$. 3.77. $\max\{p, 1-p\}$. 3.78. а) $2 \frac{9\pi - 32}{9\pi^2 - 64} = -0,300137 \dots$; б) $-1/2$. 3.79. б) $1/(pq)$.

3.80. $1/(pq)$. 3.81. $M\theta_r = 1/r$, $r \geq 1$; $D\theta_1 = 1$. 3.82. $\sum_{k=1}^N (M - M_k)^{n!} / M^{n!}$, где $M = M_1 + \dots + M_N$. 3.83. $M\xi = n \frac{M}{N}$, $D\xi = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \times \times \frac{N-n}{N-1}$. 3.84. $\frac{N+1}{M+1}$ ($i=1, \dots, M$), $\frac{N-M}{M+1}$ ($i=M+1$).

$$3.85. M\mu_0(n, N) = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = Ne^{-n} (1 + o(1)),$$

$$D\mu_0(n, N) = N^{(2)} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \left(1 - N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right) = = Ne^{-n} (1 - (1 + \alpha)e^{-\alpha}) (1 + o(1)), \quad n/N \rightarrow \alpha, \quad N \rightarrow \infty.$$

$$3.86. \frac{11^{25}}{12^{24}} = 1,36291 \dots, \quad \frac{11 \cdot 10^{25}}{12^{24}} + \frac{11^{25}}{12^{24}} \left(1 - \frac{11^{25}}{12^{24}}\right) = 0,883088 \dots$$

$$3.87. N^{(k)} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \rightarrow \lambda^k \quad \text{при} \quad \frac{n}{N} - \ln N \rightarrow \ln \frac{1}{\lambda}, \quad N \rightarrow \infty.$$

3.88.

$$M\mu_r = NC_{N+n-1}^{N-1} / C_{N+n-1}^{N-1} = \frac{n^{(r)} N^{(2)}}{(N+n-1)^{(r+1)}} \sim N \frac{\alpha^r}{(\alpha+1)^{r+1}}.$$

$$3.89. \text{а) } np_i; \text{ б) } np_i(1-p_j); \text{ в) } -np_i p_j. \quad 3.90. \text{а) } \sum_{j=1}^N (1-p_j)^{n_j}$$

$$\text{б) } \sum_{j=1}^N C'_n p'_j (1-p_j)^{n-r}, \quad \text{в) } N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

$$3.91. Mv_k = N \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{N-l}, \quad Dv_k = N \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(N-l)^2},$$

$$Mv_N = (1 + o(1)) N \ln N \quad (N \rightarrow \infty).$$

$$3.92. N \sum_{k=r+1}^n (k-r) C_n^k \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

$$3.93. n \{p[(1-\beta_1)(1-\beta_2)a - (1-(1-\beta_1)(1-\beta_2))c] - \\ - q[\alpha_1\alpha_2b + (1-\alpha_1\alpha_2)c]\}.$$

$$3.94. M\eta_1 = M\eta_2 = 0,12355\dots, D\eta_1 = 0,478946\dots, D\eta_2 = \\ = 0,109487\dots, D\eta_1/D\eta_2 = 4,37437\dots \quad 3.95. a) M\xi_{n,l} = np_l, D\xi_{n,l} = \\ = np_l(1-p_l), P(\xi_{n,l} \geq 1) = 1 - (1-p_l)^n; б) M\xi_{n,l} = np_l, D\xi_{n,l} = \\ = rnp_l(1-p_l), P(\xi_{n,l} \geq 1) = 1 - (1-p_l)^n, \text{ где } p_l = C_l^0 C_{n-l}^{n-l}/C_n^n.$$

$$3.96. M\xi = n. 3.97. 1 + \frac{2q^2}{1-q^2}. 3.98. \frac{n}{n+1} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right). 3.99. \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

$$3.100. M\mu_{00} = np^2(1+o(1)), D\mu_{00} = npq^2(1+3q)(1+o(1)), n \rightarrow \infty.$$

$$3.101. M\mu_{111} = np^3(1+o(1)), D\mu_{111} = np^3q(1+3p+5p^2)(1+o(1)),$$

$$n \rightarrow \infty. 3.102. a) q^n; б) \sum_{k=1}^n (n-k+1) p^k q^{n-k} = \frac{p}{(q-p)^2} (np^n(q-p) -$$

$$-p(q^n - p^n)) \text{ при } q \neq p, C_{n+1}^2 2^{-n} \text{ при } p=q=1/2; в) npq + p^2, \\ г) pq(1-3pq). 3.103. 155.$$

$$3.104. p_l(x) = i C_n^l x^{l-1} (1-x)^{n-l},$$

$$M\xi_{il}^k = \frac{(i+k-1)!}{(n+k)! i!}, \quad D\xi_{il} = \frac{l(n-l+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

$$3.105. \text{Если } 1 \leq i < j \leq n, \text{ то } \text{cov}(\xi_{il}, \xi_{jl}) = \frac{l(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

$$\rho(\xi_{il}, \xi_{jl}) = \sqrt{\frac{i(n-j+1)}{j(n-i+1)}} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\xi_{il}, \xi_{jl}) = 0 \quad \text{при}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min \left(\frac{l}{j}, \frac{n-j+1}{n-i+1} \right) = 0.$$

$$3.110. a) M\eta_k = 1/n; б) \rho(\eta_k, \eta_l) = -\frac{1}{n-1} \quad (k \neq l);$$

$$в) \rho(\eta_1 + \dots + \eta_k, \eta_1 + \dots + \eta_l) = \sqrt{\frac{k(n-l)}{l(n-k)}}, 1 \leq k < l \leq n.$$

$$3.111. \text{Координата } b \text{ точки } B \text{ — медиана распределения } \xi, \text{ т. е.}$$

$$P(\xi < b) = P(\xi > b) = 1/2. 3.112. x \text{ — медиана } \xi, y \text{ — медиана } \eta, \text{ т. е.}$$

$$P(\xi < x) = P(\xi > x) = P(\eta < y) = P(\eta > y) = 1/2. 3.113. \min_x M(\xi - x)^2 =$$

$$= D\xi = M(\xi - M\xi)^2. 3.128. a), б) \text{ Любое число из } (0, 1]; \text{ в) любое}$$

$$\text{число из } [0, a] \text{ при } a < 1; \text{ любое число из } [1-1/a, 1] \text{ при } a > 1.$$

$$3.130. 1/3 \leq M\xi \leq 2/3.$$

$$F_{-1}(a)$$

$$3.131. aF_{-1}(a) - \int_{-\infty}^a F(x) dx \leq M\xi \leq aF_{-1}(1-a) +$$

$$+ \int_{F_{-1}(1-a)}^1 (1-F(x)) dx, \text{ где } F_{-1}(y) = \sup \{x: F(x) \leq y\}; \text{ минни-}$$

$$\text{мальное значение } M\xi \text{ достигается при } \{\chi=1\} = \{\xi \leq F_{-1}(a)\},$$

$$\text{а максимальное — при } \{\chi=1\} = \{\xi \geq F_{-1}(1-a)\}.$$

$$3.132. \frac{1}{2} - p \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{2p}\right) \leq M\xi \leq \frac{1}{2} + p \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt{2p}\right),$$

экстремальные значения достигаются при $\{\chi = 1\} = \{\xi - \eta \leq -1 + \sqrt{2\rho}\}$ и $\{\chi = 1\} = \{\xi - \eta \geq 1 - \sqrt{2\rho}\}$.

3.133. а) $\rho/(1+q)$; б), в) $q/(1+q)$;

$$\text{г)} (1+q) \frac{\rho}{q} q^{k-1} (1-q^{k-1}) \quad (k=2, 3, \dots);$$

$$\text{д)} (1+q) \rho q^{k-1} \quad (k=1, 2, 3, \dots);$$

$$\text{е)} \rho (1+q) q^{k-1} \quad (k=1, 2, \dots);$$

$$\text{ж)} 1/(l-1) \quad (1 \leq k \leq l-1); \quad \text{з)} l/2.$$

3.134. а) $1/2$ ($0 \leq x \leq z$), 0 ($x \notin [0, z]$); б) $1/2$ ($0 \leq x \leq z$), если $0 < z \leq 1$, $1/(2-z)$ ($z-1 \leq x \leq 1$), если $1 \leq z < 2$; в) $6x(z-x)/z^3$ ($0 \leq x \leq z$). 3.135. а) $z^2/12$; б) $z^2/12$ при $0 \leq z \leq 1$, $(2-z)^2/12$ при $1 \leq z \leq 2$; в) $z^2/20$. 3.136. $M(\xi | \xi + \eta = z) = z/2$, если $P(\xi + \eta = z) > 0$ или плотность $p_{\xi+\eta}(z) > 0$.

$$3.137. \text{ а)} C_N^m \left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} \right)^m \left(\frac{\lambda_{k+1} + \dots + \lambda_N}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N} \right)^{n-m};$$

$$\text{б)} n \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_N}.$$

3.138. $P(\xi = m) = C_M^m C_N^{n-m} / C_N^n$. 3.139. Стандартное нормальное распределение. 3.140. $F(x_1)F(x_2)$, где $F(x) = 0$ при $x \leq z$, $F(x) = \min \left\{ \frac{x-z}{a-z}, 1 \right\}$ ($x \geq z$). 3.141. $1 + 1/2 + \dots + 1/n$.

3.142. $M\tau = ab$, $D\tau = b\sigma^2 + a^2\delta^2$. 3.144. $Mv_{00} = (1+q)/q^2$, $Mv_{00} = 6$ при $\rho = 1/2$. 3.145. $Mv_{111} = (1+\rho+\rho^2)/\rho^3$, $Mv_{111} = 14$ при $\rho = 1/2$.

3.146. $Mv_{01} = 1/(\rho q)$, $Mv_{01} = 4$ при $\rho = 1/2$. 3.147. nx^{n-1} .

3.148. $1 - n2^{1-n}$. 3.149. $Mv = 5$, $Dv = 4$. 3.150. $1 - n3^{-n+1}$.

$$3.151. P(\xi > x) = \left(1 - \frac{x}{2\pi r} \right)^{n-1} \quad (0 \leq x \leq 2\pi r), \quad M\xi = \frac{2\pi r}{n},$$

$$D\xi = \left(\frac{2\pi r}{n} \right)^2 \frac{n-1}{n+1}. \quad 3.182. P(\xi_1 > x, \xi_2 > y) = \left(1 - \frac{x+y}{2\pi r} \right)^{n-1},$$

$0 \leq x, y, x+y \leq 2\pi r$; $\rho = -1/(n-1)$.

$$3.153. P(\xi_1 > x_1, \dots, \xi_k > x_k) = \left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_k}{2\pi r} \right)^{n-1},$$

$$x_i \geq 0, x_1 + \dots + x_k \leq 2\pi r.$$

$$3.155. Mv = n \left(1 - \frac{\Delta}{2\pi r} \right)^{n-1} = ne^{-\lambda\Delta} (1 + o(1)),$$

$$Dv = ne^{-\lambda\Delta} (1 - (1 + \lambda^2\Delta^2) e^{-\lambda\Delta} (1 + o(1))).$$

$$3.156. P(\eta_n \leq x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left(1 - \frac{kx}{2\pi r} \right)_+^{n-1}, \quad \text{где } x \geq 0$$

$$\text{и } (a)_+ = \max(a, 0). \quad 3.157. \frac{2\pi r}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = (1 + o(1)) \frac{2\pi r}{n} \ln n, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$3.158. \quad MS = 3/(2\pi) = 0,4774\dots, \quad Mp = 12/\pi = 3,8197\dots, \\ Mr = 12/\pi^2 - 1 = 0,2158\dots$$

$$3.161. \quad P(|\xi| \leq 0,7) = 0,5160\dots > P(|\xi| \geq 0,7) = 0,4839\dots$$

$$3.162. \quad P(-0,5 \leq \xi \leq -0,1) = 0,1616\dots > P(1 \leq \xi \leq 2) = 0,1359\dots$$

$$3.163. \quad M\xi^{2k-1} = 0, \quad M\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \sigma^{2k} = (2k-1)!! \sigma^{2k}, \\ k = 1, 2, \dots$$

$$3.165. \quad a) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}, \quad x > 0; \quad б) \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}},$$

$$x > 0.$$

$$3.166. \quad M\xi = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad D\xi = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1). \quad 3.167. \quad a) 2\Phi_0(5/3) = \\ = 0,9044\dots \text{ в любом случае; } б) \Phi(1,6268\dots) - \Phi(-1,716\dots) = \\ = 0,9050\dots \text{ при } m=60, \quad \Phi(1,527\dots) - \Phi(-2,214\dots) = 0,9233\dots$$

$$\text{при } m=10. \quad 3.168. \quad M\eta_1^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1), \quad M\eta_2^k = e^{ak + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2}.$$

$$3.169. \quad 0. \quad 3.170. \quad M \cos \xi = e^{-1/2} = 0,6065\dots, \quad D \cos \xi = \frac{1}{2} (1 - e^{-1})^2 =$$

$$= 0,1997\dots \quad 3.171. \quad D \sin \xi = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) = 0,4323\dots > D \cos \xi =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - e^{-1})^2 = 0,1997\dots$$

$$3.172. \quad M \cos(\xi^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} + 1} = 0,77688\dots,$$

$$M \sin(\xi^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0,32179\dots$$

$$3.173. \quad \text{Являются.} \quad 3.174. \quad a) \text{ Нормальное; } б) \text{ нет. } 3.175. \quad 1.$$

$$3.176. \quad a) 4\Phi_0^2(1) = 0,4660\dots; \quad б) 2\Phi_0(1)\Phi_0(2) = 0,32580\dots;$$

$$в) \Phi_0^2(2) = 0,2277\dots; \quad г) 2\Phi_0^2(1) = 0,2330\dots; \quad д) 1 - e^{-1/2} = 0,3934\dots;$$

$$е) 1 - e^{-1} = 0,6321\dots \quad 3.177. \quad a) 4\Phi_0(2,5)\Phi_0(1) = 0,67420\dots;$$

$$б) 2\Phi_0(2,5)\Phi_0(2) = 0,47132\dots; \quad в) [\Phi_0(1,5) + \Phi_0(0,5)] \times \\ \times [\Phi_0(3) + \Phi_0(2)] = 0,60959\dots$$

$$3.178. \quad \left[\Phi_0\left(\frac{5,4}{2}\right) - \Phi_0\left(\frac{2,4}{2}\right) \right] \left[\Phi_0\left(\frac{1,8}{2}\right) + \Phi_0\left(\frac{3,2}{2}\right) \right] = \\ = 0,08494\dots$$

$$3.179. \quad a) \Phi_0^2(\sqrt{2})/2 = 0,08876\dots;$$

$$б) (\Phi_0^2(2) - \Phi_0^2(\sqrt{2})) = 0,05023\dots;$$

$$в) (\Phi_0^2(2) - \Phi_0^2(\sqrt{2}))/2 = 0,02511\dots$$

$$3.180. \quad re^{-r^2/2}/2\pi \quad (r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad 0 \text{ в остальных случаях.}$$

$$3.181. \quad a) 2^2 \Phi_0^2(3) = 0,99460\dots; \quad б) 1 - e^{-9/2} = 0,98889\dots;$$

$$в) 1 - e^{-9} = 0,99987\dots$$

$$3.182. a) e^{-2} - e^{-9/2} = 0,1242 \dots$$

$$б) 4 (\Phi_0^2(3) - \Phi_0^2(2)) = 0,0835 \dots$$

$$в) 4 \left(\Phi_0^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \Phi_0^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = 0,1054 \dots$$

$$3.184. \rho_{00} = \rho_{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho, \rho_{01} = \rho_{10} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \rho,$$

где $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$ — коэффициент корреляции ξ_1 и ξ_2 . 3.185. 15.

3.186. $\ln M |\xi_1 \dots \xi_k|$. 3.187. $M\eta\xi = (0, 0, \dots, 0)$, $\text{cov}(\eta\xi_i, \eta\xi_j) = a_{ij}$.

Глава 4

$$4.2. P \left\{ \left| \frac{\eta_n}{n} - 3,5 \right| > \varepsilon \right\} < \frac{8,75}{n\varepsilon^2}.$$

$$4.3. P \left\{ \left| \frac{\eta_n}{n} - p^2 \right| > \varepsilon \right\} < \frac{p^2(1+3p)(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

4.4. Выполняется. 4.5. Удовлетворяют. 4.6. $0 \leq \alpha < 1$.

4.7. $\alpha \geq 0$, $\alpha \geq 1$. 4.8. Удовлетворяют. 4.16. Всегда.

4.23. б) $(1-p)^{p^k}$.

$$4.24. P \{ \tau_1(N) > n \} = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{N-j} \right), G_1(x) = 1 - e^{-x^2},$$

$$P \{ \tau_2(N) > n \} = \left(1 + \frac{\delta(N)n}{N-2n+1} \right) \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j+\delta(N)}{N-j} \right),$$

где $\delta(N) = 1$ при нечетном N и $\delta(N) = 0$ при четном N , $G_2(x) = 1 - e^{-x^2/2}$.

$$4.25. \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \eta_n \leq x \} = x, 0 \leq x \leq 1.$$

4.27. Распределение Коши с параметром 1. 4.28. Распределение Коши с параметром 1.

$$4.29. \lim_{x \rightarrow \infty} P \{ (\xi - x) x \leq y | \xi > x \} = 1 - e^{-y/\sigma^2}, y \geq 0.$$

$$4.30. а) \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ x_n n^{-1/\alpha} \leq x \} = e^{-x^{-\alpha}} (x > 0);$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ x_n n^{1/\alpha} \leq x \} = e^{-(-x)^\alpha} (x < 0);$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ x_n - \ln n \leq x \} = e^{-e^{-x}}.$$

$$4.37. \lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \zeta_n \leq x \} = 1 - e^{-x}, 0 \leq x < \infty. 4.38. а) M\tau_k = k\sigma,$$

$$D\tau_k = k\sigma^2. 4.39. M\tau = aM\nu, P \left\{ \frac{\tau}{M\tau} \leq x \right\} \rightarrow F(x). 4.40. а) M\tau_q = \frac{a}{q},$$

$$D\tau_q = \frac{a^2 p + a^2 q}{q^2}; б) \lim_{q \rightarrow 0} P \left\{ \frac{\tau_q}{M\tau_q} \leq x \right\} = 1 - e^{-x}, 0 \leq x < \infty.$$

$$4.42. \lim_{q \rightarrow 0} P\{q\tau_1 \leq x\} = \lim_{q \rightarrow 0} P\{q\tau_2 \leq x\} = 1 - e^{-x/a}, \quad x \geq 0.$$

$$4.43. P\left\{\frac{q\tau_1}{a} \leq x\right\} \rightarrow 1 - e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad 4.44. 0,265. \quad 4.47. а),$$

$$б) \text{ Сходится. } 4.48. \text{ Равенство верно. } 4.49. б) M\xi = 1/2, D\xi = 7/44.$$

$$4.50. б) M\xi = 1/3, D\xi = 1/18. \quad 4.51. F(x). \quad 4.52. F\left(\sqrt[k]{k!x}\right), \text{ если}$$

$$k \text{ нечетное и } y = \sqrt[k]{k!x} - \text{точка непрерывности } F(y); F\left(\sqrt[k]{k!x}\right) -$$

$$- F\left(-\sqrt[k]{k!x}\right), \text{ если } k \text{ четное, } x \geq 0 \text{ и } y_{1,2} = \pm \sqrt[k]{k!x} - \text{точки}$$

$$\text{непрерывности } F(y). \quad 4.53. \text{ Условия в). } 4.54. а) \text{ Любое соотноше-}$$

$$\text{ние может выполняться. б) } m = m_{\infty}. \quad 4.55. а) M \leq M_{\infty}; б) \sigma^2 \leq \sigma_{\infty}^2.$$

$$4.56. а) e^{\lambda(z-1)}; б) p/(1-qz); в) (pz+q)^n. \quad 4.57. \varphi(z) = (pz+q)^n,$$

$$M\xi_n = np, M\xi_n^{[k]} = n^{[k]} p^k, D\xi_n = npq, \text{ где } q = 1-p. \quad 4.59. M\tau_1 = 1/p,$$

$$D\tau_1 = q/p^3, Mz\tau_1 = \frac{pz}{1-qz}. \quad 4.60. 1) k/p, kq/p^3; 2) \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^k.$$

$$4.61. Mz^l = \left(\frac{pz}{1-qz}\right)^l, M\xi = \frac{m}{p}, D\xi = \frac{mq}{p^2}. \quad 4.62. P\{\eta = l\} =$$

$$= C_{T-1}^{m-1} p^m q^{l-m}, \quad m = m_1 + m_2 + m_3, \quad l \geq m. \quad 4.63. а) e^{\lambda p(x-1)};$$

$$б) \lambda p, \lambda p. \quad 4.64. а) \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ распределены по закону Пуассона с}$$

$$\text{параметрами } \lambda(1-p_2) \text{ и } \lambda(1-p_1) \text{ соответственно; б) } M\xi_1 = D\xi_1 =$$

$$= \lambda(1-p_2), M\xi_2 = D\xi_2 = \lambda(1-p_1), \text{ cov}(\xi_1, \xi_2) = 0. \text{ Случайные}$$

$$\text{величины } \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ зависимы.}$$

$$4.66. а) (p_1 z_1 + \dots + p_N z_N)^n; б) n^{[k]} p_i^k, n^{[k+l]} p_i^k p_j^l (i \neq j).$$

$$4.67. Mz_1^n, z_2^n, z_3^n, z = (p_1 z_1 + (p_2 + p_3) z_2 + p_4 z_3)^n,$$

$$Mz_1^n, z_2^n, z_3^n, z = (p_1 z_1 + p_2 z_1 z_2 + p_3 z_2 z_3 + p_4 z_3)^n,$$

$$\rho(\eta_n, \tau, \eta_n, z) = - \sqrt{\frac{p_1(p_2 + p_3)}{(1-p_1)(1-p_2-p_3)}},$$

$$\rho(\xi_n, \tau, \xi_n, z) = \frac{p_2 - (p_1 + p_3)(p_2 + p_3)}{\sqrt{(p_1 + p_3)(1-p_1-p_3)(p_2 + p_3)(1-p_2-p_3)}}.$$

$$4.68. e^{\lambda(p_1 z_1 + \dots + p_N z_N^{N-1})}. \quad 4.69. \alpha/\gamma = a, \beta/\gamma = 1-a-d,$$

$$\delta/\gamma = -d, \text{ где } 0 \leq a \leq 1, 0 \leq d < 1. \quad 4.70. \text{ Все функции, кроме}$$

$$\varphi_4(z), \text{ являются производящими при любой производящей функ-}$$

$$\text{ции } \varphi(z) \text{ и } \alpha \in [0, 1]; \varphi_4(z) \text{ является производящей только при}$$

$$\varphi(z) = \text{const.} \quad 4.71. \varphi_2(e^t). \quad 4.72. а) e^{\lambda(e^{it}-1)}; б) (pe^{it}+q)^n;$$

$$в) \frac{1}{1-it/\alpha}. \quad 4.73. (n+k-1)^{[k]} \alpha^{-k}. \quad 4.74. M e^{it\xi} = g(f(t)),$$

$$M s^k = g(f(s)). \quad 4.75. n_1 + \dots + n_m = n, p_1 = \dots = p_m = p.$$

$$4.76. а) k^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(2\pi j/k); б) k^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} f(2\pi j/k) e^{-2\pi i m j/k}.$$

$$4.77. 11/27, 1/9.$$

$$4.78. 11/27, 1/9.$$

$$4.79. 11/27, 1/9.$$

$$4.80. P\{\mu_n \geq \beta n\} \leq \left\{ \left(\frac{1-p}{1-\beta} \right)^{1-\beta} \left(\frac{p}{\beta} \right)^{\beta} \right\}^n, \quad p < \beta,$$

$$P\{\mu_n \leq n/2\} \leq (2 \sqrt{p(1-p)})^n.$$

$$4.81. pq. \quad 4.82. pf_1(t) + (1-p)f_2(t). \quad 4.83. а) \frac{e^{it\alpha} - 1}{it\alpha} (t \neq 0),$$

$$1 (t=0); б) \frac{2\alpha^2}{t^2} \left(1 - \cos \frac{t}{\alpha} \right) (t \neq 0), 1 (t=0); в) C_{\alpha} = \alpha/\pi,$$

$$1 - \alpha |t| (|t| \leq \alpha^{-1}), 0 (|t| > \alpha^{-1}). \quad 4.86. \text{ Является. } 4.87. \text{ Явля-}$$

$$\text{ется. } 4.88. а), б) \text{ Является. } 4.89. \text{ Не следует. } 4.90. \text{ Изменится.}$$

$$4.92. \text{ Равенство верно, если } M|\xi| < \infty. \quad 4.95. а), в), е), з)$$

$$\text{Являются; б), г), д), ж) Нет.}$$

$$4.96. а) 1 - e^{-x/3} (x > 0), \frac{1}{1-2it};$$

$$б) \frac{1}{(1-2it)^{r/2}} = \frac{1}{(1+4t^2)^{r/4}} \exp \left\{ \frac{ir}{2} \arctg 2t \right\},$$

$$M(\chi_r^2)^k = r(r+2) \dots (r+2k-2).$$

$$4.97. \frac{1}{(1-it)^{\alpha}} = \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}} e^{i\alpha \arctg t}, \quad \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1).$$

$$4.98. \text{ Нормальное распределение, } M\xi = (a, c), D\xi = (c, Bc).$$

$$4.99. \text{ Многомерное нормальное распределение в } R^m \text{ с вектором}$$

$$\text{математических ожиданий } Ca \text{ и матрицей ковариаций } CBCT^T, \text{ где}$$

$$T - \text{знак транспонирования. } 4.101. \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, m=0, 1, \dots$$

$$4.110. M(\mu_l(n, N, s))^{[k]} = \frac{N^{[k]} (C_N^l)^k C_{N-k}^{n-k} C_{N-k-1}^{n-k-1}}{C_{N_s}^n}. \text{ Функция } f_l(n) =$$

$$= M\mu_l(n, N, s) \text{ при любом } l=0, 1, \dots, s \text{ имеет единственный}$$

$$\text{максимум в точке } n_0 = Ni \text{ и монотонна слева и справа от } n_0.$$

$$\text{При фиксированных } i \text{ и } s$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \max_n f_l(n) = C_l^i \frac{l^i (s-i)^{s-i}}{s^s}.$$

$$4.111. \frac{C_N^k}{C_{N_s}^n} \sum_{m=k}^N (-1)^{m-k} C_N^{m-k} (C_s^l)^m C_{(N-m)}^{n-m}.$$

$$4.113. M\mu_r(n, N) = C_r^n (N-1)^{n-r} N^{-n+1}.$$

$$4.114. \lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{v_r(N)}{N^{(r-1)/r}} \leq x \right\} = 1 - e^{-x^r/r!} (x \geq 0).$$

$$4.115. \text{ Распределение произведения } \xi_1 \xi_2, \text{ где случайные вели-}$$

$$\text{чины } \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ независимы и имеют распределение Пуассона с па-}$$

$$\text{раметром } \lambda. \quad 4.116. n \geq 790. \quad 4.117. (-74,36 \cdot 10^{-m}, 74,36 \cdot 10^{-m}).$$

$$4.118. б) \Phi(x). \quad 4.119. \Phi(x). \quad 4.120. n \sum_{i=1}^N a_i p_i, n \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 p_i - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^N a_i p_i \right)^2 \right); \text{ стандартное нормальное распределение.}$$

4.121. а) $M\eta_k = 3a$, $D\eta_k = 3b^2$, $\text{cov}(\eta_k, \eta_l) = 0$ ($|k-l| \geq 3$), $\text{cov}(\eta_k, \eta_{k+1}) = b^2$, $\text{cov}(\eta_k, \eta_{k+2}) = 2b^2$; б) $\Phi(x/\sqrt{3})$. 4.122. $\Phi(x)$. 4.123. а) $x = p/(1-p)$. 4.125. Стандартное нормальное распределение. 4.126. $M\xi_j^{(n)} = 0$, $D\xi_j^{(n)} = 1$; при $n \rightarrow \infty$ распределение η_n сходится к стандартному нормальному распределению. 4.127. При $n \rightarrow \infty$ распределение η_n сходится к распределению разности двух независимых целочисленных случайных величин, каждая из которых имеет распределение Пуассона с параметром $1/2$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{\eta_n = k\} = e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{|k|+2m} m! (|k|+m)!}.$$

4.128. $F_n(x) \rightarrow a + (1-a)(1 - e^{-ax})$ ($x \geq 0$), если $1 - d_n A_n \rightarrow m \in (0, \infty)$, $a_n \rightarrow a \leq 1$ при $n \rightarrow \infty$.

$$4.132. а) Mz^m = \left(1 - \frac{m-1}{N}\right) z / \left(1 - \frac{m-1}{N} z\right).$$

$$P\{\tau_m > v_k - v_l\} = \left(\frac{m-1}{N}\right)^{k-l} \prod_{i=l}^{k-1} \left\{ \left(1 - \frac{n}{N}\right) / \left(1 - \frac{n}{N} \cdot \frac{n-1}{N}\right) \right\},$$

б) 2^{-r} .

4.133. Распределение Пуассона с параметром $\lambda/2$.

$$4.134. Mv_m = (1 + o(1)) N \ln \frac{N-m}{N},$$

$$Dv_m = (1 + o(1)) N \left(\frac{m}{N-m} - \ln \frac{N}{N-m} \right);$$

стандартное нормальное распределение.

4.135. $e^{-\sigma|t|^\alpha}$. 4.138. Распределение Коши с параметром $\pi\rho(0)$. 4.139. $M e^{it(\xi_1 + \xi_2)} = M e^{it(\xi_1 + \xi_2)} = e^{-2\sigma|t|}$. 4.140. $I_{a,b}(x) = \frac{(a+b)\pi}{ab((a+b)^2 + x^2)}$.

Глава 5

5.1. 1) (0,385, 0,336, 0,279); 2) 0,0336; 3) (16/47, 17/47, 14/47).

5.2. $\left(\frac{3/7}{1/11}, \frac{4/7}{10/11}\right)$. 5.3. $P\{\eta_t = m\} = C_t^{\frac{t+m}{2}} p^{\frac{t+m}{2}} q^{\frac{t-m}{2}}$, если $t-m$ четно, $P\{\eta_t = m\} = 0$, если $t-m$ нечетно.

5.4. 1) Нет, если $p \neq q$, да, если $p = q = 1/2$; 2) да, $P(\eta_{t+1} = 1 | \eta_t = 1) = p$, $P(\eta_{t+1} = 1 | \eta_t = -1) = 1-p$; 3) да, $p_{11} = p_{22} = p_{31} = p_{43} = 1-p$, $p_{12} = p_{21} = p_{32} = p_{44} = p$.

5.5. $P(\mu_0(n+1) = k | \mu_0(n) = k) = k/N$,

$$P(\mu_0(n+1) = k-1 | \mu_0(n) = k) = (N-k)/N.$$

$$5.6. P(\mu_0(n+1) = k-1 | \mu_0(n) = k) = C_{k-1}^{n-1} C_{N-k}^{n-1} / C_N^n.$$

5.9. Является. 5.10. $1/6$. 5.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tau_n > x n / \alpha) = e^{-x}$,
 $x > 0$. 5.13. 1; 4; 9. 5.16. $\pi_k^{(N)} = (1 - \lambda^k) / (1 - \lambda^N)$ при $p \neq q$, где
 $\lambda = q/p$; $\pi_k^{(N)} = k/N$ при $p = q = 1/2$, $\pi_k^{(0)} = 1 - \pi_k^{(N)}$, $k = 0, 1, \dots, N$.
5.17. 1) $\left(\frac{143}{400}, \frac{171}{400}, \frac{86}{400}\right)$; 2), 3) $\left(\frac{15}{41}, \frac{18}{41}, \frac{8}{41}\right)$. 5.19. а) $\{1, 2\}$;
б) $\frac{138}{97} = 1,42268\dots$; в) $p_1^{(\alpha)} = \frac{52}{97} = 0,5360\dots$, $p_2^{(\alpha)} = \frac{40}{97} = 0,4123\dots$,
 $p_j^{(\beta)} = 1 - p_j^{(\alpha)}$, $j = 1, 2$; г) $\pi_1 = \pi_2 = 0$, $\pi_3 = \frac{92}{291} = 0,3161\dots$,
 $\pi_4 = \frac{46}{291} = 0,1580\dots$, $\pi_5 = \pi_6 = \frac{51}{194} = 0,2628\dots$.

5.23.

$$\begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1 - \alpha - \beta)^t}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix};$$

$$\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad \pi_2 = 1 - \pi_1.$$

5.27. Не следует. 5.28. $\frac{3}{2} e_1 \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.

Глава 6

6.1. $M s^2 = \sigma^2$; s^2 — состоятельная оценка σ^2 . 6.2. $M m_r = a_r$,

$$D m_r = \frac{a_{2r} - a_r^2}{n} = \frac{D_{2r}^2}{n}. \quad 6.3. a^* = \sum_{k=1}^n c_k x_k, \text{ где } c_k = \frac{\sigma_k^{-2}}{\sigma_1^{-2} + \dots + \sigma_n^{-2}}.$$

6.4. Является. 6.5. $\Phi(x)$. 6.7. $p^* = \mu_n/n$. 6.8. $\left[p^* - u_\alpha \times \right.$
 $\times \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}, p^* + u_\alpha \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} \left. \right]$, где $p^* = \mu_n/n$,

$1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$. 6.12. $\lambda^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$, оценка состоятельная и несме-

щенная; $M \lambda^* = \lambda$, $D \lambda^* = \lambda/n$. 6.13. $\lambda^* = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^{-1}$, $M \lambda^* = \frac{1}{\lambda}$.

$D \lambda^* = \frac{1}{n \lambda^2}$. 6.14. а) $a^* = \bar{a}$, $b^* = \bar{b}$, $c^* = \bar{c}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — средние

арифметические по соответствующим выборкам; $D a^* = \frac{1}{n} \sigma_a^2$,

$D b^* = \frac{1}{n} \sigma_b^2$, $D c^* = \frac{1}{n} \sigma_c^2$; б) $a^{**} = \bar{a} (1 - k_a^2) + (\bar{c} - \bar{a}) k_a^2$, $b^{**} =$

$\bar{b} (1 - k_b^2) + (\bar{c} - \bar{b}) k_b^2$, $c^{**} = \bar{c} (1 - k_c^2) + (\bar{a} + \bar{b}) k_c^2$, где $\sigma^2 = \sigma_a^2 +$
 $+ \sigma_b^2 + \sigma_c^2$, $k_a^2 = \sigma_a^2/\sigma^2$, $k_b^2 = \sigma_b^2/\sigma^2$, $k_c^2 = \sigma_c^2/\sigma^2$; $D a^{**} = \sigma_a^2 (1 - k_a^2) / n$,

$$D\sigma^2 = \sigma_0^2 (1 - k_0^2/n), D\sigma^4 = \sigma_0^4 (1 - k_0^2/n), 6.15. \sigma^2 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (\eta_i - \bar{\eta})^2, \\ \left[\bar{\eta} - u_0 \frac{b^2}{\sqrt{l}}, \bar{\eta} + u_0 \frac{b^2}{\sqrt{l}} \right], \text{ где } 1 - \Phi(u_0) = \alpha, \quad 6.16. c_l = \\ = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad l=1, 2, D\Delta^2 = \frac{\beta^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \gamma^2 \sigma_2^2, 6.17. a) z = \\ = \frac{x_1 + x_2 + (1+p)x_3}{3+p}, \quad D_z = \frac{1+p}{3+p}; \quad 6) z = (x_1 + x_2)/2, \quad D_z = 0; \\ 6) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \frac{1}{2} x_3, \quad c_1 + c_2 = \frac{1}{2}; \quad D_z = 1/2, \quad 6.18. \Delta^2 = \\ = \left(\sum_{i=1}^k x_i n_i \bar{y}_i \right) \left(\sum_{i=1}^k n_i x_i^2 \right), \quad M\Delta^2 = A, \quad D\Delta^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 \frac{n_i}{n} \right)^{-1}, \\ \text{где } n = n_1 + n_2 + \dots + n_k. \quad 6.19. \text{ См. ответ к задаче 6.18.} \quad 6.20. M\eta_n = 1/N, D\eta_n = \\ = 2/(\alpha^2 N^2) + O(1/N^3), n/N \rightarrow \alpha, N \rightarrow \infty, \alpha = \cos 1. \\ 6.21. M\sigma^2 = a + \frac{b-a}{n+1}, \quad M\sigma^4 = b - \frac{b-a}{n+1}, \\ D\sigma^2 = D\sigma^4 = \frac{(b-a)^2 n}{(n+1)^2 (n+2)}, \quad \text{cov}(\sigma^2, \sigma^4) = \frac{1}{n} D\sigma^2. \\ 6.22. Mx_{(1)} = \frac{1}{\alpha l}, \quad Dx_{(1)} = \frac{1}{\alpha^2 l^2}, \quad Mx_{(n)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad Dx_{(n)} = \\ = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad \text{cov}(x_{(1)}, x_{(n)}) = \frac{1}{\alpha^2 n^2}, \quad 6.23. a) M0_1^2 = M0_2^2 = \frac{a+b}{2}, \\ D0_1^2 = \frac{(b-a)^2}{12n}, \quad D0_2^2 = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}; \quad 6) M0_1^2 = \frac{1}{\alpha}, \quad D0_1^2 = \frac{1}{\alpha^2 n}, \\ M0_2^2 = \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(n-1)} + \frac{2}{n} \right), \quad D0_2^2 = \frac{1}{4\alpha^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{4}{n^2} \right), \\ 6.24. M_c^2 = c, D_c^2 = \frac{1}{n^2}, 6.27. \eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \\ 6.28. \eta_n = \sum_{k=1}^N \xi_k \ln \frac{\rho_k}{\rho_N}, \quad \text{где } \xi_k - \text{число исходов с номером } k. \\ 6.29. a) C = n u_0 + u_0 u \sqrt{n}; \quad 6) u_0 u + u \rho u = (u_1 - u_n) \sqrt{n}; \quad 6) 0. \\ 6.30. a_0 = e^{-\gamma}, a_1 = \int_0^1 e^{-\gamma k} k^2 dx. \\ 6.31. \sigma_1^2 = \int_0^1 e^{-\gamma k} k^2 dx - \left(\int_0^1 e^{-\gamma k} k dx \right)^2 \left(\int_0^1 e^{-\gamma k} k^2 dx \right)^{-1}.$$

Таблицы. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Таблица 1. Значения функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du$

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0200	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	398	438	478	517	557	596	636	675	714	753
0,2	793	832	871	910	948	987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	406	443	480	517
0,4	554	591	628	664	700	736	772	808	844	879
0,5	915	950	985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	357	389	422	454	486	517	549
0,7	580	611	642	673	703	734	764	794	823	852
0,8	881	910	939	967	995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	289	315	340	365	389
1,0	413	437	461	485	508	581	554	577	599	621
1,1	643	665	686	708	729	749	770	790	810	830
1,2	849	869	888	907	925	944	962	980	997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	192	207	222	236	251	265	279	292	306	319
1,5	332	345	357	370	382	394	406	418	429	441
1,6	452	463	474	484	495	505	515	52	535	545
1,7	554	564	573	582	591	599	608	616	625	633
1,8	641	649	656	664	671	678	686	693	699	706
1,9	713	719	726	732	738	744	750	756	761	767

Таблица 1. (продолжение)

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	772	778	783	788	793	798	803	808	812	817
2,1	821	826	830	834	838	842	846	850	854	857
2,2	861	864	868	871	875	878	881	884	887	890
2,3	893	896	898	901	904	906	909	911	913	916
2,4	918	920	922	925	927	929	931	932	934	936
2,5	938	940	941	943	945	946	948	949	951	952
2,6	953	955	956	957	959	960	961	962	963	964
2,7	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974
2,8	974	975	976	977	977	978	979	979	980	981
2,9	981	982	982	983	984	984	985	985	985	986
3,0	987	987	987	988	988	989	989	989	990	990

Таблица 2. Значения функции u_α

Функция u_α определяется равенством $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

α	0,001	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,035	0,040	0,045	0,050
u_α	3,0902	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954	1,6449

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Таблица 3. Значения функции $P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,29813	0,39327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,35788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03699
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,14653	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,15637	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05304	0,10445
8	0,00001	0,00085	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00061	0,00229	0,01813
11			0,00022	0,00198	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Таблица 4. Значения функции $t_{\alpha, n}$

Функция $t_{\alpha, n}$ определяется равенством

$$P(t_n > t_{\alpha, n}) = \alpha,$$

где случайная величина t_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы. Плотность распределения t_n равна

$$p_{t_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{nn}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$2\alpha \backslash n$	0,10	0,05	0,02	0,01
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,624	2,977
16	1,745	2,120	2,583	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
30	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

χ^2 -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Таблица 5. Значения функции $\chi^2_{\alpha, m}$

Функция $\chi^2_{\alpha, m}$ определяется равенством

$$P(\chi^2_m > \chi^2_{\alpha, m}) = \alpha,$$

где случайная величина χ^2_m имеет χ^2 -распределение с m степенями свободы. Плотность распределения χ^2_m равна

$$p_{\chi^2_m}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

$\alpha \backslash m$	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005
1	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9
2	4,6	6,0	7,8	9,2	11,6
3	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8
4	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9
5	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3
6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3
8	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9
9	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6
10	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2
11	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8
12	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3
13	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8
14	21,1	23,7	26,9	29,1	31
15	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5
16	23,5	26,3	29,6	32,0	34
17	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5
18	26,0	28,9	32,3	34,8	37
19	27,2	30,1	33,7	36,2	38,5
20	28,4	31,4	35,0	37,6	40
21	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5
22	30,8	33,9	37,7	40,3	42,5
23	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0
24	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5
25	34,4	37,7	41,6	44,3	47

РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА

Таблица 6. Приведенные в таблице цифры можно рассматривать как реализации независимых и одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 0, 1, ..., 9 с одной и той же вероятностью, равной 0,1

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	26	97	76	02
88	57	67	43	97	04	43	62	76	59	63	57	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	64	57	53
34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
11	19	92	91	70	98	52	01	77	67	14	90	56	86	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	45	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69
22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88
73	03	95	71	86	40	21	81	65	44	91	49	91	45	23
21	11	57	82	53	14	38	55	37	63	80	33	69	45	98
45	52	16	42	37	96	28	60	26	55	44	10	48	19	49
76	62	11	39	90	94	40	05	64	18	12	55	07	37	42
96	29	77	88	22	54	38	21	45	98	63	60	64	93	29
68	47	92	78	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
85	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82

НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА

Таблица 7. Приведенные в таблице 7 числа можно рассматривать как реализации независимых нормально распределенных величин с параметрами $\mu=0$, $\sigma^2=1$

0,464	0,137	2,455	-0,323	-0,068	0,296	-0,288	1,298
0,060	-2,256	-0,531	-0,194	0,543	-1,558	0,187	-1,190
1,486	-0,354	-0,634	0,697	0,926	1,375	0,785	-0,963
1,022	-0,472	1,279	3,521	0,571	-1,851	0,194	1,192
7,394	-0,555	0,046	0,321	2,945	1,974	-0,258	0,412
0,906	-0,513	-0,525	0,595	0,881	-0,934	1,579	0,161
1,179	-1,055	0,007	0,769	0,971	0,712	1,090	-0,631
-1,501	-0,488	-0,162	-0,136	1,033	0,203	0,448	0,748
-0,690	0,756	-1,618	-0,345	-0,511	-2,051	-0,457	-0,218
1,372	0,225	0,378	0,761	0,181	-0,736	0,960	-1,530
-0,482	1,678	-0,057	-1,229	-0,486	0,856	-0,491	-1,983
-1,376	-0,150	1,356	-0,561	-0,256	-0,212	0,219	0,774
-1,010	0,698	-0,918	1,598	0,065	0,415	-0,169	0,313
-0,005	-0,899	0,012	-0,725	1,147	-0,121	1,096	0,181
1,393	-1,163	-0,911	1,231	-0,199	-0,246	1,239	-2,574
-1,787	-0,261	1,237	1,046	-0,508	-1,630	-0,146	-0,392
-0,105	-0,357	-1,384	0,360	-0,992	-0,116	-1,698	-2,832
-1,339	1,827	-0,959	0,424	0,969	-1,141	-1,041	0,362
1,041	0,535	0,731	1,377	0,983	-1,330	1,620	-1,040
0,279	-2,056	0,717	-0,873	-1,096	-1,396	1,047	0,089
-1,805	-2,008	-1,633	0,542	0,250	-0,166	0,032	0,079
-1,186	1,180	1,114	0,882	1,265	-0,202	0,151	-0,376
0,658	-1,141	1,151	-1,210	-0,927	0,425	0,290	-0,902
-0,439	0,358	-1,939	0,891	-0,227	0,602	0,873	-0,437
-1,399	-0,230	0,385	-0,649	-0,577	0,237	-0,289	0,513
0,199	0,208	-1,083	-0,219	-0,291	1,221	1,119	0,004
0,159	0,272	-0,313	0,084	-2,828	-0,439	-0,792	-1,275
2,273	0,606	0,606	-0,747	0,247	1,291	0,063	-1,793
0,041	-0,307	0,121	0,790	-0,584	0,541	0,484	-0,986
-1,132	-2,098	0,921	0,145	0,446	-1,661	1,045	-1,363
0,768	0,079	-1,473	0,034	-2,127	0,665	0,084	-0,880
0,375	-1,658	-0,851	0,234	-0,656	0,340	-0,086	-0,158
-0,513	-0,344	0,210	-0,736	1,041	0,008	0,427	-0,831
0,292	-0,521	1,266	-1,206	-0,899	0,110	-0,528	-0,813
1,026	2,990	-0,574	-0,491	-1,114	1,297	-1,433	-1,345

Таблица 7 (продолжение)

-1,334	1,278	-0,568	-0,109	-0,515	-0,566	2,923	0,500
-0,287	-0,144	-0,254	0,574	-0,451	-1,181	-1,190	-0,318
0,161	-0,886	-0,921	-0,509	1,410	-0,518	0,192	-0,432
-1,346	0,193	-1,202	0,394	-1,045	0,843	0,942	1,045
1,250	-0,199	-0,288	1,810	1,378	0,584	1,216	0,733

0,630	-0,537	0,782	0,060	0,499	-0,431	1,705	1,184
0,375	-1,941	0,247	-0,491	0,665	-0,135	-0,145	-0,498
-1,420	0,489	-1,711	-1,186	0,754	-0,732	-0,066	1,006
-0,151	-0,243	-0,430	-0,762	0,298	1,049	1,810	2,885
-0,309	0,531	0,416	-1,541	1,456	2,040	-0,124	0,196

0,424	-0,444	0,593	0,993	-0,106	0,116	0,484	-1,272
0,593	0,658	-1,127	-1,407	-1,579	-1,616	1,458	1,262
0,862	-0,885	-0,142	-0,504	0,532	1,381	0,022	-0,281
0,235	-0,628	-0,023	-0,463	-0,899	-0,394	-0,538	1,707
-0,853	0,402	0,777	0,833	0,410	-0,349	-1,094	0,580

0,241	-0,957	-1,885	0,371	-2,830	-0,238	-0,627	0,561
0,022	0,525	-0,255	-0,702	0,953	-0,869	-1,108	-2,357
-0,853	-1,865	-0,423	-0,432	-0,973	-1,016	-1,728	1,956
-0,501	-0,273	0,857	-0,465	-1,691	0,417	0,524	-0,281
0,439	-0,035	-0,260	0,120	-0,558	0,056	-0,573	0,932

0,471	-1,029	-2,015	-0,594	-0,579	0,551	0,359	0,326
-0,310	0,479	-0,623	-1,047	-0,120	0,418	-0,094	1,114
0,610	2,709	-0,699	-1,347	0,191	0,074	1,501	1,068
-0,220	-0,057	0,481	0,996	0,071	0,524	0,031	0,772
0,738	-0,300	-0,586	-1,023	-3,001	0,479	0,402	0,226

0,884	-0,298	1,066	1,097	-1,752	-0,329	-1,256	0,318
0,457	1,064	0,736	-0,916	-0,291	0,085	1,701	-1,087
-0,798	0,162	-0,342	1,222	-0,933	0,130	0,674	0,899
-0,768	-0,129	-0,188	-1,153	-0,450	-0,244	0,072	1,028
0,023	-1,204	1,395	1,298	0,512	-0,882	0,490	-1,304

1,531	0,349	-0,958	-0,059	0,415	-1,084	-0,856	-0,063
-0,443	-0,292	0,248	-0,539	-1,382	0,318	-0,276	-1,110
1,409	-0,883	-0,095	0,229	0,129	0,367	0,379	-0,440
1,730	-0,056	-1,488	-0,078	-2,361	-0,992	1,468	0,131
-0,266	0,757	-0,361	0,194	-1,078	0,529	-1,805	-0,772

ЛИТЕРАТУРА

1. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976.
3. Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций /Под общей редакцией А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1965.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей (изд. 3-е). — М.: Наука, 1969.
5. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968.
7. Крамер Г. Математические методы статистики (перев. с англ., изд. 2-е). — М.: Мир, 1975.
8. Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: МГУ, 1963.
9. Рнордан Д. Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
10. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений (изд. 3-е). — М.: Наука, 1969.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (перев. с англ.). — М.: Мир, 1967, т.т. 1—2.
12. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1978.

*Борис Александрович Севастьянов
Владимир Павлович Чистяков
Андрей Михайлович Зубков*

СВОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

М., 1980 г., 224 стр. с илл.

Редактор *И. М. Овчинникова*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректоры *Л. Н. Боровина, Е. В. Сидоркина*

ИБ № 11493

Сдано в набор 04.03.80. Подписано к печати 12.08.80.
Бумага 84X108^{1/16}, тип. № 2. Литературная гарнитура. Высокая
печать. Условн. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 12,75. Тираж 70 000 экз.
Заказ № 1427. Цена книги 40 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано с матриц, в тип. № 2 изд-ва «Наука».
Москва, Шубинский пер., 10. Зак. 3602