Г. И. ИВЧЕНКО, Ю. И. МЕДВЕДЕВ, А. В. ЧИСТЯКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов высших
технических учебных заведений

Москва «Высшая школа» 1989

ББК 22.172
И 25
УДК 519.2

Рецензенты: кафедра прикладной математики Московского инженерно-строительного института (зав. кафедрой проф. В. В. Кучеренко) и проф. Э. А. Надарая (Тбилисский государственный университет)

Ивченко Г. И. и др.

И25 Сборник задач по математической статистике: Учеб. пособие для втузов/Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, А. В. Чистяков — М.: Высш. шк., 1989. — 255 с.: ил.

ISBN 5-06-000049-4

Задачник дополняет учебное пособие «Математическая статистика» (1984). Он охватывает все основные разделы современной статистической теории и предназначен для проведения практических занятий и лабораторных работ по курсу математической статистики, предусмотренному новой программой по высшей математике для втузов. Большинство задач снабжены решениями или методическими указаниями, ко всем задачам даны ответы.

И $\frac{1602090000(43090000000)-524}{001(01)-89}$ 89—89

ББК 22.172
517.8

ISBN 5-06-000049-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач охватывает все традиционные разделы современной статистической теории. Его содержание соответствует курсу математической статистики, предусмотренному новой программой по высшей математике для инженерных специальностей высших технических учебных заведений. Часть задач повышенной сложности может быть использована в качестве заданий для учебно-исследовательских и курсовых работ.

Задачи в основном носят аналитический характер: в них требуется показать справедливость того или иного утверждения или провести исследование. Они непосредственно дополняют или раскрывают принципиальные положения математической статистики.

В сборник включены задачи, связанные с моделированием случайных величин на ЭВМ и получением исходного для статистической обработки материала. Фактически на основе любой «теоретической» задачи, в которой речь идет о статистическом алгоритме анализа данных, можно поставить, задавая конкретные значения параметров модели (причем возможно неограниченное число вариантов), соответствующую «практическую» задачу, формулируя в качестве предварительного этапа задание смоделировать исходные данные, используя или готовые таблицы случайных чисел, или получаемые с помощью специально составленных программ. В дальнейшем, при обработке этих «экспериментальных» данных с помощью соответствующего теоретического алгоритма, имеется возможность сравнить предсказание теории с известными исходными параметрами, при которых моделировалась выборка.

По степени трудности задачи, помещенные в сборнике, не одинаковы. Для решения некоторых из них могут потребоваться значительные усилия, такие задачи отмечены звездочкой. Большинство задач, решение которых не сводится к применению стандартных алгоритмов, снабжено подробными решениями, даны методические указания.

В начале каждой главы приведены основные понятия, теоретические положения и формулы из соответствующего раздела теории, которые непосредственно используются при решении помещенных в данную главу задач. В конце книги имеются статистические таблицы, необходимые для получения числовых результатов. Указатель распределений облегчит поиск задач, в которых рассматриваются различные аспекты исследования одной и той же модели.

При составлении задачника использованы отечественные и зарубежные источники (учебники, задачники, журнальные статьи и др.).

Авторы будут признательны всем, кто поделится своими соображениями по улучшению содержания книги. Замечания можно направлять по адресу: Москва, Ж-28, Б. Вузовский пер., 3/12, МИЭМ, кафедра теории вероятностей и математической статистики.

Авторы

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ И ЗАДАЧИ

Глава 1
ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ, ВЫБОРОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Статистические данные, являющиеся исходным «материалом» в задачах математической статистики, обычно являются результатом наблюдения некоторой конечной совокупности случайных величин $\boldsymbol{X}=(X_1, ..., X_n)$, характеризующей исход изучаемого эксперимента. В таких случаях говорят, что эксперимент состоит в проведении n испытаний, в которых результат i-го испытания описывается случайной величиной X_i, $i=1, ..., n$. Совокупность наблюдаемых случайных величин $\boldsymbol{X}=(X_1, ..., X_n)$ называется *выборкой*, сами величины X_i, $i=1, ..., n$, — *элементами выборки*, а их число n — ее *объемом*. Множество $\mathbf{X}=\{\boldsymbol{x}=(x_1, ..., x_n)\}$ всех возможных реализаций выборки $\boldsymbol{X}=(X_1, ..., X_n)$ называется *выборочным пространством*. Когда истинное распределение случайной величины $\boldsymbol{X}$ (функция распределения $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, ..., x_n)=\mathbf{P}(X_1\leqslant x_1, ..., X_n\leqslant x_n))$ неизвестно (полностью или хотя бы частично) и указан лишь класс (семейство) допустимых распределений $\mathbf{F}=\{F(x_1, ..., x_n)\}$, которому принадлежит распределение $F_{\boldsymbol{X}}$ выборки $\boldsymbol{X}$, то говорят о *статистической модели* $(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ (или, короче, о *модели* $\mathbf{F}$). Математическая статистика решает (в рамках заданной модели $\mathbf{F}$) задачи уточнения (выявления) различных свойств истинного распределения $F_{\boldsymbol{X}}$ по результатам проводимых наблюдений (по выборке $\boldsymbol{X}$).

Часто рассматриваются эксперименты, в которых проводятся повторные независимые наблюдения над некоторой случайной величиной ξ (ее распределение обозначается символом $\mathbf{L}(\xi)$). В таких случаях выборка $\boldsymbol{X}=(X_1, ..., X_n)$ представляет собой совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathbf{L}(X_i)=\mathbf{L}(\xi)$, $i=1, ..., n$; говорят также для краткости, что $\boldsymbol{X}=(X_1, ..., X_n)$ *есть выборка из распределения* $\mathbf{L}(\xi)$. Статистическая модель для повторных независимых наблюдений обозначается кратко в виде $\mathbf{F}=$

$=\{F_\xi\}$, т. е. указывается лишь класс допустимых функций распределения исходной случайной величины ξ.

Если $\mathbf{F}=\{F(x;\theta),\theta\in\Theta\}$, т. е. допустимые функции распределения задаются с точностью до значений некоторого параметра θ, то такая модель называется *параметрической*, а множество Θ возможных значений параметра θ — *параметрическим множеством*.

В дальнейшем рассматриваются только модели абсолютно непрерывного или дискретного типа и для единообразия используется обозначение $f_\xi(x)=f(x)$ (для параметрических моделей $f(x;\theta)$) как для плотности распределения случайной величины ξ в случае, когда распределение F_ξ абсолютно непрерывно, так и для вероятности $\mathbf{P}(\xi=x)$ в дискретном случае.

В случае параметрической модели распределение вероятностей на выборочном пространстве $\mathbf{X}$, отвечающее параметру θ, обозначается символом $\mathbf{P}_\theta$. Аналогично, $\mathbf{E}_\theta T(\boldsymbol{X})$, $\mathbf{D}_\theta T(\boldsymbol{X})$, ... — обозначения соответствующих моментов заданной функции $T(\boldsymbol{X})$ от выборки $\boldsymbol{X}$ в случае, когда $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta)$ — функция распределения выборки.

2. Во многих задачах математической статистики рассматриваются последовательности случайных величин $\{\eta_n\}$, сходящиеся в том или ином смысле к некоторому пределу η (случайной величине или константе), когда $n\to\infty$. В дальнейшем используются два вида сходимости: сходимость по вероятности ($\eta_n\xrightarrow{\mathbf{P}}\eta\Leftrightarrow\mathbf{P}(|\eta_n-\eta|>\varepsilon)\to0\ \forall\varepsilon>0$) и сходимость по распределению, или слабая сходимость ($\mathbf{L}(\eta_n)\to\mathbf{L}(\eta)$ или $\eta_n\to\eta\overset{\mathbf{L}}{\Leftrightarrow}F_{\eta_n}(x)\to F_\eta(x)\ \forall x\in C(F_\eta)$), где $C(F)$ — множество точек непрерывности функции $F(x)$. При этом из $\mathbf{P}$-сходимости следует $\mathbf{L}$-сходимость. Многие результаты о $\mathbf{P}$-сходимости различных выборочных характеристик являются следствием следующего общего утверждения о сходимости функций от случайных величин [1, с. 20]:

если $\eta_{ni}\xrightarrow{\mathbf{P}}c_i=\mathrm{const}$, $i=1,\dots,r$, *и* $\varphi(x_1,\dots,x_r)$ — *произвольная непрерывная в некоторой окрестности точки* $(c_1,\dots,c_r)$ *функция, то* $\varphi(\eta_{n1},\dots,\eta_{nr})\xrightarrow{\mathbf{P}}\varphi(c_1,\dots,c_r)$.

3. Если $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_n)$ — выборка из некоторого распределения $\mathbf{L}(\xi)$, то $F_\xi(x)=F(x)$ называют *теоретической функцией распределения*, а

$$F_n(x)=\frac{\mu_n(x)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e(x-X_i) \qquad (1.1)$$

— *эмпирической функцией распределения* (здесь $\mu_n(x)$ — число элементов выборки, удовлетворяющих условию $X_j \leqslant x$, а $e(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$ — *функция Хевисайда*).

По теореме Бернулли, $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x) \forall x$, когда $n \to \infty$, т. е. при больших n значение $F_n(x)$ может служить оценкой для $F(x)$. Более глубокое обоснование для оценивания теоретической функции распределения с помощью эмпирической функции распределения дают теоремы Гливенко и Колмогорова об асимптотических свойствах $F_n(x)$ при больших n [1, с. 15].

Если случайная величина ξ дискретна и принимает значения a_1, a_2, ..., то более наглядное представление о законе распределения ξ дадут частоты h_r/n, где h_r — число членов выборки, равных a_r: в этом случае

$$h_r/n \xrightarrow{P} \mathbf{P}(\xi = a_r), \; r = 1, 2, ..., \text{ когда } n \to \infty.$$

Для величин ξ, имеющих плотность $f_\xi(x) = f(x)$, можно рассмотреть частоты h_k/n событий $\{\xi \in \Delta_k\}$, где $\{\Delta_k\}$ — система непересекающихся интервалов, образующих разбиение области возможных значений ξ. В этом случае при $n \to \infty$

$$\frac{h_k}{n} \xrightarrow{P} \mathbf{P}(\xi \in \Delta_k) = \int_{\Delta_k} f(x)dx,$$

и если Δ_k малы, то по частотам h_k/n можно построить два «графика», напоминающие график функции $f(x)$ и называемые *гистограммой* и *полигоном частот* соответственно [1, с. 16], которые могут дать некоторое предварительное представление о законе распределения ξ.

Каждой теоретической характеристике $g = \int g(x)dF(x)$ соответствует ее *статистический аналог*

$$G = G(\mathbf{X}) = \int g(x)dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i),$$

называемый *эмпирической* или *выборочной характеристикой*. В частности, статистическими аналогами для теоретических моментов являются выборочные моменты. *Выборочным моментом k-го порядка* называют величину

$$A_{nk} = A_{nk}(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

При $k = 1$ величину A_{n1} называют *выборочным средним* и обозначают $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Выборочным центральным моментом k-го *порядка* называют величину

$$M_{nk} = M_{nk}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k .$$

При $k=2$ величину M_{n2} называют *выборочной дисперсией* и обозначают символом $S^2 = S^2(\boldsymbol{X})$:

$$S^2(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 ;$$

используется также обозначение $S'^2 = \frac{n}{n-1}S^2$. Аналогично вводят выборочные абсолютные моменты, выборочные семиинварианты и т. д.

Другим примером выборочных характеристик являются выборочные квантили. При этом p-квантиль для любой функции распределения $F(x)$ определяется как $\varsigma_p = \inf\{x : F(x) \geqslant p\}$, $0 < p < 1$, а *выборочная* p-квантиль $Z_{n,p}$ есть p-квантиль эмпирической функции распределения $F_n(x)$. Если расположить элементы выборки $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ в порядке возрастания их величин, то получится последовательность новых случайных величин

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)} ,$$

называемая *вариационным рядом выборки;* при этом $X_{(k)}$ — k-*я порядковая статистика*, $k = 1, \ldots, n$, а $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ — *экстремальные* (соответственно *минимальное* и *максимальное) значения выборки.* Тогда $Z_{n,p}$ выражается через порядковые статистики:

$$Z_{n,p} = \begin{cases} X_{([np]+1)} & \text{при } np \text{ дробном,} \\ X_{(np)} & \text{при } np \text{ целом.} \end{cases}$$

В частности, $Z_{n,1/2}$ — *выборочная медиана.*

Любая выборочная характеристика, имеющая вид непрерывной функции от конечного числа величин A_{nk} (в частности, сами выборочные моменты, а также выборочные центральные моменты M_{nk}), сходится по вероятности при $n \to \infty$ к соответствующей теоретической характеристике и может служить *оценкой* последней, когда число наблюдений n достаточно велико. Аналогично, $Z_{n,p} \xrightarrow{P} \varsigma_p$, если только распределение $\boldsymbol{L}(\xi)$ обладает гладкой плотностью.

4. В выборочной теории изучаются различные свойства распределений выборочных характеристик как в точной, так и асимптотической (т. е. при большом объеме выборки) постановках. При исследовании асимптотического (при $n \to \infty$) поведения соответствующих распределений широко используются предельные теоремы теории вероятностей и прежде всего две основные из них: закон больших чисел и центральная предельная теорема. Напомним их простейшие формулировки [2, с. 150—154].

Закон больших чисел. *Если случайные величины* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *независимы, одинаково распределены и имеют математическое ожидание* $\mathbf{E}\eta_i = a$, *то*

$$\frac{1}{n}(\eta_1 + \ldots + \eta_n) \xrightarrow{P} a \text{ при } n \to \infty.$$

Центральная предельная теорема: *если дополнительно к предыдущему существует* $\mathrm{D}\eta_i = \sigma^2 > 0$, *то при* $n \to \infty$

$$\boldsymbol{L}((\eta_1 + \ldots + \eta_n - na)/(\sqrt{n}\sigma)) \to \boldsymbol{N}(0, 1).$$

Многомерный вариант центральной предельной теоремы имеет следующий вид: *пусть r-мерные случайные векторы* $\boldsymbol{\eta}_n = (\eta_{n1}, \ldots, n_{nr})$, $n = 1, 2, \ldots$, *независимы, одинаково распределены и имеют конечные моменты*

$$a_i = \mathbf{E}\eta_{1i}, \; b_{ij} = \operatorname{cov}(\eta_{1i}, \eta_{1j}), \; i, j = 1, \ldots, r.$$

Тогда

$$\boldsymbol{L}(\varsigma_{n1}, \ldots, \varsigma_{nr}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \boldsymbol{N}(\mathbf{O}, \mathbf{B} = \|b_{ij}\|_1^r),$$

где

$$\varsigma_{ni} = (\eta_{1i} + \ldots + \eta_{ni} - na_i)/\sqrt{n}, \; i = 1, \ldots, r.$$

(Определение многомерного нормального распределения см. ниже в п. 6).

Приведем некоторые утверждения о сходимости функций от случайных величин, которые понадобятся в дальнейшем при решении задач.

1°. *Если* $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ *и функция* φ *непрерывна, то* $\varphi(\eta_n) \xrightarrow{P, L} \varphi(\eta)$.

2°. *Пусть* $\{\eta_n, \varsigma_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — *последовательность пар случайных величин. Тогда*

а) $\eta_n - \varsigma_n \xrightarrow{P} 0$, $\varsigma_n \xrightarrow{P, L} \varsigma \Rightarrow \eta_n \xrightarrow{P, L} \varsigma$;

б) $\boldsymbol{L}(\eta_n) \to \boldsymbol{L}(\eta)$, $\varsigma_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \eta_n\varsigma_n \xrightarrow{P} 0$;

в) $\boldsymbol{L}(\eta_n) \to \boldsymbol{L}(\eta)$, $\varsigma_n \xrightarrow{\mathbf{P}} c = \mathrm{const} \Rightarrow \boldsymbol{L}(\eta_n + \varsigma_n) \to \boldsymbol{L}(\eta + c)$, $\boldsymbol{L}(\eta_n\varsigma_n) \to \boldsymbol{L}(c\eta)$, $\boldsymbol{L}(\eta_n/\varsigma_n) \to \boldsymbol{L}(\eta/c)$ *при* $c \neq 0$;

г) $\eta_n - \varsigma_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, $\boldsymbol{L}(\varsigma_n) \to \boldsymbol{L}(\varsigma)$, *функция* φ *непрерывна* $\Rightarrow \varphi(\eta_n) - \varphi(\varsigma_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

3°. *Пусть* $T_n = T_n(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, — *оценка скалярного параметра* θ *в модели* $\boldsymbol{F} = \{F(x;\theta), \theta \in \Theta\}$ *и такая, что* $\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{n}(T_n - \theta)) \to \boldsymbol{N}(0, \sigma^2(\theta))$ *при* $n \to \infty$ *и всех* $\theta \in \Theta$. *Пусть, далее, функция* φ *дифференцируема и* $\varphi' \neq 0$. *Тогда*

$$\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{n}[\varphi(T_n) - \varphi(\theta)]) \to \boldsymbol{N}(0, [\varphi'(\theta)]^2\sigma^2(\theta)).$$

Кроме того, если функции φ' *и* σ *непрерывны, то*

$$\boldsymbol{L}_\theta\left(\sqrt{n}\frac{\varphi(T_n) - \varphi(\theta)}{\varphi'(T_n)\sigma(T_n)}\right) \to \boldsymbol{N}(0, 1).$$

Обобщение утверждения 3° на случай векторного параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ имеет следующий вид.

4°. *Пусть* $\boldsymbol{T}_n = (T_{n1}, \ldots, T_{nr})$ — *оценка параметра* $\boldsymbol{\theta}$, *удовлетворяющая условию* $\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{n}(\boldsymbol{T}_n - \boldsymbol{\theta})) \to \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \Sigma(\boldsymbol{\theta}))$ *при* $n \to \infty$ *и всех* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$. *Тогда для любой дифференцируемой функции* φ *от* r *переменных*

$$\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{n}(\varphi(\boldsymbol{T}_n) - \varphi(\boldsymbol{\theta}))) \to \boldsymbol{N}(0, v^2(\boldsymbol{\theta}))$$

при условии, что $v(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$, *где* $v^2(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{b}'(\boldsymbol{\theta})\Sigma(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_r}\right)$. *Если, кроме того, функция* φ *непрерывно дифференцируема и все элементы матрицы вторых элементов* $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ *непрерывны по* $\boldsymbol{\theta}$, *то*

$$\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{n}[\varphi(\boldsymbol{T}_n) - \varphi(\boldsymbol{\theta})]/v(\boldsymbol{T}_n)) \to \boldsymbol{N}(0, 1).$$

На основании центральной предельной теоремы выборочный момент A_{nk} асимптотически нормален с параметрами $\alpha_k = \mathbf{E}\xi^k$ и $\frac{1}{n}\mathbf{D}\xi^k = (\alpha_{2k} - \alpha_k^2)/n$, что кратко записывается так: $\boldsymbol{L}(A_{nk}) \sim \boldsymbol{N}(\alpha_k, (\alpha_{2k} - \alpha_k^2)/n)$. Асимптотически нормальным является и совместное распределение любого конечного числа выборочных моментов A_{nk}, а также (при некоторых дополнительных условиях) распределение любой дифференцируемой функции от конечного числа моментов A_{nk}. В частности, асимптотически нормальными являются и центральные выборочные моменты M_{nk}.

Исследование асимптотического поведения распределений порядковых статистик $X_{(k)}$ при $n \to \infty$ проводится методом прямого анализа точных распределений величин $X_{(k)}$. При этом *средние члены* вариационного ряда (т. е. когда номер $k = k(n)$ удовлетворяет условию $\frac{k}{n} \to p$, $0 < p < 1$) для распределений $\boldsymbol{L}(\xi)$, обладающих гладкой плотностью, оказываются асимптотически нормальными; для *крайних* же порядковых статистик (т. е. для $X_{(r)}$, $X_{(n-s+1)}$ при фиксированных $r,s \geqslant 1$) класс предельных распределений исчерпывается распределениями трех типов, отличных от нормального [1, с. 26].

5. Напомним некоторые формулы из теории вероятностей, которые часто используются для нахождения явного вида распределений при преобразованиях случайных величин. Пусть вектор $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in S \subseteq R^k$, и $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, \boldsymbol{h}_k) : S \to R^k$ — произвольное взаимно однозначное и гладкое (т. е. все частные производные $\partial h_i(\boldsymbol{x})/\partial x_j$ непрерывны) преобразование, якобиан которого

$$J(\boldsymbol{x}) = \det \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial h_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1} & \ldots & \dfrac{\partial h_k(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{x}_k} & \ldots & \dfrac{\partial h_k(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{x}_k} \end{matrix} \right\|$$

не обращается на S в нуль. Тогда плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{Y} = \mathrm{h}(\boldsymbol{X}) = (h_1(\boldsymbol{X}), \ldots, h_k(\boldsymbol{X}))$ имеет следующий вид:

$$\varphi(\boldsymbol{y}) = \mathrm{f}(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y}))/|J(\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{y}))|, \ \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathrm{h}(S), \quad (1.2)$$

где $\boldsymbol{h}^{-1}$ — обратное к $\boldsymbol{h}$ преобразование: $\boldsymbol{h}^{-1}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) \equiv \boldsymbol{x}$. Выделим два часто встречающихся частных случая. Если $k = 1$, то речь идет о преобразовании случайной величины: $Y = h(X)$, где $h(x)$ — взаимно однозначная гладкая функция с не обращающейся в нуль производной. В этом случае плотность распределения Y имеет вид

$$\varphi(y) = f(h^{-1}(y))/|h'(h^{-1}(y))|. \quad (1.3)$$

Если речь идет о линейном преобразовании: $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + b$ $\det \mathbf{A} \equiv a \neq 0$, то плотность распределения $\boldsymbol{Y}$ равна $\varphi(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}))/|a|$.

В ряде статистических задач приходится иметь дело с частным $\varsigma = \xi/\eta$ двух независимых случайных величин, плотности распределения которых f_ξ и f_η известны. Плотность распределения величины ς может быть вычислена по формуле

$$f_\varsigma(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(xy) f_\eta(x)|x|\,dx. \tag{1.4}$$

6. Для удобства дальнейшего изложения приведем наиболее часто встречающиеся в приложениях распределения $\boldsymbol{L}(\xi)$ и некоторые их свойства.

1) *Нормальное распределение* $\boldsymbol{N}(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, имеет плотность $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$; при этом $\mu = \mathrm{E}\xi$, $\sigma^2 = \mathrm{D}\xi$, а центральные моменты $\mu_k = \mathrm{E}(\xi - \mu)^k$ равны соответственно $\mu_{2r+1} = 0$, $\mu_{2r} = \frac{(2r)!}{r!2^r}\sigma^{2r} = 1 \cdot 3 \dots (2r-1)\sigma^{2r}$. Распределение $\mathrm{N}(0, 1)$ называют *стандартным нормальным*, его функцию распределения обозначают $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$; уравнение $\Phi(u_p) = p$, $p \in (0, 1)$, однозначно определяет p-квантиль u_p, при этом $u_{1-p} = -u_p$; используется также обозначение $c_\gamma = u_{(1+\gamma)/2}$. Случайный вектор $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ имеет (k-мерное) нормальное распределение $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k), \sum = \|\sigma_{ij}\|_1^k)$, если его характеристическая функция имеет вид[1]

$$\mathbf{E}e^{it'\boldsymbol{\xi}} = \exp\left\{it'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}' \sum \boldsymbol{t}\right\}, \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_k);$$

при этом $\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}) \equiv (\mathbf{E}\xi_1, \dots, \mathbf{E}\xi_k) = \boldsymbol{\mu}$,

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})' \equiv \|\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)\|_1^k = \|\sigma_{ij}\|_1^k = \sum.$$

Если $\left|\sum\right| \neq 0$, то распределение $\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \sum\right)$ называется *невырожденным (собственным)* и имеет плотность

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \left|\sum\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})' \sum^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right\},$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_k) \in R^k.$$

Важнейшим свойством нормального распределения явля-

---

[1] При матричных преобразованиях векторы понимаются как вектор-столбцы, ʹ означает транспонирование.

ется то, что при линейном преобразовании $\eta = A\xi$(A — заданная матрица) снова получается нормальный случайный вектор, при этом $L(\eta) = N(A\mu, A\Sigma A')$. В частности, если $\eta = U'\xi$, где U — ортогональная матрица, приводящая Σ к диагональному виду $U'\Sigma U = D = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{Vmatrix}$ (λ_j, $j = 1, \ldots, k$ — собственные числа Σ), то $L(\eta) = N(U'\mu, D)$, т. е. компоненты вектора η некоррелированы, следовательно, и независимы. Полагая $Z = D^{-1/2}U'(\xi - \mu)$ (если все $\lambda_j > 0$), получим $L(Z) = N(0, E_k)$, где E_k — единичная матрица размера k. Таким образом, всегда можно указать линейное преобразование, переводящее невырожденный нормальный вектор в вектор с независимыми стандартными нормальными компонентами.

В статистических приложениях, где имеют место выборки из нормального распределения, важную роль играют следующие утверждения [1, с. 29—31]:

1°. *Если $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $N(\mu, \sigma^2)$ и $t = BX, Q_i = X'A_iX$, $i = 1, 2$ — соответственно линейная и квадратичные функции от X, то для независимости t и Q_i достаточно выполнения условия $BA_i = 0$, а для независимости Q_1 и Q_2 — условия $A_1A_2 = A_2A_1 = 0$.*

2°. *Пусть $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ и $A_1^2 = A_1$ (матрица A_1 — идемпотентная); тогда $L(Q_1) = \chi^2(r)$, где $r = \operatorname{rang} A_1 = \operatorname{tr} A_1$ — след матрицы A_1.*

3°. **Теорема Фишера.** *Выборочные среднее $\bar{X}$ и дисперсия S^2 независимы и при этом $L(\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma) = N(0, 1)$, а $L(nS^2/\sigma^2) = \chi^2(n-1)$ (определение хи-квадрат распределения см. ниже).*

2) *Гамма-распределение* $\Gamma(a, \lambda)$, a, $\lambda > 0$, задается плотностью $\frac{x^{\lambda-1}e^{-x/a}}{\Gamma(\lambda)a^\lambda}$, $x > 0$ (здесь $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, $\lambda > 0$ — *гамма-функция*), и имеет моменты $\mathbf{E}\xi^b = a^b\Gamma(\lambda + b)/\Gamma(\lambda)$, $b > -\lambda$. В частности, $\mathbf{E}\xi = a\lambda$, $\mathbf{D}\xi = a^2\lambda$.

Частный случай $\Gamma(a, 1)$ называют *экспоненциальным или показательным распределением*. Другой частный случай $\Gamma(2, n/2)$ называют *распределением хи-квадрат с n степенями свободы* и обозначают $\chi^2(n)$; при этом $\chi^2(n) = L(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)$, где слагаемые независимы и $L(\xi_i) = N(0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$. Для p-квантили распределения $\chi^2(n)$ используют обозначение $\chi^2_{p,n}$.

для его p-квантили используется обозначение $t_{p,n}$.

8) *Распределение Снедекора с n_1 и n_2 степенями свободы* $S(n_1, n_2) \equiv \mathbf{L}\left(F_{n_1, n_2} \equiv \frac{\chi^2_{n_1}}{n_1} : \frac{\chi^2_{n_2}}{n_2}\right)$, где случайные величины $\chi^2_{n_1}$ и $\chi^2_{n_2}$ независимы и при этом $\mathbf{L}(\chi^2_{n_i}) = \chi^2(n_i)$, $i = 1, 2$. Плотность этого распределения имеет вид

$$f_{n_1, n_2}(x) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \frac{x^{n_1/2-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, x > 0;$$

его p-квантиль обозначается F_{p, n_1, n_2}, при этом $F_{1-p, n_1, n_2} = 1/F_{p, n_2, n_1}$.

9) *Биномиальное распределение* $Bi(n, p)$ — это распределение числа «успехов» в n независимых испытаниях с двумя исходами («успех» — «неуспех») и неизменной вероятностью «успеха» $p \in (0, 1)$ (схема Бернулли). Здесь

$$\mathbf{P}(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n\,(q = 1 - p),$$
$$\mathbf{E}\xi = np,\ \mathbf{D}\xi = npq.$$

При $n = 1$ имеем *распределение Бернулли* $Bi(1, p)$.

10) *Полиномиальное распределение* $M(n; p_1, \ldots, p_N)$, $p_1 + \cdots + p_N = 1$ — это распределение случайного вектора $\mathbf{v} = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ с целочисленными неотрицательными компонентами, удовлетворяющими условию $\nu_1 + \cdots + \nu_N = n$, которое имеет вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{v} = \mathbf{h}) = \frac{n!}{h_1! \ldots h_N!} p_1^{h_1} \ldots p_N^{h_N},\ \mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_N),$$
$$h_1 + \ldots + h_N = n.$$

Здесь

$$\mathbf{E}\nu_i = np_i,\ \operatorname{cov}(\nu_i, \nu_j) = \begin{cases} np_i(1-p_i) & \text{при } i = j, \\ -np_ip_j & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Если произведено n независимых испытаний с N возможными исходами, вероятности которых неизменны и равны $p_1, \ldots, p_N$ соответственно, то, обозначив через ν_i число реализаций i-го исхода, $i = 1, \ldots, N$, будем иметь, что $\mathbf{L}(\mathbf{v}) = M(n; p_1, \ldots, p_N)$. Если $N = 2$, то $M(n; p, 1 - p) = Bi(n, p)$, т. е. полиномиальное распределение сводится к биномиальному.

11) *Распределение Пуассона* $\Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$, задается вероятностями $\mathbf{P}(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; при

3) *Распределение Вейбулла* $W(a, \alpha, b)$ зависит в общем случае от трех параметров: *параметра положения (сдвига)* $a \in R^1$, *параметра формы* $\alpha > 0$ и *параметра масштаба* $b > 0$ и задается функцией распределения

$$F_\xi(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^\alpha\right\}, \ x \geqslant a.$$

Здесь

$$\mathbf{E}\xi = a + b\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \ \mathbf{D}\xi = b^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Частный случай $W(a, 1, b)$ известен как *двухпараметрическое экспоненциальное распределение, а* $W(a, 2, b)$ — как *распределение Релея.*

4) *Бета-распределение* $\beta(a, b)$, $a, b > 0$, задается плотностью $x^{a-1}(1-x)^{b-1}/\mathrm{B}(a, b)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, где $\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ — *бета-функция.* Здесь $\mathbf{E}\xi = \frac{a}{a+b}$, $-\xi = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

5) *Равномерное распределение* $R(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, имеет постоянную плотность $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leqslant x \leqslant b$. Здесь

$$\boldsymbol{L}\left(\frac{\xi - a}{b - a}\right) = R(0, 1) = \beta(1, 1), \ \mathbf{E}\xi = \frac{a+b}{2}, \ \mathbf{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6) *Распределение Коши* $K(a)$, $-\infty < a < \infty$, задается плотностью $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-a)^2}$, $-\infty < x < \infty$. Для этого распределения не существуют моменты, в том числе и математическое ожидание, постоянная a совпадает с медианой $\zeta_{1/2}$. Распределение Коши обладает следующим интересным свойством: *если случайные величины* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *независимы и* $\boldsymbol{L}(\xi_i) = K(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$, то $\boldsymbol{L}(\bar{\xi}) = K(\bar{a})$, где черта означает *среднее арифметическое.*

7) *Распределение Стьюдента с n степенями свободы* $S(n) \equiv \boldsymbol{L}(t_n \equiv \eta/\sqrt{\chi_n^2/n})$, где случайные величины η и χ_n^2 независимы и при этом

$$\boldsymbol{L}(\eta) = \boldsymbol{N}(0, 1), \ \boldsymbol{L}(\chi_n^2) = \chi^2(n).$$

Это распределение имеет плотность

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \ -\infty < x < \infty;$$

этом $\lambda = \mathbf{E}\xi = \mathbf{D}\xi$ и вообще $\mathbf{E}(\xi)_j = \lambda^j$, где $(a)_j = a(a-1)\ldots(a-j+1)$, $j \geqslant 1$, $(a)_0 = 1$.

12) *Отрицательное биномиальное распределение* $\overline{Bi}(r, p)$, $p \in (0, 1)$, $r = 1, 2, \ldots$, задается вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi = k) = C^k_{r+k-1} p^k q^r,\ k = 0, 1, 2, \ldots\ (q = 1 - p).$$

Это распределение числа «успехов», предшествующих r-му «неуспеху» в бесконечной последовательности испытаний Бернулли. Здесь $\mathbf{E}\xi = rp/q$, $\mathbf{D}\xi = rp/q^2$.

В частном случае $r = 1$ распределение $\overline{Bi}(1, p)$ называется *геометрическим*.

13) *Гипергеометрическое распределение* $H(r, N, n)$ задается вероятностями

$$\mathbf{P}(\xi = k) = C^k_r C^{n-k}_{N-r} / C^n_N,\ \max(0,\ n + r - N) \leqslant k \leqslant \min(n,\ r).$$

Если в урне содержатся N шаров, r из которых красные и $N - r$ — черные, и из урны извлекается случайная выборка без возвращения объема n, то случайная величина ξ — число красных шаров в выборке — имеет указанное распределение. Здесь $\mathbf{E}\xi = \frac{nr}{N}$, $\mathbf{D}\xi = \frac{nr}{N}(1 - r/N)\frac{N-n}{N-1}$ и вообще $\mathbf{E}(\xi)_j = \frac{(n)_j (r)_j}{(N)_j}$.

Дальнейшие свойства этих распределений рассмотрены в задачах 1.39—1.55.

Если статистическая модель $\boldsymbol{F} = \{F_\xi\}$ задается распределением какого-нибудь стандартного типа при неизвестных определяющих его параметрах θ (или некоторых из них, если параметров несколько), то модель имеет такое же название. Например, говорят о нормальной модели $\boldsymbol{N}(\theta, \sigma^2)$, когда среднее неизвестно, о модели $\boldsymbol{N}(\mu, \theta^2)$, когда неизвестна лишь дисперсия, об общей нормальной модели $\boldsymbol{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, когда оба параметра неизвестны, о пуассоновской модели $\Pi(\theta)$ и т. д.

7. Для изучения и иллюстрации эффективности различных статистических процедур удобно использовать *статистическое моделирование,* реализуемое с помощью последовательности *псевдослучайных чисел.* Псевдослучайными числами называют последовательности чисел, получаемые по некоторому алгоритму и обладающие свойствами последовательности случайных чисел. Методы получения псевдослучайных чисел рассматриваются в учебной и монографической литературе [9, 10].

Обычно для получения реализации последовательности независимых случайных чисел с произвольным распределением используют реализацию последовательности независимых случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0, 1].

Реализацию равномерно распределенных случайных чисел

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \ldots \tag{1.5}$$

наиболее часто получают линейным конгруэнтным методом [9]:

$$U_n = z_n/m, \tag{1.6}$$

где z_n — последовательность, определяемая рекуррентным соотношением

$$z_{n+1} = az_n + c \pmod m,$$

где z_0 — начальное значение, a, c, m — положительные целые числа.

Последовательность (1.5), определяемую формулой (1.6), строго говоря, нельзя рассматривать как реализацию независимой последовательности равномерно распределенных чисел, так как она является либо периодической, либо содержит период с подходом. При этом длина периода T не превышает m, так как не превышает m число различных значений z_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, что бессмысленно использование таких последовательностей длиной, превосходящей длину подхода и периода. Однако при специальном выборе констант a, c, m и z_0 последовательность (1.5) имеет максимально возможный период m.

Условия, при которых последовательность имеет максимальный период, приводятся в следующей теореме [9].

Теорема. *Длина периода линейной конгруэнтной последовательности* (1.5) *равна m тогда и только тогда, когда:*

1) *c и m — взаимно простые числа;*

2) *$b = a - 1$ кратно p для любого простого p, являющегося делителем m;*

3) *b кратно 4, если m кратно 4.*

В приложении приведены две программы датчиков равномерных псевдослучайных чисел на автокодах машин ЕС и БЭСМ-6. В датчике $D1$ были использованы постоянные $a = 843314861$, $c = 453816693$, $m = 2^{31}$, а в $D2$ — постоянные $a = 431777206549$, $c = 232354146751$, $m = 2^{41}$. Обе программы вызываются оператором $Y = RAN(K)$, где K — произвольное целое число из отрезков $[1, 2^{31} - 1]$ и $[1, 2^{41} - 1]$ соответственно.

Наличие полного периода, однако, еще не обеспечивает хороших свойств псевдослучайных чисел. Даже в датчиках, рекомендованных для широкого использования, нередко обнаруживаются существенные недостатки.

Проверка «качества» последовательностей, вырабатываемых датчиками, проводится с помощью различных статистических критериев [8]. При этом обычно ограничиваются проверкой равномерной распределенности s-цепочек ($s = 1, 2, \dots$) последовательности (1.5) и далее используют эту последовательность для решения модельных задач.

Приведем несколько примеров моделирования выборок. Для получения n равномерно распределенных чисел $X_1, X_2, \dots, X_n$ можно воспользоваться программой

```
  DIMENSION A(1∅∅)
  K = S
  DO1I = 1, 1∅∅
1 A(I) = RAN(K)
  STOP
  END,
```

где оператор $Y = RAN(K)$ вызывает подпрограмму датчика случайных чисел.

Результаты вычислений при $n = 100$ приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1 (100 равномерно распределенных случайных чисел)

0,168	0,273	0,878	0,983	0,588	0,693	0,298	0,403	0,008	0,113
718	823	428	533	138	243	848	953	558	663
549	754	459	664	369	574	279	484	189	394
099	304	009	214	919	124	829	034	739	944
550	855	660	965	770	075	880	185	990	295
100	405	210	515	320	625	430	735	540	845
571	976	881	286	191	596	501	906	811	216
121	526	431	836	741	146	051	456	361	766
012	517	522	027	032	537	542	047	052	557
562	067	072	577	562	087	092	597	602	107

Воспользовавшись программой «ВР» (см. Приложение), получаем вариационный ряд выборки, приведенной в табл. 1.1. На рис. 1 приведен график эмпирической функции распределения $F_n(x)$, вычисленной по этому вариационному ряду.

Воспользуемся теперь программой «НЧ» (см. Приложение) для получения n нормально распределенных

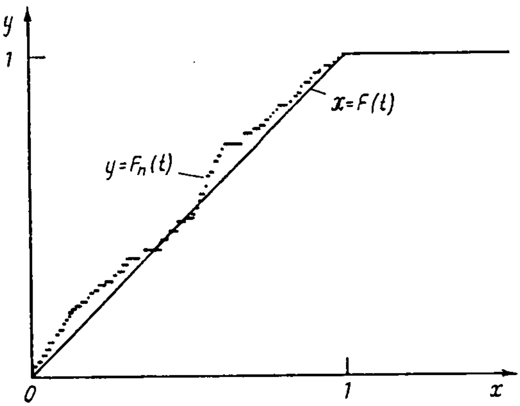

Рис. 1

случайных чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с параметрами $\mu = \mathbf{E}X_i$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_i$. На рис. 2—4 приведены три гистограммы при $\mu = 1$, $\sigma^2 = 4$ и $n = 10, 100, 1000$.

Разобьем ось $0x$ на интервалы длины h, равной при $n = 10, 100, 1000$ соответственно 3; 1,5; 0,75. Точка $x = 1$ при любом n являлась граничной точкой интервалов.

В табл. 1.2 приведены значения оценок

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

параметров $\mu = 1$ и $\sigma^2 = 4$.

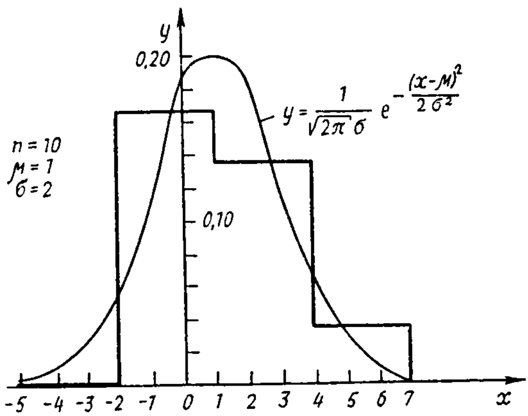

Рис. 2

Таблица 1.2.

n	10	100	1000
$\overline{X}$	0,676	1,016	0,988
S'^2	3,901	4,315	4,306

1.1. Предложить способ моделирования последовательности испытаний Бернулли $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, где $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0) = p$.

Указание. Использовать последовательность псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$.

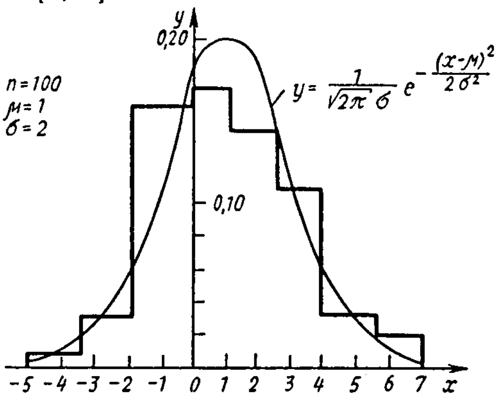

Рис. 3

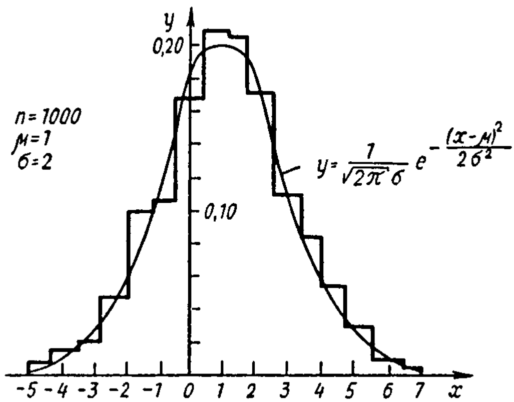

Рис. 4

1.2. Смоделировать последовательность испытаний Бернулли, указанную в задаче 1.1, с $p = 0{,}4$ и $n = 1000$. Вычислить частоты μ_k/k, где $\mu_k = X_1 + \cdots + X_k$, при $k = 100, 200, \ldots, 900, 1000$. В системе координат $x0y$ построить график, соединив прямыми соседние точки $(k, \mu_k/k)$, $k = 100, 200, \ldots, 1000$.

1.3. Указать способ моделирования независимых испытаний в полиномиальной схеме с исходами $1, 2, \ldots, N$ и вероятностями исходов соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_N$.

1.4. Указать способ моделирования симметричного блуждания с дискретным временем по целым точкам прямой с началом в точке 0 (вероятности перехода в соседние точки за один шаг предполагаются одинаковыми).

1.5. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена в интервале $[0, 1]$, $F(x)$ — непрерывная функция распределения. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = F^{-1}(\xi)$, где $x = F^{-1}(y)$ — функция, обратная функции $y = F(x)$.

1.6. Предложить способ моделирования случайной последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, где $\mathbf{P}(X_n \leqslant t) = 1 - e^{-t/a}$, $t \geqslant 0$ ($a > 0$ — постоянная).

Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

1.7. Смоделировать независимые показательно распределенные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с $a = 1$, $n = 100$. Построить график эмпирической функции распределения и гистограмму; вычислить первый и второй выборочные моменты A_{n1}, A_{n2}.

Указание. Использовать предыдущую задачу и программу «ВР».

1.8. Указать способ моделирования эрланговской случайной последовательности $\{X_j\}$ с параметрами (a, m) (т. е. $\mathbf{L}(X_j) = \Gamma(a, m)$, $j = 1, 2, \ldots$).

1.9. Используя центральную предельную теорему, указать способ моделирования приближенно нормально распределенных случайных чисел X_n, $n = 1, 2, \ldots$.

1.10. Пусть $X_{N1}, \ldots, X_{Nn}$ — реализация последовательности приближенно нормально распределенных чисел, каждое из которых получено суммированием N равномерно распределенных слагаемых (см. предыдущую задачу). Получить три реализации (при $N = 2, 4, 12$) выборок с $n = 100$, $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. Для каждой выборки построить эмпирические функции распределения и гистограммы; получить оценки a и σ^2.

1.11. По выборкам предыдущей задачи вычислить

3-й и 4-й выборочные центральные моменты и сравнить их с истинными значениями теоретических моментов.

1.12. Указать способ моделирования выборки из биномиального распределения $Bi(k,\ p)$.

1.13. Пусть ν_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0,\ 1)$. При больших n вычислить границу δ_γ такую, чтобы событие $\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| \leqslant \delta_\gamma$ имело вероятность $\approx \gamma$. Укладываются ли в эти границы при $\gamma = 0{,}98$ результаты следующего эксперимента (эксперимент Бюффона): при $n = 4040$ бросаниях монеты наблюдалось $h = 2048$ выпадений «герба»?

Указание. Применить теорему Муавра — Лапласа; монету считать симметричной.

1.14. Используя такой же подход, как в предыдущей задаче, проверить соответствие теории следующих данных: среди $n = 10000$ «случайных чисел» 0, 1, ..., 9 числа, не превосходящие 4, встретились $h = 5089$ раз.

1.15. Смоделировать выборку объема $n = 1000$ из распределения Бернулли $Bi(1,\ 3/5)$ и аналогично задаче 1.13 проверить соответствие экспериментальных данных предсказанию теории.

Указание. Воспользоваться задачей 1.1.

1.16. Проводились опыты с бросанием одновременно 12 игральных костей. Наблюдаемую случайную величину ξ считали равной числу костей, на которых выпало 4, 5 или 6 очков. Пусть h_i — число опытов, в которых наблюдалось значение $\xi = i$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ 12$. Данные для $n = 4096$ опытов приведены [3, с. 38] в следующей таблице:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Всего
h_i	0	7	60	198	430	731	948	847	536	257	71	11	0	$n = 4096$

а) Построить график частот h_i/n и сравнить его с графиком функции $ce^{-x^2/2}$.

б) Вычислить выборочные среднее и дисперсию, а также выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса.

в) Принимая $\boldsymbol{L}(\xi) = Bi\left(12,\ \frac{1}{2}\right)$, найти δ из условия $\mathbf{P}(|\bar{X} - \alpha_1| \leqslant \delta) = 0{,}998$ и сравнить с δ вычисленное по указанным данным отклонение выборочного среднего от теоретического α_1.

Указание. При оценке указанной в п. в) вероятности использовать теорему об асимптотической нормальности выборочного среднего.

1.17 (продолжение задачи 1.16). В предыдущем эксперименте наблюдалась также случайная величина ξ, равная числу костей с 6 очками. Таблица наблюдавшихся данных в этом случае имеет [3, с. 45] вид

i	0	1	2	3	4	5	6	$\geqslant 7$	Всего
h_i	447	1145	1181	796	380	115	24	8	$n=4096$

Ответить на вопросы задачи 1.16, считая при этом $\mathbf{L}(\xi) = Bi\left(12, \frac{1}{6}\right)$.

1.18. Смоделировать выборку объема $n = 1000$ из распределения $L(\xi) = Bi\left(4, \frac{1}{3}\right)$ и проанализировать соответствующие данные аналогично задаче 1.16.

Указание. Воспользоваться задачей 1.12.

1.19. Наблюдались показания 500 наугад выбранных часов, выставленных в витринах. Пусть i — номер промежутка от i-го часа до $(i+1)$-го, $i = 0, 1, \ldots, 11$, а h_i — число часов, показания которых принадлежат i-му промежутку. Результаты таким образом сгруппированных наблюдений оказались следующими [4, с. 459]:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Всего
h_i	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39	$n=500$

а) Построить полигон частот и сравнить его с графиком функции $f(x) = c$, $0 \leqslant x \leqslant 12$.

б) Рассматривая эти данные как независимые наблюдения над дискретной случайной величиной ξ, принимающей значения, совпадающие с серединами соответствующих интервалов (т. е. значения 0,5; 1,5; ... ; 11,5), вычислить выборочные среднее и дисперсию.

в) Принимая, что в п. б) случайная величина ξ имеет равномерное распределение, найти δ из условия $\mathbf{P}(|\bar{X} - \alpha_1| \leqslant \delta) = 0{,}98$ и сравнить с ним наблюдавшееся значение отклонения $|\bar{X} - \alpha_1|$.

1.20. Смоделировать выборку из полиномиального распределения M (500; 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5) и, рассматривая эти данные как наблюдения над случайной величиной ξ, принимающей значения -2, -1, 0, 1, 2, проанализировать соответствующие данные аналогично задаче 1.19.

Указание. Воспользоваться задачей 1.3.

1.21. В опытах наблюдалась неотрицательная непрерывная случайная величина ξ. Ее значения (упорядоченные по величине и округленные с точностью до 0,01) для $n = 50$ опытов оказались равными: 0,01 0,01 0,04 0,17 0,18 0,22 0,22 0,25 0,25 0,29 0,42 0,46 0,47 0,47 0,56 0,59 0,67 0,68 0,70 0,72 0,76 0,78 0,83 0,85 0,87 0,93 1,00 1,01 1,01 1,02 1,03 1,05 1,32 1,34 1,37 1,47 1,50 1,52 1,54 1,59 1,71 1,90 2,10 2,35 2,46 2,46 2,50 3,73 4,07 6,03. Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму; сравнить гистограмму с графиком функции $ce^{-x/a}$, $x > 0$. Вычислить выборочные среднее и дисперсию.

1.22. Получена выборка объема $n = 100$: 0,144 0,937 1,787 $-1{,}052$ $-0{,}192$ 0,169 2,623 2,135 1,759 0,811 0,724 $-0{,}110$ 1,752 $-0{,}378$ 0,417 1,360 1,365 2,587 1,621 2,344 1,379 0,560 1,858 2,453 $-0{,}356$ 1,503 $-0{,}134$ 2,950 $-0{,}816$ 0,717 2,468 1,131 1,047 1,355 1,162 $-0{,}491$ 0,261 $-0{,}183$ 0,467 0,502 $-0{,}805$ 0,228 2,286 0,364 $-0{,}312$ $-0{,}045$ 2,559 0,129 0,898 0,877 3,285 1,554 1,418 0,423 $-0{,}489$ $-0{,}255$ 1,092 0,402 $-0{,}051$ 0,020, 0,398 1,399 2,121 $-0{,}026$ 1,087 2,018 $-0{,}437$ 1,661 1,091 0,363 1,229 0,416 1,705 1,124 1,341 2,320 0,176 $-0{,}541$ 0,837 3,329 2,382 $-0{,}454$ 2,537 $-0{,}299$ 1,363 0,644 0,975 1,294 3,194 0,605 1,978 1,109 2,434 $-0{,}094$ 0,735 0,143 $-0{,}421$ $-0{,}773$ 1,570 0,947. Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму. Вычислить выборочные среднее и дисперсию, а также выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса.

1.23. При проведении $n = 2608$ опытов по наблюдению числа α-частиц (ξ), излучаемых радиоактивным веществом за определенный период времени (7,5 с.), получены следующие данные (h_i — число опытов, для которых число частиц $\xi = i$, $i = 0, 1, \ldots$):

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\geqslant 12$	Всего
h_i	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	2	$n = 2608$

Построить график частот h_i/n и вычислить выборочные среднее и дисперсию [7, с. 177].

В следующих ниже задачах $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из некоторого распределения $\mathcal{L}(\xi)$, $F(x)$ и $F_n(x)$ — соответствующие теоретическая и эмпирическая функции распределения (см. (1.1)).

1.24. Для заданной точки x_0 такой, что $0 < F(x_0) < 1$, и заданного числа t оценить при больших n вероятность события

$$|F_n(x) - F(x_0)| \leqslant t/\sqrt{n}.$$

Указание. Воспользоваться теоремой Муавра — Лапласа.

1.25. Пусть $x_1 < x_2$ — две заданные точки на числовой прямой такие, что $0 < F(x_1) \leqslant F(x_2) < 1$. Доказать формулу

$$\operatorname{cov}(F_n(x_1), F_n(x_2)) = \frac{1}{n} F(x_1)(1 - F(x_2)).$$

Указание. Представить случайные величины $\mu_n(x_1)$ и $\Delta_n(x_1, x_2) = \mu_n(x_2) - \mu_n(x_1)$ в виде сумм независимых индикаторов:

$$\mu_n(x_1) = \eta_1 + \dots + \eta_n, \text{ где } \eta_i = \begin{cases} 1 \text{ при } X_i \leqslant x_1, i = 1, \dots, n, \\ 0 \text{ при } X_i > x_1, \end{cases}$$

$$\Delta_n(x_1, x_2) = \varsigma_1 + \dots + \varsigma_n, \text{ где } \varsigma_j = \begin{cases} 1 \text{ при } x_1 < X_j \leqslant x_2, \\ j = 1, \dots, n, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.26. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1}$ — заданные точки на числовой прямой такие, что $0 < F(x_1) < F(x_2) < \dots$ $\dots < F(x_{N-1}) < 1$. Рассмотрев случайные величины $\nu_i = \mu_n(x_i) - \mu_n(x_{i-1})$, $i = 1, \dots, N$ (здесь $\mu_n(x_0) = 0$, $\mu_n(x_N) = n$), убедиться в том, что случайный вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ имеет полиномиальное распределение $M(n; p_1, \dots, p_N)$, где $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$, $i = 1, \dots, N$, $F(x_0) = 0$, $F(x_N) = 1$. Получить отсюда результат задачи 1.25.

1.27. Вывести следующие формулы для моментов выборочных моментов:

$$\mathbf{E} A_{nk} = \mathbf{E}\,\xi^k = \alpha_k, \quad \operatorname{cov}(A_{nk}, A_{ns}) = \frac{\alpha_{k+s} - \alpha_k \alpha_s}{n},$$

$$\mathbf{E} S^2 = \frac{n-1}{n} \mu_2, \quad \mathbf{D} S^2 = \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\mu_2^2\right),$$

$$\mu_k = \mathbf{E}(\xi - \alpha_1)^k, \quad \operatorname{cov}(\bar{X}, S^2) = \frac{n-1}{n^2}\mu_3.$$

Вычислить значения этих моментов для случая $L(\xi) = N(\mu, \sigma^2)$.

1.28. Доказать, что для любых фиксированных $r \geqslant 2$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_r$ совместное распределение выборочных моментов $A_{nk_r}, \ldots, A_{nk_r}$ при $n \to \infty$ асимптотически нормально $N\left(\alpha = (\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_r}), \frac{1}{n}\Sigma\right)$, где $\Sigma = \|\sigma_{ij} = \alpha_{k_i+k_j} - \alpha_{k_i}\alpha_{k_j}\|_1^r$, т. е. $L(\sqrt{n}(A_{nk_i} - \alpha_{k_i}), i = 1, \ldots, r) \to N(0, \Sigma)$ (предполагается, что все указанные теоретические моменты существуют). Кроме того, если $\varphi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_r)$, — любая дифференцируемая функция, то $L(\sqrt{n}(\varphi(A_{nk_1}, \ldots \ldots, A_{nk_r}) - \varphi(\alpha))) \to N(0, v^2)$ при условии, что $v \neq 0$, где

$$v^2 = b'\Sigma b, \quad b = \left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_r}\right)\bigg|_{x=\alpha}.$$

У к а з а н и е. Применить центральную предельную теорему для векторных случайных величин и утверждение 4°, п. 4, гл. 1.

1.29*. Доказать, что при $n \to \infty$ выборочная дисперсия S_n^2 асимптотически нормальна $N(\mu_2, (\mu_4 - \mu_2^2)/n)$ и при этом $\mathbf{E}\, S_n^2 \sim \mu_2$, $\mathbf{D}\, S_n^2 \sim (\mu_4 - \mu_2^2)/n$ (предполагается, что $\mu_4 < \infty$).

У к а з а н и е. Воспользоваться утверждением 2°а), п. 4 гл. 1.

1.30. Доказать, что совместная функция распределения двух порядковых статистик $X_{(r)}$ и $X_{(s)}$ $(1 \leqslant r < s \leqslant n)$ имеет вид

$$F_{r,s}(x_1, x_2) = \sum_{m=r}^{n} \sum_{j=\max(0,\, s-m)}^{n-m} \frac{n!}{m!\, j!\, (n-m-j)!} F^m(x_1)\,[F(x_2) - F(x_1)]^j (1 - F(x_2))^{n-m-j},$$

если $x_1 < x_2$, и

$$F_{r,s}(x_1, x_2) = \mathbf{P}(X_{(s)} \leqslant x_2) = F_s(x_2) = \sum_{j=s}^{n} C_n^j F^j(x_2)(1 - F(x_2))^{n-j},$$

если $x_1 \geqslant x_2$. Вывести отсюда формулу для $F_r(x) = \mathbf{P}(X_{(r)} \leqslant x)$.

1.31. Пусть распределение $L(\xi)$ абсолютно непрерывно и его плотность $F'(x) = f(x)$. Вывести следующую формулу для плотности совместного распределения порядковых статистик $X_{(k_1)}, \ldots, X_{(k_r)}$ $(1 \leqslant k_1 < \ldots < k_r \leqslant n)$:

$$g_{k_1\dots k_r}(x_1, \dots, x_r) = \frac{n!}{(k_1-1)!\,(k_2-k_1-1)!\dots(k_r-k_{r-1}-1)!(n-k_r)!} \times$$
$$\times F^{k_1-1}(x_1)\,(F(x_2)-F(x_1))^{k_2-k_1-1}\dots(F(x_r)-$$
$$-F(x_{r-1}))^{k_r-k_{r-1}-1}(1-F(x_r))^{n-k_r}f(x_1)\dots f(x_r),$$
$$x_1 < x_2 < \dots < x_r.$$

В частности, совместная плотность всех n порядковых статистик $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ равна

$$g_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) = n!\, f(x_1)\dots f(x_n),\ x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

1.32*. Доказать, что если в некоторых окрестностях квантилей ς_{p_1} и ς_{p_2} $(0 < p_1 < p_2 < 1)$ плотность $f(x)$ непрерывна вместе с производной и $f(\varsigma_{p_i}) > 0$, $i = 1,2$, то при $n \to \infty$ выборочные квантили $Z_{n,p_i} = X_{([np_i]+1)}$, $i = 1,2$, асимптотически нормальны $N\left((\varsigma_{p_1}, \varsigma_{p_2}), \frac{1}{n}\,\|\sigma_{ij}\|_1^2\right)$, где $\sigma_{ij} = \frac{p_i(1-p_j)}{f(\varsigma_{p_i})\,f(\varsigma_{p_j})}$, $i \leqslant j$. Обобщить на случай r квантилей.

1.33*. Доказать, что для выборки из абсолютно непрерывного распределения крайние порядковые статистики $X_{(r)}$ и $X_{(n-s+1)}$ при $n \to \infty$ и фиксированных $r, s \geqslant 1$ асимптотически независимы.

Указание. Перейти к случайным величинам $\varkappa_n = nF(X_{(r)})$ и $\eta_n = n[1 - F(X_{(n-s+1)})]$ и воспользоваться результатом задачи 1.31.

1.34. Пусть $\boldsymbol{L}(\xi) = \Gamma(1, 1)$. Доказать, что случайные величины $Y_r = (n - r + 1)(X_{(r)} - X_{(r-1)})$, $r = 1, \dots, n$ $(X_{(0)} = 0)$ независимы и одинаково распределены с плотностью $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Основываясь на этом, вычислить $\mathbf{E}X_{(k)}$, $\mathrm{D}X_{(k)}$ и исследовать асимптотическое поведение $\mathbf{E}X_{(n)}$ и $\mathrm{D}X_{(n)}$ при $n \to \infty$.

Указание. Воспользоваться представлением $\sum_{r=1}^{n} x_r = \sum_{r=1}^{n} (n - r + 1)(x_r - x_{r-1})$, $x_0 = 0$, и результатом задачи. 1.31.

1.35. Убедиться в том, что для случая $\boldsymbol{L}(\xi) = R(0, 1)$ распределения порядковых статистик имеют вид

$$\boldsymbol{L}(X_{(k)}) = \beta(k, n-k+1),\ \boldsymbol{L}(X_{(l)} - X_{(k)}) =$$
$$= \beta(l-k, n-l+k+1),$$

$1 \leqslant k < l \leqslant n$. Вычислить средние и дисперсии этих распределений, а также $\mathrm{cov}(X_{(k)}, X_{(l)})$.

1.36. Пусть $L(\xi) = R(a, b)$. Показать, что плотность совместного распределения экстремальных значений выборки $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ имеет вид $\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(x_2 - x_1)^{n-2}$, $a \leqslant x_1 \leqslant \leqslant x_2 \leqslant b$.

Получить следующие формулы:

$$\mathbf{E}X_{(1)} = \frac{na+b}{n+1}, \quad \mathbf{E}X_{(n)} = \frac{a+nb}{n+1},$$

$$\mathbf{D}X_{(1)} = \mathbf{D}X_{(n)} = \frac{n(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}, \quad \mathrm{cov}(X_{(1)}, X_{(n)}) = = \frac{(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

1.37. Пусть $L(\xi)$ есть *распределение Вейбулла* $W(a, \alpha, b)$. Найти распределение минимального значения выборки $X_{(1)}$ и вычислить $\mathbf{E}X_{(1)}$ и $\mathbf{D}X_{(1)}$.

1.38. Пусть $X_i = (X_{i1}, X_{i2})$, $i = 1, \ldots, n$, — независимые наблюдения над двумерной случайной величиной $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ с функцией распределения $F(x_1, x_2)$. Эмпирическая функция распределения определяется в данном случае формулой

$$F_n(x_1, x_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e(x_1 - X_{i1})\, e(x_2 - X_{i2})$$

(ср. с (1.1)). Вычислить $\mathbf{E}F_n(x_1, x_2)$ и $\mathbf{D}F_n(x_1, x_2)$ и показать, что $F_n(x_1, x_2) \to F(x_1, x_2)$, когда $n \to \infty$. Построить выборочный коэффициент корреляции ρ_n и показать, что $\rho_n \xrightarrow{P} \rho = \mathrm{korr}(\xi_1, \xi_2)$, если $\mathbf{E}(\xi_1^2\xi_2^2) < \infty$ и $\mathbf{D}\xi_j > 0$, $j = 1, 2$.

1.39. Говорят, что распределение L_a, зависящее от параметра a, является *воспроизводящим* по этому параметру, если для независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 с распределениями соответственно L_{a_1} и L_{a_2} выполняется свойство $L(\xi_1 + \xi_2) = L_{a_1 + a_2}$; это записывается также в виде $L_{a_1} * L_{a_2} = L_{a_1 + a_2}$, где $*$ означает операцию свертки.

Убедиться в справедливости следующих утверждений:

1) $\mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2) * \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathbf{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$;

2) $\Gamma(a, \lambda_1) * \Gamma(a, \lambda_2) = \Gamma(a, \lambda_1 + \lambda_2)$;

3) $M(n_1; p_1, \ldots, p_n) * M(n_2; p_1, \ldots, p_N) = M(n_1 + n_2; p_1, \ldots, p_N)$;

в частности, $Bi(n_1, p) * Bi(n_2, p) = Bi(n_1 + n_2, p)$;

4) $\Pi(\lambda_1) * \Pi(\lambda_2) = \Pi(\lambda_1 + \lambda_2)$;

5) $\overline{Bi}(r_1, p) * \overline{Bi}(r_2, p) = \overline{Bi}(r_1 + r_2, p)$.

Указание. Использовать тот факт, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых; при этом для дискретных случайных величин вместо характеристических функций $\mathbf{E}e^{it\xi}$ удобно использовать производящие функции $\mathbf{E}x^{\xi}$.

1.40*. Пусть случайный вектор $\boldsymbol{Y}$ имеет невырожденное нормальное распределение $\boldsymbol{N}(\mu, \Sigma)$ и $Q = (\boldsymbol{Y} - \mu)'A(\boldsymbol{Y} - \mu)$, где матрица A удовлетворяет условию $A = A\Sigma A$. Доказать, что $\boldsymbol{L}(Q) = \chi^2(m)$, где $m = \operatorname{tr}(A\Sigma)$.

В частности, при $A = \Sigma^{-1}$ число степеней свободы m совпадает с размерностью вектора $\boldsymbol{Y}$.

1.41. Совместное распределение двух случайных величин X и Y описывается следующим образом: условное распределение X при условии $Y = y$ нормально $\boldsymbol{N}(y, \sigma_1^2)$, а $\boldsymbol{L}(Y) = \boldsymbol{N}(\mu, \sigma_2^2)$. Доказать, что $\boldsymbol{L}(X) = \boldsymbol{N}(\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Указание. Вычислить плотность распределения X по формуле

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X/Y}(x, y)\, f_Y(y)\, dy,$$

где $f_{X/Y}(x, y)$ — плотность условного распределения $\boldsymbol{L}(X \mid Y = y)$.

1.42. Случайные величины X_1 и X_2 независимы, причем

$$\boldsymbol{L}(X_1) = \Gamma(a, \lambda),\ \ \boldsymbol{L}(X_1 + X_2) = \Gamma(a, \lambda + \mu),\ \mu > 0.$$

Как распределена случайная величина X_2?

Указание. Вычислить характеристическую функцию для X_2 (см. решение задачи 1.39 п. 2)).

1.43. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые равномерно распределенные величины на отрезке $[0, 1]$. Показать, что величины $\eta_1 = \sqrt{-2\ln\xi_2}\cos(2\pi\xi_1)$, $\eta_2 = \sqrt{-2\ln\xi_2}\sin(2\pi\xi_1)$ независимы и нормально распределены с параметрами $(0, 1)$.

Указание. Воспользоваться формулой (1.2).

1.44. Пусть случайные величины X_1 и X_2 независимы и $\boldsymbol{L}(X_i) = \Gamma(a, \lambda_i)$, $i = 1, 2$. Доказать, что случайные величины $Y_1 = X_1 + X_2$ и $Y_2 = X_1/(X_1 + X_2)$ независимы и при этом $\boldsymbol{L}(Y_1) = \Gamma(a, \lambda_1 + \lambda_2)$ — воспроизводимость по параметру λ (см. задачу 1.39 п. 2), $\boldsymbol{L}(Y_2) = \beta(\lambda_1, \lambda_2)$.

1.45. Доказать, что $L\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}\right) \to N(0, 1)$ при $n \to \infty$. Установить формулу $\mathbf{E}(\chi_n^2)^k = n(n+2)\dots(n+2(k-1))$, $k = 1, 2, \dots$.

> Указание. Воспользоваться свойством воспроизводимости по параметру λ распределения $\Gamma(a, \lambda)$ и применить центральную предельную теорему.

1.46. Убедиться в том, что $L\left(a + \frac{\xi}{\eta}\right) = K(a)$, где случайные величины ξ и η независимы и нормальны $N(0, \sigma^2)$, а также

$$L(a + \operatorname{tg} \xi) = K(a), \text{ где } L(\xi) = R\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

1.47. Проверить, что если $L(t_n) = S(n)$, то моменты $\mathbf{E}t_n^k$ существуют лишь при $k < n$ и равны

$$\mathbf{E}t_n^{2r} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2r-1)n^r}{(n-2)(n-4)\dots(n-2r)}, \; 2r < n, \quad \mathbf{E}t_n^{2r+1} = 0, \quad 2r + 1 < n.$$

Доказать, что $S(n) \to N(0, 1)$ при $n \to \infty$ и, более того, плотность $s_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Установить, что $L\left(\frac{1}{1 + t_n^2/n}\right) = \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

> Указание. Использовать формулу Стирлинга для гамма-функции: $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi z}\, z^{z-1} e^{-z}$, $z \to \infty$, и применить закон больших чисел к случайной величине χ_n^2/n (см. решение задачи 1.45). При вычислении моментов учесть, что $t_n = \eta\sqrt{\frac{n}{\chi_n^2}}$, а также независимость сомножителей. Использовать задачу 1.44.

1.48*. Пусть $F(x; n_1, n_2)$ — функция распределения закона Снедекора $S(n_1, n_2)$, а $B(x; a, b)$ — функция распределения закона $\beta(a, b)$. Установить равенство

$$F(x; n_1, n_2) = B\left(\frac{n_1 x}{n_2 + n_1 x}; \frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right), \quad x > 0.$$

Получить отсюда выражение для плотности $f_{n_1, n_2}(x)$ распределения $S(n_1, n_2)$. Найти моменты этого распределения.

1.49* (продолжение задачи 1.48). Доказать, что при любых фиксированных $x \in (0, 1)$ и $a > 0$

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} \ln[1 - B(x; a, b)] = \ln(1 - x).$$

Получить отсюда, что при любых фиксированных $t > 0$ и $m \geqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[1 - F(tn; m, n)] = -\frac{1}{2}\ln(1 + mt).$$

Указание. Воспользоваться формулой Стирлинга (см. указание к задаче 1.47) и теоремой о среднем значении:

$$\int_x^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du = C^{a-1}\int_x^1(1-u)^{b-1}du = $$
$$= \frac{C^{a-1}}{b}(1-x)^b,\ C\in[x, 1].$$

1.50*. Показать, что плотность $s_n(x)$ распределения Стьюдента $S(n)$ выражается через плотность $f_{1,n}(x)$ распределения Снедекора $S(1, n)$ следующим образом:

$$s_n(x) = |x| f_{1,n}(x^2).$$

Доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}(t_n > d\sqrt{n}) = -\frac{1}{2}\ln(1+d^2)\ \forall\ d>0.$$

Указание. Использовать тот факт, что $\boldsymbol{L}(t_n^2) = S(1, n)$.

1.51. Пусть $\boldsymbol{X}=(X_1, \ldots, X_l, X_{l+1}, \ldots, X_{l+m})$ — выборка из экспоненциального распределения $\boldsymbol{L}(\xi) = \Gamma(a, 1)$. Рассмотрев случайную величину $Y = \frac{m}{l}\frac{X_1+\ldots+X_l}{X_{l+1}+\ldots+X_{l+m}}$, доказать, что $\boldsymbol{L}(Y) = S(2l, 2m)$.

Указание. Использовать тот факт, что $\boldsymbol{L}(t_n^2) = S(1, n)$.

1.52. Пусть целочисленный случайный вектор $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ имеет полиномиальное распределение $M(n; p_1, \ldots, p_N)$.

а) Показать, что производящая функция для $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$, $k\leqslant N$, имеет вид

$$\mathbf{E}(x_1^{\nu_1}\ldots x_k^{\nu_k}) = \left[1+\sum_{i=1}^{k}p_i(x_i-1)\right]^n,$$

в частности, $\boldsymbol{L}(\nu_1) = Bi(n, p_1)$.

б) Вывести следующую общую формулу для смешанных факториальных моментов:

$$\mathbf{E}(\nu_1)_{k_1}\ldots(\nu_N)_{k_N} = (n)_{k_1+\ldots+k_N}p_1^{k_1}\ldots p_N^{k_N}.$$

в) Пусть $\eta^j = \sum_{i=1}^{N} C_i^j\nu_i$, $\bar{C}^j = \sum_{i=1}^{N} C_i^j p_i$, $j = 1, 2$, $\overline{C^1C^2} =$

$= \sum_{i=1}^{N} C_i^1 C_i^2 p_i$. Показать, что $\mathrm{E}\eta^j = n\bar{C}^j$, $\operatorname{cov}(\eta^1, \eta^2) = n(\overline{C^1C^2} - \bar{C}^1\ \bar{C}^2)$.

Указание. Использовать результат, приведенный в решении задачи 1.39 п. 3).

1.53* (продолжение задачи 1.52). Доказать, что для любого $k < N$ при $n \to \infty$ и фиксированных $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, N$, $\boldsymbol{L}((\nu_j - np_j)/\sqrt{n},\ j = 1, \ldots, k) \to \boldsymbol{N}(0, \Sigma_k = \|\sigma_{ij}\|_1^k)$, где $\sigma_{ij} = \begin{cases} p_i(1-p_i) & \text{при } i = j \\ -p_ip_j & \text{при } i \neq j \end{cases}$; при этом $|\Sigma_k| \neq 0$.

Указание. Воспользоваться теоремой непрерывности для характеристических функций.

1.54. Доказать, что если случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и $\boldsymbol{L}(\xi_j) = \Pi(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, N$, то условное распределение

$$\boldsymbol{L}(\xi_1, \ldots, \xi_N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n) = M(n;\ p_1, \ldots, p_N),$$

где $p_j = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N}$, $j = 1, \ldots, N$. Отсюда, в частности следует, что $\boldsymbol{L}(\xi_1 \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n) = Bi(n, p_1)$.

1.55. Пусть имеются две случайные величины ξ и Λ, причем $\boldsymbol{L}(\Lambda) = \Gamma(a, r)$ при некотором $a > 0$ и целом $r \geqslant 1$, а условное распределение $\boldsymbol{L}(\xi \mid \Lambda = \lambda) = \Pi(\lambda)$. Показать, что безусловное распределение $\boldsymbol{L}(\xi) = \overline{Bi}(r, p)$ при $p = \dfrac{a}{a+1}$.

1.56. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из $\boldsymbol{N}(\mu, \sigma^2)$. Доказать, что $\bar{X}$ и $(X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ независимы. Получить отсюда независимость выборочных среднего $\bar{X}$ и дисперсии S^2.

Указание. Воспользоваться тем, что для нормальных случайных величин из их некоррелированности следует независимость.

1.57*. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\boldsymbol{N}(0, 1)$ и квадратичная форма $Q = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ разложена на сумму двух квадратичных форм $Q = Q_1 + Q_2$, где $Q_i = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}$ и $\operatorname{rang} \boldsymbol{A}_i = n_i$, $i = 1, 2$. Доказать, что если $n_1 + n_2 = n$, то Q_1 и Q_2 независимы и $\boldsymbol{L}(Q_i) = \chi^2(n_i)$, $i = 1, 2$.

Указание. Проверить, что матрицы A_1 и A_2 идемпотентны и $A_1A_2 = 0$; далее результат следует из утверждений 1° и 2°, п. 6, 1) гл. 1.

Замечание. Справедливо более сильное утверждение, именно, если $Q = Q_1 + \ldots + Q_k$, где $Q_i = X'A_iX$, rang $A_i = n_i$, $i = 1, \ldots, k$, то $n = n_1 + \ldots + n_k \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Q_1, \ldots, Q_k$ независимы и $L(Q_i) = \chi^2(n_i)$, $i = 1, \ldots, k$.

1.58*. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из нормального $N(\mu, \sigma^2)$ распределения. Найти распределение случайной величины $\eta = \dfrac{X_1 - \bar{X}}{\sqrt{n-1}S}$.

1.59*. Использовать обозначения, введенные в задаче 1.38, и ее решении, и пусть

$$L(\xi) = N\left((\mu_1, \mu_2), \Sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}\right), \quad -1 < \rho < 1.$$

а) Доказать, что $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ и (S_1^2, S_{12}, S_2^2) независимы;

б) пусть $Q = n(\bar{X}_1 - \mu_1, \bar{X}_2 - \mu_2)'\Sigma^{-1}(\bar{X}_1 - \mu_1, \bar{X}_2 - \mu_2)$, доказать, что $L(Q) = \chi^2(2)$;

в) пусть $n > 2$ и $T = \sqrt{n-2}\rho_n/\sqrt{1-\rho_n^2}$, где $\rho_n = S_{12}/S_1S_2$ — выборочный коэффициент корреляции. Доказать, что при $\rho = 0$

$$L(T) = S(n-2),$$

получить отсюда распределение ρ_n.

Указание. а) См. задачу 1.56 и ее решение;

б) воспользоваться задачей 1.40;

в) использовать следующий факт [4, с. 435]: плотность совместного распределения случайных величин (S_1^2, S_{12}, S_2^2) имеет вид (при $\rho = 0$)

$$f(x_1, x_{12}, x_2) = \frac{n^{n-1}}{4\pi\Gamma(n-2)(\sigma_1\sigma_2)^{n-1}} (x_1x_2 - x_{12}^2)^{\frac{n-4}{2}} e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2}\right)}$$

$$x_1, x_2 < 0, \; x_{12}^2 < x_1x_2.$$

Далее рассмотреть новые случайные величины

$$Y_1 = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\frac{S_{12}}{S_2}, \quad Y_2 = \frac{n}{\sigma_1^2}\left(S_1^2 - \frac{S_{12}^2}{S_2^2}\right), \quad Y_3 = \frac{n}{\sigma_2^2}S_2^2$$

и учесть, что $T = Y_1/\sqrt{Y_2/(n-2)}$.

1.60*. Пусть $\bar{X}$ и S^2 — выборочные среднее и дисперсия для выборки объема n из распределения $\Pi(\lambda)$. Доказать, что при $n \to \infty$ и любом $\lambda > 0$

$$L\left(T_n \equiv \sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\bar{X} - \frac{n}{n-1}S^2\right)/\bar{X}\right) \to N(0,\ 1).$$

Указание. Воспользоваться задачами 1.27—1.29 и установить сначала асимптотическую нормальность $N(0,\ 1)$ случайной величины $\varsigma_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\left(\bar{X} - \frac{n}{n-1}S^2\right)/\lambda$; далее использовать тот факт, что $\bar{X}/\lambda \xrightarrow{P} 1$ при $n \to \infty$ и утверждение 2° в) п. 4 гл. 1. При вычислении моментов использовать следующие формулы для центральных моментов пуассоновского распределения $\Pi(\lambda)$:

$$\mu_2 = \mu_3 = \lambda,\quad \mu_4 = \lambda + 3\lambda^2.$$

1.61. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые наблюдения над случайной величиной ξ с $\mathbf{E}\xi = \mu$, $\mathrm{D}\xi = \sigma^2 > 0$, $\mathbf{E}\xi^4 < \infty$ и $\bar{X}$, S^2 — соответствующие выборочные среднее и дисперсия. Доказать, что при $n \to \infty$

$$L(T_n \equiv \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S) \to N(0,\ 1).$$

Указание. Воспользоваться центральной предельной теоремой, сходимостью $S/\sigma \xrightarrow{P} 1$ при $n \to \infty$ и утверждением 2° в) п. 4 гл. 1.

1.62. Пусть $L(\xi_1, \xi_2) = N\left((\mu_1, \mu_2), \left\| \begin{matrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{matrix} \right\|\right)$, где $-1 < \rho = \mathrm{korr}(\xi_1, \xi_2) < 1$.

Доказать, что условное распределение $L(\xi_2 | \xi_1 = x) = N(m(x), \sigma^2)$, где условное среднее

$$m(x) = \mathbf{E}(\xi_2 | \xi_1 = x) = \mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x - \mu_1)$$

— функция регрессии ξ_2 на ξ_1, являющаяся в данном случае линейной по x, а условная дисперсия $\sigma^2 = \mathrm{D}(\xi_2 | \xi_1 = x) = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$ не зависит от x. Установить, существуют ли другие распределения $L(\xi_1, \xi_2)$, отличные от нормального, обладающие такими же свойствами условного распределения $L(\xi_2 | \xi_1 = x)$.

Указания. 1. Вычислить условную плотность ξ_2 при условии $\xi_1 = x$ по формуле $f_{\xi_2|\xi_1}(y|x) = f_{\xi_1\xi_2}(x,\ y)/f_{\xi_1}(x)$ и убедиться в том, что она равна $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(y - m(x))^2}{2\sigma^2}\right\}$ с указанными $m(x)$ и σ^2.

2. Рассмотреть совместную плотность $f_{\xi_1\xi_2}(x,\ y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2|\xi_1}(y|x)$, где $f_{\xi_2|\xi_1}(y|x)$ — указанная выше условная, а $f_{\xi_1}(x)$ — произвольная плотности распределения.

1.63* (обобщение задачи 1.62). Пусть $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ — два случайных вектора произвольной размерности, $\mathrm{E}(X^{(i)}) = \mu^{(i)}$, $\mathrm{D}(X^{(i)}) = \Sigma_{ii}$, $i = 1, 2$, $\mathrm{cov}(X^{(1)}, X^{(2)}) = \Sigma_{12}$, $\mathrm{cov}(X^{(2)}, X^{(1)}) = \Sigma_{21}$ $(= \Sigma_{12}')$, и $L(X^{(1)}, X^{(2)}) = N((\mu^{(1)}, \mu^{(2)}), \Sigma)$,

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{Vmatrix}, \quad |\Sigma| \neq 0.$$

Доказать, что условное распределение $L(X^{(2)} | X^{(1)} = x^{(1)}) = N(M(x^{(1)}), B)$, где

$$M(x^{(1)}) = \mu^{(2)} + A(x^{(1)} - \mu^{(1)}), \ A = \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1},$$

$$B = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}.$$

Убедиться в том, что в случае $\dim X^{(2)} = 1$, $\dim X^{(1)} = p - 1$,

$$A = -\frac{1}{\sigma^{pp}}(\sigma^{1p}, \sigma^{2p}, \ldots, \sigma^{p-1,p}), \ B = \frac{1}{\sigma^{pp}}, \text{ где } \Sigma^{-1} = \|\sigma^{ij}\|_1^p.$$

Указания. 1. Рассмотреть линейное преобразование $Y^{(1)} = X^{(1)}$, $Y^{(2)} = X^{(2)} - AX^{(1)}$ и убедиться в том, что $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ независимы; отсюда следует, что

$$L(X^{(2)} | X^{(1)} = x^{(1)}) = L(Y^{(2)} + AY^{(1)} | Y^{(1)} = x^{(1)}) = L(Y^{(2)} + Ax^{(1)}).$$

2. Записав совместную плотность

$$f_{X^{(1)}X^{(2)}}(x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p) =$$

$$= C \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\sigma^{ij} \right\} =$$

$$= C \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[(x_p - \mu_p)^2 \sigma^{pp} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2(x_p - \mu_p) \sum_{i=1}^{p-1} (x_i - \mu_i)\sigma^{ip}\right] + \ldots \right\},$$

получить, что переменная x_p войдет в выражение условной плотности в виде

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2}\sigma^{pp}\left(x_p - \mu_p + \sum_{i=1}^{p-1}(x_i - \mu_i)\sigma^{ip}/\sigma^{pp}\right)^2 \right\}.$$

1.64. В основе алгоритма моделирования значений случайной величины с пуассоновским распределением

$\Pi(\lambda)$ лежит следующий факт (доказать!): пусть U_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ — независимые случайные величины с равномерным распределением $R(0, 1)$ и $\xi = \max\left\{ k : \prod_{i=1}^{k} U_i \geqslant e^{-\lambda} \right\}$, тогда $L(\xi) = \Pi(\lambda)$.

Указание. Используя соотношение $L\left(-\sum_{i=1}^{k} \ln U_i\right) = \Gamma(1, k)$, вычислить вероятность события $\{\xi = k\} = \left\{ -\sum_{i=1}^{k} \ln U_i \leqslant \lambda,\ -\sum_{i=1}^{k+1} \ln U_i > \lambda \right\}$.

1.65. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана ограниченная плотность распределения $f(x)$, $c = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Определим случайную величину

$$\nu = \min\{i \geqslant 1 : c\, U_{2i-1} \leqslant f(a + (b - a)\, U_{2i})\},$$

где $\{U_i\}$ те же, что и в предыдущей задаче.

Доказать, что случайная величина $\xi = a + (b - a)\, U_{2\nu}$ имеет плотность распределения $f(x)$.

Замечание. Этот результат дает способ моделирования распределения с произвольной плотностью, удовлетворяющей указанным ограничениям.

Глава 2
ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Пусть задана статистическая модель $\boldsymbol{F} = \{F\}$ для схемы повторных независимых наблюдений над некоторой случайной величиной ξ и $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из $L(\xi)$. Всякая случайная величина $T = T(\boldsymbol{X})$, являющаяся функцией лишь от выборки, называется *статистикой*. Часто требуется по выборке $\boldsymbol{X}$ оценить истинное значение некоторой неизвестной теоретической характеристики $g = g(F)$, т. е. построить такую статистику $T(\boldsymbol{X})$, значение которой можно было бы считать разумным приближением для истинного значения характеристики g. В этом случае статистику $T(\boldsymbol{X})$ называют *оценкой* g (для g). Для оценивания g можно использовать различные оценки, и их качество сравнивают, исходя из той или иной *меры точности* оценок (меры близости оценки к истинному значению оцениваемой характеристики). Если определен некоторый класс оценок $\boldsymbol{T}_g$ и

выбрана мера точности, то оценку, оптимизирующую эту меру, называют *оптимальной* (в классе $\boldsymbol{T}_g$).

Наиболее распространенной мерой точности является *среднеквадратическая ошибка* $\mathrm{E}(T(\boldsymbol{X})-g)^2$. Эта мера порождает и соответствующий критерий оптимальности оценок — *критерий минимума среднеквадратической ошибки.* Часто ограничиваются рассмотрением лишь класса $\boldsymbol{T}_g$ *несмещенных оценок:* $T=T(\boldsymbol{X})\in\boldsymbol{T}_g\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathrm{E}\,T=g\,\forall\,F\in\boldsymbol{F}$. Для несмещенных оценок $\mathrm{E}(T-g)^2=$ $=\mathrm{D}T$, т. е. мерой точности таких оценок является величина их дисперсии, а критерием оптимальности для несмещенных оценок является *критерий минимума дисперсии.*

Если модель $\boldsymbol{F}$ параметрическая: $\boldsymbol{F}=\{F(x;\,\theta),\,\theta\in$ $\in\Theta\}$, то любая теоретическая характеристика является функцией от параметра θ. Таким образом, в данном случае речь идет об оценивании параметрических функций, для которых будем использовать обозначение $\tau(\theta)$. Статистика $T=T(\boldsymbol{X})$ является несмещенной оценкой для $\tau(\theta)$, если выполняется соотношение $\mathrm{E}_\theta T=\tau(\theta)\,\forall\,\theta\in\Theta$. Оптимальной в классе $\boldsymbol{T}_\tau$ несмещенных оценок функции $\tau=\tau(\theta)$ является статистика T^*, для которой $\mathrm{D}_\theta T^*\leqslant$ $\leqslant\mathrm{D}T\,\forall\,T\in\boldsymbol{T}_\tau$ и $\forall\,\theta\in\Theta$. Для оптимальной оценки T^* иногда используют обозначение τ^*, чтобы подчеркнуть, что она относится к функции $\tau(\theta)$. Оптимальная оценка T^* (в заданной модели $\boldsymbol{F}$ и для заданной параметрической функции $\tau(\theta)$) существует не всегда, но в тех случаях, когда она существует, она единственна [1, с. 42]. Важным является *линейность* свойства оптимальности: если T_j^* — оптимальная оценка $\tau_j=\tau_j(\theta)$, $j=1,2,\ldots$, то оптимальной оценкой линейной комбинации $\sum\limits_j c_j\tau_j$ является статистика $\sum\limits_j c_jT_j^*$ [1, с. 44].

Обязательным для любого правила оценивания является свойство *состоятельности*, которое означает, что при неограниченном возрастании объема выборки n оценка должна сходиться по вероятности к оцениваемой характеристике каким бы ни было истинное распределение наблюдений. Таким образом, состоятельность — это асимптотическое свойство оценок (в отличие от свойств несмещенности и оптимальности). Когда хотят подчеркнуть зависимость рассматриваемых статистик от объема выборки, их отмечают индексом n. При установлении свойства состоятельности полезен следующий простой критерий [1, с. 72]: если $\mathrm{E}_\theta T_n=\tau(\theta)+\varepsilon_n$, $\mathrm{D}_\theta T_n=\delta_n$ и $\varepsilon_n=$

$= \varepsilon_n(\theta) \to 0$ (т. е. T_n — *асимптотически несмещенная оценка* $\tau(\theta)$), $\delta_n = \delta_n(\theta) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\theta \in \Theta$, то T_n — состоятельная оценка $\tau(\theta)$.

2. Рассмотрим кратко общие критерии существования оптимальных оценок и способы их нахождения в рамках общей параметрической модели $\boldsymbol{F} = \{F(x, \theta), \theta \in \Theta\}$. Пусть $f(x; \theta)$ — плотность распределения наблюдаемой случайной величины ξ (или вероятность события $\{\xi = x\}$ в дискретном случае) и $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ — реализация выборки $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$. Функция $L(\boldsymbol{x}; \theta) = f(x_1; \theta) \times \ldots \times f(x_n; \theta)$, рассматриваемая при фиксированном $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ как функция параметра $\theta \in \Theta$, называется *функцией правдоподобия*. В дальнейшем предполагается, что $L(\boldsymbol{x}; \theta) > 0$ при всех $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ и $\theta \in \boldsymbol{\Theta}$ и дифференцируема по θ. Более того, справедливо следующее правило перемены порядка дифференцирования и интегрирования (в случае скалярного параметра θ): *для любой статистики T (в частности, для $T = \mathrm{const}$)*

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int T(\boldsymbol{x})\, L(\boldsymbol{x}; \theta)\, d\boldsymbol{x} = \int T(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial\theta} L(\boldsymbol{x}; \theta)\, d\boldsymbol{x}$$

$$(d\boldsymbol{x} = dx_1 \ldots dx_n)$$

(интегрирование ведется по всему выборочному пространству $\mathbf{X}$, указанные интегралы, по предположению, абсолютно сходятся при всех $\theta \in \Theta$, везде для дискретных моделей интегрирование заменяется соответствующим суммированием). Наконец, введем случайную величину

$$U(\boldsymbol{X}; \theta) \equiv \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{X}; \theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_i; \theta)}{\partial\theta},$$

называемую *вкладом выборки*, и будем предполагать, что

$$0 < \mathbf{E}_\theta U^2(\boldsymbol{X}; \theta) < \infty \ \forall\ \theta \in \Theta.$$

Модели, для которых выполняются все перечисленные условия, называют *регулярными*.

Для регулярной модели $\mathbf{E}_\theta U(\boldsymbol{X}; \theta) = 0\ \forall\ \theta \in \Theta$ и определена функция $i_n(\theta) \equiv \mathrm{D}_\theta U(\boldsymbol{X}; \theta) = \mathbf{E}_\theta U^2(\boldsymbol{X}; \theta)$, называемая *функцией информации* (*функцией Фишера*). Величину

$$i(\theta) \equiv i_1(\theta) = \mathbf{E}_\theta\left(\frac{\partial \ln f(X_1; \theta)}{\partial\theta}\right)^2 = -\,\mathbf{E}_\theta\left(\frac{\partial^2 \ln f(X_1; \theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

называют также *количеством* (*фишеровской*) *информации, содержащейся в одном наблюдении* (последнее выражение используется в тех случаях, когда функция

$f(x;\theta)$ дважды дифференцируема по θ). Для схемы повторных независимых наблюдений $i_n(\theta) = ni(\theta)$.

Введенные понятия непосредственно обобщаются на случай векторного параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$. В этом случае под вкладом выборки понимается случайный вектор $\boldsymbol{U} = (U_1(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}), \ldots, U_r(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}))$, где $U_j(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln L(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})$, $j = 1, \ldots, r$, а аналогом функции информации является *информационная матрица выборки* $\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}_n(\boldsymbol{\theta}) \equiv \mathrm{D}_\theta(\boldsymbol{U}) = \mathbf{E}_\theta(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}')$. Информационную матрицу одного наблюдения $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I} = \|g_{ij}\|_1^r$ можно вычислить по формулам

$$g_{ij} = g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_\theta\left(\frac{\partial\ln f(X_1;\theta)}{\partial\theta_i}\,\frac{\partial\ln f(X_1;\theta)}{\partial\theta_j}\right) = -\,\mathbf{E}_\theta\left(\frac{\partial^2\ln f(X_1;\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}\right)$$

(последнее равенство справедливо для дважды дифференцируемых функций $f(x;\theta)$).

Для схемы повторных независимых наблюдений $\boldsymbol{I}_n(\boldsymbol{\theta}) = n\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$. В данном случае в определении регулярной модели предполагается, что матрица $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})$ невырождена при всех $\theta \in \Theta$.

Для регулярных моделей можно установить нижнюю границу для дисперсий несмещенных оценок заданной дифференцируемой параметрической функции $\tau(\theta)$. Именно (*неравенство Рао — Крамера*): *для любой оценки* $T = T(\boldsymbol{X}) \in \boldsymbol{T}_\tau$ *и всех* $\theta \in \Theta$ *имеет место неравенство* $\mathrm{D}_\theta T \geqslant \frac{[\tau'(\theta)]^2}{ni(\theta)}$, *если параметр* θ *скалярный, и неравенство*

$$\mathrm{D}_\theta T \geqslant \boldsymbol{b}'(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{I}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial\tau(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial\tau(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_r}\right),$$

если $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$. Оценка $T^* \in \boldsymbol{T}_\tau$, для которой достигается указанная нижняя граница, называется *эффективной*. Если такая оценка существует, то она является, следовательно, оптимальный (в классе $\boldsymbol{T}_\tau$) и единственной. Критерием эффективности является следующее представление [1, с. 47, 52]:

$$T(\boldsymbol{X}) - \tau(\theta) = a(\theta)\,U(\boldsymbol{X};\theta), \text{ если } \theta \text{ — скаляр,}$$
$$T(\boldsymbol{X}) - \tau(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}), \text{ если } \theta \text{ — вектор,}$$

где $a(\theta)$ (соответственно $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\theta})$) — некоторая функция (вектор-функция) θ.

В заданной модели $\boldsymbol{F}$ эффективная оценка может существовать только для какой-то одной параметрической функции $\tau(\theta)$ (с точностью до преобразования $a\tau(\theta)+b$, где a и b — константы).

В тех случаях, когда эффективной оценки не существует, для отыскания оптимальной оценки $T^* = \tau^*$ (в классе несмещенных оценок $\boldsymbol{T}_\tau$) можно использовать следующий алгоритм (*критерий Бхаттачария*) [1, с. 50, 53]: учитывая старшие производные функции правдоподобия $L = L(\boldsymbol{X}; \theta)$, подбирают такую их линейную комбинацию, чтобы получить представление вида

$$T - \tau = \frac{1}{L}\left[\sum_i a_i \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \sum_{i_1, \ldots, i_s} a_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial^s L}{\partial \theta_{i_1} \ldots \partial \theta_{i_s}}\right];$$

при этом последовательно полагают $s = 2, 3, \ldots$. Если при некотором значении $s \geqslant 2$ и коэффициентах $a_. = a_.(\theta)$ это удается сделать, то статистика $T = T(\boldsymbol{X})$ является оптимальной оценкой функции $\tau = \tau(\theta)$.

3. Наиболее эффективным способом построения оптимальных оценок является использование так называемых достаточных статистик. Статистика $T = T(\boldsymbol{X})$ (вообще говоря, векторная) называется *достаточной* для модели $\boldsymbol{F} = \{F(x; \theta), \theta \in \Theta\}$ (или достаточной для параметра θ), если условная плотность (или вероятность — в дискретном случае) $L(\boldsymbol{x} | t; \theta)$ случайного вектора (выборки) $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ при условии $T(\boldsymbol{X}) = t$ не зависит от параметра θ. Эквивалентным определением достаточности является следующее: *для любого события $A \subset \mathbf{X}$ условная вероятность* $\mathbf{P}_\theta(\boldsymbol{X} \in A | T(\boldsymbol{X}) = t)$ *не зависит от* θ. Это свойство статистики T означает, что она содержит всю информацию о параметре θ, имеющуюся в выборке. Действительно, вероятность любого события, которое может произойти при фиксированном T, не зависит от θ, и, следовательно, оно не может нести дополнительной информации о θ. Сама выборка $\boldsymbol{X}$, очевидно, является достаточной статистикой, но обычно стремятся найти достаточную статистику наименьшей размерности, представляющую исходные данные в наиболее сжатом виде, в этом смысле говорят о *минимальной* достаточной статистике. Минимальная достаточная статистика является функцией любых других достаточных статистик. Практически достаточные статистики обычно находят на основании следующего *критерия факторизации* [1, с. 55]: статистика $T(\boldsymbol{X})$

достаточна для параметра θ тогда и только тогда, когда функция правдоподобия $L(\boldsymbol{x}; \theta)$ представима в виде

$$L(\boldsymbol{x}; \theta) = g(T(\boldsymbol{x}); \theta)\, h(\boldsymbol{x}),$$

где g и h — неотрицательные функции и h не зависит от θ. Если T — достаточная статистика, то таковой же является и любая взаимно однозначная функция от T.

Роль достаточных статистик в теории оценивания определяется *теоремой Рао — Блекуэлла — Колмогорова* [1, с. 58], согласно которой для любой несмещенной оценки T_1 заданной функции $\tau(\theta)$ можно построить новую несмещенную оценку $T^* \equiv \mathbf{E}_\theta(T_1 | T)$, зависящую от достаточной статистики T, для которой $\mathrm{D}_\theta T^* \leqslant \mathrm{D}_\theta T_1$. Следовательно, оптимальную оценку надо искать среди функций от достаточной статистики.

При отыскании явного вида оптимальных оценок важную роль играет свойство полноты достаточной статистики. Статистика T называется (ограниченно) *полной*, если для всякой (ограниченной) функции $\varphi(T)$, из того, что $\mathbf{E}_\theta \varphi(T) = 0 \forall \theta$, следует, что $\varphi(t) \equiv 0$ на множестве значений T.

Для полной достаточной статистики всякая функция от нее является оптимальной оценкой своего среднего. Следовательно, если оценивается заданная параметрическая функция $\tau(\theta)$, то оптимальная несмещенная оценка τ^* — такая функция $\tau^* = H(T)$ от полной достаточной статистики T, которая удовлетворяет *уравнению несмещенности* $\mathbf{E}_\theta H(T) = \tau(\theta)$. Это уравнение либо имеет единственное решение, либо решений нет. В последнем случае класс $\boldsymbol{T}_\tau$ несмещенных оценок $\tau(\theta)$ пуст.

Многие модели математической статистики укладываются в схему *r-параметрического экспоненциального семейства*, т. е. когда функция $f(x; \theta)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \Theta \subset R^r$ представима в виде

$$f(x; \theta) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{r} \theta_j B_j(x) + C(\theta) + D(x) \right\}$$

(или приводится к такому виду заменой параметров). В этом случае $T = (T_1, \ldots, T_r)$, $T_j = T_j(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} B_j(X_i)$, $j = 1, \ldots, r$, — минимальная достаточная статистика, и она полная, если $\dim \Theta = r$.

4. Одним из наиболее универсальных методов оценивания неизвестных параметров распределений являет-

ся *метод максимального правдоподобия.* По этому методу *оценкой максимального правдоподобия* (о.м.п.) $\widehat{\theta}_n$ параметра θ по выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ является такая точка параметрического множества Θ, в которой функция правдоподобия $L(\boldsymbol{x}; \theta)$ при каждом $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ достигает максимума, т. е. $L(\boldsymbol{x}; \hat{\theta}_n) \geqslant L(\boldsymbol{x}; \theta) \forall \theta$, или $L(\boldsymbol{x}; \hat{\theta}_n) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\boldsymbol{x}; \theta)$. Если для каждого $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ максимум $L(\boldsymbol{x}; \theta)$ достигается во внутренней точке Θ и $L(\boldsymbol{x}; \theta)$ дифференцируема по θ, то о.м.п. $\hat{\theta}_n$ удовлетворяет *уравнению правдоподобия* $\frac{\partial \ln L(x; \theta)}{\partial \theta} = 0$ (или $\frac{\partial \ln L(x; \theta)}{\partial \theta_j} = 0$, $j = 1, ..., r$, если $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$).

Если оценивается некоторая параметрическая функция $\tau(\theta)$, то ее о.м.п. $\hat{\tau}_n = \tau(\hat{\theta}_n)$ — это так называемое *свойство инвариантности* оценок максимального правдоподобия.

В тех случаях, когда уравнение правдоподобия не удается решить точно, прибегают к различным приближенным методам решения. Одним из них является рекуррентный *метод накопления Фишера*, согласно которому $(k+1)$-е приближение для о.м.п. вычисляется по формуле

$$\theta_{k+1} = \theta_k + U(\boldsymbol{x}; \theta_k)/ni(\theta_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

при этом в качестве начального приближения θ_0 берут значение какой-нибудь легко вычисляемой состоятельной оценки θ.

Для регулярных моделей оценки максимального правдоподобия обладают рядом важных асимптотических свойств. Именно [1, с. 73—75], если $\widehat{\theta}_n$ существует, единственна и лежит внутри Θ, то она является состоятельной оценкой θ, причем ее распределение является асимптотически нормальным:

$$\boldsymbol{L}_{\theta}(\sqrt{n}\,(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta})) \underset{n\to\infty}{\to} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}^{-1}(\theta)),$$

если дополнительно предположить, что функция $f(x; \theta)$ трижды дифференцируема по θ и при этом $\left|\frac{\partial^2 f(x; \theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j\,\partial\theta_k}\right| \leqslant M(x)$, где функция $M(x)$ не зависит от θ и интегрируема: $\mathbf{E}_{\theta} M(\xi) < \infty$. Если элементы матрицы $\boldsymbol{I}(\theta)$ непрерывны по θ, то также

$$\boldsymbol{L}_{\theta}(\sqrt{n}\,(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta})) \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}^{-1}(\hat{\theta}_n)).$$

Более того, если $\tau(\theta)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $\hat{\tau}_n = \tau(\hat{\theta}_n)$ — ее о.м.п., то при $n \to \infty$

$$L_\theta(\sqrt{n}\ (\hat{\tau}_n - \tau(\theta))) \to N(0, \sigma_\tau^2(\theta)),$$

а также

$$L_\theta\left(\sqrt{n}\ \frac{\hat{\tau}_n - \tau(\theta)}{\sigma_\tau(\hat{\theta}_n)}\right) \to N(0, 1),$$

где $\sigma_\tau^2(\theta) = b'(\theta)I^{-1}(\theta)b(\theta)$, $b(\theta) = \left(\frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_r}\right)$. Величина $\sigma_\tau^2(\theta)/n$ называется *асимптотической дисперсией* статистики $\hat{\tau}_n$ и совпадает с границей Рао — Крамера для дисперсий несмещенных оценок функции $\tau(\theta)$. Такое свойство оценок максимального правдоподобия называется *асимптотической эффективностью.*

Если имеется некоторая другая состоятельная и асимптотически нормальная оценка T_n для функции $\tau(\theta)$: $L_\theta(\sqrt{n}\ (T_n - \tau(\theta))) \underset{n\to\infty}{\to} N(0, \sigma_T^2(\theta))$, то ее «качество» можно измерять величиной $\mathrm{eff}(T_n; \theta) \equiv \sigma_\tau^2(\theta)/\sigma_T^2(\theta)$, называемой *асимптотической эффективностью* оценки T_n: оценка тем асимптотически «лучше» (точнее), чем больше ее асимптотическая эффективность; для о.м.п. же эта величина равна 1.

5. Наряду с точечным оцениванием неизвестных параметров распределений в математической статистике используется оценивание с помощью *доверительных интервалов* или (в случае векторного параметра) *доверительных множеств.* Пусть θ — скаляр. При интервальном оценивании ищут две такие статистики $T_i = T_i(X)$, $i = 1, 2$, что $T_1 < T_2$, для которых при заданном *доверительном уровне* $\gamma \in (0, 1)$ выполняется условие

$$\mathbf{P}_\theta(T_1(X) < \theta < T_2(X)) \geqslant \gamma \ \forall\ \theta \in \Theta. \qquad (*)$$

Такой (случайный) интервал $(T_1, T_2) \subset \Theta$ называют *γ-доверительным интервалом* для θ. Длина этого интервала $T_2 - T_1$ характеризует точность локализации неизвестного параметра, а доверительный уровень γ — его «надежность»: вероятность ошибиться, утверждая, что $\theta \in (T_1, T_2)$, не превышает $1 - \gamma$. Поэтому на практике величину γ выбирают обычно близкой к 1 ($\gamma = 0{,}95$; 0,99 и т. д.), и при выбранном γ стремятся построить кратчайший (в том или ином классе) интервал.

Иногда рассматривают *односторонние доверительные интервалы: верхний* (вида $\theta < T_2(X)$) или *нижний* (вида $T_1(X) < \theta$), определяемые условиями, аналогичными (✳), в которых опускают соответствующую вторую границу.

Аналогично определяют доверительный интервал для отдельной компоненты (например, θ_1) в случае векторного параметра:

$$\mathbf{P}_\theta(T_1(X) < \theta_1 < T_2(X)) \geqslant \gamma \; \forall\, \theta \in \Theta,$$

а также доверительный интервал для параметрической функции $\tau(\theta)$:

$$\mathbf{P}_\theta(T_1(X) < \tau(\theta) < T_2(X)) \geqslant \gamma \; \forall\, \theta \in \Theta.$$

Если оценивается векторный параметр $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$, то *$\gamma$-доверительная область* для него есть такое случайное подмножество $G_\gamma(X) \subset \Theta$, которое удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \in G_\gamma(X)) \geqslant \gamma \; \forall\, \theta \in \Theta.$$

Такое подмножество строят обычно с помощью некоторой статистики $T(X)$, распределение которой известно.

Если требуется оценить скалярный параметр θ и существует такая случайная величина $G(X; \theta)$, зависящая от наблюдений $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и оцениваемого параметра, что: 1) распределение $G(X; \theta)$ не зависит от θ и 2) при каждом $x \in \mathbf{X}$ функция $G(x; \theta)$ непрерывна и строго монотонна по θ (в этом случае $G(X; \theta)$ называют *центральной статистикой*), то γ-доверительный интервал для θ строят следующим образом. Определим числа $g_1 < g_2$ из условия $\mathbf{P}_\theta(g_1 < G(X; \theta) < g_2) = \gamma$ и решим уравнения $G(X; \theta) = g_1, g_2$ относительно θ. Обозначая через $T_i = T_i(X)$, $i = 1, 2$, $T_1 < T_2$, эти решения, получаем искомый интервал вида (T_1, T_2). Методику, основанную на использовании центральных статистик, можно применять и для оценивания отдельных компонент параметрического вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$, а также для оценивания скалярных параметрических функций $\tau = \tau(\theta)$.

Если уже имеется некоторая точечная оценка $T = T(X)$ параметра θ и ее функция распределения $F(t; \theta)$ непрерывна и монотонна по θ, то, определив из уравнений (относительно θ)

$$F(T; \theta) = (1 - \gamma)/2, \; 1 - F(T - 0; \theta) = (1 - \gamma)/2$$

два случайных числа $T_i = T_i(X)$, $i = 1, 2$, $T_1 < T_2$, получим *центральный* γ-доверительный интервал (T_1, T_2) для θ.

Для больших выборок в ряде случаев удается построить *приближенные доверительные интервалы,* основанные на оценках максимального правдоподобия. Так, если $\tau(\theta)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$, — непрерывно дифференцируемая функция и $\hat{\tau}_n = \tau(\hat{\theta}_n)$ — ее оценка максимального правдоподобия, то в случае регулярной модели *асимптотическим γ-доверительным интервалом* для $\tau(\theta)$ является интервал $(\hat{\tau}_n \pm c_\gamma \sigma_\tau(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n})$, где $\sigma_\tau^2(\theta) = \boldsymbol{b}'(\theta)\boldsymbol{I}^{-1}(\theta)\boldsymbol{b}(\theta)$, $\boldsymbol{b}(\theta) = \left(\frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_r}\right)$, $c_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$. В частности, асимптотическим γ-доверительным интервалом для скалярного параметра θ является интервал $(\hat{\theta}_n \pm c_\gamma/\sqrt{ni(\hat{\theta}_n)})$. Подобные интервалы являются асимптотически наикратчайшими и они основаны на стандартной нормальной аппроксимации для о.м.п.:

$$\boldsymbol{L}_\theta(\hat{\tau}_n) \sim \boldsymbol{N}(\tau(\theta), \sigma_\tau^2(\hat{\theta}_n)/n).$$

§ 1. Оценки и их общие свойства

2.1. Убедиться в несмещенности и состоятельности следующих статистик: а) $T_n(\boldsymbol{X}) = F_n(x)$ как оценки теоретической функции распределения $F(x)$ в заданной точке x;

б) $T_n(\boldsymbol{X}) = A_{nk}$ как оценки теоретического момента $\alpha_k = \mathrm{E}\xi^k$;

в) $T_n(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \alpha_1)^2$ как оценки дисперсии $\mu_2 = \mathrm{D}\xi$ в случае, когда среднее $\alpha_1 = \mathrm{E}\xi$ известно;

г) $T_n(\boldsymbol{X}) = \frac{n}{n-1}S^2 \equiv S'^2$ как оценки μ_2 в общем случае. Является ли S^2 состоятельной оценкой μ_2?

Указание. Воспользоваться задачей 1.27 и неравенством Чебышева (предполагается, что соответствующие теоретические моменты существуют).

2.2. В каких случаях статистика $T_n(\boldsymbol{X}) = \sqrt{A_{n2}/2}$ является состоятельной оценкой теоретического среднего α_1?

2.3. По выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $\boldsymbol{L}(\xi)$ построить несмещенную оценку его характеристической функции (х. ф.).

Указание. Рассмотреть эмпирическую х. ф.

2.4. Пусть $\boldsymbol{X} = ((X_{11}, X_{12}), \ldots, (X_{n1}, X_{n2}))$ — выборка из распределения двумерной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Доказать, что несмещенной оценкой для $\mu_{11} = \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$ является статистика $T(\boldsymbol{X}) = \frac{n}{n-1}S_{12}$, где S_{12} — выборочная ковариация (см. решение задачи 1.38).

Указание. Рассмотреть случайную величину $\xi_1 + \xi_2$ и воспользоваться решением задачи 2.1 п. г).

2.5. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из распределения $Bi(1, \theta)$. Описать класс параметрических функций $\tau(\theta)$, для которых существуют несмещенные оценки $T(\boldsymbol{X})$. Убедиться, что в этот класс не входят, в частности, функции $\tau(\theta) = 1/\theta^a$ при $a > 0$ и $\tau(\theta) = \theta^b$ при $b > n$.

2.6*. По результатам n испытаний оценивается неизвестная вероятность «успеха» θ в схеме Бернулли $Bi(1, \theta)$. Обозначая через r_n число успехов в этих испытаниях и рассматривая класс оценок вида $T = \frac{r_n + \alpha}{n + \beta}$, вычислить среднеквадратическую ошибку оценки T и сравнить ее с ошибкой «обычной» оценки r_n/n.

2.7. Пусть $\boldsymbol{L}(\xi) = Bi(k, \theta)$ и $n = 1$. Рассмотрим функции вида $\tau_{rs}(\theta) = \theta^r(1 - \theta)^s$ при целых $r, s \geqslant 0$. Показать, что несмещенная оценка для $\tau_{rs}(\theta)$ существует лишь при $r + s \leqslant k$ и в этом случае она имеет вид

$$T(X) = (X)_r(k - X)_s/(k)_{r+s},$$

где $(a)_r = a(a - 1) \dots (a - r + 1), r \geqslant 1, (a)_0 = 1$.

2.8. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из распределения $Bi(k, \theta)$ и $T = X_1 + \dots + X_n$. Описать класс параметрических функций $\tau(\theta)$, для которых существуют несмещенные оценки вида $H(T)$. Построить несмещенную оценку такого вида для $\tau_j(\theta) = \theta^j$.

Указание. Воспользоваться свойством воспроизводимости распределения $Bi(k, \theta)$ (см. задачу 1.39 п. 3) и задачу 1.52 п.б)).

2.9. Пусть $\boldsymbol{L}(\xi) = \Pi(\theta)$ и $n = 1$. Проверить, что $T(X) = (X)_j$ — несмещенная оценка $\tau(\theta) = \theta^j$ $(j = 1, 2, \dots)$, а для функций $\tau(\theta) = \theta^{-a}$ при $a > 0$ несмещенных оценок не существует. Построить несмещенную оценку для $(1 + \theta)^{-1}$.

2.10. Пусть по одному наблюдению над дискретной случайной величиной ξ с распределением $f(x; \theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}\Big/(1 - e^{-\theta})$, $x = 1, 2, \dots$ (*урезанное в нуле пуассоновское распределение*), требуется оценить функцию $\tau(\theta) = 1 - e^{-\theta}$. Убедиться в том, что здесь имеется единственная несмещенная оценка, но она практически бесполезна.

2.11. Пусть $\boldsymbol{L}(\xi) = \overline{Bi}(r, \theta)$ и $n = 1$. Построить несмещенную оценку функции $\tau(\theta) = \theta^s$ $(s \geqslant 1$ — целое) и убедиться в том, что при $r = 1$ эта оценка практически бесполезна.

Указание. Воспользоваться формулой $(1-\theta)^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{r+j-1}^{j}\theta^j$.

2.12. Показать, что $T(X) = \sum_{i=1}^{X} \frac{1}{i}$ — единственная несмещенная оценка функции $\tau(\theta) = \ln(1-\theta)$ в модели $\overline{Bi}(1, \theta)$ при $n = 1$.

2.13. Убедиться в том, что $T^* = \bar{X}^2 - \frac{\sigma^2}{n}$ — несмещенная оценка функции $\tau(\theta) = \theta^2$ в модели $N(\theta, \sigma^2)$.

2.14. В модели $N(\mu, \theta^2)$ требуется оценить $\tau(\theta) = \theta^2$ по выборке объема n. Показать, что выборочная дисперсия S^2 имеет меньшую среднеквадратическую ошибку, чем несмещенная оценка $\tau^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$. Какая из двух несмещенных оценок τ^* и S'^2 (см. задачу 2.1 п. г)) точнее?

2.15. Доказать, что $T_n(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu|$ — несмещенная и состоятельная оценка параметра θ в модели $N(\mu, \theta^2)$.

2.16*. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $N(\mu, \theta^2)$ и $T^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$. Доказать, что несмещенной оценкой для функции $\tau_k(\theta) = \theta^k$ при любом целом $k \geqslant 1$ является статистика $\tau_k^* = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}T^k$. Сравнить оценку τ_1^* с оценкой, указанной в предыдущей задаче.

Указание. Использовать тот факт, что $L_\theta(T^2/\theta^2) = \chi^2(n)$.

2.17. Дана выборка $X = (X_1, X_2, X_3)$ из распределения $N(0, \theta^2)$ и пусть $T = T(X) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$. Рассмотрим статистику $p_T(x) = \frac{1}{2T}I(|x| \leqslant T)$, где $I(\cdot)$ — индикатор, которая как функция переменного x представляет собой плотность равномерного распределения на отрезке

$[-T, T]$. Убедиться в том, что $p_T(x)$ при любом x является несмещенной оценкой для плотности исходного распределения $\mathcal{N}(0, \theta^2)$.

Указание. Воспользоваться тем, что $\mathcal{L}_0(T^2/\theta^2) = \chi^2(3)$.

2.18. Рассмотрим задачу оценивания неизвестной дисперсии θ_2^2 в общей нормальной модели $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — соответствующая выборка и S'^2 — несмещенная оценка θ_2^2 (см. задачу 2.1 п. г)). Рассмотрим класс оценок вида $T_\lambda = \lambda S'^2$. Убедиться в том, что при $\frac{n-3}{n+1} < \lambda < 1$ статистика T_λ имеет меньшую среднеквадратическую ошибку, чем S'^2. При каких целых k этому подклассу принадлежат статистики $\frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$? Найти оптимальную (по критерию минимума среднеквадратической ошибки) оценку в классе $\{T_\lambda\}$.

2.19* (продолжение задачи 2.18). Построить оптимальные оценки вида $T_\lambda = \lambda S'^2$, минимизирующие меры $\mathbf{E}_0(T_\lambda - \theta_2^2)^4$ и $\mathbf{E}_0|T_\lambda - \theta_2^2|$ соответственно.

Указание. Воспользоваться теоремой Фишера и задачей 1.45.

2.20. Доказать, что в модели задачи 2.18 несмещенной оценкой для функции $\tau_k(\theta) = \theta_2^k$ при любом целом $k \geqslant 1$ является статистика

$$\tau_k^* = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k-1}{2}\right)} S^k,$$

где S^2 — выборочная дисперсия. Рассмотреть случай $n = 2$ и вычислить смещение статистики $|X_1 - X_2|$ как оценки θ_2.

Указание. Учесть, что $\mathcal{L}_0(nS^2/\theta_2^2) = \chi^2(n-1)$.

2.21. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\Gamma(\theta, \lambda)$ и $T = X_1 + \ldots + X_n$. Убедиться в том, что статистика $\tau_a^* = \frac{\Gamma(\lambda n)}{\Gamma(\lambda n - a)} T^{-a}$ — несмещенная оценка функции $\tau_a(\theta) = \theta^{-a}$ при любом $a < \lambda n$.

Указание. Воспользоваться свойством воспроизводимости гамма-распределения (см. задачу 1.39 п. 2)).

2.22*. Продолжительность горения электрических ламп имеет распределение $\Gamma(\theta, 1)$. Чтобы оценить θ, берут выборку из n ламп и наблюдают «времена жизни» первых r перегоревших ламп $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(r)}$. Построить оптимальную несмещенную оценку вида $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_{(k)}$.

Указание. Перейти к величинам $Y_r = \frac{n-r+1}{\theta}(X_{(r)} - X_{(r-1)})$, $r = 1, \ldots, n$ $(X_{(0)} = 0)$, и воспользоваться задачей 1.34.

2.23. По выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $R(\theta, 2\theta)$ требуется оценить параметр θ. Рассмотреть класс оценок вида $T = T(\boldsymbol{X}) = \alpha X_{(n)} + \beta X_{(1)}$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, и найти в этом классе оптимальную несмещенную оценку.

Указание. Воспользоваться задачей 1.36.

2.24. Оценивается параметр θ равномерного распределения $R(0, \theta)$ по выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Убедиться в том, что обе статистики $T_1 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$ и $T_2 = (n+1)X_{(1)}$ несмещенные. Какая из них предпочтительнее?

Указание. Воспользоваться задачей 1.36; установить, что оценка T_2 не является состоятельной.

2.25. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из $R(\theta_1, \theta_2)$. Доказать, что статистики $T_1 = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ и $T_2 = \frac{n+1}{n-1}(X_{(n)} - X_{(1)})$ — несмещенные и состоятельные оценки функций $\tau_1(\theta) = (\theta_1 + \theta_2)/2$ и $\tau_2(\theta) = \theta_2 - \theta_1$ соответственно.

Указание. Воспользоваться задачей 1.36.

2.26. Убедиться в том, что если $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения Вейбулла с неизвестным параметром сдвига θ — $W(\theta, \alpha, b)$, то статистика $T(\boldsymbol{X}) = X_{(1)} - b\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)n^{-1/\alpha}$ — несмещенная и состоятельная оценка параметра θ.

Указание. Воспользоваться решением задачи 1.37.

2.27. Показать, что для *логистического распределения* с плотностью $f(x; \theta) = e^{-x+\theta}(1 + e^{-x+\theta})^{-2}$, $-\infty < x < \infty$, $\theta \in (-\infty, \infty)$, несмещенной и состоятельной оценкой параметра θ является выборочное среднее $\bar{X}$.

2.28. Показать, что выборочное среднее $\bar{X}$ для модели Коши $K(\theta)$ не является состоятельной оценкой параметра θ.

Указание. Воспользоваться свойством среднего арифметического для распределения Коши.

2.29. *Оценивание для полиномиального распределения.* Пусть случайная величина ξ принимает конечное число значений $a_1, \ldots, a_N$ с неизвестными вероятностями $p_1, \ldots, p_N$ $(p_1 + \ldots + p_N = 1)$. Чтобы оценить параметры $\theta = (p_1, \ldots, p_{N-1})$ (параметр $p_N = 1 - p_1 - \ldots - p_{N-1}$), произведено n независимых наблюдений над ξ. Пусть ν_r — число членов выборки, равных a_r, $r = 1, \ldots, N$.

а) Показать, что статистики $T_r = \dfrac{\nu_r}{n}$, $r = 1, \ldots, N$ — несмещенные и состоятельные оценки параметров $p_1, \ldots, p_N$ соответственно.

б) Описать класс параметрических функций $\tau(\theta)$, для которых существуют несмещенные оценки вида $H(T_1, \ldots, T_N)$.

в) Построить несмещенную и состоятельную оценку функции $\tau(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i p_i$.

Указание. Учесть, что $L(\nu_1, \ldots, \nu_N) = M(n; p_1, \ldots, p_N)$, и воспользоваться решением задачи 1.52.

2.30. *Оценивание по методу моментов.* Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\boldsymbol{L}(\xi) \in \{F(x; \theta), \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \Theta\}$ и моменты $\alpha_k(\theta) = E_\theta \xi^k$, $k = 1, \ldots, r$, существуют. Тогда, решая относительно $\theta_1, \ldots, \theta_r$ уравнения $\alpha_k(\theta) = A_{nk}$, $k = 1, \ldots, r$, где $A_{nk} = A_{nk}(\boldsymbol{X})$ — выборочный момент k-го порядка, получаем значения оценок параметров, найденных методом моментов.

Найти по методу моментов оценки параметров гамма-распределения $\Gamma(\theta_1, \theta_2)$ и убедиться в их состоятельности.

2.31. Найти методом моментов оценки параметров *«двойного» распределения Пуассона,* задаваемого вероятностями

$$\mathbf{P}_\theta(\xi = x) = \frac{1}{2}\left(e^{-\theta_1}\frac{\theta_1^x}{x!} - e^{-\theta_2}\frac{\theta_2^x}{x!}\right),$$
$$x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2), \ 0 < \theta_1 < \theta_2.$$

Такое распределение описывает, например, число столкновений с молекулами газа в камере Вильсона частиц, получающихся при распадении ядра урана в результате бомбардировки его нейтронами.

Вычислить значения полученных оценок для следующих данных, полученных при $n = 327$ наблюдениях над случайной величиной ξ (через n_x обозначено число наблюдений, в которых $\xi = x$):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10
n_x	28	47	81	67	53	24	13	8	3	2	1

2.32. Смоделировать выборки, объемы которых $n = 10, 100, 1000$ из равномерного распределения $R(0, \theta)$ при $\theta = 1$, и оценить методом моментов параметр θ.

2.33.* *Выборочный контроль.* В некоторых системах статистического контроля качества продукции поступают следующим образом. Из партии, содержащей N изделий, случайным образом без возвращения отбирают на контроль n изделий, каждое из которых проверяют на доброкачественность. Если число k обнаруженных в выборке дефектных изделий удовлетворяет неравенству $k \leqslant k_0$, где k_0 — задаваемый заранее некоторый уровень ($k_0 < n$), то их заменяют на исправные, после чего вся партия принимается. Если же $k > k_0$, то контролю подвергают все N изделий и все дефектные изделия заменяют исправными. Обозначим через D неизвестное число дефектных изделий в партии ($D = 0, 1, ..., N$) и пусть случайная величина ξ — число обнаруженных при описанном способе действия дефектных изделий. Тогда

$$\mathbf{P}_D(\xi = k) = f(k; D, n) \equiv C_D^k C_{N-D}^{n-k} / C_N^n, \quad k = 0, 1, ..., k_0,$$

$$\mathbf{P}_D(\xi = D) = \sum_{k = k_0 + 1}^{n} f(k; D, n) \quad (\text{при } D > k_0).$$

Предположим, что требуется оценить заданную функцию $\tau(D)$ от числа дефектных изделий в партии. Доказать, что всегда существует и притом единственная статистика $T(\xi)$, являющаяся несмещенной оценкой $\tau(D)$, т. е. условиями

$$\mathbf{E}_D T(\xi) = \sum_{k=0}^{k_0} T(k) f(k; D, n) + T(D) \sum_{k = k_0 + 1}^{n} f(k; D, n) = \tau(D),$$
$$D = 0, 1, ..., N,$$

функция $T(k)$ однозначно определена.

Рассмотреть случай $\tau(D) = D$.

Указание. Использовать тот факт, что при $D \leqslant k_0$ гипергеометрические вероятности $f(k; D; n) = 0$ для $k > k_0$.

2.34*. *Оценивание для конечной совокупности.* Пусть имеется конечная совокупность $U = \{u_1, ..., u_N\}$ из N объектов, каждый из которых характеризуется некоторой величиной $x(u)$, $u \in U$. Значения $x_i = x(u_i)$, $i = 1, \ldots, N$, неизвестны, и требуется оценить их сумму $T = T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i$. Предположим, что можно наблюдать каждое подмножество (выборку) $s = (u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n(s)}})$ элементов из U с некоторой вероятностью $p(s)$. Таким образом, если $S = \{s\}$ — совокупность всех выборок, то $\sum_{s \in S} p(s) = 1$. В этом случае говорят, что задан *выборочный план* $\boldsymbol{A} = (U, S, \mathbf{P})$. В качестве оценок для T рассматриваются статистики $e(s, x)$, которые зависят от $\boldsymbol{x}$ только через те x_i, для которых $u_i \in s$ (т. е. оценка есть функция выбранных объектов и их наблюдавшихся x-значений).

Оценкой Горвица — Томпсона называется статистика

$$\bar{e}(s, x) = \sum_{u \in s} \frac{x(u)}{\pi(u)},$$

где $\pi(u) = \sum_{s : s \ni u} p(s)$ — вероятность включения в выборку объекта u.

а) Доказать, что $\bar{e}(s, x)$ — несмещенная оценка $T(\boldsymbol{x})$, т. е.

$$\sum_{s} p(s)\bar{e}(s, \boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) \; \forall \boldsymbol{x} \in R^N,$$

и что других несмещенных оценок вида $\sum_{u \in s} a(u)x(u)$ не существует.

б) Вывести формулу для дисперсии оценки Горвица — Томпсона:

$$\mathrm{D}\bar{e}(s, \boldsymbol{x}) = \sum_{u \neq v} x(u)x(v)\left(\frac{\pi(u, v)}{\pi(u)\pi(v)} - 1\right) + \sum_{u} x^2(u)\left(\frac{1}{\pi(u)} - 1\right),$$

где $\pi(u, v) = \sum_{s : s \ni u, v} p(s)$ — вероятность включения в выборку объектов u и v.

в) Проверить, что несмещенной оценкой для $\mathrm{D}\bar{e}(s, \boldsymbol{x})$ является статистика

$$\Delta(s, \boldsymbol{x}) = \sum_{u \in s} \frac{x^2(u)}{\pi(u)}\left(\frac{1}{\pi(u)} - 1\right) + \sum_{\substack{u v \in s \\ u \neq v}} \frac{x(u)x(v)}{\pi(u, v)}\left(\frac{\pi(u, v)}{\pi(u)\pi(v)} - 1\right).$$

г) Показать, что среднее и дисперсия объема $n(s)$ выборки s для выборочного плана $A=(U, S, \mathbf{P})$ выражаются через вероятности включения $\pi(u)$ и $\pi(u, v)$ следующим образом:

$$\mathrm{E}n(s)=\sum_u \pi(u),\quad \mathrm{D}n(s)=\sum_{u\neq v}(\pi(u, v)-\pi(u)\pi(v))+ \\ +\sum_u \pi(u)(1-\pi(u)).$$

Указание. Ввести индикаторные случайные величины $\gamma(u)=\begin{cases}1, & \text{если } u\in s\\ 0, & \text{если } u\notin s\end{cases}$ и записать $n(s)$ и $\bar{e}(s, \boldsymbol{x})$ в виде $n(s)=\sum_u \gamma(u)$, $\bar{e}(s, \boldsymbol{x})=\sum_u \gamma(u)x(u)/\pi(u)$.

2.35* (продолжение задачи 2.34). Рассмотрим выборочный план $A^*=(U, S, \mathbf{P})$, порождающий равновероятные выборки без повторения объема n. В этом случае множество S состоит из $(N)_n$ всех упорядоченных комбинаций длины n из различных элементов U и

$$p(s)=1/(N)_n \;\forall s\in S.$$

а) Показать, что оценка Горвица — Томпсона имеет в данном случае вид

$$\bar{e}(s, \boldsymbol{x})=\frac{N}{n}\sum_{u\in s}x(u).$$

б) Обозначим через $\mu=T(\boldsymbol{x})/N$, $\sigma^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$ соответственно *среднее* и *дисперсию совокупности* U. Тогда $\frac{1}{N}\bar{e}(s, \boldsymbol{x})\equiv\bar{x}$ (выборочное среднее наблюденных x-значений) является несмещенной оценкой для μ. Проверить, что $\mathrm{D}\bar{x}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)\sigma^2$.

в) Доказать, что статистика

$$\hat{\sigma}^2(s, \boldsymbol{x})=\frac{1}{n-1}\sum_{u\in s}(x(u)-\bar{x})^2$$

является несмещенной оценкой σ^2.

Замечание. Справедлив более сильный результат: $\hat{\sigma}^2(s, \boldsymbol{x})$ является оптимальной оценкой σ^2 в классе всех несмещенных квадратичных оценок, т. е. оценок вида

$$\sum_{u, v\in s}a(u, v)(x(u)-\bar{x})(x(v)-\bar{x}).$$

2.36.* *Оценивание размера конечной совокупности.* Пусть имеется конечная совокупность U, число элементов которой N неизвестно. Из этой совокупности n раз извлекается простая бесповторная выборка объема m (каждый раз любая из C_N^m возможных комбинаций элементов U может быть извлечена с равной вероятностью). Обозначим через $\mu_r = \mu_r(n, m, N)$ число наблюдавшихся элементов, каждый из которых повторился ровно r раз ($r = 1, 2, ..., n$). Рассматривается задача оценивания параметрических функций $\tau(N)$ по выборочным данным $(\mu_1, ..., \mu_n)$.

Доказать, что в классе линейных статистик $\boldsymbol{L} = \{l = \sum_{r=1}^{n} l_r\mu_r\}$ несмещенная оценка для $\tau(N)$ существует лишь в случае, когда $\tau(N)$ — полином от $\frac{1}{N}$ степени $k \leqslant n-1$. В этом случае, если $\tau(N) = \sum_{j=1}^{k} c_j/N^j$, то единственной несмещенной оценкой для $\tau(N)$ является статистика

$$\hat{\tau} = \sum_{r=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k} c_j \frac{(r)_{j+1}}{m^{j+1}(n)_{j+1}}\right]\mu_r .$$

В частности, $\frac{1}{m^2 n(n-1)}\sum_{r=1}^{n} r(r-1)\mu_r$ — единственная линейная несмещенная оценка для $r(N) = 1/N$.

Указание. Представить μ_r в виде суммы индикаторов: $\mu_r = \xi_1^{(r)} + ... + \xi_N^{(r)}$, где $\xi_i^{(r)} = 1$, если i-й элемент U повторился r раз, и $\xi_i^{(r)} = 0$ в противном случае, $i = 1, ..., N$.

2.37.* (продолжение задачи 2.36). Пусть $\eta = \mu_1 + ... + \mu_n$ — общее число наблюдавшихся элементов и $\boldsymbol{H}$ — класс статистик вида $H(\eta)$.

Доказать, что: а) если $N \leqslant mn$, то для любой функции $\tau(N)$ несмещенной оценкой в классе $\boldsymbol{H}$ является статистика

$$\tau^* = \sum_{j=m}^{\eta} (-1)^{\eta-j} C_\eta^j (C_j^m)^n \tau(j) \Big/ \sum_{j=0}^{\eta} (-1)^{\eta-j} C_\eta^j (C_j^m)^n;$$

б) если же априори N может быть любым целым числом ($N \geqslant m$), то указанная статистика является несмещенной оценкой функции $\tau(N)$ при дополнительном условии, что $\tau(N) = f(N)(C_N^m)^{-n}$, где $f(N)$ — многочлен степени не выше mn, удовлетворяющий условиям $f(0) = f(1) = \ldots = f(m-1) = 0$.

2.38. *Метод Монте-Карло.* При отыскании значений различных величин (определяемых, например, некоторыми уравнениями или интегралами) часто используют вычислительный метод, основанный на вероятностной интерпретации искомых величин и использовании реализаций случайных испытаний, — так называемый *метод Монте-Карло,* или *метод статистических испытаний.* Сущность этого метода состоит в следующем: исходя из смысла вычисляемой величины a, подбирают такую случайную величину ξ, чтобы $a = \mathbf{E}\xi$; далее моделируют выборку $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $\mathcal{L}(\xi)$ и в качестве оценки a используют выборочное среднее $\bar{X}$. Тогда (см. задачу 1.61) при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\sqrt{n}|\bar{X} - a|/S' < c_\gamma) \to 2\Phi(c_\gamma) - 1 = \gamma;$$

таким образом, ошибка в определении a этим методом с вероятностью γ не превышает $c_\gamma S'/\sqrt{n}$, когда n велико.

Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$$a = \int \underset{v_r}{\ldots} \int f(t_1, \ldots, t_r)dt_1 \ldots dt_r,$$

где $v_r = \{(t_1, \ldots, t_r): 0 \leqslant t_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, r\}$. Здесь, очевидно, можно положить $\xi = f(\eta_1, \ldots, \eta_r)$, где $\eta_1, \ldots, \eta_r$ — независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины, и смоделировать выборку X возможно, следовательно, с помощью последовательности (1.5).

Оценить указанным методом интеграл $a = \int\limits_0^1 e^x dx$, используя 100 чисел последовательности (1.5), и сравнить полученное значение a^* с точным значением a. При каком δ будет выполняться соотношение $\mathbf{P}(|a - a^*| < \delta) \cong 0{,}99$?

2.39. Вычислить методом Монте-Карло значение интеграла

$$p(r; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \leqslant r^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\} dx_1 dx_2$$

при $r = 3$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, моделируя соответствующую выборку объема $n = 100$.

Указание. Если ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины и $\boldsymbol{L}(\xi_j) = \boldsymbol{N}(0, \sigma_j^2)$, $j = 1, 2$, то

$$p(r; \sigma_1, \sigma_2) = \mathbf{P}(\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqslant r^2).$$

Далее воспользоваться задачей 1.61.

2.40.* *Случайное блуждание.* Частица, «стартуя» в момент $t = 0$ из точки k $(0 < k < N)$, блуждает по целым точкам отрезка $[0, N]$. Если в момент t частица находилась в точке l, то в момент $t + 1$ она находится в точке $l + 1$ с вероятностью p или в точке $l - 1$ с вероятностью $q = 1 - p (1 \leqslant l \leqslant N - 1)$. В точках 0 и N частица поглощается и случайное блуждание прекращается ([7], гл. XIV).

1) Найти вероятность π_{kN} поглощения частицы в точке N.

2) Вычислить $m_k = \mathbf{E}\tau_k$, где τ_k — время до поглощения частицы.

3) Смоделировать 100 реализаций описанного случайного блуждания при $N = 7$, $k = 3$, $p = 0{,}6$ и $p = 0{,}5$ и найти оценки величин π_{kN} и m_k.

Указание. 1) Составить для $f(k) = \pi_{kN}$ уравнение в конечных разностях:

$$f(k) = pf(k+1) + qf(k-1), \quad k = 1, \ldots, N-1,$$
$$f(0) = 0, \quad f(N) = 1,$$

и убедиться в том, что единственным его решением является $\pi_{kN} = (1 - \lambda^k)/(1 - \lambda^N)$, $\lambda = q/p$, если $p \neq q$, и $\pi_{kN} = k/N$, если $p = q = \frac{1}{2}$.

2) Составить для m_k уравнение в конечных разностях: $m_k = pm_{k+1} + qm_{k-1} + 1$, $k = 1, \ldots, N-1$, $m_0 = m_N = 0$, и убедиться в том, что единственным его решением является $m_k = \frac{k}{q - r} \quad \frac{N}{q - p} \pi_{kN}$, если $p \neq q$, и $m_k = k(N - k)$, если $p = q = \frac{1}{2}$.

3) Поступать как и при решении задачи 1.4.

§ 2. Оптимальные оценки

2.41.* Доказать, что оптимальная несмещенная оценка всегда является симметричной функцией наблюдений.

Указание. Если $T = T(\boldsymbol{X})$ — несмещенная оценка

$\tau(\theta)$, то рассмотреть симметрическую статистику $T^* = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} T(\pi X)$, где $\pi = \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ i_1 \dots i_n \end{pmatrix}$ — перестановка из n элементов, $\pi X = (X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$ и суммирование производится по всем $n!$ перестановкам. Показать, что $D_0 T^* \leqslant D_0 T$.

2.42. Доказать следующие свойства оптимальных оценок: если $T^* = T^*(X)$ — оптимальная несмещенная оценка некоторой функции $\tau = \tau(\theta)$, то: 1) для любой статистики $\psi = \psi(X)$ с $\mathbf{E}_0\psi = 0\ \forall\theta\in\Theta$ выполняется равенство $\mathrm{cov}_0(T^*, \psi) = 0\ \forall\theta$; 2) для любой другой несмещенной оценки $T = (X)$ $\mathrm{cov}_0(T^*, T) = \mathbf{D}_0 T^*$.

Указание. В первом случае рассмотреть несмещенные оценки вида $T_\lambda = T^* + \lambda\psi$, $\lambda \in R^1$. Во втором случае положить $\psi = T^* - T$.

2.43. Проверить, что количество информации $i(\theta)$ для соответствующих моделей имеет указанный в таблице вид.

Модель	$N(0,\sigma^2)$	$N(\mu,\theta^2)$	$\Gamma(0,\lambda)$	$K(0)$	$Bi(k,\theta)$	$\Pi(0)$	$\overline{Bi}(r,0)$
$i(0)$	$1/\sigma^2$	$2/0^2$	$\lambda/0^2$	$1/2$	$k/[0(1-0)]$	$1/0$	$/[0(1-0)^2]$

2.44. Показать, что информационная матрица для общей нормальной модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$ имеет вид

$$I(\theta) = \begin{Vmatrix} 1/\theta_2^2 & 0 \\ 0 & 2/\theta_2^2 \end{Vmatrix}.$$

2.45.* Показать, что информационная матрица для модели задачи 2.29 имеет вид $I(\theta) = \|g_{ij}(\theta\|_1^{N-1}$, где $\theta = (p_1, \dots, p_{N-1})$,

$$g_{ij}(\theta) = \begin{matrix} 1/p_i + 1/p_N & \text{при } i = j, \\ 1/p_N & \text{при } i \neq j, \end{matrix} \quad p_N = 1 - p_1 - \dots - p_{N-1}.$$

Вычислить $I^{-1}(\theta)$.

Указание. Записать вероятности $f(a_r; \theta) = \mathbf{P}_0(\xi = a_r) = p_r$, $r = 1, \dots, N$, в виде

$$f(a_r; \theta) = \prod_{j=1}^{N} p_j^{\delta(a_r, a_j)} = (1 - p_1 - \dots - p_{N-1})^{\delta(a_r, a_N)} \times \times \prod_{j=1}^{N-1} p_j^{\delta(a_r, a_j)},$$

где $\delta(a_i, a_j) = 1$ при $i = j$ и $\delta(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$.

2.46.* Модель $\boldsymbol{F} = \{F(x;\ \theta), \theta \in \Theta\}$ называется *экспоненциальной,* если функция $f(x;\ \theta)$ имеет вид

$$f(x;\ \theta) = \exp\{A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)\}.$$

Доказать, что эффективная оценка τ^* для некоторой параметрической функции $\tau(\theta)$ существует тогда и только тогда, когда модель $\boldsymbol{F}$ — экспоненциальная; при этом

$$\tau(\theta) = -\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)},\quad \tau^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(X_i),\ \text{если } \theta \text{ — скаляр},$$

$$\tau(\theta) = -\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_j} \Big/ \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_j},\quad \tau^* = \frac{r}{n}\sum_{i=1}^{n} B(X_i),$$

$$\text{если } \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r).$$

Вывести следующие формулы для дисперсии $\mathbf{D}_\theta\tau^*$:

$$\mathbf{D}_\theta\tau^* = \frac{\tau'(\theta)}{nA'(\theta)},\ \text{если } \theta \text{ — скаляр},$$

$$\mathrm{D}_\theta\tau^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_j} \Big/ \frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta_j},\ \text{если } \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r).$$

Указание. Воспользоваться критерием эффективности.

2.47. Доказать, что для экспоненциальной модели со скалярным параметром функция $i(\theta) = (C'(\theta)A''(\theta) - C''(\theta)A'(\theta))/A'(\theta)$ и $\mathbf{E}_\theta B(\xi) = -C'(\theta)/A'(\theta)$.

Указание. Сравнить выражение для $\mathbf{D}_\theta\tau^*$ в предыдущей задаче с границей Рао — Крамера.

2.48. Проверить, что для заданных регулярных моделей функция $\tau(\theta)$, допускающая эффективную оценку τ^*, эта оценка и ее дисперсия $\mathrm{D}_\theta\tau^*$ имеют указанный в таблице вид:

Модель	$\tau(\theta)$	τ^*	$D_\theta\tau^*$
$N(0, \sigma^2)$	θ	$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	σ^2/n
$N(\mu, \theta^2)$	θ^2	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$	$2\theta^4/n$
$\Gamma(\theta, \lambda)$	θ	$\bar{X}/\lambda$	$\theta^2/\lambda n$
$\Gamma(a, \theta)$	$\Gamma'(\theta)/\Gamma(\theta)$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \ln a$	$\tau'(\theta)/n$
$\beta(\theta, 1)$	$1/\theta$	$-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$	$\frac{1}{n\theta^2}$

Модель	$\tau(\theta)$	τ^*	$D_\theta \tau^*$
$Bi(k,\theta)$	θ	$\bar{X}/k$	$\theta(1-\theta)/kn$
$\Pi(\theta)$	θ	$\bar{X}$	θ/n
$\overline{Bi}(r,\theta)$	$r\theta/(1-\theta)$	$\bar{X}$	$r\theta/[n(1-\theta)^2]$

Указание. Воспользоваться задачей 2.46.

2.49. Проверить непосредственно, что выборочное среднее $\bar{X}$ в логистической модели (см. задачу 2.27) не является эффективной оценкой θ.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 2.27.

2.50. Доказать, что оценка T^* в задаче 2.13 является оптимальной.

Указание. Рассмотреть линейные комбинации вида $\frac{1}{L}\left[a(\theta)\frac{\partial L}{\partial\theta} + b(\theta)\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}\right]$ и воспользоваться критерием Бхаттачария.

2.51. Рассматривается задача оценивания функции $\tau(\theta) = \theta^2$ в модели $\Gamma(\theta,\lambda)$ по выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Доказать, что $T^* = T^*(X) = \frac{n}{\lambda(\lambda n + 1)}\bar{X}^2$ — оптимальная несмещенная оценка $\tau(\theta)$; вычислив $D_\theta T^*$, убедиться в том, что эта оценка не является эффективной.

Указание. Воспользоваться задачами 2.21, 2.43 и указанием к задаче 2.50.

2.52. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $N(\theta_1, \theta_2^2)$. Применив критерий Бхаттачария, доказать, что $\bar{X}$ и S'^2 (см. задачу 2.1 п. г)) являются оптимальными несмещенными оценками соответственно для θ_1 и θ_2^2. Сравнить дисперсии этих оценок с соответствующими границами Рао — Крамера.

Указание. В первом случае достаточно рассмотреть $\frac{\partial \ln L}{\partial\theta_1}$, во втором — рассмотреть линейные комбинации вида $\frac{1}{L}\left[a(\theta)\frac{\partial L}{\partial\theta_2} + b(\theta)\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_2^2}\right]$; использовать задачу 2.44.

2.53.* Пусть $\bar{X}_1$, $S_1'^2$ и $\bar{X}_2$, $S_2'^2$ — оптимальные несмещенные оценки для среднего и дисперсии одного и того же нормального распределения, вычисленные по двум независимым выборкам объемов n_1 и n_2 соответственно. Какие функции от этих статистик являются наилучшими оценками тех же параметров, учитывающими всю исходную информацию? Сравнить точность новых оценок с исходными.

Указание. Использовать задачи 2.52 и 2.14.

2.54*. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из *обратного гауссовского распределения,* задаваемого плотностью

$$f(x; \lambda, \mu) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\}, \; x > 0, \; \lambda > 0, \; \mu \neq 0.$$

1) Убедиться в том, что $\bar{X}$ — оптимальная несмещенная оценка параметра μ в любом случае, известен или нет параметр λ. Получить отсюда, что $\mathrm{E}X_1 = \mu$, $\mathrm{D}X_1 = \mu^3/\lambda$.

2) Найти эффективную оценку λ^{-1} в случае известного μ.

Указание. Воспользоваться задачей 2.46 и критерием Бхаттачария.

2.55. Предположим, что ищется оценка для дифференцируемой вектор-функции $\tau(\theta) = (\tau_1(\theta), ..., \tau_m(\theta))$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$. Показать, что в случае регулярной модели для произвольной несмещенной оценки $\boldsymbol{T} = (T_1(\boldsymbol{X}), ..., T_m(\boldsymbol{X}))$ справедливо *неравенство информации*

$$D_\theta(\boldsymbol{T}) = \|\mathrm{cov}_\theta(T_i, T_j)\|_1^m \geqslant B'(\theta) I_n^{-1}(\theta) B(\theta),$$

где $\boldsymbol{B}(\theta) = \left\| \frac{\partial \tau_i(\theta)}{\partial \theta_j} \right\|$, и неравенство $\boldsymbol{A}_1 \geqslant \boldsymbol{A}_2$ между матрицами одинаковой размерности означает, что матрица $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2$ является неотрицательно определенной. В частности, для $\tau(\theta) \equiv \theta$ $D_\theta(T) \geqslant I_n^{-1}(\theta)$.

Указание. Рассмотреть произвольную линейную комбинацию $c_1\tau_1(\theta) + ... + c_m\tau_m(\theta) = \boldsymbol{c}'\tau(\theta)$, несмещенной оценкой которой является $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{T}$, и применить неравенство Рао — Крамера для скалярных оценок.

2.56. Показать, что если для некоторой функции $\tau(\theta)$ существует эффективная оценка, то она является достаточной статистикой. Таким образом, для регулярных экспоненциальных моделей (см. задачу 2.46) достаточная статистика всегда существует и имеет вид $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} = B(X_i)$ (что следует из критерия факторизации).

2.57. Доказать полноту достаточной статистики $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ для биномиальной модели $Bi(k, \theta)$ (см. задачу 2.48). Получить отсюда, что в данном случае несмещенные оценки существуют лишь для полиномов $\tau(\theta) = \sum_{j=0}^{r} a_j\theta^j$ степени $r \leqslant kn$, и при этом оптимальная оценка

$$\tau^* = \sum_{j=0}^{r} a_j (T_n)_j/(kn)_j\,.$$

Сравните этот результат с задачами 2.5, 2.7 и 2.8.

Указание. Воспользоваться свойством воспроизводимости распределения $Bi(k, \theta)$ (см. задачу 1.39 п. 3).

2.58. Доказать полноту достаточной статистики $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ для пуассоновской модели $\Pi(\theta)$ (см. задачу 2.48). Показать, что оптимальной оценкой для сходящегося при всех $\theta > 0$ степенного ряда $\tau(\theta) = \sum_{j \geqslant 0} a_j\theta^j$ является статистика $\tau^* = \sum_j a_j (T_n)_j/n^j$.

Указание. Воспользоваться свойством воспроизводимости распределения $\Pi(\theta)$ (см. задачу 1.39 п. 4) и задачу 2.9).

2.59. (продолжение задачи 2.58). Построить оптимальные оценки для функций

$$\tau(\theta) = e^{\theta(z-1)}\,,\quad \pi_k(\theta) = e^{-\theta}\theta^k/k!\,,\quad k = 0, 1, \ldots,$$

и $\tau_r(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\xi \geqslant r)$, $r = 1, 2, \ldots$

2.60*. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения степенного ряда, задаваемого вероятностями

$$f(x;\, \theta) = a(x)\theta^x/f(\theta),\ x = l, l+1, \ldots, f(\theta) = \sum_{x=l}^{\infty} a(x)\theta^x,\ \theta \in \Theta,$$

где $\Theta = (0, R)$ и $R > 0$ — радиус сходимости ряда $f(\theta)$.

1) Показать, что в данной модели эффективная оценка существует лишь для функции $\tau(\theta) = \theta f'(\theta)/f(\theta)$, и она имеет вид $\tau^* = \bar{X}$.

2) Доказать, что $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ — полная достаточная статистика и ее распределение имеет вид:

$$\mathbf{P}_0(T_n = t) = \theta^t b_n(t)/f^n(\theta), \quad t \geqslant nl,$$

где $b_n(t) = \operatorname{coef}_{z^t} f^n(z)$.

3) Убедиться в том, что статистика

$$\tau_s^* = \begin{cases} b_n(T_n - s)/b_n(T_n) & \text{при } T_n \geqslant nl + s, \\ 0 & \text{при } T_n < nl + s \end{cases}$$

— оптимальная оценка функции $\tau_s(\theta) = \theta^s$ для любого $s = 1, 2, \ldots$,

4) Построить оптимальную оценку функции $\tau(\theta) = \sum_{j=r}^{\infty} a_j \theta^j$, где степенной ряд предполагается сходящимся на Θ; получить отсюда, в частности, что оптимальная оценка функции $f(\theta)$ имеет вид $f^* = b_{n+1}(T_n)/b_n(T_n)$, если $T_n \geqslant (n+1)l$, и $f^* = 0$ при $T_n < (n+1)l$.

Указание. 1) Применить критерий эффективности для экспоненциальной модели (см. задачу 2.46).

2) Использовать производящую функцию

$$\varphi(z;\theta) \equiv \sum_{x=l}^{\infty} z^x f(x;\theta) = f(z\theta)/f(\theta).$$

3) Учесть соотношение $\sum_{j=l}^{k-nl} a(j) b_n(k-j) = b_{n+1}(k)$ при $k \geqslant (n+1)l$.

2.61. Показать, что оптимальной оценкой для $\tau(\theta) = \theta$ урезанного в нуле пуассоновского распределения (см. задачу 2.10) по выборке $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ является статистика $\tau^* = T\Delta^n 0^{T-1}/\Delta^n 0^T$ при $T = X_1 + \ldots + X_n \geqslant n+1$ и $\tau^* = 0$ при $T = n$, где $\Delta^n 0^k = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} C_n^r r^k$.

Указание. Применить задачу 2.60.

2.62. По выборке $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $\overline{Bi}(r, \theta)$ построить оптимальные оценки для $\tau_1(\theta) = \theta^s$ при целом $s \geqslant 1$ и $\tau_2(\theta) = \mathbf{P}_0(\xi = 0) = (1-\theta)^r$.

Указание. Воспользоваться решением задачи 2.60; см. также указание к задаче 2.11.

2.63*. Рассмотрим модель с конечным числом N возможных исходов и неизвестными вероятностями исходов $p_1, \ldots, p_N$ (см. задачу 2.29). Показать, что $\mathbf{T} = (\nu_1, \ldots, \nu_{N-1})$ — минимальная полная достаточная статистика. Получить отсюда, что несмещенные оценки в этой модели существуют лишь для полиномов от $p_1, \ldots, p_N$ степени, меньшей или равной n, и найти явный вид этих оценок.

Указание. Воспользоваться критерием для r-параметрического экспоненциального семейства и задачами 2.29 и 2.45, а также 1.52 п. б.).

2.64. Доказать оптимальность оценок, указанных в задачах 2.13 и 2.16.

Указание. Воспользоваться свойством полных достаточных статистик.

2.65. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Построить оптимальную оценку для $\tau(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\xi \leqslant x_0)$, где x_0 — заданное число.

Указание. Рассмотреть несмещенную оценку $T_1 = I(X_1 \leqslant x_0)$, где $I(A)$ — индикатор события A, и воспользоваться теоремой Рао — Блекуэлла — Колмогорова (см. при этом решение задачи 2.64 и 1.56).

2.66. Проверить, воспользовавшись критерием для r-параметрического экспоненциального семейства, что в случае модели $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ минимальной полной достаточной статистикой является пара $(\bar{X}, \sum_{i=1}^{n} X_i^2)$, а также $(\bar{X}, S^2)$. Установить оптимальность оценок, указанных в задаче 2.20 (ср. с задачей 2.52).

Указание. Перейти к новым параметрам $\theta_1' = \frac{\theta_1}{\theta_2^2}$, $\theta_2' = -\frac{1}{2\theta_2^2}$.

2.67. Показать, что в модели $\mathcal{N}(\theta, \gamma^2\theta^2)$ достаточной статистикой является пара $\boldsymbol{T} = (\bar{X}, S^2)$, но эта статистика не полная.

Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(\boldsymbol{T}) = (n + \gamma^2) \times S^2[(n-1)\gamma^2] - \bar{X}^2$ и вычислить ее среднее.

2.68. По результатам $n \geqslant 2$ независимых измерений диаметра θ_1 круга построить оптимальную несмещенную оценку его площади.

Указание. Погрешности измерений считать нормальными $\mathcal{N}(0, \theta_2^2)$ случайными величинами; использовать задачу 2.66.

2.69*. Доказать следующее утверждение (*теорема Басу*): если для модели $F = \{F(x; \theta), \theta \in \Theta\}$ существует полная достаточная статистика T и если статистика T_1 имеет распределение, не зависящее от параметра θ, то T_1 и T независимы.

Указание. Установить, что для любого события A условная $\mathbf{P}_\theta(T_1 \in A \mid T)$ и безусловная $\mathbf{P}_\theta(T_1 \in A)$ вероятности совпадают.

2.70*. Пусть (X_1, X_2, X_3) — выборка из распределения $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{N}(0, \theta^2)$. Построить оптимальную оценку для $\tau(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\xi \leqslant x_0)$.

У к а з а н и е. См. указание к задаче 2.65, задачу 2.69 и решение задачи 1.58.

2.71*. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$. Доказать, что статистики $\boldsymbol{T} = (\bar{X}, S^2)$ и $\boldsymbol{U} = \left(\frac{X_i - \bar{X}}{S},\ i = 1, \ldots, n\right)$ независимы.

У к а з а н и е. Установить, что распределение U не зависит от $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, и применить теорему Басу (см. задачу 2.69).

2.72*. По выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ построить оптимальную несмещенную оценку для функции

$$\tau(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\xi \leqslant x_0) = \Phi\left(\frac{x_0 - \theta_1}{\theta_2}\right).$$

У к а з а н и е. Рассмотреть несмещенную оценку $T_1 = I(X_1 \leqslant x_0)$, где $I(A)$ — индикатор события A, и вычислить $H(T) = \mathbf{E}_\theta(T_1 | \boldsymbol{T})$, где $\boldsymbol{T} = (\bar{X}, S^2)$; использовать задачи 2.71 и 1.58.

2.73. Убедиться в оптимальности оценок, указанных в задаче 2.21; показать, что при $a - \lambda n \geqslant 0$ — целом несмещенных оценок для $\tau_a(\theta) = \theta^{-a}$ не существует.

У к а з а н и е. Воспользоваться полнотой достаточной статистики T.

2.74*. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\Gamma(\theta, \lambda)$, $T = X_1 + \ldots + X_n$ и $\varphi(x)$ — заданная функция, для которой $\tau(\theta) = \mathbf{E}_\theta \varphi(\xi)$ существует. Доказать, что оптимальная оценка $\tau(\theta)$ имеет вид

$$\tau^* = \frac{\Gamma(\lambda n)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda(n-1))} \int_0^1 \varphi(xT) x^{\lambda - 1}(1 - x)^{(n-1)\lambda - 1} dx.$$

Получить отсюда результаты задач 2.48, 2.51 и 2.73.

У к а з а н и е. Установить равенство $\mathbf{E}_\theta \tau^* = \tau(\theta)$.

2.75* (продолжение задачи 2.74). Проверить, что оптимальной оценкой *функции надежности* $\tau(\theta; t) = \mathbf{P}_\theta(\xi \geqslant t)$ является статистика

$$\tau^* = [1 - B(t/T; \lambda, \lambda(n-1))] e(T - t),$$

где $B(x; a, b)$ — функция бета-распределения $\beta(a, b)$ и $e(x)$ — функция Хевисайда. В частности, для распределения $\Gamma(\theta, 1)$ функция $\tau(\theta; t) = e^{-t/\theta}$, а $\tau^* = (1 - t/T)^{n-1} e(T - t)$.

У к а з а н и е. Положить в задаче 2.74 $\varphi(x) = e(x - t)$.

2.76*. Доказать, что для распределения Вейбулла с неизвестным параметром масштаба θ — $W(0, \lambda, \theta)$ полной достаточной статистикой является $T = T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^{\lambda}$, а оптимальная оценка $\tau(\theta) = \mathbf{E}_{\theta}\varphi(\xi)$, где $\varphi(x)$ — заданная функция, имеет вид

$$\tau^* = (n-1)\int_0^1 \varphi((tT)^{1/\lambda})(1-t)^{n-2}\,dt\,.$$

В частности, $\mathbf{E}_{\theta}\xi^{\lambda} = \theta^{\lambda}$ и потому T/n — оптимальная оценка θ^{λ}.

2.77. Показать, что для *двухпараметрического экспоненциального распределения* $W(\theta_1, 1, \theta_2)$ достаточной статистикой является пара $\boldsymbol{T} = (X_{(1)}, \bar{X})$. Построить несмещенные оценки вида $\alpha X_{(1)} + \beta\bar{X}$ для неизвестных параметров модели.

Указание. Применить критерий факторизации и воспользоваться решением задачи 1.34, приняв во внимание, что $\mathcal{L}_{\theta}\left(\frac{\xi-\theta_1}{\theta_2}\right) = \Gamma(1,1)$.

2.78. Пусть наблюдаемая случайная величина ξ имеет область изменения $[a(\theta), b]$, где $a(\theta)$ — заданная монотонная функция θ. Показать, что минимальное значение выборки $X_{(1)}$ является достаточной статистикой для θ тогда и только тогда, когда плотность $f_{\xi}(x; \theta)$ имеет вид $f_{\xi}(x; \theta) = g(x)/h(\theta)$, $a(\theta) \leqslant x \leqslant b$. Этот же результат справедлив и для статистики $X_{(n)}$ в случае области $[a, b(\theta)]$, где $b(\theta)$ — заданная монотонная функция θ.

Указание. Применить критерий факторизации.

2.79. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $R(0,\theta)$. Доказать, что $X_{(n)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ — полная достаточная статистика для θ. Получить отсюда, что $T^* = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$ — оптимальная несмещенная оценка θ. Рассмотреть класс статистик $T_{\lambda} = \lambda T^*$ и убедиться в том, что в нем имеются оценки с меньшей среднеквадратической ошибкой, чем у оценки T^*.

Указание. Использовать задачу 2.24.

2.80. Доказать полноту достаточной статистики $\boldsymbol{T} = (X_{(1)}, X_{(n)})$ для модели $R(\theta_1, \theta_2)$. Убедиться в оптимальности оценок, указанных в задаче 2.25. Построить оптимальные оценки для θ_1 и θ_2.

Указание. Воспользоваться задачей 1.36.

2.81*. Показать, что статистика $\boldsymbol{T} = (X_{(1)}, X_{(n)})$ — достаточная для модели $R(a(\theta), b(\theta))$, где $a(\theta) < b(\theta) \forall \theta$ — заданные непрерывные функции скалярного параметра θ. Определить, в каких случаях существует одномерная достаточная статистика и установить ее вид. Убедиться, в частности, что для модели $R(-\theta, \theta)$ достаточной статистикой является $\max(|X_{(1)}|, |X_{(n)}|)$, а для моделей $R(\theta, \theta+1)$ и $R(\theta, 2\theta)$ минимальной достаточной статистикой является $\boldsymbol{T}$.

2.82*. Пусть произведено одно наблюдение X над дискретной случайной величиной с распределением

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta & \text{при } x = -1, \\ \theta^x(1-\theta)^2 & \text{при } x = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \qquad \theta \in (0, 1).$$

Показать, что X — не полная, но ограниченно полная достаточная статистика.

Указание. Решить уравнение несмещенности $\mathrm{E}_\theta\varphi(X) = 0 \forall \theta$ в классе всех функций и в подклассе ограниченных функций.

2.83*. *Оценивание размера конечной совокупности.* Пусть в задачах 2.36, 2.37 величина $m = 1$. Доказать, что случайная величина η является полной достаточной статистикой, и, следовательно, указанные в задаче 2.37 оценки — оптимальные.

Замечание. Этот результат справедлив и для произвольного значения m.

§ 3. Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.)

2.84*. Показать, что если в случае регулярной модели для диффренцируемой параметрической функции $\tau(\theta)$ существует эффективная оценка τ^*, то о. м. п. $\hat{\theta}_n$ параметра θ однозначно определяется уравнением $\tau(\theta) = \tau^*$. Применив этот результат, найти $\hat{\theta}_n$ для моделей, приведенных в задаче 2.48.

Указание. Воспользоваться критерием эффективности и показать, что $\left.\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}_n} < 0$ (предполагается, что функция правдоподобия $L = L(\boldsymbol{x}; \theta)$ дважды дифференцируема по параметру θ).

2.85. Вычислить асимптотическую эффективность выборочной медианы $T_n = X_{([n/2]+1)}$ как оценки среднего θ модели $\boldsymbol{N}(\theta, \sigma^2)$.

Указание. Воспользоваться задачей 1.32 об асимптотической нормальности выборочных квантилей.

2.86. Доказать, что для общей нормальной модели $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ о. м. п. $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_{1n}, \hat{\theta}_{2n}) = (\bar{X}, S)$.

Указание. Составить и решить уравнения правдоподобия.

2.87 (продолжение задачи 2.86). Показать, что $\hat{\tau}_n = \Phi\left(\frac{x_0 - \bar{X}}{S}\right)$ — о. м. п. функции $\tau(\theta) = \Phi\left(\frac{x_0 - \theta_1}{\theta_2}\right)$ (см. задачу 2.72). Найти асимптотическое распределение $\hat{\tau}_n$ при $n \to \infty$.

Указание. Воспользоваться свойством инвариантности о. м. п. и утверждением об их асимптотической нормальности.

2.88. Доказать асимптотическую несмещенность и состоятельность о. м. п. $\hat{\theta}_n$ параметра θ модели $\mathcal{N}(\mu, \theta^2)$ (ср. с задачей 2.16) и исследовать ее предельный при $n \to \infty$ закон распределения. Вычислить асимптотическую эффективность оценки, приведенной в задаче 2.15.

Указание. Использовать задачи 2.43 и 2.84.

2.89. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\mathcal{N}(0, 2\theta)$. Найти о. м. п. $\hat{\theta}_n$ и доказать ее состоятельность.

2.90. По выборке $((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ из двумерного нормального распределения $\mathcal{N}\left((0, 0), \begin{Vmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{Vmatrix}\right)$ с неизвестными $\sigma^2 > 0$ и $\rho \in (-1, 1)$ построить о. м. п. $\hat{\sigma}^2$ и $\hat{\rho}$.

Указание. Перейти к новым параметрам $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$, положив $q_1 = q_1(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}$, $q_2 = q_2(\theta) = \frac{\rho}{\sigma^2(1-\rho^2)}$ (здесь $\theta = (\sigma^2, \rho)$), и воспользоваться свойством инвариантности о. м. п.

2.91*. Имеется выборка $((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ из двумерного нормального распределения $\mathcal{N}\left((0, 0), \begin{Vmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{Vmatrix}\right)$, $\theta \in (-1, 1)$. Составить уравнение правдоподобия для отыскания о. м. п. $\hat{\theta}_n$ и вычислить ее асимптотическую дисперсию.

2.92 (продолжение задачи 2.91). Рассмотреть в качестве оценки θ выборочный коэффициент корреляции $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ и вычислить его асимптотическую эффективность.

Указание. При вычислении моментов использовать характеристическую функцию.

2.93*. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из k-мерного нормального распределения $N(\mu, \Sigma)$ с неизвестными $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ и $\Sigma = \|\sigma_{ij}\|_1^k$, $|\Sigma| \neq 0$, т. е. $X_l = (X_{l1}, \ldots, X_{lk})$, $l = 1, \ldots, n$, — независимые случайные величины с плотностью

$$f(x; \theta) = \frac{1}{[(2\pi)^k |\Sigma|]^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\},$$

$x = (x_1, \ldots, x_k)$, $\theta = (\mu, \Sigma)$. Обозначим $\bar{X} = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k)$, где $\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} X_{li}$, $\hat{\Sigma} = \|S_{ij}\|_1^k$, где $S_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(X_{li} - \bar{X}_i)(X_{lj} - \bar{X}_j)$ — выборочная ковариация, соответствующая теоретической ковариации σ_{ij}, так что

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} X_l, \quad \hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}(X) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(X_l - \bar{X})(X_l - \bar{X})'.$$

1) Доказать, что о. м. п. параметров μ и Σ равны соответственно $\bar{X}$ и $\hat{\Sigma}$.

2) Убедиться в том, что $\frac{n}{n-1}\hat{\Sigma}$ — несмещенная оценка Σ.

3) Получить следующее выражение для максимума функции правдоподобия:

$$\max_{\theta} L(x; \theta) = L(x; \bar{x}, \hat{\Sigma}(x)) = (2\pi e)^{-kn/2} |\hat{\Sigma}(x)|^{-n/2}.$$

Указание. Привести функцию правдоподобия к виду

$$L(x; \theta) = [(2\pi)^k |\Sigma|]^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{n}{2}(\bar{x} - \mu)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) - \right.$$
$$\left. - \frac{n}{2} \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(x)) \right\};$$

использовать задачу 2.4.

2.94*. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из *логнормального распределения*, т. е. $X_i = e^{Y_i}$, где $\mathcal{L}(Y_i) = N(\theta_1, \theta_2^2)$. Построить о. м. п. для функций $\tau_1(\theta) = \mathbf{E}_\theta X_1$ и $\tau_2(\theta) = \mathbf{D}_\theta X_1$. Вычислить $\mathbf{E}_\theta \hat{\tau}_{1n}$ и убедиться в асимптотической несмещенности оценки $\hat{\tau}_{1n}$.

Указание. Воспользоваться свойством инвариантности о. м. п.

2.95. *Распределение Кептайна.* Это распределение задается плотностью

$$f(x; \theta) = \frac{g'(x)}{\sqrt{2\pi}\theta_2} \exp\left\{ -\frac{1}{2\theta_2^2}(g(x) - \theta_1)^2 \right\}, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2),$$

где $g(x)$ — некоторая дифференцируемая монотонно возрастающая функция. Убедиться в том, что справедливо следующее обобщение результата задачи 2.86: о. м. п. $\hat{\theta}_n = (\bar{g}, T)$, где $\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$, $T^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g(X_i) - \bar{g})^2$. Является ли $\bar{g}$ эффективной оценкой θ_1? Показать, что при известном значении $\theta_1 = a$ эффективной оценкой θ_2^2 является статистика

$$T_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(g(X_i) - a)^2$$

[ср. с соответствующими результатами для нормальной модели (задача 2.48)].

| Указание. Воспользоваться задачей 2.46.

2.96. Пусть случайная величина ξ имеет распределение типа степенного ряда (см. задачу 2.60). Показать, что уравнение правдоподобия для нахождения о. м. п. $\hat{\theta}_n$ в данном случае имеет вид $\mu(\theta) = \bar{X}$, где $\mu(\theta) = \mathbf{E}_\theta\xi$. Вычислить асимптотическую дисперсию оценки $\hat{\theta}_n$. Применить эти результаты для оценивания параметра θ модели $\bar{B}i(r, \theta)$.

2.97 Записать уравнения метода накопления для приближенного вычисления о. м. п. $\hat{\theta}_n$ параметра θ урезанного в нуле пуассоновского распределения (см. задачу 2.10).

| Указание. Использовать решение задачи 2.96.

2.98. Пусть в полиномиальном распределении $M(n; p_1, p_N)$ вероятности исходов $p_i = p_i(\theta)$, $i = 1, ..., N$, где θ — неизвестный скалярный параметр. Записать уравнения метода накопления для приближенного вычисления о. м. п. $\hat{\theta}_n$.

2.99. Рассматривается задача оценивания параметра θ модели Коши $K(\theta)$ по соответствующей выборке $X = (X_1, . , X_n)$. Записать уравнения метода накопления для приближенного вычисления о. м. п. $\hat{\theta}_n$. Рассмотреть в качестве оценки θ выборочную медиану $T_n = X_{([\frac{n}{2}]+1)}$ и вычислить ее асимптотическую эффективность.

| Указание. Использовать задачи 2.43 и 1.32.

2.100. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из равномерного распределения $R(0, \theta)$. Показать, что в данном случае о. м. п. $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$, убедиться в ее состоятельности и найти ее предельный закон распределения $(n \to \infty)$.

| Указание. Воспользоваться задачами 2.24 и 2.79.

2.101. Показать, что в случае модели $R(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ любое значение $\theta \in \left[X_{(n)} - \frac{1}{2}, X_{(1)} + \frac{1}{2}\right]$ является о. м. п. $\hat{\theta}_n$. Какая точка этого интервала является несмещенной оценкой θ?

Указание. Использовать решение задачи 2.80 и задачу 1.36.

2.102. Показать, что для параметра сдвига θ распределения Вейбулла $W(\theta,\alpha,b)$ при $0<\alpha\leqslant 1$ о. м. п. $\hat{\theta}_n = X_{(1)}$, убедиться в ее состоятельности и найти ее предельный при $n\to\infty$ закон распределения.

Указание. Использовать решение задач 1.37 и 2.26.

2.103. Случайная величина ξ, характеризующая срок службы элементов электронной аппаратуры, имеет *распределение Релея* $W(0, 2, \sqrt{\theta})$, плотность которого $f(x;\theta) = (2x/\theta)e^{-x^2/\theta}$, $x\geqslant 0$. Построить по соответствующей выборке $X = (X_1, ..., X_n)$ о. м. п. $\hat{\theta}_n$ (ср. с задачей 2.76).

2.104. По выборке $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения $\Gamma(\theta, \lambda)$ требуется оценить функцию $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$. Показать, что о. м. п. $\hat{\tau}_n = \lambda/\bar{X}$. Убедиться в состоятельности этой оценки и найти ее предельный при $n\to\infty$ закон распределения.

Указание. Воспользоваться задачами 2.21, 2.43 и 2.84.

2.105*. Доказать, что для *распределения Лапласа,* задаваемого плотностью $f(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$, $x\in R$, о. м. п. $\hat{\theta}_n$ совпадает с выборочной медианой. Можно ли здесь воспользоваться теоремой об асимптотической нормальности о. м. п.?

2.106*. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из распределения $N(\theta, 1)$. Тогда (см. задачу 2.84) о. м. п. $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ и $L_\theta(\bar{X}) = N(\theta, 1/n)$. Рассмотреть в качестве оценки θ статистику

$$T_n = \begin{cases} a\bar{X} & \text{при } |\bar{X}|\geqslant a_n, \\ b\bar{X} & \text{при } |\bar{X}|<a_n, \end{cases}$$

где константа $a_n\to 0$, но $\sqrt{n}a_n\to\infty$ при $n\to\infty$, и вычислить ее асимптотическую эффективность.

2.107. Привести примеры о. м. п. $\hat{\theta}_n$, для которых $D_\theta\hat{\theta}_n = o(n^{-1})$.

Указание. Рассмотреть модель $R(0,\theta)$ (см. задачу 2.100) и модель Вейбулла (см. задачи 2.102 и 1.37).

2.108. Рассмотрев задачу оценивания функции $\tau(\theta) = \theta^{-1}$ в модели $\Pi(\theta)$, убедиться в том, что о. м. п. $\hat{\tau}_n$ ни при каком n не имеет конечных моментов, но ее симптотическая дисперсия существует и равна $(\theta^3 n)^{-1}$.

| Указание. Использовать задачи 2.84, 1.39 и 2.43.

2.109*. *Преобразования, стабилизирующие дисперсию.* Для моделей $Bi(k, \theta)$, $\Pi(\theta)$, $N(\mu, \theta^2)$ и $\Gamma(\theta, \lambda)$ найти такие параметрические функции $\tau(\theta)$, чтобы асимптотические дисперсии соответствующих о. м. п. $\hat{\tau}_n$ не зависели от параметра θ.

| Указание. Использовать задачу 2.43.

2.110. Смоделировать выработки объемами $n = 10$, 100, 1000 и получить о. м. п. параметров следующих распределений:

1) $N(\theta_1, \theta_2^2)$, при моделировании положить $\theta_1 = 1$, $\theta_2^2 = 4$;
2) $Bi(1, \theta)$, при моделировании положить $\theta = 0{,}7$;
3) $R(0, \theta)$, при моделировании положить $\theta = 1$.

| Указание. Использовать задачи 2.86, 2.84 и 2.100 соответственно.

2.111*. *Оценивание размера конечной совокупности.* В условиях задачи 2.83 установить, что о. м. п. $\hat{N}$ неизвестного размера совокупности N при $\eta > 1$ однозначно находится из условия

$$S(\hat{N}, \eta) \leqslant n < S(\hat{N} - 1, \eta),$$

где $S(N, k) = \ln \frac{N+1}{N+1-k} / \ln \frac{N+1}{N}$ при $N \geqslant k > 1$, $S(k - 1, k) = \infty$. Если же $\eta = 1$, то $\hat{N} = 1$.

Определить, при каких значениях η оценка $\hat{N} = \eta$. Предполагая, что $n, N \to \infty$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha = \frac{n}{N+1} \leqslant \alpha_1 < \infty$, где α_0, α_1 — некоторые константы, получить приближенное выражение для о. м. п. $\hat{\alpha} = n/(\hat{N} + 1)$. Обобщить этот результат на случай произвольного значения m.

2.112 (продолжение задачи 2.111). Для оценки неизвестного числа N рыб в озере проводят следующий эксперимент. На первом этапе по схеме случайной выборки без возвращения вылавливают m_1 рыб, метят их и выпускают обратно в озеро. На втором этапе по аналогичной схеме вылавливают еще m_2 рыб и подсчитывают число μ_2 оказавшихся среди них меченых рыб (так что число различных пойманных за оба улова рыб $\eta = m_1 + m_2 - \mu_2$). Показать, что о. м. п. $\hat{N}$ по данным μ_2 определяется равенством $\hat{N} = \left[\frac{m_1 m_2}{\mu_2}\right]$. Сравнить этот результат при $m_1 = m_2$ с результатом, полученным в задаче 2.36.

| Указание. Учесть, что статистика μ_2 имеет гипергеометрическое распределение $H(m_1, N, m_2)$.

2.113*. *Выборочный контроль.* Имеется партия из N изделий, содержащая некоторое (неизвестное) число D дефектных изделий. Чтобы оценить параметр D или некоторую заданную функцию от него $\tau(D)$, случайным образом без возвращения из всей партии извлекается $n(n<N)$ изделий, каждое из которых проверяется на доброкачественность. Пусть $X_i = 1$, если i-е проверяемое изделие дефектно, и $X_i = 0$ в противном случае, $i = 1, \ldots, n$.

1) Показать, что $d_n = X_1 + \ldots + X_n$ (общее число обнаруженных в выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ дефектных изделий) есть полная достаточная статистика для D, имеющая гипергеометрическое распределение $H(D,N,n)$, и, основываясь на этом, убедиться в том, что несмещенные оценки существуют лишь в случаях, когда $\tau(D)$ — многочлен степени не выше n. В этом случае, если $\tau(D) = \sum_{j=0}^{n} a_j(D)_j$, $(D)_j = D(D-1)\ldots(D-j+1)$, $(D)_0 = 1$, то оптимальной несмещенной оценкой $\tau(D)$ является статистика

$$\tau^* = T(d_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j(d_n)_j(N)_j/(n)_j .$$

2) Получить явный вид оптимальных оценок для функций $\tau_1(D) = D$ и $\tau_2(D) = D(N - D)$, которые с точностью до множителей являются соответственно средним и дисперсией статистики d_n (см. п. 6 гл. 1).

3) Убедиться в том, что о. м. п. $\hat{D}_n = [(N + 1)d_n/n]$.

Указание. Использовать решение задачи 2.33 и формулы для моментов распределения $H(D,N,n)$.

2.14. *Объединение статистической информации.* Пусть $\boldsymbol{X}_j = (X_{j1}, \ldots, X_{jn_j})$, $j = 1, \ldots, k$, — независимые выборки из распределений $\boldsymbol{N}(\theta_{j1}, \theta_2^2)$, $j = 1, \ldots, k$, соответственно и $\bar{X}_j$, $S_j^2 = S^2(\boldsymbol{X}_j)$ — соответствующие выборочные средние и дисперсии. Доказать, что $\hat{\theta} = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k, \hat{\theta}_2)$ — о. м. п. для $\theta = (\theta_{11}, \ldots, \theta_{k1}, \theta_2)$, где $\hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n_1 + \ldots + n_k} \sum_{j=1}^{k} n_j S_j^2$; несмещенной же оценкой для общей дисперсии θ_2^2 является статистика

$$\tilde{\theta}_2^2 = \frac{n_1 + \ldots + n_k}{n_1 + \ldots + n_k - k} \hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n_1 + \ldots + n_k - k} \sum_{j=1}^{k} n_j S_j^2 .$$

Указание. Использовать решение задачи 2.86.

§ 4. Доверительное оценивание

2.115. Показать, что γ-доверительный интервал для параметра θ модели $\boldsymbol{N}(\theta, \theta^2)$, $\theta > 0$, по выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ имеет вид $(\bar{X}/(1 + c_\gamma/\sqrt{n}),\ \bar{X}/(1 - c_\gamma/\sqrt{n}))$[1]. Получить соответствующее решение для модели $\boldsymbol{N}(\theta, \theta^2)$, $\theta < 0$.

Указание. Использовать тот факт, что $\boldsymbol{L}_0((\bar{X} - \theta)\sqrt{n}/\theta) = \boldsymbol{N}(0, 1)$.

2.116. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из распределения $\boldsymbol{N}(\theta, \sigma^2)$.

1) Убедиться в том, что любой интервал вида $\Delta_\gamma(\boldsymbol{X}) = \left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} g_2,\ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} g_1\right)$, где $g_1 < g_2$ — любые числа, удовлетворяющие условию $\Phi(g_2) - \Phi(g_1) = \gamma$, является γ-доверительным интервалом для параметра θ.

Доказать, что наикратчайшим среди этих интервалов является интервал $\Delta_\gamma^*(\boldsymbol{X}) = \left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} c_\gamma\right)$.

2) Сколько необходимо произвести наблюдений $n = n(l, \gamma)$, чтобы точность локализации параметра при доверительном уровне γ была равна заданной величине l? Вычислить $n(l, \gamma)$ при $\gamma = 0{,}99$, $l = 0{,}5$ и $l = 0{,}1$ (величина $\sigma = 1$). Как изменяется доверительный уровень γ в зависимости от l и n?

Указание. Воспользоваться центральной статистикой $G(\boldsymbol{X}; \theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \theta)$.

2.117. Доказать, что γ-доверительным интервалом для среднеквадратического отклонения θ модели $\boldsymbol{N}(\mu, \theta^2)$ является любой интервал $\delta_\gamma(X) = (T/a_2,\ T/a_1)$, где $T^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$, а числа $a_1 < a_2$ выбираются из условия $\int_{a_1}^{a_2} x k_n(x^2) dx = \gamma/2$, где $k_n(t)$ — плотность распределения $\chi^2(n)$. Определить наикратчайший в этом классе интервал $\delta_\gamma^*(\boldsymbol{X})$.

Указание. Воспользоваться тем, что $L_0(T^2/\theta^2) = \chi^2(n)$.

2.118 (продолжение задачи 2.117). Показать, что центральный γ-доверительный интервал для дисперсии θ^2 имеет вид

[1] Напомним, что $c_\gamma = u_{(1+\gamma)/2} = \Phi^{-}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

$$\Delta_\gamma(X) = (T^2/g_2, T^2/g_1),\ g_1 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n},\ g_2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n},$$

в то время как наикратчайшим среди интервалов такого вида, где числа $g_1 < g_2$ удовлетворяют условию $\int\limits_{g_1}^{g_2} k_n(t)dt = \gamma$, является интервал $\Delta^*_\gamma(X) = (T_1^{*2}, T_2^{*2})$ (см. решение предыдущей задачи).

2.119. По выборке $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения $N(\theta_1, \theta_2^2)$ построить односторонние и двусторонний γ-доверительные интервалы для среднего θ_1.

Указание. Использовать утверждение

$$L_\theta\left(\sqrt{n-1}\frac{\bar{X}-\theta_1}{S}\right) = S(n-1).$$

2.120. По выборке $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения $N(\theta_1, \theta_2^2)$ построить односторонние и двусторонний γ-доверительные интервалы для дисперсии $\tau = \theta_2^2$.

Указание. Воспользоваться теоремой Фишера.

2.121. По реализации (2,96 3,07 3,02 2,98 3,06) выборки объема 5 из нормального распределения с неизвестными параметрами рассчитать 0,95-доверительные интервалы для среднего и дисперсии.

2.122. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ и $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ — две независимые выборки, причем первая из распределения $L(\theta^{(1)}, \sigma_1^2)$, а вторая из распределения $N(\theta^{(2)}, \sigma_2^2)$. Построить γ-доверительный интервал для разности средних $\tau = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}$.

Указание. Установить, что $L((\bar{X}-\bar{Y}-\tau)/\sigma) = N(0, 1)$, $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$.

2.123 (продолжение задачи 2.122). Пусть в отличие от предыдущего случая все наблюдения имеют одинаковую, но неизвестную дисперсию θ_2^2, т. е. $L(X_i) = N(\theta_1^{(1)}, \theta_2^2)$, $L(Y_j) = N(\theta_1^{(2)}, \theta_2^2)$. По-прежнему требуется оценить разность средних $\tau = \theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}$. Рассмотреть более общую ситуацию, когда дисперсии неизвестны, но различаются лишь известным множителем, т. е. $L(X_i) = N(\theta_1^{(1)}, c\theta_2^2)$, $L(Y_j) = N(\theta_1^{(2)}, \theta_2^2)$, c — известно.

Указание. Установить, что случайная величина $t_{m+n-2} = \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}(\bar{X}-\bar{Y}-\tau)/\sqrt{nS^2(X)+mS^2(Y)}$ имеет распределение Стьюдента $S(m+n-2)$.

2.124. В результате двух равноточных измерений угла получены следующие результаты (в градусах): 20,76 и

20,98. Еще шесть независимых и равноточных измерений того же угла выполнены с помощью другого прибора и были получены такие результаты: 21,64; 21,54; 22,32; 20,56; 21,43 и 21,07. Предполагается, что случайные ошибки результатов измерений распределены нормально, причем известно, что первый прибор менее точен (ему соответствует дисперсия, превышающая в четыре раза дисперсию, соответствующую второму прибору). Рассчитать 0,95-доверительный интервал для разности систематических ошибок, отвечающих этим приборам.

Указание. Воспользоваться решением задачи 2.123.

2.125 (продолжение задачи 2.124). Пусть, наконец, выборки имеют разные дисперсии, т. е. $\boldsymbol{L}(X_i) = \boldsymbol{N}(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)2})$, $\boldsymbol{L}(Y_j) = \boldsymbol{N}(\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)2})$. Построить доверительный интервал для отношения $\tau = \theta_2^{(1)2}/\theta_2^{(2)2}$.

Указание. Установить, что центральной статистикой является в данном случае

$$F_{n-1,\,m-1} = \frac{n(m-1)}{m(n-1)} \, \frac{S^2(X)}{S^2(Y)} \Big/ \tau .$$

2.126. В двух лабораториях определялась концентрация серы (в %) в стандартном образце дизельного топлива. Шесть независимых равноточных измерений в первой лаборатории дали следующие результаты: 0,869, 0,874, 0,867, 0,875, 0,870, 0,869. В результате аналогичных пяти равноточных измерений во второй лаборатории были получены такие значения: 0,865, 0,870, 0,866, 0,871, 0,868. Предполагая справедливым нормальный закон ошибок измерений, построить 0,95-доверительный интервал для отношения дисперсий измерений в 1-й и 2-й лабораториях. Если есть основания считать эти дисперсии одинаковыми, то рассчитать аналогичный интервал для разности систематических ошибок, допускаемых в обеих лабораториях.

2.127. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — две независимые выборки из распределений $\Gamma(\theta_1, 1)$ и $\Gamma(\theta_2, 1)$ соответственно. Построить центральный γ-доверительный интервал для отношения $\tau = \theta_2/\theta_1$.

Указание. Использовать задачу 1.51.

2.128. Убедиться в том, что $\left(X_{(1)} + \frac{\ln(1-\gamma)}{n}, \quad X_{(1)}\right)$, где $X_{(1)} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$, есть γ-доверительный интервал для параметра θ экспоненциального распределения с плотностью $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geqslant \theta$.

Указание. Найти распределение статистики $X_{(1)}$ и учесть, что событие $\{X_{(1)} \geqslant \theta\}$ является достоверным.

2.129. Убедиться в том, что $(X_{(n)}, X_{(n)}/\sqrt[n]{1-\gamma})$ есть γ-доверительный интервал для параметра θ модели $R(0, \theta)$ по выборке объема n.

Указание. Установить, что $\mathcal{L}_\theta((X_{(n)}/\theta)^n) = R(0, 1)$ (см. задачу 1.35).

2.130. Рассмотрим модель $W(0, \lambda, \theta)$ (см. задачу 2.76). Убедиться в том, что центральным γ-доверительным интервалом для функции $\tau(\theta) = \theta^\lambda$ является интервал $(2T/\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, 2n}, 2T/\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, 2n})$. В частности, при $\lambda = 1$ имеем соответствующее решение для экспоненциальной модели $\Gamma(\theta, 1)$.

Указание. Использовать решение задачи 2.76.

2.131*. Убедиться в том, что γ-доверительная область для параметров $(\theta_1, \tau = \theta_2^2)$ общей нормальной модели $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ по выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ имеет вид

$$G_\gamma(X) = \{(\theta_1, \tau): \tau > n(\bar{X} - \theta_1)^2/c^2_{\gamma 1},\ nS^2/\chi^2_{\frac{1+\gamma_2}{2}, n-1} < \tau < nS^2/\chi^2_{\frac{1-\gamma_2}{2}, n-1}\},$$

где $\gamma_1\gamma_2 = \gamma$.

Указание. Воспользоваться теоремой Фишера

2.132*. Пусть $(X_i = (X_{i1}, X_{i2}), i = 1, \dots, n)$ — выборка из двумерного нормального распределения

$$\mathcal{N}\left((\theta_1, \theta_2),\ \Sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{Vmatrix}\right), -1 < \rho < 1,$$

с известной матрицей Σ. Используя задачу 1.59, построить γ-доверительную область для $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

2.133. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из распределения $Bi(1, \theta)$. Основываясь на точечной оценке $T = \bar{X}$ параметра θ, показать, что центральный γ-доверительный интервал для него (T_1, T_2) определяется условиями

$$\sum_{r=nT}^{n} C_n^r T_1^r (1 - T_1)^{n-r} = \sum_{r=0}^{nT} C_n^r T_2^r (1 - T_2)^{n-r} = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Построить приближенный доверительный интервал для θ при больших n.

Указание. Использовать задачи 1.39 п. 3), 2.43 и 2.84.

2.134. По выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ для бернуллиевской модели $Bi(1, \theta)$ построить асимптотический (при $n \to \infty$) γ-доверительный интервал для θ, основываясь на нормальной аппроксимации $L_\theta(\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)/\sqrt{\theta(1-\theta)}) \sim N(0,1)$

(теорема Муавра — Лапласа). Сравнить полученное решение с решением, основанным на асимптотических свойствах оценок максимального правдоподобия (см. задачу 2.133).

2.135 (продолжение задачи 2.134). Убедиться в том, что $\left(\arcsin\sqrt{\bar{X}} \pm \frac{c_\gamma}{2\sqrt{n}}\right)$ — асимптотический γ-доверительный интервал для функции $\tau(\theta) = \arcsin\sqrt{\theta}$.

| Указание. Использовать задачу 2.109.

2.136. При 540 испытаниях в схеме Бернулли положительный результат наблюдался 216 раз. Рассчитать 0,95-доверительный интервал для дисперсии числа положительных исходов.

2.137. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из распределения $\Pi(\theta)$. Основываясь на точечной оценке $T = \bar{X}$, показать, что центральный γ-доверительный интервал (T_1, T_2) для θ определяется условиями

$$\sum_{r=nT}^{\infty} e^{-nT_1} \frac{(nT_1)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{nT} e^{-nT_2} \frac{(nT_2)^r}{r!} = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Приближенный же γ-доверительный интервал (при больших n) есть $(\bar{X} \pm c_\gamma\sqrt{\bar{X}/n})$.

2.138. Построить асимптотический γ-доверительный интервал для параметра θ пуассоновской модели $\Pi(\theta)$, воспользовавшись нормальной аппроксимацией $L_\theta(2\sqrt{n}(\sqrt{\bar{X}} - \sqrt{\theta})) \sim N(0, 1)$ (см. задачу 2.109) или аппроксимацией $L_\theta\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta}}\right) \sim N(0, 1)$ (центральная предельная теорема). Сравнить с соответствующим решением предыдущей задачи.

2.139. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Пусть известно значение их суммы $X_1 + X_2 = n$. Построить при этом условии доверительный интервал для $\theta = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ по наблюдению над X_1.

| Указание. Найти условное распределение $L(X_1 | X_1 + X_2 = n)$ (см. задачу 1.54) и воспользоваться решением задачи 2.133.

2.140. Построить асимптотический γ-доверительный интервал для параметра θ распределения степенного ряда (см. задачу 2.60). Применить полученный результат для оценивания параметра θ модели $Bi(r, \theta)$.

| Указание. Использовать задачу 2.96 и ее решение.

2.141. Построить асимптотический γ-доверительный интервал для параметра θ модели $\Gamma(\theta, \lambda)$.

Указание. Использовать задачи 2.43 и 2.48, а также аппроксимацию, полученную в задаче 2.109.

2.142. Построить асимптотический γ-доверительный интервал для параметра θ модели $N(\mu, \theta^2)$.

Указание. Воспользоваться аппроксимацией $L_0\sqrt{2n}(\ln\hat\theta_n - \ln\theta) \sim N(0, 1)$, полученной в задаче 2.109.

2.143. Построить асимптотический γ-доверительный интервал для функции $\tau(\theta) = \Phi\left(\frac{x_0 - \theta_1}{\theta_2}\right)$ в модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$ (см. задачу 2.72).

Указание. Использовать задачу 2.87.

2.144*. Для полиномиальной модели $M(n; p_1, ..., p_N)$ с неизвестными параметрами $p_1, ..., p_N$ (см. задачу 2.29) построить асимптотическую (при $n \to \infty$) γ-доверительную область для $p_1, ..., p_N$, основанную на соответствующих оценках максимального правдоподобия.

Указание. Использование задачи 2.63, 2.45 и асимптотический вариант задачи 1.40: если $L(Y_n) \sim N(\mu_n, \Sigma_n)$ при $n \to \infty$ и $|\Sigma_n| \neq 0$, то $L((Y_n - \mu_n)'\Sigma_n^{-1} \times (Y_n - \mu_n)) \to \chi^2(m)$, где m — размерность вектора Y_n.

2.145*. Пусть $n, \bar{X}$ и S^2 — соответственно объем, выборочные среднее и дисперсия выборки из распределения $N(\theta_1, \theta_2^2)$. Показать, что с вероятностью γ результат следующего, $(n+1)$-го испытания находится в интервале

$$\left(\bar{X} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1} S\sqrt{(n+1)/(n-1)}\right).$$

Указание. Воспользоваться теоремой Фишера.

2.146 (продолжение задачи 2.145). В результате пяти независимых взвешиваний одного и того же тела получены следующие результаты (в граммах): 4,12; 3,92; 4,55; 4,04; 4,35. Считая погрешности измерений нормальными $N(0, \theta_2^2)$ случайными величинами, указать 0,95-доверительный интервал для результата предстоящего шестого взвешивания.

2.147. Пусть $L(\xi) = \chi^2(n)$, где число степеней свободы n неизвестно. Рассчитать приближенный 0,9-доверительный интервал для n, соответствующий реализации $\xi = 157{,}4$.

Указание. Воспользоваться нормальной аппроксимацией для распределения хи-квадрат (задача 1.45).

2.148. По выборкам, полученным в задаче 2.110, построить доверительные интервалы для соответствующих параметров.

Указание. Воспользоваться задачами 2.119, 2.120, 2.133 и 2.129 соответственно.

Глава 3
ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

1. *Статистической гипотезой* (или просто *гипотезой*) называют любое предположение о виде или свойствах распределения наблюдаемых в эксперименте случайных величин. Пусть для исследуемого процесса сформулирована некоторая гипотеза H_0 (ее называют *основной* или *нулевой* гипотезой), тогда задача проверки этой гипотезы заключается в конструировании такого правила (алгоритма), которое позволяло бы по результатам соответствующих наблюдений (по имеющимся статистическим данным) принять или отклонить H_0. Любое такое правило называют *статистическим критерием* (или просто *критерием) согласия* для гипотезы H_0. Если гипотеза H_0 однозначно фиксирует распределение наблюдений, то ее называют *простой,* в противном случае — *сложной.*

Пусть результат эксперимента описывается некоторой случайной величиной $\boldsymbol{X}=(X_1, ..., X_n)$ и H_0 — некоторая гипотеза о ее распределении. Пусть, далее, $T=T(\boldsymbol{X})$ — некоторая статистика, характеризующая отклонение эмпирических данных от соответствующих (гипотезе H_0) гипотетических значений, распределение которой в случае справедливости H_0 известно (точно или хотя бы приближенно). Тогда для каждого достаточно малого числа $\alpha>0$ можно определить подмножество $T_{1\alpha}=$ $=\{t:t=T(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{X}\}$, удовлетворяющее (точно или хотя бы приближенно) условию

$$\mathrm{P}(T\in T_{1\alpha}|H_0)\leqslant\alpha. \tag{3.1}$$

Любое такое подмножество $\boldsymbol{T}_{1\alpha}$ порождает следующий критерий согласия для гипотезы H_0: если $t=T(\boldsymbol{x})$ — наблюдавшееся значение статистики $T(\boldsymbol{x})$, то при $t\in\boldsymbol{T}_{1\alpha}$ гипотеза H_0 отвергается; в противном случае считается, что данные не противоречат H_0 (согласуются с H_0); другими словами, если $t\notin T_{1\alpha}$, то гипотеза H_0 принимается (подчеркнем, что факт $t\notin\boldsymbol{T}_{1\alpha}$ не является доказательством истинности H_0). Если гипотеза H_0 истинна, то согласно указанному правилу мы можем ее отвергнуть (т. е. принять неправильное решение) с вероятностью, меньшей или равной α. Число α называют *уровнем значимости* критерия, а множество $\boldsymbol{T}_{1\alpha}$ — *критическим множеством (областью)* для гипотезы H_0. Статистику T в описанной методике называют *статистикой критерия,* а сам критерий — *критерием* $T_{1\alpha}$.

Итак, согласно описанной методике, критерий определяется заданием соответствующей критической области $\boldsymbol{T}_{1\alpha}$ в множестве значений статистики T при выбранном уровне значимости α. Для того чтобы иметь возможность сравнивать различные критерии (порождаемые разными статистиками T), надо ввести понятия альтернативного распределения (альтернативной гипотезы) и мощности критерия.

Любое допустимое распределение $F_X = F$ выборки $\boldsymbol{X}$, отличающееся от гипотетического (т. е. распределения при гипотезе H_0), называют *альтернативным распределением,* или *альтернативой.* Совокупность всех альтернатив называют *альтернативной гипотезой* и обозначают H_1. *Функцией мощности* критерия $\boldsymbol{T}_{1\alpha}$ называют следующий функционал на множестве всех допустимых распределений $\{\boldsymbol{F}\}$:

$$W(F) = W(T_{1\alpha}; F) \equiv \mathbf{P}(T \in \mathbf{T}_{1\alpha} | F)\,. \tag{3.2}$$

Таким образом, $W(F)$ — это вероятность попадания значения статистики критерия в критическую область, когда истинным распределением наблюдений является распределение F. Если $F \in H_1$, то значение $W(F)$ называют *мощностью критерия при альтернативе* F; оно характеризует вероятность принятия правильного решения (отклонение H_0) в ситуации, когда H_0 ложна. Из двух критериев с одним и тем же уровнем значимости α лучшим считается тот, мощность которого при альтернативах больше.

Желательным свойством критерия $\boldsymbol{T}_{1\alpha}$ является свойство *несмещенности*, которое означает, что одновременно с условием

$$W(\boldsymbol{T}_{1\alpha}; F) \leqslant \alpha \quad \forall F \in H_0 \tag{3.3}$$

должно выполняться условие

$$W(\boldsymbol{T}_{1\alpha}; F) \geqslant \alpha \quad \forall F \in H_1 \tag{3.4}$$

(т. е. при альтернативе вероятность попадания в критическую область должна быть больше, чем при основной гипотезе).

Функцию мощности удается вычислить далеко не всегда (для этого надо знать распределение статистики критерия при всех альтернативах), однако часто можно исследовать ее асимптотическое поведение при объеме выборки $n \to \infty$ (чтобы подчеркнуть зависимость функции мощности от объема выборки, пишут $W_n(F)$). Исследуя асимптотические свойства критериев, прежде всего рассматривают вопрос, является ли критерий *состоятельным*. При этом состоятельность критерия означает, что

$$\lim_{n \to \infty} W_n(F) = 1 \ \forall F \in H_1. \tag{3.5}$$

Таким образом, состоятельный критерий при большом числе наблюдений «улавливает» любые отклонения от основной гипотезы с вероятностью, близкой к 1: если истинной является любая фиксированная альтернатива, то при больших n попадают в критическую область с вероятностью, близкой к 1, и, следовательно, отвергают основную гипотезу, которая является ложной (т. е. принимается правильное решение).

Более детальные свойства состоятельного критерия можно исследовать, рассматривая асимптотическое поведение мощности $W_n(F_n)$ при «близких» альтернативах F_n, т. е. когда последовательность альтернатив $\{F_n\}$ сближается (в том или ином смысле) при $n \to \infty$ с основной гипотезой H_0. Основной интерес при этом представляет «пороговый» случай, т. е. определение такой последовательности $\{F_n\}$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} W_n(F_n) = \gamma, \ \alpha < \gamma < 1, \tag{3.6}$$

и вычисление этого предела γ.

2. Наиболее известными критериями проверки простой гипотезы H_0: $F_\xi(x) = F(x)$ являются *критерий Колмогорова* и *критерий* χ^2.

Критерий Колмогорова применяют, когда $F(x)$ непрерывна. Статистикой критерия является величина $D_n = D_n(X) = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|$ — максимальное отклонение эмпирической функции распределения $F_n(x)$ от гипотетической $F(x)$. При фиксированном x величина $F_n(x)$ является оптимальной оценкой для $F(x)$ и с ростом n $F_n(x) \to F(x)$, поэтому по крайней мере при больших n, в тех случаях, когда гипотеза H_0 истинна, значение D_n не должно существенно отклоняться от нуля. Точное распределение $\mathbf{P}(\sqrt{n} D_n \leqslant t)$ уже при $n \geqslant 20$ хорошо приближается предельным распределением Колмогорова $K(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \exp\{-2j^2t^2\}$, для которого составлены таблицы.

Критическая область критерия определяется неравенством $\sqrt{n}D_n \geqslant t_\alpha$, где $K(t_\alpha) = 1 - \alpha$.

Часто исходные статистические данные предварительно «группируют», что осуществляется следующим образом. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ — повторные независимые наблюдения под некоторой случайной величиной ξ с множеством возможных значений $\boldsymbol{E}$. Рассмотрим некоторое разбиение $E = E_1 \cup ... \cup E_N$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, и пусть ν_j — число элементов выборки $\boldsymbol{X}$, попавших в подмножество $\boldsymbol{E}_j$, а $p_j = p_j(F) = \int_{E_j} dF(x)$ — вероятность попадания в $\boldsymbol{E}_j$ при заданном распределении F величины ξ, $j = 1, ..., N$ $(\nu_1 + ... + \nu_N = n,\ p_1 + ... + p_N = 1)$. Тогда вектор частот $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_N)$ имеет полиномиальное распределение $M(n; p = (p_1, ..., p_N))$, и каждая гипотеза о распределении $\boldsymbol{L}(\xi)$ трансформируется в соответствующую гипотезу о векторе p распределения $M(n; p)$. Таким образом, в данной методике переходят от исходных наблюдений $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ к частотам $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_N)$ попадания элементов выборки в соответствующие подмножества $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_N$. Такой «частотный» способ представления статистических данных называют *методом группировки наблюдений,* а подмножества $\boldsymbol{E}_1, ..., \boldsymbol{E}_N$ — *интервалами группировки.* Относительная частота ν_j/n попадания в интервал $\boldsymbol{E}_j$ является состоятельной оценкой вероятности p_j, поэтому в качестве меры отклонения эмпирических данных от гипотетических значений p^0 можно выбирать различные функции от разностей $\left|\frac{\nu_j}{n} - p_j^0\right|$, $j = 1, ..., N$. Наиболее употребительной является мера

$$T = X_n^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{(\nu_j - np_j^0)^2}{np_j^0},$$

предложенная К. Пирсоном. Если H_0 — простая гипотеза, однозначно фиксирующая вероятности $p^0 = (p_1^0, ..., p_N^0)$, то при $0 < p_j^0 < 1$, $j = 1, ..., N$, и $n \to \infty$ соответствующий критерий согласия, называемый *критерием хи-квадрат,* асимптотически задается критической областью $\{X_n^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha, N-1}\}$, где $\chi^2_{p,r}$ — p-квантиль распределения $\chi^2(r)$. Другие применения подобной методики см в [1, гл. III].

3. Важной является задача проверки однородности статистического материала. Пусть имеются две независимые выборки $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ и $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)$, описывающие один и тот же процесс, явление и т. д., но полученные, вообще говоря, в разных условиях. Требуется установить, являются ли они выборками из одного и того же распределения или же закон распределения наблюдений от выборки к выборке менялся, т. е. требуется проверить гипотезу однородности H_0 о том, что $F_1(x) = F_2(x)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения выборок $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно. Одним из распространенных критериев однородности является *критерий Смирнова,* применяемый в случае непрерывных распределений. Критерий основан на статистике $D_{nm} = D_{nm}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_{1n}(x) - F_{2m}(x)|$, где $F_{1n}(x)$ и $F_{2m}(x)$ — эмпирические функции распределения, построенные по выборкам $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно. В случаях, когда справедлива гипотеза H_0, функции $F_{1n}(x)$ и $F_{2m}(x)$ с увеличением объемов выборок n и m «сближаются» и поэтому статистика D_{nm} не должна сильно отличаться от 0. Точное распределение $\mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}}D_{nm} \leqslant t\right)$ приближается предельным распределением Колмогорова $K(t)$. Критическая область критерия определяется неравенством $\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\ D_{nm} \geqslant t_\alpha$, где $K(t_\alpha) = 1 - \alpha$.

Другим часто применяемым критерием является *критерий однородности* χ^2. Его используют для проверки однородности данных, имеющих дискретную структуру или сводимых к этому группировкой. Кроме того, он применим для сравнения любого числа выборок.

Пусть осуществлено k серий независимых наблюдений, объемы которых $n_1, \ldots, n_k$, и в каждой серии наблюдался некий переменный признак, принимающий одно из s возможных значений (исходов). Пусть ν_{ij} — число реализаций i-го исхода в j-й серии $\left(\sum\limits_{i=1}^{s} \nu_{ij} = n_j,\ \ j = 1, \ldots, k\right)$. Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что все наблюдения производились над одной и той же случайной величиной. Статистикой критерия χ^2 в данном случае является величина

$$X_n^2 = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\nu_{ij}^2}{n_j\nu_{i.}} - 1\right),$$

где $\nu_{i.} = \sum_{j=1}^{k}\nu_{ij},\ i=1, \ldots, s,\ n = n_1 + \ldots + n_k$.

Критическую область задают в виде $X_n^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha,(s-1)(k-1)}$, где границу критерия определяют из таблиц квантилей распределения χ^2. Вероятность ошибочно отклонить при этом истинную гипотезу приблизительно равна α, если n достаточно велико.

4. Если $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\mathcal{L}(\xi)$ и множество $\boldsymbol{F}$ всех допустимых распределений наблюдаемых случайной величины ξ задано в параметрической форме: $\boldsymbol{F} = \{F(x;\theta),\ \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \Theta\}$, то гипотезы о распределении $\mathcal{L}(\xi)$ формулируются в терминах неизвестного параметра θ и называются параметрическими. В общем случае (основная) параметрическая гипотеза задается в виде $H_0: \theta \in \Theta_0$ при некотором подмножестве $\Theta_0 \subset \Theta$. В этом случае альтернативная гипотеза имеет вид H_1: $\theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Таким образом, в рамках параметрической модели альтернативная гипотеза конкретизируется и имеет такую же форму, как и основная гипотеза; в данном случае отклонение основной гипотезы эквивалентно принятию конкретной альтернативной гипотезы.

В общей теории проверки параметрических гипотез критерии принято задавать указанием соответствующих критических областей непосредственно в выборочном пространстве $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\}$. Таким образом, при уровне значимости α критерий проверки гипотезы H_0 задается выбором такого подмножества $\boldsymbol{X}_{1\alpha} \subset \mathbf{X}$, для которого выполняется условие

$$\mathbf{P}_\theta(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{1\alpha}) \leqslant \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0, \tag{3.7}$$

являющееся аналогом условия (3.1). В этом случае сам критерий (называемый *критерием* $\boldsymbol{X}_{1\alpha}$) формируется следующим образом: если $\boldsymbol{x}$ — наблюдавшаяся реализация выборки $\boldsymbol{X}$, то при $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}_{1\alpha}$ гипотезу H_0 отвергают (принимают альтернативную гипотезу H_1), если же $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}_{0\alpha} = \overline{\boldsymbol{X}}_{1\alpha}$, то гипотезу H_0 принимают. Для функции мощности в данном случае используются обозначения (ср. с (3.2)):

$$W(\theta) = W(\boldsymbol{X}_{1\alpha};\theta) = \mathbf{P}_\theta(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{1\alpha}),\quad \theta \in \Theta.$$

Вероятности ошибочных решений для критерия $X_{1\alpha}$ выражаются через его функцию мощности следующим образом: *вероятность ошибки первого рода* (отклонить H_0, когда она верна) равна $W(\theta)$, $\theta \in \Theta_0$ (в символическом виде $P(H_1 | H_0)$), а *вероятность ошибки второго рода* (принять H_0, когда она ложна) равна $1 - W(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$ (в символическом виде $P(H_0 | H_1)$).

Рациональный принцип выбора критической области формулируется в терминах вероятностей ошибок следующим образом: *при заданном числе испытаний устанавливается граница для вероятности ошибки первого рода и при этом выбирается та критическая область, для которой вероятность ошибки второго рода минимальна.*

Пусть $\mathbf{X}_{1\alpha}$ и $\mathbf{X}^*_{1\alpha}$ — два критерия одного и того же уровня значимости α для гипотезы H_0. Если $W(\mathbf{X}^*_{1\alpha}; \theta) \leqslant \leqslant W(\mathbf{X}_{1\alpha}; \theta)$ при $\theta \in \Theta_0$ и $W(\mathbf{X}^*_{1\alpha}; \theta) \geqslant W(\mathbf{X}_{1\alpha}; \theta)$ при $\theta \in \Theta_1$ (со строгим неравенством по крайней мере при одном $\theta \in \Theta_1$), то говорят, что критерий $\mathbf{X}^*_{1\alpha}$ *равномерно мощнее* критерия $\mathbf{X}_{1\alpha}$ и ему, очевидно, следует отдать предпочтение, поскольку он приводит к меньшим ошибкам. Если указанные неравенства выполняются для любого критерия $\mathbf{X}_{1\alpha}$, то $\mathbf{X}^*_{1\alpha}$ называют *равномерно наиболее мощным* (р. н. м.) критерием. В случае простой альтернативы H_1 (множество Θ_1 состоит из одной точки) вместо р. н. м. говорят о *наиболее мощном критерии.* В некоторых случаях указанный принцип сравнения критериев позволяет определить оптимальный (в рассматриваемой задаче) критерий. Иногда задачу построения оптимального критерия удается решить в классе *несмещенных* критериев, т. е. когда одновременно с (3.7) выполняется условие $W(\theta) \geqslant \alpha \ \forall \theta \in \Theta_1$.

В теории часто удобно рассматривать так называемые *рандомизированные критерии,* когда при наблюдении $\mathbf{x}$ гипотезу H_0 отвергают с некоторой вероятностью $\varphi(x)$ и принимают с дополнительной вероятностью $1 - \varphi(x)$. Функция $\varphi(\mathbf{x})$ $(0 \leqslant \varphi(\mathbf{x}) \leqslant 1, \mathbf{x} \in \mathbf{X})$ называется *критической функцией;* описанная выше конструкция нерандомизированного критерия $\mathbf{X}_{1\alpha}$ соответствует выбору в качестве $\varphi(\mathbf{x})$ индикаторной функции множества $\mathbf{X}_{1\alpha}$: $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ при $\mathbf{x} \in \mathbf{X}_{1\alpha}$ и $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \notin \mathbf{X}_{1\alpha}$. Функция мощности рандомизированного критерия определяется соотношением $W(\theta) = W(\varphi; \theta) \equiv E_\theta \varphi(\mathbf{X})$.

5. В основе большинства способов построения оптимальных критериев лежит фундаментальный результат, полученный Ю. Нейманом и Э. Пирсоном о существова-

нии наиболее мощного критерия в задаче проверки простой гипотезы при простой альтернативе. Именно, если $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, то при любом уровне значимости α наиболее мощный критерий проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ при альтернативе H_1: $\theta = \theta_1$ существует и задается критической областью

$$X^*_{1\alpha} = \left\{x;\ l(x) \equiv \frac{L(x;\ \theta_1)}{L(x;\ \theta_0)} \geqslant c_\alpha\right\}, \tag{3.8}$$

где $L(x;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)$ — функция правдоподобия (о некоторых особенностях, связанных с дискретностью наблюдений, см. подробнее в [1, § 4.2]).

Если проверяется простая гипотеза H_0: $\theta = \theta_0$ против сложной альтернативы H_1: $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$, то р. н. м. критерий существует, если критическая область $X^*_{1\alpha} = X^*_{1\alpha}(\theta_0;\ \theta_1)$, определенная в (3.8), не зависит от конкретного $\theta_1 \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$; в этом случае $X^*_{1\alpha}$ и есть р. н. м. критерий. Такое обстоятельство имеет место для важного класса моделей $\boldsymbol{F}$, обладающих *монотонным отношением правдоподобия* (т. е. таких, которые обладают достаточной статистикой $T(\boldsymbol{X})$, и при этом функция $l(\boldsymbol{x}) = g(T(\boldsymbol{x});\ \theta_1)/g(T(\boldsymbol{x});\ \theta_0)$ монотонна по T (см. критерий факторизации в п. 3 гл. 2), и в случае односторонних альтернатив $H_1^{\pm}$: $\theta \gtrless \theta_0$ (θ — скаляр) [1, с. 155]. Более того, для таких моделей р. н. м. критерий проверки простой гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против правосторонней альтернативы H_1^+: $\theta > \theta_0$ является одновременно р. н. м. критерием проверки сложной гипотезы H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ против H_1^+ того же уровня значимости (аналогичное утверждение справедливо и для двойственной проблемы проверки H_0: $\theta \geqslant \theta_0$ против H_1^-: $\theta < \theta_0$ [5, с. 101]).

В частности, для экспоненциальной модели, задаваемой плотностью

$$f(x;\ \theta) = \exp\{A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)\},$$

статистика $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i)$ достаточна, и если функция $A(\theta)$ строго монотонна, то вид р. н. м. критериев $X^*_{1\alpha}$ указан в следующей таблице:

	$H_1^+: \theta > \theta_0$	$H_1^-: \theta < \theta_0$
$A(\theta)\uparrow$	$\{T(\mathbf{x}) \geqslant c_\alpha^+\}$	$\{T(\mathbf{x}) \leqslant c_\alpha^-\}$
$A(\theta)\downarrow$	$\{T(\mathbf{x}) \leqslant c_\alpha^+\}$	$\{T(\mathbf{x}) \geqslant c_\alpha^-\}$

При проверке простой гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против двусторонней альтернативы H_1: $\theta \neq \theta_0$ в ряде случаев также удается построить р. н. м. несмещенный критерий [1, с. 159].

Удовлетворительное решение этой задачи в ряде случаев получают с помощью следующего приема: если для рассматриваемой модели существуют р. н. м. критерии против односторонних альтернатив H_1^- и Θ_1^+ (соответственно $X_{1\alpha_1}^-$ и $X_{1\alpha_2}^+$), то используют критерий вида $X_{1\alpha} = X_{\alpha_1}^- \cup X_{1\alpha_2}^+$ при $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Особый интерес представляют малые отклонения от нулевой гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$. В этом случае при исследовании свойств критерия можно ограничиться анализом локального поведения функции мощности критерия $W(\theta)$ в окрестности точки θ_0. При таком подходе часто удается построить *локальный наиболее мощный критерий,* даже тогда, когда р. н. м. критерия не существует [1, с. 161].

6. Часто весьма полезным бывает тот факт, что задача проверки простой гипотезы относительно θ является обратной по отношению к задаче построения доверительного множества для θ. Именно, если $\boldsymbol{G}_\gamma(\boldsymbol{X})$ есть γ-доверительное множество для θ, то $X_{0\alpha} = \{x : \theta_0 \in G_\gamma(x)\}$ определяет область принятия гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ с уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$. Верно и обратное, т. е. если для каждого $\theta_0 \in \Theta$ имеется какой-либо критерий $\boldsymbol{X}_{1\alpha} = \boldsymbol{X}_{1\alpha}(\theta_0)$ проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$, то, определив для каждого $x \in \mathbf{X}$ подмножество $G_\gamma(x) = \{\theta : x \in \bar{X}_{1\alpha}(\theta)\}$, $\gamma = 1 - \alpha$, получим, что $\boldsymbol{G}_\gamma(\boldsymbol{X})$ — γ-доверительное множество для θ. Таким образом, если для некоторой модели известно решение одной из этих задач, то по описанному алгоритму можно получить решение другой. При этом р. н. м. критерии соответствуют наикратчайшим доверительным множествам и наоборот.

7. Одним из наиболее универсальных методов построения критериев проверки сложных параметрических гипотез является *метод отношения правдоподобия.* Общий вид *критерия отношения правдоподобия* (к. о. п.) для проверки гипотезы H_0: $\theta \in \Theta_0$ таков:

$$\boldsymbol{X}_{1\alpha} = \boldsymbol{X}_{1\alpha}(\Theta_0, \Theta) = \{\boldsymbol{x}: \lambda_n(\boldsymbol{x}) \equiv \sup_{\theta \in \Theta_0} L(\boldsymbol{x}; \theta) / \sup_{\theta \in \Theta} L(\boldsymbol{x}; \theta) \leqslant c_\alpha\},$$

где граница c_α выбирается из условия

$$W(\theta) = \mathbf{P}_\theta(\lambda_n(\boldsymbol{X}) \leqslant c_\alpha) \leqslant \alpha \quad \forall \theta \in \Theta_0 .$$

Во многих практических задачах такой подход приводит к удовлетворительным решениям. Кроме того, при некоторых условиях к. о. п. обладает свойством асимптотической оптимальности для больших выборок.

Если выполняются условия регулярности, обеспечивающие существование, единственность и асимптотическую нормальность оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{1n}, \ldots, \hat{\theta}_{rn})$ параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ (см. главу 2, п. 4), то при простой гипотезе H_0: $\theta = \theta_0$ для больших объемов выборки n к. о. п. задается асимптотически критической областью

$$X_{1\alpha} = \{x\colon\ -2\ln\lambda_n(x) \geqslant \chi^2_{1-\alpha,r}\},$$

где $\chi^2_{p,r}$ — p-квантиль распределения $\chi^2(r)$. При этом он является состоятельным ($W_n(\theta) \to 1$ при $n \to \infty$ $\forall \theta \neq \theta_0$) и его мощность при близких альтернативах вида $\theta_1^{(n)} = \theta_0 + \beta/\sqrt{n}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \neq 0$, удовлетворяет при $n \to \infty$ соотношению

$$W_n(\theta^{(n)}) \to 1 - F_r(\chi^2_{1-\alpha,r};\ \lambda^2),$$

где $\lambda^2 = \beta' I(\theta_0)\beta$, $I(\theta)$ — информационная матрица модели, а $F_r(t; \lambda^2)$ — функция нецентрального распределения χ^2 с числом степеней свободы r и параметром нецентральности λ^2 [1, с. 173]. Аналогичными асимптотическими свойствами к. о. п. обладает и при сложных гипотезах H_0 [1, с. 174—176].

§ 1. Критерии согласия

3.1. Для данных задачи 1.13 проверить, согласуются ли они с гипотезой H_0 о том, что монета была симметричной. Уровень значимости положить равным: а) 0,05; б) 0,1.

3.2. По данным задачи 1.14 проверить гипотезу H_0 о случайности чисел. При каком уровне значимости гипотеза H_0 отвергается?

3.3. При $n = 4000$ независимых испытаний события A_1, A_2, A_3, составляющие полную группу, осуществились соответственно 1905, 1015 и 1080 раз. Проверить, согласуются ли эти данные при уровне значимости 0,05 с гипотезой H_0: $p_1 = 1/2$, $p_2 = p_3 = 1/4$, где $p_i = \mathbf{P}(A_i)$.

3.4. В десятичной записи числа π среди первых 10002 знаков после запятой цифры 0, 1, ..., 9 встречаются соответственно 968, 1026, 1021, 974, 1014, 1046, 1021, 970, 948, 1014 раз [6, с. 96]. Можно ли при уровне значимости 0,05 считать эти цифры случайными? При каком у не значимости эта гипотеза отвергается?

3.5. Согласуются ли данные, приведенные в задачах 1.16 и 1.17, с гипотезой о симметричности костей?

3.6. Крупная партия товаров может содержать долю дефектных изделий. Поставщик полагает, что эта доля составляет 3 %, а покупатель — 10 %. Условия поставки: если при проверке 20 случайным образом отобранных товаров обнаружено не более одного дефектного, то партия принимается на условиях поставщика, в противном случае — на условиях покупателя. Требуется определить: 1) каковы статистические гипотезы, статистика критерия, область ее значений, критическая область; 2) какое распределение имеет статистика критерия, в чем состоят ошибки первого и второго рода и каковы их вероятности.

3.7. Согласуются ли данные задачи 1.19 при уровне значимости 0, 1 с гипотезой H_0 о том, что показания часов равномерно распределены на интервале (0,12)? При каких значениях уровня значимости гипотеза H_0 не отклоняется?

3.8. В экспериментах с селекцией гороха Мендель наблюдал частоты различных видов семян, полученных при скрещивании растений с круглыми желтыми семенами и растений с морщинистыми зелеными семенами. Эти данные и значения теоретических вероятностей по теории наследственности приведены в следующей таблице:

Семена	Частота	Вероятность
Круглые и желтые	315	9/16
Морщинистые и желтые	101	3/16
Круглые и зеленые	108	3/16
Морщинистые и зеленые	32	1/16
Σ	$n=556$	1

Следует проверить гипотезу H_0 о согласовании частотных данных с теоретическими вероятностями (на уровне значимости $\alpha \leqslant 0,9$).

3.9. Используя таблицу значений какой-либо функции ($\cos x$, e^x, $\ln x$ и т. д.), записать 100 цифр, выбирая из каждого значения функции второй знак справа. Проверить для такой выборки гипотезу о случайности цифр 0, 1, ..., 9. Уровень значимости положить равным: а) 0,05; б) 0,01.

3.10. Группируя данные задачи 1.21 по $N = 4$ равновероятным (при гипотезе H_0) интервалам, проверить гипотезу H_0: $F_\xi(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$ (уровень значимости принять равным 0, 1).

3.11. Пусть по выборке $X = (X_1, ..., X_n)$ требуется проверить гипотезу об экспоненциальности распределения наблюдаемой случайной величины ξ, т. е. H_0: $F_\xi(x) = 1 - e^{-x/\theta}$, $x \geqslant 0$ (параметр $\theta > 0$ неизвестен). Применяя метод группировки с интервалами $\mathrm{E}_j = [(j-1)a, ja)$, $j = 1, ..., N-1$, $\mathrm{E}_N = [(N-1)a, \infty)$, где $a > 0$ — заданное число, построить критерий согласия χ^2 для гипотезы H_0. Проанализировать данные задачи 1.21 с этих позиций, принимая $N = 3$, $a = 1$.

3.12. В генетической модели Фишера [6, с. 79] принимается, что вероятности появления потомства, классифицируемого по четырем типам, имеют вид

$$p_1(\theta) = \frac{2+\theta}{4}, \; p_2(\theta) = p_3(\theta) = \frac{1-\theta}{4}, \; p_4(\theta) = \frac{\theta}{4},$$

где $\theta \in (0, 1)$ — неизвестный параметр. Как выглядит критерий χ^2 для проверки соответствия этой модели реальным данным?

3.13. При 8000 независимых испытаний события A, B и C, составляющие полную группу, осуществились 2014, 5012 и 974 раз соответственно. Верна ли при уровне значимости 0,05 гипотеза: $p(A) = 0{,}5 - 2\theta$, $p(B) = 0{,}5 + \theta$, $p(C) = \theta$ $(0 < \theta < 0{,}25)$?

Указание. См. решение задачи 3.12.

3.14. Для данных задачи 1.23 проверить гипотезу H_0: $\mathcal{L}(\xi) = \Pi(\theta)$, где θ — неизвестный параметр.

Указание. В качестве оценки неизвестного параметра θ принять выборочное среднее [1, с. 117].

3.15. Через равные промежутки времени в тонком слое раствора золота регистрировалось число частиц ξ золота, попавших в поле зрения микроскопа. По данным наблюдений, приведенных в следующей таблице:

Число частиц	0	1	2	3	4	5	6	7	Итого
m_i	112	168	130	68	32	5	1	1	$\sum m_i = 518$

проверить гипотезу H_0: $\mathcal{L}(\xi) = \Pi(\theta)$, где θ — неизвестный параметр.

3.16. В таблице приведены числа m_i участков равной площади 0,25 км^2 южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по i попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить согласие опытных данных с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости $\alpha = 0,05$:

i	0	1	2	3	4	5 и более	Итого
m_i	229	211	93	35	7	1	$\Sigma m_i = 576$

3.17. Среди 2020 семей, имеющих двух детей, 527 семей, в которых два мальчика, и 476 — две девочки (в остальных 1017 семьях дети разного пола). Можно ли с уровнем значимости 0,05 считать, что количество мальчиков в семье с двумя детьми — биномиальная случайная величина?

3.18. Во время эпидемии гриппа среди 2000 контролируемых индивидуумов одно заболевание наблюдалось у 181 человека, дважды болели гриппом лишь 9 человек. У остальных 1810 человек заболевания не было. Согласуются ли при уровне значимости 0,05 эти данные с гипотезой, согласно которой число заболеваний отдельного индивидуума в течение эпидемии — биномиальная случайная величина?

Указание. См. решение задачи 3.17.

3.19*. Исследовать асимптотическое (при $n \to \infty$) поведение среднего и дисперсии статистики X_n^2 критерия согласия χ^2 при «близких» альтернативах вида

$$H_1^{(n)}: p_j = p_j^{(n)} = p_j^0 + \frac{\beta_j}{\sqrt{n}}, \ j = 1, \ldots, N, \ \sum_{j=1}^{N} \beta_j = 0$$

Указание. Использовать формулы для $\boldsymbol{E}(X_n^2 | p)$ и $\boldsymbol{D}(X_n^2 | p)$, приведенные в [1, с. 113].

3.20*. Пусть $\mu_0 = \mu_0(n, N)$ — число пустых интервалов при группировке n наблюдений по N равновероятным (при гипотезе H_0) интервалам. Рассмотрим гипотезы вида

$$H_1^{(n)}: p_j = p_j^{(n)} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{b_j}{n^{1/4}}\right), \ j = 1, \ldots, N,$$

где

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant N} |b_j| \leqslant c \leqslant \infty, \ \sum_{j=1}^{N} b_j = 0, \ b^2(N) \equiv \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b_j^2 \xrightarrow[N \to \infty]{} b^2 > 0.$$

Доказать, что при n, $N \to \infty$, $\frac{n}{N} = \rho > 0$

$$E(\mu_0 | H_1^{(n)}) = Ne^{-\rho} + \frac{\sqrt{N}}{2} b^2(N) \rho^{3/2} e^{-\rho} + O(N^{1/4}),$$

$$D(\mu_0 | H_1^{(n)}) = Ne^{-\rho}(1 - e^{-\rho}(1+\rho))(1 + O(N^{-1/2})).$$

Указание. Использовать формулы (3.16), приведенные в [1, с. 120].

3.21. Поступающие в институт абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими: на 1-м потоке баллы 2, 3, 4 и 5 получили соответственно 33, 43, 80 и 144 человека; соответствующие же данные для 2-го потока таковы: 39, 35, 72 и 154.

Можно ли при уровне значимости 0,05 считать оба потока однородными?

3.22. Следующая таблица содержит данные о смертности среди матерей, родивших первого ребенка, в четыре различные периода времени [6, с. 102] (n_j — число матерей, ν_j — число смертных исходов)

n_j	1072	1133	2455	1995
ν_j	22	23	49	33

Проверить гипотезу H_0 о том, что в уровнях смертности между этими периодами не существует различия.

Указание. Применить критерий однородности χ^2 для испытаний с двумя исходными.

3.23* Пусть произведены две серии из n_1 и n_2 независимых испытаний, в каждом из которых наблюдается либо исход A, либо исход $\bar{A}$. Результаты сведены в следующую таблицу, в столбцах которой указано число реализаций соответствующих исходов для каждой серии:

	(1)	(2)	Σ
A	ν_{11}	ν_{12}	ν_1
$\bar{A}$	ν_{21}	ν_{22}	ν_2
Σ	$\nu_{\cdot 1} = n_1$	$\nu_{\cdot 2} = n_2$	$n = n_1 + n_2$

1) Убедиться в том, что статистика X_n^2 для проверки гипотезы H_0 об однородности испытаний представима в виде $X_n^2 = Z_n^2$, где статистика

$$Z_n = \left(\frac{\nu_{11}}{n_1} - \frac{\nu_{12}}{n_2}\right)\sqrt{\frac{nn_1n_2}{\nu_1\nu_2}}.$$

2) Доказать, что $L(Z_n | H_0) \to N(0, 1)$ при $n_1, n_2 \to \infty$ и, основываясь на этом, построить критерий проверки гипотезы $H_0 : p_1 = p_2$ против односторонней альтернативы $H_1 : p_1 > p_2$ (здесь p_i — вероятность реализации A в испытаниях i-й серии, $i = 1, 2$).

3.24. Пусть $\nu_1, ..., \nu_N$ — независимые случайные величины, причем $L(\nu_i) = \Pi(\theta_i)$, $i = 1, ..., N$, где параметры θ_i неизвестны. Пусть дополнительно известно, что $\nu_1 + ... + \nu_N = n$. Построить при этом условии критерий для проверки гипотезы однородности H_0: $\theta_1 = ... = \theta_N$.

Указание. Воспользоваться задачей 1.54.

3.25* *(критерий пустых блоков.)* Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из распределения $L(\xi) = R(0,1)$, $0 = X_{(0)} \leqslant X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant ... \leqslant X_{(n)} \leqslant X_{(n+1)} = 1$ — ее вариационный ряд и $B_i = (X_{(i-1)}, X_{(i)}]$, $i = 1, ..., n+1$, — порождаемые ею *выборочные блоки*. Пусть, далее, $Y = (Y_1, ..., Y_m)$ — независимая от X выборка из некоторого другого распределения $L(\eta)$ на отрезке $[0,1]$, функция распределения которого $F(x)$ имеет плотность $f(x) = F'(x)$. Обозначим через $\varkappa_i = \varkappa_i(n,m)$ число элементов выборки Y, попавших в блок B_i, $i = 1, ..., n+1$.

1) Доказать, что при гипотезе однородности H_0: $L(\xi) = L(\eta)$ вектор блоковых частот $\varkappa = (\varkappa_1, ..., \varkappa_{n+1})$ принимает все возможные значения с одинаковой вероятностью $(C_{n+m}^n)^{-1}$; убедиться в том, что такой же вид имеет условное распределение $L(\xi_1, ..., \xi_{n+1} | \xi_1 + ... + \xi_{n+1} = m)$, где случайные величины $\xi_1, ..., \xi_{n+1}$ независимы и имеют геометрическое распределение $Bi(1,p)$, где $p \in (0, 1)$ — произвольно.

2) Рассмотрев статистику $s_0(n,m)$ — число пустых блоков:

$$s_0(n,m) = \sum_{i=1}^{n+1} I(\varkappa_i = 0), \text{ где } I(\cdot) \text{—индикатор},$$

и используя вытекающие из п. 1 представление

$$L(s_0(n,m)) = L\left(\sum_{i=1}^{n+1} I(\xi_i = 0) | \xi_1 + ... + \xi_{n+1} = m\right),$$

доказать, что $s_0(n,m)$ имеет гипергеометрическое распределение $H(n+1,\ n+m,\ n)$; получить отсюда выражения для среднего и дисперсии статистики $s_0(n,m)$ при гипотезе H_0.

3) Доказать, что если $n,m \to \infty$ так, что $m/n = \rho > 0$, то

$$\mathbf{L}(s_0(n,m) | H_0) \sim N(n/(1+\rho),\ n\rho^2/(1+\rho)^3).$$

4) Доказать, что в предыдущих условиях для любой альтернативы H_1, задаваемой плотностью $f(x) \not\equiv 1$, $x \in [0,1]$,

$$\mathbf{E}\left(\frac{s_0(n,m)}{n+1} \Big| H_1\right) \to \int_0^1 \frac{dx}{1+\rho f(x)} > \frac{1}{1+\rho}.$$

Основываясь на этих результатах, обосновать критерий пустых блоков для проверки гипотезы однородности H_0 [1, с. 127].

Указания. 1) Воспользоваться тем, что условное распределение вектора $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n+1})$ при фиксированных значениях $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) = (x_1, \ldots, x_n)$ есть полиномиальное распределение $M(m;\ x_1, x_2 - x_1, \ldots, \ldots, x_n - x_{n-1},\ 1 - x_n)$.

Далее использовать задачи 1.39 п. 5) и 1.31.

2) Рассмотреть независимые случайные величины $\tilde{\xi}_i$ имеющие распределение $\mathbf{P}(\tilde{\xi}_i = r) = \mathbf{P}\{\xi_i = r | \xi_i > 0)$, $r = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$, и убедиться в том, что

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_i + \ldots + \tilde{\xi}_s = m) = C_{m-1}^{s-1} q^s p^{m-s},\quad q = 1 - p.$$

3) Воспользоваться нормальной аппроксимацией для биномиального распределения: при $n \to \infty$ и $0 < p < 1$, $k = np + t\sqrt{np, q}$, $|t| \leqslant c < \infty$,

$$b(k;\ n,p) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-t^2/2}.$$

Записать вероятность $\mathbf{P}(s_0(n,m) = k)$ в виде

$$\mathbf{P}(s_0(n,m) = k) = b(k; n+1, p) \times$$
$$\times b(n-k; m-1, p)/b(n; n+m, p),\quad p = 1/(1+\rho).$$

4) Вычислить $\mathbf{E}[I(\varkappa_i = 0) | H_1] = \mathbf{P}(\varkappa_i = 0 | H_1)$, используя при этом задачу 1.31. При оценке интеграла применить неравенство Коши — Буняковского:

$$\left(\int_0^1 g_1(x) g_2(x) dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 g_1^2(x) dx \int_0^1 g_2^2(x) dx$$

при $g_1(x) = \sqrt{1 + \rho f(x)}$, $g_2(x) = g_1^{-1}(x)$.

3.26. Проверить гипотезу независимости для следующей таблицы сопряженности двух признаков (уровень значимости принять равным 0, 05):

ξ_1	ξ_2			Σ
	b_1	b_2	b_3	
a_1	3009	2832	3008	8849
a_2	3047	3051	2997	9095
a_3	2974	3038	3018	9030
Σ	9030	8921	9023	26974

3.27. Из 300 абитуриентов, поступивших в институт 97 человек имели балл 5 в школе и 48 получили 5 на вступительных экзаменах по тому же предмету, причем только 18 человек имели 5 и в школе и на экзамене. С уровнем значимости 0,1 проверить гипотезу о независимости оценок 5 в школе и на экзамене.

3.28*. Рассмотреть таблицу 2×2 сопряженности двух признаков

ξ_1	ξ_2		Σ
	1	0	
1	ν_{11}	ν_{12}	$\nu_{1\cdot}$
0	ν_{21}	ν_{22}	$\nu_{2\cdot}$
Σ	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	n

1) Убедиться в том, что статистика $\hat{X}_n^2$ [1, с. 131] для проверки гипотезы H_0 о независимости признаков ξ_1 и ξ_2 в данном случае допускает представление $\hat{X}_n^2 = Z_n^2$, где

$$Z_n = n^{3/2}\left(\nu_{11} - \frac{\nu_{1\cdot}\nu_{\cdot 1}}{n}\right) \Big/ \sqrt{\nu_{1\cdot}\,\nu_{2\cdot}\,\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}} =$$

$$= \left(\frac{\nu_{11}}{\nu_{\cdot 1}} - \frac{\nu_{12}}{\nu_{\cdot 2}}\right)\sqrt{\frac{n\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}}{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}}}.$$

2) Показать, что выборочный коэффициент корреляции $\rho_n = Z_n/\sqrt{n}$ и, следовательно, $Z_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \rho = \mathrm{korr}(\xi_1, \xi_2)$ при $n \to \infty$ (см. задачу 1.38); установить равенства

$$\rho = \frac{\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\bar{B})}} = [\mathbf{P}(A|B) - \mathbf{P}(A|\bar{B})]\left[\frac{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\bar{B})}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{A})}\right]^{1/2},$$

где события $A = \{\xi_1 = 1\}$, $\bar{A} = \{\xi_1 = 0\}$, $B = \{\xi_2 = 1\}$, $\bar{B} = \{\xi_2 = 0\}$.

3) Доказать, что $\mathcal{L}(Z_n | H_0) \to \mathcal{N}(0, 1)$ при $n \to \infty$, и, основываясь на этом, построить критерий проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1: $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A|\bar{B})$, означающей положительную сопряженность событий A и B (A в паре с B встречается с большей вероятностью, чем в паре с $\bar{B}$).

3.29. Имеются две группы данных о приеме в вуз, классифицированные по двум признакам: «принято (A) — не принято ($\bar{A}$)» и пол «мужчины (B) — женщины ($\bar{B}$)».

	B	$\bar{B}$	Σ
A	97	40	137
$\bar{A}$	263	42	305
Σ	360	82	$n=442$

	B	$\bar{B}$	Σ
A	235	38	273
$\bar{A}$	35	7	42
Σ	270	45	$n=315$

Для каждой таблицы проверить гипотезу H_0 о независимости признаков A и B против альтернативы H_1: $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A|\bar{B})$.

3.30. В следующей таблице [3, с. 722] приведены 818 случаев, классифицированных по двум признакам: наличию прививки против холеры (признак A) и отсутствию заболевания (признак B):

	B	$\bar{B}$	Σ
A	276	3	279
$\bar{A}$	473	66	539
Σ	749	69	818

Построить критерий проверки гипотезы H_0 о независимости признаков A и B против альтернативы H_1 о положительной сопряженности A и B (т. е. об эффективности вакцинации).

3.31. Можно ли с уровнем значимости 0,001 считать, что последовательность чисел 1,05; 1,12; 1,37; 1,50; 1,51; 1,73; 1,85; 1,98 является реализацией случайного вектора, все 8 компонент которого независимые одинаково распределенные случайные величины?

3.32*. Основываясь на следующем представлении производящей функции статистики T_n — числа инверсий в повторной случайной выборке объема n [1, с. 135]:

$$\Phi_n(z) \equiv \mathbf{E} z^{T_n} = \frac{1}{n!} \prod_{r=1}^{n-1} (1 + z + \ldots + z^r),$$

доказать, что $\boldsymbol{L}(T_n) \sim N\left(\frac{n(n-1)}{4}, \frac{n^3}{36}\right)$ при $n \to \infty$.

Указание. Перейти к характеристической функции и убедиться в том, что при $n \to \infty$ и $|t| \leqslant c < \infty$

$$\mathbf{E}\exp\left\{it\left(T_n - \frac{n(n-1)}{4}\right)\frac{6}{n^{3/2}}\right\} \to \exp\{-t^2/2\}.$$

3.33. Проверить гипотезу случайности для данных задачи 1.22.

Указание. Воспользоваться асимптотическим вариантом критерия, основанного на статистике T_n (см. предыдущую задачу).

3.34. Получить выборки, объемы которых $n = 20$, 50, 100, равномерно распределенных случайных чисел. Проверить по этим выборкам гипотезу о равномерности распределения по критериям χ^2 и Колмогорова.

3.35. Получить выборки объема $n = 100$ приближенно нормально распределенных чисел, используя суммирование N равномерно распределенных слагаемых ($N = 4$, 8, 12). Проверить гипотезу о нормальной распределенности при помощи критериев χ^2 и Колмогорова.

3.36. Получить выборку (X_i) объема $n = 200$ равномерно распределенных случайных чисел. С помощью критерия Смирнова проверить, что подвыборки (X_{2i}, $i = 1, 2, \ldots, 100$) и (X_{2i+1}, $i = 0, 1, \ldots, 99$) являются выборками из одного и того же распределения.

3.37. Смоделировать последовательность $\{X_i\}$ полиномиальных псевдослучайных величин, принимающих значения $1, \ldots, N$. Образовать из этой последовательности две выборки (X_{2i}, $i = 1, \ldots, n$) и (X_{2i+1}, $i = 0, \ldots, n-1$). С помощью критерия χ^2 проверить гипотезу независимости величин, соответствующих этим выборкам. Расчеты провести для $N = 2, 4, 10$, $n = 100$.

3.38. Получить выборки, объемы которых $n = 10, 20, 40, 100$, равномерных псевдослучайных чисел. С помощью статистик T_n (числа инверсий в вариационном ряду выборки) проверить гипотезу случайности.

§ 2. Выбор из двух простых гипотез

3.39. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из биномиального распределения $Bi(k; \theta)$. Построить критерий Неймана — Пирсона для проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta = \theta_1$ $(0 < \theta_0 < \theta_1 < 1)$ и вычислить его мощность.

3.40 (продолжение задачи 3.39). Показать, что при $n \to \infty$ этот критерий асимптотически задается критической областью

$$\{T \geqslant kn\theta_0 - u_\alpha\sqrt{kn\theta_0(1-\theta_0)}\},\quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ \Phi(u_\alpha) = \alpha,$$

и его мощность $W_n(\theta_1)$ при $\theta_1 = \theta_1^{(n)} = \theta_0 + \frac{\beta}{\sqrt{n}}$, $\beta > 0$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \to \infty} W_n(\theta_1^{(n)}) = \Phi\left(\beta\sqrt{\frac{k}{\theta_0(1-\theta_0)}} + u_\alpha\right).$$

Указание. Воспользоваться теоремой Муавра — Лапласа.

3.41. По выборке $X = (X_1, ..., X_n)$ из пуассоновского распределения $\Pi(\theta)$ построить критерий Неймана — Пирсона для проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta = \theta_1 (0 < \theta_0 < \theta_1)$ и вычислить его мощность. Исследовать асимптотическое поведение характеристик этого критерия при больших объемах выборки.

Указание. Использовать задачу 1.39 п. 4) и нормальную аппроксимацию для пуассоновского распределения с растущим параметром. Рассмотреть «близкую» альтернативу такого вида, как и в задаче 3.40.

3.42. Чтобы проверить гипотезу H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta = \theta_1$ $(0 < \theta_0 < \theta_1 < 1)$ в схеме Бернулли с неизвестной вероятностью «успеха» θ, осуществлен эксперимент, в котором наблюдается число «успехов», предшествующих первому «неуспеху». Построить наиболее мощный критерий при уровне значимости

$\alpha = \theta_0^s$, где $s \geqslant 1$ — заданное целое число, и убедиться в том, что вероятность ошибки второго ряда этого критерия $\beta = 1 - \theta_1^s$.

3.43. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из экспоненциального распределения $\Gamma(\theta, 1)$. Построить наиболее мощный критерий для проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta = \theta_1$ и вычислить его функцию мощности.

Указание. Воспользоваться тем, что $L_\theta(2X_i/\theta) = \chi^2_{(2)}$ (см. задачу 1.51), и решением задачи 1.39 п. 2).

3.44. Пусть для распределения Коши, $K(\theta)$ проверяется гипотеза H_0: $\theta = 0$ против альтернативы H_1: $\theta = 1$. Показать, что при уровне значимости $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0{,}352$ наиболее мощный критерий по одному наблюдению имеет вид $X^*_{1\alpha} = \{X \geqslant 1/2\}$ и его мощность равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0{,}648$. Если же $\alpha = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 1) \approx 0{,}148$, то критерий имеет вид $X^*_{1\alpha} = \{1 \leqslant X \leqslant 3\}$, а мощность равна $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2 \approx 0{,}352$.

3.45*. Как выглядит критерий проверки гипотезы H_0: $L(\xi) = R(-a, a)$ против альтернативы H_1: $L(\xi) = N(0, \sigma^2)$ (параметры a и σ заданы), если известно, что наблюдаемая непрерывная случайная величина ξ имеет распределение, симметричное относительно нуля? Рассмотреть случай большой выборки. Провести с этих позиций анализ следующих данных: $-0{,}460$ $-0{,}114$ $-0{,}325$ $+0{,}196$ $-0{,}174$ при $a = 1/2$, $\sigma^2 = 0{,}09$.

Указание. Применить центральную предельную теорему

3.46. В последовательности независимых испытаний вероятности положительных исходов одинаковы и равны p. Построить критерий проверки гипотезы H_0: $p = 0$ против альтернативы H_1: $p = 0{,}01$ и определить наименьший объем выборки, при котором вероятности ошибок первого и второго рода не превышают 0,01.

3.47. Дана выборка $X = (X_1, ..., X_n)$ из распределения $N(0\ \sigma^2)$. Как выглядит наиболее мощный критерий для различения двух простых гипотез $H_0: \theta = \theta_0$ и $H_1: \theta = \theta_1$? Вычислить его мощность и убедиться в том, что он несмещен.

3.48 (продолжение задачи 3.47). Определить минимальный объем выборки $n^* = n^*(\alpha, \beta)$, при котором вероятности ошибок первого и второго рода не превышают соответственно α и β.

3.49. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — выборочные средние двух выборок, объемы которых n и m, из распределений $N(\theta, \sigma_1^2)$ и $N(\theta_2, \sigma_2^2)$ соответственно. Основываясь на статистике $T = (\bar{X} - \bar{Y})/\sigma$, где $\sigma^2 = \sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m$, построить критерий проверки гипотезы H_0: $\Delta = \theta_1 - \theta_2 = 0$ против альтернативы H_1: $\Delta > 0$.

Пусть заданы вероятности ошибок первого и второго рода α и β и объем n первой выборки. Определить минимальный объем m^* второй выборки, необходимый для того, чтобы ошибочные заключения могли быть сделаны с вероятностями, не превосходящими α и β.

Указание. Воспользоваться решениями задач 3.47 и 3.48.

3.50. По выборке объема n построить наиболее мощный критерий для различения двух простых гипотез относительно неизвестной дисперсии нормального распределения (среднее известно). Найти мощность критерия.

3.51.* Пусть по наблюдению X требуется различить два распределения с плотностями $f_0(x)$ (гипотеза H_0) и $f_1(x)$ (гипотеза H_1). Рассмотрим критерий вида

$$X_1(c) = \{x\colon f_1(x) \geqslant c f_0(x)\}, \quad c > 0,$$

и пусть $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ — соответствующие вероятности ошибок первого и второго рода. Показать, что:

1) $\dfrac{\beta(c)}{1-\alpha(c)} \leqslant c \leqslant \dfrac{1-\beta(c)}{\alpha(c)}$;

2) $\alpha(c) + \beta(c) \leqslant 1$ — несмещенность;

3) $\min(\alpha(c) + \beta(c)) = a(1) + \beta(1)$, т. к. критерий, минимизирующий сумму вероятностей ошибок, есть $X_1(1)$;

4) пусть X — повторная выборка объема n, т. е. $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $f_j(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_j(x_i)$, $j = 0, 1$. Вероятности ошибок критерия $X_1(1)$ обозначим в этом случае α_n и β_n. Доказать, что если $\int f_0(x)\ln(f_1(x)/f_0(x))\mathrm{d}x = \delta < 0$, то $\alpha_n, \beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ (таким образом, при бесконечно большой выборке возможно полное разделение гипотез H_0 и H_1).

Указание. Записать $X_1(1) = \{x\colon T_n(x) \equiv \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} > 0\}$ и применить к статистике $T_n(X)$ закон больших чисел. Заметим также, что согласно неравенству Йенсена всегда $\delta \leqslant 0$ [1, с. 121].

3.52.* Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ — нормальный случайный вектор, имеющий при гипотезе H_i распределение $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}^{(i)}, A)$, $i = 0, 1$ (общая ковариационная матрица A предполагается невырожденной). Построить критерий Неймана — Пирсона для различения гипотезы H_0 при альтернативе H_1 по одному наблюдению над ξ, а также критерий, минимизирующий сумму вероятностей ошибок.

§ 3. Сложные гипотезы

3.53. Для биномиальной модели $Bi(k, \theta)$ построить р.н.м. критерий по выборке объема n для проверки гипотезы H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta > \theta_0$.

Указание. Воспользоваться свойством модели с монотонным отношением правдоподобия и решением задачи 3.39.

3.54. Убедиться в том, что построенный в задаче 3.41 критерий Неймана — Пирсона (для пуассоновской модели $\Pi(\theta)$) является одновременно р.н.м. критерием для проверки гипотезы H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta > \theta_0$.

Указание. См. решение задачи 3.53.

3.55. Пусть в схеме Бернулли с неизвестной вероятностью «успеха» θ испытания продолжаются до получения r-го «неуспеха» и T_r — наблюдаемое число «успехов». Построить р.н.м. критерий проверки гипотезы H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta > \theta_0$ и показать, что при $r \to \infty$ соответствующая критическая граница при уровне значимости α имеет вид $t_\alpha = (r\theta_0 - u_\alpha\sqrt{r\theta_0})/(1 - \theta_0)$, $\Phi(u_\alpha) = \alpha$.

Указание. Воспользоваться свойством модели с монотонным отношением правдоподобия, представлением $T_r = X_1 + \ldots + X_r$, где $X_1, \ldots, X_r$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\boldsymbol{L}(X_1) = \bar{B}i(1, \theta)$, и применить центральную предельную теорему.

3.56. Показать, что построенные в задаче 3.43 критерии являются р.н.м. критериями в задачах проверки сложных односторонних гипотез соответственно H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ против H_1: $\theta > \theta_0$ и H_0: $\theta \geqslant \theta_0$ против H_1: $\theta < \theta_0$.

3.57 (*выборочный контроль*). Пусть партия из N изделий содержит неизвестное число θ дефектных изделий, $\theta \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Чтобы проверить гипотезу H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta > \theta_0$, берут на контроль n изделий и каждое из них проверяют. Основываясь на статистике T — обнаруженное в выборке число дефектных изделий, построить р.н.м. критерий.

Указание. Убедиться в том, что распределение статистики T (гипергеометрическое распределение $H(\theta, N, n)$) имеет монотонное отношение правдоподобия.

3.58. Для нормальной модели $N(\theta, \sigma^2)$ с неизвестным средним построить р.н.м. критерии для проверки гипотез H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ против H_1: $\theta > \theta_0$ и H_0: $\theta \geqslant \theta_0$ против H_1: $\theta < \theta_0$.

Указание. Использовать решение задачи 3.47 и свойства экспоненциальной модели.

3.59. Убедиться в том, что построенный в задаче 3.50 критерий для случая $\theta_0 > \theta_1$ одновременно является р.н.м. критерием проверки сложной гипотезы H_0: $\theta \geqslant \theta_0$ при левосторонней альтернативе H_1: $\theta < \theta_0$; аналогично, критерий для случая $\theta_0 < \theta_1$ является р.н.м. критерием проверки гипотезы H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ при правосторонней альтернативе H_1: $\theta > \theta_0$.

Указание. Воспользоваться свойствами экспоненциальной модели (см. п. 5 введения к гл. 3).

3.60.* Основываясь на задачах 3.47 и 3.58 и применяя прием объединения двух односторонних критических областей, построить несмещенный критерий для проверки гипотезы о среднем H_0: $\theta = \theta_0$ против двусторонней альтернативы H_1: $\theta \neq \theta_0$. Является ли этот критерий р.н.м. критерием?

3.61.* Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из нормального распределения $N(\mu, \theta^2)$. Построить р.н.м. несмещенный критерий проверки простой гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ при двусторонней альтернативе H_1: $\theta \neq \theta_0$.

Указание. Применить теорему 4.5 [1, с. 159] об общем виде р.н.м. несмещенного критерия и использовать решение задачи 3.50.

3.62. По выборке объема n из распределения $\Gamma(\theta, 1)$ построить р.н.м. несмещенный критерий для проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta \neq \theta_0$.

Указание. Использовать решение задач 3.43 и 3.61.

3.63. По выборке большого объема n построить локальный наиболее мощный критерий проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против общей альтернативы H_1: $\theta \neq \theta_0$ для модели $Bi(k, \theta)$. Показать, что его функция мощности $W_n(\theta)$ при уровне значимости α и локальных альтернативах вида $\theta = \theta^{(n)} = \theta_0 + \beta/\sqrt{n}$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{n \to \infty} W_n(\theta^{(n)}) = \Phi\left(\frac{-\beta\sqrt{k}}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}} + u_{\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\beta\sqrt{k}}{\sqrt{\theta_0(1-\theta_0)}} + u_{\alpha/2}\right).$$

Указание. Воспользоваться общим видом асимптотического (при больших n) двустороннего критерия для регулярных моделей:

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \{|U(\boldsymbol{x}; \theta_0)| \geqslant -u_{\alpha/2}\sqrt{ni(\theta_0)}\},$$

где $U(\boldsymbol{x}; \theta)$ — функция вклада выборки $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ и $i(\theta)$ — функция информации Фишера [1, с. 162]. Использовать решения задач 3.39 и 3.40.

3.64. По выборке большого объема n построить локальный наиболее мощный критерий проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta \neq \theta_0$ для модели $\Pi(\theta)$. Показать, что его функция мощности $W_n(\theta)$ при уровне значимости α и локальных альтернативах вида $\theta = \theta^{(n)} = \theta_0 + \beta/\sqrt{n}$ удовлетврряет предельному соотношению

$$\lim_{n \to \infty} W_n(\theta^{(n)}) = \Phi\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\theta_0}} + u_{\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{\theta_0}} + u_{\alpha/2}\right).$$

Указание. Использовать указание к задаче 3.63 и решение задачи 3.41.

§ 4. Проверка гипотез и доверительное оценивание

В задачах 3.65—3.72 воспользоваться принципом соответствия между задачами доверительного оценивания и проверки гипотез (см. п. 6 введения к гл. 3).

3.65. Используя построенные в задачах 2.119—2.120 доверительные интервалы для параметров θ_1 и θ_2 нормальной модели $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$, построить критерии проверки нулевой гипотезы H_0 против альтернативы H_1 в следующих задачах:

1) H_0: $\theta_1 = \theta_{10}$, H_1: $\theta_1 > \theta_{10}$;
2) H_0: $\theta_1 = \theta_{10}$, H_1: $\theta_1 < \theta_{10}$;
3) H_0: $\theta_1 = \theta_{10}$, H_1: $\theta_1 \neq \theta_{10}$;
4) H_0: $\theta_2 = \theta_{20}$, H_1: $\theta_2 > \theta_{20}$;
5) H_0: $\theta_2 = \theta_{20}$, H_1: $\theta_2 < \theta_{20}$;
6) H_0: $\theta_2 = \theta_{20}$, H_1: $\theta_2 \neq \theta_{20}$.

3.66. Используя решения задач 2.122—2.123, убедиться в том, что критерий уровня значимости α для гипотезы о равенстве средних двух нормальных моделей в случае известных дисперсий имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{(x, y): |\bar{x} - \bar{y}| \geqslant u_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}\},$$

а если дисперсии неизвестны — следующий вид:

$$X_{1\alpha} = \{(x, y): |\bar{x} - \bar{y}| \geqslant$$
$$\geqslant t_{1-\alpha/2, n+m-2}\sqrt{\frac{n+m}{nm(n+m-2)}(nS^2(x) + mS^2(y))}\}.$$

3.67. Основываясь на решении задачи 2.125, показать, что для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных моделей можно использовать критерий

$$X_{1\alpha} = \left\{(x, y): \frac{n(m-1)}{m(n-1)}\frac{S^2(x)}{S^2(y)} \leqslant F_{\frac{\alpha}{2}, n-1, m-1},\right.$$

либо

$$\left.\frac{n(m-1)}{m(n-1)}\frac{S^2(x)}{S^2(y)} \geqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1, m-1}\right\}.$$

3.68. В условиях задачи 2.127 построить критерий проверки гипотезы однородности H_0: $\tau = \theta_2/\theta_1 = 1$ (т. е. $\theta_1 = \theta_2$) и вычислить его функцию мощности.

3.69. Основываясь на доверительном интервале задачи 2.128, построить критерий проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ для соответствующей модели. Вычислить функцию мощности этого критерия и убедиться в том, что он несмещенный.

3.70. Используя результаты задачи 2.129, построить критерий проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ для равномерного распределения $R(0, \theta)$, вычислить его функцию мощности и убедиться в том, что он несмещенный.

3.71. Основываясь на результате задачи 2.130, убедиться в том, что критерий проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ для модели Вейбулла $W(0, \lambda, \theta)$ имеет вид

$$X_{1\alpha} = \left\{T \leqslant \frac{\theta_0^\lambda}{2}\chi^2_{\alpha_1, 2n}\right\} \cup \left\{T \geqslant \frac{\theta_0^\lambda}{2}\chi^2_{1-\alpha_2, 2n}\right\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

Чтобы получить несмещенный критерий, величины $\chi^2_{\alpha_1, 2n}$ и $\chi^2_{1-\alpha_2, 2n}$ выбираются так же, как в задаче 3.62.

3.72. Используя условие задачи 2.131 и ее результат, построить критерий проверки гипотезы H_0: $(\theta_1, \theta_2) =$ $= (\theta_{10}, \theta_{20})$.

§ 5. Критерий отношения правдоподобия (к.о.п.)

3.73.* Получить форму к.о.п. для гипотезы о среднем H_0: $\theta_1 = \theta_{10}$ нормальной модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$ и показать, что для больших выборок он имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{x: \sqrt{n-1}\,|\bar{x} - \theta_{10}|/S(x) \geqslant -u_{\alpha/2}\},$$

а его мощность при альтернативе $\theta_1^{(n)} = \theta_{10} + \beta/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ равна $1 - F_1(u^2_{\alpha/2}; \beta^2/\theta_2^2)$ (см. п. 7 введения к гл. 3).

Указание. Использовать задачи 1.47 и 2.44 и асимптотическую теорию к.о.п. [1, с. 175].

3.74.* Убедиться в том, что к.о.п. для гипотезы о дисперсии H_0: $\theta_2 = \theta_{20}$ нормальной модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$ имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{nS^2(x)/\theta_{20}^2 \leqslant \chi^2_{\alpha_1, n-1}\} \cup \{nS^2(x)/\theta_{20}^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha_2, n-1}\},$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ и S^2 — выборочная дисперсия для выборки объема n. Вычислить функцию мощности этого критерия и определить, при каких значениях α_1 и α_2 он будет несмещенным.

Указание. Воспользоваться тем, что $L_0(nS^2(X)/\theta_2^2) = \chi^2(n-1)$, и решением задачи 3.61.

3.75. Построить к.о.п. для гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ в модели $Bi(1, \theta)$ и убедиться в том, что его асимптотический (при больших объемах выборки) вариант совпадает с локальным наиболее мощным критерием, построенным в задаче 3.63 (при значении параметра $k = 1$).

Указание. Воспользоваться общей теорией к.о.п. для полиномиального распределения [1, с. 170—171].

3.76. Построить к.о.п. для гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ в модели $\Pi(\theta)$ и убедиться в том, что его асимптотический вариант для больших выборок совпадает с локальным наиболее мощным критерием, построенным в задаче 3.64.

Указание. Воспользоваться тем, что при $n \to \infty$ предельные распределения при гипотезе H_0 статистик $-2\ln\lambda_n$ и $Q_n^{(2)} = U_n^2(\theta_0)/ni(\theta_0)$ совпадают [1, с. 169.

3.77.* Пусть $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_k$ — выборочные средние для независимых выборок объемов $n_1, \ldots, n_k$ из совокупностей $Bi(1, \theta_1), \ldots, Bi(1, \theta_k)$ соответственно. Построить и рассчитать асимптотический (при $n_1, \ldots, n_k \to \infty$) вариант к.о.п. для гипотезы однородности H_0: $\theta_1 = \ldots = \theta_k$. Убедиться в том, что этот критерий имеет такой же вид, как и критерий однородности χ^2 [1, с. 124—126].

| Указание. Использовать решение задачи 3.75.

3.78.* Пусть $X_j = (X_{j1}, \ldots, X_{jn_j})$, $j = 1, \ldots, k$, — независимые выборки из совокупностей $\Pi(\theta_1), \ldots, \Pi(\theta_k)$ соответственно. Построить и рассчитать асимптотический (при $n_1, \ldots, n_k \to \infty$) вариант к.о.п. для гипотезы однородности H_0: $\theta_1 = \ldots = \theta_k$. Проанализировать с этих позиций следующие данные: выборочные суммы для четырех выборок, объемы которых 120, 100, 100 и 125, из пуассоновских совокупностей оказались равными соответственно 251, 323, 180 и 426. Одинаковы ли генеральные средние?

3.79.* Пусть n_j, $\bar{X}_j$ и S_j^2 — соответственно объем, выборочные среднее и дисперсия для выборки из совокуп ности $N(\theta_{1j}, \theta_2^2)$, $j = 1, \ldots, k$ (выборки предполагаются независимыми). Построить к.о.п. для гипотезы однородности H_0: $\theta_{11} = \ldots = \theta_{1k}$. Убедиться в том, что в случае двух выборок ($k = 2$) этот критерий имеет вид (ср. с за дачей 3.66) $X_{1\alpha} = \{|T| \geqslant t_{1-\alpha/2, n_1+n_2-2}\}$, где

$$T = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{(n_1 + n_2)(n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2)}}.$$

| Указание. Использовать задачи 2.86 и 2.114, а также утверждение, что $L(T|H_0) = S(n-2)$ [1, теорема 1.12].

3.80.* Пусть $S_1^2, \ldots, S_k^2$ — выборочные дисперсии, построенные по независимым выборкам объемов $n_1, \ldots, n_k$ из совокупностей $N(\theta_{1j}, \theta_{2j}^2)$, $j = 1, \ldots, k$, соответственно. Построить к.о.п. для гипотезы о равенстве дисперсий H_0: $\theta_{21} = \ldots = \theta_{2k}$. Убедиться в том, что в случае двух выборок ($k = 2$) этот критерий имеет (ср. с задачей 3.67) вид

$$X_{1\alpha} = \{F \leqslant F_{\alpha_1, n_1-1, n_2-1}\} \cup \{F \geqslant F_{1-\alpha_2, n_1-1, n_2-1}\},$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $F = [n_1(n_2 - 1)S_1^2]/[n_2(n_1 - 1)S_2^2]$.

| Указание. Использовать решение задачи 3.79, а также утверждение $L(F|H_0) = S(n_1 - 1, n_2 - 1)$ [1, теорема 1.13].

§ 6. Разные задачи

3.81. Наблюдаемые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и нормальны, но, вообще говоря, имеют разное распределение. Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что они одинаково распределены. Используя задачу 1.58, убедиться в том, что соответствующая критическая область при уровне значимости α может быть задана в виде $X_{1\alpha} = \{|\eta| > v_\alpha\}$, где v_α определяется через функцию бета-распределения с помощью соотношения $B\left(1 - v_\alpha^2; \frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \alpha$ (для нахождения v_α могут быть использованы таблицы бета-распределения $\beta\left(\frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right)$).

3.82. Пусть $X_i = (X_{i1}, X_{i2})$, $i = 1, \ldots, n$, — независимые наблюдения над двумерной случайной величиной $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, имеющей нормальное распределение с неизвестными параметрами, и ρ_n — построенный по этим данным выборочный коэффициент корреляции.

Основываясь на результатах задачи 1.59, убедиться в том, что критическая область

$$X_{1\alpha} = \left\{|\rho_n| \geqslant \frac{t_{1-\alpha/2, n-2}}{\sqrt{n - 2 + t^2_{1-\alpha/2, n-2}}}\right\}$$

задает критерий уровня значимости α для гипотезы H_0 о независимости компонент ξ_1 и ξ_2.

3.83. Пусть наблюдаемые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и $\mathbf{L}(X_i) = \Pi(\theta_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Требуется проверить гипотезу однородности H_0: $\theta_1 = \ldots = \theta_n$. Основываясь на результате задачи 1.60, убедиться в том, что при больших n можно использовать критерий $X_{1\alpha} = \{|T_n| \geqslant -u_{\alpha/2}\}$.

3.84. Какой критерий согласия может быть построен на основе результата задачи 1.61?

3.85.* (*Асимптотическая эффективность критериев*). Рассмотрим задачу проверки простой гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta > \theta_0$ для некоторой модели со скалярным параметром $\theta \in \Theta$, где Θ — некоторый интервал действительной оси. Предположим, что в данной задаче используются критерии вида $X_1 = \{T_n \geqslant \gamma_n\}$, где T_n — некоторая статистика для выборки объема n, обладающая следующими свойствами:

а) существуют функции $\mu(\theta)$ и $\sigma(\theta) > 0$ такие, что равномерно по θ в интервале $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \eta$, где $\eta > 0$ — любое число, при $n \to \infty$

$$\mathbf{L}_\theta(T_n) \sim \mathbf{N}(\mu(\theta), \sigma^2(\theta)/n);$$

б) $\mu(\theta)$ дифференцируема в точке θ_0 и $\mu'(\theta_0) > 0$, а $\sigma(\theta)$ непрерывна в θ_0.

Доказать, что: 1) критическая граница γ_n при уровне значимости α асимптотически имеет вид

$$\gamma_n = \mu(\theta_0) - u_\alpha \sigma(\theta_0)/\sqrt{n};$$

2) при близких альтернативах вида $\theta^{(n)} = \theta_0 + \beta/\sqrt{n}$, $\beta > 0$, мощность $W_n(\theta^{(n)})$ критерия удовлетворяет предельному соотношению

$$e(\beta, \alpha) \equiv \lim_{n\to\infty} W_n(\theta^{(n)}) = \Phi(\beta\mu'(\theta_0)/\sigma(\theta_0) + u_\alpha).$$

Замечание. Величина $e = e(\beta, \alpha)$ называется *эффективностью Питмена* критерия $X_{1\alpha} = \{T_n \geqslant \geqslant \mu(\theta_0) - u_\alpha\sigma(\theta_0)/\sqrt{n}\}$ и ее часто используют в качестве меры сравнения различных критериев: мера e дает представление о локальном поведении кривой мощности критерия в окрестности точки θ_0 для больших выборок.

3.86* (продолжение задачи 3.85). Пусть $T_n^{(j)}$, $j = 1, 2$, — две статистики, удовлетворяющие сформулированным условиям; соответствующие им характеристики будем отмечать индексом j. Предположим, что для каждого n существует целое N_n такое, что

$$W_n^{(1)}(\theta_0 + \beta/\sqrt{n}) = W_{N_n}^{(2)}(\theta_0 + \beta/\sqrt{n}),$$

т. е. мощности соответствующих критериев при альтернативе $\theta^{(n)}$ равны, если n — объем выборки в первом случае и N_n — во втором. Пусть также $N_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказать, что

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{N_n} = \left(\frac{\mu_2'(\theta_0)}{\sigma_2(\theta_0)}\right)^2 \Big/ \left(\frac{\mu_1'(\theta_0)}{\sigma_1(\theta_0)}\right)^2 = \frac{e_2'}{e_1'},$$

где $e' = (\mu'(\theta_0)/\sigma(\theta_0))^2$.

Замечание. Величина e', являющаяся возрастающей функцией эффективности Питмена $e(\beta, \alpha)$ при фиксированных β и α, также может служить мерой асимптотической эффективности критерия. Сформулированное утверждение означает, что относительная эффективность второго критерия по отношению к первому равна пределу обратного отношения выборочных объемов, необходимых для того, чтобы достичь одинаковой мощности при указанных альтернативах $\theta^{(n)}$.

3.87. Пусть требуется проверить гипотезу H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta > \theta_0$ для нормальной модели $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$. Построить критерии вида $X_1 = \{T_n \geqslant \gamma_n\}$, основываясь на статистиках $T_n^{(1)} = \bar{X}$ — выборочное среднее и $T_n^{(2)} = Z_{n,1/2}$ — выборочная медиана, и показать, что относительная эффективность второго критерия по отношению к первому $\lambda = 2/\pi = 0{,}637...$

У к а з а н и е. Воспользоваться решениями задач 3.86, 3.85 и 1.32.

3.88.* Пусть наблюдается случайный вектор $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, имеющий распределение $\boldsymbol{L}_0(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{N}(\theta \boldsymbol{t}, \Sigma = \|\sigma_{ij}\|_1^n)$, где θ — неизвестный скалярный параметр, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ — известные константы и $\sigma_{ij} = t_i$, $i \leqslant j$. (Если $\eta(t)$, $t \geqslant 0$, — винеровский процесс [2, с. 221], т. е. однородный случайный процесс с независимыми приращениями, причем $\boldsymbol{L}(\eta(t)) = \boldsymbol{N}(\theta t, t)$, то $X_i = \eta(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. $\boldsymbol{X}$ — наблюдения над $\eta(t)$ в моменты $t_1, \ldots, t_n$.)

Убедиться в том, что достаточной статистикой для θ является последнее наблюдение X_n и, основываясь на этом, построить критерии проверки гипотезы H_0: $\theta = 0$, т. е. гипотезы об отсутствии систематического тренда (смещения, сноса) (рассмотреть альтернативы H_1^+: $\theta > 0$, H_1^-: $\theta < 0$ и H_1: $\theta \neq 0$).

У к а з а н и я. 1. Воспользоваться критерием факторизации, установив при этом равенство $\boldsymbol{t}\Sigma^{-1} = (0 \ldots 01)$.

2. Использовать решения задач 3.47, 3.58 и 3.60.

Глава 4
ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1. Под *линейной регрессионной моделью* понимают такую ситуацию, когда наблюдаемые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ «в среднем» линейно зависят от некоторых неслучайных факторов $z_1, \ldots, z_k$ $(k < n)$, значения которых могут меняться от опыта к опыту. В этом случае исходные статистические данные состоят из множества наблюдавшихся значений «откликов» $X_1, \ldots, X_n$ и соответствующих значений факторов, т. е. имеют вид $(x_i;\ z_1^{(i)}, \ldots, z_k^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$, и считается, что

$$\mathbf{E}X_i = \sum_{j=1}^{k} z_j^{(i)} \beta_j = \mathbf{z}^{(i)\prime}\boldsymbol{\beta},\ z^{(i)} = (z_1^{(i)}, \ldots, z_k^{(i)}),$$

где $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ — совокупность неизвестных параметров, называемых *коэффициентами регрессии*. Если ввести случайные величины $\varepsilon_i = X_i - \mathbf{z}^{(i)}\boldsymbol{\beta}$, называемые *«ошибками»* измерений, и *матрицу плана* $Z = \|z^{(1)} \ldots z^{(n)}\|$ размером $k \times n$, то в матричных обозначениях модель записывается в виде

$$\boldsymbol{X} = Z'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n),\ \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n). \quad (4.1)$$

Здесь $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$ и обычно предполагается, что наблюдаемые случайные величины некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, т. е. матрица вторых моментов вектора наблюдений $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{D}(\varepsilon) = \mathrm{E}\varepsilon\varepsilon' = \sigma^2 \boldsymbol{E}_n. \tag{4.2}$$

Величина σ^2 называется *остаточной дисперсией* и обычно также неизвестна. Если неслучайные переменные имеют вид $z_j = a_j(t)$, где $a_j(t)$ — полином, то говорят о *параболической регрессии.*

В приложениях часто параметр $k = 2$, а векторы $z^{(i)}$ имеют вид $z^{(i)} = (1, t_i)$, т. е. в данном случае $\mathrm{E}X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i$, $i = 1, ..., n$ (среднее значение наблюдений является линейной функцией одного фактора t). Этот случай называют *простой регрессией*, прямую $\varphi(t) = \beta_1 + \beta_2 t$ — *линией регрессии*, а коэффициент β_2 — ее *наклоном.*

В ряде задач регрессионного анализа делаются дополнительные предположения о виде распределения «ошибок» ε и часто считается, что они нормально распределены, т. е. $\boldsymbol{L}(\varepsilon) = \boldsymbol{N}(0, \sigma^2 \boldsymbol{E}_n)$. В этом случае модель имеет вид

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{Z}'\beta, \sigma^2 \boldsymbol{E}_n) \tag{4.3}$$

и ее называют *нормальной регрессией.*

К модели линейной регрессии сводятся многие задачи прикладных исследований, в которых речь идет об определении вектора неизвестных параметров $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_k)$, причем обычно можно измерить лишь некоторые функции от этих параметров, а прямое их измерение невозможно. К задачам такого типа относятся, в частности, задачи восстановления функциональной зависимости. В этом случае неизвестными параметрами являются коэффициенты разложения восстанавливаемой функции по какой-либо системе функций.

2. Основными задачами регрессионного анализа являются задачи оценивания неизвестных параметров $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_k)$ и σ^2 модели (4.1)—(4.2), а в случае нормальной регрессии (4.3) — их доверительное оценивание и проверка гипотез о параметрах.

Основным методом построения оценок для коэффициентов регрессии $\boldsymbol{\beta}$ является *метод наименьших квадратов*, в соответствии с которым оценки этих параметров находят из условия обращения в минимум квадратичной формы:

$$S(\beta) = S(X; \beta) = (X - Z'\beta)'(X - Z'\beta). \qquad (4.4)$$

Точку $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k)$, удовлетворяющую равенству $S(\hat{\beta}) = \min\limits_{\beta} S(\beta)$, называют *оценкой наименьших квадратов* (о.н.к.) параметра β.

Определяющую роль в решении этих задач играет матрица $A = ZZ'$. В дальнейшем считается, что эта матрица невырождена (или, что эквивалентно, $\operatorname{rang} Z = k$). При этом предположении о.н.к. единственна, определяется *нормальным уравнением* $A\beta = Y \equiv ZX$ и имеет вид $\hat{\beta} = A^{-1}Y = A^{-1}ZX$. При этом оценка $\hat{\beta}$ является несмещенной ($\mathrm{E}\hat{\beta} = \beta$) с минимальной дисперсией (т. е. дисперсии всех компонент вектора $\hat{\beta}$ минимальны) в классе всех линейных (т. е. линейно зависящих от наблюдений X) несмещенных оценок β. Более того, такими же свойствами обладает и любая линейная функция $\hat{t} = T\hat{\beta}$ как оценка параметра $t = T\beta$ (здесь T — заданная матрица некоторого размера $m \times k$); при этом $\mathrm{D}(\hat{t}) = \sigma^2 TA^{-1}T'$, в частности $\mathrm{D}(\hat{\beta}) = \sigma^2 A^{-1}$

Несмещенной оценкой остаточной дисперсии σ^2 является [1, с. 181—184) статистика

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k} S(\hat{\beta}) = \frac{1}{n-k} X'BX, \ B = E_n - Z'A^{-1}Z. \qquad (4.5)$$

В задачах интерполяции, когда для неизвестной функции $x = f(t)$, связывающей переменные t и x, по измерениям $(t_i, X_i = x_i + \varepsilon_i)$, $x_i = f(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, подбирают *интерполяционный многочлен* вида

$$\varphi(t; \beta) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j a_j(t),$$

где в качестве $a_1(t)$, $a_2(t)$, ... используют *ортогональные многочлены Чебышева*, о.н.к. неизвестных коэффициентов β_i вычисляют по формулам

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{a_j^2} \sum_{i=1}^{n} a_j(t_i) X_i, \ a_j^2 = \sum_{i=1}^{n} a_j^2(t_i), \ j = 1, 2, \ldots, \qquad (4.6)$$

при этом величина $S(\hat{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \hat{\beta}_j^2$ характеризует точность приближения; первые три многочлена Чебышева имеют вид:

$$a_1(t) \equiv 1, \ a_2(t) = t - \bar{t}, \ a_3(t) = (t - \bar{t})\left(t - \bar{t} - \frac{s_3}{s_2}\right) - s_2,$$

где $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$, $s_k = s_k(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^k$ [1, с. 189—191].

Метод наименьших квадратов применяют также в случае, когда зависимость $\mathbf{E}X_i$ от β не является линейной. Пусть

$$X_i = f(t_i, \beta_1, \ldots, \beta_k) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2$, $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ $(i \neq j)$.

Тогда о.н.к. $\hat{\beta}$ параметров β минимизируют по β выражение

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - f(t_i, \beta_1, \ldots, \beta_k))^2.$$

Таким образом о.н.к. $\hat{\beta}$ являются решением системы уравнений

$$\frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Приведем пример вычисления оценок параметров β. Пусть требуется определить неизвестные коэффициенты $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ функциональной зависимости

$$x(t) = \beta_1 + t\beta_2 + t^3\beta_3.$$

Будем предполагать, что в точках $t_i = 2 + \frac{3i}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, измерены значения функции $x(t)$. Ошибки измерений ε_i, $i = 1, \ldots, n$, будем считать независимыми и нормально распределенными с $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2$. В этом случае имеем линейную модель

$$X_i = x(t_i) + \varepsilon_i = \beta_1 + t_i\beta_2 + t_i^3\beta_3 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и оценки $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\beta}_1 - t_i\hat{\beta}_2 - t_i^3\hat{\beta}_3) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\beta}_1 - t_i\hat{\beta}_2 - t_i^3\hat{\beta}_3)t_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\beta}_1 - t_i\hat{\beta}_2 - t_i^3\hat{\beta}_3)t_i^3 = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Пусть $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = -1$, $\beta_3 = 1$, $\sigma^2 = 0{,}04$. Смоделируем ε_i в случае $n = 25$, $n = 100$ и найдем соответствующие X_i. Из системы (4.7) находим:

1) $n = 25$ $\hat{\beta} = 2{,}983$; $\hat{\beta}_2 = -0{,}828$; $\hat{\beta}_3 = 0{,}895$; $\tilde{\sigma}^2 = 0{,}034$.

2) $n = 100$ $\hat{\beta}_1 = 2{,}992$; $\hat{\beta}_2 = -1{,}007$; $\hat{\beta}_3 = 1{,}001$; $\tilde{\sigma}^2 = 0{,}046$.

На рис. 5 и 6, относящихся к случаям $n = 25$ и $n = 100$ соответственно, приведен график точной функциональной зависимости $x(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^3$, знаком ○ отмечены результаты измерений (t_i, X_i), а также приведены графики функций $\hat{x}(t) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t + \hat{\beta}_3 t^3$.

3. Для схемы нормальной регрессии (4.3) о.н.к. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ совпадают с оценками максимального правдоподобия (о.м.п.) параметров $\boldsymbol{\beta}$. В этом случае γ-доверительный интервал для параметра β_j имеет вид

$$\left(\hat{\beta}_j \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-k} \sqrt{\frac{a^{jj}}{n-k} S(\hat{\boldsymbol{\beta}})}\right), \tag{4.8}$$

где a^{jj} — j-й диагональный элемент матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$, а для остаточной дисперсии

$$S(\hat{\boldsymbol{\beta}})/\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-k} < \sigma^2 < S(\hat{\boldsymbol{\beta}})/\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-k}; \tag{4.9}$$

γ-Доверительная область для вектора $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T\beta}$, где $\boldsymbol{T}$ — заданная матрица размера $m \times k$ и $\operatorname{rang} \boldsymbol{T} = m$, строится по формуле

$$G_\gamma(\boldsymbol{X}) = \left\{\boldsymbol{t} : (\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{t})' \boldsymbol{D}^{-1} (\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{t}) < \frac{m}{n-k} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) F_{\gamma, m, n-k}\right\}, \tag{4.10}$$

где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{T}'$ [1, с. 194—196].

Если требуется одновременно оценить некоторые линейные комбинации параметров $\boldsymbol{\beta}$, т. е. величины $\boldsymbol{\lambda}_r'\boldsymbol{\beta}$, $r = 1, \ldots, m$, где $\boldsymbol{\lambda}_r$ — заданные векторы, то система совместных доверительных интервалов с доверительным уровнем, большим или равным γ, имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}_r'\hat{\boldsymbol{\beta}} - u_\gamma(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\lambda}_r) < \boldsymbol{\lambda}_r'\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\lambda}_r'\hat{\boldsymbol{\beta}} + u_\gamma(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\lambda}_r), \quad r = 1, \ldots, m, \tag{4.11}$$

где $u_\gamma(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{k}{n-k} S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) F_{\gamma, k, n-k} (\boldsymbol{\lambda}' \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\lambda})\right]^{1/2}$ [1, с. 198].

Наконец, для проверки *линейной гипотезы* вида H_0: $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}_0 = \{\boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{T\beta} = \boldsymbol{t}_0\}$, где $\boldsymbol{T}$ — заданная матрица коэффициентов ограничений размера $m \times k$ и $\operatorname{rang} \boldsymbol{T} = m$, $\boldsymbol{t}_0$ — заданный вектор, используют *F-критерий* с критической областью вида

$$\mathscr{X}_{1\alpha} = \left\{\frac{n-k}{m} \frac{S_T - S(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{S(\hat{\boldsymbol{\beta}})} \geqslant F_{1-\alpha, m, n-k}\right\}, \tag{4.12}$$

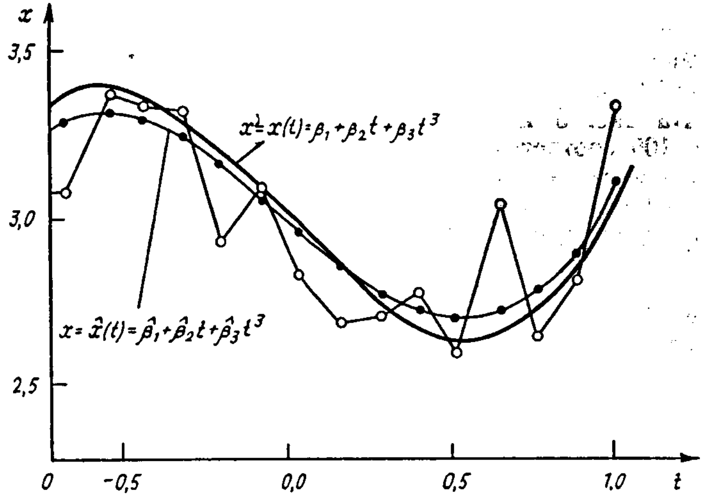

Рис. 5

где $S_{\text{т}} = \min\limits_{\beta : T\beta = t_0} S(\boldsymbol{\beta})$ — условный (при гипотезе H_0) минимум $S(\boldsymbol{\beta})$ [1, с. 199—200].

4.1. Для линейной модели (4.1) в случае $k = 2$ записать явно выражения для о.н.к. $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ через $(X_1, ..., X_n)$ и $\mathbf{z}^{(i)} = (z_1^{(i)}, z_2^{(i)})$, $i = 1, ..., n$.

4.2. Для модели простой регрессии

$$X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, ..., n,$$

найти явный вид о.н.к. $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$, проверить их несмещенность и найти условие их состоятельности.

4.3. Вычислить оценку $\tilde{\sigma}^2$ (см. (4.5)) остаточной дисперсии σ^2 в задаче 4.2. Указать достаточное условие ее состоятельности.

4.4. Найти $\operatorname{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ оценок $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, определенных в задаче 4.2.

4.5. Значения функции $x(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2$ измерены в точках t_i $(i = 1, ..., n)$:

$$X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \beta_3 t_i^2 + \varepsilon_i; \quad \mathbf{E}\varepsilon_i = 0, \ \mathbf{D}\varepsilon_i = \sigma^2.$$

Найти: 1) о.н.к. $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ параметров β_1, β_2, β_3; 2) $\mathbf{E}\hat{\beta}_i$, $\mathbf{D}\hat{\beta}_i$, $i = 1, 2, 3$; $\operatorname{cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)$.

4.6. Является ли статистика

$$\hat{T} = \int\limits_a^b \hat{x}(t)dt$$

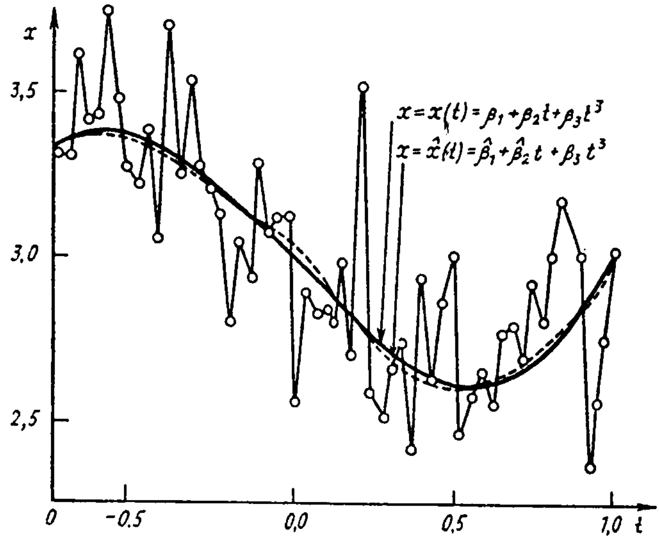

Рис. 6

несмещенной оценкой интеграла $I = \int\limits_a^b x(t)dt$, где $\hat{x}(t) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t + \hat{\beta}_3 t^2$, а $x(t)$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ определены в задаче 4.5? Найти $\mathbf{D}\hat{I}$.

4.7. Смоделировать наблюдения $X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, если $n = 100$, $t_i = 2i/n$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, ε_i — независимые равномерно распределенные случайные величины на отрезке $[-1{,}386;\ 1{,}386]$. Построить графики функций $x(t) = 2 + t$, $\hat{x}(t) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t$ на отрезке $[0,\ 2]$; отметить также точки $(t_i,\ X_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

4.8. Решить задачу 4.7 с ε_i распределенными нормально с $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = 0{,}16$.

4.9. В предыдущей задаче построить γ-доверительные интервалы для параметров β_1, β_2 и σ^2 (см. (4.8)—(4.9)), а также γ-доверительный эллипс $G_\gamma(X)$ (см. (4.10)) для вектора $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\ \beta_2)$; считать $\gamma = 0{,}9$ и $\gamma = 0{,}95$.

| Указание. Использовать решения задач 4.2—4.3.

4.10. По данным независимых равноточных измерений $(X_i,\ t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, значений некоторой линейной функции $x(t) = \beta_1 + \beta_2 t$ (погрешности измерений подчиняются нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$ с неизвестной дисперсией) построить доверительный интервал для интеграла от этой функции на отрезке $-a \leqslant t \leqslant a$ (a задано).

Произвести соответствующие вычисления для следующих данных: (2,96; —2), (3,20; —1), (3,41; 0), (3,63; 1), (3,79; 2) при $a = 2$ и доверительном уровне $\gamma = 0{,}95$.

4.11. Координаты $a(t)$ движущейся равномерно и прямолинейно точки в моменты $t = 1, 2, 3, 4, 5$ оказались соответственно равны 12,98; 13,05; 13,32; 14,22; 13,97. Предполагая погрешности измерений независимыми и нормальными $N(0, \sigma^2)$, построить 0,95-доверительный эллипс для точки $(a(0), v)$, где v — скорость точки.

4.12. Смоделировать наблюдения $X_i = \beta_1 + \beta_2 t_i + \beta_3 t_i^2 + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, с $\beta_1 = -8$, $\beta_2 = 10$, $\beta_3 = -2$, $n = 100$, $t_i = 1 + 2i/n$, ε_i-независимые равномерно распределенные случайные величины на отрезке $[-1{,}386; 1{,}386]$. Построить графики функций $x(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_2 t^2$, $\hat{x}(t) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 t + \hat{\beta}_3 t^2$ на отрезке $[1, 3]$; отметить также точки (t_i, X_i), $i = 1, \ldots, n$.

4.13. Решить задачу 4.12 в случае нормально распределенных ε_i с $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = 0{,}16$.

4.14. В предыдущей задаче построить γ-доверительные интервалы для параметров β_1, β_2, β_3 и σ^2 (см. (4.8)—(4.9)), а также систему совместных доверительных интервалов уровня, большего или равного γ, для β_1, β_2, β_3 (см. (4.11)).

Указание. Использовать решение задачи 4.5.

4.15. В четырехугольнике $ABCD$ результаты независимых и равноточных измерений углов ABD, DBC, ABC, BCD, CDB, BDA, CDA и DAB (в градусах) соответственно таковы: 50,78; 30,25; 78,29; 99,57; 50,42; 40,59; 88,87; 89,86. Считая, что ошибки измерений распределены нормально $N(0, \sigma^2)$, найти о.н.к. углов $\beta_1 = ABD$, $\beta_2 = DBC$, $\beta_3 = CDB$ и $\beta_4 = BDA$. Построить 0,95-доверительный интервал для σ^2.

4.16*. Доказать, что о.н.к. $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ является оптимальной оценкой $\boldsymbol{\beta}$ в классе всех линейных (т. е. линейно зависящих от $\mathbf{X}$) несмещенных оценок $\boldsymbol{\beta}$ (т. е. дисперсии $D\hat{\beta}_i$ минимальны $\forall i$); получить, что $\mathbf{D}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \underset{\sim}{A}^{-1} = \sigma^2 \|a^{ij}\|$.

4.17. Доказать несмещенность оценки $\tilde{\sigma}^2$ для остаточной дисперсии σ^2. Получить явную зависимость $\tilde{\sigma}^2$ от $\boldsymbol{X}$, указанную в формуле (4.5).

Указание. Использовать разложение $S(\boldsymbol{\beta}) = S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{A} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ и формулы $\operatorname{cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) = \sigma^2 a^{ij}$ (задача 4.16).

4.18. Пусть матрица плана Z обладает свойством, что ее строки ортогональны. Как выглядят в этом случае о.н.к. $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ и их вторые моменты?

4.19.* Пусть имеются k предметов, веса которых $\beta_1, \ldots, \beta_k$ неизвестны. Для определения этих весов взвешивают комбинации предметов: каждая операция (одно взвешивание) состоит в том, что несколько предметов кладут на одну чашу весов, несколько — на другую и добавляют равновес для приведения весов в равновесие. В результате получают соотношения

$$z_1^{(i)}\beta_1 + \ldots + z_k^{(i)}\beta_k = y_i$$

(для i-го взвешивания, $i = 1, \ldots, n$), где $z_j^{(i)} = 1, -1, 0$ в зависимости от того, лежит j-й предмет на левой чаше весов, на правой или вообще не участвует в данном взвешивании, а y_i — добавляемый равновес. Считая погрешности измерений независимыми и нормальными $N(0, \sigma^2)$, оценить веса четырех предметов по данным следующей таблицы восьми взвешиваний:

β_1	1	1	1	1	1	1	1	1
β_2	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
β_3	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1
β_4	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
Вес	20,2	8,1	9,7	1,9	19,9	8,3	10,2	1,8

Найти матрицу ковариаций оценок, а также оценку для σ^2. Сравнить точность этих оценок с точностью оценок, получаемых обычным способом, когда каждый предмет взвешивают несколько раз и в качестве оценки его веса принимают среднее арифметическое результатов взвешиваний.

Указание. Использовать решение предыдущей задачи.

4.20. Для данных предыдущей задачи построить систему совместных доверительных интервалов для $\beta_1, \ldots, \beta_4$ уровня, большего или равного 0,95.

4.21. Найти оценки максимального правдоподобия параметров $\boldsymbol{\beta}$ и σ^2 нормальной регрессии (4.3) и вычислить их смещения.

4.22. Убедиться в том, что γ-доверительный интервал для произвольной линейной комбинации $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\beta_j$ коэффициентов нормальной регрессии (4.3) имеет вид

$$\left(\boldsymbol{\lambda}'\hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{(1+\gamma)/2,\, n-k}\sqrt{\frac{1}{n-k}S(\hat{\boldsymbol{\beta}})\,\boldsymbol{\lambda}'A^{-1}\boldsymbol{\lambda}}\right).$$

4.23. Построить γ-доверительный интервал для ординаты $\varphi(t)=\beta_1+\beta_2 t$ линии регрессии в произвольной точке t (модель предполагается нормальной). Произвести соответствующие вычисления для данных задачи 4.8 для $t=1{,}5$, $\gamma=0{,}95$.

Указание. Использовать решения задач 4.2—4.4 и 4.22.

4.24. Убедиться в том, что интервалы

$$\left(\hat\beta_i-\hat\beta_j\pm\left[\frac{\kappa}{n-k}S(\hat{\boldsymbol\beta})F_{\gamma,k,n-k}(a^{ii}-2a^{ij}+a^{jj})\right]^{1/2}\right),$$

$$1\leqslant j<i\leqslant k,$$

образуют систему совместных доверительных интервалов уровня $>\gamma$ для разностей $\beta_i-\beta_j$, $i>j$.

4.25. Построить систему совместных доверительных интервалов для средних значений всех наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ в модели нормальной регрессии.

4.26.* Пусть $\boldsymbol T$ — заданная матрица размера $m\times k$ $(m\leqslant k)$ и $\operatorname{rang}\boldsymbol T=m$, $\boldsymbol t_0$ — заданный m-мерный вектор такой, что система $\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol t_0$ совместна. Обозначим $S_T=\min\limits_{\boldsymbol\beta:\,\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol t_0}S(\boldsymbol\beta)$ и назовем *обобщенной* о.н.к. $\hat{\boldsymbol\beta}_T$ то значение $\boldsymbol\beta$, при котором $S_T=S(\hat{\boldsymbol\beta}_T)$. Доказать, что

$$\hat{\boldsymbol\beta}_T=\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol A^{-1}\boldsymbol T'\boldsymbol D^{-1}=(\boldsymbol T\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol t_0),$$

где матрица $\boldsymbol D=\boldsymbol{TA}^{-1}\boldsymbol T'$ положительно определена. Найти разложение

$$S_T=S(\hat{\boldsymbol\beta})+(\boldsymbol T\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol t_0)'\boldsymbol D^{-1}(\boldsymbol T\hat{\boldsymbol\beta}-\boldsymbol t_0).$$

4.27. Убедиться в том, что критерий уровня значимости α для проверки гипотезы H_0: $\beta_2=\beta_{20}$, фиксирующей значение наклона линии регрессии (в нормальной модели), задается критической областью

$$\mathscr{X}_{1\alpha}=\left\{|\hat\beta_2-\beta_{20}|\geqslant t_{1-\alpha/2,n-2}\sqrt{S(\hat{\boldsymbol\beta})/\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2\right]}\right\}.$$

Указание. Использовать решение задач 4.2—4.3 и соотношение (4.12).

4.28. При каких значениях уровня значимости α отклоняется гипотеза H_0: $\beta_2=1{,}2$ по данным задачи 4.8?

4.29. Значения независимых случайных величин $X_j^{(i)}$ $(i=1, 2, 3, 4;\ j=1, 2)$ приведены в следующей таблице:

j \ i	1	2	3	4
1	8,67	9,71	10,16	13,65
2	10,03	10,23	9,26	13,79

Предполагая, что $\boldsymbol{L}(X_j^{(i)}) = \boldsymbol{N}(\mu_i, \sigma^2)$ (все параметры неизвестны), построить оценки для μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 и σ^2 и проверить гипотезу однородности H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ (уровень значимости принять равным 0,1).

4.30. Построить интерполяционный многочлен вида $\varphi_k(t, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j a_j(t)$ для $k = 2$ и 3, где $a_j(t)$ — многочлены Чебышева (см. 4.6)) по следующим данным, отражающим неизвестную зависимость $x = f(t)$:

t_i	0,40	0,52	0,61	0,70	0,79	0,86	0,89	0,95	0,99
x_i	0,39	0,50	0,57	0,65	0,71	0,76	0,78	0,81	0,84

Как изменяется точность интерполяции при переходе от $k = 2$ к $k = 3$?

4.31. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для следующих данных:

t_i	0	4	10	15	21	29	36	51	68
x_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

4.32. Выписать четвертый многочлен системы ортогональных многочленов Чебышева

Указание. Использовать рекуррентное соотношение

$$a_{\tau+1}(t) = (t + \alpha)a_\tau(t) + \beta a_{\tau-1}(t),$$

где $\alpha = -\sum_{i=1}^{n} t_i a_\tau^2(t_i)/a_\tau^2$, $\beta = -\sum_{i=1}^{n} t_i a_{\tau-1}(t_i) a_\tau(t_i)/a_{\tau-1}^2$

(см. (4.6)).

4.33. Смоделировать наблюдения $X_i = t_i^2 + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, если $n = 100$, $t_i = 2 + 0,1(i-1)$, ε_i — независимые равномерно распределенные случайные величины на отрезке [0; 0,7]. 1) Построить по этим данным интерполяционный многочлен $\varphi_k(t; \hat{\beta}) = \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j a_j(t)$ для $k = 2, 3, 4$, где $a_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$, — многочлены Чебышева. 2) Построить графики функций $x = t^2$, $x = \varphi_k(t; \hat{\beta})$, $k = 2, 3, 4$. 3) Как изменяется точность интерполяции с ростом k?

4.34. Решить предыдущую задачу при ε_i нормально распределенных с $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = 0{,}04$.

4.35. Решить задачу 4.33 с $X_i = e^{t_i} + \varepsilon_i$.

4.36. Решить предыдущую задачу при ε_i нормально распределенных с $\mathbf{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathbf{D}\varepsilon_i = 0{,}04$.

4.37. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения $F_0((x - \beta_1)/\beta_2)$, где $F_0(x)$ — известная непрерывная функция распределения, а параметры сдвига β_1 и масштаба $\beta_2 > 0$ неизвестны. Тогда $Y_j = \beta_1 + \beta_2 U_j$, где случайные величины $U_1, \ldots, U_n$ независимы и имеют функцию распределения $F_0(x)$. Записав для соответствующих порядковых статистик представление $Y_{(j)} = \beta_1 + \alpha_j \beta_2 + \beta_2 \varepsilon_j$, где $\varepsilon_j = U_{(j)} - \alpha_j$, $\alpha_j = \mathbf{E}U_{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$, получить оценки параметров β_1, β_2 методом наименьших квадратов.

Указание. Здесь случайные величины $\boldsymbol{Y} = (Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)})$ удовлетворяют модели линейной регрессии с коррелированными наблюдениями: $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \operatorname{cov}(U_{(i)}, U_{(j)}) \equiv g_{ij}$ известны, поэтому надо перейти к некоррелированным величинам $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}^{-1/2}\boldsymbol{Y}$, где матрица $\boldsymbol{G} = \|g_{ij}\|_1^n$ является, по предположению, невырожденной.

Глава 5
РЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

1. Пусть на выборочном пространстве $\mathcal{X} = \{x\}$ значений наблюдаемой случайной величины X задана функция $\delta(x)$, значения которой принадлежат множеству $\boldsymbol{D} = \{d\}$ возможных решений, которые могут быть приняты при наблюдении конкретного значения X. В этом случае $\delta(x)$ называют *решающей функцией* (*правилом, процедурой*). Пусть, далее, $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{F} = \{F(x; \theta), \theta \in \Theta\}$, и для каждой пары $(\theta, d) \in \Theta \times \boldsymbol{D}$ задано число $L(\theta, d) \geqslant 0$, интерпретируемое как убыток (ущерб, потеря) от принятия решения d, когда X имеет распределения $F(x; \theta)$. В этом случае говорят, что задана *функция потерь*

$L(\theta, d)$. Например, в задачах точечного оценивания решениями являются значения оценки параметра θ, поэтому множество решений D совпадает обычно с параметрическим множеством Θ, решающая функция δ называется оценкой, а ущерб $L(\theta, d)$ отражает расхождение между значением θ и оценкой d. Поэтому в таких задачах обычно полагают $L(\theta, d) = \omega(|\theta - d|)$, где ω — строго возрастающая функция ошибки $|d - \theta|$.

Величина $R(\theta, \delta) = \mathrm{E}_\theta L(\theta, \delta(X))$ называется *функцией риска* процедуры δ, т. е. это средние потери, которые имеют место при применении решающего правила δ, когда наблюдаемая случайная величина X имеет распределение $F(x; \theta)$. Если для двух правил δ' и δ выполняется условие

$$R(\theta, \delta') \leqslant R(\theta, \delta) \; \forall \theta \in \Theta, \tag{5.1}$$

причем имеет место строгое неравенство хотя бы для одного θ, то правило δ' предпочтительнее δ; в этом случае правило δ называют *недопустимым*. Решающее правило, не являющееся недопустимым (т. е. для которого не существует предпочтительного правила), называется *допустимым*. В практических ситуациях ограничиваются рассмотрением класса допустимых решающих правил, никакие два из которых уже несравнимы в смысле (5.1). Для выбора наилучшего из допустимых правил в статистике применяют *байесовский* либо *минимаксный* подходы.

2. При байесовском подходе предполагается, что параметр θ — это случайная величина с некоторым (априорным) распределением $\mathcal{L}(\theta)$, задаваемым плотностью распределения (или вероятностью в дискретном случае) $\pi(\theta)$. В этом случае можно вычислить полную среднюю потерю для процедуры δ:

$$r(\delta) = \int R(\theta, \delta)\pi(\theta) d\theta$$

(или $\sum_i R(\theta_i, \delta)\pi(\theta_i)$ в дискретном случае), называемую *байесовским риском*, и упорядочить все решающие правила по величине этого риска. В данном случае оптимальным, или *байесовским*, решением является процедура δ^*, минимизирующая байесовский риск $r(\delta)$.

Алгоритм нахождения байесовского решения при заданном априорном распределении параметра $\pi(\theta)$ имеет следующий вид [1, с. 224—225]:

а) для $X = x$ находят *апостериорное распределение* $\pi(\theta | x)$ по формуле $\pi(\theta | x) = f(x; \theta)\pi(\theta)/f(x)$, где $f(x) =$

$= \mathbf{E} f(x;\theta) = \int f(x;\theta)\pi(\theta)d\theta \Big($ или $\sum_i f(x;\theta_i)\pi(\theta_i)$ в дискретном случае$\Big)$;

б) вычисляют среднюю потерю для решения d относительно этого апостериорного распределения $\mathbf{E}(L(\theta, d)|x) = \int L(\theta, d)\pi(\theta|x)d\theta$ (или $\sum_i L(\theta_i, d)\pi(\theta_i|x)$);

в) в качестве искомого выбирают решение $d^* = \delta^*(x)$, для которого эта средняя потеря минимальна.

3. При отсутствии априорной информации о θ для сравнения допустимых решающих правил используют *максимальный риск* $m(\delta) = \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta)$, и наилучшим считают правило $\tilde{\delta}$, минимизирующее $m(\delta)$; это правило называется *минимаксным решающим правилом*. В ряде случаев такое правило удается построить, если можно найти априорное распределение параметра $\pi(\theta) > 0$, для которого функция риска соответствующего байесовского правила δ^* постоянна: $R(\theta, \delta^*) \equiv \mathrm{const}$ (такое распределение π называют *наименее благоприятным априорным распределением*), в этом случае $\tilde{\delta} = \delta^*$ [1, с. 225].

4. В важном частном случае $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_k\}$, т. е. возможными распределениями наблюдаемой случайной величины X являются лишь конечное число k распределений $F_i(x) = F(x;\theta_i)$, $i = 1, ..., k$, и требуется выбрать одно из них в качестве истинного по наблюдению над X.

Такие задачи называют задачами *классификации*. В данном случае множество возможных решений $\boldsymbol{D} = \{d_1, ..., d_k\}$, где решение d_i означает, что в качестве истинного следует выбирать распределение F_i, $i = 1, ..., k$, и каждое решающее правило $\delta(x)$ порождает разбиение выборочного пространства $\boldsymbol{X} = W_1 \cup .. \cup W_k$, $W_i \cap W_j = \varnothing$, $i \neq j$, где $W_i = \{x: \delta(x) = d_i\}$, $i = 1, ..., k$. При этом байесовское решение δ^* определяется разбиением $\boldsymbol{X} = W_1^* \cup ... \cup W_k^*$, в котором $W_i^* = \{x: h_i(x) = \min_{1\leq j\leq k} h_j(x)\}$, $i = 1, ..., k$, где функции

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^{k} l(j|i)\pi_i f_i(x),\quad l(j|i) = L(\theta_i, d_j),\quad \pi_i = \pi(\theta_i)$$

(если указанный минимум достигается при нескольких значениях j, то в качестве значения индекса i берут минимальное из них). Если потери $l(j|i) = 1$, $j \neq i$, или же они неизвестны, или их трудно оценить числом, то байесовское правило заменяется *принципом максимума апостериорной вероятности: относить объект с наблюде-*

нием x *к тому классу, апостериорная вероятность* $\pi_i(x) = f_i(x)\pi_i / \sum_{s=1}^{k} \pi_s f_s(x)$, $i = 1, \ldots, k$, *которого максимальна*, т. е. в таких случаях [1, с. 230]:

$$W_i^* = \{x: \pi_i f_i(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \pi_j f_j(x)\}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Для построения минимаксного решения $\tilde{\delta}$ ищут наименее благоприятное априорное распределение $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ из условия равенства компонент вектора риска $\boldsymbol{R}(\delta^*) = (R_1(\delta^*), \ldots, R_k(\delta^*))$ соответствующего байесовского решения, где

$$R_i(\delta^*) = R(\theta_i, \delta^*) = \sum_{j=1}^{k} l(j|i) \mathbf{P}_{\theta_i}(X \in W_j^*), \quad i = 1, \ldots, k.$$

5.1. Пусть $\boldsymbol{L}(X) = Bi(1, \theta)$, $\Theta = \left\{\theta_1 = \frac{1}{3}, \quad \theta_2 = \frac{2}{3}\right\}$, множество решений $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2\}$ и функция потерь $L(\theta_i, d_j)$ задана таблицей

	d_1	d_2
θ_1	0	1
θ_2	2	0

1) Определить все допустимые решающие правила в данной ситуации и найти среди них минимаксное.

2) Найти байесовское решение δ^* для произвольного априорного распределения $\pi(\theta_1) = \alpha$, $\pi(\theta_2) = 1 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, и построить график байесовского риска $\rho(\alpha) = r(\delta^*)$ как функции α.

5.2. Найти все байесовские решения в следующей ситуации: $\boldsymbol{L}(x) = Bi(1, \theta)$, $\Theta = \left\{\theta_1 = \frac{1}{4}, \theta_2 = \frac{3}{4}\right\}$, $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$ и функция потерь $L(\theta_i, d_j)$ задана таблицей. Построить график байесовского риска $\rho(\alpha) = r(\delta^*)$ как функции $\alpha = \pi(0)$, $\alpha \in [0, 1]$.

	d_1	d_2	d_3
θ_1	0	1	$\frac{1}{2}$
θ_2	4	0	$\frac{1}{2}$

Указание. Сравнить средние потери относительно апостериорного распределения, данного в решении 2 предыдущей задачи.

5.3. Пусть $\boldsymbol{L}(X) = Bi(1, \theta)$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2\}$ и функция потерь $L(\theta_i, d_j)$ задана таблицей ($a, b > 0$). Рассмотреть два случая: $\theta_1 = \frac{2}{3}$, $\theta_2 = \frac{1}{2}$ и $\theta_1 = \frac{3}{4}$, $\theta_2 = \frac{1}{2}$

	d_1	d_2
θ_1	0	a
θ_2	b	0

Убедиться в том, что в обоих случаях множества допустимых решающих правил совпадают, но во втором случае при любом априорном распределении параметра байесовское решение предпочтительнее.

Указание. Воспользоваться решением задачи 5.1.

5.4. Пусть $\boldsymbol{L}(X) = Bi(3, \theta)$, $\Theta = \{\theta_1 = 10^{-2}, \theta_2 = 10^{-1}\}$, множество решений $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2\}$ и функция потерь $L(\theta_i, d_j)$ задана таблицей

	d_1	d_2
θ_1	0	2
θ_2	1	0

Рассмотрим следующие решающие правила $\delta_i = (\delta_i(0), \delta_i(1), \delta_i(2), \delta_i(3))$:

$$\delta_1 = (d_1, d_2, d_2, d_2), \quad \delta_2 = (d_1, d_1, d_2, d_2),$$
$$\delta_3 = (d_1, d_1, d_1, d_2).$$

Убедиться в том, что эти правила между собой несравнимы и найти среди них минимаксное.

5.5. Пусть $\boldsymbol{L}(X) = \bar{B}i(1, \theta)$, $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2\}$ и функция потерь задана таблицей

	d_1	d_2
θ_1	0	a
θ_2	b	0

Определить минимаксную решающую функцию среди функций

$$\delta_i(x) = \begin{cases} d_1 & \text{при } x = 0, 1, \ldots, i-1, \\ d_2 & \text{при } x = i, i+1, \ldots, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

5.6. Убедиться в том, что если в условии предыдущей задачи заменить $L(X)$ на пуассоновский закон $\Pi(\theta)$, то $\bar{\delta} = \delta_1$ при $a(1 - e^{-\theta_1}) \leqslant be^{-\theta_2}$, а соответствующий вектор риска есть $(a(1 - e^{-\theta_1}),\ be^{-\theta_2})$.

5.7. Пусть X — случайная величина, имеющая распределение $F_1(x) = F(x; \theta_1)$ либо $F_2(x) = F(x; \theta_2)$; множество решений $D = \{d_1, d_2\}$ и функция потерь задана таблицей

	d_1	d_2
θ_1	0	a
θ_2	b	0

Построить байесовское решение для заданного априорного распределения (π_1, π_2) и вычислить соответствующий риск (ср. с задачей 3.51). Рассмотреть случай, когда F_i — нормальное распределение $N(\theta_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2$.

5.8*. Предположим, что наблюдается случайная величина X, распределенная по нормальному закону с неизвестным средним θ и известной дисперсией σ^2, множество решений $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ и функция потерь $L(\theta, d)$ задана следующей таблицей:

θ \ d	d_1	d_2	d_3
<0	0	1	2
$=0$	1	0	1
>0	2	1	0

Рассмотрим решающие функции вида

$$\delta_{ab}(x) = \begin{cases} d_1 & \text{при } x < a, \\ d_2 & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ d_3 & \text{при } x > b, \end{cases}$$

где $a < 0 < b$.

Убедиться в том, что функция риска имеет вид

$$R(\theta, \delta_{ab}) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\theta - a}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\theta - b}{\sigma}\right) & \text{при } \theta < 0, \\ \Phi(a/\sigma) + \Phi(-b/\sigma) & \text{при } \theta = 0, \\ \Phi\left(\frac{a - \theta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{b - \theta}{\sigma}\right) & \text{при } \theta > 0, \end{cases}$$

и построить ее график при $b = -a$.

5.9. Предположим, что $\Theta = \{0, 1\}$, $\boldsymbol{D} = \{d\} = [0, 1]$ и функция потерь имеет вид $L(\theta, d) = |\theta - d|^a$, $a \geqslant 1$. Рассмотрим класс решающих функций вида $\delta(x) \equiv \mathrm{const}$ (т. е. решение принимается без предварительных наблюдений). Найти в данном классе байесовское решение, соответствующее априорному распределению параметра $\pi(0) = \alpha$, $\pi(1) = 1 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$.

5.10*. 1) Показать, что для риска баейсовского решения в задаче классификации (см. п. 4) справедливо представление (ниже для дискретной случайной величины все интегралы заменяются соответствующими суммами)

$$r(\delta^*) = \int \min_{1 \leqslant j \leqslant k} h_j(x) dx .$$

2) Введем величины

$$l_{ij} = \int \min(\pi_i f_i(x),\ \pi_j f_j(x)) dx,\quad \bar{l} = \max_{i \neq j} l(j|i),\quad \underline{l} = \min_{i \neq j} l(j|i).$$

Доказать следующие оценки для $r(\delta^*)$:

$$\underline{l} \sum_{i=2}^{k} \max_{j<i} l_{ij} \leqslant r(\delta^*) \leqslant \bar{l} \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant k} l_{ij},$$

В каком случае эти оценки совпадают?

Указание. Использовать тождество (при доказательстве воспользоваться методом индукции по k)

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} a_j + \sum_{i=2}^{k} \min(a_i, \max_{j<i} a_j).$$

5.11* (продолжение задачи 5.10). Пусть $F_i(x)$ — функция распределения r-мерного невырожденного нормального $N(\boldsymbol{\mu}^{(i)}, \boldsymbol{A})$ закона, $i = 1, 2$. Доказать формулу

$$l_{12} = \pi_1 \Phi\left(-\frac{\sqrt{\rho}}{2} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ln \frac{\pi_1}{\pi_2}\right) + \\ + \pi_2 \Phi\left(-\frac{\sqrt{\rho}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ln \frac{\pi_1}{\pi_2}\right).$$

где $\rho = (\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})' \boldsymbol{A}^{-1} (\boldsymbol{\mu}^{(1)} - \boldsymbol{\mu}^{(2)})$ — *расстояние Махаланобиса* между распределениями $N(\mu^{(1)}, \boldsymbol{A})$ и $N(\mu^{(2)}, \boldsymbol{A})$. Вывести аналогичную формулу для I_{12} в случае двух пуассоновских распределений.

5.12* (продолжение задачи 5.11). Построить байесовское и минимаксное решения в задаче классификации с двумя нормальными распределениями, указанными в предыдущей задаче (ср. с задачей 3.52).

5.13*. Пусть $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\boldsymbol{L}(\xi) \in \boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{F}(x; \theta), \theta \in \Theta\}$, а априорное распределение параметра $\boldsymbol{L}(\theta) \in \boldsymbol{F}^*$. Семейство распределений параметра $\boldsymbol{F}^*$ называется *сопряженным* к $\boldsymbol{F}$ (обозначается $F^* \lhd F$), если при $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ апостериорное распределение $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{F}^*$.

Убедиться в справедливости следующих утверждений (ниже $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$):

1) $\beta(a,b) \lhd Bi(m,\theta)$, при этом $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{x}) = \beta(a + x, \; b + nm - x)$;

2) $\beta(a,b) \lhd \bar{B}i(r,\theta)$, при этом $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{x}) = \beta(a + x, \; b + nr)$;

3) $\Gamma(a,\lambda) \lhd \Pi(\theta)$, при этом $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{x}) = \Gamma\left(\frac{a}{na+1}, \; \lambda + x\right)$;

4) $\Gamma(a,\lambda)$ сопряжено к экспоненциальному распределению с плотностью $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, при этом $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{x}) = \Gamma\left(\frac{a}{ax+1}, \; \lambda + n\right)$;

5) *распределение Парето,* задаваемое плотностью $\pi(\theta) = \alpha a^{\alpha}/\theta^{\alpha+1}$, $\theta \geqslant a$ $(a, \alpha > 0)$, сопряжено к равномерному распределению $R(0, \theta)$, при этом $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ есть плотность Парето с параметрами $(\max(a, x_1, \ldots, x_n), \; \alpha + n)$;

6) *распределение Дирихле* $D(\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$, задаваемое плотностью

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_N)} \theta_1^{\alpha_1 - 1} \ldots \theta_N^{\alpha_N - 1}, \quad \theta_1 + \ldots + \theta_N = 1,$$

сопряжено к полиномиальному распределению $M(n; \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N))$, при этом $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_N)) = D(\boldsymbol{\alpha} + h)$;

7) $\boldsymbol{N}(\mu, \sigma^2) \lhd \boldsymbol{N}(\theta, b^2)$, при этом $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, где $\mu_1 = \sigma_1^2\left(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{x}{b^2}\right)$, $\sigma_1^2 = \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{n}{b^2}\right)^{-1}$.

Указание. Плотность любого распределения достаточно вычислить с точностью до нормирующего множителя, поэтому, используя для любой случайной величины ξ запись $f_\xi(t) = cp(t) \cong p(t)$ (здесь постоянная c определяется условием $c\int p(t)dt = 1$), при нахождении апостериорной плотности $\pi(\theta|\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}; \theta)\pi(\theta)/f(\boldsymbol{x})$ достаточно ограничиться вычислением числителя $\pi(\theta)\, f(\boldsymbol{x};\, \theta)$; аналогично следует поступать и при вычислении плотностей $\pi(\theta)$ и $f(\boldsymbol{x};\, \theta)$.

5.14. Рассматривается задача оценивания неизвестной вероятности «успеха» θ по наблюдению числа успехов X в n испытаниях Бернулли (таким образом, здесь $\Theta = \boldsymbol{D} = (0, 1)$). Пусть функция потерь имеет вид

$$L(\theta, d) = \frac{(d-\theta)^2}{\theta(1-\theta)},$$

а априорное распределение параметра θ является равномерным на интервале $(0, 1)$. Доказать, что байесовское решение есть $\delta^*(x) = \frac{x}{n}$. Является ли это решение минимаксным?

5.15 (продолжение задачи 5.14). Найти байсовское решение δ^* для случая, когда функция потерь $L(\theta, d) = (d-\theta)^2$, а априорное распределение $\boldsymbol{L}(\theta) = \beta(a, b)$. При каких значениях параметров a и b решение δ^* является одновременно минимаксным? (ср. с задачей 2.6).

Указание. Воспользоваться решением задачи 5.13 п. 1).

5.16. Рассмотрим задачу точечной оценки скалярного параметра θ с позиций теории решений, т. е. когда множество решений $\boldsymbol{D}$ совпадает с параметрическим множеством Θ и решение $d \in \boldsymbol{D}$ — это значение оценки параметра $\theta \in \Theta$. Пусть функция потерь имеет вид $L(\theta, d) = (d-\theta)^2$, тогда функция риска $R(\theta, \delta) = \mathbf{E}_\theta(\delta(X) - \theta)^2$ есть среднеквадратическая ошибка оценки $\delta(X)$. Доказать, что при наблюдении $X = x$ байесовское решение (байесовская оценка) $\delta^*(x)$ имеет следующий вид:

$$\delta^*(x) = \mathbf{E}(\theta \mid x) \equiv \int \theta \pi(\theta \mid x) d\theta,$$

т. е. совпадает с апостериорным средним параметра, а соответствующий риск $r(\delta^*) = \mathbf{E}\mathrm{D}(\theta \mid X)$, где

$$\mathrm{D}(\theta \mid x) = \mathbf{E}[(\theta - \delta^*(x))^2 \mid x] \equiv \int (\theta - \delta^*(x))^2 \pi(\theta \mid x) d\theta$$

есть дисперсия апостериорного распределения параметра, а математическое ожидание вычисляется относительно плотности (или вероятности в дискретном случае) $f(x)$ (предполагается, что все соответствующие моменты существуют).

Применить этот результат при решении задачи 5.15.

5.17. Пусть испытания Бернулли продолжаются до получения r-го «неуспеха» и X — число «успехов» в этих испытаниях. По наблюдению над X построить байесовскую оценку неизвестной вероятности «успеха» θ в случае, когда функция потерь $L(\theta, d) = (d - \theta)^2$, а априорное распределение $\mathbf{L}(\theta) = \beta(a,b)$.

Указание. Воспользоваться решениями задач 5.16, 5.13 п. 2).

5.18. По выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из пуассоновского распределения $\Pi(\theta)$ построить байесовскую оценку для параметра, если функция потерь $L(\theta, d) = (d - \theta)^2$ и априорное распределение $\mathbf{L}(\theta) = \Gamma(a, \lambda)$; вычислить риск этой оценки и определить оптимальный объем выборки при цене $c > 0$ одного наблюдения (т. е. минимизирующий общие потери $r(\delta^*) + cn$).

Указание. Воспользоваться решениями задач 5.16, 5.13 п. 3) и 1.39 п. 4).

5.19 (продолжение задачи 5.18). Убедиться в том, что если функция потерь $L(\theta, d) = (d - \theta)^2/\theta$, то байесовская оценка при $\lambda + \sum_{i=1}^{n} X_i > 1$ имеет вид

$$\delta^*(X) = \frac{a}{na+1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \lambda - 1\right)$$

и ее риск $r(\delta^*) = \dfrac{a}{na+1}$.

Указание. При вычислении моментов воспользоваться формулой $\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z)$.

5.20. Рассмотрим задачу оценивания параметра θ экспоненциального распределения с плотностью $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, по выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Пусть функция потерь $L(\theta, d) = \left(\frac{1}{\theta} - d\right)^2$ и априорное распределение $\mathbf{L}(\theta) = \Gamma(a, \lambda)$, $\lambda > 2$. Доказать, что байесовская оценка имеет вид

$$\delta^*(X) = \frac{1}{a(\lambda + n - 1)}\left(a\sum_{i=1}^{n} X_i + 1\right)$$

и ее риск $r(b^*) = (a^2(\lambda + n - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2))^{-1}$. Убедиться в том, что оптимальное число наблюдений при цене $c > 0$ одного наблюдения равно

$$n^* = \frac{1}{a\sqrt{c(\lambda - 1)(\lambda - 2)}} - \lambda + 1\,.$$

Указание. Использовать решения задач 5.13 п. 4) и 1.39 п. 2).

5.21. Пусть $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из распределения $R(0, \theta)$, где априорное распределение параметра θ есть распределение Парето с параметрами a и $\alpha > 2$ (см. задачу 5.13 п. 5). Убедиться в том, что байесовская оценка θ имеет вид

$$\delta^*(x) = \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}\max(a, x_{(n)}),\ x_{(n)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i,$$

вычислить ее риск; определить оптимальный объем выборки при цене $c > 0$ одного наблюдения.

Указание. Использовать решения задач 5.16, 5.13 п. 5) и 1.35.

5.22. Предположим, что по наблюдению X оценивается параметр θ равномерного распределения $R(0, \theta)$, когда параметр имеет априорную плотность $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta}$, $\theta > 0$. Доказать, что байесовская оценка в случае квадратичной функции потерь имеет вид $\delta^*(X) = X + 1$, а ее риск $r(\delta^*) = 1$.

Указание. Записать среднюю апостериорную потерю для решения d в виде интеграла и продифференцировать по d; использовать формулу для гамма-функции $\Gamma(n+1) = \int\limits_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$

5.23*. Пусть вектор $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, ..., \nu_N)$ имеет полиномиальное распределение $M(n; \theta = (\theta_1, ..., \theta_N))$. Требуется по наблюдению над $\boldsymbol{\nu}$ оценить θ, если функция потерь

$$L(\theta, \boldsymbol{d}) = \sum_{i=1}^N (d_i - \theta_i)^2,\ \boldsymbol{d} = (d_1, ..., d_N),$$

в предположении, что априорное распределение параметра θ есть распределение Дирихле $D(\boldsymbol{\alpha})$ (см. задачу 5.13 п. 6). Показать, что при $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{h} = (h_1, ..., h_N)$ байесовская оценка $\delta^*(\boldsymbol{h}) = (\delta_1^*(\boldsymbol{h}), ..., \delta_N^*(\boldsymbol{h}))$ имеет вид $\delta_i^*(h) = \frac{\alpha + h_i}{\alpha + n}$, $i = 1, ..., N$, где $\alpha = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i$, а ее риск

$$r(\delta^*) = \frac{\alpha^2 - \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i^2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+n)}.$$

Указание. Воспользоваться решениями задач 5.13 п. 6), 1.52 и следующими формулами для моментов распределения $D(\boldsymbol{\alpha})$:

$$\mathbf{E}\theta_i^r = \frac{\alpha_i(\alpha_i+1)...(\alpha_i+r-1)}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+r-1)}, \ r = 1, 2, \dots .$$

5.24. По выборке $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения $N(\theta, b^2)$ построить байесовскую оценку параметра, минимизирующую среднеквадратическую ошибку, если априорное распределение $L(\theta) = N(\mu, \sigma^2)$; вычислить риск построенной оценки и определить оптимальное число наблюдений при цене $c > 0$ за одно наблюдение.

Указание. Воспользоваться решениями задач 5.16 и 5.13 п. 7).

5.25*. Рассмотрим задачу оценивания скалярного параметра θ, если функция потерь $L(\theta, d) = |\theta - d|$, $\theta, d \in R^1$. 1) Доказать, что при $X = x$ байесовское решение $d^* = \delta^*(x)$ при любом априорном распределении $L(\theta)$ есть медиана апостериорного распределения $L(\theta|x)$, т. е. такое число, что

$$\mathbf{P}(\theta \leqslant d^* | x) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(\theta \geqslant d^* | x) \geqslant \frac{1}{2}.$$

2) Использовать этот результат при оценивании среднего модели $N(\theta, b^2)$, когда $L(\theta) = N(\mu, \sigma^2)$.

Указание. 1) Установить неравенство $\mathbf{E}(|\theta - d| \,|x) \geqslant \mathbf{E}(|\theta - d^*| \,|x) \forall d \in R^1$.
2) Использовать решение задачи 5.13 п. 7).

Глава 6
СТАТИСТИКА СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Бесконечная в обе стороны последовательность случайных величин $\{X_t\}$, $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$, называется *стационарной,* если выполняются следующие условия:

$\mathbf{E}X_t = m + \text{const}$, $\text{cov}(X_{k+t}, X_t) = \mathbf{E}(X_{k+t} - m)(X_t - m) = R_k$.

Последовательность чисел $\{R_k\}$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$, называют *ковариационной функцией* последовательности $\{X_t\}$. При этом $R_{-k} = R_k$ при всех k и $R_0 = \mathbf{D}X_t = \sigma^2 = \text{const}$. Будем предполагать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty . \qquad (6.1)$$

В качестве оценок m и R_k по наблюдениям $X_1, \dots, X_n$ используют соответственно статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t\,, \quad \tilde{C}_k(n) = \frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{k+t} - \bar{X})\,,$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Для иллюстрации смоделируем n членов стационарной последовательности

$$X_t = \xi_{t-1} + \xi_t + \xi_{t+1}\,, \quad t = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{6.2}$$

где ξ_t, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 2h]$. Нетрудно проверить, что здесь $\mathrm{E}X_t = 3h$, $R_0 = \frac{h}{2}$, $R_1 = \frac{h}{3}$, $R_2 = \frac{h}{6}$, $R_i = 0, i \geqslant 3$. В табл. 6.1 и 6.2 приведены значения статистик $\bar{X}$ и $\tilde{C}_k(n)$ для различных n.

Таблица 6.1

n	$\bar{X}$	$\tilde{C}_0(n)$	$\tilde{C}_1(n)$	$\tilde{C}_2(n)$	$\tilde{C}_3(n)$	$\tilde{C}_4(n)$
10	1,70	0,372	0,264	0,088	−0,128	−0,242
100	1,41	0,270	0,185	0,092	0,026	0,047
1000	1,50	0,262	0,178	0,089	0,002	$-1{,}0\times 10^{-4}$

$h = 0{,}5$ ($\mathrm{E}X_t = 1{,}5$; $R_0 = 0{,}25$; $R_1 = 0{,}166\ldots$; $R_2 = 0{,}0833\ldots$)

Таблица 6.2

n	$\bar{X}$	$\tilde{C}_0(n)$	$\tilde{C}_1(n)$	$\tilde{C}_2(n)$	$\tilde{C}_3(n)$	$\tilde{C}_4(n)$
10	2,040	0,535	0,381	0,127	−0,184	−0,349
100	1,690	0,389	0,266	0,132	0,039	0,068
1000	1,800	0,378	0,257	0,126	0,003	$-2{,}0\times 10^{-4}$

$h = 0{,}6$ ($\mathrm{E}X_t = 1{,}8$; $R_0 = 0{,}3$; $R_1 = 0{,}2$; $R_2 = 0{,}1$).

Важной характеристикой стационарной последовательности $\{X_t\}$ является ее *спектральная плотность* $f(x)$, представляющая собой преобразование Фурье ковариационной функции $\{R_k\}$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{6.3}$$

Спектральная плотность (когда она существует) и ковариационная функция находятся во взаимно однозначном соответствии. В качестве оценок $f(x)$ по наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$ используют статистики вида

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leqslant n-1} w_n(k) \tilde{C}_k(n) \cos kx, \tag{6.4}$$

где $\{w_n(k)\}$ — некоторая последовательность весовых коэффициентов $(w_n(-k) = w_n(k))$. В частности, при $w_n(k) = 1 - \frac{|k|}{n}$ получаем *периодограмму* выборки. Если среднее $m = \mathrm{E}X_t$ известно, то в формуле (6.4) $\bar{X}$ заменяют m.

6.1. Доказать, что среднее арифметическое $\overline{X} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ является несмещенной и состоятельной оценкой для $m = \mathrm{E}X_t$.

6.2. Доказать, что статистика

$$C_k(n) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - m)(X_{k+t} - m), \quad 0 \leqslant k < n,$$

является несмещенной оценкой R_k.

6.3*. Доказать, что статистика

$$\tilde{C}_k(n) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(X_{k+t} - \bar{X})$$

является при $n \to \infty$ асимптотически несмещенной оценкой R_k, т. е. $\mathrm{E}\tilde{C}_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} R_k$ (k фиксировано).

6.4. Пусть ξ и η — случайные величины с $\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\eta = 0$, $\mathrm{D}\xi = \mathrm{D}\eta = \sigma^2$, $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Доказать, что последовательность $X_t = \xi \cos \lambda t + \eta \sin \lambda t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\lambda \in (0, \pi)$, является стационарной и вычислить ее ковариационную функцию.

6.5. Пусть ξ_t, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, — некоррелированные случайные величины, $m = \mathrm{E}\xi_t$, $\sigma^2 = \mathrm{D}\xi_t$. Является ли последовательность $\{\xi_t\}$ стационарной?

Доказать, что последовательность

$$X_t = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j \xi_{t-j}, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

является стационарной. Найти $\mathrm{E}X_t$ и R_k.

6.6*. Для последовательности (6.2) доказать состоятельность оценки $C_k(n)$, найденной в задаче 6.2.

6.7. Смоделировать последовательность (6.2) в случае, когда ξ_t распределены нормально с $\mathrm{E}\xi_t = 0{,}5$, $\mathrm{D}\xi_t = 0{,}1$; $n = 100$. Составить таблицу, аналогичную табл. 6.1.

6.8*. По значениям X_t, $t = -n, -n+1, \ldots, -1, 0$, предсказать значение X_1 — найти *оптимальный линейный предиктор* $X_{1n}^* = \sum_{t=-n}^{0} \beta_{tn}^* X_t$, т. е. определить β_t так, чтобы выражение $\mathrm{E}(X_1 - \sum_{t=-n}^{0} \beta_t X_t)^2$ было минимальным. Вычислить $\sigma^2(n) = \mathrm{E}(X_1 - X_{1n}^*)^2$ — *минимальную среднеквадратическую ошибку прогноза.*

6.9. Пусть ν_t, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — стационарная цепь Маркова с состояниями 1, 2 ([2], с. 167).

Доказать, что матрица $\|p_{ij}(t)\|_1^2$, где

$$p_{ij}(t) = \mathrm{P}(\nu_{s+t} = j \mid \nu_s = i), \quad i, j = 1, 2,$$

определяется формулой

$$\|p_{ij}(t)\| = \frac{1}{2}\left(\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} + (1 - 2\alpha)^t \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \right),$$

если

$$\|p_{ij}(1)\| = \begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{Vmatrix}, \; 0 < \alpha < 1.$$

Найти стационарное распределение этой цепи.

6.10. Составить программу для моделирования последовательности ν_t, $t = 0, 1, \ldots, n$, определенной в задаче 6.9.

6.11. Пусть $\{\nu_t\}$ — стационарная цепь Маркова, определенная в задаче 6.9. Является ли стационарной последовательность $\{\eta_t\}$, где

$$\eta_t = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu_t = 2, \\ -1, & \text{если } \nu_t = 1 \text{ ?} \end{cases}$$

Найти $\mathrm{E}\eta_t$ и R_k.

6.12. Смоделировать последовательность $\eta_1, \ldots, \eta_{100}$, где η_t определено в предыдущей задаче, $\alpha = \frac{1}{3}$. Вычислить оценки величин $\mathrm{E}\eta_t$, R_k.

6.13. Пусть ν_t — цепь Маркова, определенная в задаче 6.9, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — независимые стационарные последовательности с $E\xi_i(t) = 0$ и ковариационными функциями $R_k^{(i)}$, $i = 1, 2$. Положим $\eta_t = \xi_{\nu_t}(t)$. Является ли последовательность $\{\eta_t\}$ стационарной? Найти $E\eta_t$ и R_k.

Указание. Воспользоваться формулой полного математического ожидания.

6.14. Смоделировать последовательность $\eta_1, \ldots, \eta_{100}$, где η_t определено в задаче 6.13, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\xi_i(t)$ равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Вычислить оценки величин $E\eta_t$, R_k.

6.15. Решить предыдущую задачу для случая $\boldsymbol{L}(\xi_i(t)) = \boldsymbol{N}(0, 1)$.

6.16. Убедиться в том, что при условии (6.1) спектральная плотность $f(x)$ (см. (6.3)) существует, непрерывна и определяет ковариационную функцию по формуле

$$R_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

6.17. Вычислить спектральную плотность для стационарной последовательности некоррелированных случайных величин.

6.18. Существует ли спектральная плотность у последовательности $\{X_t\}$, определенной в задаче 6.4? Убедиться в том, что в данном случае $R_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dF(x)$, где $F(x)$ — ступенчатая функция со скачками в точках $\pm\lambda$ и величинами скачков $\frac{\sigma^2}{2}$, $F(-\pi) = 0$, $F(\pi) = \sigma^2$ ($F(x)$ называется *спектральной функцией* последовательности $\{X_t\}$).

6.19. Получить следующее представление периодограммы (см. (6.4)) через выборочные значения последовательности $\{X_t\}$ (среднее m известно):

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{n}{8\pi} R_n^2(x), \quad R_n^2(x) = A_n^2(x) + B_n^2(x),$$

где

$$\left.\begin{matrix} A_n(x) \\ B_n(x) \end{matrix}\right\} = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - m) \left\{\begin{matrix} \cos xt \\ \sin xt. \end{matrix}\right.$$

6.20*. Убедиться в том, что для математического ожидания периодограммы при известном среднем $m = EX_t$ справедливо представление

$$\mathrm{E}\tilde{f}_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k_n(x - y)f(y)dy,$$

где $k_n(x) = \frac{1}{2\pi n}(\sin(nx/2)/\sin(x/2))^2$ — *ядро Фейера.*

Доказать, что $\mathrm{E}\tilde{f}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Замечание. Периодограмма является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности и при неизвестном m, однако эти оценки не являются состоятельными. Состоятельные же оценки можно получить при специальном выборе «весов» $w_n(k)$ в (6.4).

6.21*. Пусть среднее $m = \mathrm{E}X_t$ известно и $w_n(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\frac{\sin \varepsilon k}{\varepsilon k}$. Доказать, что $\tilde{f}_n(k)$ — асимптотически несмещенная и состоятельная оценка величины $\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} f(y)dy$, $0 < \varepsilon < \pi$, $\lambda \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

Замечание. Результат верен и при неизвестном m.

6.22*. Пусть m известно и $w_n(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\left(1 - \frac{|k|}{l_n}\right)$ при $|k| \leqslant l_n$ и $w_n(k) = 0$ при $|k| > l_n$. Доказать, что если n, $l_n \to \infty$, $l_n/n \to 0$ и $\sum_k |kR_k| < \infty$, то $\tilde{f}_n(x)$— асимптотически несмещенная оценка $f(x)$.

Замечание. Результат верен и при неизвестном m. Эти оценки при широких условиях являются состоятельными.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1. Положить $X_n = 1$, если $U_n \leqslant p$, и $X_n = 0$, если $U_n > p$, где U_n — последовательность (1.5).

1.3. Отрезок [0, 1] разбить на N отрезков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$, где $\Delta_1 = [0, p_1]$, $\Delta_l = [p_1 + \ldots + p_{l-1}, p_1 + \ldots + p_l]$, $l = 2, 3, \ldots, N$; положить $X_k = l$, если $U_k \in \Delta_l$, $l = 1, \ldots, N$, где U_n — последовательность (1.5). Числа $X_1, \ldots, X_n$ образуют реализацию n первых испытаний полиномиальной схемы с указанными в задаче вероятностями исходов.

1.4. Положить $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + X_n$, $n \geqslant 1$, где $X_n = 1$, если $U_n \leqslant \frac{1}{2}$, $X_n = -1$, если $U_n > \frac{1}{2}$, где U_n — последовательность (1.5).

1.6. Положить $X_n = -a\ln(1 - U_n)$, где U_n — последовательность (1.5).

1.8. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром α. Тогда случайная величина $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_m$ имеет распределение Эрланга с параметрами (α, m).

1.9. Положить

$$X_n = \frac{U_{(n-1)N+1} + U_{(n-1)N+2} + \ldots + U_{nN} - \frac{1}{2}N}{\sqrt{N/12}},$$

где U_n — последовательность (1.5). Удовлетворительное приближение к нормальному распределению получается уже при $N = 12$; это значение параметра N обычно и используют для вычислений.

1.12. Если $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независимые бернуллиевские случайные величины с параметром p (см. задачу 1.1), то $\mathcal{L}(\xi_1 + \ldots + \xi_k) = Bi(k, p)$.

1.13. При больших n по теореме Муавра — Лапласа имеем

$$\mathrm{P}\left(\frac{|\nu_n - np|}{\sqrt{npq}} \leqslant t\right) \approx \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1, \quad q = 1 - p,$$

или

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| \leqslant t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \approx 2\Phi(t) - 1.$$

Следовательно, чтобы выполнялось соотношение $\mathrm{P}\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| \leqslant \delta_\gamma\right) \approx \gamma$, надо положить $\delta_\gamma = t\sqrt{\frac{pq}{n}}$, а $t = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \equiv u_{\frac{1+\gamma}{2}}$. При $\gamma = 0{,}98$ квантиль $u_{0,99} = 2{,}326$ и для приведенных экспериментальных данных граница $\delta_{0,98} = 0{,}0183$, а $\left|\frac{h}{n} - \frac{1}{2}\right| = 0{,}0069$, т. е. согласие с теорией хорошее.

1.14. Согласно предположению, появление числа, не превосходящего 4, можно рассматривать как «успех» в испытаниях Бернулли с вероятностью «успеха» $p = 1/2$. Поэтому (см. решение задачи 1.13) граница в данном случае равна $\delta_{0,98} = 0{,}0116$, а наблюдавшееся значение отклонения частоты «успеха» $\left|\frac{h}{n} - \frac{1}{2}\right| = 0{,}0089 < \delta_{0,98}$. Следовательно, согласие экспериментальных данных с теорией хорошее.

1.16. При больших n имеем $\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{n}{\mu_2}}|\bar{X} - \alpha_1| \leqslant t\right) \approx 2\Phi(t) - 1$ или

$$\mathrm{P}(|\bar{X} - \alpha_1| \leqslant \delta) \approx 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{\mu_2}}\delta\right) - 1$$

В данном случае $\alpha_1 = 6$, $\mu_2 = 3$, $n = 4096$ и правая часть приближенного равенства равна 0,998 при $\delta = \sqrt{\frac{\mu_2}{n}}u_{0,999} = 3{,}090\cdot\sqrt{3/4096} = 0{,}0836\ldots$ Наблюдавшееся значение $|\bar{x} - 6| = 0{,}1389$ оказалось гораздо больше этой границы, т. е. в данном случае в эксперименте наблюдалось маловероятное событие.

1.17. В данном случае (см. предыдущее решение) $\alpha_1 = 2$, $\mu_2 = 5/6$, $\delta = \sqrt{5/(6\cdot 4096)}\cdot 3{,}090 = 0{,}044$. Наблюдавшееся же значение $|\bar{x} - 2| = 0{,}003$ укладывается в эти границы, т. е. с позиций этой характеристики данные рассматриваемого эксперимента лучше согласуются с теорией.

1.19. Используя результаты решения задач 1.13 и 1.16, имеем $\delta = \sqrt{\mu_2/n}u_{0,99} = \sqrt{11{,}9167/500}\cdot 2{,}326 = 0{,}359$; наблюдавшееся же значение отклонения равно $|\bar{x} - \alpha_1| = |5{,}942 - 6| = 0{,}058$, т. е. согласие с теорией хорошее.

1.24. Поскольку $F_n(x_0) = \frac{\mu_n(x_0)}{n}$ и $L(\mu_n(x_0)) = Bi(n,\ p_0)$, где $p_0 = F(x_0)$, при $n \to \infty$ по теореме Муавра — Лапласа имеем

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mu_n(x_0) - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} \leqslant z\right) \to \Phi(z), \quad q_0 = 1 - p_0.$$

Отсюда

$$\mathrm{P}(|F_n(x_0) - p_0| \leqslant t/\sqrt{n}) \to \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{p_0q_0}}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sqrt{p_0q_0}}\right) = \\ = 2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{p_0q_0}}\right) - 1.$$

1.25. Имеем

$$\mathrm{cov}(F_n(x_1),\ F_n(x_2)) = \frac{1}{n^2}\mathrm{cov}(\mu_n(x_1),\ \Delta_n(x_1,\ x_2) + \mu_n(x_1)) = \\ = \frac{1}{n^2}[\mathrm{cov}(\mu_n(x_1),\ \Delta_n(x_1,\ x_2)) + \mathrm{D}\mu_n(x_1)].$$

Здесь $\mathrm{D}\mu_n(x_1) = nF(x_1)(1 - F(x_1))$ (см. решение задачи 1.24.), а $\mathrm{cov}(\mu_n(x_1),\ \Delta_n(x_1,\ x_2)) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{cov}(\eta_i,\ \varsigma_j)$. В силу независимости наблюдений, при $i \neq j$ индикаторы η_i и ς_j независимы и, следовательно, $\mathrm{cov}(\eta_i,\ \varsigma_j) = 0$. Далее получаем

$$\mathrm{cov}(\eta_i,\ \varsigma_i) = \mathrm{E}\eta_i\varsigma_i - \mathrm{E}\eta_i\mathrm{E}\varsigma_i = \mathrm{P}(\eta_i = \varsigma_i = 1) - \\ - \mathrm{P}(\eta_i = 1)\mathrm{P}(\varsigma_i = 1) = -\mathrm{P}(\eta_i = 1)\mathrm{P}(\varsigma_i = 1) = -F(x_1)(F(x_2) - F(x_1)),$$

поскольку $\{\eta_i = \varsigma_i = 1\}$ — невозможное событие.
Отсюда

$$\mathrm{cov}\,(\mu_n(x_1),\ \Delta_n(x_1,\ x_2)) = -nF(x_1)\,(F(x_2) - F(x_1)).$$

Объединяя эти формулы, приходим к требуемому результату.

1.26. Рассмотрим полную группу из N событий $E_1 = \{\xi \leqslant x_1\}$, $E_2 = \{x_1 < \xi \leqslant x_2\}$, ..., $E_{N-1} = \{x_{N-2} < \xi \leqslant x_{N-1}\}$, $E_N = \{\xi > x_{N-1}\}$; их вероятности соответственно равны p_1, ..., p_N. Тогда ν_i, очевидно, есть число реализаций событий E_i в n независимых и однородных испытаниях, $i = 1$, ..., N. Следовательно, $L(\underline{\nu}) = M(n;\ p_1,\ ...,\ p_N)$. Далее имеем

$$-np_1p_2 = \mathrm{cov}(\nu_1,\ \nu_2) = \mathrm{cov}(\mu_n(x_1),\ \mu_n(x_2) - \mu_n(x_1)) = \\ = \mathrm{cov}(\mu_n(x_1),\ \mu_n(x_2)) - \mathrm{D}\mu_n(x_1).$$

Отсюда

$$\mathrm{cov}(\mu_n(x_1),\ \mu_n(x_2)) = \mathrm{D}\mu_n(x_1) - np_1p_2 = np_1(1 - p_1 - p_2) = \\ = nF(x_1)\,(1 - F(x_2)),$$

что эквивалентно результату, полученному в задаче (1.25).

1.27. Случайные величины X_i^k, $i = 1, \ldots, n$, при любом k независимы и имеют такое же распределение, как ξ^k, поэтому

$$\operatorname{cov}(A_{nk}, A_{ns}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i^k, X_j^s) = \frac{1}{n}\operatorname{cov}(\xi^k, \xi^s) =$$
$$= \frac{1}{n}(\mathrm{E}\xi^{k+s} - \mathrm{E}\xi^k\mathrm{E}\xi^s) = \frac{1}{n}(\alpha_{k+s} - \alpha_k\alpha_s).$$

В частности,

$$\mathrm{D}\overline{X} = \mathrm{D}A_{n1} = \frac{1}{n}(\alpha_2 - \alpha_1^2) = \frac{\mu_2}{n}.$$

При исследовании выборочных центральных моментов можно считать, что $\alpha_1 = 0$, и, следовательно, $\mu_k = \alpha_k$. Учитывая это, имеем

$$\mathrm{E}S^2 = \mathrm{E}A_{n2} - \mathrm{E}A_{n1}^2 = \mu_2 - \frac{\mu_2}{n} = \frac{n-1}{n}\mu_2.$$

Далее, $(S^2)^2 = A_{n2}^2 - 2A_{n1}^2A_{n2} + A_{n1}^4$, и непосредственные вычисления дают

$$\mathrm{E}A_{n2}^2 = \frac{1}{n^2}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^4 + \sum_{i\neq j}X_i^2X_j^2\right) = \frac{1}{n^2}(n\mu_4 + n(n-1)\mu_2^2) =$$
$$= \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n},$$

$$\mathrm{E}A_{n1}^2A_{n2} = \frac{1}{n^3}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + \sum_{i\neq j}X_iX_j\right)\sum_{k=1}^{n}X_k^2 =$$
$$= \frac{1}{n^3}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^2 = \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n^2},$$

$$\mathrm{E}A_{n1}^4 = \frac{1}{n^4}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + \sum_{i\neq j}X_iX_j\right)^2 = \frac{1}{n^4}\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)^2 + 2\sum_{i\neq j}X_i^2X_j^2\right) =$$
$$= \frac{\mu_4 + (n-1)\mu_2^2}{n^3} + \frac{2(n-1)}{n^3}\mu_2^2 = \frac{\mu_4 + 3(n-1)\mu_2^2}{n^3}.$$

Отсюда

$$\mathrm{D}S^2 = \mathrm{E}(S^2)^2 - (\mathrm{E}S^2)^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} - \frac{2(\mu_4 - 2\mu_2^2)}{n^2} + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{n^3},$$

что эквивалентно приведенной в условии задачи формуле. Наконец, $\operatorname{cov}(\overline{X}, S^2) = \mathrm{E}(\overline{X}S^2)$, так как по-прежнему можно считать, что $\alpha_1 = 0$. Записав

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)^2 = \frac{n-1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}X_j^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}X_iX_j,$$

получим

$$\mathrm{E}(\overline{X}S^2) = \frac{n-1}{n^3}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right) = \frac{n-1}{n^3}\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^3\right) = \frac{n-1}{n^2}\mu_3.$$

Для распределения $N(\mu, \sigma^2)$ моменты $\alpha_1 = \mu$, $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 =$

$= 3\sigma^4$, поэтому $\mathrm{E}\bar{X} = \mu$, $\mathrm{D}\bar{X} = \dfrac{\sigma^2}{n}$, $\mathrm{E}S^2 = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$, $\mathrm{D}S^2 = = \dfrac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$, $\mathrm{cov}(\bar{X}, S^2) = 0$.

1.28. Рассмотрим r-мерные векторы $\xi_s = (X_s^{k_1}, \ldots, X_s^{k_r})$, $s = 1, \ldots, n$. Они независимы, одинаково распределены и $\mathrm{E}(\xi_1) = \alpha$, $\mathrm{D}(\xi_1) = \|\mathrm{cov}(X_1^{k_i}, X_1^{k_j})\|_1^r = \Sigma$ (α и Σ указаны в условии задачи). Следовательно, по центральной предельной теореме при $n \to \infty$ имеем

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_1 + \ldots + \xi_n - n\alpha)\right) \to N(0, \Sigma)$$

Остается заметить, что $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(\xi_1 + \ldots + \xi_n - n\alpha) = \sqrt{n}(A_{nk_1} - \alpha_{k_1}, \ldots, A_{nk_r} - \alpha_{k_r})$.

1.29. Можно считать, что $\alpha_1 = \mathrm{E}\xi = 0$ (см. решение задачи 1.27). Положим $\eta_n = \sqrt{n}(S_n^2 - \mu_2) = \xi_n + \delta_n$, где $\xi_n = \sqrt{n}(A_{n2} - \mu_2)$, $\delta_n = -\sqrt{n}A_{n1}^2$. Поскольку при сделанных предположениях $L(\xi_n) \to N(0, \mu_4 - \mu_2^2)$ (см., например, решение задачи 1.28), достаточно убедиться в том, что $\delta_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$. Но

$$\mathrm{P}(|\delta_n| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{E}|\delta_n| = \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\mathrm{E}A_{n1}^2 = \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\mathrm{D}A_{n1} = \frac{\mu_2}{\varepsilon\sqrt{n}} \to 0,$$

что и требовалось показать. Асимптотика моментов следует из задачи 1.27.

1.30. События $\{X_{(r)} \leqslant x_1, X_{(s)} \leqslant x_2\}$ и $\{\mu_n(x_1) \geqslant r, \mu_n(x_2) \geqslant s\}$ эквивалентны, поэтому $F_{rs}(x_1, x_2) = \mathrm{P}(\mu_n(x_1) \geqslant r, \mu_n(x_2) \geqslant s)$. Пусть сначала $x_1 < x_2$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1 = \mu_n(x_1)$, $\nu_2 = \mu_n(x_2) - \mu_n(x_1)$, $\nu_3 = n - \mu_n(x_2)$. Тогда (см. решение задачи 1.26)

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = M(n; p_1, p_2, p_3),$$

где $p_1 = F(x_1)$, $p_2 = F(x_2) - F(x_1)$, $p_3 = 1 - F(x_2)$.

Отсюда

$$\mathrm{P}(\mu_n(x_1) \geqslant r, \mu_n(x_2) \geqslant s) = \Sigma\mathrm{P}(\nu_1 = m, \nu_2 = j),$$

где суммирование производится по всем m и j, удовлетворяющим условиям $m \geqslant r$, $s \leqslant m + j \leqslant n$. Поскольку

$$\mathrm{P}(\nu_1 = m, \nu_2 = j) = \frac{n!}{m!j!(n-m-j)!}p_1^m p_2^j p_3^{n-m-j},$$

отсюда следует приведенная в формулировке задачи формула. Если же $x_1 \geqslant x_2$, то событие $\{X_{(r)} \leqslant x_1, X_{(s)} \leqslant x_2\} = \{X_{(s)} \leqslant x_2\}$; формулу же для одномерной функции распределения можно получить, например, из предыдущего результата: $F_r(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to \infty} F_{rs}(x_1, x_2)$.

1.31. Пусть $r = 2$ (общий случай рассматривается аналогично) и точки $x_1 < x_2$ заданы. Событие $\{X_{(k_1)} \in (x_1; x_1 + \mathrm{d}x_1), X_{(k_2)} \in (x_2; x_2 + \mathrm{d}x_2)\}$ осуществляется тогда и только тогда, когда $k_1 - 1$ из всех наблюдений меньше x_1, одно попадает в интервал $(x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1)$, $k_2 - k_1 - 1$ наблюдений — в интервал между $x_1 + \mathrm{d}x_1$ и x_2, одно наблюдение — в интервал $(x_2, x_2 + \mathrm{d}x_2)$ и остальные $n - k_2$ наблюдений больше $x_2 + \mathrm{d}x_2$. В силу независимости наблюдений, вероятность указанного события при малых dx_1 и dx_2 с точностью до членов, имеющих более высокий порядок малости, равна

$$C_n^{k_1-1}F^{k_1-1}(x_1)(n-k_1+1)f(x_1)dx_1C_{n-k_1}^{k_2-k_1-1}(F(x_2)-$$
$$-F(x_1))^{k_2-k_1-1}(n-k_2+1)f(x_2)dx_2(1-F(x_2))^{n-k_2}.$$

Разделив на dx_1dx_2 и устремляя dx_1 и dx_2 к нулю, получим указанную формулу для $g_{k_1k_2}(x_1, x_2)$.

1.32. Обозначим $k_i=[np_i]$, $i=1, 2$, и пусть $\eta_{ni}=(Z_{np_i}-\varsigma_{p_i})\sqrt{n}$, $i=1, 2$. Совместная плотность распределения случайных величин η_{n1} и η_{n2} по формуле (1.2) равна (см. задачу 1.31)

$$\varphi_n(y_1, y_2)=\frac{1}{n}g_{k_1+1, k_2+1}\left(\varsigma_{p_1}+\frac{y_1}{\sqrt{n}}, \varsigma_{p_2}+\frac{y_2}{\sqrt{n}}\right)=A_1(n)A_2(n)A_3(n),$$

где

$$A_1(n)=\frac{n!p_1^{k_1}(p_2-p_1)^{k_2-k_1-1}(1-p_2)^{n-k_2-1}}{nk!(k_2-k_1-1)!(n-k_2-1)!},$$

$$A_2(n)=f\left(\varsigma_{p_1}+\frac{y_1}{\sqrt{n}}\right)f\left(\varsigma_{p_2}+\frac{y_2}{\sqrt{n}}\right),$$

$$A_3(n)=\left(\frac{1}{p_1}F\left(\varsigma_{p_1}+\frac{y_1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{k_1}\left(\frac{F\left(\varsigma_{p_2}+\frac{y_2}{\sqrt{n}}\right)-F\left(\varsigma_{p_1}+\frac{y_1}{\sqrt{n}}\right)}{p_2-p_1}\right)^{k_2-k_1-1}\times$$
$$\times\left(\frac{1-F\left(\varsigma_{p_2}+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)}{1-p_2}\right)^{n-k_2-1}.$$

Из формулы Стирлинга следует, что $A_1(n)\to\dfrac{1}{2\pi\sqrt{p_1(p_2-p_1)(1-p_2)}}$

Далее, так как плотность $f(x)$ непрерывна, то $A_2(n)\to f(\varsigma_{p_1})f(\varsigma_{p_2})$. Наконец, поскольку

$$F\left(\varsigma_{p_i}+\frac{y_i}{\sqrt{n}}\right)=p_i+f(\varsigma_{p_i})\frac{y_i}{\sqrt{n}}+f'(\varsigma_{p_i})\frac{y_i^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ i=1, 2,$$

несложно получить, что

$$\ln A_3(n)\to-\frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{p_1(p_2-p_1)}f^2(\varsigma_{p_1})y_1^2-\frac{2y_1y_2}{p_2-p_1}f(\varsigma_{p_1})f(\varsigma_{p_2})+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-p_1)y_2^2}{(1-p_2)(p_2-p_1)}f^2(\varsigma_{p_2})\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i, j=1}^{2}\sigma^{ij}y_iy_j, \|\sigma^{ij}\|=\|\sigma_{ij}\|^{-1}.$$

Учитывая, что $f(\varsigma_{p_1})f(\varsigma_{p_2})/\sqrt{p_1(p_2-p_1)(1-p_2)}=(\det\|\sigma_{ij}\|)^{-\frac{1}{2}}$, окончательно может записать, что

$$\varphi_n(y_1, y_2)\to\frac{1}{2\pi\sqrt{\det\|\sigma_{ij}\|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i, j=1}^{2}\sigma^{ij}y_iy_j\right\},$$

т. е. в пределе имеем плотность двумерного нормального распределения с нулевыми средними значениями и матрицей вторых моментов $\|\delta_{ij}\|$.

1.33. Согласно решению задачи 1.31, совместная плотность распределения $X_{(r)}$ и $X_{(n-s+1)}$ равна (при $x_1<x_2$)

$$g_{r\ n-s+1}(x_1, x_2) = \frac{n!}{(r-1)!(s-1)!(n-s-r)!}F^{r-1}(x_1)[F(x_2) - F(x_1)]^{n-s-r}\times$$
$$\times[1 - F(x_2)]^{s-1}f(x_1)f(x_2).$$

Поскольку якобиан преобразования $y_1 = nF(x_1)$, $y_2 = n[1 - F(x_2)]$ равен $J(x_1, x_2) = -n^2 f(x_1)f(x_2)$, по формуле (1.2) совместная плотность распределения случайных величин $\varkappa_n = nF(X_{(r)})$ и $\eta_n = n[1 - F(X_{(n-s+1)})]$ имеет вид

$$\varphi_n(y_1, y_2) = g_{r,\ n-s+1}\left(F^{-1}\left(\frac{y_1}{n}\right),\ F^{-1}\left(1 - \frac{y_2}{n}\right)\right)/|J\left(F^{-1}\left(\frac{y_1}{n}\right),\right.$$
$$\left.F^{-1}\left(1 - \frac{y_2}{n}\right)\right)| = \frac{n!}{(n-r-s)!n^{r+s}}\ \frac{y_1^{r-1}}{(r-1)!}\ \frac{y_2^{s-1}}{(s-1)!}\times$$
$$\times\left(1 - \frac{y_1+y_2}{n}\right)^{n-r-s} \to \frac{y_1^{r-1}}{(r-1)!}e^{-y_1}\frac{y_2^{s-1}}{(s-1)!}e^{-y_2},$$

если $n \to \infty$, а r, s — фиксированы.

Таким образом, $\varkappa_n$ и η_n, следовательно, $X_{(r)}$ и $X_{(n-s+1)}$ асимптотически независимы; при этом $\mathbf{L}(\varkappa_n) \to \Gamma(1, r)$, $\mathbf{L}(\eta_n) \to \Gamma(1, s)$.

1.34. Якобиан преобразования $y_1 = nx_1$, $y_2 = (n-1)(x_2 - x_1)$, ..., $y_n = x_n - x_{n-1}$ равен $J(x_1, ..., x_n) = n!$. Отсюда по формуле (1.2), принимая во внимание указание, имеем, что совместная плотность распределения величин Y_1, ..., Y_n есть $\exp\{-y_1 - ... - y_n\}$. Далее, $X_{(k)} = \sum_{j=1}^{n} Y_j/(n - j + 1)$, поэтому

$$\mathrm{E}X_{(k)} = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n-j+1}\mathrm{E}Y_j,\quad \mathrm{D}X_{(k)} = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(n-j+1)^2}\mathrm{D}Y_j.$$

Но среднее и дисперсия экспоненциального распределения Γ (1, 1) равны 1, следовательно, окончательно имеем

$$\mathrm{E}X_{(k)} = \sum_{j=n-k+1}^{n}\frac{1}{j},\quad \mathrm{D}X_{(k)} = \sum_{j=n-k+1}^{n}\frac{1}{j^2}.$$

В частности, если $n \to \infty$, то

$$\mathrm{E}X_{(n)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \ln n + c + o(1),$$

$c = 0{,}5772...$ — *константа Эйлера,*

$$\mathrm{D}X_{(n)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6} + o(1).$$

1.35. Согласно решению задачи 1.31, совместная плотность распределения случайных величин $X_{(k)}$ и $X_{(l)}$ есть

$$g_{kl}(x_1, x_2) = \frac{n!}{(k-1)!(l-k-1)!(n-l)!}x_1^{k-1}(x_2 - x_1)^{l-k-1}(1 - x_2)^{n-l},$$
$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1.$$

Отсюда (см. (1.2)) совместная плотность распределения $Y_1 = X_{(k)}$ и $Y_2 = X_{(l)} - X_{(k)}$ имеет вид

$$\varphi(y_1, y_2) = \frac{n!}{(k-1)!(l-k-1)!(n-l)!} y_1^{k-1} y_2^{l-k-1} (1 - y_1 - y_2)^{n-l},$$
$$y_1,\ y_2 \geqslant 0,\ y_1 + y_2 \leqslant 1.$$

Теперь, чтобы получить плотность распределения Y_2, достаточно вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{1-y_2} \varphi(y_1, y_2) dy_1 = \frac{n!}{(l-k-1)!(n-l+k)!} y_2^{l-k-1} (1 - y_2)^{n-l+k},$$
$$0 \leqslant y_2 \leqslant 1.$$

Аналогично, плотность распределения $X_{(k)}$ равна

$$\int\limits_0^{1-y_1} \varphi(y_1, y_2) dy_2 = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} y_1^{k-1} (1 - y_1)^{n-k}, \quad 0 \leqslant y_1 \leqslant 1.$$

Далее, так как среднее и дисперсия распределения $\beta(a, b)$ равны $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ соответственно, то

$$\mathrm{E}X_{(k)} = \frac{k}{n+1},\ \mathrm{D}X_{(k)} = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)},\ \mathrm{E}(X_{(l)} - X_{(k)}) = \frac{l-k}{n+1},$$

$$\mathrm{D}\,(X_{(l)} - X_{(k)}) = \frac{(l-k)(n-l+k+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Наконец, поскольку

$$\mathrm{D}(X_{(l)} - X_{(k)}) = \mathrm{D}X_{(k)} + \mathrm{D}X_{(l)} - 2\operatorname{cov}(X_{(k)},\ X_{(l)}),$$

из этих формул получаем, что

$$\operatorname{cov}(X_{(k)},\ X_{(l)}) = \frac{k(n-l+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

1.36. Заметив, что $L\left(\frac{\xi - a}{b - a}\right) = R(0,\ 1)$, можно воспользоваться решением предыдущей задачи. В данном случае $X_{(1)} = (b-a)X'_{(1)} + a$, $X_{(n)} = (b-a)X'_{(n)} + a$, где $X'_{(1)}$, $X'_{(n)}$ — экстремальные значения выборки объема n из распределения $R(0, 1)$, совместная плотность распределения которых имеет вид

$$g_{1n}(x_1,\ x_2) = n(n-1)(x_2 - x_1)^{n-2},\ 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1.$$

1.37. $\mathrm{P}(X_{(1)} > x) = \mathrm{P}(X_i > x,\ i = 1, \dots, n) = [1 - F(x)]^n = e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)^\alpha}$, $x \geqslant a$.

Отсюда

$$\mathrm{P}(X_{(1)} \leqslant x) = 1 - e^{-n\left(\frac{x-a}{b}\right)^\alpha},\ x \geqslant a,$$

а также

$$\mathrm{P}(n^{1/\alpha}(X_{(1)} - a)/b \leqslant t) = 1 - e^{-t^\alpha},\ t \geqslant 0.$$

Таким образом, случайная величина $n^{1/\alpha}(X_{(1)} - a)/b$ имеет распределение, не зависящее от объема выборки, именно распределение $W(0,\ \alpha,\ 1)$. Отсюда

$$\mathrm{E}X_{(1)} = a + b\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) n^{-1/\alpha},$$

$$\mathrm{D}X_{(1)} = b^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]n^{-2/\alpha}.$$

1.38. Слагаемые в $F_n(x_1, x_2)$ независимы и имеют такое же распределение, что и величина $\eta = e(x_1 - \xi_1)e(x_2 - \xi_2)$, поэтому

$$\mathrm{E}F_n(x_1, x_2) = \mathrm{E}\eta = \mathrm{P}(\eta = 1) = \mathrm{P}(\xi_1 \leqslant x_1,\ \xi_2 \leqslant x_2) = F(x_1, x_2),$$

$$\mathrm{D}F_n(x_1, x_2) = \frac{1}{n}\mathrm{D}\eta = \frac{1}{n}[\mathrm{E}\eta - (\mathrm{E}\eta)^2] = \frac{1}{n}F(x_1, x_2)(1 - F(x_1, x_2)).$$

Отсюда согласно неравенству Чебышева

$$\mathrm{P}(|F_n(x_1, x_2) - F(x_1, x_2)| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{D}F_n(x_1, x_2) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обозначим, далее, через $X_j = (X_{1j}, \dots, X_{nj})$, $j = 1, 2$, $\overline{X}_j$, $S_j^2 = S^2(X_j)$ соответствующие выборочные средние и дисперсии и через $S_{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i1}X_{i2} - \bar{X}_1\bar{X}_2$ выборочную ковариацию. Тогда статистическим аналогом для коэффициента корреляции $\rho = \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)/\sqrt{\mathrm{D}\xi_1\mathrm{D}\xi_2}$ является $\rho_n = S_{12}/S_1S_2$. Если $\mathrm{E}(\xi_1^2\xi_2^2) < \infty$, то существует $\mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i1}X_{i2}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{D}(\xi_1\xi_2)$ и из неравенства Чебышева следует, что

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i1}X_{i2} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}(\xi_1\xi_2) \text{ при } n \to \infty.$$

Но также $\overline{X}_j \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}\xi_j$, $S^2(X_j) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{D}\xi_j$, $j = 1, 2$, поэтому $\rho_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \rho$, если только $\mathrm{D}\xi_j > 0$, $j = 1,2$.

1.39. 1) Если $L(\xi) = N(\mu, \sigma^2)$, то $\mathrm{E}e^{it\xi} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$.

2) Если $L(\xi) = \Gamma(a, \lambda)$, то $\mathrm{E}e^{it\xi} = \dfrac{1}{(1 - iat)^\lambda}$.

3) Если $L(\nu_1, \dots, \nu_N) = M(n;\ p_1, \dots, p_N)$, то $\mathrm{E}(x_1^{\nu_1}\dots x_N^{\nu_N}) = (x_1p_1 + \dots + x_Np_N)^n$.

4) Если $L(\xi) = \Pi(\lambda)$, то $\mathrm{E}x^\xi = e^{\lambda(x-1)}$.

5) Если $L(\xi) = \overline{Bi}(r, p)$, то $\mathrm{E}x^\xi = \dfrac{q^r}{(1 - px)^r}$.

1.40. Пусть U — ортогональная матрица, приводящая $\sum$ к диагональному виду: $U'\sum U = D$. Обозначим $B = UD^{1/2}$; тогда $\sum = BB'$ и $Y = BX + \mu$, где компоненты вектора $\mathbf{X}$ независимы и нормальны $N(0, 1)$. Далее, $Q = X'B'ABX \equiv X'A_1X$ и по условию $A_1^2 = B'ABB'AB = B'AB = A_1$, т. е. матрица A_1 идемпотентна. Следовательно (см. утверждение 2°, п. 6 гл. 1) $L(Q) = \chi^2(\mathrm{tr}\,A_1)$. Но $\mathrm{tr}\,A_1 = \mathrm{tr}\,(ABB') = \mathrm{tr}\,(A\sum) = m$, что и требовалось показать.

1.44. Совместная плотность распределения X_1 и X_2 равна

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\lambda_1 - 1}x_2^{\lambda_2 - 1}}{a^{\lambda_1 + \lambda_2}\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}e^{-\frac{x_1 + x_2}{a}},\quad x_1, x_2 > 0.$$

Рассмотрим преобразование $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$. Оно взаимно-однозначно отображает область $\{x_1, x_2 > 0\}$ на область $\{y_1 > 0, 0 < y_2 < 1\}$ и его якобиан $J(x_1, x_2) = -\dfrac{1}{x_1 + x_2}$. Отсюда по формуле (1.2) плотность совместного распределения Y_1 и Y_2 равна

$$\varphi(y_1, y_2) = f(y_1y_2, y_1(1-y_2))y_1 = \frac{y_1^{\lambda_1+\lambda_2-1}e^{-y_1/a}}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)a^{\lambda_1+\lambda_2}}\cdot\frac{y_2^{\lambda_1-1}(1-y_2)^{\lambda_2-1}}{B(\lambda_1, \lambda_2)}.$$

1.45. Формула для моментов следует из общей формулы для моментов распределения $\Gamma(a, \lambda)$ при $a = 2$, $\lambda = \dfrac{n}{2}$ и свойства гамма-функции: $\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$. В частности, $\mathrm{E}\chi_1^2 = 1$, $\mathrm{D}\chi_1^2 = 2$. Согласно свойству воспроизводимости гамма-распределения $\chi_n^2 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где слагаемые независимы и имеют одинаковое распределение $\Gamma\left(2, \dfrac{1}{2}\right) = \chi^2(1)$. Следовательно, по центральной предельной теореме случайная величина $(\chi_n^2 - n)/\sqrt{2n}$ при $n \to \infty$ асимптотически нормальна $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.46. Первое утверждение есть прямое следствие формулы (1.4). Во втором случае имеем

$$\mathbf{P}(a + \operatorname{tg}\xi \leqslant x) = \mathbf{P}(\xi \leqslant \operatorname{arctg}(x-a)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x-a)\right).$$

Отсюда искомая плотность распределения равна

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}'(x-a) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-a)^2}.$$

1.47. Поскольку $\mathrm{E}t_n^{2r} = n^r\mathrm{E}\eta^{2r}\mathrm{E}(\chi_n^2)^{-r}$, при $2r < n$ из общих формул для моментов распределений $\mathcal{N}(0, 1)$ и $\Gamma\left(2, \dfrac{n}{2}\right)$ имеем

$$\mathrm{E}\eta^{2r} = 1\cdot3\cdots(2r-1),\ \mathrm{E}(\chi_n^2)^{-r} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2} - r\right)}{2^r\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(n-2)(n-4)\cdots(n-2r)}.$$

Остальные утверждения о моментах следуют из вида плотности $s_n(x)$. Утверждение о сходимости плотности $s_n(x)$ является следствием соотношений $n^{-1/2}\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) \to 1/\sqrt{2}$ и $\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \to e^{-x^2/2}$.

Наконец, по закону больших чисел $\chi_n^2/n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$. Но тогда и $\sqrt{n/\chi_n^2} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ и, следовательно, $\mathcal{L}(t_n) \to \mathcal{L}(\eta) = \mathcal{N}(0, 1)$ (см. утверждения 1° и 2° в), п. 4 гл. 1).

1.48. Положим $Y = \chi_{n1}^2/(\chi_{n1}^2 + \chi_{n2}^2)$; тогда $F_{n1\,n2} = \dfrac{n_2}{n_1}\,\dfrac{\chi_{n1}^2}{\chi_{n2}^2} = \dfrac{n_2}{n_1}\,\dfrac{Y}{1-Y}$. Но (см. задачу 1.44) $\mathcal{L}(Y) = \beta\left(\dfrac{n_1}{2}, \dfrac{n_2}{2}\right)$, поэтому

$$P(F_{n_1,n_2} \leqslant x) = P\left(Y \leqslant \frac{n_1 x}{n_2 + n_1 x}\right) = B\left(\frac{n_1 x}{n_2 + n_1 x}; \frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right).$$

Поскольку $Y = \dfrac{F_{n_1,n_2}}{F_{n_1,n_2} + \frac{n_2}{n_1}}$, имеем также равенство $L\left(\dfrac{F_{n_1,n_2}}{F_{n_1,n_2} + \frac{n_2}{n_1}}\right) =$ $= \beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)$. Моменты можно вычислить по формуле $\mathbf{E}F^r_{n_1,n_2} =$ $= \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^r \mathbf{E}(\chi^2_{n_1})^r \mathbf{E}(\chi^2_{n_2})^{-r}$, используя формулу для моментов гамма-распределения. При этом моменты существуют лишь при $-\frac{n_1}{2} < r < \frac{n_2}{2}$ и они равны $\mathbf{E}F^r_{n_1,n_2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^r \dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$. В частности, при $n_2 > 2$ $\mathbf{E}F_{n_1,n_2} = \dfrac{n_2}{n_2 - 2}$, а при $n_2 > 4$ имеем $\mathbf{D}F_{n_1,n_2} =$ $= \dfrac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$.

1.49. По теореме о среднем значении имеем

$$1 - B(x;\ a,\ b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} C^{a-1} \frac{(1-x)^b}{b}, \quad C \in [x,\ 1].$$

При $b \to \infty$ и фиксированном a по формуле Стирлинга $\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \sim b^a$, следовательно,

$$\frac{1}{b} \ln [1 - B(x;\ a,\ b)] = \ln(1-x) - \frac{1}{b} \ln b + \frac{1}{b} \ln \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} + \\ + \frac{1}{b} \ln \frac{C^{a-1}}{\Gamma(a)} \to \ln(1-x).$$

Второе соотношение является следствием первого соотношения и задачи 1.48.

1.50. Распределение случайной величины $t_n = \eta/\sqrt{\chi^2_n/n}$ симметрично (так как распределения $-\eta$ и η совпадают), поэтому

$$\mathbf{P}(t_n^2 \leqslant x^2) = \mathbf{P}(-|x| \leqslant t_n \leqslant |x|) = 2\mathbf{P}(t_n \leqslant |x|) - 1$$

или $\mathbf{P}(t_n \leqslant |x|) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{P}(t_n^2 \leqslant x^2)$. Отсюда при $x > 0$ получаем $\mathbf{P}'(t_n \leqslant x) = \frac{1}{2}\mathbf{P}'(t_n^2 \leqslant x^2)$, т. е. $s_n(x) = x f_{1,n}(x^2)$. Из этих соотношений также имеем, что $\mathbf{P}(t_n > d\sqrt{n}) = [1 - F(d^2 n;\ 1,\ n)]/2$. Отсюда и из задачи 1.49 следует указанное предельное соотношение.

1.51. Поскольку $L\left(\frac{2}{a}(X_1 + \ldots + X_l)\right) = \chi^2(2l)$, $L\left(\frac{2}{a}(X_{l+1} + \ldots + X_{l+m})\right) = \chi^2(2m)$ и указанные случайные величины независимы, утверждение следует из определения закона Снедекора.

1.52. Обозначим $\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_N) = \mathbf{E}(x_1^{\nu_1} \ldots x_N^{\nu_N}) = (x_1 p_1 + \ldots + x_N p_N)^n$.

Тогда

$$\mathbf{E}(x_1^{\nu_1}\dots x_k^{\nu_k}) = \varphi(x_1, \dots, x_k, 1, \dots, 1) =$$
$$= (x_1p_1 + \dots + x_kp_k + 1 - p_1 - \dots - p_k)^2.$$

Далее,

$$\mathbf{E}(\nu_1)_{k_1} \dots (\nu_N)_{k_N} = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_N}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_N^{k_N}} \varphi(x_1, \dots, x_N)\Big|_{x_1 = \dots = x_N = 1}$$

и непосредственное вычисление этой производной приводит к искомой формуле. Наконец,

$$\mathbf{E}\eta^l = \sum_{i=1}^{N} c_i^l n p_i = n\bar{c}^l,$$

$$\operatorname{cov}(\eta^1, \eta^2) = \sum_{i,j=1}^{N} c_i^1 c_j^2 \operatorname{cov}(\nu_i, \nu_j) = n\sum_{i=1}^{N} c_i^1 c_i^2 p_i(1-p_i) -$$

$$- n\sum_{i\neq j} c_i^1 c_j^2 p_i p_j = n\left(\sum_{i=1}^{N} c_i^1 c_i^2 p_i - \sum_{i,j=1}^{N} c_i^1 c_j^2 p_i p_j\right) =$$
$$= n(\overline{c^1c^2} - \bar{c}^1\bar{c}^2).$$

1.53. Обозначим $\boldsymbol{\nu}^* = (\nu_1^*, \dots, \nu_k^*)$, где $\nu_j^* = (\nu_j - np_j)/\sqrt{n}$, $j = 1, \dots, k$. Достаточно показать, что характеристическая функция

$$\mathbf{E}e^{it'\nu^*} \to \exp\left\{-\frac{1}{2}t'\Sigma_k t\right\}, \quad t = (t_1, \dots, t_k),$$

для любого фиксированного t. Из предыдущей задачи следует, что

$$\mathbf{E}e^{it'\nu^*} = e^{-i\sqrt{n}t'p}\left[1 + \sum_{j=1}^{k} p_j(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1)\right]^n, \quad p = (p_1, \dots, p_k).$$

Логарифмируя это соотношение и учитывая формулу $\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3)$, $\varepsilon \to 0$, в условиях задачи получаем

$$\ln \mathbf{E}e^{it'\nu^*} = -i\sqrt{n}\,t'p + n\sum_{j=1}^{k} p_j(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1) -$$
$$- \frac{n}{2}\left[\sum_{j=1}^{k} p_j(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1)\right]^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} p_j t_j^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k} p_j t_j\right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}t'\Sigma_k t + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

что и требовалось показать.

Наконец, в результате непосредственных вычислений получаем

$$|\Sigma_k| = p_1 \dots p_k(1 - p_1 - \dots - p_k) \neq 0 \text{ при } k < N.$$

1.54. Для любых целых неотрицательных $k_1, \dots, k_N$ таких, что $k_1 + \dots + k_N = n$, имеем

$$\mathbf{P}(\xi_j = k_j,\ j=1, \ldots, N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n) = \frac{\mathbf{P}(\xi_j = k_j,\ j=1, \ldots, N)}{\mathbf{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_N = n)}.$$

Здесь числитель в силу независимости $\xi_1, \ldots, \xi_N$ равен

$$\prod_{j=1}^{N} e^{-\lambda_j}\lambda_j^{k_j}/k_j! = e^{-\lambda}\prod_{j=1}^{N}\frac{\lambda_j^{k_j}}{k_j!},\quad \lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_N.$$

Далее, так как (см. задачу 1.39 п. 4) $\boldsymbol{L}(\xi_1 + \ldots + \xi_N) = \Pi(\lambda)$, то знаменатель равен $e^{-\lambda}\lambda^n/n!$. В результате искомая вероятность равна $\frac{n!}{k_1! \ldots k_N!} p_1^{k_1} \ldots p_N^{k_N}$, что и доказывает утверждение.

1.55. Вычислим безусловные вероятности $\mathbf{P}(\xi = k)$, $k = 0, 1, \ldots$ Имеем

$$\mathbf{P}(\xi = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r)a^r}e^{-\lambda/a}d\lambda =$$

$$= \frac{\Gamma(k+r)}{k!\,\Gamma(r)}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{k+r}\frac{1}{a^r} = C_{r+k-1}^{k}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{k}\frac{1}{(a+1)^r}.$$

1.56. Вектор $(\overline{X}, X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})$ распределен по нормальному закону, поскольку представляет собой линейное преобразование нормального вектора $\boldsymbol{X}$. Здесь $\operatorname{cov}(\overline{X}, X_i - \overline{X}) = \operatorname{cov}(\overline{X}, X_i) - \mathrm{D}\,\overline{X} = \frac{1}{n}\mathrm{D}\,X_i - \mathrm{D}\,\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, следовательно, первая компонента не зависит от остальных.

1.57. Пусть $\boldsymbol{U}$ — ортогональная матрица, приводящая $\boldsymbol{A}_1$ к диагональному виду: $\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}_1$, где по условию $n - n_1 = n_2$ диагональных элементов $\boldsymbol{D}_1$ равны нулю. Введем вектор $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{X}$; тогда $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta}$ и можно записать, что

$$\begin{aligned} Q = \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}' &= \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta} = \\ &= \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\eta}. \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{D}_1$ является диагональной матрицей и $\operatorname{rang}\boldsymbol{D}_2 = \operatorname{rang}\boldsymbol{A}_2 = n_2$. Отсюда следует, что диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{D}_2$, отвечающие нулевым элементам $\boldsymbol{D}_1$, равны 1, а остальные — нулю. В свою очередь, это означает, что все ненулевые элементы $\boldsymbol{D}_1$ равны 1. Следовательно, матрицы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ идемпотентны. Из предыдущих рассуждений также следует, что $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2 = 0$, а значит, и $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = 0$.

1.58. Если перейти к нормированным величинам $X_i' = \frac{X_i - \mu}{\varsigma}$, то вид η не изменится, поэтому можно считать, что параметры $(\mu, \sigma) = (0, 1)$. Пусть $\boldsymbol{B}$ — матрица размера $n \times n$, все элементы которой равны $\frac{1}{n}$. Тогда $nS^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$, где матрица $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{B}$ идемпотентна, следовательно, $\operatorname{rang}\boldsymbol{A} = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} = n - 1$. Отсюда следует, что $n - 1$ собственных чисел $\boldsymbol{A}$ равны 1 и одно равно 0. Пусть $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ — собственные векторы $\boldsymbol{A}$, отвечающие собственному числу 1; тогда спектральное представление $\boldsymbol{A}$ имеет вид $\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_k'$.

При этом непосредственно можно проверить, что $u_1 = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(\frac{n-1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}\right)$, $\sqrt{\frac{n}{n-1}}(X_1 - \bar{X}) = u_1'X$ и $nS^2 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_k'X)^2$.

Таким образом, обозначая $Y_k = u_k'X$, $k = 1, \ldots, n-1$, получим представление

$$\eta = \frac{X_1 - \bar{X}}{\sqrt{n-1}\,S} = Y_1/\sqrt{Y_1^2 + \ldots + Y_{n-1}^2},$$

причем $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ независимы и нормальны $N(0, 1)$, которое можно записать также в виде $\eta = Y_1/\sqrt{Y_1^2 + \chi_{n-2}^2}$, где χ_{n-2}^2 не зависит от Y_1 и $L(\chi_{n-2}^2) = \chi^2(n-2)$. Отсюда уже с помощью непосредственных вычислений можно найти распределение η. Прежде всего заметим, что это распределение сосредоточено на интервале $(-1, 1)$ (так как $\eta^2 < 1$) и симметрично (так как распределения $-Y_1$ и Y_1 совпадают), поэтому для $0 < u < 1$

$$\mathbf{P}(\eta > u) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(\eta^2 > u^2) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\left(\frac{\chi_{n-2}^2}{(n-2)Y_1^2} < \frac{1-u^2}{(n-2)u^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}F\left(\frac{1-u^2}{(n-2)u^2}; n-2, 1\right),$$

где $F(x; n_1, n_2)$ — функция распределения закона Снедекора $S(n_1, n_2)$. Воспользовавшись результатом задачи 1.48, можем записать

$$F\left(\frac{1-u^2}{(n-2)u^2}; n-2, 1\right) = B\left(1-u^2; \frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, окончательно имеем, что для $0 < u < 1$

$$F_\eta(u) = 1 - \frac{1}{2}B\left(1-u^2; \frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Для отрицательных значений u $F_\eta(u) = 1 - F_\eta(-u)$.

1.59. а) Совокупность случайных величин $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, X_{i1} - \bar{X}_1, X_{i2} - \bar{X}_2, i = 1, \ldots, n)$ имеет нормальное распределение, поскольку представляет собой линейное преобразование нормального вектора $(X_{i1}, X_{i2}, i = 1, \ldots, n)$. Непосредственно проверяется, что первые две компоненты $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ некоррелированы с остальными. Отсюда следует, что $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ и $(X_{i1} - \bar{X}_1, X_{i2} - \bar{X}_2, i = 1, \ldots, n)$ независимы, следовательно, независимы $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ и (S_1^2, S_{12}, S_2^2).

б) Из предыдущего следует, что $L(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = N\left((\mu_1, \mu_2), \frac{1}{n}\Sigma\right)$, поэтому, положив в задаче 1.40 $A = n\Sigma^{-1}$, получим требуемое утверждение.

в) Имеем $S_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{n}(Y_1^2 + Y_2)$, $S_{12} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{n}Y_1\sqrt{Y_3}$, $S_2^2 = \frac{\sigma_2^2}{n}Y_3$ и модуль якобиана указанного преобразования

$$|J| = \frac{n^{5/2}}{\sigma_1^3\sigma_2^2\sqrt{x_2}} = \frac{n^3}{(\sigma_1\sigma_2)^3\sqrt{y_3}}.$$

По формуле (1.2) плоность совместного распределения (Y_1, Y_2, Y_3) равна

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} y_2^{\frac{n-4}{2}} e^{-\frac{y_2}{2}} y_3^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{y_3}{2}} / 2\sqrt{2\pi}\,\Gamma(n-2),$$

т. е. представляет собой произведение плотностей распределений $N(0, 1)$, $\chi^2(n-2)$ и $\chi^2(n-1)$ (здесь коэффициент преобразуется к нужному виду с помощью формулы $\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)2^{2p-1} = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2p)$). Таким образом, случайные величины Y_1, Y_2 и Y_3 независимы и при этом $\boldsymbol{L}(Y_1) = N(0, 1)$, $\boldsymbol{L}(Y_2) = \chi^2(n-2)$, $\boldsymbol{L}(Y_3) = \chi^2(n-1)$. Отсюда

$$\boldsymbol{L}\left(T = Y_1/\sqrt{Y_2/(n-2)}\right) = S(n-2).$$

Наконец, $\rho_n = \dfrac{T}{\sqrt{n-2+T^2}}$, и по формуле (1.3) находим, что плотность распределения случайной величины ρ_n равна

$$\varphi(y) = s_{n-2}\left(\frac{\sqrt{n-2}\,y}{\sqrt{1-y^2}}\right)\frac{\sqrt{n-2}}{(1-y^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot(1-y^2)^{\frac{n-4}{2}}, \quad -1 < y < 1.$$

1.60. Как следует из решения задачи 1.29, асимптотические распределения статистик S^2 и A_{n2} одинаковы, следовательно (см. задачу 1.28), совместное распределение $\bar{X}$ и S^2 асимптотически нормально. Отсюда и распределение любой их линейной комбинации асимптотически нормально, поэтому достаточно вычислить среднее и дисперсию разности $\bar{X} - \dfrac{n}{n-1}S^2$. Используя решение задачи 1.27, находим

$$\mathbf{E}\left(\bar{X} - \frac{n}{n-1}S^2\right) = 0,$$

$$\mathbf{D}\left(\bar{X} - \frac{n}{n-1}S^2\right) = \mathbf{D}\bar{X} + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\mathbf{D}S^2 - \frac{2n}{n-1}\operatorname{cov}(\bar{X}, S^2) =$$

$$= \frac{\mu_2}{n} + \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\mu_2^2\right) - \frac{\mu_3}{n} = \frac{2\lambda^2}{n-1}.$$

Отсюда заключаем, что $\boldsymbol{L}(\varsigma_n) \to N(0, 1)$. Но $T_n = \varsigma_n\bar{X}/\lambda$, откуда с учетом указания получаем утверждение.

1.62. Здесь $\boldsymbol{L}(\xi_1) = N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $f_{\xi_1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$,

$$f_{\xi_1\xi_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Далее, в результате простых вычислений приходим к указанному выражению для условной плотности $f_{\xi_2|\xi_1}(y|x)$.

1.63. Пусть $\boldsymbol{L} = \begin{Vmatrix} \mathbf{E}^{(1)} & \mathbf{O} \\ -\boldsymbol{A} & \mathbf{E}^{(2)} \end{Vmatrix}$ — матрица указанного преобразования. Тогда $L(Y^{(1)}, Y^{(2)}) = N\left(L\begin{pmatrix}\mu^{(1)}\\ \mu^{(2)}\end{pmatrix}, L\Sigma L'\right)$ и в результате непосредственных вычислений имеем

$$L\Sigma L' = \begin{Vmatrix} E^{(1)} & O \\ -A & E^{(2)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E^{(1)} & -A' \\ O & E^{(2)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Sigma_{11} & O \\ O & B \end{Vmatrix}$$

(в частности, это приводит к следующему равенству для определителей: $|\Sigma| = |\Sigma_{11}|\cdot|B|$). Из структуры матрицы $L\Sigma L'$ следует, что $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ некоррелированны, следовательно, и независимы. Кроме того, отсюда получаем, что $L(Y^{(2)}) = N(\mu_2 - A\mu^{(1)}, B)$. Но тогда

$$L(X^{(2)}|X^{(1)} = x^{(1)}) = L(Y^{(2)} + Ax^{(1)}) = N(M(x^{(1)}), B).$$

1.64. По формуле полной вероятности вероятность указанного события

$$P(\xi = k) = \int_0^\lambda P'\left(-\sum_{i=1}^k \ln U_i \leqslant t\right)\cdot P(-\ln U_{k+1} > \lambda - t)dt =$$

$$= \int_0^\lambda \frac{t^{k-1}e^{-t}}{(k-1)!}\cdot e^{-\lambda+t}dt = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

1.65. Так как $P(cU_1 \leqslant f(x)) = f(x)/c$ и

$$P(cU_1 > f(a + (b-a)U_2)) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{c}f(a + (b-a)x)\right)dx =$$

$$= 1 - 1/c(b-a),$$

то плотность распределения случайной величины ξ в точке $x \in [a, b]$ вычисляется по формуле

$$f_\xi(x) = \frac{1}{c(b-a)} f(x)\sum_{r=0}^\infty \left(1 - \frac{1}{c(b-a)}\right)^r = f(x).$$

Глава 2

2.1. Решение сформулированных задач сводится к вычислению средних, а также дисперсий указанных статистик и асимптотическому при $n \to \infty$ анализу этих характеристик. Например, в задаче а) имеем $F_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}$, где $\mu_n(x)$ — число элементов выборки $X = (X_1, \ldots, X_n)$, принявших значение $\leqslant x$, т. е. $L(\mu_n(x)) = Bi(n, F(x))$; отсюда

$$EF_n(x) = E\mu_n(x)/n = F(x),\ DF_n(x) = D\mu_n(x)/n^2 = F(x)(1 - F(x))/n \to 0$$
при $n \to \infty$,

что означает несмещенность и состоятельность $F_n(x)$ как оценки $F(x)$.

Рассмотрим задачу г). Так как (см. задачу 1.27)

$$ES^2 = \frac{n-1}{n}\mu_2 = \mu_2 + O\left(\frac{1}{n}\right),\ DS^2 = \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\mu_2^2\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } \mu_4 < \infty,$$

то S^2 — состоятельная, но смещенная оценка μ_2; чтобы устранить смещение, надо использовать статистику $\frac{n}{n-1}S^2 \equiv S'^2$, дисперсия которой равна $\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \mathrm{D}S^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$, т. е. S'^2 также состоятельная оценка μ_2.

2.2. Согласно решению предыдущей задачи п. б,

$$T_n(X) \xrightarrow{P} \sqrt{\alpha_2/2} = \alpha_1 \Leftrightarrow \sqrt{\mu_2} = \alpha_1,$$

т. е. когда среднеквадратическое отклонение и среднее равны. В частности, это имеет место для распределений $\Gamma(a, 1)$, $N(a, a^2)$, $a > 0$.

2.4. Для случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$ выборочными данными являются $(Y_i = X_{i1} + X_{i2},\ i = 1, \dots, n)$, а ее дисперсия $\mathrm{D}\eta = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2 + 2\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$. На основании задачи 2.1 п. г) несмещенной оценкой $\mathrm{D}\eta$ является статистика

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i1} - \bar{X}_1)^2 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i2} - \bar{X}_2)^2 + \\ + \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2).$$

Первая и вторая суммы этого разложения являются несмещенными оценками дисперсий $\mathrm{D}\xi_1$ и $\mathrm{D}\xi_2$ соответственно. Поэтому

$$\mathbf{E}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i1} - \bar{X}_1)(X_{i2} - \bar{X}_2) = \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2),$$

что и требовалось установить.

2.5. Для произвольной статистики $T(X)$ имеем

$$\mathbf{E}_\theta T(X) = \sum_{\substack{x = (x_1, \dots, x_n) \\ x_i = 0, 1, \\ i = 1, \dots, n}} T(x)\theta^{\Sigma x_i}(1-\theta)^{n - \Sigma x_i} = \\ = \sum_{r=0}^{n}\theta^r(1-\theta)^{n-r}\sum_{x:\,\Sigma x_i = r} T(x).$$

Здесь правая часть представляет собой полином от θ степени не выше n. Следовательно, в данной модели несмещенные оценки можно строить лишь для полиномов $\tau(\theta) = \sum_{k=0}^{s} a_k\theta^k$ при $s \leqslant n$.

2.6. Вычислим первые два момента статистики T. Так как $L_\theta(r_n) = Bi(n, \theta)$, то $\mathbf{E}_\theta T = \frac{1}{n+\beta}(\mathbf{E}_\theta r_n + \alpha) = \frac{n\theta + \alpha}{n+\beta}$,

$$\mathbf{E}_\theta T^2 = \frac{1}{(n+\beta)^2}(\mathrm{D}_\theta r_n + (\mathbf{E}_\theta r_n)^2 + 2\alpha\mathbf{E}_\theta r_n + \alpha^2) = \\ = \frac{n(n-1)\theta^2 + (2\alpha+1)n\theta + \alpha^2}{(n+\beta)^2}.$$

Отсюда

$$\Delta(\alpha,\ \beta;\ \theta) = \mathrm{E}_\theta(T-\theta)^2 = \mathrm{E}_\theta T^2 - 2\theta \mathrm{E}_\theta T + \theta^2 = \\ = \frac{\theta^2(\beta^2 - n) + \theta(n - 2\alpha\beta) + \alpha^2}{(n+\beta)^2}.$$

В частности, $\Delta(0,\ 0;\ \theta) = \mathrm{D}_\theta\left(\frac{r_n}{n}\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$, $\Delta\left(\frac{\sqrt{n}}{2},\ \sqrt{n};\ \theta\right) = = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$ — не зависит от θ.

Рассмотрим оценку $T' = \frac{r_n + \sqrt{n}/2}{n + \sqrt{n}}$. Ее среднеквадратическая ошибка меньше ошибки несмещенной оценки $T^* = \frac{r_n}{n}$ (т. е. $\frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2} < \frac{\theta(1-\theta)}{n}$) при $\theta \in \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{2(\sqrt{n}+1)}\right)$; длина этого интервала стремится к 0 при $n \to \infty$. При остальных же значениях параметра $\theta \in (0,1)$ более точной является оценка T^*. Таким образом, по критерию среднеквадратической ошибки оценки T' и T^* не сравнимы, и чтобы выбрать какую-то из них, необходимы дополнительные рассуждения. Например, можно принять правило считать ту оценку лучшей, для которой максимальное значение среднеквадратической ошибки меньше (*принцип минимакса*). Поскольку $\max\limits_\theta \theta(1-\theta) = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2} < \frac{1}{4n}$, согласно принципу минимакса оценка T' лучше оценки T^*.

2.7. Условие несмещенности $\mathrm{E}_\theta T(X) = \tau_{rs}(\theta)$, $\forall\theta \in (0,\ 1)$, принимает в данном случае вид

$$\sum_{j=0}^{k} T(j) C_k^j \theta^j (1-\theta)^{k-j} = \theta^r (1-\theta)^s,\ \forall\theta \in (0,\ 1).$$

При любом T выражение в левой части этого тождества представляет собой многочлен от θ степени не выше k, следовательно, указанное тождество может иметь место лишь при $r + s \leqslant k$. Далее непосредственно проверяем, что указанная в формулировке задачи статистика удовлетворяет условию несмещенности. Покажем, наконец, что это единственная несмещенная оценка в данной задаче. Предположим, что $T'(X)$ — другая несмещенная оценка. Тогда статистика $T_1(X) = = T(X) - T'(X)$ удволетворяет тождеству

$$\sum_{j=0}^{k} T_1(j) C_k^j \theta^j (1-\theta)^{k-j} \equiv 0,\ 0 < \theta < 1,$$

или $\sum\limits_{j=0}^{k} T_1(j) C_k^j x^j \equiv 0$, $0 < x < \infty$, где $x = \frac{\theta}{1-\theta}$. Но из тождественного равенства нулю многочлена следует равенство нулю всех его коэффициентов, т. е. $T'(j) = T(j)$ для $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$.

2.8. Согласно свойству воспроизводимости биномиального распределения $L_\theta(T) = Bi(kn,\ \theta)$, поэтому

$$\mathrm{E}_\theta H(T) = \sum_{j=0}^{kn} H(j)\, C_{kn}^j \theta^j (1-\theta)^{kn-j}.$$

При любой функции H это среднее представляет собой полином от θ степени не выше kn, следовательно, несмещенные оценки вида $H(T)$ в данной модели можно строить лишь для функций вида $\tau(\theta) = \sum_{r=0}^{s} a_r\theta^r$ при $s \leqslant kn$. Пусть $\tau_j(\theta) = \theta^j$, $j \leqslant kn$, тогда, поскольку $\mathrm{E}_\theta(T)_j = (kn)_j\theta^j$ (см. задачу 1.52), несмещенной оценкой для $\tau_j(\theta)$ является статистика $\tau_j^* = (T)_j/(kn)_j$. То, что это единственная несмещенная оценка, являющаяся функцией от T, устанавливается так же, как аналогичное утверждение в предыдущей задаче.

2.9. Первое утверждение следует из цепочки равенств

$$\mathrm{E}_\theta(X)_j = \sum_{k=0}^{\infty} (k)_j e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} = \theta^j \sum_{k=j}^{\infty} e^{-\theta}\frac{\theta^{k-j}}{(k-j)!} = \theta^j.$$

Чтобы убедиться в справедливости второго утверждения, запишем условие несмещенности $\mathrm{E}_\theta T(X) = \tau(\theta)$ $\forall\, \theta > 0$, в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} T(k)\frac{\theta^{k+a}}{k!} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\theta^r}{r!} \quad \forall\ \theta > 0.$$

Ясно, что не существует не зависящей от θ функции $T(k)$, удовлетворяющей этому тождеству.

2.10. Условие несмещенности $\mathrm{E}_\theta T(X) = \tau(\theta)$ $\forall\ \theta > 0$ принимает в данном случае вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} T(k)\frac{\theta^k}{k!} = e^\theta(1 - e^{-\theta})^2 = e^\theta + e^{-\theta} - 2 = 2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\theta^{2r}}{(2r)!} \quad \forall\ \theta > 0.$$

Единственная функция $T(k)$, удовлетворяющая этому тождеству, имеет вид

$$T(k) = \begin{cases} 2 & \text{при } k > 0 \text{ четном,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Такая несмещенная оценка $T(X)$ практически бесполезна.

2.11. В данном случае условие несмещенности

$$\sum_{k=0}^{\infty} T(k)\, C^k_{r+k-1}\theta^k(1-\theta)^r = \theta^s \quad \forall\ \theta \in (0,\ 1)$$

можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} T(k)\, C^k_{r+k-1}\theta^k = \frac{\theta^s}{(1-\theta)^r} = \sum_{j=0}^{\infty} C^j_{r+j-1}\theta^{s+j} \quad \forall\ \theta \in (0,\ 1).$$

Из тождественного равенства двух степенных рядов следует равенство соответствующих коэффициентов, поэтому единственной функцией $T(k)$, удовлетворяющей этому тождеству, является функция

$$T(k) = C^{r-1}_{r+k-s-1}/C^{r-1}_{r+k-1},\ k = 0,\ 1,\ \ldots\,.$$

Отсюда следует, что единственной несмещенной оценкой в данной задаче является статистика

$$T(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \leqslant s - 1, \\ (X)_s/(X + r - 1)_s & \text{при } X \geqslant s. \end{cases}$$

Если $r = 1$, то эта статистика принимает лишь два значения 0 и 1, не принадлежащие параметрическому множеству модели $\Theta = (0, 1)$, поэтому она практически бесполезна.

2.13. Так как $L_\theta(\bar{X}) = N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, то $E_\theta(\bar{X}^2) = D_\theta\bar{X} + (E_\theta\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \theta^2$, откуда и следует утверждение.

2.14. Для распределения $N(\mu, \theta^2)$ второй и четвертый центральные моменты соответственно равны $\mu_2 = \theta^2$ и $\mu_4 = \frac{4!}{2!2^2}\theta^4 = 3\theta^4$, поэтому (см. решение задачи 2.1)

$$E_\theta S^2 = \frac{n-1}{n}\theta^2, \quad D_\theta S^2 = \frac{2(n-1)}{n^2}\theta^4.$$

Отсюда имеем

$$E_\theta(S^2 - \theta^2)^2 = E_\theta\left(\left(S^2 - \frac{n-1}{n}\theta^2\right) - \frac{\theta^2}{n}\right)^2 = D_\theta(S^2) + \frac{\theta^4}{n} = \frac{2n-1}{n^2}\theta^4,$$

$$E_\theta(\tau^* - \theta^2)^2 = D_\theta\tau^* = \frac{1}{n}D_\theta(X_1 - \mu)^2 = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} = \frac{2}{n}\theta^4,$$

$$D_\theta(S'^2) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 D_\theta(S^2) = \frac{2}{n-1}\theta^4.$$

Таким образом,

$$E_\theta(S^2 - \theta^2)^2 < D_\theta\tau^* < D_\theta(S'^2),$$

т. е. согласно критерию минимума среднеквадратической ошибки статистика S^2 точнее оценивает теоретическую дисперсию θ^2, чем статистика τ^*, но в классе несмещенных оценок τ^* точнее, чем S'^2.

2.15. Так как $L_\theta\left(\frac{X_i - \mu}{\theta}\right) = N(0, 1)$, то

$$E_\theta|X_i - \mu| = \theta\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-x^2/2}dx = \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}xe^{\frac{-x^2}{2}}dx = \theta\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$D_\theta|X_i - \mu| = E_\theta(X_i - \mu)^2 - (E_\theta|X_i - \mu|)^2 = \frac{\pi - 2}{\pi}\theta^2.$$

Отсюда $E_\theta T_n(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E_\theta|X_i - \mu| = \theta$ — несмещенность;

$D_\theta T_n(X) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}D_\theta|X_1 - \mu| = \frac{\pi - 2}{2n}\theta^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ — состоятельность.

2.16. Из того, что $L_\theta(T^2/\theta^2) = \chi^2(n) = \Gamma\left(2, \frac{n}{2}\right)$, и из формулы для моментов гамма-распределения следует, что

$$E_\theta T^k = \theta^k 2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

т. е. несмещенность указанной оценки.

Чтобы сравнить оценку τ_1^* для θ с оценкой T_n, полученной в предыдущей задаче, надо вычислить $\mathrm{D}_\theta\tau_1^* = \mathrm{E}_\theta(\tau_1^*)^2 - \theta^2$. Имеем

$$\mathrm{E}_\theta(\tau_1^*)^2 = \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\mathrm{E}_\theta T^2 = \frac{n\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\theta^2$$

(здесь использована формула $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), следовательно, $\mathrm{D}_\theta\tau_1^* = \left(\frac{n}{2}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} - 1\right)\theta^2$. Это выражение надо сравнить с $\mathrm{D}_\theta T_n = \frac{\pi-2}{2n}\theta^2$ (см. решение задачи 2.15). При $n = 1$ обе статистики (и их дисперсии) совпадают; $\mathrm{D}_\theta\tau_1^* = \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\theta^2 \approx 0{,}273\cdot\theta^2$ при $n = 2$, а $\mathrm{D}_\theta T_2 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\theta^2 \approx 0{,}285\cdot\theta^2$, т. е. оценка τ_1^* точнее, чем T_2 (здесь учтено, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$); аналогично, $\mathrm{D}_\theta\tau_1^* = \left(\frac{3\pi}{8} - 1\right)\theta^2 \approx 0{,}178\theta^2 < \mathrm{D}_\theta T_3 \approx 0{,}190\cdot\theta^2$ при $n = 3$. Доказательство того, что оценка τ_1^* при любом n точнее оценки T_n, следует из результата, полученного в задаче 2.64.

2.18. Среднеквадратическая ошибка произвольной оценки T_λ равна $\mathrm{E}_\theta(T_\lambda - \theta_2^2)^2 = \mathrm{E}_\theta(\lambda(S'^2 - \theta_2^2) + (\lambda - 1)\theta_2^2)^2 = \lambda^2\mathrm{D}_\theta(S'^2) + (\lambda-1)^2\theta_2^4 = \varphi(\lambda)\theta_2^4$ (см. решение задачи 2.14, где вычислено $\mathrm{D}_\theta(S'^2)$), $\varphi(\lambda) = \frac{2\lambda^2}{n-1} + (\lambda-1)^2$. График функции $\varphi(\lambda)$ изображен на рис. 7. Поскольку $\varphi(\lambda) < \varphi(1)$ для $\frac{n-3}{n+1} < \lambda < 1$, при этих значениях λ

$$\mathrm{E}_\theta(T_\lambda - \theta_2^2)^2 < \mathrm{E}_\theta(S'^2 - \theta_2^2)^2$$

Для определения k имеем условие $\frac{n-3}{n+1} < \frac{n-1}{n+k} < 1$, которому удовлетворяют лишь значения $k = 0, 1, 2, 3$. Наконец, $\min\limits_\lambda \mathrm{E}_\theta(T_\lambda -$

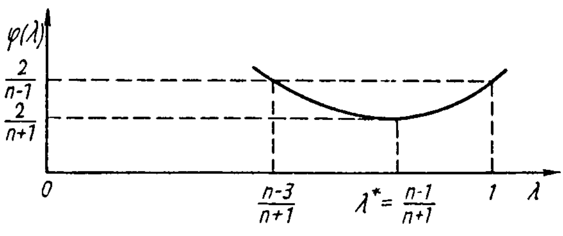

Рис. 7

$-\theta_2^2)^2 = \varphi(\lambda^*)\theta_2^4 = \dfrac{2}{n+1}\theta_2^4$ и, следовательно, оптимальной по критерию минимума среднеквадратической ошибки является оценка $T_{\lambda^*} = = \dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

2.19. Из решения задачи 1.45 имеем

$$\mathbf{E}_0 T_\lambda = \lambda\theta_2^2,\ \mathbf{E}_0 T_\lambda^2 = \lambda^2\frac{n+1}{n-1}\theta_2^4,$$

$$\mathbf{E}_0 T_\lambda^3 = \lambda^3\frac{(n+1)(n+3)}{(n-1)^2}\theta_2^6,\ \mathbf{E}_0 T_\lambda^4 = \lambda^4\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n-1)^3}\theta_2^8.$$

Отсюда мера

$$\delta_1(\theta) \equiv \mathbf{E}_0(T_\lambda - \theta_2^2)^4 = \mathbf{E}_0(T_\lambda^4 - 4T_\lambda^3\theta_2^2 + 6T_\lambda^2\theta_2^4 - 4T_\lambda\theta_2^6 + \theta_2^8) = \psi(\lambda)\theta_2^8,$$

где

$$\psi(\lambda) = \lambda^4\frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{(n-1)^3} - 4\lambda^3\frac{(n+1)(n+3)}{(n-1)^2} + 6\lambda^2\frac{n+1}{n-1} - 4\lambda + 1.$$

Уравнение $\psi'(\lambda) = 0$ с помощью подстановки $\lambda = \dfrac{n-1}{n+5}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ приводится к виду

$$x^3 + 3p_n x + 2q_n = 0,\ p_n = \frac{2n^2}{n+3},\ q_n = -\frac{8n^3}{(n+1)(n+3)}.$$

Поскольку дискриминант $D_n = p_n^3 + q_n^2 > 0$, это уравнение имеет единственный действительный корень

$$x_n = \sqrt[3]{-q_n + \sqrt{D_n}} + \sqrt[3]{-q_n - \sqrt{D_n}}.$$

(*формула Кардана*), для которого при больших n справедливо асимптотическое представление $x_n = \dfrac{8}{3} + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Таким образом, оценка, минимизирующая в классе статистик $\{T_\lambda = \lambda S'^2\}$ меру $\delta_1(\theta)$, имеет вид $T^* = \dfrac{n-1}{n+5}\left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)S'^2$.

Рассмотрим теперь вторую меру

$$\delta_2(\theta) \equiv \mathbf{E}_0|T_\lambda - \theta_2^2| = \chi(\lambda)\theta_2^2,$$

где $\chi(\lambda) = \mathbf{E}\left|\dfrac{\lambda}{n-1}\chi_{n-1}^2 - 1\right|$, $\boldsymbol{L}(\chi_{n-1}^2) = \chi^2(n-1)$.

Если $k_{n-1}(t)$ — плотность распределения $\chi^2(n-1)$, то

$$\chi(\lambda) = \int_0^\infty\left|\frac{\lambda}{n-1}t - 1\right|k_{n-1}(t)dt = \int_0^{\frac{n-1}{\lambda}}\left(1 - \frac{\lambda}{n-1}t\right)k_{n-1}(t)dt + \int_{\frac{n-1}{\lambda}}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n-1}t - 1\right)k_{n-1}(t)dt.$$

Отсюда следует, что уравнение $\chi'(\lambda) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\int_0^{\frac{n-1}{\lambda}} tk_{n-1}(t)dt = \int_{\frac{n-1}{\lambda}}^{\infty} tk_{n-1}(t)dt,$$

которое определяет единственное значение $\lambda^* = \lambda_n^*$, а тем самым и оптимальную оценку T_{λ^*}.

2.20. Поскольку $L_\theta(nS^2/\theta_2^2)=\chi^2(n-1) = \Gamma(2, \frac{n-1}{2})$, из формулы для моментов гамма-распределения имеем

$$\mathrm{E}_\theta S^k = \frac{\theta_2^k}{n^{k/2}}\mathrm{E}_\theta\left(\frac{n}{\theta_2^2}S^2\right)^{\frac{k}{2}} = \frac{\theta_2^k}{n^{k/2}}2^{k/2}\Gamma\left(\frac{n+k-1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

откуда следует несмещенность указанной оценки. При $n = 2$ $S = \frac{1}{2}|X_1 - X_2|$ и поэтому

$$\tau_k^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2^k\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}|X_1 - X_2|^k.$$

Отсюда

$$\mathrm{E}_\theta|X_1 - X_2| - \theta_2 = \frac{2-\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\theta_2.$$

2.21. Утверждение непосредственно следует из того факта, что $L_\theta(T) = \Gamma(0, \lambda n)$, и формулы для моментов гамма-распределения.

2.22. Если $L_\theta(\xi) = \Gamma(0, 1)$, то $L_\theta(\xi/\theta) = \Gamma(1, 1)$ и по задаче 1.34 случайные величины $Y_r = \frac{n-r+1}{\theta}(X_{(r)} - X_{(r-1)})$, $r = 1, ..., n$, независимы и $L_\theta(Y_r) = \Gamma(1, 1)$ для любого r. Отсюда (см. решение задачи 1.34) $X_{(k)} = \theta\sum_{j=1}^{k} Y_j/(n-j+1)$ и поэтому

$$T = T(X) = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k X_{(k)} = \theta\sum_{i=1}^{r}\frac{\Lambda_i}{n-i+1}Y_i, \quad \Lambda_i = \sum_{k=i}^{r}\lambda_k, \quad i = 1, ..., r$$

Из этого представления сразу получаем, что

$$\mathrm{E}_\theta T = \theta\sum_{i=1}^{r}\Lambda_i/(n-i+1), \quad \mathrm{D}_\theta T = \theta^2\sum_{i=1}^{r}\Lambda_i^2/(n-i+1)^2$$

Условие несмещенности эквивалентно условию $\sum_{i=1}^{r}\Lambda_i/(n-i+1) = 1$, при котором надо минимизировать выражение $\sum_{i=1}^{r}\Lambda_i^2/(n-i+1)^2$

Метод неопределенных множителей Лагранжа дает следующий результат: оптимальный выбор Λ_i таков: $\Lambda_i^* = \frac{n-i+1}{r}$, $i = 1, ..., r$ Окончательно получаем, что оптимальная несмещенная оценка θ имеет вид

$$T^* = \frac{\theta}{r}\sum_{i=1}^{r} Y_i = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + \frac{n-r}{r}X_{(r)}.$$

и ее дисперсия $D_0T^* = \frac{\theta^2}{r}$.

2.23. Из решения задачи 1.36 следует, что

$$E_0T = \alpha E_0X_{(n)} + \beta E_0X_{(1)} = \left(\alpha\frac{2n+1}{n+1} + \beta\frac{n+1}{n+1}\right)\theta,$$

$$D_0T = \alpha^2 D_0X_{(n)} + \beta^2 D_0X_{(1)} + 2\alpha\beta\operatorname{cov}(X_{(n)}, X_{(1)}) =$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{2\alpha\beta}{n}\right).$$

Отсюда имеем, что оптимальными являются значения α и β, минимизирующие форму $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta/n$ при условии $\alpha(2n+1)/(n+1) + \beta(n+2)/(n+1) = 1$. Решение этой экстремальной задачи (например, методом неопределенных множителей Лагранжа) имеет вид $\alpha^* = \frac{2(n+1)}{5n+4}$, $\beta^* = \frac{n+1}{5n+4}$. Таким образом, оптимальной несмещенной оценкой θ в рассматриваемом классе оценок является $T^* = \frac{n+1}{5n+4}(X_{(1)} + 2X_{(n)})$ и ее дисперсия $D_0T^* = \frac{\theta^2}{(n+2)(5n+4)}$.

2.24. Несмещенность указанных оценок непосредственно следует из задачи 1.36. Далее, $D_0T_1 = \frac{\theta^2}{n(n+2)} < D_0T_2 = \frac{n}{n+2}\theta^2$, т. е. оценка T_1 точнее. Более того, $D_0T_1 \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. оценка T_1 состоятельна. Оценка же T_2 не обладает этим свойством. Действительно, так как

$$P_0(X_{(1)} \leqslant t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^n,\ 0 \leqslant t \leqslant \theta,$$

то

$$P_0(|T_2 - \theta| \leqslant \varepsilon) = P_0\left(\frac{\theta-\varepsilon}{n+1} \leqslant X_{(1)} \leqslant \frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{\theta-\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n - \left(1 - \frac{\theta+\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-(\theta-\varepsilon)/\theta} - e^{-(\theta+\varepsilon)/\theta} < 1.$$

2.25. Из формул задачи 1.36 непосредственно следует несмещенность указанных оценок и следующие выражения для их дисперсий:

$$D_0T_1 = \frac{1}{4}(D_0X_{(1)} + D_0X_{(n)} + 2\operatorname{cov}(X_{(1)}, X_{(n)})) = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{2(n+1)(n+2)},$$

$$D_0T_2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2(D_0X_{(1)} + D_0X_{(n)} - 2\operatorname{cov}(X_{(1)}, X_{(n)})) =$$

$$= \frac{2(\theta_2-\theta_1)^2}{(n-1)(n+2)}.$$

При $n \to \infty$ эти дисперсии стремятся к нулю, т. е. обе оценки состоятельны.

2.26. Из формул, приведенных в решении задачи 1.37, непосредственно следует несмещенность указанной оценки и тот факт, что $D_0T \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. ее состоятельность.

2.27. В данном случае теоретическое среднее совпадает с θ, поэтому результат следует из решения задачи 2.1 п. *б*).

2.28. Согласно свойству среднего арифметического для распределения Коши $L_0(\bar{X}) = K(0)$, т. е. распределение статистики $\bar{X}$ не зависит от n и поэтому величина $\mathbf{P}_0(|\bar{X} - 0| \geqslant \varepsilon)$ одна и та же для всех n.

2.29. Из задачи 1.52 следует.

$$\mathbf{E}_0 T_r = p_r,\ \mathbf{D}_0 T_r = \frac{1}{n^2}[\mathbf{E}_0\nu_r(\nu_r - 1) + \mathbf{E}_0\nu_r - (\mathbf{E}_0\nu_r)^2] = \frac{p_r(1-p_r)}{n} \to 0$$

$$\text{при } n \to \infty,$$

что доказывает утверждение п. а). Далее имеем

$$\mathbf{E}_0 H(T_1, \ldots, T_N) = \sum_{k_1 + \ldots + k_N = n} H\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_N}{n}\right)\frac{n!}{k_1! \ldots k_N!} p_1^{k_1} \ldots p_N^{k_N}$$

Здесь при любой функции H правая часть представляет собой многочлен от $p_1, \ldots, p_N$ степени $\leqslant n$, следовательно, несмещенные оценки в данном случае можно строить лишь для многочленов степени $\leqslant n$ от параметров $p_1, \ldots, p_N$.

Наконец, если $H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} c_i\nu_i$, то $\mathbf{E}_0 H = \sum_{i=1}^{N} c_i p_i = \tau(0)$, $\mathbf{D}_0 H = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} c_i^2 p_i - \tau^2(0)\right) \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. H — несмещенная и состоятельная оценка $\tau(0)$.

2.30. Так как $\alpha_1 = \alpha_2(0) = \theta_1\Gamma(\theta_2 + 1)/\Gamma(\theta_2) = \theta_1\theta_2$, $\alpha_2 = \alpha_2(0) = \theta_1^2\Gamma(\theta_2 + 2)/\Gamma(\theta_2) = \theta_1^2\theta_2(\theta_2 + 1)$, откуда $\theta_1 = (\alpha_2 - \alpha_1^2/\alpha_1$, $\theta_2 = \alpha_1^2/(\alpha_2 - \alpha_1^2)$, то искомые оценки имеют вид

$$\tilde{\theta}_1 = (A_{n2} - A_{n1}^2)/A_{n1} = S^2/\bar{X},$$
$$\tilde{\theta}_2 = A_{n1}^2/(A_{n2} - A_{n1}^2) = \bar{X}^2/S^2.$$

Эти статистики представляют собой непрерывные функции от выборочных моментов, поэтому они являются состоятельными оценками соответствующих параметров.

2.31. Здесь $\alpha_1(0) = \mathbf{E}_0\xi = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$, $\alpha_2(0) = \mathbf{E}_0\xi^2 = \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1 + \theta_2)$ и решением уравнений $\alpha_k(0) = A_{nk}$, $k = 1, 2$, являются оценки

$$\tilde{\theta}_{1,2} = A_{n1} \mp \sqrt{A_{n2} - A_{n1}^2 - A_{n1}} = \bar{X} \mp \sqrt{S^2 - \bar{X}}.$$

Для приведенных данных $\tilde{\theta}_1 = 2{,}17 \ldots$, $\tilde{\theta}_2 = 3{,}57 \ldots$.

2.33. Если $D \leqslant k_0$, то условия несмещенности эквивалентны системе уравнений

$$\sum_{k=0}^{D} T(k)f(k;\ D, n) = \tau(D),\ D = 0, 1, \ldots, k_0.$$

Это треугольная система, в которой диагональные коэффициенты $f(D;\ D,\ n) = C_{N-D}^{n-D}/C_N^n \neq 0$. Следовательно, значения $T(0)$, $T(1)$, ..., $T(k_0)$ отсюда определяются однозначно. Для значений же $m > k_0$ полагаем

$$T(m) = \left[\tau(m) - \sum_{k=0}^{k_0} T(k)f(k;\ m, n)\right] \Big/ \left[1 - \sum_{k=0}^{k_0} f(k;\ m, n)\right].$$

что возможно, так как $1 - \sum_{k=0}^{k_0} f(k; m, n) \neq 0$ при $m > k_0$.

Далее, поскольку

$$\sum_{k=0}^{D} kf(k; D, n) = \frac{Dn}{N}$$

(см. формулу для среднего гипергеометрического распределения $H(D, N, n)$ во введении к гл. 1), для случая $\tau(D) = D$ функция T имеет вид $T(k) = kN/n$ при $k = 0, 1, \ldots, k_0$ и

$$T(m) = \left[m - \frac{N}{n}\sum_{k=0}^{k_0} kf(k; m, n)\right] / \left[1 - \sum_{k=0}^{k_0} f(k; m, n)\right]$$

при $m > k_0$.

В частности, если положить $k_0 = n$ (контроль всей партии не предусматривается), то несмещенной оценкой для числа D дефектных изделий является статистика $T(\xi) = \frac{N}{n}\xi$.

2.34. а) Поскольку (см. указание) $\mathbf{E}\gamma(u) = \mathbf{P}(u \in s) = \pi(u)$, из представления $\bar{e}(s, x) = \sum_u \gamma(u)x(u)/\pi(u)$ следует несмещенность оценки Горвица — Томпсона. Далее, так как $\sum_{u \in s} a(u)x(u) = \sum_u \gamma(u)a(u)x(u)$, то условие несмещенности такой оценки означает, что

$$\sum_u \pi(u)a(u)x(u) = \sum_u x(u) \quad \forall x \in R^N.$$

Выбирая, в частности, в качестве x координатные векторы евклидова пространства R^N, получим, что $\pi(u_i)\, a(u_i) = 1$, $i = 1, \ldots, N$. Таким образом, оценка Горвица — Томпсона является единственной линейной несмещенной оценкой для $T(x)$.

б) Так как

$$\bar{e}^2(s, x) = \sum_{u \neq v} \gamma(u)\gamma(v)x(u)x(v)/\pi(u)\pi(v) + \sum_u \gamma(u)x^2(u)/\pi^2(u)$$

и

$$\mathbf{E}\gamma(u)\gamma(v) = \mathbf{P}(u \in s, v \in s) = \pi(u, v), \quad u \neq v,$$

то

$$\mathbf{D}\bar{e}(s, x) = \mathbf{E}\bar{e}^2(s, x) - (\mathbf{E}\bar{e}(s, x))^2 = \sum_{u \neq v} \frac{\pi(u, v)}{\pi(u)\pi(v)} x(u)x(v) + \\ + \sum_u x^2(u)/\pi(u) - \left(\sum_u x(u)\right)^2,$$

что эквивалентно указанной в формулировке задачи формуле.

в) Несмещенность следует из представления

$$\Delta(s, x) = \sum_u \gamma(u)\frac{x^2(u)}{\pi(u)}\left(\frac{1}{\pi(u)} - 1\right) + \\ + \sum_{u \neq v} \gamma(u)\gamma(v)\frac{x(u)x(v)}{\pi(u, v)} \left(\frac{\pi(u, v)}{\pi(u)\pi(v)} - 1\right).$$

г) Указанные формулы являются прямым следствием представлений

$$n(s) = \sum_u \gamma(u),\ n^2(s) = \sum_{u \neq v} \gamma(u)\gamma(v) + \sum_u \gamma(u).$$

2.35. а) Для любого фиксированного элемента u существуют $n(N-1)_{n-1}$ различных выборок, содержащих этот элемент, поэтому

$$\pi(u) = n(N-1)_{n-1}/(N)_n = \frac{n}{N}.$$

б) Формула для $D\bar{x}$ следует из общей формулы для $D\bar{e}(s, x)$ (см. п. б) предыдущей задачи), если учесть, что в данном случае

$$\pi(u, v) = \frac{n(n-1)(N-2)_{n-2}}{(N)_n} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)},\ u \neq v.$$

в) Несмещенность $\sigma^2(s, x)$ следует из представления

$$\hat{\sigma}^2(s, x) = \frac{1}{n}\sum_u \gamma(u)(x(u)-\mu)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{u \neq v}\gamma(u)\gamma(v)(x(u)-\mu)(x(v)-\mu).$$

2.36. Вычислим сначала $E\mu_r$. Используя указание, имеем $E\mu_r = NE\xi_1^{(r)} = NP(\xi_1^{(r)} = 1)$, где, согласно классическому определению вероятности,

$$P(\xi_1^{(r)} = 1) = C_n^r(C_{N-1}^{m-1})^r(C_{N-1}^m)^{n-r}/(C_N^m)^n = C_n^r\left(\frac{m}{N}\right)^r\cdot\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-r}.$$

Окончательно имеем

$$E\mu_r = NC_n^r\left(\frac{m}{N}\right)^r\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-r}$$

Отсюда следует, что среднее любой линейной статистики имеет вид

$$El = N\sum_{r=1}^n l_r C_n^r\left(\frac{m}{N}\right)^r\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-r},$$

т. е. представляет собой многочлен от $\frac{1}{N}$ степени не выше $n-1$. Это означает, что несмещенные оценки в классе L могут существовать лишь для параметрических функций вида $\tau(N) = \sum_{j=1}^k c_j/N^j$ при $k \leqslant n-1$. Пусть $\tau(N)$ — такая произвольная функция. Тогда условие несмещенности означает, что

$$\sum_{r=1}^n l_r C_n^r\left(\frac{m}{N}\right)^r\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-r} = \sum_{j=1}^k c_j/N^{j+1},\ \forall N \geqslant m.$$

Отсюда следует, что коэффициенты l_r искомой оценки однозначно определяются через коэффициенты c_j. То, что l_r имеют указанный в формулировке задачи вид, можно проверить непосредственно, учитывая (см. задачу 1.52 п. б) формулу

$$\sum_{r=0}^n (r)_j C_n^r\left(\frac{m}{N}\right)^r\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-r} = (n)_j\left(\frac{m}{N}\right)^j,\ j = 1, 2, \ldots$$

2.37. Найдем сначала распределение случайной величины η. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i-й элемент не наблюдался ($i=1, \ldots, N$), и пусть $\mu_0(n, m, N) = N - \eta$ — общее число ненаблюдавшихся элементов. Тогда по формуле для вероятности суммы событий [2, с. 109]

$$\mathbf{P}(\mu_0(n, m, N) > 0) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_j \leqslant N} \mathbf{P}(A_{k_1} \ldots A_{k_j}).$$

Во внутренней сумме все слагаемые равны $(C_{N-j}^m)^n/(C_N^m)^n$, а их число равно C_N^j, поэтому

$$\mathbf{P}(\mu_0(n, m, N) > 0) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} C_N^j (C_{N-j}^m)^n/(C_N^m)^n.$$

Далее,

$$\mathbf{P}(\eta = k) = \mathbf{P}(\mu_0(n, m, N) = N - k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{N-k} \leqslant N} \mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_{N-k}} \bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_k}),$$

где $\{j_1, \ldots, j_k\} = \{1, \ldots, N\} \backslash \{i_1, \ldots, i_{N-k}\}$. В последней сумме все слагаемые равны друг другу, а их число равно C_N^k. По теореме умножения вероятностей

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_{N-k}} \bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_{N-k}}) \mathbf{P}(\bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_k} | A_{i_1} \ldots A_{i_{N-k}}).$$

Здесь

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_{N-k}}) = (C_k^m)^n/(C_N^m)^n$$

и

$$\mathbf{P}(\bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_k} | A_{i_1} \ldots A_{i_{N-k}}) = \mathbf{P}(\mu_0(n, m, k) = 0) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (C_{k-j}^m)^n/(C_k^m)^n.$$

Из этих соотношений окончательно получаем, что

$$\mathbf{P}(\eta = k) = C_N^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j (C_j^m)^n/(C_N^m)^n, \quad k = m, m+1, \ldots, \min(m\,n, N).$$

Пусть теперь $N \leqslant mn$, тогда

$$\mathbf{E}\tau^* = \sum_{k=m}^{N} \tau^*(k) \mathbf{P}(\eta = k) = (C_N^m)^{-n} \sum_{k=m}^{N} C_N^k \sum_{j=m}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j (C_j^m)^n \tau(j) =$$

$$= (C_N^m)^{-n} \sum_{j=m}^{N} \tau(j) (C_j^m)^n C_N^j \sum_{r=0}^{N-j} (-1)^r C_{N-j}^r = \tau(N),$$

так как

$$\sum_{r=0}^{N-j} (-1)^r C_{N-j}^r = \begin{cases} 0, & \text{при } j < N, \\ 1 & \text{при } j = N. \end{cases}$$

Если же $N > mn$, то, учитывая свойства функции $f(N)$, можем записать, что

$$\mathbf{E}\tau^* = (C_N^m)^{-n} \sum_{k=0}^{N} C_N^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j f(j).$$

Для этого достаточно убедиться, что $\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j f(j) = 0$ при $k > mn$.

В свою очередь это следует из цепочки равенств

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j (j)_r = (k)_r \sum_{s=0}^{k-r} (-1)^{k-r-s} C_{k-r}^s = 0, \quad r < k.$$

Теперь имеем

$$\mathrm{E}\tau^* = (C_N^m)^{-n}\sum_{j=0}^{N} f(j)C_N^j \sum_{r=0}^{N-j}(-1)^r C_{N-j}^r = (C_N^m)^{-n} f(N) = \tau(N).$$

2.41. Так как для схемы повторных независимых наблюдений распределения векторов X и πX совпадают, то $\mathrm{E}_0 T^* = \mathrm{E}_0 T = \tau$, т. е. T^* — несмещенная оценка $\tau(\theta)$. Пусть теперь $\mathrm{D}_0 T(X) = \delta^2$, тогда и $\mathrm{D}_0 T(\pi X) = \delta^2$, а согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\mathrm{cov}_0(T(\pi_1 X), T(\pi_2 X)) \leqslant \sqrt{\mathrm{D}_0 T(\pi_1 X)\mathrm{D}_0 T(\pi_2 X)} = \delta^2.$$

Отсюда

$$\mathrm{D}_0 T^* = \frac{1}{(n!)^2}\Big[\sum_{\pi}\mathrm{D}_0 T(\pi X) + \sum_{\pi_1 \neq \pi_2}\mathrm{cov}_0(T(\pi_1 X), T(\pi_2 X))\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \delta^2\frac{n! + n!(n!-1)}{(n!)^2} = \delta^2.$$

Таким образом, для любой несмещенной оценки можно указать симметрическую несмещенную оценку, дисперсия которой не превышает дисперсии исходной оценки. Следовательно, оптимальную оценку (когда она существует) надо искать среди симметрических функций наблюдений.

2.42. 1) Рассмотрим статистику $T_\lambda = T^* + \lambda\psi$, которая при любом λ является несмещенной оценкой τ. Тогда, в силу оптимальности T^*,

$$\mathrm{D}_0 T_\lambda = \mathrm{D}_0 T^* + \lambda^2\mathrm{D}_0\psi + 2\lambda\,\mathrm{cov}_0(T^*, \psi) \geqslant \mathrm{D}_0 T^*.$$

Но это возможно при всех λ только лишь, если $\mathrm{cov}_0(T^*, \psi) = 0\ \forall\theta$.

2) Пусть T — произвольная несмещенная оценка τ. Тогда статистика $\psi = T^* - T$ имеет нулевое среднее и на основании предыдущего

$$0 = \mathrm{cov}_0(T^*, T^* - T) = \mathrm{D}_0 T^* - \mathrm{cov}_0(T^*, T).$$

2.43. Для модели $N(\theta, \delta^2)$ функция $f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\delta^2}}$. Отсюда $-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x; \theta) = \frac{1}{\sigma^2}$ и поэтому $i(\theta) = \frac{1}{\delta^2}$. Для модели $N(\mu, \theta^2)$ имеем

$$-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x; \theta) = \frac{3(x-\mu)^2}{\theta^4} - \frac{1}{\theta^2},$$

откуда

$$i(\theta) = \frac{3}{\theta^4}\mathrm{E}_\wedge(X_1 - \mu)^2 - \frac{1}{\theta^2} = \frac{2}{\theta^2}.$$

Для модели $\Gamma(\theta, \lambda)$ функция $f(x; \theta) = \frac{x^{\lambda-1}e^{-x/\theta}}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda}$ и $-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^3} - \frac{\lambda}{\theta^2}$. Отсюда $i(\theta) = \frac{2}{\theta^3}\mathrm{E}_0 X_1 - \frac{\lambda}{\theta^2} = \frac{\lambda}{\theta^2}$. Для модели Коши $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x; \theta) = \frac{2(x-\theta)}{1+(x-\theta)^2}$, поэтому

$$i(\theta) = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\theta)^2}{[1+(x-\theta)^2]^3}dx = \frac{1}{2\pi}\mathrm{arctg}\,x\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Для биномиальной модели $f(x; \theta) = C_k^x \theta^x (1-\theta)^{k-x}$, $-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2} + \frac{k-x}{(1-\theta)^2}$, следовательно,

$$i(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \mathbf{E}_\theta X_1 + \frac{1}{(1-\theta)^2}(k - \mathbf{E}_\theta X_1) = \frac{k}{\theta} + \frac{k}{1-\theta} = \frac{k}{\theta(1-\theta)}.$$

Для пуассоновской модели $f(x; \theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}$, $-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x; \theta) = \frac{x}{\theta^2}$, следовательно,

$$i(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \mathbf{E}_\theta X_1 = \frac{1}{\theta}.$$

Для модели $\overline{B}i(r, \theta)$ функция $f(x; \theta) = C_{r+x-1}^x \theta^x (1-\theta)^r$, $-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(x; \quad \theta) = \frac{x}{\theta^2} + \frac{r}{(1-\theta)^2}$, следовательно,

$$i(\theta) = \frac{r}{\theta(1-\theta)} + \frac{r}{(1-\theta)^2} = \frac{r}{\theta(1-\theta)^2}.$$

2.44. В данном случае

$$\ln f(x; \theta) = \frac{-(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2} - \ln(\theta_2\sqrt{2\pi})$$

и

$$-\mathbf{E}_\theta\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \ln f(X_1; \theta)\right) = \frac{2}{\theta_2^3} \mathbf{E}_\theta(X_1 - \theta_1) = 0.$$

Этот факт с учетом предыдущих результатов приводит к указанной в формулировке задачи формуле.

2.45. Вид матрицы $I(\theta)$ следует из формул

$$\mathbf{E}_\theta\delta(\xi, a_j) = \mathbf{P}_\theta(\xi = a_j) = p_j, \ -\frac{\partial^2 \ln f(\xi, a_i)}{\partial p_i^2} = \frac{\delta(\xi, a_i)}{p_i^2} + \frac{\delta(\xi, a_N)}{p_N^2},$$

$$-\frac{\partial^2 \ln f(\xi, a_i)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\delta(\xi, a_N)}{p_N^2}, \ i \neq j;$$

непосредственно можно проверить, что $I^{-1}(\theta) = \Sigma_{N-1}$, где матрица Σ_{N-1} определена в задаче 1.53.

2.46. Пусть F — экспоненциальная модель. Тогда при $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$

$$U_j(X; \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_j} \ln L(X; \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta_j} \ln f(X_i; \theta) = \frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta_j} T(X) + n\frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_j},$$

где $T(X) = \sum_{i=1}^n B(X_i)$. Отсюда, полагая $a_j(\theta) = \left(n\frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta_j}\right)^{-1}$, $j = 1, \ldots, r$, можем записать, что

$$\sum_{j=1}^r a_j(\theta) U_j(X; \theta) = \frac{r}{n} T(X) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial C(\theta)}{\partial\theta_j} \bigg/ \frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta_j} = \tau^* - \tau(\theta).$$

Обратно, если имеет место представление $\mathbf{a}'(\theta)U(X; \theta) = T_n(X) - \tau(\theta)$ при некоторых $\mathbf{a}(\theta) = (a_1(\theta), \ldots, a_r(\theta))$, $T_n(X)$ и $\tau(\theta)$, то, в частности,

$$\sum_{j=1}^r a_j(\theta) \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial\theta_j} = T_1(x) - \tau(\theta).$$

Отсюда следует, что функция $f(x;\theta)$ имеет указанный вид. Чтобы получить формулу для дисперсии $D_\theta\tau^*$, заметим, что

$$\frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_j}=\int\tau^*(x)\frac{\partial\ln L(x;\theta)}{\partial\theta_j}L(x;\theta)\,dx=E_\theta(\tau^*(X)U_j(X;\theta))=$$
$$=\mathrm{cov}_\theta(\tau^*(X),\ U_j(X;\theta)),$$

так как $E_\theta U_j(X;\theta)=0\ \forall\,\theta$. Отсюда

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_j}\Big/\frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta_j}=\mathrm{cov}_\theta(\tau^*,\ a'(\theta)U(X;\theta))=$$
$$=\mathrm{cov}_\theta(\tau^*,\tau^*-\tau(\theta))=D_\theta\tau^*.$$

2.47. Так как дисперсия эффективной оценки совпадает с границей Рао—Крамера, то из предыдущей задачи имеем соотношение $\frac{\tau'(\theta)}{A'(\theta)}=$ $=\frac{[\tau'(\theta)]^2}{i(\theta)}$, откуда следует указанное выражение для $i(\theta)$. Далее,

$$i(\theta)=-E_\theta\frac{\partial^2\ln f(\xi;\theta)}{\partial\theta^2}=-A''(\theta)E_\theta B(\xi)-C''(\theta)=\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)}A''(\theta)-C''(\theta),$$

т. е. $E_\theta B(\xi)=-C'(\theta)/A'(\theta)$.

2.48. Проверка состоит в прямом применении результатов задачи 2.46. Например, для модели $\overline{Bi}(r,\theta)$

$$f(x;\theta)=\exp\{x\ln\theta+r\ln(1-\theta)+\ln C^x_{r+x-1}\},$$

т. е. $A(\theta)=\ln\theta$, $B(x)=x$, $C(\theta)=r\ln(1-\theta)$. Следовательно,

$$\tau(\theta)=-C'(\theta)/A'(\theta)=r\theta/(1-\theta),\ \tau^*=\bar{X},\ D_\theta\tau^*=\frac{\tau'(\theta)}{nA'(\theta)}=\frac{r\theta}{n(1-\theta)^2}.$$

2.49. В рассматриваемом случае $-\frac{\partial^2\ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}=2f(x;\theta)$, откуда

$$i(\theta)=2\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x;\theta)dx=2\int_0^{\infty}\frac{t\,dt}{(1+t)^4}=\frac{1}{3}.$$

Далее,

$$D_\theta\xi=E_\theta(\xi-\theta)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\theta)^2f(x;\theta)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x}(1+e^{-x})^{-2}dx=\frac{\pi^2}{3}.$$

Отсюда

$$D_\theta\bar{X}=\frac{\pi^2}{3n}>\frac{1}{ni(\theta)}=\frac{3}{n}.$$

2.50. Утверждение следует из равенства

$$\frac{1}{L}\left[\frac{2\theta\sigma^2}{n}\frac{\partial L}{\partial\theta}+\frac{\sigma^4}{n^2}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}\right]=\bar{x}^2-\frac{\sigma^2}{n}-\theta^2$$

и критерия Бхаттачария.

2.51. Из задачи 2.21 следует, что $E_\theta T^*=\theta^2$, $D_\theta T^*=\frac{2(2\lambda n+3)}{\lambda n(\lambda n+1)}\theta^4$. Нижняя же граница Рао—Крамера для функции $\tau(\theta)=\theta^2$ равна (см. задачу 2.43) $\frac{4}{\lambda n}\theta^4$, что меньше $D_\theta T^*$, следовательно, T^* не является эффективной оценкой $\tau(\theta)$. Оптимальность T^* следует из равенства

$$\frac{1}{L}\left[\frac{2\theta^3}{\lambda n}\frac{\partial L}{\partial\theta}+\frac{\theta^4}{\lambda n(\lambda n+1)}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^4}\right]=\frac{n}{\lambda(\lambda n+1)}\bar{x}^2-\theta^2$$

и критерия Бхаттачария.

2.52. Оптимальность указанных оценок следует из равенств

$$\frac{\theta_2^2}{n}\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=\bar{x}-\theta_1,$$

$$\frac{1}{L}\left(\frac{\theta_2^3}{n-1}\frac{\partial L}{\partial\theta_2}-\frac{\theta_2^4}{n(n-1)}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_1^2}\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-\theta_2^2$$

и критерия Бхаттачария. Информационная матрица модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$ вычислена в задаче 2.44., откуда получаем, что граница Рао—Крамера для функции $\tau_1(\theta)=\theta_1$ равна θ_2^2/n, что совпадает с $\mathbf{D}_\theta\bar{X}$, т. е. $\bar{X}$ — эффективная оценка $\tau_1(\theta)$. Для функции же $\tau_2(\theta)=\theta_2^2$ эта граница равна $2\theta_2^4/n$, что меньше $\mathbf{D}_\theta(S'^2)=2\theta_2^4/(n-1)$ (см. решение задачи 2.14), т. е. S'^2 не является эффективной оценкой $\tau_2(\theta)$.

2.53. На основании предыдущей задачи наилучшей оценкой для среднего является выборочное среднее объединенной выборки, т. е. статистика $\bar{X}=\frac{1}{n}(n_1\bar{X}_1+n_2\bar{X}_2)$, где $n=n_1+n_2$; при этом

$$\mathbf{D}_\theta\bar{X}=\frac{\theta_2^2}{n}<\min(\mathbf{D}_\theta\bar{X}_1, \mathbf{D}_\theta\bar{X}_2)=\theta_2^2/\max(n_1, n_2).$$

Аналогично, наилучшей оценкой для дисперсии, учитывающей всю информацию, является статистика

$$S'^2=\frac{n}{n-1}(A_{n2}-\bar{X}^2).$$

Но $nA_{n2}=n_1A_{n_12}^{(1)}+n_2A_{n_22}^{(2)}$, где $A_{n_i2}^{(i)}$ — выборочный момент второго порядка i-й выборки, $i=1, 2$. Из формулы

$$S_i'^2=\frac{n_i}{n_i-1}(A_{n_i2}^{(i)}-\bar{X}_i^2)$$

имеем $n_iA_{n_i2}^{(i)}=(n_i-1)S_i'^2+n_i\bar{X}_i^2$. Отсюда окончательно находим, что

$$S'^2=\frac{1}{n-1}((n_1-1)S_1'^2+(n_2-1)S_2'^2+n_1\bar{X}_1^2+n_2\bar{X}_2^2-n\bar{X}^2).$$

При этом (см. задачу 2.14)

$$\mathbf{D}_\theta(S'^2)=\frac{2}{n-1}\theta_2^4<\min(\mathbf{D}_\theta(S_1'^2), \mathbf{D}_\theta(S_2'^2))=\frac{2\theta_2^4}{\max(n_1, n_2)-1}.$$

2.54. 1) Пусть λ известно. Рассматриваемая модель является экспоненциальной, для которой (см. задачу 2.46) $B(x)=x$, $A(\theta)=-\frac{\lambda}{2\theta^2}$, $C(\theta)=\frac{\lambda}{\theta}$, где $\theta=\mu$. Следовательно, в данном случае эффективная оценка $\tau^*=\bar{X}$, а соответствующая параметрическая функция $\tau(\theta)=\mu$. При этом $\mathrm{D}\tau^*=\frac{1}{n}\mathrm{D}X_1=\frac{1}{nA'(\theta)}=\frac{\mu^3}{n\lambda}$. Если λ неизвестно, то, вычисляя

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{\lambda n}{\mu^3}(\bar{X} - \mu)$$

и применяя критерий Бхаттачария, получаем утверждение.

2) В данном случае мы имеем экспоненциальную модель с

$$B(x) = \frac{x}{\mu^2} + \frac{1}{x},\ A(\theta) = -\frac{\theta}{2},\ C(\theta) = \frac{\theta}{\mu} + \frac{1}{2}\ln\theta,$$

где $\theta = \lambda$, и согласно решению задачи 2.46 статистика $\tau^* = = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\mu^2} + \frac{1}{X_i}\right)$ есть эффективная оценка для $\tau(\theta) = \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\mu}$. Следовательно, искомая оценка имеет вид $\tau^* - \frac{2}{\mu}$.

2.55. При $\forall c \in R^m$ согласно неравенству Рао—Крамера для скалярных оценок

$$\mathrm{D}_\theta(c'T) \geqslant b'(\theta)I_n^{-1}(\theta)b(\theta),$$

где

$$b(\theta) = \left(c'\frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta_1}, \ldots, c'\frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta_r}\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial \tau_i(\theta)}{\partial \theta_1}, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial \tau_i(\theta)}{\partial \theta_r}\right) B(\theta)c.$$

Таким образом,

$$c'\mathrm{D}_\theta(T)c \geqslant c'B'(\theta)I_n^{-1}(\theta)B(\theta)c$$

или

$$c'[\mathrm{D}_\theta(T) - B'(\theta)I_n^{-1}(\theta)B(\theta)]c \geqslant 0.$$

Это и означает, что матрица $\mathrm{D}_\theta(T) - B'(\theta)I_n^{-1}(\theta)B(\theta)$ является неотрицательно определенной.

2.56. Если для $\tau(\theta)$ существует эффективная оценка, то модель является экспоненциальной (задача 2.46). Следовательно,

$$L(x;\ \theta) = \exp\{A(\theta)T(x) + nC(\theta) + \sum_{i=1}^{n} D(x_i)\},\ T(x) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i),$$

и согласно критерию факторизации $T(X)$ — достаточная статистика.

2.57. Достаточность статистики T_n следует из задач 2.56 и 2.48. Проверим ее полноту, т. е. покажем, что условию $\mathrm{E}_\theta\varphi(T_n) = 0\ \forall \theta \in \in (0, 1)$ удовлетворяет лишь функция φ, для которой $\varphi(l) = 0, l = 0, 1, \ldots, rn$. На основании свойства воспроизводимости $L_\theta(T_n) = Bi(kn, \theta)$, поэтому

$$\mathrm{E}_\theta\varphi(T_n) = \sum_{l=0}^{kn} \varphi(l)C_{kn}^l \theta^l (1-\theta)^{kh-l}$$

и условие полноты эквивалентно условию

$$\sum_{l=0}^{kn} \varphi(l)C_{kn}^l x^l = 0\ \forall x > 0,\ x = \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Но из тождественного равенства нулю многочлена следует равенство нулю всех его коэффициентов, что и требовалось установить. Из полноты статистики T_n следует, что в данном случае несмещенные оценки существуют лишь для таких параметрических функций $\tau(\theta)$, которые имеют вид $E_\theta H(T_n)$, т. е. представляют собой полиномы от θ степени не выше kn. В частности, несмещенной (а следовательно, и оптимальной) оценкой степени θ^j при $j \leqslant kn$ является статистика $(T_n)_j/(kn)_j$ (см. задачу 1.52), а из линейности свойства оптимальности следует, что несмещенная оптимальная оценка полинома $\tau(\theta) = \sum_{j=0}^{r} a_j\theta^j$ при $r \leqslant \leqslant kn$ имеет указанный в формулировке задачи вид.

Этот результат обобщает и усиливает результаты задач 2.5, 2.7 и 2.8.

2.58. Достаточность статистики T_n следует из результатов задач 2.56 и 2.48. Имеем, $\mathcal{L}_\theta(T_n) = \Pi(n\theta)$ и поэтому условие полноты эквивалентно условию $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\frac{(n\theta)^k}{k!} = 0 \; \forall\theta > 0$. Но из тождественного равенства нулю степенного ряда следует равенство нулю всех его коэффициентов. Таким образом, этому условию удовлетворяет лишь функция φ, для которой $\varphi(k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Это означает полноту статистики T_n. Из задачи 2.9 следует, что оптимальной несмещенной оценкой для θ^j является статистика $(T_n)_j/n^j$; отсюда, учитывая линейность свойства оптимальности, получаем последнее утверждение задачи.

2.59. Из предыдущей задачи имеем, что для функции $\tau(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} (\theta(z-1))^j/j!$ оптимальная оценка имеет вид

$$\tau^* = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(T_n)_j(z-1)^j}{j!n^j} = \sum_{j=0}^{T_n} C_{T_n}^j \frac{(z-1)^j}{n^j} = \left(1 + \frac{z-1}{n}\right)^{T_n};$$

для функции $\pi_k(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{k+j}}{k!j!}$ — следующий вид:

$$\pi_k^* = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(T_n)_{k+j}}{k!j!n^{k+j}} = \frac{(T_n)_k}{k!n^k} \sum_{j=0}^{T_n-k} (-1)^j \frac{(T_n-k)_j}{n^j j!} =$$

$$= C_{T_n}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{T_n-k} \frac{1}{n^k};$$

для функции $\tau_r(\theta) = \sum_{k=r}^{\infty} \pi_k(\theta)$ — эта оценка такова:

$$\tau_r^* = \sum_{k=r}^{\infty} \pi_k^* = \begin{cases} \sum_{k=r}^{T_n} C_{T_n}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{T_n-k} \frac{1}{n^k} & \text{при } T_n \geqslant r, \\ 0 & \text{при } T_n < r. \end{cases}$$

2.60. 1) В данном случае $f(x;\theta) = \exp\{A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)\}$ при $A(\theta) = \ln\theta$, $B(x) = x$, $C(\theta) = -\ln f(\theta)$, $D(x) = \ln a(x)$, и утверждение непосредственно следует из результата задачи 2.46.

2) Из вида функции правдоподобия

$$L(\mathbf{x};\theta) = \theta^{T_n(\mathbf{x})} f^{-n}(\theta) \prod_{i=1}^{n} a(x_i)$$

на основании критерия факторизации следует достаточность T_n. Чтобы найти распределение T_n, заметим, что ее производящая функция равна (см. указание)

$$\mathrm{E}_\theta z^{T_n} = \varphi^n(z;\theta) = f^n(z\theta)/f^n(\theta).$$

Выделяя в правой части коэффициент при z^t, получаем указанный результат.

Пусть теперь $\varphi(t)$ — произвольная функция, заданная на множестве $\{nl, nl+1, \ldots\}$, и такая, что $\mathrm{E}_\theta\varphi(T_n) = 0 \ \forall\theta \in \Theta$, т. е.

$$\sum_{t=nl}^{\infty} \varphi(t) b_n(t)\theta^t = 0 \ \forall\theta \in \Theta.$$

Отсюда следует, что $\varphi(t) = 0$ для всех t, для которых $b_n(t) \neq 0$, т. е. $\varphi(t) = 0$ на множестве всех возможных значений статистики T_n. Таким образом, T_n — полная достаточная статистика.

3) На основании предыдущего пункта достаточно проверить, что $\mathrm{E}_\theta\tau_s^* = \theta^s$. Имеем

$$\mathrm{E}_\theta\tau_s^* = \sum_{t=nl+s}^{\infty} \frac{b_n(t-s)}{b_n(t)} \mathrm{P}_\theta(T_n = t) = \sum_{t=nl+s}^{\infty} b_n(t-s)\theta^t/f^n(\theta) =$$

$$= \theta^s \sum_{t=nl}^{\infty} b_n(t)\theta^t/f^n(\theta) = \theta^s,$$

поскольку $\sum\limits_{t=nl}^{\infty} b_n(t)\theta^t = f^n(\theta)$.

4) Используя линейность свойства оптимальности и результат п. 3, находим

$$\tau^* = \sum_{j=r}^{\infty} a_j\tau_j^* = \begin{cases} b_n^{-1}(T_n) \sum\limits_{j=r}^{T_n-nl} a_j b_n(T_n - j) & \text{при } T_n \geqslant nl + r, \\ 0 & \text{при } T_n < nl + r. \end{cases}$$

Наконец, если $T_n \geqslant (n+1)l$, то отсюда в силу указания следует вид оценки f^*.

2.61. Рассматриваемая модель — частный случай модели предыдущей задачи (при $f(\theta) = e^\theta - 1$), поэтому $\tau^* = b_n(T-1)/b_n(T)$, где

$$b_n(k) = \mathrm{coe} f_{\theta^k}(e^\theta - 1)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} C_n^r r^k/k! = \Delta^n 0^k/k!$$

при $k \geqslant n$ и $b_n(k) = 0$ при $k < n$. Отсюда следует сформулированный результат.

2.62. Полагая в задаче 2.60 $f(\theta) = (1-\theta)^{-r}$ и учитывая разложение $f^n(\theta) = (1-\theta)^{-rn} = \sum\limits_{t=0}^{\infty} C_{rn+t-1}^t \theta^t$ (см. задачу 2.11), находим,

$$\tau_1^* = C_{rn+T_n-s-1}^{T_n-s}/C_{rn+T_n-1}^{T_n} = \begin{cases} \prod\limits_{j=0}^{s-1} \dfrac{(T_n)_s}{(T_n+rn-1)_s} & \text{при } T_n \geqslant s, \\ 0 & \text{при } T_n < s \end{cases}$$

(это значительное усиление результата задачи 2.11).

Далее, $\tau_2(\theta) = f^{-1}(\theta)$ и аналогично задаче 2.60 устанавливается, что

$$\tau_2^* = b_{n-1}(T_n)/b_n(T_n) = C_{r(n-1)+T_n-1}^{T_n}/C_{rn+T_n-1}^{T_n} = \prod_{j=1}^{r} \frac{(rn-1)_r}{(T_n+rn-1)_r}.$$

2.63. Из указания к задаче 2.45 следует, что функцию $f(x;\theta)$ можно представить в виде

$$f(x;\theta)=\exp\left\{\sum_{j=1}^{N-1}\theta_j'\delta(x,a_j)+\ln p_N\right\},$$

где $\theta_j'=\ln\frac{p_j}{p_N}$, $j=1,\ldots,N-1$.

Отсюда по критерию для r-параметрического экспоненциального семейства (при $r=N-1$) следует, что $\boldsymbol{T}=(T_1,\ldots,T_{N-1})$, где $T_j=$ $=\sum_{i=1}^{n}\delta(X_i,a_j)=\nu_j$, $j=1,\ldots,N-1$, — минимальная полная достаточная статистика. Следовательно, в данной модели несмещенные оценки существуют лишь для таких параметрических функций, которые имеют вид $\mathbf{E}_0H(\boldsymbol{T})$. Но класс таких функций совпадает с классом полиномов от $p_1,\ldots,p_N$ степени $\leqslant n$ (см. решение задачи 2.29). Из задачи 1.52 п. б) следует, что оптимальной оценкой $\tau(\theta)=p_1^{k_1}\ldots p_N^{k_N}$ при $k_1+\ldots+k_N\leqslant n$ является статистика $\tau^*=(\nu_1)_{k_1}\ldots(\nu_N)_{k_N}/(n)_{k_1+\ldots+k_N}$. Оценки для произвольных полиномов строят с помощью линейных комбинаций этих статистик (на основании линейности свойства оптимальности).

2.64. Модель $N(\theta,\sigma^2)$ является моделью экмпоненциального типа и выборочное среднее $\overline{X}$ является для нее полной достаточной статистикой, поэтому T^* — оптимальная несмещенная оценка функции $\tau(\theta)=\theta^2$ (ср. с задачей 2.50). Аналогично доказывается оптимальность оценок, указанных в задаче 2.16, поскольку T^2 — полная достаточная статистика для модели $N(\mu,\theta^2)$.

2.65. Имеем $\mathbf{E}_0T_1=\mathbf{P}_0(\xi\leqslant x_0)=\tau(\theta)$, т. е. T_1 — несмещенная оценка $\tau(\theta)$. Поскольку в данном случае (см. решение задачи 2.64) полная достаточная статистика есть $\overline{X}$, оптимальная оценка может быть вычислена по формуле

$$\tau^*=\mathbf{E}_0(T_1|\overline{X})=\mathbf{P}_0(X_1-\overline{X}\leqslant x_0-\overline{X}|\overline{X}).$$

Но $X_1-\overline{X}$ и $\overline{X}$ независимы (см. задачу 1.56) и $\boldsymbol{L}_0(X_1-\overline{X})=$ $=N\left(0,\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$, поэтому

$$\tau^*=\mathbf{P}_0(X_1-\overline{X}\leqslant x_0-\overline{X})=\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\frac{x_0-\overline{X}}{\sigma}\right).$$

2.66. Функцию $f(x;\theta)$ можно в данном случае записать в виде

$$f(x;\theta)=\exp\left\{\theta_1'x+\theta_2'x^2+c(\theta_1',\theta_2')\right\},\ \theta_1'=\frac{\theta_1}{\theta_2^2},\ \theta_2'=-\frac{1}{2\theta_2^2}.$$

Согласно критерию для r-параметрического экспоненциального семейства отсюда следует, что $\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\ \sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ — минимальная полная достаточная статистика. Таковой же является и эквивалентная ей пара $(\overline{X},S^2)$, поскольку эти две статистики взаимно однозначно определяют друг друга. Отсюда следует оптимальность указанных в задаче 2.20 оценок.

2.67. Так как $\mathbf{E}_0(S^2)=\frac{n-1}{n}\mu_2=\frac{n-1}{n}\gamma^2\theta^2$ (см. задачу 1.27), $\mathbf{E}_0(\overline{X}^2)=\theta^2+\frac{1}{n}\gamma^2\theta^2=\frac{n+\gamma^2}{n}\theta^2$ (см. задачу 2.13), то $\forall\,\theta\ \mathbf{E}_0\varphi(T)=$ $=0$, т. е. критерий полноты не выполняется.

2.68. Пусть $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ — соответствующие измерения; тогда

X — выборка из распределения $N(\theta_1, \theta_2^2)$ и речь идет об оценивании параметрической функции $\tau(\theta) = \frac{\pi}{4}\theta_1^2$. Используя решение задачи 2.67, находим, что

$$\mathbf{E}_\theta\left(\overline{X}^2 - \frac{1}{n-1}S^2\right) = \theta_1^2 + \frac{1}{n}\theta_2^2 - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\theta_2^2 = \theta_1^2.$$

Отсюда в силу полноты достаточной статистики $T = (\overline{X}, S^2)$ (см. задачу 2.66) следует, что оптимальной несмещенной оценкой $\tau(\theta)$ является статистика $\tau^* = \frac{\pi}{4}\left(\overline{X}^2 - \frac{1}{n-1}S^2\right)$.

2.69. Для любого события A условная $\varphi_A(T) = \mathbf{P}_\theta(T_1 \in A | T)$ и безусловная $\gamma_A = \mathbf{P}_\theta(T_1 \in A)$ вероятности по условию не зависят от параметра θ, при этом $\mathbf{E}_\theta\varphi_A(T) = \gamma_A$, т. е. $\mathbf{E}_\theta g(T) = 0 \;\forall\, \theta$, где $g(T) = \varphi_A(T) - \gamma_A$. Отсюда и из условия полноты статистики T следует, что $\varphi_A(T) \equiv \gamma_A$, т. е. указанные условная и безусловная вероятности совпадают. Но это и означает, что статистики T_1 и T независимы.

2.70. В данном случае $T^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ — полная достаточная статистика (см. решение задачи 2.64) и $T_1 = I(X_1 \leqslant x_0)$ — несмещенная оценка $\tau(0)$, поэтому оптимальная оценка

$$\tau^* = \mathbf{E}_\theta(T_1|T) = \mathbf{P}_\theta\left(\frac{X_1}{T} \leqslant \frac{x_0}{T} \,\Big|\, T\right).$$

Здесь статистика $\eta = X_1/T = Y_1/\sqrt{Y_1^2 + \chi_2^2}$, где $Y_i = X_i/\theta$, $i = 1, 2, 3$, $\chi_2^2 = Y_2^2 + Y_3^2$, имеет распределение, не зависящее от параметра θ (поскольку $\boldsymbol{L}_\theta(Y_i) = N(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$), следовательно, по теореме Басу (см. задачу 2.69), η и T независимы. Итак, $\tau^* = F_\eta\left(\frac{x_0}{T}\right)$, где $F_\eta(u) = \mathbf{P}(\eta \leqslant u)$. Вид функции распределения $F_\eta(u)$ получен в задаче 1.58 для произвольного объема выборки. Полагая $n = 4$, в данном случае имеем: при $0 \leqslant u \leqslant 1$

$$F_\eta(u) = 1 - \frac{1}{2}B\left(1 - u^2;\ 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1+u}{2},$$

при $-1 \leqslant u \leqslant 0$

$$F_\eta(u) = 1 - F_\eta(-u) = \frac{1+u}{2}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{L}(\eta) = R(-1, 1)$ и окончательно получаем, что

$$\tau^* = \begin{cases} 1 & \text{при } x_0 > T, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_0}{T}\right) & \text{при } |x_0| \leqslant T, \\ 0 & \text{при } x_0 < -T. \end{cases}$$

2.71. Введем случайные величины $Y_i = \frac{X_i - \theta_1}{\theta_2}$, $i = 1, \ldots, n$, распределение которых не зависит от $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Тогда

$$\frac{X_i - \overline{X}}{S(\boldsymbol{X})} = \frac{Y_i - \overline{Y}}{S(\boldsymbol{Y})},\ i = 1, \ldots, n,$$

т. е. распределение статистики U не зависит от θ. Поскольку $T = (\overline{X}, S^2(\boldsymbol{X}))$ — полная достаточная статистика для модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$

(задача 2.66), по теореме Басу (см. задачу 2.69) T и U независимы.

2.72. Так как $\mathbf{E}_\theta T_1 = \mathbf{P}_\theta(X_1 \leqslant x_0) = \tau(\theta)$, то T_1 — несмещенная оценка $\tau(\theta)$. Следовательно, оптимальная оценка может быть найдена по формуле (далее $T = (\bar{X}, S^2)$)

$$\tau^* = \mathbf{E}_\theta(T_1|T) = \mathbf{P}_\theta(X_1 \leqslant x_0|T) = \mathbf{P}_\theta(\eta \leqslant u_0|T),$$

где $\eta = \dfrac{X_1 - \bar{X}}{\sqrt{n-1}\,S}$, $u_0 = \dfrac{x_0 - \bar{X}}{\sqrt{n-1}\,S}$. Но на основании решения предыдущей задачи статистики η и T независимы, поэтому $\tau^* = F_\eta(u_0)$. Функция распределения статистики η вычислена в задаче 1.58. Используя этот результат, получаем

$$\tau^* = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2} B\left(1 - u_0^2;\ \dfrac{n-2}{2},\ \dfrac{1}{2}\right), & \text{если } \bar{X} < x_0, \\ \dfrac{1}{2} B\left(1 - u_0^2;\ \dfrac{n-2}{2},\ \dfrac{1}{2}\right), & \text{если } X \geqslant x_0. \end{cases}$$

Для расчетов можно использовать таблицы функции бета-распределения $B(t;\, a,\, b)$.

2.73. Модель $\Gamma(\theta, \lambda)$ является моделью экспоненциального типа и для нее $T = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ — полная достаточная статистика. Следовательно, указанные в задаче 2.21 оценки — оптимальные. Чтобы доказать второе утверждение, достаточно убедиться в том, что не существует функции $H(T)$, удовлетворяющей условию $\mathbf{E}_\theta H(T) = \theta^{-a}\ \forall\, \theta > 0$. Это условие можно записать в виде

$$\int\limits_0^\infty H_1(x) e^{-zx} dx = z^{a-\lambda n}\ \forall\, z > 0,$$

где $z = \dfrac{1}{\theta}$, $H_1(x) = H(x) x^{\lambda n - 1}/\Gamma(\lambda n)$.

Если $m = a - \lambda n + 1$ — целое, то, продифференцировав это тождество по z m раз, получим

$$\int\limits_0^\infty H_1(x) x^m e^{-zx} dx \equiv 0.$$

Этот интеграл есть преобразование Лапласа от $x^m H_1(x)$, поэтому отсюда следует, что $H(x) = 0$ при $x > 0$.

2.74. Так как T — полная достаточная статистика, то достаточно убедиться в несмещенности оценки; τ^* $\mathcal{L}_\theta(T) = \Gamma(\theta, \lambda n)$, поэтому

$$\mathbf{E}_\theta \varphi(tT) = \int\limits_0^\infty \varphi(tx) x^{\lambda n - 1} e^{-x/\theta} dx / (\Gamma(\lambda n)\theta^{\lambda n}) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \varphi(y) y^{\lambda n - 1} e^{-\frac{y}{\theta t}} dy / (\Gamma(\lambda n)(\theta t)^{\lambda n}).$$

Далее,

$$\int\limits_0^1 e^{\frac{-y}{\theta t}} \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\lambda(n-1)-1} \frac{dt}{t^2} = e^{-\frac{y}{\theta}} \left(\frac{\theta}{y}\right)^{\lambda(n-1)} \Gamma(\lambda(n-1)).$$

Отсюда, так как можно менять порядок интегрирования, получаем

$$\mathbf{E}_0\tau^* = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda}\int_0^\infty \varphi(y)y^{\lambda-1}e^{-y/\theta}dy = \mathbf{E}_0\varphi(\xi).$$

В частности, если $a > -\lambda$, то для $\varphi(x) = x^a$ среднее $\mathbf{E}_0\varphi(\xi)$ существует и $\tau(\theta) = \mathbf{E}_0\varphi(\xi) = \dfrac{\Gamma(\lambda + a)}{\Gamma(\lambda)}\theta^a$ Поэтому

$$\tau^* = \frac{\Gamma(\lambda n)\,T^a}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda(n-1))}\int_0^1 t^{\lambda+a-1}(1-t)^{\lambda(n-1)-1}dt = \frac{\Gamma(\lambda n)\,\Gamma(a+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(a+\lambda n)}\,T^a.$$

При $a = 1, 2$ приходим к результатам, полученным в задачах 2.48 и 2.51 соответственно.

2.75. Имеем $\tau(\theta; t) = \mathbf{E}_0 e(\xi - t) = \mathbf{P}_0(\xi \geqslant t)$, поэтому

$$\tau^* = \frac{\Gamma(\lambda n)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(\lambda(n-1))}\int_0^1 e(xT - t)x^{\lambda-1}(1-x)^{\lambda(n-1)-1}dx.$$

Здесь $e(xT - t) = 1 \Leftrightarrow x \geqslant t/T$, поэтому, если $T \leqslant t$, то интеграл равен нулю, а при $T > t$ он выражается через функцию бета-распределения:

$$\int_{t/T}^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\lambda(n-1)-1}dx = B(\lambda, \lambda(n-1))\left(1 - B\left(\frac{t}{T}; \lambda, \lambda(n-1)\right)\right).$$

В частности, при $\lambda = 1$

$$B(x; 1, n-1) = \frac{1}{B(1, n-1)}\int_0^x (1-z)^{n-2}dz = 1 - (1-x)^{n-1},$$

что позволяет получить указанный результат для экспоненциального распределения.

2.76. Записав функцию правдоподобия в виде

$$L(x; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda}{\theta^\lambda}x_i^{\lambda-1}e^{-(x_i/\theta)^\lambda} = \frac{\lambda^n}{\theta^{\lambda n}}e^{-T(x)/\theta^\lambda}\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda-1},$$

согласно критерию факторизации получаем, что T — достаточная статистика. Найдем ее распределение. Заметив, что

$$\mathbf{P}_0(2(\xi/\theta)^\lambda \leqslant x) = \mathbf{P}_0\left(\xi \leqslant \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{1/\lambda}\right) = 1 - e^{-\frac{x}{2}},$$

т. е. $\mathcal{L}_0(2(\xi/\theta)^\lambda) = \chi^2(2)$, находим $\mathcal{L}_0(2T/\theta^\lambda) = \chi^2(2n)$. Отсюда плотность распределения T имеет вид

$$f_T(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)\theta^{\lambda n}}\,e^{-x/\theta^\lambda},\ x \geqslant 0.$$

Условие $\mathbf{E}_0\varphi(T) = 0\ \forall\ \theta > 0$, в данном случае имеет вид

$$\int_0^\infty \varphi(x)x^{n-1}e^{-zx}dx = 0\ \forall\ z > 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x) = 0$, $x > 0$, т. е. статистика T - полная. Теперь достаточно проверить равенство $\mathbf{E}_\theta\tau^* = \tau(\theta)$. Имеем (так как можно менять порядок интегрирования)

$$\mathbf{E}_\theta\tau^* = (n-1)\int_0^1 (1-t)^{n-2}\left[\int_0^\infty \varphi\left((tx)^{1/\lambda}\right) f_T(x)\,dx\right]dt =$$

$$= \frac{\lambda(n-1)}{\Gamma(n)\,\theta^{\lambda n}}\int_0^\infty \varphi(y)\,y^{\lambda n-1}\left[\int_0^1 e^{-\frac{y^\lambda}{\theta^\lambda t}}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{n-2}\frac{dt}{t^2}\right]dy =$$

$$= \frac{\lambda}{\theta^\lambda}\int_0^\infty \varphi(y)\,y^{\lambda-1}e^{-(y/\theta)^\lambda}dy = \mathbf{E}_\theta\varphi(\xi) = \tau(\theta).$$

При $\varphi(x) = x^\lambda$ функция $\tau(\theta) = \theta^\lambda$ и $\tau^* = (n-1)T\int_0^1 t(1-t)^{n-2}dt = T/n$.

2.77. Используя функцию Хевисайда $e(x)$, функцию правдоподобия можно записать в виде

$$L(x;\theta) = \frac{1}{\theta_2^n}\prod_{i=1}^n e(x_i-\theta_1)\exp\left\{-\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\theta_2^n}e(x_{(1)}-\theta_1)\exp\left\{-\frac{n}{\theta_2}(\bar{x}-\theta_1)\right\}.$$

Согласно критерию факторизации отсюда следует требуемое утверждение.

2.78. Как и в задаче 2.77, запишем функцию правдоподобия в виде

$$L(x;\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)\,e(x_{(1)}-a(\theta)).$$

Отсюда видно, что одномерной достаточной статистикой может быть только $X_{(1)}$ и только в том случае, когда $f(x_i;\theta)$ разлагается в произведение двух функций, одна из которых зависит от x_i, а другая — от θ, т. е. если $f(x;\theta) = g(x)/h(\theta)$.

2.79. Достаточность $X_{(n)}$ следует из решения предыдущей задачи. Чтобы проверить полноту, надо сначала найти распределение $X_{(n)}$. Имеем

$$\mathbf{P}_\theta(X_{(n)} \leqslant x) = \mathbf{P}_\theta^n(X_1 \leqslant x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n,\ 0 \leqslant x \leqslant \theta.$$

Отсюда, если

$$\mathbf{E}_\theta\varphi(X_{(n)}) = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta \varphi(x)\,x^{n-1}dx = 0\ \forall\ \theta > 0,$$

то, продиференцировав по θ тождество $\int_0^\theta \varphi(x)\,x^{n-1}dx \equiv 0$, получим, что $\varphi(\theta) = 0$, $\theta > 0$. Это означает полноту $X_{(n)}$. Поскольку T^* — несмещенная оценка θ (см. задачу 2.24), она как функция полной достаточной статистики является оптимальной среди всех несмещенных оценок. Далее находим

$$\mathbf{E}_\theta(T_\lambda-\theta)^2 = \mathbf{E}_\theta[\lambda(T^*-\theta)+(\lambda-1)\theta]^2 =$$
$$= \lambda^2\mathbf{D}_\theta T^* + (\lambda-1)^2\theta^2 = \psi(\lambda)\,\theta^2,$$

где (см. решение задачи 2.24) $\psi(\lambda) = \frac{\lambda^2}{n(n+2)} + (\lambda - 1)^2$. Здесь $\min\limits_\lambda \psi(\lambda) = \psi(\lambda^*) = \frac{1}{(n+1)^2}$ и $\lambda^* = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. Таким образом, для оценки $T_{\lambda^*} = \frac{n+2}{n+1} X_{(n)}$ среднеквадратическая ошибка

$$\frac{\theta^2}{(n+1)^2} < \frac{\theta^2}{n(n+2)} = \mathrm{D}_\theta T^*.$$

2.80. Для модели $R(\theta_1, \theta_2)$ функция правдоподобия может быть записана в виде $L(x; \theta) = e(\theta_2 - x_{(n)}) e(x_{(1)} - \theta_1)/(\theta_2 - \theta_1)^n$, где $e(x)$ — функция Хевисайда, следовательно, $\boldsymbol{T} = (X_{(1)}, X_{(n)})$ — достаточная статистика. Плотность распределения $\boldsymbol{T}$ задана в задаче 1.36. Используя этот результат, получаем, что условие $\mathrm{E}_\theta \varphi(\boldsymbol{T}) = 0 \ \forall\ \theta$ эквивалентно условию

$$\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\int\limits_{x_1}^{\theta_2} \varphi(x_1, x_2)(x_2 - x_1)^{n-2} dx_2 dx_1 = 0 \ \forall\ \theta.$$

Дифференцируя это тождество сначала по θ_1, а затем по θ_2, сводим его к тождеству $\varphi(\theta_1, \theta_2)(\theta_2 - \theta_1)^{n-2} = 0 \ \forall\ \theta$. Отсюда следует, что $\varphi(\theta_1, \theta_2) = 0 \ \forall\ \theta_1 < \theta_2$, т. е. статистика $\mathbf{T}$ — полная. Оценки, построенные в задаче 2.25, представляют собой функции от $\mathbf{T}$, следовательно, они оптимальны. Наконец, поскольку $\mathrm{E}_\theta X_{(1)} = \frac{n\theta_1 + \theta_2}{n+1}$, $\mathrm{E}_\theta X_{(n)} = \frac{\theta_1 + n\theta_2}{n+1}$ (см. задачу 1.36), статистики $(n(X_{(1)} - X_{(n)})/(n-1)$ и $(n(X_{(n)} - X_{(1)})/(n-1)$ являются несмещенными, а следовательно, и оптимальными оценками параметров θ_1 и θ_2 соответственно.

2.81. Записав, как и в предыдущей задаче, функцию правдоподобия в виде $L(\boldsymbol{x}; \theta) = e(x_{(1)} - a(\theta))\, e(b(\theta) - x_{(n)})/(b(\theta) - a(\theta))^n$, убеждаемся в достаточности статистики $\boldsymbol{T}$. Если $a(\theta)\uparrow$, $b(\theta)\downarrow$ при возрастании θ, то

$$\{x_{(1)} \geqslant a(\theta),\ x_{(n)} \leqslant b(\theta)\} \Leftrightarrow \{\theta \leqslant a^{-1}(x_{(1)}),$$
$$\theta \leqslant b^{-1}(x_{(n)})\} \Leftrightarrow \{\theta \leqslant T_1(\boldsymbol{x}) = \min(a^{-1}(x_{(1)}), b^{-1}(x_{(n)}))\},$$

следовательно, функцию правдоподобия можно переписать в виде $L(\boldsymbol{x}; \theta) = e(T_1(\boldsymbol{x}) - \theta)/(b(\theta) - a(\theta))^n$. Это означает, что в рассматриваемом случае существует одномерная достаточная статистика, именно статистика $T_1(\boldsymbol{X}) = \min(a^{-1}(X_{(1)}), b^{-1}(X_{(n)}))$. Аналогично, если $a(\theta)\downarrow$, $b(\theta)\uparrow$ при возрастании θ, то одномерная достаточная статистика существует и имеет вид $T_2(\boldsymbol{X}) = \max(a^{-1}(X_{(1)}), b^{-1}(X_{(n)}))$. Этими двумя случаями исчерпываются ситуации, когда в модели $R(a(\theta), b(\theta))$ существует одномерная достаточная статистика.

В частности, для модели $R(-\theta, \theta)$ статистика

$$T_2(\boldsymbol{X}) = \max(-X_{(1)}, X_{(n)}) = \max(|X_{(1)}|, |X_{(n)}|).$$

2.82. Условие $\mathrm{E}_\theta \varphi(X) = 0 \ \forall\ \theta$ можно записать в виде

$$\varphi(-1)\frac{\theta}{(1-\theta)^2} + \sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x)\theta^x \equiv 0$$

или (см. указание к задаче 2.11) в виде

$$\varphi(0) + \sum_{x=1}^{\infty} [\varphi(x) + x\varphi(-1)]\theta^x \equiv 0.$$

Этому условию удовлетворяют функции φ, для которых $\varphi(0)=0$, $\varphi(x) = -x\varphi(-1)$, $x = 1, 2, \ldots$ Единственной ограниченной функцией такого типа является функция $\varphi(x) = 0$, $x = -1, 0, 1, \ldots$. Таким образом, X — ограниченно полная достаточная статистика, не являющаяся полной.

2.83. Распределение выборочных данных $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ сосредоточено на множестве $L_{N,n}$ векторов $l = (l_1, \ldots, l_n)$ с целыми неотрицательными компонентами, удовлетворяющими условиям

$$l_1 + \ldots + l_n \leqslant N, \; l_1 + 2l_2 + \ldots + nl_n = n.$$

Найдем функцию правдоподобия $\mathbf{P}_N(\mu = l)$, $l \in L_{Nn}$. Общее число возможных исходов эксперимента равно N^n, число же исходов, совместимых с событием $\{\mu = l\}$, можно подсчитать следующим образом. Зафиксируем сначала те $k = l_1 + \ldots + l_n$ элементов совокупности U, которые будут представлены в выборке. Это можно сделать C_N^k различными способами. Для каждого такого подмножества элементов существует одно и то же число способов формирования выборки из элементов данного подмножества с заданным значением l статистики μ и при условии, что все k элементов должны войти в выборку. Обозначим это число $A(l; k, n)$. Тогда общее число благоприятных исходов равно $C_N^k A(l; k, n)$ и согласно классическому определению вероятности

$$\mathbf{P}_N(\mu = l) = g(k; N)\, A(l; k, n),$$

где первый множитель $g(k; N) = C_N^k N^{-n}$ зависит от параметра N, а от выборочных данных зависит лишь через $k = l_1 + \ldots + l_n$-совместимое с событием $\{\mu = l\}$ значение статистики η, а второй множитель $A(l; k, n)$ от параметра N не зависит. Согласно критерию факторизации η — достаточная статистика для N. Для доказательства полноты η требуется проверить, что для всякой функции $\varphi(k)$ из $\mathbf{E}_N\varphi(\eta) = 0 \;\forall N$ следует, что $\varphi(k) = 0$ для всех возможных значений статистики η (при всех $N \geqslant 1$). Распределение η имеет (см. решение задачи 2.37) вид

$$\mathbf{P}_N(\eta = k) = g(k; N) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j j^n, \; k \in K(N) = \{1, 2, \ldots, \min(n, N)\},$$

следовательно, надо проверить, что $\varphi(1) = \varphi(2) = \ldots = \varphi(n) = 0$. Если $N = 1$, то $\mathbf{E}_1\varphi(\eta) = \varphi(1)\, g(1; 1) = \varphi(1) = 0$. Если $N = 2$, то

$$\mathbf{E}_2\varphi(\eta) = \varphi(1)\,\mathbf{P}_2(\eta = 1) + \varphi(2)\,\mathbf{P}_2(\eta = 2) = \varphi(2)\, g(2; 2)(2^n - 2) = 0,$$

т. е. $\varphi(2) = 0$. Аналогично, полагая $N = 3$, находим, что условие $\mathbf{E}_3\varphi(\eta) = 0$ вместе с уже установленными равенствами $\varphi(1) = \varphi(2) = 0$ означает, что $\varphi(3) = 0$ и т. д. Таким образом, последовательно проверяется, что $\varphi(k) = 0$ при всех $k \leqslant n$, т. е. статистика η — полная.

2.84. Согласно критерию эффективности справедливо соотношение

$$a(\theta)\frac{\partial \ln L(x; \theta)}{\partial \theta} = \tau^* - \tau(\theta),$$

откуда следует, что $\widehat{\theta}_n$ удовлетворяет уравнению $\tau(\theta) = \tau^*$. Чтобы доказать ее однозначность, вычислим вторую производную

$$\frac{\partial^2 \ln L(x; \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{a(\theta)\tau'(\theta) + (\tau^* - \tau(\theta))\, a'(\theta)}{a^2(\theta)}.$$

Так как в данном случае речь идет об экспоненциальной модели (см. решение задачи 2.46), то $\mathbf{D}_\theta\tau^* = a(\theta)\tau'(\theta) > 0$ и поэтому

$\left.\dfrac{\partial^2 \ln L(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\widehat{\theta}_n} < 0$, т. е. каждое решение уравнения $\tau(\theta) = \tau^*$ является локальным максимумом функции правдоподобия. Если бы было больше одного максимума, то между последовательными максимумами должен находиться минимум (т. е. в точках минимума, которые также удовлетворяют уравнению $\tau(\theta) = \tau^*$, должно быть $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} > 0$), а так как минимумов нет, то не может быть более одного максимума. Отсюда и из задачи 2.48 получаем следующую таблицу значения $\widehat{\theta}_n$ для некоторых моделей:

Модель	$N(\theta,\sigma^2)$	$N(\mu,\theta^2)$	$\Gamma(\theta,\lambda)$	$\beta(\theta,1)$	$Bi(k,\theta)$	$\Pi(\theta)$	$\overline{Bi}(r,\theta)$
$\widehat{\theta}_n$	$\bar{X}$	T_1	$\bar{X}/\lambda$	T_2	$\bar{X}/k$	$\bar{X}$	$\bar{X}/(r+\bar{X})$

Здесь

$$T_1 = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]^{1/2},\quad T_2 = \left[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right]^{-1}$$

2.85. Для распределения $N(\theta,\sigma^2)$ точка θ является теоретической медианой, поэтому выборочная медиана T_n является в данном случае состоятельной оценкой θ, распределение которой, согласно решению задачи 1.32, удовлетворяет асимптотическому соотношению $L_\theta(T_n) \sim N\left(\theta, \dfrac{\pi\sigma^2}{2n}\right)$, т. е. для нее $\sigma_T^2(\theta) = \pi\sigma^2/2$. В данном случае о.м.п. $\widehat{\theta}_n = \bar{X}$ (см. решение предыдущей задачи) и $L_\theta(\widehat{\theta}_n) = N\left(\theta, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$. Отсюда $\mathrm{eff}(T_n;\theta) = \sigma^2/\sigma_T^2(\theta) = \dfrac{2}{\pi} = 0{,}637\ldots$ Это означает, что при больших n выборочное среднее $\bar{X}$ для выборки объема $n' = 2n/\pi$ оценивает θ с такой же точностью, как и выборочная медиана $X_{([n/2]+1)}$ выборки объема n, независимо от значений θ и σ^2.

2.86. В данном случае

$$L(x;\theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\theta_2)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2\right\} =$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\theta_2)^n}\exp\left\{-\frac{n}{2\theta_2^2}\left(s^2+(\bar{x}-\theta_1)^2\right)\right\},$$

где $s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, поэтому уравнения правдоподобия $\dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta_1} = \dfrac{\partial \ln L}{\partial\theta_2} = 0$ имеют вид

$$\bar{x} = \theta_1,\quad \theta_2^2 = s^2 + (\bar{x}-\theta_1)^2.$$

Они однозначно определяют решение $\theta = (\bar{x}, s)$. Покажем, что в этой точке функция правдоподобия достигает максимума. Для этого перепишем формулу для $L(x;\theta)$ в виде

$$L(x;\theta) = (2\pi e s^2)^{-n/2}\exp\{-n\psi(x;\theta)\},$$

где $\psi(\boldsymbol{x};\theta)=\frac{(\bar{x}-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{\theta_2^2}-1\right)-\ln\frac{s}{\theta_2}$, и будем минимизировать по $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ функцию $\psi(\boldsymbol{x};\theta)$. Используя легко устанавливаемую оценку $\ln a\leqslant a-1\ \forall a>0$, из которой при $a=b^2$ следует также оценка $\ln b\leqslant(b^2-1)/2\ \forall b>0$ (знак равенства имеет место лишь при $b=1$), получаем, что $\psi(\boldsymbol{x};\theta)\geqslant 0$ (знак равенства имеет место только в точке $\theta=(\bar{x},s)$). Следовательно, $L(\boldsymbol{x};\theta)\leqslant(2\pi e s^2)^{-n/2}$ (знак равенства лишь при $\theta=(\bar{x},s)$). Тем самым доказано, что о. м. п. $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n=(\hat\theta_{1n},\hat\theta_{2n})$ существует, единственна и при этом $\hat\theta_n=(\bar{X},S)$.

2.87. Вид оценки $\hat\tau_n$ следует из задачи 2.86 и свойства инвариантности оценок максимального правдоподобия. При $n\to\infty$ $\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{n}(\hat\tau_n-\tau(\theta)))\to\boldsymbol{N}(0,\sigma_\tau^2(\theta))$, где (см. задачу 2.44)

$$\sigma_\tau^2(\theta)=\boldsymbol{b}'(\theta)I^{-1}(\theta)\boldsymbol{b}(\theta)=\left(\frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_1}\right)^2\theta_2^2+\left(\frac{\partial\tau(\theta)}{\partial\theta_2}\right)^2\theta_2^2/2=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x_0-\theta_1)^2}{\theta_2^2}}\left[1+\frac{(x_0-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right].$$

2.88. Вид оценки $\hat\theta_n$ указан в задаче 2.84. Используя этот результат, можем записать, что $\hat\theta_n=\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\tau_1^*$, где τ_1^* — несмещенная оценка θ, полученная в задаче 2.16. Отсюда имеем, что $\mathbf{E}_\theta\hat\theta_n=c_n\theta$, $c_n=\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$. Используя формулу Стирлинга для гамма-функции $\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi z}z^{z-1}e^{-z}$, $z\to\infty$, получим $c_n\to 1$ при $n\to\infty$, таким образом, имеет место асимптотическая несмещенность $\hat\theta_n$.
Далее имеем

$$\boldsymbol{D}_\theta\hat\theta_n=\mathbf{E}_\theta\hat\theta_n^2-(\mathbf{E}_\theta\hat\theta_n)^2=\theta^2(1-c_n^2)\to 0,\ n\to\infty,$$

откуда следует состоятельность $\hat\theta_n$.

Наконец, $\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{n}(\hat\theta_n-\theta))\xrightarrow[n\to\infty]{}\boldsymbol{N}(0,i^{-1}(\theta))=\boldsymbol{N}(0,\theta^2/2)$(см. задачу 2.43).

Рассмотрим теперь оценку $T_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$ (см. задачу 2.15). По центральной предельной теореме, используя решение задачи 2.15, находим, что $\boldsymbol{L}_\theta(T_n)\sim\boldsymbol{N}\left(\theta,\frac{\pi-2}{2n}\theta^2\right)$ при $n\to\infty$. Отсюда ее асимптотическая эффективность

$$\mathrm{eff}(T_n;\theta)=\frac{\theta^2}{2}\Big/\frac{\pi-2}{2}\theta^2=\frac{1}{\pi-2}=0{,}88\ldots$$

2.89. Здесь функция правдоподобия

$$L(\boldsymbol{x};\theta)=\frac{1}{(4\pi\theta)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{4\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\}$$

и уравнение правдоподобия имеет вид

$$\theta^2+2\theta-T_n=0,\quad T_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение $\hat{\theta}_n = \sqrt{1+T_n} - 1$, которое максимизирует $L(x; \theta)$. По закону больших чисел T_n сходится по вероятности при $n \to \infty$ к $E_\theta X_1^2 = D_\theta X_1 + (E_\theta X_1)^2 = 2\theta + \theta^2$, следовательно,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_\theta} \sqrt{1+2\theta+\theta^2} - 1 = \theta.$$

2.90. В данном случае плотность распределения наблюдений

$$f(x; y; \theta) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} + \frac{\rho xy}{\sigma^2(1-\rho^2)} - \frac{1}{2}\ln[\sigma^4(1-\rho^2)]\right\},$$

учитывая указание, можно записать в виде

$$f(x, y; q) = \frac{1}{2\pi}\exp\{q_1(x^2+y^2) + q_2 xy + \tau(q)\},$$

где $\tau(q) = \frac{1}{2}\ln(4q_1^2 - q_2^2)$. Отсюда уравнения правдоподобия для нахождения оценок $\hat{q}_1$ и $\hat{q}_2$ имеет следующий вид:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) = -\frac{\partial\tau(q)}{\partial q_1} = -\frac{4q_1}{4q_1^2-q_2^2},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i = -\frac{\partial\tau(q)}{\partial q_2} = \frac{q_2}{4q_1^2-q_2^2}.$$

Но $\sigma^2 = -\frac{2q_1}{4q_1^2-q_2^2}$, $\rho = -\frac{q_2}{2q_1}$, поэтому из предыдущих уравнений сразу получаем искомые о. м. п.:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+Y_i^2),\ \hat{\rho} = 2\sum_{i=1}^{n}X_iY_i \Big/ \sum_{i=1}^{n}(X_i^2+Y_i^2).$$

2.91. Для данной модели плотность распределения имеет вид

$$f(x, y; \theta) = \frac{1}{2\pi(1-\theta^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\theta^2)}(x^2 - 2\theta xy + y^2)\right\},$$

поэтому

$$\ln L = -n\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(1-\theta^2) - \frac{n}{2(1-\theta^2)}(T_{11} - 2\theta T_{12} + T_{22}),$$

где

$$T_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\ T_{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\ T_{22} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta} = \frac{n\theta}{1-\theta^2} - \frac{n\theta}{(1-\theta^2)^2}(T_{11} - 2\theta T_{12} + T_{22}) + \frac{n}{1-\theta^2}T_{12}$$

и уравнение правдоподобия приводится к виду

$$\theta(1-\theta^2) + (1+\theta^2)T_{12} - \theta(T_{11}+T_{22}) = 0.$$

Это кубическое уравнение, имеющее три корня, два из которых могут быть комплексными. Если все три корня действительны и принадлежат интервалу $(-1, 1)$, то в качестве $\widehat{\theta}_n$ выбирают тот из них, который максимизирует функцию правдоподобия L. С помощью подстановки

$\theta = x + \frac{1}{3}T_{12}$ уравнение правдоподобия приводится к каноническому виду

$$x^3 + 3p_n x + 2q_n = 0,\ 3p_n = T_{11} + T_{22} - \frac{1}{3}T_{12}^2 - 1,$$

$$2q_n = T_{12}\left(\frac{1}{3}(T_{11} + T_{22}) - \frac{2}{27}T_{12}^2 - 1\right).$$

Условием того, что оно имеет единственный действительный корень, является неравенство $p_n^3 + q_n^2 > 0$, (см. решение задачи 2.19), которое очевидно при $p_n > 0$. Так как выборочные моменты сходятся по вероятности при $n \to \infty$ к соответствующим теоретическим моментам (см. решение задачи 1.38), то p_n сходится по вероятности к величине $\frac{1}{3}\left(1 + 1 - \frac{1}{3}\theta^2 - 1\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\theta^2\right) > 0$. Таким образом, при больших значениях n уравнение правдоподобия имеет один действительный корень, который и является оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$.

Асимптотическая дисперсия оценки $\hat{\theta}_n$ равна $1/i_n(\theta)$, где

$$i_n(\theta) = -\mathrm{E}_\theta\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} = -n\mathrm{E}_\theta\left[\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} + \frac{4\theta}{(1-\theta^2)^2}T_{12} - \frac{1+3\theta^2}{(1-\theta^2)^3}(T_{11} - \right.$$

$$\left. - 2\theta T_{12} + T_{22})\right] = -n\left[\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} + \frac{4\theta^2}{(1-\theta^2)^2} - \frac{1+3\theta^2}{(1-\theta^2)^3}(2 - 2\theta^2)\right] =$$

$$= n\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2}.$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$L_\theta(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)) \to N\left(0, \frac{(1-\theta^2)^2}{1+\theta^2}\right).$$

2.92. По центральной предельной теореме статистика T_n асимптотически нормальна с центром в θ и асимптотической дисперсией $\frac{1}{n}\mathrm{D}_\theta(X_1Y_1) = \frac{1}{n}[\mathrm{E}_\theta(X_1^2Y_1^2) - \theta^2]$, поэтому задача сводится к вычислению смешанного момента $\mathrm{E}_\theta(X_1^2Y_1^2)$. Так как в данном случае характеристическая функция

$$\varphi(t, t_2) = \mathrm{E}_\theta e^{i(t_1X_1 + t_2Y_1)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2 + 2\theta t_1t_2 + t_2^2\right\},$$

то

$$\mathrm{E}_\theta(X_1^2Y_1^2) = \frac{\partial^4\varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1^2\partial t_2^2}\Bigg|_{t_1=t_2=0} = 1 + 2\theta^2.$$

Таким образом, $\mathrm{D}_\theta(X_1Y_1) = 1 + \theta^2$ и поэтому асимптотическая эффективность оценки T_n равна

$$\mathrm{eff}(T_n; \theta) = \left(\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\right)^2.$$

2.93. 1) Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L(x; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \left[(2\pi)^k\left|\Sigma\right|\right]^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)'\Sigma^{-1}(x_i - \mu)\right\}.$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})'\Sigma^{-1}(x_i-\bar{x})+$$
$$+n(\bar{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu).$$

Использовав легко проверяемое равенство $y'By=\mathrm{tr}(BY)$, где $Y=yy'$, и линейность оператора tr, получим

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})'\Sigma^{-1}(x_i-\bar{x})=n\,\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\,\widehat{\Sigma}(x)\right).$$

Из этих соотношений следует приведенная в указании к задаче формула, из которой следует, что максимизация по θ функции $L(x;\,\theta)$ эквивалентна минимизации по μ и Σ функции

$$\psi\left(x;\,\mu,\,\Sigma\right)=(\bar{x}-\mu)'\,\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu)+\left[\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\,\widehat{\Sigma}(x)\right)-k-\right.$$
$$\left.-\ln\left|\Sigma^{-1}\,\widehat{\Sigma}(x)\right|\right].$$

Обозначим через $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ корни характеристического уравнения $\left|\Sigma^{-1}\widehat{\Sigma}(x)-\lambda\mathbf{E}_k\right|=0$ или, что то же, уравнения $\left|\widehat{\Sigma}(x)-\lambda\Sigma\right|=0$. Тогда выражение в квадратных скобках равно $\lambda_1+\ldots+\lambda_k-k-$ $-\ln(\lambda_1\ldots\lambda_k)$ и можно записать

$$\psi\left(x;\,\mu,\,\Sigma\right)=(\bar{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu)+\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i-1-\ln\lambda_i).$$

Поскольку Σ^{-1} положительно определена и $\lambda-1-\ln\lambda\geqslant 0$, $\forall\lambda>0$, из последнего представления получаем $\psi\left(x;\,\mu,\,\Sigma\right)\geqslant 0$, причем равенство нулю имеет место только при $\mu=\bar{x}$ и $\lambda_1=\ldots=\lambda_k=1$, т. е. когда $\Sigma=\widehat{\Sigma}(x)$.

2) Согласно задаче 2.4, несмещенной оценкой σ_{ij} является статистика $\frac{n}{n-1}S_{ij}$, следовательно, $\mathbf{E}\left(\frac{n}{n-1}\widehat{\Sigma}\right)=\Sigma$.

3) Чтобы получить указанное выражение для $\max\limits_{\theta}L(x,\,\theta)$, достаточно учесть, что $\mathrm{tr}\left(\widehat{\Sigma}^{-1}(x)\,\widehat{\Sigma}(x)\right)=\mathrm{tr}\,\mathbf{E}_k=k$.

2.94. Моменты $\mathbf{E}_\theta(X_1^k)$ можно вычислить следующим образом. Пусть $\varphi(t)=\mathbf{E}_\theta e^{itY_1}=\exp\left\{it\theta_1-\frac{t^2}{2}\theta_2^2\right\}$; тогда

$$\mathbf{E}_\theta(X_1^k)=\mathbf{E}_\theta e^{kY_1}=\varphi\left(\frac{k}{i}\right)=\exp\left\{k\theta_1+\frac{k^2}{2}\theta_2^2\right\}.$$

Отсюда

$$\tau_1(\theta)=\mathbf{E}_\theta X_1=\exp\{\theta_1+\theta_2^2/2\},$$
$$\tau_2(\theta)=\mathbf{D}_\theta X_1=\mathbf{E}_\theta X_1^2-(\mathbf{E}_\theta X_1)^2=\tau_1^2(\theta)(e^{\theta_2^2}-1).$$

Поскольку о. м. п. $(\hat{\theta}_{1n},\,\hat{\theta}_{2n}^2)=(\bar{Y},\,S^2(Y))$, то согласно свойству инвариантности оценок максимального правдоподобия

$$\hat{\tau}_{1n}=\exp\{\bar{Y}+S^2(Y)/2\},\quad \hat{\tau}_{2n}=\hat{\tau}_{1n}^2(e^{S^2(Y)}-1).$$

Далее, поскольку $\bar{Y}$ и $S^2(Y)$ независимы (см. задачу 1.56), $\mathrm{E}_0\hat{\tau}_{1n} = \mathrm{E}_0 e^{\bar{Y}} \mathrm{E}_0 e^{S^2(Y)/2}$. Здесь $L_0(\bar{Y}) = N\left(\theta_1, \frac{\theta_2^2}{n}\right)$ и аналогично предыдущему $\mathrm{E}_0 e^{\bar{Y}} = \exp\{\theta_1 + \theta_2^2/(2n)\}$. Далее имеем $L_0(nS^2(Y)/\theta_2^2) = \chi^2(n-1)$ (см., например, решение задачи 1.58), поэтому $\mathrm{E}_0 e^{S^2(Y)/2} = \psi(\theta_2^2/(2in))$, где $\psi(t) = \mathrm{E}e^{it\chi^2_{n-1}} = (1-2it)^{-\frac{n-1}{2}}$ (см. решение задачи 1.39). Отсюда $\mathrm{E}_0 e^{S^2(Y)/2} = \left(1 - \frac{\theta_2^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$. Из этих соотношений окончательно находим

$$\mathrm{E}_0\hat{\tau}_{1n} = \tau_1(\theta)\exp\left\{-\frac{n-1}{2n}\theta_2^2\right\}\left(1 - \frac{\theta_2^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_1(\theta).$$

2.96. Здесь

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\mathbf{x};\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left(\theta^{n\bar{x}} f^{-n}(\theta)\prod_{i=1}^{n} a(x_i)\right) = \frac{n\bar{x}}{\theta} - nf'(\theta)/f(\theta) = \frac{n}{\theta}(\bar{x} - \mu(\theta)),$$

где $\mu(\theta) = \theta f'(\theta)/f(\theta) = \sum_x x a(x)\theta^x/f(\theta) = \mathrm{E}_0\xi$. Отсюда следует, что уравнение правдоподобия имеет указанный вид. Асимптотическая дисперсия оценки $\widehat{\theta_n}$ равна $(ni(\theta))^{-1}$, где функция информации равна

$$i(\theta) = -\mathrm{E}_0\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta) = \mathrm{E}_0\left(\frac{\xi - \mu(\theta)}{\theta^2} + \frac{\mu'(\theta)}{\theta}\right) = \mu'(\theta)/\theta.$$

В частности, для распределения $\overline{Bi}(r,\theta)$ среднее $\mu(\theta) = \frac{r\theta}{1-\theta}$ и решением уравнения $\mu(\theta) = \bar{X}$ является $\hat{\theta}_n = \bar{X}/(r+\bar{X})$ (что совпадает с результатом, полученным при решении задачи 2.84), а $i(\theta) = \frac{\mu'(\theta)}{\theta} = \frac{r}{\theta(1-\theta)^2}$ (результат, приведенный в задаче 2.43).

2.97. В данном случае $f(\theta) = e^{\theta} - 1$, $\mu(\theta) = \theta/(1 - e^{-\theta})$ и уравнение правдоподобия $\theta = \bar{x}(1 - e^{-\theta})$ точно решить нельзя, поэтому для приближенного вычисления о. м. п. $\hat{\theta}_n$ можно воспользоваться методом накопления. Здесь (см. решение задачи 2.96)

$$U(\mathbf{x};\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\mathbf{x};\theta) = \frac{n}{\theta}(\bar{x} - \mu(\theta)),\quad i(\theta) = \frac{1 - (1+\theta)e^{-\theta}}{\theta(1 - e^{-\theta})^2}$$

и искомые уравнения имеют вид

$$\theta_{k+1} = \theta_k + U(\mathbf{x};\theta_k)/(ni(\theta_k)),\quad k = 0, 1, \ldots$$

2.98. Для записи этих уравнений (см. решение предыдущей задачи) надо знать функцию вклада $U(\theta) = \frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}$ и функцию информации $i_n(\theta) = -\mathrm{E}_0\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}$. В данном случае

$$L(\theta) = \frac{n!}{h_1!\ldots h_N!}\prod_{i=1}^{N} p_i^{h_i}(\theta),\quad U(\theta) = \sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{p_i(\theta)}p_i'(\theta),$$

$$i_n(\theta) = -\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i''(\theta)p_i(\theta) - (p_i'(\theta))^2}{p_i^2(\theta)}\mathrm{E}_0 h_i = n\sum_{i=1}^{N}(p_i'(\theta))^2/p_i(\theta),$$

поскольку $\mathrm{E}_0 h_i = np_i(\theta)$ и $\sum_{i=1}^{N} p_i(\theta) = 1\ \forall\theta$.

2.99. Так как здесь $i(\theta)={}^1/_2$ (задача 2.43), то итерационная процедура имеет вид

$$\theta_{k+1}=\theta_k+\frac{2}{n}U(\theta_k),\ k=0,1,\ldots,\ U(\theta)=2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\theta}{1+(x_i-\theta)^2}.$$

В качестве начального приближения θ_0 можно взять значение выборочной медианы $T_n=X_{([n/2]+1)}$, которая является состоятельной оценкой θ, поскольку теоретическая медиана в данном случае совпадает с θ. Из задачи 1.32 следует, что при $n\to\infty$

$$L_\theta(T_n)\sim N\left(\theta,\frac{1}{4nf^2(\theta;\theta)}\right)=N\left(\theta,\frac{\pi^2}{4n}\right).$$

Следовательно,

$$\mathrm{eff}(T_n;\theta)=\frac{8}{\pi^2}=0{,}8\ldots$$

2.100. Записав функцию правдоподобия в виде $L(\boldsymbol{x};\theta)=e(\theta-x_{(n)})/\theta^n$ (см. решение задачи 2.78), видим, что она монотонно убывает по θ для $\theta\geqslant x_{(n)}$, т. е. принимает наибольшее значение при $\theta=x_{(n)}$. Отсюда следует, что $\hat\theta_n=X_{(n)}$. Используя решение задачи 2.24, находим $\mathbf{E}_\theta\hat\theta_n=\frac{n}{n+1}\theta=\theta-\frac{\theta}{n+1}$, т. е. оценка $\hat\theta_n$ асимптотически несмещена, $\mathbf{D}_\theta\hat\theta_n=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. оценка $\hat\theta_n$ состоятельна. Функция распределения $X_{(n)}$ приведена в решении задачи 2.79. Отсюда имеем, что при $t\geqslant 0$

$$\mathbf{P}_\theta\left(\frac{\theta-\hat\theta_n}{\theta}n\leqslant t\right)=\mathbf{P}_\theta\left(X_{(n)}\geqslant\theta\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)=1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\to 1-e^{-t},$$

т. е. в данном случае распределение $\hat\theta_n$ не является асимптотически нормальным (модель не регулярная).

2.101. Из вида функции правдоподобия $L(\boldsymbol{x};\theta)=e\left(\theta+\frac{1}{2}-x_{(n)}\right)\times e\left(x_{(1)}-\theta+\frac{1}{2}\right)$ следует, что $L(\boldsymbol{x};\theta)=1$ при всех $\theta\in\left[x_{(n)}-\frac{1}{2},\ x_{(1)}+\frac{1}{2}\right]$, следовательно, любое значение θ из этого интервала максимизирует $L(\boldsymbol{x};\theta)$. Произвольная точка $T\in\left[X_{(n)}-\frac{1}{2},\ X_{(1)}+\frac{1}{2}\right]$ может быть записана в виде $T=\alpha\left(X_{(n)}-\frac{1}{2}\right)+(1-\alpha)\left(X_{(1)}+\frac{1}{2}\right)$, $\alpha\in[0,1]$. Отсюда для нахождения несмещенной оценки θ получаем условие

$$\mathbf{E}_\theta T=\frac{1}{2}-\alpha+\alpha\mathbf{E}_\theta X_{(n)}+(1-\alpha)\mathbf{E}_\theta X_{(1)}=\theta\ \forall\theta.$$

Воспользовавшись решением задачи 1.36, получим, что $\alpha=\frac{1}{2}$, $T=\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$ — средняя точка интервала.

2.102. В данном случае плотность $f(x;\theta)=b^{-\alpha}\alpha(x-\theta)^{\alpha-1}\times\exp\{-b^{-\alpha}(x-\theta)^\alpha\}$, $x\geqslant\theta$, поэтому функция правдоподобия имеет вид

$$L(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = b^{-\alpha n}\alpha^n e(x_i-\theta)\prod_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\theta)^{\alpha-1}\exp\{-(\frac{x_i-\theta}{b})^{\alpha}\}.$$

Она монотонно возрастает на интервале $-\infty < \theta \leqslant x_{(1)}$ и равна нулю при $\theta > x_{(1)}$, следовательно, $\theta = x_{(1)}$ — точка ее максимума. Рассматриваемая модель не является регулярной, но о. м. п. $\hat\theta_n = X_{(1)}$ в силу решения задачи 2.26 асимптотически несмещена и состоятельна. Асимптотическое распределение $X_{(1)}$ приведено в решении задачи 1.37 и оно не является нормальным.

2.103. Здесь функция правдоподобия $L(x,\theta) = \left(\frac{2}{\theta}\right)^n e^{-T/\theta}\prod_{i=1}^{n} x_i$, $T = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ и уравнение правдоподобия $\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = 0$ имеет единственное решение $\hat\theta_n = T/n$, максимизирующее $L(x;\theta)$. Данная модель является частным случаем модели Вейбулла с неизвестным параметром масштаба (см. задачу 2.76), поэтому о. м. п. $\hat\theta_n$ совпадает с полной достаточной статистикой и является, в частности, несмещенной оптимальной оценкой θ.

2.104. Вид о. м. п. $\hat\tau_n$ следует из решения задачи 2.84 и свойства инвариантности оценок максимального правдоподобия. Из решения задачи 2.21 имеем, что $\hat\tau_n = \frac{\lambda n}{\lambda n - 1}\tau_1^*$, где $\tau_1^* = \frac{\lambda n - 1}{T}$ — несмещенная оценка θ^{-1}. Отсюда имеем

$$\mathbf{E}_\theta\hat\tau_n = \frac{\lambda n}{\lambda n - 1}\theta^{-1} = \theta^{-1} + \frac{1}{(\lambda n - 1)\theta},$$

т. е. $\hat\tau_n$ — асимптотически несмещенная оценка.
Далее получаем

$$\mathrm{D}_\theta\hat\tau_n = \left(\frac{\lambda n}{\lambda n - 1}\right)^2 \mathrm{D}_\theta\tau_1^* = \left(\frac{\lambda n}{\lambda n - 1}\right)^2 [(\lambda n - 1)^2\mathbf{E}_\theta T^{-2} - \theta^{-2}] =$$

$$= \frac{(\lambda n)^2}{(\lambda n - 1)^2(\lambda n - 2)}\theta^{-2} \sim \frac{\theta^{-2}}{\lambda n} = \frac{(\tau'(\theta))^2}{n i(\theta)} \text{ (см. задачу 2.43).}$$

Отсюда следует состоятельность $\hat\tau_n$ и тот факт, что $L_\theta(\hat\tau_n) \sim N\left(\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\lambda n\theta^2}\right)$.

2.105. В данном случае максимизация функции правдоподобия сводится к минимизации суммы $\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| = \sum_{i=1}^{n}|x_{(i)} - \theta|$, откуда следует, что $\hat\theta_n$ совпадает с выборочной медианой. Здесь нельзя воспользоваться теоремами об асимптотической нормальности о. м. п. или выборочных квантилей, так как плотность $f(x;\theta)$ в точке θ не дифференцируема. Тем не менее, справедлив следующий результат: $L_\theta(\hat\theta_n) \sim N\left(\theta, \frac{1}{n}\right)$, имеющий такой же вид, как и в задаче 1.32.

2.106. Найдем предельный закон распределения оценки T_n при $n \to \infty$. Имеем

$$\mathbf{P}_\theta(\sqrt{n}(T_n - \theta) \leqslant x) = p_n\mathbf{P}_\theta(\sqrt{n}(\bar X - \theta) \leqslant x) + (1 - p_n)\mathbf{P}_\theta(\sqrt{n}(b\bar X - \theta) \leqslant x),$$

где

$$p_n = \mathbf{P}_\theta(|\bar X| \geqslant a_n) = \Phi(\sqrt{n}(\theta - a_n)) + \Phi(-\sqrt{n}(\theta + a_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 \text{ при } |\theta| > 0, \\ 0 \text{ при } \theta = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$L_\theta(\sqrt{n}(T_n - \theta)) \to \begin{cases} N(0, 1) & |\theta| > 0, \\ N(0, b^2) \text{ при } & \theta = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\mathrm{eff}(T_n; \theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\theta| > 0, \\ b^{-2} & \text{при } \theta = 0, \end{cases}$$

т. е. $\mathrm{eff}(T_n; \theta) \geqslant 1$ при $|b| < 1$; строгое неравенство имеет место в точке $\theta = 0$, которая является, следовательно, точкой сверхэффективности.

2.107. Для модели $R(0, \theta)$ (см. решение задачи 2.100) $\hat{\theta}_n = X_{(n)}$ и $\mathrm{D}_\theta \hat{\theta}_n = O(n^{-2})$. Для модели Вейбулла (см. решения задач 2.102 и 1.37) при $0 < \alpha \leqslant 1$ о. м. п. $\hat{\theta}_n = X_{(1)}^1$ и $\mathrm{D}_0 \hat{\theta}_n = O(n^{-2/\alpha})$, т. е. в данном случае в зависимости от значения α дисперсия о. м. п. может иметь сколь угодно высокий порядок малости.

2.108. Здесь (см. решение задачи 2.84) $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ и согласно инвариантности $\hat{\tau}_n = \bar{X}^{-1}$. Но (см. задачу 1.39) $L_\theta(n\bar{X}) = \Pi(n\theta)$, откуда $\mathrm{P}_\theta(\bar{X} = 0) = e^{-n\theta} > 0$. Следовательно, с положительной вероятностью при любом n случайная величина $\bar{X}$ принимает нулевой значение, и поэтому статистика $\hat{\tau}_n$ не имеет конечных моментов. В то же время ее асимптотическая дисперсия равна $[\tau'(\theta)]^2/[ni(\theta)] = (\theta^3 n)^{-1}$ (см. задачу 2.43).

2.109. Асимптотическая дисперсия о. м. п. $\hat{\tau}_n$ не зависит от параметра θ тогда и только тогда, когда функция $\tau(\theta)$ удовлетворяет соотношению $\sigma_\tau^2(\theta) = (\tau'(\theta))^2/i(\theta) \equiv \mathrm{const}$. Отсюда и из задачи 2.43 следует, что для модели $\mathrm{Bi}(k, \theta)$ соответствующее уравнение имеет вид $\tau'(\theta) = c/\sqrt{\theta(1-\theta)}$. Решением его является функция $\tau(\theta) = \arcsin\sqrt{\theta}$ (с точностью до постоянного множителя), для которой $\sigma_\tau^2(\theta) = \frac{1}{4k}$. Аналогично, для модели $\Pi(\theta)$ искомая функция есть решение уравнения $\tau'(\theta) = \frac{c}{\sqrt{\theta}}$, т. е. $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$ и $\sigma_\tau^2(\theta) = \frac{1}{4}$; для моделей $N(\mu, \theta^2)$ и $\Gamma(\theta, \lambda)$ имеем уравнение $\tau'(\theta) = \frac{c}{\theta}$, т. е. $\tau(\theta) = \ln\theta$. Таким образом, используя решение задачи 2.84, имеем следующие, полезные для многих целей аппроксимации:

для модели $Bi(k, \theta)$: $L_\theta(\arcsin\sqrt{\hat{\theta}_n}) \sim N\left(\arcsin\sqrt{\theta}, \frac{1}{4kn}\right)$, $\hat{\theta}_n = \bar{X}/k$;

для модели $\Pi(\theta)$: $L_\theta(\sqrt{\hat{\theta}_n}) \sim N\left(\sqrt{\theta}, \frac{1}{4n}\right)$, $\hat{\theta}_n = \bar{X}$;

для модели $N(\mu, \theta^2)$: $L_\theta(\ln\hat{\theta}_n) \sim N\left(\ln\theta, \frac{1}{2n}\right)$, $\hat{\theta}_n = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right]^{1/2}$;

для модели $\Gamma(\theta, \lambda)$: $L_\theta(\ln\hat{\theta}_n) \sim N\left(\ln\theta, \frac{1}{\lambda n}\right)$, $\hat{\theta}_n = \bar{X}/\lambda$.

2.111. Из решения задачи 2.83 следует, что при заданном $\eta = k$ (числе различных наблюдавшихся в выборке элементов) максимизация по $N \geqslant k$ функции правдоподобия эквивалентна максимизации по N функции $g(k; N) = C_N^k N^{-n}$ или, что эквивалентно, функции

$$f(N) = \sum_{j=0}^{k-1} \ln(N - j) - n\ln N, \quad N \geqslant k.$$

Рассмотрим разность

$$\Delta f(N) = f(N+1) - f(N) = \ln\frac{N+1}{N-k+1} - n\ln\frac{N+1}{N} \equiv$$
$$\equiv [S(N, k) - n]\ln\frac{N+1}{N}$$

Здесь функция $S(N, k)$ монотонно убывает по N при $k > 1$. Действительно, если ввести функцию $\varphi(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{N+2}\right)/\ln\left(1 - \frac{x}{N+1}\right)$, $0 < x < N+1$, то неравенство $S(N, k) > S(N+1, k)$ будет эквивалентно неравенству $\varphi(k) < \varphi(1)$. Функция же $\varphi(x)$ монотонно убывает, так как неравенство $\varphi'(x) < 0$ сводится к неравенству

$$(N+1-x)\ln\left(1 - \frac{x}{N+1}\right) > (N+2-x)\ln\left(1 - \frac{x}{N+2}\right),$$

которое вытекает из того, что функция $\psi(y) = (y-x)\ln\left(1 - \frac{x}{y}\right)$, $y > x$, монотонно убывает $\left(\psi'(y) = \ln\left(1 - \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} < 0\right)$. Таким образом, при заданных значениях n и $k > 1$ неравенства $S(N, k) \leqslant n < S(N-1, k)$ однозначно определяют целое число $N_0 = N_0(k, n)$. При этом $\Delta f(N) > 0$ при $N \leqslant N_0 - 1$, $\Delta f(N_0) \leqslant 0$, $\Delta f(N) < 0$ при $N \geqslant N_0 + 1$. Это означает, что функция $f(N)$ монотонно возрастает при $N \leqslant N_0$ и монотонно убывает при $N \geqslant N_0$, если $S(N_0, k) \neq n$. Если же $S(N_0, k) = n$, то $f(N_0) = f(N_0 + 1)$, а левее N_0 и правее $N_0 + 1$ значения $f(N) < f(N_0)$. Таким образом в любом случае $\max_N f(N) = f(N_0)$, что и требовалось установить. Пусть, наконец, $k = 1$. Тогда $g(1; N) = 1/N^{n-1}$ и значение этого выражения достигает максимума при $N = 1$.

Значение $\hat{N} = \eta$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $S(\eta, \eta) \leqslant n$ (так как $S(\eta - 1, \eta) = \infty$ по определению функции S), которое можно переписать в виде $\ln(\eta + 1) \leqslant n\ln\frac{\eta+1}{\eta}$.

В указанных асимптотических условиях приближенное решение для $\hat{\alpha}$ получим из соотношения

$$-\ln\left(1 - \frac{\eta}{n}\hat{\alpha}\right) \approx n\ln\frac{\hat{N}+1}{\hat{N}} \approx \hat{\alpha}.$$

Отсюда $\frac{\eta}{n} \approx a(\hat{\alpha})$, где $a(\alpha) = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}$, или, обозначая $a^{-1}(t)$ функцию, обратную к $a(\alpha)$, имеем $\hat{\alpha} \approx a^{-1}\left(\frac{\eta}{n}\right)$.

Для произвольного значения m вместо функции $g(k; N)$ получаем функцию $g_m(k; N) = C_N^k (C_N^m)^{-n}$, максимизация которой по N приводит к следующему результату: при $\eta > m$ о.м.п. $\hat{N}_m$ определяется неравенствами

$$S_m(\hat{N}_m, \eta) \leqslant n < S_m(\hat{N}_m - 1, \eta),$$

где

$$S_m(N, k) = \ln\frac{N+1}{N+1-k}\Big/\ln\frac{N+1}{N+1-m} \quad \text{при } N \geqslant k > m,$$
$$S_m(k-1, k) = \infty;$$

если же $\eta = m$, то $\hat{N}_m = m$.

2.112. Если $\mu_2 = k$, то $\hat{N}$ есть значение N, максимизирующее функцию правдоподобия

$$\mathbf{P}_N(\mu_2 = k) = C_{m_1}^k C_{N-m_1}^{m_2-k}/C_N^{m_2} \equiv g(N).$$

Здесь $\dfrac{g(N)}{g(N-1)} = \dfrac{(N-m_1)(N-m_2)}{N(N-m_1-m_2+k)}$, откуда получаем, что неравенства $g(N) \gtreqless g(N-1)$ эквивалентны соответствующим неравенствам $Nk \gtreqless m_1 m_2$. Обозначим $N_0 = \left[\dfrac{m_1 m_2}{k}\right]$, где $[\cdot]$ означает целую часть. Тогда из предыдущего следует, что при $N \leqslant N_0$ функция $g(N)$ возрастает, а при $N \geqslant N_0$ убывает, если число $\dfrac{m_1 m_2}{k}$ не целое, т. е. в этом случае N_0 — точка максимума. Если же $N_0 = \dfrac{m_1 m_2}{k}$, то максимум достигается в двух точках: $N_0 - 1$ и N_0. Таким образом, в любом случае значение оценки $\hat{N}$ совпадает с N_0. В задаче 2.36 было найдено, что (при $n = 2$ и $m_1 = m_2 = m$) единственная несмещенная оценка для $\tau(N) = 1/N$, являющаяся линейной функцией от μ_2, имеет вид μ_2/m^2. Оценка же максимального правдоподобия $\hat{\tau} = 1/\hat{N} = 1\Big/\left[\dfrac{m^2}{\mu_2}\right] = \dfrac{\mu_2}{m^2}\left(1 - \dfrac{\varepsilon\mu_2}{m^2}\right)^{-1}$, где $\varepsilon = \dfrac{m^2}{\mu_2} - \left[\dfrac{m^2}{\mu_2}\right]$, и является, таким образом, смещенной.

2.113. 1) Докажем сначала, что d_n — достаточная статистика и воспользуемся для этого критерием факторизации, т. е. убедимся в том, что для функции правдоподобия $\mathbf{P}_D(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i = 0, 1$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо представление $\mathbf{P}_D(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = g(d_n; D)\, h(\boldsymbol{x})$, $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. По формуле умножения вероятностей можем записать

$$\mathbf{P}_D(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = \mathbf{P}_D(X_1 = x_1)\, \mathbf{P}_D(X_2 = x_2 | X_1 = x_1) \ldots \mathbf{P}_D(X_n = x_n | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Далее имеем

$$\mathbf{P}_D(X_j = x_j | X_1 = x_1, \ldots, X_{j-1} = x_{j-1}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{D - x_1 - \ldots - x_{j-1}}{N-j+1} & \text{при } x_j = 1, \\ 1 - \dfrac{D - x_1 - \ldots - x_{j-1}}{N-j+1} & \text{при } x_j = 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= (D - x_1 - \ldots - x_{j-1})^{x_j}(N - D - j + 1 + x_1 + \ldots + x_{j-1})^{1-x_j}/(N - j + 1).$$

Из этих формул находим

$$\mathbf{P}_D(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = D^{x_1}(D - x_1)^{x_2} \ldots (D - x_1 - \ldots - x_{n-1})^{x_n}(N - D)^{1-x_1} \times \\ \times (N - D - (1 - x_1))^{1-x_2} \ldots (N - D - (n - 1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}))^{1-x_n}/(N)_n.$$

Наконец, воспользовавшись формулой

$$M^{\varepsilon_1}(M - \varepsilon_1)^{\varepsilon_2} \ldots (M - \varepsilon_1 - \ldots - \varepsilon_{n-1})^{\varepsilon_n} = M(M-1) \ldots \left(M - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j + 1\right) = \\ = M!\Big/\left(M - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\right)!,$$

где $\varepsilon_j = 0, 1$, которая легко устанавливается, например, индукцией по n, окончательно получим, что

$$\mathbf{P}_D(X = x) = \frac{D!\,(N-D)!\,(N-n)!}{(D-d_n)!\,(N-D-n+d_n)!\,N!} = C_{N-n}^{D-d_n}/C_N^D.$$

Убедимся теперь, что d_n — полная статистика. Для этого требуется доказать, что если $\mathbf{E}_D\varphi(d_n) = 0$ при $D = 0, 1, ..., N$, то $\varphi(k) = 0$, $k \in \{0, 1, ..., \min(D, n)\}$ при всех возможных D, т. е. при $k = 0, 1, ..., n$. Поскольку $L_D(d_n) = H(D, N, n)$, предыдущее условие имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\min(D,n)} \varphi(k)\, C_D^k C_{N-D}^{n-k}/C_N^n = 0, \quad D = 0, 1, ..., N.$$

Полагая здесь последовательно $D = 0$, $D = 1$ и т. д., последовательно получаем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$ и т. д.

Пусть теперь $\tau(D)$ — подлежащая оцениванию заданная функция параметра D. Тогда оптимальная оценка для нее — это решение уравнения несмещенности

$$\mathbf{E}_D T(d_n) = \tau(D), \quad D = 0, 1, ..., N. \qquad (*)$$

Но при любой функции T левая часть здесь является многочленом от D степени $\leqslant n$, поэтому, если $\tau(D)$ не многочлен степени $\leqslant n$, то уравнение $(*)$ решения не имеет, и, следовательно, для таких функций несмещенных оценок не существует.

Пусть, наконец, $\tau(D)$ — указанный в формулировке многочлен. Проверим, что τ^* удовлетворяет уравнению $(*)$. Имеем

$$\mathbf{E}_D\tau^* = \sum_{k=0}^{n} T(k)\, f(k; D, n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{(N)_j}{(n)_j} \sum_{k=j}^{n} (k)_j f(k; D, n).$$

Здесь

$$\sum_{k=j}^{n} (k)_j f(k; D, n) = \mathbf{E}_D(d_n)_j = (D)_j(n)_j/(N)_j,$$

поэтому

$$\mathbf{E}_D\tau^* = \sum_{j=0}^{n} a_j (D)_j = \tau(D) \ \forall\ D.$$

Следовательно, τ^* как функция полной достаточной статистики является оптимальной оценкой $\tau(D)$.

2) Функция $\tau_1(D)$ является многочленом первой степени, поэтому несмещенная оценка для нее всегда существует и имеет, очевидно, вид $\tau_1^* = Nd_n/n$.

Функция $\tau_2(D) = (N-1)D - (D)_2$ является многочленом второй степени, поэтому для нее несмещенная оценка существует, если объем выборки $n \geqslant 2$. В этом случае из предыдущего находим, что $\tau_2^* = d_n(n - d_n)(N)_2/(n)_2$.

3) Чтобы получить о.м.п. параметра D, надо максимизировать по D величину $g(d_n; D) = C_{N-n}^{D-d_n}/C_N^D$. Но

$$\frac{g(d_n; D+1)}{g(d_n; D)} = \frac{(D+1)(N-n+d_n-D)}{(D+1-d_n)(N-D)},$$

откуда находим, что $g(d_n; D+1) \gtrless g(d_n; D)$ при $D \lessgtr \frac{d_n}{n}(N+1) - 1$.

Следовательно, если число $\frac{d_n}{n}(N+1)$ не целое, то максимум достигается в точке $D_0 = \left[\frac{d_n}{n}(N+1)\right]$. В противном случае максимум достигается в двух точках: D_0 и $D_0 - 1$. Таким образом, в любом случае о.м.п. $\widehat{D}_n = D_0$.

2.114. Функция правдоподобия для j-й выборки имеет вид

$$L_j = L_j(x_j; \theta_{j1}, \theta_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\theta_2)^{n_j}} \exp\left\{-\frac{n_j}{2\theta_2^2}(s_j^2 + (\bar{x}_j - \theta_{j1})^2)\right\}$$

(см. решение задачи 2.86), а поскольку выборки независимы, функция правдоподобия для всех выборок равна

$$L = \prod_{j=1}^{k} L_j = (2\pi e t^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \theta_{j1})^2 - \right.$$
$$\left. - n\left(\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\theta_2^2} - 1\right) - \ln\frac{t}{\theta_2}\right)\right\},$$

где $t^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2$, $n = n_1 + \ldots + n_k$. Отсюда следует, что показатель экспоненты не положителен и обращается в нуль лишь при $\theta_{j1} = \bar{x}_j$, $j = 1, \ldots, k$, $\theta_2 = t$. Тем самым о.м.п. параметров имеют указанный в задаче вид.

Далее имеем (см. решение задачи 2.1)

$$E_\theta\widehat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j E_\theta S_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \frac{n_j - 1}{n_j}\theta_2^2 = \frac{n-k}{n}\theta_2^2,$$

следовательно, несмещенной оценкой θ_2^2 является в данном случае статистика $\frac{n}{n-k}\widehat{\theta}_2^2$.

2.115. Учитывая выбор константы c_γ, имеем

$$\gamma = \mathbf{P}_\theta(\sqrt{n}\,|\bar{X} - \theta|/\theta < c_\gamma) = \mathbf{P}_\theta(\theta(1 - c_\gamma/\sqrt{n}) < \bar{X} < \theta(1 + c_\gamma/\sqrt{n})) =$$
$$= \mathbf{P}_\theta(\bar{X}/(1 + c_\gamma/\sqrt{n}) < \theta < \bar{X}/(1 - c_\gamma/\sqrt{n})).$$

В случае модели с отрицательным параметром исходное равенство принимает вид $\gamma = \mathbf{P}_\theta(\sqrt{n}\,|\bar{X} - \theta|/|\theta| < c_\gamma)$, откуда следует, что искомый интервал $(\bar{X}/(1 - c_\gamma/\sqrt{n}),\ \bar{X}/(1 + c_\gamma/\sqrt{n}))$.

2.116. 1) Здесь $L_\theta(G(X; \theta)) = N(0, 1)$ и, следовательно, $G(X; \theta)$ — центральная статистика. Далее получаем

$$\mathbf{P}_\theta(g_1 < G(X; \theta) < g_2) = \Phi(g_2) - \Phi(g_1) = \gamma$$

и решениями уравнений $G(X; \theta) = g_1, g_2$ являются $T_1 = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_2$, $T_2 = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}g_1$. Тем самым доверительный интервал $\Delta_\gamma(X)$ имеет указанный вид. Его длина $l = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(g_2 - g_1)$, поэтому, чтобы построить наикратчайший интервал, надо минимизировать разность $g_2 - g_1$ при условии $\Phi(g_2) - \Phi(g_1) = \gamma$. Для этого воспользуемся методом Лагранжа нахождения условного экстремума. Составив функцию Лагранжа

$$H(g_1, g_2, \lambda) = g_2 - g_1 + \lambda(\Phi(g_2) - \Phi(g_1) - \gamma)$$

и приравняв все ее частные производные нулю, получим систему уравнений $\Phi'(g_1) = \Phi'(g_2)$, $\Phi(g_2) - \Phi(g_1) = \gamma$. В силу четности функции $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, из первого уравнения получим $g_1 = -g_2$. Учитывая второе уравнение и соотношение $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, получим $2\Phi(g_2) - 1 = \gamma$, откуда $g_2 = c_\gamma$.

2) Длина l доверительного интервала $\Delta_\gamma^*(X)$, доверительный уровень γ и объем выборки n связаны в данном случае соотношением $l = \frac{2\sigma c_\gamma}{\sqrt{n}}$. Отсюда имеем, что при заданных l и γ необходимое число наблюдений $n = n(l, \gamma) = \left[4\frac{\sigma^2 c_\gamma^2}{l^2}\right]$, а при заданных n и l доверительный уровень $\gamma = \gamma(n, l) = 2\Phi\left(\frac{l\sqrt{n}}{2\sigma}\right) - 1$. В частности, $c_{0,99} = 2{,}5758$ и для $l = 0{,}5$ (при $\sigma = 1$) величина $n = 106$, а для $l = 0{,}1$ $n = 2653$.

2.117. Плотность распределения случайной величины T/θ, являющейся в данном случае центральной статистикой, равна

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}_\theta\left(\frac{T}{\theta} \leqslant x\right) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}_\theta\left(\frac{T^2}{\theta^2} \leqslant x^2\right) = 2xk_n(x^2),$$

поэтому

$$\mathbf{P}_\theta(\theta \in \delta_\gamma(X)) = \mathbf{P}_\theta\left(a_1 < \frac{T}{\theta} < a_2\right) = 2\int_{a_1}^{a_2} xk_n(x^2)dx = \gamma.$$

Наикратчайший из рассматриваемых интервалов находится минимизацией отношения a_2/a_1 при условии $\int_{a_1}^{a_2} xk_n(x^2)dx = \frac{\gamma}{2}$. Метод неопределенных множителей Лагранжа приводит в данном случае к уравнениям

$$a_1^2 k_n(a_1^2) = a_2^2 k_n(a_2^2), \quad \int_{a_1^2}^{a_2^2} k_n(x)\,dx = \gamma,$$

которые в обозначениях $a_1^2 = \chi^2_{\alpha_1, n}$, $a_2^2 = \chi^2_{1-\alpha_2, n}$ сводятся к уравнениям

$$\chi^2_{1-\alpha_2, n}/\chi^2_{\alpha_1, n} = \exp\left\{\frac{1}{n}(\chi^2_{1-\alpha_2, n} - \chi^2_{\alpha_1, n})\right\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma.$$

Эти соотношения однозначно определяют α_1^* и α_2^*, а тем самым и $\chi^2_{\alpha_1^*, n}$, $\chi^2_{1-\alpha_2^*, n}$ [1, с. 86, табл. 2.3]. Таким образом, оптимальный интервал имеет вид

$$\delta_\gamma^*(X) = (T_1^*, T_2^*) = (T/\chi_{1-\alpha_2^*, n}, T/\chi_{\alpha_1^*, n}).$$

2.118. Здесь центральная статистика $G(X; \tau) = T^2/\tau$, $\tau = \theta^2$, и утверждения следуют из предыдущей задачи.

2.119. На основании указания имеем $\mathbf{P}_0(\sqrt{n-1}(\bar{X}-\theta_1)/S \leqslant t_{\gamma, n-1}) = \gamma$, откуда следует что нижний γ-доверительный интервал таков: $(\bar{X} - t_{\gamma, n-1}S/\sqrt{n-1} < \theta_1)$. Аналогично, из соотношения $\mathbf{P}_0(\sqrt{n-1}(\bar{X}-\theta_1)/S \geqslant -t_{\gamma, n-1}) = \gamma$ получаем верхний γ-доверительный интервал: $(\theta_1 < \bar{X} + t_{\gamma, n-1}S/\sqrt{n-1})$. Наконец, центральным двусторонним γ-доверительным интервалом является интервал $(\bar{X} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}S/\sqrt{n-1})$. Этот интервал имеет наименьшую длину среди всех γ-доверительных интервалов вида $(\bar{X} - a_1S, \bar{X} + a_2S)$, что доказывается так же, как аналогичное утверждение в задаче 2.116.

2.120. Здесь nS^2/τ — центральная статистика и центральным γ-доверительным интервалом является интервал

$$(nS^2/\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1},\ nS^2/\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}),$$

а нижним и верхним γ-доверительными интервалами — соответственно интервалы $(nS^2/\chi^2_{\gamma, n-1} < \theta_2^2)$ и $(\theta_2^2 \leq nS^2/\chi^2_{1-\gamma, n-1})$.

2.122. Выборочные средние $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ независимы и нормальны $\mathbf{N}(\theta^{(1)}, \sigma_1^2/n)$ и $\mathbf{N}(\theta^{(2)}, \sigma_2^2/n)$ соответственно, поэтому $\mathbf{L}(\bar{X} - \bar{Y}) = \mathbf{N}(\tau, \sigma^2)$. Следовательно, $(\bar{X} - \bar{Y} - \tau)/\sigma$ — центральная статистика для τ; γ-доверительный интервал находится, как и в задаче 2.116 и имеет вид $(\bar{X} - \bar{Y} \pm c_\gamma\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m})$.

2.123. Поскольку $\mathbf{L}\left(\frac{\bar{X} - \theta_1^{(1)}}{\theta_2}\right) = \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, $\mathbf{L}\left(\frac{\bar{Y} - \theta_1^{(2)}}{\theta_2}\right) = \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{m}\right)$, $\mathbf{L}\left(\frac{n}{\theta_2^2}S^2(\mathbf{X})\right) = \chi^2(n-1)$, $\mathbf{L}\left(\frac{m}{\theta_2^2}S^2(\mathbf{Y})\right) = \chi^2(m-1)$, в силу независимости выборок

$$\mathbf{L}\left(\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\theta_2}\right) = \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \text{ или } \mathbf{L}\left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \tau}{\theta_2}\right) = \mathbf{N}(0, 1),$$

$$\mathbf{L}\left(\frac{1}{\theta_2^2}[nS^2(\mathbf{X}) + mS^2(\mathbf{Y})]\right) = \chi^2(m+n-2),$$

при этом случайные величины $\bar{X} - \bar{Y}$ и $nS^2(\mathbf{X}) + mS^2(\mathbf{Y})$ независимы (на основании теоремы Фишера). Отсюда $\mathbf{L}(t_{m+n-2}) = S(m+n-2)$ и, следовательно, t_{m+n-2} — центральная статистика для τ. Соответствующий γ-доверительный интервал строится так же, как и в задаче 2.119, и имеет вид

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}, m+n-2}\left[\frac{m+n}{mn(m+n-2)}(nS^2(\mathbf{X}) + mS^2(\mathbf{Y}))\right]^{1/2}\right).$$

2.125. По теореме Фишера $\mathbf{L}(nS^2(\mathbf{X})/\theta_2^{(1)2}) = \chi^2(n-1)$, $\mathbf{L}(m \times S^2(\mathbf{Y})/\theta_2^{(2)2}) = \chi^2(m-1)$ и $S^2(\mathbf{X})$ и $S^2(\mathbf{Y})$ независимы, следовательно, $\mathbf{L}(F_{n-1, m-1}) = S(n-1, m-1)$. Отсюда получаем, что центральный γ-доверительный интервал для τ имеет вид

$$\left(\frac{n(m-1)}{m(n-1)}\frac{S^2(\mathbf{X})}{S^2(\mathbf{Y})}\Big/F_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1, m-1},\ \frac{n(m-1)}{m(n-1)}\frac{S^2(\mathbf{X})}{S^2(\mathbf{Y})}\Big/F_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1, m-1}\right).$$

2.127. Так как $\mathbf{L}(2n\bar{X}/\theta_1) = \chi^2(2n)$, $\mathbf{L}(2m\bar{Y}/\theta_2) = \chi^2(2m)$, то $\mathbf{L}(\tau\bar{X}/\bar{Y}) = S(2n, 2m)$. Отсюда, как и в предыдущей задаче, получаем, что искомый интервал имеет вид

$$(F_{\frac{1-\gamma}{2}, 2n, 2m}\bar{Y}/\bar{X},\ F_{\frac{1+\gamma}{2}, 2n, 2m}\bar{Y}/\bar{X}).$$

2.128. Так как $P_\theta(X_{(1)} > x) = P_\theta^n(X_1 > x) = e^{-n(x-\theta)}$ при $x \geqslant \theta$, то $P_\theta(\theta \leqslant X_{(1)} \leqslant x + \theta) = 1 - e^{-nx} = \gamma$ при $x = -\frac{1}{n}\ln(1-\gamma)$, *т. е.* $\left(X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln(1-\gamma),\ X_{(1)}\right)$ — искомый интервал.

2.129. Так как $L_\theta(X_i/\theta) = R(0, 1)$, то $L_\theta(X_{(n)}/\theta) = \beta(n, 1)$ (см. задачу 1.35). Отсюда при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$P_\theta((X_{(n)}/\theta)^n \leqslant t) = P_\theta(X_{(n)}/\theta \leqslant t^{1/n}) = n\int_0^{t^{1/n}} x^{n-1}dx = t.$$

Отсюда

$$P_\theta(X_{(n)} \leqslant \theta \leqslant X_{(n)}/\sqrt[n]{1-\gamma}) = P((X_{(n)}/\theta)^n \geqslant 1-\gamma) = \gamma.$$

2.130. Так как $L_\theta(2T/\theta^k) = \chi^2(2n)$, то $P_\theta\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},\,2n} < \frac{2T}{\tau(\theta)} < \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},\,2n}\right) = \gamma$, что эквивалентно утверждению.

2.131. Имеем

$$P_\theta((\theta_1, \tau) \in G_\gamma(X)) = P_\theta(\sqrt{n}\,|\bar{X} - \theta_1|\theta_2^{-1} < c_{\gamma_1},\ \chi^2_{\frac{1-\gamma_2}{2},\,n-1} < nS^2/\theta_2^2 < \chi^2_{\frac{1+\gamma_2}{2},\,n-1}) = P_\theta(\sqrt{n}\,|\bar{X} - \theta_1|\theta_2^{-1} < c_{\gamma_1})P_\theta(\chi^2_{\frac{1-\gamma_2}{2},\,n-1} < nS^2/\theta_2^2 < \chi^2_{\frac{1+\gamma_2}{2},\,n-1}) = (\Phi(c_{\gamma_1}) - \Phi(-c_{\gamma_1}))\left(\frac{1+\gamma_2}{2} - \frac{1-\gamma_2}{2}\right) = \gamma_1\gamma_2 = \gamma.$$

2.132. Согласно задаче 1.59 п. б) квадратичная форма

$$Q = \frac{n}{1-\rho^2}\left[\frac{1}{\sigma_1^2}(\bar{X}_1 - \theta_1)^2 - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}(\bar{X}_1 - \theta_1)(\bar{X}_2 - \theta_2) + \frac{1}{\sigma_2^2}(\bar{X}_2 - \theta_2)^2\right]$$

при любых θ и $\sum$ имеет распределение $\chi^2(2)$, поэтому

$$\gamma = P_\theta(Q \leqslant \chi^2_{\gamma,2}) = P_\theta(\theta \in G_\gamma(X)),$$

где

$$G_\gamma(X) = \{\theta : Q = n(\bar{X}_1 - \theta_1,\ \bar{X}_2 - \theta_2)'{\textstyle\sum}^{-1}(\bar{X}_1 - \theta_1,\ \bar{X}_2 - \theta_2) \leqslant \chi^2_{\gamma,2}\}.$$

Таким образом, $G_\gamma(X)$ — искомая γ-доверительная область для $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Это внутренность эллипса с центром в случайной точке $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$, граница которого задается уравнением $Q = \chi^2_{\gamma,2}$.

2.133. Поскольку $L_\theta(nT) = Bi(n, \theta)$ (задача 1.39 п. 3)), случайная величина T принимает значения $0,\ 1/n,\ 2/n,\ \ldots,\ n/n$ и ее функция распределения

$$F\left(\frac{k}{n};\ \theta\right) = \sum_{r=0}^{k} C_n^r\theta^r(1-\theta)^{n-r}$$

является непрерывной и монотонно убывающей по θ (при $k < n$):

$$F'\left(\frac{k}{n};\ \theta\right) = -nC_{n-1}^k\theta^k(1-\theta)^{n-k-1} < 0,\ k < n.$$

Следовательно, искомый интервал определяется решениями уравнений $F(T;\ \theta) = 1 - F(T-0;\ \theta) = (1-\gamma)/2$, которые имеют указанный в формулировке задачи вид.

Если число наблюдений n велико, то для быстрого нахождения приближенного доверительного интервала для θ можно воспользоваться асимптотической теорией оценок максимального правдоподобия. В данном случае о.м.п. $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ (см. задачу 2.84) и функция информации $i(\theta) = [\theta(1-\theta)]^{-1}$ (см. задачу 2.43), поэтому искомый интервал имеет вид $(\bar{X} \pm c_\gamma\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n})$.

2.134. При больших n имеем

$$\gamma \approx \boldsymbol{P}_0(\sqrt{n}\,|\bar{X}-\theta|/\sqrt{\theta(1-\theta)} < c_\gamma) = \boldsymbol{P}_\theta\left((\bar{X}-\theta)^2 < \frac{c_\gamma^2}{n}\theta(1-\theta)\right) =$$

$$= \boldsymbol{P}_\theta\left(\theta^2\left(1+\frac{c_\gamma^2}{n}\right) - 2\theta\left(\bar{X}+\frac{c_\gamma^2}{2n}\right) + \bar{X}^2 < 0\right) =$$

$$= \boldsymbol{P}_\theta((\theta - T_1)(\theta - T_2) < 0) = \boldsymbol{P}_\theta(T_1 < \theta < T_2),$$

где

$$T_{1,2} = T_{1,2}(X) = \left(\bar{X} + \frac{c_\gamma^2}{2n} \mp \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})\frac{c_\gamma^2}{n} + \frac{c_\gamma^4}{4n^2}}\right) \Big/ \left(1+\frac{c_\gamma^2}{n}\right).$$

Таким образом, (T_1, T_2) — искомый приближенный γ-доверительный интервал. Если пренебречь членами порядка $1/n$, то этот интервал сводится к интервалу $(\bar{X} \pm c_\gamma\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})/n})$, полученному в предыдущей задаче.

2.135. Поскольку $\boldsymbol{L}_\theta(2\sqrt{n}(\tau(\bar{X})-\tau(\theta))) \sim \boldsymbol{N}(0,\ 1)$, при больших n

$$\gamma \approx \boldsymbol{P}_\theta(2\sqrt{n}\,|\tau(\bar{X})-\tau(\theta)| < c_\gamma) = \boldsymbol{P}_\theta\left(\tau(\bar{X}) - \frac{c_\gamma}{2\sqrt{n}} < \tau(\theta) < \tau(\bar{X}) + \frac{c_\gamma}{2\sqrt{n}}\right),$$

что эквивалентно утверждению.

2.137. Решение данной задачи аналогично решению задачи 2.133. Здесь $\boldsymbol{L}(nT) = \Pi(n\theta)$, величина T принимает значения k/n, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и ее функция распределения

$$F\left(\frac{k}{n};\ \theta\right) = \sum_{r=0}^{k} e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^r}{r},$$

непрерывна и монотонно убывает по θ:

$$F'\left(\frac{k}{n};\ \theta\right) = -ne^{-n\theta}\frac{n\theta)^k}{k!} < 0.$$

Поэтому искомый интервал определяется решениями уравнений $F(T;\ \theta) = 1 - F(T-0;\ \theta) = (1-\gamma)/2$, которые имеют указанный вид.

При больших n (согласно задачам 2.84 и 2.43) справедлива аппроксимация для о.м.п. $\hat{\theta}_n = \bar{X}$:

$$\boldsymbol{L}_\theta\left(\sqrt{\frac{n}{\bar{X}}}(\bar{X}-\theta)\right) \sim \boldsymbol{N}(0,\ 1),$$

откуда следует указанный вид приближенного интервала.

2.138. В первом случае имеем

$$\gamma \approx \mathbf{P}_\theta(2\sqrt{n}\,|\sqrt{\bar{X}} - \sqrt{\theta}| < c_\gamma) = \boldsymbol{P}_\theta\left(\max\left(0,\ \sqrt{\bar{X}} - \frac{c_\gamma}{2\sqrt{n}}\right) < \sqrt{\theta} < \sqrt{\bar{X}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_\gamma}{2\sqrt{n}}\right).$$

Отсюда следует, что $\left(\left[\max\left(0,\ \sqrt{\bar X}-\frac{c_\gamma}{2\sqrt n}\right)\right]^2,\ \left(\sqrt{\bar X}+\frac{c_\gamma}{2\sqrt n}\right)^2\right)$ — искомый приближенный γ-доверительный интервал для θ. Аналогично, используя другую аппроксимацию, имеем

$$\gamma\approx \mathbf{P}_\theta(\sqrt n\,|\bar X-\theta|/\sqrt\theta<c_\gamma)=\mathbf{P}_\theta((\bar X-\theta)^2<c_\gamma^2\theta/n)=$$
$$=\mathbf{P}_\theta\left(\theta^2-2\theta\left(\bar X+\frac{c_\gamma^2}{2n}\right)+\bar X^2<0\right)=\mathbf{P}_\theta(T_1<\theta<T_2),$$

где $T_{1,2}=T_{1,2}(\mathbf{X})=\bar X+\frac{c_\gamma^2}{2n}\mp\sqrt{\bar X\,\frac{c_\gamma^2}{n}+\frac{c_\gamma^4}{4n^2}}$.

Таким образом, $(T_1,\ T_2)$ — другой приближенный γ-доверительный интервал для θ.

С точностью до членов порядка $1/n$ оба эти интервала эквивалентны интервалу $(\bar X\pm c_\gamma\sqrt{\bar X/n})$, полученному в предыдущей задаче.

2.140. Из решения задачи 2.96 следует, что искомый интервал имеет вид $(\hat\theta_n\pm c_\gamma\sqrt{\hat\theta_n/n\mu'(\hat\theta_n)})$, где θ_n — решение уравнения $\mu(\theta)=\bar X$, а $\mu(\theta)$ — теоретическое среднее распределения. В случае распределения $\mathrm{Bi}(r,\ \theta)$ этот интервал принимает вид $\left(\frac{\bar X}{r+\bar X}\pm c_\gamma\sqrt{\frac{r\bar X}{n(r+\bar X)^3}}\right)$.

2.141. Искомый интервал имеет вид $(\hat\theta_n\pm c_\gamma/\sqrt{ni(\hat\theta_n)})$, где в данном случае $i(\theta)=\lambda/\theta^2$, $\hat\theta_n=\bar X/\lambda$. В результате получаем интервал $\bar X\lambda^{-1}(1\pm c_\gamma/\sqrt{\lambda n})$.

Если воспользоваться аппроксимацией $\boldsymbol{L}_\theta(\sqrt{\lambda n}(\ln\hat\theta_n-\ln\theta))\sim N(0,\ 1)$ (см. решение задачи 2.109), то будем иметь

$$\gamma\approx \mathbf{P}_\theta(\sqrt{\lambda n}\,|\ln\hat\theta_n-\ln\theta|<c_\gamma)=\boldsymbol{P}\left(\ln\hat\theta_n-\frac{c_\gamma}{\sqrt{\lambda n}}<\ln\theta<\ln\hat\theta_n+\right.$$
$$\left.+\frac{c_\gamma}{\sqrt{\lambda n}}\right)=\boldsymbol{P}_\theta\left(\hat\theta_n\exp\left\{-\frac{c_\gamma}{\sqrt{\lambda n}}\right\}<\theta<\hat\theta_n\exp\left\{\frac{c_\gamma}{\sqrt{\lambda n}}\right\}\right),$$

т. е. другим приближенным γ-доверительным интервалом является интервал $(\bar X\lambda^{-1}e^{-c_\gamma/\sqrt{\lambda n}},\ \bar X\lambda^{-1}e^{c_\gamma/\sqrt{\lambda n}})$, который с точностью до членов порядка $1/n$ совпадает с предыдущим.

2.142. Согласно решению задачи 2.109, имеем

$$\gamma\approx \mathbf{P}_\theta(\sqrt{2n}\,|\ln\hat\theta_n-\ln\theta|<c_\gamma)=\boldsymbol{P}_\theta\left(\hat\theta_n\exp\left\{-\frac{c_\gamma}{\sqrt{2n}}\right\}<\theta<\hat\theta_n\exp\left\{\frac{c_\gamma}{\sqrt{2n}}\right\}\right),$$

где $\hat\theta_n=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]^{1/2}$. Полученный интервал сводится к интервалу $\hat\theta_n(1\pm c_\gamma/\sqrt{2n})$, если пренебречь членами порядка $1/n$ и воспользоваться стандартной аппроксимацией $\boldsymbol{L}_\theta(\hat\theta_n)\sim N\left(\theta,\ \frac{\hat\theta_n^2}{2n}\right)$ (см. задачу 2.88).

2.143. Из решения задачи 2.87 следует, что искомый интервал, основанный на стандартной аппроксимации для о.м.п., имеет вид $(\hat\tau_n\pm c_\gamma\sigma_\tau(\hat\theta_n)/\sqrt n)$, где $\hat\tau_n=\Phi\left(\frac{x_0-\bar X}{S}\right)$, $\hat\theta_n=(\hat\theta_{1n},\ \hat\theta_{2n})=(\bar X,\ S)$, $\sigma_\tau^2(\theta)$ (см. задачу 2.87).

2.144. В данном случае модель определяется $(N-1)$-мерным параметром $\theta = (p_1, \ldots, p_{N-1})$ (см. задачу 2.63) и функция правдоподобия выборки $X = (X_1, \ldots, X_n)$ равна

$$L(X;\ \theta) = \prod_{j=1}^{N} p_j^{\nu_j} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{N-1} \nu_j \ln \frac{p_j}{1-p_1-\ldots-p_{N-1}} + \right.$$
$$\left. + n\ln(1-p_1-\ldots-p_{N-1})\right\},$$

где ν_j — число членов выборки X, равных a_j, $j = 1, \ldots, N$. Отсюда непосредственно находим, что решение уравнений правдоподобия $\frac{\partial \ln L}{\partial p_j} = 0$, $j = 1, \ldots, N-1$ (т. е. оценки максимального правдоподобия параметров $p_1, \ldots, p_{N-1}$) имеет вид $\hat{p}_j = \frac{\nu_j}{n}$, $j = 1, \ldots, N-1$. Информационная матрица этой модели $I(\theta)$ указана в задаче 2.45. Согласно асимптотической теории оценок максимального правдоподобия, $L_\theta(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)) \sim N(0, I^{-1}(\hat{\theta}_n))$ при $n \to \infty$ и поэтому $L_\theta(Q_n(\theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi^2(N-1)$, где квадратичная форма

$$Q_n(\theta) = n(\hat{\theta}_n - \theta)' I(\hat{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta) = n \sum_{r,s=1}^{N-1} (\hat{p}_r - p_r)(\hat{p}_s - p_s)/\hat{p}_N +$$
$$+ n\sum_{r=1}^{N-1} (\hat{p}_r - p_r)^2/\hat{p}_r = \sum_{r=1}^{N} (\nu_r - np_r)^2/\nu_r.$$

Отсюда

$$P_\theta\left(\sum_{r=1}^{N} (\nu_r - np_r)^2/\nu_r < \chi^2_{\gamma, N-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma.$$

Это означает, что искомая асимптотическая γ-доверительная область для параметров $p_1, \ldots, p_N$ имеет вид

$$G_\gamma(X) = \left\{(p_1, \ldots, p_N):\ \sum_{r=1}^{N} (\nu_r - np_r)^2/\nu_r < \chi^2_{\gamma, N-1},\ 0 < p_i < 1,\right.$$
$$\left. i = 1, \ldots, N,\ \sum_{i=1}^{N} p_i = 1\right\}.$$

В данном случае эта область представляет собой пересечение внутренности N-мерного эллипсоида $\sum_{r=1}^{N} \frac{(\nu_r - np_r)^2}{\nu_r} < \chi^2_{\gamma, N-1}$ с гиперплоскостью $p_1 + \ldots + p_N = 1$, принадлежащее зоне $0 < p_i < 1$, $i = 1, \ldots, N$. При $N = 2$ полученное решение аналогично результату задачи 2.134.

2.145. По теореме Фишера (см. также задачу 1.56) $\bar{X}$ и S^2 независимы, следовательно, независимы также $\bar{X} - X_{n+1}$ и S^2. Но $L_0(\bar{X} - X_{n+1}) = N\left(0,\ \theta_2^2 \frac{n+1}{n}\right)$, а $L_0\left(\frac{nS^2}{\theta_2^2}\right) = \chi^2(n-1)$. Следовательно, отношение Стьюдента $t_{n-1} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,\frac{\bar{X} - X_{n+1}}{S}$. Отсюда имеем

$$\gamma = P_0\left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\frac{|\bar{X} - X_{n+1}|}{S} < t_{\frac{1+\gamma}{2},\, n-1}\right) =$$
$$= P_0\left(\bar{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2},\, n-1} S\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} < X_{n+1} < \bar{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2},\, n-1} S\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right),$$

что и требовалось показать.

2.146. Для приведенных данных $\bar{x} = 4{,}196$; $s = 0{,}226$; $t_{0,975;\,4} = 2{,}776$; следовательно, искомый интервал (3,43; 4,96).

2.147. При больших n

$$\gamma \approx P\left(\frac{|\xi - n|}{\sqrt{2n}} \leqslant c_\gamma\right) = P((\xi - n)^2 \leqslant 2nc_\gamma^2) =$$
$$= P(n^2 - 2n(\xi + c_\gamma^2) + \xi^2 \leqslant 0) = P(n_1 \leqslant n \leqslant n_2),$$

где $n_{1,2} = n_{1,2}(\xi) = \xi + c_\gamma^2 \mp c_\gamma\sqrt{2\xi + c_\gamma^2}$.

В данном случае $c_{0,9} = 1{,}645$, поэтому искомый интервал (131; 189).

Глава 3

3.1. Имеем две группы данных с частотами $h_1 = 2048$ и $h_2 = n - h_1 = 1992$. Для проверяемой гипотезы $H_0: p = q = 1/2$ и ожидаемые частоты равны $np = nq = n/2 = 2020$. Статистика критерия $X_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i} = 0{,}776$. При больших n эта величина распределена приближенно по закону хи-квадрат с одной степенью свободы. По таблице квантилей распределения χ^2 находим $\chi^2_{0,95;\,1} = 3{,}84$; $\chi^2_{0,9;\,1} = 2{,}71$. Поскольку 0,776 меньше значений этих границ, можно считать, что данные совместимы с гипотезой H_0.

3.3. Статистика критерия $X_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i} = 11{,}13$ сравнивается с критической границей $\chi^2_{0,95;\,2} = 5{,}99$. Поскольку $11{,}13 > 5{,}99$, гипотеза H_0 отвергается.

3.7. Ожидаемое число показаний часов в каждом интервале равно $np_i = 500/12 = 41{,}67$. Статистика критерия равна $X_n^2 = 10{,}00$, что меньше критической границы $\chi^2_{0,9;11} = 17{,}3$, т. е. согласие хорошее. Гипотезу H_0 не отклоняют при уровне значимости $\alpha < 0{,}55$.

3.8. Здесь статистика критерия $X_n^2 = 0{,}47$, $\chi^2_{0,9;\,3} = 6{,}25$, т. е. согласие при $\alpha \leqslant 0{,}9$ хорошее.

3.10. Границы интервалов находим из уравнений $1 - e^{-x_1} = 1/4$, $e^{-x_j} - e^{-x_{j+1}} = 1/4$, $j = 1{,}2$. Имеем $x_1 = 0{,}288$, $x_2 = 0{,}693$, $x_3 = 1{,}386$. При группировке по этим интервалам получаем вектор частот $h = (9, 9, 17, 15)$. Статистика критерия $X_{50}^2 = \sum\limits_{j=1}^{4} \frac{(h_j - np_j)^2}{np_j} = 4{,}08$ меньше критической границы $\chi^2_{0,9;\,3} = 6{,}25$, т. е. гипотеза H_0 не отвергается.

3.11. Поскольку $\mathbf{P}(\xi \leqslant x | H_0) = 1 - e^{-x/\theta}$, вероятности $p_j(\theta) = \mathbf{P}(\xi \in E_j | H_0)$ в данном случае равны

$$p_j(\theta) = e^{-(j-1)a/\theta}(1 - e^{-a/\theta}),\ j = 1, \ldots, N-1,\ p_N(\theta) = e^{-(N-1)a/\theta},$$

и уравнение для нахождения мультиномиальной о. м. п. $\hat{\theta}_n$ имеет [1, с. 116] вид

$$\sum_{j=1}^{N} h_j p_j'(\theta)/p_j(\theta) = \sum_{j=1}^{N-1} h_j(j-1-je^{-a/\theta})/(1-e^{-a/\theta}) + (N-1)h_N = 0.$$

Обозначая $z = e^{-a/\theta}$, отсюда находим

$$z\left(\sum_{j=1}^{N} jh_j - h_N\right) = \sum_{j=1}^{N} jh_j - n.$$

Следовательно, о. м. п. $\hat{z}_n = \left(\sum_{j=1}^{N} jh_j - n\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{N} jh_j - h_N\right)$, а соответствующие оценки вероятностей $p_j(\theta)$ имеют вид

$$\hat{p}_j = \hat{z}_N^{j-1}(1-\hat{z}_N), \quad j = 1, \ldots, N-1, \quad \hat{p}_N = \hat{z}_N^{N-1}.$$

В соответствии с общей теорией [1, с. 115—116], если при больших значениях n выполняются условия $h_j \geqslant 5$, $j = 1, \ldots, N$, то соответствующий критерий согласия χ^2 отклоняет гипотезу H_0 тогда и только тогда, когда

$$\hat{X}_n^2 = \sum_{j=1}^{N} (h_j - n\hat{p}_j)^2/(n\hat{p}_j) \geqslant \chi^2_{1-\alpha,\, N-2},$$

где α — выбранный уровень значимости.

Для данных задачи 1.21 при указанном выборе параметров N и a имеем $h_1 = 28$, $h_2 = 16$, $h_3 = 6$, $\hat{z}_n = \dfrac{h_2+2h_3}{2n-h_1} = \dfrac{7}{18}$ и значение статистики $\hat{X}_n^2 = 1{,}96\ldots$ Поскольку $\chi^2_{0{,}9;\,1} = 2{,}71$, при уровне значимости $\alpha \leqslant 0{,}1$ гипотеза H_0 подтверждается данными.

3.12. Здесь имеет место полиномиальная модель с $N = 4$ исходами и вероятностями $p_1, \ldots, p_4$, имеющими при нулевой гипотезе H_0 указанный вид, т. е. являющимися функциями одного неизвестного параметра. Для оценивания параметра θ надо решить уравнение $\sum_{j=1}^{4} h_j p_j'(\theta)/p_j(\theta) = 0$, которое в данном случае принимает вид

$$\frac{h_1}{2+\theta} - \frac{h_2+h_3}{1-\theta} + \frac{h_4}{\theta} = 0.$$

Это уравнение сводится к следующему:

$$\varphi(\theta) \equiv n\theta^2 + (h_4 + 2h_2 + 2h_3 - h_1)\theta - 2h_4 = 0.$$

Поскольку $\varphi(0) = -2h_4 < 0$, $\varphi(1) = 3(h_2+h_3) > 0$, последнее уравнение имеет в интервале $(0, 1)$ единственный корень $\hat{\theta}_n$. Следовательно, в данном случае критерий согласия χ^2 при уровне значимости α отклоняет гипотезу H_0 лишь в случае

$$\sum_{j=1}^{4} h_j^2/(np_j(\hat{\theta}_n)) - n \geqslant \chi^2_{1-\alpha;\,2},$$

или

$$h_1^2/(n(2+\hat{\theta}_n)) + (h_2^2+h_3^2)/(n(1-\hat{\theta}_n)) + h_4^2/(n\hat{\theta}_n) \geqslant (\chi^2_{1-\alpha;\,2} + n)/4.$$

3.14. Используем критерий согласия χ^2. Оценка параметра θ равна $\widehat{\theta} = \sum ih_i = 3{,}870$. Вычисляем оценки вероятностей $\hat{p}_i = e^{-\theta}\frac{\widehat{\theta}^i}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, 10$, и значение статисики $X_n^2 = \sum\limits_{i=0}^{10} \frac{(h_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 13{,}05.$

Число степеней свободы $k = 9$. Поскольку $\chi^2_{0{,}95;\,9} = 16{,}9 > 13{,}05$, гипотеза H_0 не отвергается.

3.15. Здесь $\hat{\theta} = 1{,}54$, $X_n^2 = 7{,}95$, $k = 6$, $\chi^2_{0{,}9;\,6} = 10{,}6$. Согласие имеет место.

3.16. Здесь $\hat{\theta} = 0{,}928$, $\hat{p}_i = e^{-\theta}\frac{\theta^i}{i!}$, $i = 0, 1, \ldots, 5$, $X_n^2 = 2{,}172$, $k = 6, \chi^2_{0{,}95;\,4} = 9{,}49$. Согласие хорошее.

3.17. Для $\mathbf{L}(\xi) = Bi(2, \theta)$ вероятности исходов имеют вид

$$p_1(\theta) = \mathbf{P}(\xi = 0) = (1 - \theta)^2,\ p_2(\theta) = \mathbf{P}(\xi = 1) = 2\theta(1 - \theta),$$
$$p_3(\theta) = \mathbf{P}(\xi = 2) = \theta^2.$$

Отсюда уравнение для нахождения оценки параметра θ имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{3} h_j p_j'(\theta)/p_j(\theta) = -\frac{2h_1}{1-\theta} + \frac{1-2\theta}{\theta(1-\theta)}h_2 + \frac{2h_3}{\theta} = 0,$$

а сама оценка $\hat{\theta}_n = (h_2 + 2h_3)/2n$.

В данном случае $h_1 = 476$, $h_2 = 1017$, $h_3 = 527$, $n = 2020$, поэтому $\hat{\theta}_n = 0{,}513$. Далее имеем

$$\hat{X}_n^2 = \sum_{j=1}^{3} (h_j - np_j(\hat{\theta}_n))^2/(np_j(\hat{\theta}_n)) \simeq 0{,}116;$$

результат надо сравнить с $\chi^2_{1-\alpha_0\,1}$. Поскольку $\chi^2_{0{,}3;\,1} = 0{,}148$, при любом уровне значимости $\alpha \leqslant 0{,}7$ гипотеза принимается.

3.19. Подставляя в формулу

$$\mathbf{E}(X_n^2|p) = n\sum_{j=1}^{N}(p_j - p_j^0)^2/p_j^0 + \sum_{j=1}^{N} p_j(1 - p_j)/p_j^0$$

значение $p = p_1^{(n)} = (p_1^{(n)}, \ldots, p_N^{(n)})$ и учитывая равенства $\sum\limits_{j=1}^{N} p_j^0 = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \beta_j = 0$, найдем

$$\mathbf{E}(X_n^2|p^{(n)}) = N - 1 + \sum_{j=1}^{N} \beta_j^2/p_j^0 + O(1/\sqrt{n}).$$

Далее, так как

$$R_{ks} = \sum_{j=1}^{N} p_j^{(n)^k}/p_j^{0^s} = \sum_{j=1}^{N} p_j^{0^{k-s}}\left(1 + \frac{\beta_j}{\sqrt{np_j^0}}\right)^k,$$

то

$$R_{32} = 1 + \frac{3}{n}\sum_{j=1}^{N} \beta_j^2/p_j^0 + O(n^{-3/2}),$$

$$R_{21} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} \beta_j^2/p_j^0,$$

$$R_{22} = N + O(1/\sqrt{n}), \quad R_{11} = N + O(1/\sqrt{n}), \quad R_{12} = O(1).$$

Отсюда, используя формулу

$$D(X_n^2|p) = 4\frac{(n-1)(n-2)}{n}(R_{32} - R_{21}^2) + 2\frac{n-1}{n}(3R_{22} - 2R_{21}R_{11} - R_{21}^2) + \\ + \frac{1}{n}(R_{12} - R_{11}^2),$$

найдем

$$D(X_n^2|p^{(n)}) = 2(N-1) + 4\sum_{j=1}^{N} \beta_j^2/p_j^0 + O(1/\sqrt{n}).$$

3.20. Так как

$$(1 - p_j^{(n)})^n = \exp\{n\ln(1 - p_j^{(n)})\} = \exp\{-np_j^{(n)} + O(n^{-1})\} = \\ = \exp\{-\rho - \rho b_j/n^{1/4} + O(n^{-1})\} = e^{-\rho}[1 - \rho b_j/n^{1/4} + \rho^2 b_j^2/2\sqrt{n} + \\ + O(n^{-3/4})],$$

то, подставляя это разложение в формулу $E(\mu_0|H_1^{(n)}) = \sum_{j=1}^{N}(1 - p_j^{(n)})^n$, получаем искомое представление для среднего.

При анализе дисперсии будем исходить из формулы

$$D\mu_0 = 2\sum_{i<j}[(1 - p_i - p_j)^n - (1 - p_i)^n(1 - p_j)^n] - \sum_{j=1}^{N}(1 - p_j)^{2n} + E\mu_0.$$

Асимптотика второй суммы при гипотезе $H_1^{(n)}$ находится так же, как и выше, и с точностью до главного члена она равна $Ne^{-2\rho}$.

Оценим общий член первой суммы. Имеем

$$(1 - p_i - p_j)^n - (1 - p_i)^n(1 - p_j)^n = (1 - p_i - p_j)^n - (1 - p_i - p_j + p_ip_j)^n = \\ = \exp\{-n(p_i + p_j) - \frac{n}{2}(p_i + p_j)^2 + O(N^{-2})\} - \exp\{-n(p_i + p_j) + np_ip_j - \\ - \frac{n}{2}(p_i + p_j)^2 + O(N^{-2})\} = \exp\{-n(p_i + p_j) - \frac{n}{2}(p_i + p_j)^2\}[\exp\{O(N^{-2})\} - \\ - \exp\{np_ip_j + O(N^{-2})\}] = -np_ip_je^{-np_i - np_j} + O(N^{-2}).$$

Отсюда первую сумму можно представить в виде

$$-2n\sum_{i<j}p_ip_je^{-np_i - np_j} + O(1) = -n\left(\sum_{j=1}^{N}p_je^{-np_j}\right)^2 + \\ + n\sum_{j=1}^{N}p_j^2e^{-2np_j} + O(1).$$

В этом разложении второй член есть $O(1)$, а $\sum_{j=1}^{N}p_je^{-np_j} = e^{-\rho} + o(1)$. Таким образом, все выражение равно $-N\rho e^{-2\rho} + O(1)$. В результате имеем

$$D(\mu_0|N_1^{(n)}) = -N\rho e^{-2\rho} - Ne^{-2\rho} + Ne^{-\rho} + O(N^{1/2}).$$

3.21. Применим критерий однородности χ^2. Статистика критерия

$$X_n^2 = n_1 n_2 \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\nu_{i1}+\nu_{i2}}(\nu_{i1}/n_1 - \nu_{i2}/n_2)^2 = 2{,}18 \quad (s=4,\ k=2),$$

критическая граница критерия $\chi^2_{1-\alpha;(s-1)(k-1)} = \chi^2_{0,9;3} = 6{,}25$. Таким образом, $X_n^2 < \chi^2_{0,9;3}$, согласие хорошее.

3.23. 1) Рассмотрим разность $\Delta_{ij} = \nu_{ij} - \nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n$, $i, j = 1,2$. Непосредственно проверяется, что все суммы $\Delta_{i1} + \Delta_{i2}$ и $\Delta_{1j} + \Delta_{2j}$ равны 0. Например,

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} = \nu_{11} + \nu_{12} - \frac{\nu_{1\cdot}\nu_{\cdot 1}}{n} - \frac{\nu_{1\cdot}\nu_{\cdot 2}}{n} = \nu_{1\cdot} - \frac{\nu_{1\cdot}}{n}(\nu_{\cdot 1} + \nu_{\cdot 2}) =$$
$$= \nu_{1\cdot} - \nu_{1\cdot} = 0.$$

Таким образом, модули всех четырех величин Δ_{ij} равны и поэтому

$$X_n^2 = n \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\Delta_{ij}^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} = n\Delta_{11}^2 \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} =$$
$$= n^3\Delta_{11}^2/(\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}).$$

Далее имеем

$$n\Delta_{11} = \nu_{\cdot 1}\left[\frac{\nu_{11}}{\nu_{\cdot 1}}(\nu_{\cdot 1} + \nu_{\cdot 2}) - (\nu_{11} + \nu_{12})\right] = \nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}\left(\frac{\nu_{11}}{\nu_{\cdot 1}} - \frac{\nu_{12}}{\nu_{\cdot 2}}\right);$$

окончательно получаем

$$X_n^2 = \frac{n\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}}{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}}\left(\frac{\nu_{11}}{\nu_{\cdot 1}} - \frac{\nu_{12}}{\nu_{\cdot 2}}\right)^2 = Z_n^2.$$

2) Заметим, что случайные величины ν_{11} и ν_{12} независимы по условию и $\mathbf{L}(\nu_{1j}) = Bi(n_j, p)$ при некотором $p \in (0, 1)$, $j = 1, 2$, если справедлива гипотеза H_0. При $n_1, n_2 \to \infty$ по теореме Муавра — Лапласа $\mathbf{L}(\nu_{1j}) \sim \mathbf{N}(n_j p, n_j pq)$, $q = 1 - p$, или $\mathbf{L}(\nu_{1j}/n_j) \sim \mathbf{N}\left(p, \frac{pq}{n_j}\right)$, $j = 1$,2. Отсюда

$$\mathbf{L}\left(\frac{\nu_{11}}{n_1} - \frac{\nu_{12}}{n_2}\right) \sim \mathbf{N}\left(0, \frac{npq}{n_1 n_2}\right).$$

Таким образом, при гипотезе H_0 случайная величина

$$\varsigma_{n_1 n_2} = \left(\frac{\nu_{11}}{n_1} - \frac{\nu_{12}}{n_2}\right)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{npq}}$$

асимптотически нормальна $\mathbf{N}(0, 1)$. Но

$$Z_n = \varsigma_{n_1 n_2}\sqrt{\frac{n^2 pq}{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}}}$$

и при гипотезе H_0 имеем $\frac{\nu_{1\cdot}}{n} \xrightarrow{P} p$, следовательно, $\sqrt{\frac{n^2pq}{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}}} \xrightarrow{P} 1$. Отсюда следует, что при гипотезе H_0 предельные распределения случайных величин Z_n и $\varsigma_{n_1 n_2}$ совпадают, что и требовалось показать.

Наконец, при рассматриваемой альтернативе среднее значение разности $\frac{\nu_{11}}{n_1} - \frac{\nu_{12}}{n_2}$ равно $p_1 - p_2 > 0$, следовательно, проверяя H_0 против H_1, критическую область разумно выбрать в виде $\{Z_n > t_\alpha\}$. Поскольку $\mathbf{P}(Z_n > t_\alpha | H_0) \approx \Phi(-t_\alpha)$, при уровне значимости α критическая граница имеет вид

$$t_\alpha = -\Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(1-\alpha) = u_{1-\alpha}. \cdot$$

Замечание. Так как при любой гипотезе, задаваемой вероятностями p_1, p_2, при $n_1, n_2 \to \infty$

$$\mathbf{L}\left(\frac{\nu_{11}}{n_1} - \frac{\nu_{12}}{n_2}\right) \sim \mathbf{N}\left(p_1 - p_2, \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right),$$

то, рассуждая аналогично, можно показать, что для «близкой» альтернативы $H_1^{(n)}: (p_1 - p_2)/\sqrt{p_1 q_1} = a/\sqrt{n}$, $a \neq 0$,

$$\mathbf{L}(Z_n | H_1^{(n)}) \to \mathbf{N}(a\sqrt{\gamma(1-\gamma)}, 1), \ \gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n}.$$

Этот результат позволяет вычислять мощность критерия при таких альтернативах.

3.24. Так как (см. задачу 1.54)

$$\mathbf{L}(\nu_1, \ldots, \nu_N | \nu_1 + \ldots + \nu_N = n) = M(n; p_1, \ldots, p_N)$$

при $p_j = \theta_j / \sum_{i=1}^{N} \theta_i$, $j = 1, \ldots, N$, то гипотеза H_0 эквивалентна в данном случае гипотезе о равновероятности исходов в полиномиальной схеме. Следовательно, критерий согласия χ^2 имеет вид

$$X_n^2 = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^{N} \left(\nu_j - \frac{n}{N}\right)^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha, N-1}.$$

Замечание. Обозначим через $\bar{\nu}$, $S^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (\nu_j - \bar{\nu})^2$ выборочные среднее и дисперсию; тогда статистику X_n^2 можно записать в виде $X_n^2 = NS^2/\bar{\nu}$. При гипотезе H_0 теоретические среднее и дисперсия наблюдений равны, поэтому, если гипотеза H_0 верна, то $S^2/\bar{\nu} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ при $n \to \infty$ или $X_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} N$.

3.25. 1) Так как в данном случае совместная плотность распределения порядковых статистик $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ есть

$$g(x_1, \ldots, x_n) = n!, \ 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1,$$

(см. задачу 1.31), то по формуле полной вероятности безусловное распределение вектора $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n+1})$ имеет вид

$$\mathbf{P}(\varkappa_i = k_i, i = 1, \ldots, n+1) = \frac{m!}{k_1! \ldots k_{n+1}!} \int \prod_{j=1}^{n+1} (x_j - x_{j-1})^{k_j} g(x_1, \ldots,$$

$$\ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{m! n!}{k_1! \ldots k_{n+1}!} \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^1 \prod_{j=1}^{n+1} (x_j - x_{j-1})^{k_j} dx_n$$

(здесь $k_1 + \ldots + k_{n+1} = m$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$). Интегрируя последовательно по x_n, x_{n-1} и т. д. и применяя формулу

$$\int_a^1 (x-a)^r (1-x)^s dx = \frac{r! s!}{(r+s+1)!} (1-a)^{r+s+1},$$

получим

$$\mathbf{P}(\varkappa_i = k_i,\ i=1,\ \ldots,\ n+1) = \frac{m!n!}{k_1!\ldots k_{n+1}!}\ \frac{k_n!k_{n+1}!}{(k_n+k_{n+1}+1)!}\times$$
$$\times\frac{k_{n-1}!(k_n+k_{n+1}+1)!}{(k_{n-1}+k_n+k_{n+1}+2)!}\cdots\frac{k_1!(k_2+\ldots+k_{n+1}+n-1)!}{(k_1+k_2+\ldots k_{n+1}+n)!}=$$
$$=\frac{m!n!}{(m+n)!}=(C^n_{m+n})^{-1}$$

С другой стороны, при $k_1+\ldots+k_{n+1}=m$ и произвольном $p\in(0,1)$, $q=1-p$,

$$\mathbf{P}(\xi_i=k_i,\ i=1,\ldots,n+1\,|\,\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=m)=\frac{\mathbf{P}(\xi_i=k_i,\ i=1,\ \ldots,\ n+1)}{\mathbf{P}(\xi_1+\ \ldots\ +\xi_{n+1}=m)}=$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1}(p^{k_i}q)}{C^m_{n+m}p^mq^{n+1}}=(C^n_{n+m})^{-1},$$ поскольку $\boldsymbol{L}(\xi_1+\ldots+\xi_{n+1})=\bar{B}_i(n+1,p)$ (см. задачу 1.39 п. 5)). Таким образом, если справедлива гипотеза однородности H_0, то

$$\boldsymbol{L}(\varkappa)=\boldsymbol{L}(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n+1}|\xi_1+\ \ldots\ +\xi_{n+1}=m).$$

2) Вычислим

$$\mathbf{P}(s_0(n,m)=k)=\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1}I(\xi_i=0)=k|\xi_1+\ \ldots\ +\xi_{n+1}=m\right)=$$

$$=\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1}I(\xi_i=0)=k,\ \xi_1+\ \ldots\ +\xi_{n+1}=m\right)/\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=m).$$

Чтобы найти числитель этого выражения, зафиксируем номера тех величин, которые принимают значение 0. Это можно сделать C^k_{n+1} различными способами. Тогда числитель можно записать в виде

$$C^k_{n+1}\mathbf{P}(\xi_i>0,\ i=1,\ldots,n+1-k,\ \xi_j=0,\ j=n+2-k,\ \ldots,\ n+1)\times$$
$$\times\mathbf{P}(\xi_1+\ \ldots\ +\xi_{n+1}=m|\xi_i>0,\ i=1,\ \ldots,\ n+1-k,\ \xi_j=0,$$
$$j=n+2-k,\ \ldots,\ n+1)=C^k_{n+1}p^{n+1-k}q^k\mathbf{P}(\tilde{\xi}_1+\ \ldots\ +\tilde{\xi}_{n+1-k}=m)$$

(см. указание 2). Здесь при $r=1,2,\ldots$

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_1=r)=\mathbf{P}(\tilde{\xi}_1=r)/\mathbf{P}(\xi_1>0)=\frac{p^rq}{p}=p^{r-1}q,$$

т. е. $\boldsymbol{L}(\tilde{\xi}_1)=\boldsymbol{L}(\xi_1+1)$. Отсюда $\boldsymbol{L}(\tilde{\xi}_1+\ldots+\tilde{\xi}_s)=\boldsymbol{L}(\xi_1+\ldots+\xi_s+s)$ и поэтому

$$\mathbf{P}(\tilde{\xi}_1+\ldots+\tilde{\xi}_s=m)=\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_s=m-s)=C^{s-1}_{m-1}q^sp^{m-s}.$$

Окончательно можем записать, что

$$\mathbf{P}(s_0(n,m)=k)=C^k_{n+1}q^kp^{n+1-k}C^{n-k}_{m-1}q^{n+1-k}p^{m+k-n-1}/C^n_{n+m}p^mq^{n+1}=$$
$$=C^k_{n+1}C^{n-k}_{m-1}/C^n_{n+m}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{L}(s_0(n,m))=H(n+1,n+m,n).$$

Используя формулы для моментов гипергеометрического распределения, получаем, что при гипотезе H_0

$$\mathbf{E}s_0(n, m) = \frac{n(n+1)}{n+m}, \quad \mathrm{D}s_0(n, m) = \frac{m(m-1)n(n+1)}{(n+m)^2(n+m-1)}.$$

Если $n, m \to \infty$ так, что $m/n = \rho > 0$, то

$$\mathbf{E}s_0(n, m) = \frac{n}{1+\rho} + O(1), \quad \mathrm{D}s_0(n, m) = \frac{n\rho^2}{(1+\rho)^3} + O(1).$$

3) Из решения предыдущего пункта следует формула для $\mathbf{P}(s_0(n, m) = k)$, приведенная в указании. Пусть $k = (n+1)p + t\sqrt{npq}$, $|t| \leqslant c < \infty$. Тогда

$$b(k; n+1, p) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-t^2/2};$$

$$n - k = (m-1)p - \frac{t}{\sqrt{\rho}}\sqrt{npq} \text{ и поэтому}$$

$$b(n-k; m-1, p) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi mpq}} e^{-t^2/(2\rho)};$$

наконец, $n = (n+m)p$, следовательно,

$$b(n; n+m, p) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi(n+m)pq}}.$$

Объединяя эти оценки, получаем

$$\mathbf{P}(s_0(n, m) = k) = \sqrt{\frac{n+m}{2\pi mnpq}}\, e^{-t^2(1+\rho)/(2\rho)}(1+o(1)).$$

Но это означает, что если $k = \dfrac{n+1}{1+\rho} + x\sqrt{n\rho^2/(1+\rho)^3}$, $|x| \leqslant c < \infty$, то

$$\mathbf{P}(s_0(n, m) = k) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi n\rho^2/(1+\rho)^3}} e^{-x^2/2},$$

т. е. имеет место локальная (а тем самым и интегральная) нормальная предельная теорема.

$$\mathbf{E}[s_0(n, m) \mid H_1] = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(\varkappa_i = 0 \mid H_1).$$

Рассмотрим сначала слагаемые при $i = 2, \ldots, n$. Вероятность того, что при фиксированных $X_{(i-1)} = x_1 < X_{(i)} = x_2$ блок B_i пуст, равна $[1 - F(x_2) + F(x_1)]^m$, поэтому по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}(\varkappa_i = 0 \mid H_1) = \frac{n!}{(i-2)!\,(n-i)!} \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 [1 - F(x_2) + F(x_1)]^m x_1^{i-2}(1 - x_2)^{n-i} dx_2.$$

Для $i = 1$ и $i = n+1$ эти вероятности будут иными, но если их выражения разделить на $n+1$, то в пределе они дадут нулевой вклад в сумму и, следовательно, им можно не уделять внимания. Суммируя эти выражения, в результате получим

$$\mathbf{E}\left[\frac{s_0(n, m)}{n+1} \,\middle|\, H_1\right] = \frac{n(n-1)}{n+1} \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 [1 - F(x_2) +$$

$$+ F(x_1)]^m (1 - x_2 + x_1)^{n-2} dx_2 + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n < 2/(n+1)$. Сделав замену переменных $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 + y_2/n$, перепишем эту формулу в виде

$$\mathbf{E}\left[\frac{s_0(n, m)}{n+1} \,\Big|\, H_1\right] = \frac{n-1}{n+1} \int_0^1 dy_1 \int_0^{(1-y_1)n} \left(1 - \frac{y_2}{n}\right)^{n-2} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{F\left(y_1 + \frac{y_2}{n}\right) - F(y_1)}{y_2/n} \frac{y_2}{n}\right]^m dy_2 + \varepsilon_n.$$

Переходя здесь к пределу при $n, m \to \infty$, $m = \rho n$, и учитывая, что функция F дифференцируема, получим

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}\left[\frac{s_0(n, m)}{n+1} \,\Big|\, H_1\right] =$$

$$= \int_0^1 dy_1 \int_0^\infty e^{-y_2(1+\rho f(y_1))} dy_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1 + \rho f(x)}.$$

Теперь (см. указание)

$$1 = \left(\int_0^1 g_1(x)\, g_2(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1 + \rho f(x))\, dx \int_0^1 \frac{dx}{1 + \rho f(x)} =$$

$$= (1 + \rho) \int_0^1 \frac{dx}{1 + \rho f(x)},$$

так как $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$. Знак равенства имеет место лишь в том случае, когда функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ пропорциональны. В данном случае это означает, что $1 + \rho f(x) \equiv \text{const}$, т. е. $f(x) \equiv \text{const}$. Но так как $f(x)$ — функция плотности, то $f(x) \equiv 1$. Таким образом, если справедлива альтернатива, то неравенство будет строгим и поэтому при альтернативе статистика $s_0(n, m)$ асимптотически стремится принимать бо́льшие значения, чем при гипотезе H_0. Следовательно, критическую область для гипотезы H_0 разумно задавать в виде $\{s_0(n, m) > c\}$. При уровне значимости α критическая граница асимптотически имеет вид

$$c = c_\alpha(n) = \frac{n}{1+\rho} - \sqrt{n} \frac{\rho}{(1+\rho)^{3/2}} u_\alpha.$$

3.26. Имеем $\hat{X}_n^2 = n\left(\sum_{ij} \frac{\nu_{ij}^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} - 1\right) = 8{,}09 < \chi^2_{0{,}95;\,4} = 9{,}49$. Гипотеза не отвергается.

3.28. 1) См. решение задачи 3.23 п. 1).

2) Пусть $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ — независимые наблюдения над (ξ_1, ξ_2) и $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Тогда выборочные средние $\overline{X} = \frac{\nu_{1\cdot}}{n}$, $\overline{Y} = \frac{\nu_{\cdot 1}}{n}$, выборочные дисперсии

$$S_1^2 = S^2(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{\nu_{1\cdot}}{n}\left(1 - \frac{\nu_{1\cdot}}{n}\right) =$$

$$= \frac{\nu_{1\cdot}\nu_{2\cdot}}{n^2}, \quad S_2^2 = S^2(\boldsymbol{Y}) = \frac{\nu_{\cdot 1}\nu_{\cdot 2}}{n^2},$$

наконец, выборочная ковариация

$$S_{12}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\overline{XY}=\frac{\nu_{11}}{n}-\frac{\nu_{1.}\nu_{.1}}{n^2}\equiv\frac{\Delta_{11}}{n}.$$

Отсюда (см. решение задачи 1.38)

$$\rho_n=S_{12}/S_1S_2=n\Delta_{11}/\sqrt{\nu_{1.}\nu_{2.}\nu_{.1}\nu_{.2}}=n^{-1/2}Z_n.$$

Теоретический коэффициент корреляции

$$\rho=\frac{\mathbf{E}(\xi_1\xi_2)-\mathbf{E}\xi_1\mathbf{E}\xi_2}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_1\,\mathbf{D}\xi_2}}=\frac{\mathbf{P}(\xi_1=1,\ \xi_2=1)-\mathbf{P}(\xi_1=1)\,\mathbf{P}(\xi_2=1)}{\sqrt{\mathbf{P}(\xi_1=1)\,\mathbf{P}(\xi_1=0)\,\mathbf{P}(\xi_2=1)\,\mathbf{P}(\xi_2=0)}}=$$

$$=\frac{\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}}$$

Но

$$\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(B)\left[\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}(\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(\bar{B}))-(\mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B}))\right]=$$

$$=\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})\,[\mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\bar{B})/\mathbf{P}(\bar{B})],$$

откуда следует второе представление для ρ.

3) Рассмотрим случайную величину

$$\varsigma_n=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbf{P}(A))\,(Y_i-\mathbf{P}(B))/\sqrt{n\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}.$$

Так как при гипотезе H_0

$$\mathbf{E}(X_i-\mathbf{P}(A))\,(Y_i-\mathbf{P}(B))=\mathbf{E}(X_i-P(A))\,\mathbf{E}(Y_i-\mathbf{P}(B))=0,$$

$$\mathbf{D}(X_i-\mathbf{P}(A))\,(Y_i-\mathbf{P}(B))=\mathbf{E}(X_i-\mathbf{P}(A))^2(Y_i-\mathbf{P}(B))^2=$$

$$=\mathbf{E}(X_i-\mathbf{P}(A))^2\,\mathbf{E}(Y_i-\mathbf{P}(B))^2=\mathbf{D}X_i\,\mathbf{D}Y_i=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B}),$$

то ς_n представляет собой нормированную сумму независимых одинаково распределенных случайных величин. Следовательно, на основании центральной предельной теоремы при $n\to\infty$

$$L(\varsigma_n)\to N(0,1).$$

Теперь, так как

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})=\sum^{n}(X_i-\mathbf{P}(A))\,(Y_i-\mathbf{P}(B))-$$

$$-n(\bar{X}-\mathbf{P}(A))\,(\bar{Y}-\mathbf{P}(B)),$$

то на основании п. 2 задачи можем записать Z_n в виде

$$Z_n=n^{1/2}S_{12}/(S_1S_2)=\frac{n^{1/2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})\,\bar{Y}(1-\bar{Y})}}=$$

$$=\left[\varsigma_n-\frac{n^{1/2}(\bar{X}-\mathbf{P}(A))}{\sqrt{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})}}\cdot\frac{\bar{Y}-\mathbf{P}(B)}{\sqrt{\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}}\right]\cdot\left[\frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}{\bar{X}(1-\bar{X})\,\bar{Y}(1-\bar{Y})}\right]^{1/2}.$$

По теореме об асимптотической нормальности выборочных моментов при $n\to\infty$

$$L\left(\frac{n^{1/2}(\bar{X}-\mathbf{P}(A))}{\sqrt{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})}}\right)\to N(0,1),$$

а согласно закону больших чисел $\bar{X} \xrightarrow{P} \mathbf{P}(A)$, $\bar{Y} \xrightarrow{P} \mathbf{P}(B)$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\left[\frac{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A})\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}{\bar{X}(1-X)\,\bar{Y}1-\bar{Y})}\right]^{1/2} \to 1,$$

$$\frac{n^{1/2}(\bar{X}-\mathbf{P}(A))(\bar{Y}-\mathbf{P}(B))}{\sqrt{\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(\bar{A}))\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(\bar{B})}} \xrightarrow{P} 0,$$

и поэтому предельные распределения Z_n и ς_n при гипотезе H_0 совпадают.

Итак, при гипотезе H_0 имеем $\rho = 0$, а при альтернативе H_1 $\rho > 0$ и, следовательно, $Z_n \xrightarrow{P} +\infty$ при $n \to \infty$. Поэтому естественно рассматривать слишком большие значения статистики Z_n как свидетельство в пользу альтернативы. Другими словами, если проверяется гипотеза H_0 против альтернативы H_1, то критическую область разумно выбрать в виде $\{Z_n > t_\alpha\}$. Поскольку

$$\mathbf{P}(Z_n > t_\alpha | H_0) \approx \Phi(-t_\alpha),$$

при выбранном уровне значимости α критическая граница имеет вид $t_\alpha = -\Phi^{-1}(\alpha) = \Phi^{-1}(1-\alpha) = u_{1-\alpha}$.

Замечание. Рассуждая аналогично, можно показать, что если «близкая» альтернатива задается условиями

$$H_1^{(n)}: \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) + O(n^{-1/2}),\ \rho = \rho^{(n)} = an^{-1/2},\ a \neq 0,$$

то $\boldsymbol{L}(Z_n | H_1^{(n)}) \to N(a, 1)$ и, следовательно, при $a > 0$ мощность построенного критерия удовлетворяет предельному соотношению

$$W_n(H_1^{(n)}) \to \Phi(a + u_\alpha).$$

3.29. Здесь (см. задачу 3.28) $Z_n = \left(\frac{97}{360} - \frac{40}{82}\right)\sqrt{\frac{360\cdot 82\cdot 442}{137\cdot 305}} \simeq$ $\simeq -3{,}86$, а $\hat{X}_n^2 = Z_n^2 \simeq 14{,}89$. Так как $\chi^2_{0{,}9999,\,1} = 10{,}8$, то гипотеза о независимости признаков должна быть отвергнута (вероятность совершить при этом ошибку меньше 10^{-4}). В то же время данные опровергают и гипотезу H_1, поскольку $Z_n < 0$ (этот факт можно интерпретировать, например, как отсутствие дискриминации в отношении женщин при приеме в вуз).

3.30. Здесь $Z_n = \left(\frac{276}{749} - \frac{3}{69}\right)\sqrt{\frac{749\cdot 69\cdot 818}{279\cdot 539}} \simeq 5{,}45$, а $\hat{X}_n^2 = Z_n^2 \simeq$ $\simeq 29{,}70$. Следовательно, на основании полученных данных (см. решение предыдущей задачи) гипотеза H_0 отклоняется. Далее, так как $Z_n >$ $> \Phi^{-1}(0{,}9999) \simeq 3{,}72$, то (см. решение задачи 3.28 п. 3)) данные подтверждают гипотезу H_1. Вероятность ошибки отклонить H_0 в пользу H_1 при этом меньше 10^{-4}.

3.31. Здесь речь идет о проверке гипотезы случайности H_0 [1, с. 133]. В данном случае число инверсий $T_8 = 0$ и вероятность получить такое значение при гипотезе H_0 равна $(8\,!)^{-1} \simeq 0{,}25\cdot 10^{-4}$. Следовательно, при любом разумном уровне значимости гипотеза H_0 отвергается.

3.32. Обозначим $T_n^* = 6\left(T_n - \frac{n(n-1)}{4}\right)n^{-3/2}$; тогда характеристическая функция

$$\mathbf{E}e^{itT_n^*} = \exp\left\{-\frac{3it(n-1)}{2\sqrt{n}}\right\}\Phi_n(e^{6itn^{-3/2}}) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{3it(n-1)}{2\sqrt{n}}\right\}\prod_{r=2}^{n}\left[1 + \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r-1}(e^{6itkn^{-3/2}} - 1)\right]$$

При $|t| \leqslant c < \infty$, $n \to \infty$ и любом $k = 1, \ldots, n$

$$\exp\{6itkn^{-3/2}\} - 1 = 6itkn^{-3/2} - 18t^2k^2n^{-3} + O(k^3n^{-9/2}).$$

Отсюда

$$\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r-1}(e^{6itkn^{-3/2}} - 1) = \frac{3it(r-1)}{n^{3/2}} - \frac{3t^2(r-1)(2r-1)}{n^3} + O\left(\frac{r^3}{n^{9/2}}\right).$$

Переходя к логарифмам и используя формулу

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3),\ x \to 0,$$

получим

$$\ln \mathbf{E}e^{itT_n^*} = -\frac{3it(n-1)}{2\sqrt{n}} + \frac{3it}{n^{3/2}}\sum_{r=2}^{n}(r-1) -$$

$$-\frac{3t^2}{n^3}\sum_{r=2}^{n}(r-1)(2r-1) + \frac{9t^2}{2n^3}\sum_{r=2}^{n}(r-1)^2 +$$

$$+\sum_{r=2}^{n} O\left(\frac{r^3}{n^{9/2}}\right) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

откуда и следует утверждение.

3.39. Здесь статистика отношения правдоподобия

$$l(\mathbf{X}) \equiv \frac{L(\mathbf{X};\theta_1)}{L(\mathbf{X};\theta_0)} = \prod_{i=1}^{n} C_k^{X_i}\theta_1^{X_i}(1-\theta_1)^{k-X_i} \Big/ \prod_{i=1}^{n} C_k^{X_i}\theta_0^{X_i}(1-\theta_0)^{k-X_i} =$$

$$= \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^T \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{kn},\quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

и при $\theta_1 > \theta_0$ величина $\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} > 1$. Поэтому неравенство $l \geqslant c$ эквивалентно неравенству $T \geqslant t$.

Пусть α — заданная вероятность ошибки первого рода. Определим целое число t_α из условия

$$\alpha'' \equiv \sum_{m=t_\alpha+1}^{kn} C_{kn}^m\theta_0^m(1-\theta_0)^{kn-m} < \alpha \leqslant \sum_{m=t_\alpha}^{kn} C_{kn}^m\theta_0^m(1-\theta_0)^{kn-m} \equiv \alpha'. \quad (*)$$

Если здесь $\alpha = \alpha'$, то искомый критерий является нерандомизированным и имеет вид $\mathscr{X}_{1\alpha}^* = \{T \geqslant t_\alpha\}$.

Так как $L_\theta(T) = Bi(kn, \theta)$ (см. задачу 1.39 п. 3), то вероятность ошибки первого рода этого критерия равна

$$W(\mathscr{X}_{1\alpha}^*;\theta_0) = \mathbf{P}_{\theta_0}(T \geqslant t_\alpha) = \alpha' = \alpha,$$

а мощность такова:

$$W(\mathscr{X}_{1\alpha}^*;\theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}(T \geqslant t_\alpha) = \sum_{m=t_\alpha}^{kn} C_{kn}^m\theta_1^m(1-\theta_1)^{kn-m}.$$

Если же в (*) имеет место строгое неравенство ($\alpha < \alpha'$), то критерий Неймана — Пирсона является рандомизированным и задается критической функцией

$$\varphi_\alpha^*(T)=\begin{cases}1 & \text{при } T\geqslant t_\alpha+1,\\ \dfrac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''} & \text{при } T=t_\alpha \quad ,\\ 0 & \text{при } T\leqslant t_\alpha-1.\end{cases}$$

Его мощность

$$W(\varphi_\alpha^*;\ \theta_1)=\mathbf{E}_{\theta_1}\varphi_\alpha^*(T)=\mathbf{P}_{\theta_1}(T\geqslant t_\alpha+1)+\frac{\alpha-\alpha''}{\alpha'-\alpha''}\mathbf{P}_{\theta_1}(T=t_\alpha)=$$
$$=\sum_{m=t_\alpha+1}^{kn}C_{kn}^m\theta_1^m(1-\theta_1)^{kn-m}+(\alpha-\alpha'')\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{t_\alpha}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{kn-t_\alpha}.$$

В этом случае (при $\alpha<\alpha'$) можно также использовать нерандомизированные наиболее мощные критерии $X_{1\alpha'}^*=\{T\geqslant t_\alpha\}$ и $X_{1\alpha''}^*=\{T\geqslant t_\alpha+1\}$ с уровнями значимости соответственно $\alpha'>\alpha$ и $\alpha''<\alpha$.

3.40. При $n\to\infty$ по теореме Муавра—Лапласа

$$L_\theta(T)\sim N(kn\theta,\ kn\theta(1-\theta)),$$

поэтому условие (*) для определения критической границы t_α можно заменить приближенным условием

$$\mathbf{P}_{\theta_0}(T\geqslant t_\alpha)\approx\Phi\left(\frac{kn\theta_0-t_\alpha}{\sqrt{kn\theta_0(1-\theta_0)}}\right)=\alpha.$$

Отсюда следует указанный вид критической области. Далее имеем

$$W_n(\theta_1^{(n)})=\mathbf{P}_{\theta_1^{(n)}}(T\geqslant t_\alpha)=\mathbf{P}_{\theta_1^{(n)}}\left(\frac{T-kn\theta_1^{(n)}}{\sqrt{kn\theta_1^{(n)}(1-\theta_1^{(n)})}}\geqslant\right.$$
$$\left.\geqslant-\sqrt{\frac{kn}{\theta_1^{(n)}(1-\theta_1^{(n)})}}(\theta_1^{(n)}-\theta_0)-u_\alpha\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{\theta_1^{(n)}(1-\theta_1^{(n)})}}\right)=$$
$$=\Phi\left(\beta\sqrt{\frac{k}{\theta_0(1-\theta_0)}}+u_\alpha+o(1)\right)+o(1),$$

что эквивалентно второму утверждению.

3.41. Критерий строится по той же схеме, что и в задаче 3.39. Здесь достаточная статистика имеет вид $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ и при этом $L_\theta(T)=\Pi(n\theta)$, $l(X)=\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^T e^{n(\theta_0-\theta_1)}$. Для определения критической границы t_α при заданной вероятности ошибки первого рода α имеем условие

$$\alpha''\equiv\sum_{m=t_\alpha+1}^{\infty}e^{-n\theta_0}\frac{(n\theta_0)^m}{m!}<\alpha\leqslant\sum_{m=t_\alpha}^{\infty}e^{-n\theta_0}\frac{(n\theta_0)^m}{m!}\equiv\alpha'. \qquad (*)$$

При $\alpha=\alpha'$ критерий имеет вид $X_{1\alpha}^*=\{T\geqslant t_\alpha\}$, а при $\alpha<\alpha'$ он является рандомизированным и его критическая функция $\varphi_\alpha^*(T)$ имеет такой же вид, как и в задаче 3.39 (с учетом обозначений, принятых в (*)).
В любом случае мощность вычисляется по формуле

$$W(\theta_1)=\sum_{m=t_\alpha+1}^{\infty}e^{-n\theta_1}\frac{(n\theta_1)^m}{m!}+(\alpha-\alpha'')\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{t_\alpha}e^{-n(\theta_1-\theta_0)}.$$

Если $n\to\infty$, то $L_\theta(T)\sim N(n\theta,\ n\theta)$, и рассуждая как и при решении задачи 3.40, имеем, что асимптотическая форма критерия имеет вид

$\{T \geqslant n\theta_0 - u_\alpha\sqrt{n}\theta_0\}$, а его мощность при близкой альтернативе $\theta_1 = \theta_1^{(n)} = \theta_0 + \beta/\sqrt{n}$, $\beta > 0$, удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{n\to\infty} W_n(\theta_1^{(n)}) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{\theta_0}} + u_\alpha\right).$$

3.42. Наблюдаемая случайная величина X имеет геометрическое распределение $\overline{Bi}(1, \theta)$ и статистика отношения правдоподобия $l(X) = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^X \frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}$. Следовательно, неравенство $l \geqslant c$ эквивалентно неравенству $X \geqslant t$ и для определения критической границы $t = t_\alpha$ имеем соотношение

$$\alpha = \theta_0^s = \mathbf{P}_{\theta_0}(X \geqslant t_\alpha) = \sum_{m=t_\alpha}^{\infty} \theta_0^m(1-\theta_0) = \theta_0^{t_\alpha},$$

откуда находим $t_\alpha = s$.

Таким образом, в данном случае критерий Неймана — Пирсона имеет вид $X_{1\alpha}^* = \{X \geqslant s\}$ и его мощность

$$1 - \beta = W(\theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}(X \geqslant s) = \sum_{m=s}^{\infty} \theta_1^m(1-\theta_1) = \theta_1^s.$$

3.43. Статистика отношения правдоподобия $l(X) = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \times \exp\left\{\left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{\theta_1}\right) T\right\}$, $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mathbf{L}_\theta(2T/\theta) = \chi^2(2n)$ (см. указание). Если $\theta_0 < \theta_1$, то неравенство $l \geqslant c$ эквивалентно неравенству $T \geqslant t$ и для определения критической границы $t = t_\alpha$ при уровне значимости α имеет соотношение

$$\alpha = \mathbf{P}_{\theta_0}(T \geqslant t_\alpha) = \mathbf{P}_{\theta_0}(2T/\theta_0 \geqslant 2t_\alpha/\theta_0) = \mathbf{P}(\chi^2_{2n} \geqslant 2t_\alpha/\theta_0).$$

Отсюда $2t_\alpha/\theta_0 = \chi^2_{1-\alpha, 2n}$ и, следовательно, оптимальный критерий имеет вид $X_{1\alpha}^* = \left\{T \geqslant \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{1-\alpha,2n}\right\}$. Его мощность равна

$$W(\theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}\left(T \geqslant \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{1-\alpha,2n}\right) = \mathbf{P}_{\theta_1}(2T/\theta_1 \geqslant \theta_0\chi^2_{1-\alpha,2n}/\theta_1) =$$

$$= 1 - F_{2n}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\chi^2_{1-\alpha,2n}\right),$$

где $F_{2n}(t)$ — функция распределения закона $\chi^2(2n)$. Аналогично, при $\theta_0 > \theta_1$ оптимальный критерий имеет вид $X_{1\alpha}^* = \left\{T \leqslant \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{\alpha,2n}\right\}$ и его мощность

$$W(\theta_1) = F_{2n}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\chi^2_{\alpha,2n}\right).$$

3.44. В данном случае множество критических значений наблюдения определяется из условия

$$l(x) = \frac{1+x^2}{1+(x-1)^2} \geqslant c,$$

которое эквивалентно условию $(c-1)x^2 - 2cx + 2c - 1 \leqslant 0$. Если $c = 1$, то неравенство выполняется при $x \geqslant 1/2$. Это означает, что критерий $X_{1\alpha}^* = \{X \geqslant 1/2\}$ имеет уровень значимости

$$\alpha = \mathbf{P}_0\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

и его мощность равна

$$\mathbf{P}_1\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{dx}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Положив $c = 2$, получим неравенство $(x^2-2)^2 \leqslant 1$ или $1 \leqslant x \leqslant 3$. Это означает, что критерий $X_{1\alpha}^* = \{1 \leqslant X \leqslant 3\}$ имеет уровень значимости

$$\alpha = \mathbf{P}_0(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^3\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\ (\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 1)$$

и мощность

$$\mathbf{P}_1(1 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^3\frac{dx}{1+(x-1)^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2.$$

3.45. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из распределения $\mathcal{L}(\xi)$. Если хотя бы одно $|X_i| > a$, то при гипотезе H_0 это невозможное событие, и поэтому в данном случае H_0 следует отвергнуть. В остальных случаях, т. е. при $T_n^{(1)} \equiv \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |X_i| \leqslant a$, решение принимается на основе анализа статистики отношения правдоподобия

$$l(X) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-X_i^2/2\sigma^2}\Big/\frac{1}{(2a)^n} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}T_n^{(2)}\right\},$$

$$T_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

В данном случае неравенство $l \geqslant c$ эквивалентно неравенству $T_n^{(2)} \leqslant t$ и поэтому искомый критерий имеет вид

$$X_{1\alpha}^* = \{T_n^{(1)} > a\} \cup \{T_n^{(1)} \leqslant a,\ T_n^{(2)} \leqslant t_\alpha\} = \{T_n^{(1)} > a \text{ либо } T_n^{(2)} \leqslant t_\alpha\},$$

где при уровне значимости α граница t_α определяется из условия

$$\alpha = \mathbf{P}(X \in X_{1\alpha}^* | H_0) = \mathbf{P}(T_n^{(2)} \leqslant t_\alpha | H_0) = \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant t_\alpha}\ldots\int \frac{dx_1\ldots dx_n}{(2a)^n} =$$

$$= \frac{(\pi t_\alpha)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)(2a)^n}\,^*$$

(так как при гипотезе H_0 событие $\{T_n^{(1)} \leqslant a\}$ достоверно). Для мощности этого критерия имеем, очевидно, оценку

$$W(X_{1\alpha}^*;\ H_1) \geqslant \mathbf{P}(T_n^{(1)} > a | H_1) = 1 - \mathbf{P}^n(|X_1| \leqslant a | H_1) =$$

$$= 1 - \left[1 - 2\Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)\right]^n.$$

Следовательно, при любом значении α вероятность ошибки второго рода β удовлетворяет неравенству

---

* *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1960. Т. 3., с. 392.

$$\beta \leqslant \left[1 - 2\Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)\right]^n.$$

Если $n \to \infty$, то на основании центральной предельной теоремы

$$L(T_n^{(2)} | H_0) \sim N(n\mu,\ nb^2),$$

где

$$\mu = \mathrm{E}(X_1^2 | H_0) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x^2 dx = \frac{a^2}{3},$$

$$b^2 = \mathrm{D}(X_1^2 | H_0) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x^4 dx - \mu^2 = \frac{4}{45}a^4.$$

Следовательно, для определения t_n можно использовать приближенное равенство $\alpha \simeq \Phi\left(\left(t_\alpha - \frac{na^2}{3}\right)\Big/\sqrt{\frac{4na^4}{45}}\right)$, откуда

$$t_\alpha \simeq \frac{na^2}{3} + u_\alpha \frac{2a^2}{3}\sqrt{\frac{n}{5}}.$$

3.46. Обозначим через T_n число положительных исходов в n испытаниях; тогда $L_p(T_n) = Bi(n, p)$ и при гипотезе H_0 событие $\{T_n > 0\}$ невозможно. Следовательно, в рассматриваемом случае критерий естественно задать в виде $X_1 = \{T_n > 0\}$, т. е. при наблюдении $T_n = 0$ принимаем гипотезу H_0, а в остальных случаях — гипотезу H_1. Тогда вероятности ошибок соответственно равны

$$\alpha = \mathbf{P}(T_n > 0 | H_0) = 0, \quad \beta = \mathbf{P}(T_n = 0 | H_1) = 0{,}99^n.$$

Для определения n имеем следующее условие: $0{,}99^n \leqslant 0{,}01$, откуда $n \geqslant 454$.

3.47. Здесь статистика отношения правдоподобия приводится к виду

$$l(X) = \exp\left\{\frac{n}{\sigma^2}(\theta_1 - \theta_0)\bar{X} - \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)\right\},$$

поэтому, если $\theta_1 > \theta_0$, то критическое множество $X_{1\alpha}^*$ имеет вид

$$X_{1\alpha}^* = \{\bar{x} \geqslant \theta_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\},$$

а мощность равна

$$W(\theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}(\bar{X} \geqslant \theta_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) + u_\alpha\right) > \alpha.$$

В случае $\theta_0 > \theta_1$

$$X_{1\alpha}^* = \{\bar{x} \leqslant \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\}, \quad W(\theta_1) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_0 - \theta_1) + u_\alpha\right).$$

3.48. Для определения n имеем два уравнения

$$\Phi(u_\alpha) = \alpha, \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) + u_\alpha\right) = 1 - \beta,$$

откуда находим, что n^* — минимальное целое число, не меньшее чем $\sigma^2(u_\alpha + u_\beta)^2/(\theta_1 - \theta_0)^2$.

3.49. Поскольку $L(T|H_0) = N(0, 1)$, $L(T|H_1) = N(\Delta/\sigma, 1)$, речь идет о различении двух простых гипотез о среднем нормального распределения с единичной дисперсией по одному наблюдению над случайной величиной T.

Из решения задачи 3.47 следует, что искомый критерий имеет вид $X_{1\alpha} = \{T > -u_\alpha\}$, при этом $\beta = \Phi(-u_\alpha - \Delta/\sigma)$. Отсюда, учитывая, что $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$, получаем уравнение для определения m:

$$-u_\alpha - \Delta/\sigma = \Phi^{-1}(\beta) = u_\beta \text{ или } \sigma^2 = \Delta^2(u_\alpha + u_\beta)^{-2}.$$

Разрешая последнее равенство относительно m, окончательно находим, что m^* — минимальное целое число, не меньшее чем

$$(u_\alpha + u_\beta)^2 \Big/ \left[\frac{\Delta^2}{\sigma_2^2} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}(u_\alpha + u_\beta)^2\right].$$

3.50. Пусть H_i: $\theta = \theta_i$, $i = 1,2$, и $\theta_0 > \theta_1$. Если $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — соответствующая выборка, то статистика отношения правдоподобия

$$l(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_1} e^{-\frac{1}{2\theta_1^2}(X_i - \mu)^2} \Big/ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_0} e^{-\frac{1}{2\theta_0^2}(X_i - \mu)^2} =$$

$$= \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{-\frac{\theta_0^2 - \theta_1^2}{2\theta_0^2\theta_1^2} T\right\}, \quad T \equiv \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2,$$

и при этом $L_\theta(T/\theta^2) = \chi^2(n)$. В данном случае неравенство $l \geqslant c$ эквивалентно неравенству $T \leqslant t$, поэтому при уровне значимости α критическая граница $t = t_\alpha$ определяется из условия

$$\alpha = \mathbf{P}_{0_0}(T \leqslant t_\alpha) = \mathbf{P}_{\theta_0}(T/\theta_0^2 \leqslant t_\alpha/\theta_0^2) = F_n(t_\alpha/\theta_0^2),$$

где $F_n(t)$ — функция распределения закона $\chi^2(n)$. Отсюда $t_\alpha/\theta_0^2 = \chi^2_{\alpha, n}$ и искомый критерий имеет вид

$$X^*_{1\alpha} = \{T \leqslant \theta_0^2\chi^2_{\alpha, n}\}.$$

Его мощность

$$W(\theta_1) = \mathbf{P}_{\theta_1}(T \leqslant \theta_0^2\chi^2_{\alpha, n}) = \mathbf{P}_{\theta_1}\left(T/\theta_1^2 \leqslant \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^2\chi^2_{\alpha, n}\right) =$$

$$= F_n\left(\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^2\chi^2_{\alpha, n}\right).$$

Аналогично находим, что при $\theta_0 < \theta_1$ критерий имеет вид

$$X^*_{1\alpha} = \{T \geqslant \theta_0^2\chi^2_{1-\alpha, n}\}$$

и его мощность

$$W(\theta_1) = 1 - F_n\left(\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^2\chi^2_{1-\alpha, n}\right).$$

3.51. 1) Утверждение следует из соотношений

$$\alpha(c) = \int_{X_1(c)} f_0(x)dx \leqslant \frac{1}{c}\int_{X_1(c)} f_1(x)dx = \frac{1}{c}(1 - \beta(c)),$$

$$\beta(c) = \int_{X_0(c)} f_1(x)dx \leqslant c\int_{X_0(c)} f_0(x)dx = c(1 - \alpha(c)), \quad X_0(c) = \bar{X}_1(c).$$

2) Пусть $c > 1$, тогда, используя первое из предыдущих соотношений, имеем

$$\alpha(c) + \beta(c) \leqslant \frac{1}{c}(1 - \beta(c)) + \beta(c) < 1.$$

При $c \leqslant 1$ используем второе неравенство:

$$\alpha(c) + \beta(c) \leqslant \alpha(c) + c(1 - \alpha(c)) \leqslant 1.$$

3) Пусть $c > 1$. Тогда исходим из соотношения

$$\alpha(c) + \beta(c) = \int\limits_{X_1(c)} f_0(x)dx + \int\limits_{X_0(c)} f_1(x)dx = 1 - \int\limits_{X_1(c)} (f_1(x) - f_0(x))dx.$$

Очевидно, $X_1(c) \subseteq X_1(1)$ и на множестве $X_1(1)$ функция $f_1(x) - f_0(x) \geqslant \geqslant 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{X_1(c)} (f_1(x) - f_0(x))\, dx \leqslant \int\limits_{X_1(1)} (f_1(x) - f_0(x))\, dx,$$

откуда $\alpha(c) + \beta(c) \geqslant \alpha(1) + \beta(1)$.

При $c < 1$ рассуждаем аналогично, исходя из соотношения

$$\alpha(c) + \beta(c) = 1 - \int\limits_{X_0(c)} (f_0(x) - f_1(x))dx.$$

4) Если верна гипотеза H_0, то на основании закона больших чисел $T_n(X) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{E}\left(\ln\frac{f_1(X_1)}{f_0(X_1)} \,\Big|\, H_0\right) = \delta$, когда $n \to \infty$. Поэтому при $\delta < 0$

$$\alpha_n = \mathbf{P}(T_n(X) \geqslant 0 | H_0) \leqslant \mathbf{P}(|T_n(X) - \delta| \geqslant |\delta| | H_0) \to 0, \text{ если } n \to \infty,$$

На основании симметрии (если поменять ролями H_0 и H_1) также и $\beta_n \to 0$.

3.52. В данном случае

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}\sqrt{|\boldsymbol{A}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}^{(i)})'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}^{(i)})\right\}, \; i = 0, 1,$$

и область $X_1(c) = \{\boldsymbol{x}: f_1(\boldsymbol{x})/f_0(\boldsymbol{x}) \geqslant c\}$ имеет вид

$$X_1(c) = \{\boldsymbol{x}: \mathbf{a}'\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}'(\boldsymbol{\mu}^{(0)} + \boldsymbol{\mu}^{(1)}) \leqslant c_1 = -\ln c\},$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{(0)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)}).$$

Для случайной величины $Y = \mathbf{a}'\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2}\mathbf{a}'(\boldsymbol{\mu}^{(0)} + \boldsymbol{\mu}^{(1)})$ имеем

$$\boldsymbol{L}(Y|H_i) = \boldsymbol{N}\left((-1)^i\frac{\rho}{2}, \rho\right), \text{ где } \rho = (\boldsymbol{\mu}^{(0)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})'\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{\mu}^{(0)} - \boldsymbol{\mu}^{(1)})$$

— так называемое *расстояние Махаланобиса* между распределениями $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}^{(0)}, \boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}^{(1)}, \boldsymbol{A})$. Отсюда находим вероятности ошибок первого и второго рода критерия $X_1(c)$:

$$\alpha(c) = \mathbf{P}(Y \leqslant c_1 | H_0) = \Phi\left(\frac{c_1 - \rho/2}{\sqrt{\rho}}\right).$$

$$\beta(c) = \mathbf{P}(Y > c_1 | H_1) = \Phi\left(-\frac{c_1 + \rho/2}{\sqrt{\rho}}\right).$$

Если задана вероятность ошибки первого рода α, то соответствующий критерий Неймана — Пирсона задается критической областью $X_1(c)$ при $c_1 = \rho/2 + \sqrt{\rho}u_\alpha$, $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$; при этом вероятность ошибки второго рода равна $\beta = \Phi(-\sqrt{\rho} - u_\alpha)$.

Критерием, минимизирующим сумму вероятностей ошибок, является $X_1(1)$ (см. предыдущую задачу) и эта сумма равна $2\Phi(-\sqrt{\rho}/2)$.

3.53. Из решения задачи 3.39 следует, что рассматриваемая модель обладает монотонным отношением праводоподобия, поэтому полученный в задаче 3.39 критерий Неймана — Пирсона является одновременно р. н. м. критерием данной задачи.

3.55. Поскольку $L_\theta(T_r) = \bar{B}_i(r, \theta)$ — распределение экспоненциального типа с монотонно возрастающей функцией $A(\theta) = \ln\theta$, р. н. м. критерий в рассматриваемой задаче существует и задается критической областью вида $\{T_r \geqslant t\}$ (см. п. 5 гл. 3). По центральной предельной теореме $L_\theta(T_r) \sim N\left(\frac{r\theta}{1-\theta}, \frac{r\theta}{(1-\theta)^2}\right)$ при $r \to \infty$, поэтому для расчета критической границы $t = t_\alpha$ при больших r можно воспользоваться соотношениями

$$\alpha = \mathbf{P}_{\theta_0}(T_r \geqslant t_\alpha) \simeq \Phi\left(\left(\frac{r\theta_0}{1-\theta_0} - t_\alpha\right)\Big/\sqrt{\frac{r\theta_0}{(1-\theta_0)^2}}\right),$$

откуда следует указанная формула для t_α.

3.57. В данном случае

$$\mathbf{P}_\theta(T = x) = f(x; \theta) = C_\theta^x C_{N-\theta}^{n-x}/C_N^n, \ x = 0, 1, \ldots, \theta,$$

поэтому функция

$$l(x) = \frac{f(x; \theta+1)}{f(x; \theta)} = \frac{\theta+1}{N-\theta}\,\frac{N-\theta-n+x}{\theta+1-x}$$

монотонно возрастает по x. Следовательно, в данной задаче р. н. м. критерий существует и имеет вид $\{T \geqslant t\}$, т. е. гипотеза H_0 отвергается, когда T чрезмерно велико.

3.60. Рассмотрим класс критериев вида

$$\mathscr{X}_{1\alpha} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - \theta_0) \leqslant u_{\alpha_1}\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - \theta_0) \geqslant -u_{\alpha_2}\right\},$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, и рассмотрим также функцию мощности

$$W(\mathscr{X}_{1\alpha}; \theta) = \Phi(\sqrt{n}\Delta/\sigma + u_{\alpha_2}) + \Phi(-\sqrt{n}\Delta/\sigma + u_{\alpha_1}), \ \Delta = \theta - \theta_0.$$

Легко убедиться в том, что мощность минимальна при $\Delta = \Delta_0 = \sigma(u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2})/(2\sqrt{n})$. Так как $W(\mathscr{X}_{1\alpha}; \theta_0) = \alpha$ (т. е. при $\Delta = 0$), то несмещенность имеет место лишь при $\Delta_0 = 0$, т. е. при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$. Таким образом, искомый критерий имеет вид

$$\bar{\mathscr{X}}_{1\alpha} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\bar{x} - \theta_0| \geqslant -u_{\alpha/2}\right\}.$$

Этот критерий является р. н. м. критерием среди всех несмещенных критериев.

3.61. Здесь функция правдоподобия

$$L(\mathbf{x}; \theta) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\theta)^n} e^{-T(\mathbf{x})/2\theta^2}, \quad T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2, \text{ и}$$

$$L_1(\mathbf{x}; \theta) = \frac{\partial L(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} = \left(\frac{T(\mathbf{x})}{\theta^3} - \frac{n}{\theta}\right) L(\mathbf{x}; \theta).$$

Поэтому неравенство $L(\mathbf{x}; \theta_1) \geqslant cL(\mathbf{x}; \theta_0) + c_1 L_1(\mathbf{x}; \theta_0)$, определяющее наилучшую критическую область, имеет в данном случае вид (см. решение задачи 3.50)

$$e^{aT} \geqslant c' + c_1' T \qquad \text{или} \quad \{T \leqslant t_1\} \cup \{T \geqslant t_2\}.$$

Итак, искомый критерий имеет вид

$$\tilde{X}_1 = \{T \leqslant t_1\} \cup \{T \geqslant t_2\},$$

где границы $t_1 < t_2$ определяются при заданном уровне значимости α двумя условиями: $W(\theta_0) = \alpha$, $W'(\theta_0) = 0$, где $W(0)$ — функция мощности. Но (см. решение задачи 3.50)

$$W(\theta) = \mathbf{P}_0(X \in \tilde{X}_1) = \mathbf{P}_0(T \leqslant t_1) + \mathbf{P}_0(T \geqslant t_2) = F_n(t_1/\theta^2) + 1 - F_n(t_2/\theta^2),$$

откуда имеем два уравнения

$$F_n(t_1/\theta_0^2) + 1 - F_n(t_2/\theta_0^2) = \alpha, \quad t_1 k_n(t_1/\theta_0^2) = t_2 k_n(t_2/\theta_0^2),$$

где $k_n(t) = F_n'(t)$. Полагая $t_1 = \theta_0^2 \chi^2_{\alpha_1 n}$, $t_2 = \theta_0^2 \chi^2_{1-\alpha_2, n}$, получим, что должны выполняться условия

$$\chi^2_{\alpha_1, n} k_n(\chi^2_{\alpha_1, n}) = \chi^2_{1-\alpha_2, n} k_n(\chi^2_{1-\alpha_2, n}), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

Этими условиями $\chi^2_{\alpha_1, n}$ и $\chi^2_{1-\alpha_2, n}$, а тем самым t_1 и t_2, однозначно определяются. Следовательно, искомый критерий имеет вид

$$\tilde{X}_{1\alpha} = \{T \leqslant \theta_0^2 \chi^2_{\alpha_1, n}\} \cup \{T \geqslant \theta_0^2 \chi^2_{1-\alpha_2, n}\}$$

и представляет собой объединение двух односторонних р. н. м. критериев задачи 3.59. Значения $(\chi^2_{\alpha_1, n}, \chi^2_{1-\alpha_2, n})$ для $\alpha = 0{,}05$ и $n = 2, 5, 10, 20$ см. в [1, с. 86].

3.62. Схемы решения данной и предыдущей задачи аналогичны. Используя решение задачи 3.43 и введенные там обозначения, найдем, что критерий имеет вид $\tilde{X}_1 = \{T \leqslant t_1\} \cup \{T \geqslant t_2\}$ и его функция мощности равна

$$W(\theta) = F_{2n}(2t_1/\theta) + 1 - F_{2n}(2t_2/\theta).$$

Для определения границ t_1 и t_2 имеем два уравнения: $W(\theta_0) = \alpha$, $W'(\theta_0) = 0$, которые при замене $t_1 = \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{\alpha_1, 2n}$, $t_2 = \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{1-\alpha_2, 2n}$ принимают вид

$$\chi^2_{\alpha_1, 2n} k_{2n}(\chi^2_{\alpha_1, 2n}) = \chi^2_{1-\alpha_2, 2n} k_{2n}(\chi^2_{1-\alpha_2, 2n}), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

Определив отсюда $\chi^2_{\alpha_1, 2n}$ и $\chi^2_{1-\alpha_2, 2n}$, получим, что при уровне значимости α искомый критерий имеет вид

$$\tilde{X}_{1\alpha} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{\alpha_1, 2n} \text{ либо } \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{1-\alpha_2, 2n} \right\}$$

и представляет собой объединение двух соответствующих односторонних р. н. м. критериев для альтернатив $H_1^-: \theta < \theta_0$ и $H_1^+: \theta > \theta_0$, которые следует из задачи 3.43 и свойств экспоненциальной модели.

3.63. В данном случае (см. решение задачи 3.39) функция правдоподобия $L(x; \theta) = \prod_{i=1}^{n} C_k^{x_i} \theta^{x_i}(1-\theta)^{k-x_i}$, поэтому

$$U(x; \theta) = \frac{\partial \ln L(x; \theta)}{\partial \theta} = \frac{T(x) - kn\theta}{\theta(1-\theta)}, \quad T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Кроме того (см. задачу 2.43), $i(\theta) = k/[\theta(1-\theta)]$, поэтому искомый критерий (см. указание) имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{|T - kn\theta_0|/\sqrt{kn\theta_0(1-\theta_0)} \geqslant -u_{\alpha/2}\}.$$

Мощность этого критерия при указанных альтернативах вычисляется так же, как и в задаче 3.40.

3,64. В данном случае $L(\boldsymbol{x}; \theta) = e^{-n\theta}\theta^{T(\boldsymbol{x})}/(x_1! \dots x_n!)$, $T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, поэтому $U(\boldsymbol{x}; \theta) = (T(\boldsymbol{x}) - n\theta)/\theta$, а $i(\theta) = 1/\theta$ (см. задачу 2.43). Отсюда искомый критерий имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{|T - n\theta_0|\sqrt{n\theta_0} \geqslant -u_{\alpha/2}\}.$$

Его мощность вычисляется так же, как и в задаче 3.41.

3.65. Используя обозначения, введенные при решении задачи 2.119, находим, что критическая область $X_{1\alpha}$ для сформулированных задач имеет следующий вид:

1) $X_{1\alpha} = \{\boldsymbol{x} : \bar{x} \geqslant \theta_{10} + t_{1-\alpha, n-1}S(\boldsymbol{x})/\sqrt{n-1}\}$;

2) $X_{1\alpha} = \{\boldsymbol{x} : \bar{x} \leqslant \theta_{10} - t_{1-\alpha, n-1}S(\boldsymbol{x})/\sqrt{n-1}\}$ (ср. с решениями для случая известной дисперсии — задачи 3.47 и 3.58);

3) $X_{1\alpha} = \{\boldsymbol{x} : \sqrt{n-1}\dfrac{|\bar{x}-\theta_{10}|}{S(\boldsymbol{x})} \geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\}$ (ср. с результатом задач 3.60 и 3.73);

4) $X_{1\alpha} = \{\boldsymbol{x} : nS^2(\boldsymbol{x}) \geqslant \theta_{20}^2\chi_{1-\alpha, n-1}^2\}$;

5) $X_{1\alpha} = \{\boldsymbol{x} : nS^2(\boldsymbol{x}) \leqslant \theta_{20}^2\chi_{\alpha, n-1}^2\}$ (ср. с результатом задач 3.50 и 3.59);

6) $X_{1\alpha} = \{\boldsymbol{x} : nS^2(\boldsymbol{x}) \leqslant \theta_{20}^2\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$ либо $nS^2(\boldsymbol{x}) \geqslant \theta_{20}^2\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\}$ (ср. с результатом задач 3.61 и 3.74).

Действительно, рассмотрим, например, первую задачу (для остальных задач рассуждения аналогичны). Используя для θ_1 нижний γ-доверительный интервал $G_\gamma(\boldsymbol{X}) = \{\theta_1 : \bar{X} - t_{\gamma, n-1}S(\boldsymbol{X})/\sqrt{n-1} < \theta_1 < \infty\}$, получаем, что область принятия гипотезы H_0 с уровнем значимости $\alpha = 1 - \gamma$ имеет вид $X_{0\alpha} = \{\boldsymbol{x} : \bar{x} - t_{\gamma, n-1}S(\boldsymbol{x})/\sqrt{n-1} < \theta_{10}\}$. Но $X_{1\alpha} = \bar{X}_{0\alpha}$ имеет вид, указанный в ответе задачи.

3.68. Используя γ-доверительный интервал для отношения τ, построенный в задаче 2.127, находим, что область принятия гипотезы H_0 имеет в данном случае вид

$$X_{0\alpha} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \frac{\bar{y}}{\bar{x}}F_{\frac{1-\gamma}{2}, 2n, 2m} < 1 < \frac{\bar{y}}{\bar{x}}F_{\frac{1+\gamma}{2}, 2n, 2m}\}, \quad \alpha = 1 - \gamma.$$

Отсюда искомый критерий задается критической областью

$$X_{1\alpha} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \leqslant F_{\frac{\alpha}{2}, 2n, 2m} \text{ либо } \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \geqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}, 2n, 2m}\},$$

и его мощность

$$W(\theta) = \mathbf{P}_\theta\left(\tau\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \leqslant \tau F_{\frac{\alpha}{2}, 2n, 2m}\right) + \mathbf{P}_\theta\left(\tau\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \geqslant \tau F_{1-\frac{\alpha}{2}, 2n, 2m}\right) =$$

$$= F(\tau F_{\frac{\alpha}{2}, 2n, 2m}; 2n, 2m) + 1 - F(\tau F_{1-\frac{\alpha}{2}, 2n, 2m}; 2n, 2m), \ \tau = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

3.69. Обращая построенный в задаче 2.128 γ-доверительный интервал, находим критическое множество для гипотезы H_0:

$$X_{1\alpha} = \{\boldsymbol{x} : x_{(1)} \leqslant \theta_0 \text{ либо } x_{(1)} \geqslant \theta_0 - (\ln\alpha)/n\}.$$

Так как

$$\mathbf{P}_\theta(X_{(1)} \geqslant t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < \theta, \\ e^{-n(t-\theta)} & \text{при } t \geqslant \theta, \end{cases}$$

(см. решение задачи 2.128), то функция мощности этого критерия равна

$$W(\theta) = \mathbf{P}_\theta(X_{(1)} \leqslant \theta_0) + \mathbf{P}_\theta(X_{(1)} \geqslant \theta_0 - (\ln\alpha)/n) =$$
$$= \begin{cases} 1, \ \theta \geqslant \theta_0 - (\ln\alpha)/n \\ \alpha e^{n(\theta-\theta_0)}, \ \theta_0 < \theta < \theta_0 - (\ln\alpha)/n, \\ 1 - (1-\alpha)e^{n(\theta-\theta_0)}, \ \theta \leqslant \theta_0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $W(\theta) \geqslant \alpha$ при всех θ.

3.70. Искомый критерий имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{x : x_{(n)} \leqslant \theta_0\alpha^{1/n} \text{ либо } x_{(n)} \geqslant \theta_0\},$$

а его функция мощности

$$W(\theta) = \mathbf{P}_\theta(X_{(n)} \leqslant \theta_0\alpha^{1/n}) + \mathbf{P}_\theta(X_{(n)} \geqslant \theta_0) =$$
$$= \min\left(\alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n, 1\right) + 1 - \min\left(\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n, 1\right) =$$
$$= \begin{cases} 1, \ \theta < \theta_0\alpha^{1/n}, \\ \alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n, \ \theta_0\alpha^{1/n} \leqslant \theta \leqslant \theta_0, \\ 1 - (1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n, \ \theta > \theta_0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $W(\theta) \geqslant \alpha \ \forall\theta$.

3.71. Утверждение о выборе границ в несмещенном критерии следует из совпадения распределений соответствующих статистик.

3.72. Обращая построенную в задаче 2.132 доверительную область, находим, что критерий имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{x : n(\bar{x}_1 - \theta_{10}, \bar{x}_2 - \theta_{20})' \Sigma^{-1} (x_1 - \theta_{10}, x_2 - \theta_{20}) > \chi^2_{1-\alpha, 2}\}.$$

3.73. Здесь $\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) : -\infty < \theta_1 < \infty, \ \theta_2 > 0\}$ и (см. решение задачи 2.86)

$$\sup_\Theta L(x; \theta) = L(x; (\bar{x}, s)) = (2\pi e s^2)^{-n/2}, \ s^2 = S^2(x).$$

Далее, $\Theta_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) : \theta_1 = \theta_{10}, \theta_2 > 0\}$ и

$$\sup_{\Theta_0} L(x; \theta) = L(x; (\theta_{10}, s_0)) = (2\pi e s_0^2)^{-n/2},$$

где $s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta_{10})^2$ — о. м. п. для θ_2^2 при гипотезе H_0. Так как $s_0^2 = s^2 + (\bar{x} - \theta_{10})^2$, то

$$\lambda_n = \lambda_n(x) = (s_0^2/s^2)^{-n/2} = (1 + t^2/(n-1))^{-n/2},$$

где $t = t(x) = \sqrt{n-1}(\bar{x} - \theta_{10})/s$. Поэтому неравенство $\lambda_n \leqslant c$ эквивалентно неравенству $|t| \geqslant c'$. Таким образом, в данном случае к. о. п. имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{x : \sqrt{n-1}|\bar{x} - \theta_{10}|/s \geqslant c'\}.$$

Так как статистика критерия $t(X)$ имеет при гипотезе H_0 распределение Стьюдента $S(n-1)$, то граница $c' = t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ (ср. с задачей 3.65 п. 3).

Распределение $S(n-1)$ при больших n аппроксимируется распределением $N(0, 1)$ (см. задачу 1.47), поэтому критическую границу c' можно полагать приближенно равной $-u_{\alpha/2}$. Отметим также, что $u^2_{\alpha/2} = \chi^2_{1-\alpha, 1}$. Далее, информационная матрица $I(\theta)$ модели $N(\theta_1, \theta_2^2)$

вычислена в задаче 2.44, откуда имеем, что первый главный минор матрицы $I^{-1}(0)$ есть θ_2^2. Согласно асимптотической теории о. м. п., предел мощности при рассматриваемых альтернативах равен $1 - F_1(\chi^2_{1-\alpha, 1}; \lambda^2)$, где в данном случае $\lambda^2 = \beta^2/\theta_2^2$.

3.74. В данном случае (см. решение задачи 3.73)

$$\sup_{\Theta} L(x; \theta) = L(x; (\bar{x}, s)) = (2\pi e s^2)^{-n/2}, \ s^2 = S^2(x),$$

$$\sup_{\Theta_0} L(x; \theta) = L(x; (\bar{x}, \theta_{20})) = (2\pi\theta_{20}^2)^{-n/2} e^{-ns^2/2\theta_{20}^2},$$

откуда

$$\lambda_n(x) = (te^{-t+1})^{n/2}, \ t = s^2/\theta_{20}^2.$$

Здесь неравенство $\lambda_n \leqslant c$, определяющее критическую область к. о. п., записывается в виде $\{t \leqslant t_1\} \cup \{t \geqslant t_2\}$, $t_1 < t_2$, поэтому критерий имеет вид

$$X_1 = \{x: S^2(x)/\theta_{20}^2 \leqslant t_1 \text{ либо } S^2(x)/\theta_{20}^2 \geqslant t_2\}.$$

Из указания следует, что функция мощности такого критерия равна

$$W(\theta) = F_{n-1}\left(\frac{n\theta_{20}^2}{\theta_2^2} t_1\right) + 1 - F_{n-1}\left(\frac{n\theta_{20}^2}{\theta_2^2} t_2\right).$$

Отсюда, выбирая $t_1 = \chi^2_{\alpha_1, n-1}/n$, $t_2 = \chi^2_{1-\alpha_2, n-1}/n$ при $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, получаем, что $W(\theta_0) = \alpha$. Тем самым получаем указанный в формулировке задачи результат (ср. с задачей 3.65 п. 6)).

Чтобы получить несмещенный критерий, надо обеспечить выполнение условия $W'(\theta_0) = 0$, которое сводится к уравнению

$$\chi^2_{\alpha_1, n-1} k_{n-1}(\chi^2_{\alpha_1, n-1}) = \chi^2_{1-\alpha_2, n-1} k_{n-1}(\chi^2_{1-\alpha_2, n-1}).$$

Замечание. Асимптотический (при $n \to \infty$) вариант рассматриваемого критерия исследован в [1, с. 175—176].

3.75. Поскольку оценка максимального правдоподобия параметра θ в модели $Bi(1, \theta)$ по выборке объема n равна $\hat{\theta}_n = \bar{X}$ (см. задачи 2.84 и 2.48), статистика

$$\lambda_n = \frac{\theta_0^{n\bar{X}}(1 - \theta_0)^{n(1-\bar{X})}}{\bar{X}^{n\bar{X}}(1 - \bar{X})^{n(1-\bar{X})}}.$$

Но в данном случае имеет место полиномиальная модель с $N = 2$ исходами, поэтому (см. [1, с. 170—171]) при $n \to \infty$ предельные распределения при гипотезе H_0 статистик $-2\ln\lambda_n$ и

$$X_n^2 = \frac{(T - n\theta_0)^2}{n\theta_0} + \frac{(n - T - n(1 - \theta_0))^2}{n(1 - \theta_0)} = \frac{(T - n\theta_0)^2}{n\theta_0(1 - \theta_0)}, \ T = n\bar{X},$$

совпадают и есть $\chi^2(1)$. Это отражает тот факт, что $L_{\theta_0}(T) \sim N(n\theta_0, n\theta_0(1 - \theta_0))$ при $n \to \infty$. Таким образом, к.о.п. $\{\lambda_n \leqslant c\}$ асимптотически эквивалентен критерию $\{X_n^2 \geqslant t\}$, который совпадает с критерием, построенным в задаче 3.63 (при $k = 1$).

3.76. В данном случае о.м.п. $\hat{\theta}_n = \bar{X} = T/n$ (см. задачу 2.109), поэтому статистика $\lambda_n = (n\theta_0/T)^T e^{T - n\theta_0}$. Далее, из решения задачи 3.64 следует, что статистика $Q_n^{(2)} = (T - n\theta_0)^2/n\theta_0$, следовательно, асимптотически к.о.п. эквивалентен критерию $\{|T - n\theta_0|/\sqrt{n\theta_0} \geqslant t\}$, исследованному в задаче 3.64.

3.77. Обозначим через $L_j(\theta_j) = \theta_j^{n_j\bar{X}_j}(1 - \theta_j)^{n_j(1-\bar{X}_j)}$ функцию правдоподобия для j-й выборки, $j = 1, \ldots, k$. Тогда, в силу независимости выборок, функция правдоподобия для всех данных есть $L(\theta_1, ..., \theta_k) = L_1(\theta_1) ... L_k(\theta_k)$. Далее, так как о.м.п. параметра бернуллиевской модели совпадает со средним арифметическим выборки, то отсюда имеем

$$\max_{\theta_1, ..., \theta_k} L(\theta_1, ..., \theta_k) = \prod_{j=1}^{k} \max_{\theta_j} L_j(\theta_j) = \prod_{j=1}^{k} L_j(\bar{X}_j) = \prod_{j=1}^{k} \bar{X}_j^{n_j\bar{X}_j}(1 - \bar{X}_j)^{n_j(1-\bar{X}_j)},$$

$$\max_{\theta_1 = ... = \theta_k} L(\theta_1, ..., \theta_k) = \max_{\theta} L(\theta, ..., \theta) = \max_{\theta} \theta^{n\bar{X}}(1 - \theta)^{n(1-\bar{X})} = \bar{X}^{n\bar{X}}(1 - \bar{X})^{n(1-\bar{X})},$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n}(n_1\bar{X}_1 + ... + n_k\bar{X}_k)$, $n = n_1 + ... + n_k$.

Таким образом, в данном случае статистика отношения правдоподобия имеет вид

$$\lambda_{n_1 ... n_k} = \bar{X}^{n\bar{X}}(1 - \bar{X})^{n(1-\bar{X})} \Big/ \prod_{j=1}^{k} \bar{X}_j^{n_j\bar{X}_j}(1 - \bar{X}_j)^{n_j(1-\bar{X}_j)} = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}_j}\right)^{n_j\bar{X}_j} \left(\frac{1 - \bar{X}}{1 - \bar{X}_j}\right)^{n_j(1-\bar{X}_j)}.$$

Наконец, размерность нулевой гипотезы $\dim H_0 = 1$ (одна степень свободы), поэтому асимптотически к.о.п. [1, с. 175] имеет вид

$$\mathscr{X}_{1\alpha} = \left\{ 2\sum_{j=1}^{k} n_j [\bar{x}_j (\ln \bar{x}_j - \ln \bar{x}) + (1 - \bar{x}_j)(\ln(1 - \bar{x}_j) - \ln(1 - \bar{x}))] \geqslant \chi^2_{1-\alpha, k-1} \right\}.$$

Стандартный же критерий однородности χ^2 [1, с. 126] имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{\bar{x}(1 - \bar{x})} \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha, k-1} \right\}.$$

3.78. Схема решения такая же, как в предыдущей задаче. Используя те же обозначения и учитывая, что в данном случае

$$L_j(\theta_j) = e^{-n_j\theta_j}\theta_j^{n_j\bar{X}_j} \Big/ \prod_{r=1}^{n_j} X_{jr}!, \quad j = 1, ..., k,$$

найдем, что

$$\lambda_{n_1 ... n_k} = \bar{X}^{n\bar{X}} \Big/ \prod_{j=1}^{k} \bar{X}_j^{n_j\bar{X}_j} = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}_j}\right)^{n_j\bar{X}_j},$$

и при $n_1, ..., n_k \to \infty$ к.о.п. имеет вид

$$\mathscr{X}_{1\alpha} = \left\{ 2\sum_{j=1}^{k} n_j\bar{x}_j (\ln \bar{x}_j - \ln \bar{x}) \geqslant \chi^2_{1-\alpha, k-1} \right\}.$$

3.79. Обозначим через $L_j(\theta_{1j}, \theta_2)$ функцию правдоподобия для j-й выборки, $j = 1, ..., k$, и через $L(\theta_{11}, ..., \theta_{1k}, \theta_2) = \prod_{j=1}^{k} L_j(\theta_{1j}, \theta_2)$ — для всех данных. Кроме того, положим $n = n_1 + \ldots + n_k$, $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} n_j S_j^2$, $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} n_j \overline{X}_j$; пусть S^2 — выборочная дисперсия для всех данных. Тогда (см. задачу 2.114) о.м.п. параметров $(\theta_{11}, \ldots, \theta_{1k}, \theta_2)$ являются $(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k, S_0)$ и $L(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k, S_0) = (2\pi e S_0^2)^{-n/2}$. При гипотезе H_0 все данные можно рассматривать как выборку объема n из совокупности $N(\theta_1, \theta_2^2)$ и поэтому (см. задачу 2.86)

$$\max_{\theta_1, \theta_2} L(\theta_1, \ldots, \theta_1, \theta_2) = L(\overline{X}, \ldots, \overline{X}, S) = (2\pi e S^2)^{-n/2}.$$

Таким образом, статистика отношения правдоподобия в данном случае равна

$$\lambda_{n_1 \ldots n_k} = \left(\frac{S^2}{S_0^2}\right)^{-n/2} = \left(nS^2 \Big/ \sum_{j=1}^{k} n_j S_j^2\right)^{-n/2}.$$

Число параметров, определяющих модель, равно $k + 1$, а размерность нулевой гипотезы равна 2, поэтому асимптотическая форма к.о.п. имеет вид

$$X_{1\alpha} = \{n(\ln S^2 - \ln S_0^2) \geqslant \chi^2_{1-\alpha, k-1}\}.$$

Если $k = 2$, то непосредственно проверяется, что

$$nS^2 = n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2 + \frac{n_1 n_2}{n} (\overline{X}_1 - \overline{X}_2)^2,$$

откуда

$$\lambda_{n_1 n_2} = (1 + T^2/(n - 2))^{-n/2},$$

где T задано в формулировке задачи. Здесь неравенство $\lambda_{n_1 n_2} \leqslant c$ эквивалентно неравенству $|T| \geqslant t$, откуда и следует указанный в формулировке вид критерия.

3.80. Пусть $L_j(\theta_{1j}, \theta_{2j})$ — функция правдоподобия для j-й выборки, $j = 1, \ldots, k$, а $L = \prod_{j=1}^{k} L_j(\theta_{1j}, \theta_{2j})$ — для всех данных. Тогда, как и в предыдущей задаче, имеем, что для общей модели

$$\max L = \prod_{j=1}^{k} \max L_j(\theta_{1j}, \theta_{2j}) = \prod_{j=1}^{k} (2\pi e S_j^2)^{-n_j/2},$$

а при гипотезе H_0

$$\max L = \max \prod_{j=1}^{k} L_j(\theta_{1j}, \theta_2) = (2\pi e S_0^2)^{-n/2}.$$

Отсюда

$$\lambda_{n_1 \ldots n_k} = \prod_{j=1}^{k} S_j^{n_j}/S_0^n = \prod_{j=1}^{k} (S_j/S_0)^{n_j}.$$

В данном случае число параметров, определяющих модель, равно $2k$, а размерность нулевой гипотезы равна $k + 1$, поэтому асимптотически при $n_1, \ldots, n_k \to \infty$ к.о.п. имеет вид

$$X_{1\alpha}=\left\{\sum_{j=1}^{k} n_j(\ln S_0^2-\ln S_j^2)\geqslant\chi^2_{1-\alpha,\,k-1}\right\}.$$

При $k=2$ имеем

$$\lambda_{n_1n_2}=\left(\frac{nS_1^2}{n_1S_1^2+n_2S_2^2}\right)^{n_1/2}\cdot\left(\frac{nS_2^2}{n_1S_1^2+n_2S_2^2}\right)^{n_2/2}=$$
$$=\frac{n^{n/2}}{n_1^{n_1/2}n_2^{n_2/2}}\left(\frac{n_1-1}{n_2-1}\right)^{n_1/2}F^{n_1/2}\left(1+\frac{n_1-1}{n_2-1}F\right)^{-n/2}$$

и неравенство $\lambda_{n_1n_2}\leqslant c$ эквивалентно условию $\{F\leqslant c_1\}\cup\{F\geqslant c_2\}$, $c_1<c_2$. Отсюда, используя указание, получаем приведенный в формулировке задачи вид критерия.

3.81. При гипотезе H_0 все X_i имеют некоторое распределение $N(\theta_1,\theta_2^2)$. Но в этом случае (см. решение задачи 1.58) статистика $\eta=\dfrac{X_1-\overline{X}}{\sqrt{n-1}\,S}$ имеет распределение, не зависящее от параметров (θ_1,θ_2), симметричное относительно нуля, и при этом

$$\mathbf{P}(\eta>v)=\frac{1}{2}B\left(1-v^2;\frac{n-2}{2},\frac{1}{2}\right),\ 0<v<1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(X_{1\alpha}|H_0)=B\left(1-v_\alpha^2;\frac{n-2}{2},\frac{1}{2}\right)=\alpha,$$

т. е. вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу H_0 при $|\eta|>v_\alpha$ равна α. Таким образом, $X_{1\alpha}$ — подходящая критическая область.

3.82. Так как гипотеза H_0 эквивалентна в данном случае утверждению $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=0$, то согласно задаче 1.59 п. в)

$$L(\rho_n\sqrt{(n-2)/(1-\rho_n^2)}|H_0)=S(n-2),$$

откуда можем записать (в силу симметрии распределения Стьюдента), что

$$\mathbf{P}(|\rho_n|\sqrt{(n-2)/(1-\rho_n^2)}>t_{1-\alpha/2,\,n-2}|H_0)=\alpha.$$

Но последнее неравенство эквивалентно неравенству, определяющему область $X_{1\alpha}$, следовательно, $\mathbf{P}(X_{1\alpha}|H_0)=\alpha$. Это означает, что вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу H_0 при $\rho_n\in X_{1\alpha}$ равна α, т. е. $X_{1\alpha}$ — искомый критерий.

3.83. Согласно задаче 1.60, $L(T_n|H_0)\to N(0,1)$ при $n\to\infty$, поэтому $\mathbf{P}(|T_n|\geqslant -u_{\alpha/2}|H_0)\to 2\Phi(u_{\alpha/2})=\alpha$, что и утверждается.

3.84. Пусть наблюдаемые случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ независимы, имеют одинаковое и известное среднее μ и конечные дисперсии. Если гипотеза H_0 означает, что все X_i одинаково распределены, то при больших n статистика T_n имеет при H_0 приближенно нормальное $N(0,1)$ распределение. Следовательно, статистика T_n позволяет построить критерий согласия для H_0, который имеет такой же вид, как и в задаче 3.83.

3.85. 1) Так как

$$W_n(\theta_0)=\mathbf{P}_{\theta_0}(T_n\geqslant\gamma_n)=\mathbf{P}_{\theta_0}(\sqrt{n}\ (T_n-\mu(\theta_0))/\sigma(\theta_0)\geqslant -u_\alpha),$$

то согласно свойству (а) $W_n(\theta_0)\to\Phi(u_\alpha)=\alpha$ при $n\to\infty$, т. е. критерий $X_{1\alpha}$ асимптотически имеет уровень значимости α.

2) Аналогично имеем

$$W_n(\theta^{(n)})=\mathbf{P}_{\theta^{(n)}}(T_n\geqslant\gamma_n)=\mathbf{P}_{\theta^{(n)}}(\sqrt{n}(T_n-\mu(\theta^{(n)}))/\sigma(\theta^{(n)})\geqslant z_\alpha^{(n)}),$$

где

$$-z_\alpha(n) = \sqrt{n}\ (\mu(\theta^{(n)}) - \mu(\theta_0))/\sigma(\theta^{(n)}) + u_\alpha\sigma(\theta_0)/\sigma(\theta^{(n)}).$$

Согласно свойству (б) $-\tilde{z}_\alpha(n) \to \beta\mu'(\theta_0)/\sigma(\theta_0) + u_\alpha$ при $n \to \infty$. Из этих соотношений в силу свойства (а) получаем указанное предельное равенство.

3.86. Из предыдущего доказательства имеем

$$\Phi(\beta\sqrt{e_1'} + u_\alpha) = \lim_{n\to\infty} W_n^{(1)}\left(\theta_0 + \frac{\beta}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} W_{N_n}^{(2)}\left(\theta_0 + \frac{\beta}{\sqrt{N_n}}\sqrt{\frac{N_n}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} W_{N_n}^{(2)}\left(\theta_0 + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda N_n}}\right) = \Phi(\beta\sqrt{e_2'/\lambda} + u_\alpha).$$

Отсюда $\sqrt{e_1'} = \sqrt{e_2'/\lambda}$ или $\lambda = e_2'/e_1'$.

3.87. В рассматриваемом случае $L_0(T_n^{(1)}) = N(\theta, \sigma^2/n)$, поэтому (см. задачи 3.86 и 3.85) критерий имеет вид $X_{1\alpha}^{(1)} = \{\bar{X} \geqslant \theta_0 - u_\alpha\sigma/\sqrt{n}\}$, его эффективность Питмена $e_1(\beta, \alpha) = \Phi(\beta/\sigma + u_\alpha)$ и $e_1' = \sigma^{-2}$. Аналогично (см. задачу 1.32) имеем $L_0(T_n^{(2)}) \sim N\left(\theta, \frac{\pi\sigma^2}{2n}\right)$, откуда $X_{1\alpha}^{(2)} = \left\{Z_{n,1/2} \geqslant \theta_0 - u_\alpha\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\right\}$, $e_2(\beta, \alpha) = \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} + u_\alpha\right)$, $e_2' = \frac{2}{\pi\sigma^2}$. Следовательно, $\lambda = e_2'/e_1' = 2/\pi$.

3.88. Запишем функцию правдоподобия $L(\boldsymbol{x}; \theta)$ в виде

$$L(\boldsymbol{x};\ \theta) = ((2\pi)^n|\textstyle\sum|)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}Q_\theta(\boldsymbol{x})\right\},$$

где квадратичная форма $Q_\theta(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \theta\boldsymbol{t})'\sum^{-1}(\boldsymbol{x} - \theta\boldsymbol{t})$ может быть разложена в сумму

$$Q_\theta(\boldsymbol{x}) = Q_0(\boldsymbol{x}) - 2\theta\boldsymbol{t}'\textstyle\sum^{-1}\boldsymbol{x} + \theta^2 Q_0(\boldsymbol{t}).$$

Замечая, что $\boldsymbol{t}$ — последний столбец (а значит, и последняя строка) матрицы $\sum$, т. е. $(0\ldots01)\sum = \boldsymbol{t}'$, находим $\boldsymbol{t}'\sum^{-1} = (0\ldots01)$. Отсюда $\boldsymbol{t}'\sum^{-1}\boldsymbol{x} = x_n$ и, таким образом,

$$Q_\theta(\boldsymbol{x}) = Q_0(\boldsymbol{x}) + \theta^2 t_n - 2\theta x_n.$$

Это означает, что $L(\boldsymbol{x}; \theta) = g(T(\boldsymbol{x}); \theta)\,h(\boldsymbol{x})$, где $T(\boldsymbol{x}) = x_n$, а $g(T; \theta) = \exp\left\{\theta T - \frac{1}{2}\theta^2 t_n\right\}$. Отсюда согласно критерию факторизации следует, что X_n — достаточная статистика, и тем самым все статистические задачи в рассматриваемой модели надо решать, основываясь на этой статистике. Но $L_\theta(X_n) = N(\theta t_n, t_n)$, следовательно, имеет место нормальное распределение, у которого неизвестно среднее. Таким образом, сформулированная задача эквивалентна задаче проверки гипотез о неизвестном среднем одномерного нормального распределения по одному наблюдению, которая решена в задачах 3.47, 3.58 и 3.60.

4.1. Имеем

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix}\hat\beta_1\\ \hat\beta_2\end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} \sum z_1^{(i)2} & \sum z_1^{(i)} z_2^{(i)} \\ \sum z_1^{(i)} z_2^{(i)} & \sum z_2^{(i)2} \end{matrix} \right\|^{-1} \begin{pmatrix} \sum z_1^{(i)} X_i \\ \sum z_2^{(i)} X_i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sum z_1^{(i)2} \sum z_2^{(i)2} - (\sum z_1^{(i)} z_2^{(i)})^2} \begin{pmatrix} \sum z_2^{(i)2} \sum z_1^{(i)} X_i - \sum z_1^{(i)} z_2^{(i)} \sum z_2^{(i)} X_i \\ \sum z_1^{(i)2} \sum z_2^{(i)} X_i - \sum z_1^{(i)} z_2^{(i)} \sum z_1^{(i)} X_i \end{pmatrix}.$$

4.2. Если не все t_i одинаковы, то

$$\hat\beta_1 = \bar X - \bar t \hat\beta_2, \quad \hat\beta_2 = \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)(X_i - \bar X) \Big/ \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)^2.$$

При этом $E\hat\beta_i = \beta_i$, $i = 1, 2$,

$$D\hat\beta_i = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)^2, \quad D\hat\beta_2 = \sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)^2,$$

поэтому, если $\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, то оценки $\hat\beta_i$ состоятельны.

4.3. Имеем $\tilde\sigma^2 = S(\hat\beta)/(n-2)$, где $S(\hat\beta) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar X)^2 - \hat\beta_2^2 \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)^2$, $\hat\beta = (\hat\beta_1, \hat\beta_2)$ указаны в предыдущей задаче. Если $DS(\hat\beta) = o(n^2)$ при $n \to \infty$, то $\tilde\sigma^2$ — состоятельная оценка σ^2. В частности, для нормальной модели $L(S(\hat\beta)/\sigma^2) = \chi^2(n-2)$ ([1], с. 193), поэтому $DS(\hat\beta) = 2\sigma^4(n-2) = o(n^2)$.

4.4. Имеем $\operatorname{cov}(\hat\beta_1, \hat\beta_2) = -\sigma^2 \bar t \Big/ \sum_{i=1}^{n} (t_i - t)^2$.

4.6. Здесь $I = \sum_{j=1}^{3} \beta_j \frac{(b-a)^j}{j}$, $\hat I = \sum_{j=1}^{3} \hat\beta_j \frac{(b-a)^j}{j}$, поэтому $E\hat I = I$, $D\hat I = \sum_{j,r=1}^{3} \frac{(b-a)^{j+r}}{jr} \operatorname{cov}(\hat\beta_j, \hat\beta_r)$.

4.9. Доверительные интервалы находятся соответственно по формулам:

$$\left(\hat\beta_1 \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-2} \sqrt{S(\hat\beta) \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \Big/ \left[n(n-2) \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)^2 \right]}\right),$$

$$\left(\hat\beta_2 \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}, n-2} \sqrt{S(\hat\beta) \Big/ \left[(n-2) \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar t)^2 \right]}\right),$$

$$S(\hat\beta)/\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-2} < \sigma^2 < S(\hat\beta)/\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-2},$$

γ-доверительный эллипс имеет вид

$$G_\gamma(X)=\left\{\beta:(\beta_1-\hat\beta_1)^2+2\bar t(\beta_1-\hat\beta_1)(\beta_2-\hat\beta_2)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2(\beta_2-\hat\beta_2)^2<\right.$$

$$\left.<\frac{2}{n(n-2)}F_{\gamma,2,n-2}\right\},$$

где $\hat\beta_1$, $\hat\beta_2$ и $S(\hat\beta)$ указаны в задачах 4.2 и 4.3.

4.10. Поскольку $\int\limits_{-a}^{a}x(t)dt=2a\beta_1$, речь фактически идет о доверительном интервале для β_1, указанном в предыдущей задаче.

4.11. Здесь теоретическая зависимость имеет вид $a(t)=a(0)+vt$, поэтому доверительный эллипс строится по правилу, указанному в задаче 4.9.

4.14. Положив в (4.11) $m=3$, $\lambda_1=(100)$, $\lambda_2=(010)$, $\lambda_3=(001)$, получим, что искомая система имеет вид

$$\left\{\left(\hat\beta_j\pm\sqrt{\frac{3}{n-3}a^{jj}S(\hat\beta)F_{\gamma,3,n-3}}\right),\ j=1,\ 2,\ 3\right\}.$$

4.15. Обозначив через $X_1, \ldots, X_8$ результаты указанных последо вательных измерений, получим, что в данном случае речь идет о следующей модели нормальной регрессии:

$X_1=\beta_1+\varepsilon_1$, $X_2=\beta_2+\varepsilon_2$, $X_3=\beta_1+\beta_2+\varepsilon_3$, $X_4=180-\beta_2-\beta_3+\varepsilon_4$, $X_5=\beta_3+\varepsilon_5$, $X_6=\beta_4+\varepsilon_6$, $X_7=\beta_3+\beta_4+\varepsilon_7$, $X_8=180-\beta_1-\beta_4+\varepsilon_8$.

4.17. Учитывая указание, имеем

$$\boldsymbol{E}S(\hat\beta)=\boldsymbol{E}S(\beta)-\boldsymbol{E}(\hat\beta-\beta)'A(\hat\beta-\beta).$$

Здесь $\boldsymbol{E}S(\beta)=\boldsymbol{E}\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=n\sigma^2$ (см. (4.4)) и

$$\boldsymbol{E}(\hat\beta-\beta)'A(\hat\beta-\beta)=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}\operatorname{cov}(\hat\beta_i,\ \hat\beta_j)=\sigma^2\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}a^{ij}=\sigma^2\operatorname{tr}(AA^{-1})=$$

$$=k\sigma^2.$$

В результате получаем $\boldsymbol{E}S(\hat\beta)=(n-k)\sigma^2$. Далее, так как $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Z}'\hat\beta=\boldsymbol{BX}$ (см. (4.5)) и $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$, то $S(\hat\beta)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{BX}$.

4.18. В данном случае матрица $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ZZ}'$ является диагональной, ее диагональные элементы равны $\mathbf{z}_j'\mathbf{z}_j$, $j=1, \ldots, k$, где $\mathbf{z}_j$ — j-й столбец матрицы $\boldsymbol{Z}'$, поэтому $\hat\beta_j=\mathbf{z}_j'\boldsymbol{X}/\mathbf{z}_j'\mathbf{z}_j$, $\mathrm{D}\hat\beta_j=\sigma^2/\mathbf{z}_j'\mathbf{z}_j$, $\operatorname{cov}(\hat\beta_j,\ \hat\beta_r)=0$, $j\neq r$.

4.21. Функция правдоподобия для модели (4.3) имеет (см. (4.4)) вид

$$L(\boldsymbol{x};\ \theta)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}S(\boldsymbol{x};\ \beta)\right\},\ \theta=(\beta,\ \sigma^2),$$

и максимизация ее по β эквивалентна минимизации квадратичной формы $S(\boldsymbol{x};\ \beta)$; отсюда следует, что о.м.п. $\hat\beta$ совпадает с о.н.к. О.м.п. $\hat\sigma^2$ — это то значение σ^2, которое минимизирует $S(\hat\beta)/\sigma^2+n\ln\sigma^2$, откуда $\hat\sigma^2=S(\hat\beta)/n$. Учитывая задачу 4.17, имеем

$$\boldsymbol{E}\hat\sigma^2-\sigma^2=\left(\frac{n-k}{n}-1\right)\sigma^2=-\frac{k}{n}\sigma^2.$$

4.22. Решение следует из (4.10) при $m = 1$, $T = \lambda'$; при этом необходимо учесть, что $F_{\gamma, 1, n-k} = t^2_{(1+\gamma)/2, n-k}$ (см. задачу 1.50).

4.23. Полагая в предыдущей задаче $\lambda = (1, t)$ и используя результаты задач 4.2—4.4, получим искомый интервал:

$$\Big(\bar{X} + (t - \bar{t})\hat{\beta}_2 \pm$$

$$\pm t_{(1+\gamma)/2, n-2}\sqrt{\frac{1}{n(n-2)} S(\hat{\beta})\Big[1 + n(t - \bar{t})^2 / \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2\Big]}\Big).$$

4.25. Положить в (4.11) $\lambda_i = \mathbf{z}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.

4.27. В данном случае в (4.12) $m = 1$ и

$$S_T = \min_{\beta_1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \beta_{20}t_i - \beta_1)^2 = S(\hat{\beta}) + (\hat{\beta}_2 - \beta_{20})^2 \sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t})^2;$$

кроме того, $F_{1-\alpha, 1, n-2} = t^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-2}$ (см. решение задачи 4.22).

Отсюда следует, что F-критерий (4.12) имеет указанный вид.

4.29. Здесь мы имеем модель нормальной регрессии с $n = 8$, $\beta = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ и соответствующей квадратичной формой

$$S(\beta) = \sum_{i,j}(X_j^{(i)} - \mu_i)^2 = \sum_{i,j}(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})^2 + 2\sum_{i} (\bar{X}^{(i)} - \mu_i)^2,$$

$$\bar{X}^{(i)} = \frac{1}{2}(X_1^{(i)} + X_2^{(i)}).$$

Отсюда о.н.к. $\hat{\mu}_i = \bar{X}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 4$, $\min S(\beta) = \sum_{i,j} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})^2 \equiv S_1$ и

$\tilde{\sigma}^2 = S_1/4$.

При гипотезе H_0

$$S_T = \min_{\mu} \sum_{i,j} (X_j^{(i)} - \mu)^2 = \min_{\mu}\Big(\sum_{i,j} (X_j^{(i)} - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2\Big] =$$

$$= \sum_{i,j} (X_j^{(i)} - \bar{X})^2 = S_1 + 2\sum_{i} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2,$$

поэтому F-критерий (4.12) при $m = 3$ имеет вид

$$\mathcal{X}_{1\alpha} = \Big\{\sum_{i} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2 / S_1 \geqslant \frac{3}{8} F_{1-\alpha, 3, 4}\Big\}.$$

4.37. Обозначив $\mathbf{Z}' = \|\mathbf{1}\alpha\|$ матрицу размера $n \times 2$, составленную из вектор-столбцов $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получим решение в виде $\hat{\beta} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}$, где $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Z}' = \left\| \begin{matrix} \mathbf{1}' \\ \alpha' \end{matrix} \right\| \mathbf{G}^{-1}\|\mathbf{1}\alpha\|$. Применяя далее обычные правила умножения блочных матриц («строку на столбец», если матрицы-блоки рассматривать как элементы), результат можно привести к виду $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{1}{\Delta}(\alpha'\mathbf{Q}\mathbf{Y}, -\mathbf{1}'\mathbf{Q}\mathbf{Y})$, где $\Delta = (\mathbf{1}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{1})(\alpha'\mathbf{G}^{-1}\alpha) - (\mathbf{1}'\mathbf{G}^{-1}\alpha)^2$, а матрица $\mathbf{Q} = \mathbf{G}^{-1}(\alpha\mathbf{1}' - \mathbf{1}\alpha')\mathbf{G}^{-1}$. Матрица вторых моментов этих оценок имеет вид

$$\mathbf{D}(\hat{\beta}) = \beta_2^2\mathbf{A}^{-1} = \frac{\beta_2^2}{\Delta}\left\| \begin{matrix} \alpha'\mathbf{G}^{-1}\alpha & -\alpha'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{1} \\ -\mathbf{1}'\mathbf{G}^{-1}\alpha & \mathbf{1}'\mathbf{G}^{-1}\mathbf{1} \end{matrix} \right\|.$$

Глава 5

5.1. 1) В данном случае выборочное пространство $X = \{0, 1\}$ состоит из двух точек и для каждого $x \in X$ возможны лишь два решения, поэтому всего имеется четыре решающие функции $\delta_i = (\delta_i(0), \delta_i(1))$, $i = 1, 2, 3, 4$: $\delta_1 = (d_1, d_1)$, $\delta_2 = (d_1, d_2)$, $\delta_3 = (d_2, d_1)$, $\delta_4 = (d_2, d_2)$. Пусть $R_i = (R(\theta_1, \delta_i), R(\theta_2, \delta_i))$ — вектор риска процедуры δ_i, где

$$R(\theta, \delta_i) = L(\theta, \delta_i(0))(1-\theta) + L(\theta, \delta_i(1))\theta.$$

Тогда для рассматриваемой ситуации

$$R_1 = (0, 2),\ R_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ R_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right),\ R_4 = (1, 0).$$

Процедура δ_2 предпочтительнее δ_3, а процедуры δ_1, δ_2, δ_4 между собой несравнимы и, следовательно, образуют совокупность допустимых решающих правил; при этом $m(\delta_2) < m(\delta_4) < m(\delta_1)$, т. е. δ_2 — минимаксная процедура.

2) Решение 1. Для байесовских рисков $r(\delta_i) = \alpha R(\theta_1, \delta_i) + (1-\alpha)R(\theta_2, \delta_i)$ имеем следующие значения: $r(\delta_1) = 2(1-\alpha)$, $r(\delta_2) = \dfrac{2-\alpha}{3}$, $r(\delta_4) = \alpha$. Отсюда находим, что если $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, то $\min\limits_i r(\delta_i) = r(\delta_4)$, т. е. здесь $\delta^* = \delta_4$; если $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant \dfrac{4}{5}$, то $\min\limits_i r(\delta_i) = r(\delta_2)$, т. е. здесь $\delta^* = \delta_2$; наконец, $\delta^* = \delta_1$ при $\alpha > \dfrac{4}{5}$. Следовательно, график байесовского риска имеет вид, изображенный на рис. 8.

Решение 2. Вычислим апостериорное распределение $\pi(\theta_i|x) = f(x;\theta_i)\pi(\theta_i)/f(x)$, $x = 0, 1$, $i = 1, 2$, где в данном случае $f(x; \theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$, $f(x) = f(x; \theta_1)\pi(\theta_1) + f(x; \theta_2)\pi(\theta_2) = \theta_1^x(1-\theta_1)^{1-x}\alpha + \theta_2^x(1-\theta_2)^{1-x}(1-\alpha)$. Имеем $\pi(\theta_1|0) = \alpha(1-\theta_1)/f(0)$, $\pi(\theta_2|0) = (1-\alpha)(1-\theta_2)/f(0)$, $\pi(\theta_1|1) = \alpha\theta_1/f(1)$, $\pi(\theta_2|1) = \dfrac{(1-\alpha)\theta_2}{f(1)}$. Для рассматриваемого случая средняя потеря относительно этого апостериорного распределения при $x = 0$ для решения $\delta(0) = d_1$ равна

$$E(L(\theta, d_1)|0) = L(\theta_1, d_1)\pi(\theta_1|0) + L(\theta_2, d_2)\pi(\theta_2|0) = \frac{2(1-\alpha)}{3f(0)},$$

а для решения $\delta(0) = d_2$ она равна $\dfrac{2\alpha}{3f(0)}$. Сравнивая эти потери, получаем, что при $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$ потери для решения d_2 меньше, т. е. $\delta^*(0) = d_2$, если же $\alpha > \dfrac{1}{2}$, то $\delta^*(0) = d_1$. Аналогичный анализ для случая наблюдения $x = 1$ дает, что при $\alpha \leqslant \dfrac{4}{5}$ $\delta^*(1) = d_2$, если же $\alpha > \dfrac{4}{5}$, то $\delta^*(1) = d_1$. Тем самым получены значения байесовского решения $\delta^*(x)$ в каждой точке $x = 0, 1$ при любом априорном распределении.

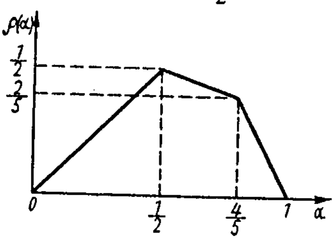

Рис. 8

5.2. Для априорного распределения $\pi(\theta_1) = \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, искомые средние потери $E(L(\theta, d)|x)$, вычисленные по указанным формулам, приведены в следующей таблице.

	d_1	d_2	d_3
$x=0$	$(1-\alpha)/f(0)$	$3\alpha/4f(0)$	$(1+2\alpha)/8f(0)$
$x_1=1$	$3(1-\alpha)/f(1)$	$\alpha/4f(1)$	$(3-2\alpha)/8f(1)$

Сравнивая указанные значения для определения минимального в каждой строке (а тем самым и отыскание значения $\delta^*(x)$), получаем следующие результаты: $\delta^*(0)=d_2$ при $\alpha\leqslant\frac{1}{4}$, $\delta^*(0)=d_3$ при $\frac{1}{4}<\alpha\leqslant\frac{7}{10}$, $\delta^*(0)=d_1$ при $\alpha>\frac{7}{10}$; $\delta^*(1)=d_2$ при $\alpha\leqslant\frac{3}{4}$, $\delta^*(1)=d_3$ при $\frac{3}{4}<\alpha\leqslant\frac{21}{22}$, $\delta^*(1)=d_1$ при $\alpha>\frac{21}{22}$. Тем самым искомые байесовские решения $\delta^*=(\delta^*(0),\ \delta^*(1))$ имеют вид: $\delta^*=(d_2,\ d_2)$ при $\alpha\leqslant\frac{1}{4}$; $\delta^*=(d_3,\ d_2)$ при $\frac{1}{4}<\alpha\leqslant\frac{7}{10}$; $\delta^*=(d_1,\ d_2)$ при $\frac{7}{10}<\alpha\leqslant\frac{3}{4}$; $\delta^*=(d_1,\ d_3)$ при $\frac{3}{4}<\alpha\leqslant\frac{21}{22}$; $\delta^*=(d_1,\ d_1)$ при $\alpha>\frac{21}{22}$. Далее, так как

$$\rho(\alpha)=r(\delta^*)=\sum_{x=0}^{1}f(x)\mathrm{E}(L(0,\ \delta^*(x))\,|\,x),$$

то, беря соответствующие значения $\mathrm{E}(L(\theta,\ \delta^*(x))\,|\,x)$ из таблицы, для функции $\rho(\alpha)$ получаем следующее представление:

$$\rho(\alpha)=\begin{cases}\alpha & \text{при}\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1/4,\\ (1+4\alpha)/8 & \text{при}\quad 1/4<\alpha\leqslant 7/10,\\ (4-3\alpha)/4 & \text{при}\quad 7/10<\alpha\leqslant 3/4,\\ (11-10\alpha)/8 & \text{при}\quad 3/4<\alpha\leqslant 21/22,\\ 4(1-\alpha) & \text{при}\quad 21/22<\alpha\leqslant 1\end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 9.

5.3. Для приведенных в решении задачи 5.1 решающих функций векторы риска для первой ситуации имеют вид

$$R_1^{(1)}=(0,\ b),\ R_2^{(1)}=\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{b}{2}\right),\ R_3^{(1)}=\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{2}\right),\ R_4^{(1)}=(a,\ 0),$$

а для второй — следующий вид:

$$R_1^{(2)}=(0,\ b),\ R_2^{(2)}=\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{b}{2}\right),$$

$$R_3^{(2)}=\left(\frac{a}{4},\ \frac{b}{2}\right),\ R_4^{(2)}=(a,\ 0).$$

Отсюда заключаем, что в обоих случаях процедура δ_3 предпочтительнее δ_2, следовательно, допустимыми являются процедуры δ_1, δ_3, δ_4; при

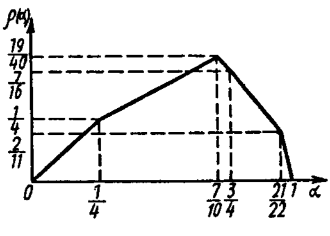

Рис. 9

этом для тех значений $\alpha = \pi(\theta_1)$, при которых соответствующее байесовское решение $\delta^* = \delta_3$, соответствующие риски удовлетворяют неравенству $r^{(2)}(\delta^*) < r^{(1)}(\delta^*)$.

5.4. В данном случае функция риска имеет вид

$$R(\theta, \delta) = \sum_{k=0}^{3} L(\theta, \delta(k))\, C_3^k \theta^k (1-\theta)^{3-k}$$

и векторы риска $\boldsymbol{R}_i = (R(\theta_1, \delta_i), R(\theta_2, \delta_i))$ для указанных процедур соответственно равны $\boldsymbol{R}_1 = (5{,}94\cdot 10^{-2};\ 0{,}792)$, $\boldsymbol{R}_2 = (5{,}96\cdot 10^{-4};\ 0{,}972)$, $\boldsymbol{R}_3 = (2\cdot 10^{-6};\ 0{,}999)$. Отсюда минимаксное решение $\tilde{\delta} = \delta_1$ и $m(\tilde{\delta}) = 0{,}792$.

5.5. Здесь $f(x;\theta) = (1-\theta)\theta^x$, $x = 0, 1, 2\ldots$, поэтому функция риска

$$R(\theta, \delta_i) = \sum_{x=0}^{\infty} L(\theta, \delta_i(x)) f(x;\theta) = L(\theta, d_1) \sum_{x=0}^{i-1} f(x;\theta) +$$

$$+ L(\theta, d_2) \sum_{x=i}^{\infty} f(x;\theta) = L(\theta, d_1)(1-\theta^i) + L(\theta, d_2)\theta^i.$$

Вектор риска для i-й процедуры равен

$$R_i = (R(\theta_1, \delta_i), R(\theta_2, \delta_i)) = (a\theta_1^i, b(1-\theta_2^i)).$$

Здесь с ростом i первая координата убывает, а вторая возрастает, поэтому при $a\theta_1 \leqslant b(1-\theta_2)$ максимальный риск $m(\delta_i) = b(1-\theta_2^i)$ и, следовательно, минимаксная процедура $\tilde{\delta} = \delta_1$.

Если же $a\theta_1 > b(1-\theta_2)$, то, определив целое i_0 условиями

$$a\theta_1^{i_0} \geqslant b(1-\theta_2^{i_0}),\quad a\theta_1^{i_0+1} < b(1-\theta_2^{i_0+1}),$$

будем иметь $m(\delta_i) = \begin{cases} a\theta_1^i, & i \leqslant i_0, \\ b(1-\theta_2^i), & i > i_0. \end{cases}$ Следовательно, в данном случае $\tilde{\delta} = \delta_{i_0}$, если $a\theta_1^{i_0} \leqslant b(1-\theta_2^{i_0+1})$, и $\tilde{\delta} = \delta_{i_0+1}$ в противном случае.

5.7. В соответствии с общей теорией (см. п. 4 гл. 5) в данном случае функции $h_1(x) = b\pi_2 f_2(x)$, $h_2(x) = a\pi_1 f_1(x)$, поэтому байесовское решение $\delta^*(x)$ имеет вид

$$\delta^*(x) = \begin{cases} d_1 & \text{при } x \in W_1^*, \text{ где} \\ d_2 & \text{при } x \in \bar{W}_1^*, \end{cases} \quad \begin{aligned} W_1^* &= \{x : h_1(x) \leqslant h_2(x)\} = \\ &= \left\{x : \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \leqslant \frac{a\pi_1}{b\pi_2}\right\}, \end{aligned}$$

а соответствующий вектор риска равен $(a\mathbf{P}_{\theta_1}(X \in \bar{W}_1^*), b\mathbf{P}_{\theta_2}(X \in W_1^*))$. Следовательно, байесовский риск

$$r(\delta^*) = a\pi_1 \mathbf{P}_{\theta_1}(X \in \bar{W}_1^*) + b\pi_2 \mathbf{P}_{\theta_2}(X \in W_1^*).$$

Для указанных нормальных распределений при $\theta_1 < \theta_2$ область $W_1^* = \left\{x : x \leqslant \frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{\sigma^2 c}{\theta_2 - \theta_1}\right\}$, $c = \ln\frac{b\pi_2}{a\pi_1}$, а $\mathbf{P}_{\theta_2}(X \in W_1^*) = \Phi\left(-\frac{c+\rho/2}{\sqrt{\rho}}\right)$, $\mathbf{P}_{\theta_1}(X \in \bar{W}_1^*) = \Phi\left(\frac{c-\rho/2}{\sqrt{\rho}}\right)$, где $\rho = (\theta_1-\theta_2)^2/\sigma^2$.

Если $\theta_1 > \theta_2$, то область W_1^* задается противоположным неравенством, остальные же выражения остаются прежними.

5.9. В данном случае для решающей функции $\delta(x) \equiv d$ функция риска $R(\theta, \delta) = L(\theta, d)$ и поэтому байесовский риск

$$r(d) = \alpha L(0, d) + (1-\alpha) L(1, d) = \alpha d^a + (1-\alpha)(1-d)^a.$$

Минимизация этого выражения по d дает искомое решение d^*: если $a = 1$, то $d^* = 0$ при $\alpha > \frac{1}{2}$; $d^* = 1$ при $\alpha < \frac{1}{2}$, а при $\alpha = \frac{1}{2}$ в качестве d^* может быть взято любое $d \in [0, 1]$; если же $a > 1$, то

$$d^* = \left(1 + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{a-1}}\right)^{-1}.$$

5.10. 1) Записав $P_{0_i}(X \in W_i^*) = \int\limits_{W_i^*} f_i(x)\,dx$ (в абсолютно непрерывном случае), из определения функций $h_j(x)$ имеем

$$r(\delta^*) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i R_i(\delta^*) = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{W_j^*} h_j(x)dx.$$

Но из определения областей W_j^* следует, что последнее выражение можно записать в указанном в формулировке виде.

2) Очевидно, что

$$\underline{l}\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i f_i(x) - \pi_j f_j(x)\right) \leqslant h_j(x) \leqslant \bar{l}\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i f_i(x) - \pi_j f_j(x)\right)$$

(здесь учтено, что $l(j\,|\,j) = 0$, $j = 1, \ldots, k$). Отсюда

$$\underline{l}\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i f_i(x) - \max_j \pi_j f_j(x)\right) \leqslant \min_j h_j(x) \leqslant \bar{l}\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i f_i(x) - \max_j \pi_j f_j(x)\right)$$

или (см. указание)

$$l \sum_{i=2}^{k} \min\,(\pi_i f_i(x),\ \max_{j<i} \pi_j f_j(x)) \leqslant \min_j h_j(x) \leqslant \bar{l} \sum_{i=2}^{k} \min\,(\pi_i f_i(x),\ \max_{j<i} \pi_j f_j(x)).$$

Но

$$\min\,(\pi_i f_i(x),\ \max_{j<i} \pi_j f_j(x)) \leqslant \sum_{j<i} \min\,(\pi_i f_i(x),\ \pi_j f_j(x)),$$

что после интегрирования дает верхнюю оценку для $r(\delta^*)$. Далее имеем,

$$\min\,(\pi_i f_i(x),\ \max_{j<i} \pi_j f_j(x)) \geqslant \min\,(\pi_i f_i(x),\ \pi_j f_j(x)),\ j = 1, \ldots, i-1,$$

поэтому

$$\int \min\,(\pi_i f_i(x),\ \max_{j<i} \pi_j f_j(x))dx \geqslant \max_{j<i} Y_{ij},$$

что дает нижнюю оценку для $r(\delta^*)$.

Указанные оценки превращаются в точные равенства при $k = 2$, $l(2\,|\,1) = l(1\,|\,2) = 1$.

5.11. В данном случае

$$Y_{12} = \pi_1 \int\limits_{X_1} f_1(x)\,dx + \pi_2 \int\limits_{\bar{X}_1} f_2(x)\,dx,\ x = (x_1, \ldots, x_r),$$

где $X_1 = \{x : \pi_1 f_1(x) \leqslant \pi_2 f_2(x)\}$ и

$$f_i(x) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}\sqrt{|A|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu^{(i)})' A^{-1}(x - \mu^{(i)})\right\},\ i = 1,\ 2.$$

Простые преобразования позволяют записать область X_1 в виде

$$X_1 = \left\{x : a'x - \frac{1}{2}a'(\mu^{(1)} + \mu^{(2)}) \leqslant \ln\frac{\pi_2}{\pi_1}\right\}, \quad a = A^{-1}(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}).$$

Рассмотрим случайную величину $Y = a'X - \frac{1}{2}a'(\mu^{(1)} + \mu^{(2)})$. Если $L(X) = N(\mu^{(1)}, A)$, то $L(Y) = N\left(\frac{\rho}{2}, \rho\right)$ и

$$\int_{X_1} f_1(x)dx = P\left(Y \leqslant \ln\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) = \Phi\left(\left(\ln\frac{\pi_2}{\pi_1} - \frac{\rho}{2}\right)/\sqrt{\rho}\right).$$

Аналогично имеем

$$\int_{\bar{X}_1} f_2(x)dx = 1 - \Phi\left(\left(\ln\frac{\pi_2}{\pi_1} + \frac{\rho}{2}\right)/\sqrt{\rho}\right) = \Phi\left(\left(\ln\frac{\pi_1}{\pi_2} - \frac{\rho}{2}\right)/\sqrt{\rho}\right).$$

Из этих формул следует указанный результат. В частности, $I_{12} = \Phi\left(-\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)$ при $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$.

В случае пуассоновских распределений $\Pi(\lambda_1)$ и $\Pi(\lambda_2)$ при $\lambda_1 > \lambda_2$

$$I_{12} = \pi_1 e^{-\lambda_1}\sum_{r \in X_1}\frac{\lambda_1^r}{r!} + \pi_2 e^{-\lambda_2}\sum_{r \in \bar{X}_1}\frac{\lambda_2^r}{r!},$$

где

$$X_1 = \left\{r : \pi_1 e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^r}{r!} \leqslant \pi_2 e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^r}{r!}\right\} = \left\{r : r \leqslant r_0 = \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \ln\frac{\pi_2}{\pi_1}}{\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right]\right\},$$

$[\cdot]$ — целая часть. Таким образом,

$$I_{12} = \pi_1\Pi(r_0;\ \lambda_1) + \pi_2(1 - \Pi(r_0;\ \lambda_2)),$$

где $\Pi(r;\ \lambda) = \sum_{i=0}^{r} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$.

5.12. Используя решение предыдущей задачи и введенные там обозначения, находим, что область наилучшей классификации W_1^* имеет вид

$$W_1^* = \{x\colon h_1(x) = l(1|2)\pi_2 f_2(x) \leqslant h_2(x) = l(2|1)\pi_1 f_1(x)\} =$$
$$= \left\{x\colon a'x - \frac{1}{2}a'(\mu^{(1)} + \mu^{(2)}) \geqslant c = \ln\frac{\pi_2 l(1|2)}{\pi_1 l(2|1)}\right\}.$$

Таким образом, байесовское решение δ^* состоит в том, что при наблюдении $x \in W_1^*$ истинным считается распределение $N(\mu^{(1)}, A)$, в противном же случае (т. е. при $x \in W_2^* = \bar{W}_1^*$) — распределение $N(\mu^{(2)}, A)$. Соответствующий вектор риска равен (см. предыдущее решение)

$$R(\delta^*) = \left(l(2|1)\int_{W_2^*} f_1(x)dx,\ l(1|2)\int_{W_1^*} f_2(x)dx\right) =$$
$$= \left(l(2|1)\Phi\left(\frac{c - \rho/2}{\sqrt{\rho}}\right),\ l(1|2)\Phi\left(-\frac{c + \rho/2}{\sqrt{\rho}}\right)\right),$$

следовательно, байесовский риск

$$r(\delta^*) = \pi_1 l(2|1)\Phi\left(\frac{c-\rho/2}{\sqrt{\rho}}\right) + \pi_2 l(1|2)\Phi\left(-\frac{c+\rho/2}{\sqrt{\rho}}\right).$$

При $l(2|1) = l(1|2) = 1$, $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$ величина $c = 0$ и $r(\delta^*) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)$.

Для получения минимаксного решения $\tilde{\delta}$ имеем следующее уравнение для определения константы c (а тем самым и наименее благоприятного априорного распределения (π_1, π_2)):

$$l(2|1)\Phi\left(\frac{c-\rho/2}{\sqrt{\rho}}\right) = l(1|2)\Phi\left(-\frac{c+\rho/2}{\sqrt{\rho}}\right).$$

В частности, при $l(2|1) = l(1|2) = 1$ решением является $c = 0$ (т. е. $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$) и в этом случае максимальный риск $m(\tilde{\delta}) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)$; само же минимаксное правило задается указанной выше областью W_1^* при $c = 0$.

5.13. 1) Если $\mathcal{L}(\xi) = Bi(m, \theta)$, то $f(\boldsymbol{x}; \theta) \cong \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{\sum(m-x_i)} = \theta^x(1-\theta)^{nm-x}$, априорная же плотность распределения параметра $\pi(\theta) \cong \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$. Следовательно, для апостериорной плотности имеем

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \cong \pi(\theta) f(\boldsymbol{x}; \theta) \cong \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+nm-x-1},$$

т. е. $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ — плотность бета-распределения $\beta(a+x, b+nm-x)$.

2) Здесь $f(\boldsymbol{x}; \theta) \cong \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{nr}$, $\pi(\theta)$ указано выше, поэтому

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \cong \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+nr-1}.$$

3) Здесь $f(\boldsymbol{x}; \theta) \cong e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}$, $\pi(\theta) \cong \theta^{\lambda-1}e^{-\theta/a}$, следовательно, $\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \cong \theta^{\lambda+x-1}e^{-\theta(na+1)/a}$ — плотность гамма-распределения $\Gamma\left(\frac{a}{na+1}, \lambda+x\right)$.

4) Здесь $f(\boldsymbol{x}; \theta) = \theta^n e^{-\theta\sum x_i}$, $\pi(\theta)$ указано выше, поэтому $\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \cong \theta^{\lambda+n-1}e^{-\theta(ax+1)/a}$.

5) Используя функцию Хевисайда $e(x)$, запишем плотность выборки $f(\boldsymbol{x}; \theta)$ в виде $f(\boldsymbol{x}; \theta) = \theta^{-n}e(\theta - x_{(n)})$, $x_{(n)} = \max(x_1, \dots, x_n)$. Аналогично, $\pi(\theta) \cong \theta^{-\alpha-1}e(\theta - a)$, откуда

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \cong \theta^{-\alpha-n-1}e(\theta - \max(\alpha, x_{(n)})).$$

6) Если $h_1, \dots, h_N$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $h_1 + \dots + h_N = n$, то $f(\boldsymbol{h}; \theta) \cong \theta_1^{h_1} \dots \theta_N^{h_N}$. Отсюда

$$\pi(\theta|\boldsymbol{h}) \cong \theta_1^{\alpha_1+h_1-1} \dots \theta_N^{\alpha_N+h_N-1},$$

т. е. снова получаем плотность распределения Дирихле $D(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{h})$.

7) В данном случае плотность выборки

$$f(\boldsymbol{x}; \theta) \cong \exp\left\{-\frac{1}{2b^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{n}{2b^2}(\theta-\bar{x})^2 - \frac{1}{2b^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\},$$

а априорная плотность $\pi(\theta) \cong \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta-\mu)^2\right\}$. Отсюда

$$\pi(\theta|x) \cong \pi(\theta)f(x;\ \theta) \cong \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta-\mu)^2 - \frac{n}{2b^2}(\theta-\bar{x})^2\right\} \cong$$

$$\cong \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{n}{b^2}\right)\theta^2 + \theta\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+\frac{x}{b^2}\right)\right\},$$

здесь опущены выражения в показателях экспонент, не зависящие от θ. Последнее выражение пропорционально $\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\theta-\mu_1)^2\right\}$, что и доказывает утверждение.

5.14. Пусть $X = x \in \{1, \ldots, n-1\}$. В данном случае апостериорное распределение $\pi(\theta|x) \cong \theta^x(1-\theta)^{n-x}$ и средняя потеря для решения $\delta(x) = d$ относительно этого распределения пропорциональна

$$\int_0^1 (d-\theta)^2\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x-1}d\theta = d^2B(x,\ n-x) - 2dB(x+1,\ n-x) +$$

$$+ B(x+2,\ n-x) = c_1\left(d-\frac{x}{n}\right)^2 + c_2.$$

Минимум этого выражения достигается при $d = \frac{x}{n}$. Если же $x = o(n)$, то лишь при $d = 0$ (соответственно $d = 1$) указанный интеграл конечен. Таким образом, $\delta^*(x) = \frac{x}{n}$ при любом x. Далее,

$$R(\theta,\ \delta^*) = \boldsymbol{E}_\theta\left(\frac{X}{n}-\theta\right)^2/\theta(1-\theta) = \mathrm{D}_\theta\left(\frac{X}{n}\right)/\theta(1-\theta) = \frac{1}{n} \equiv \mathrm{const},$$

следовательно, δ^* также и минимаксное решение и его риск $r(\delta^*) = 1/n$.

5.15. В силу задачи 5.13 п. 1) апостериорная плотность $\pi(\theta|x) \cong \cong \theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+n-x-1}$ и средняя потеря относительно этого распределения пропорциональна

$$\int_0^1 (d-\theta)^2\theta^{a+x-1}(1-\theta)^{b+n-x-1}d\theta = c_1\left(d-\frac{x+a}{n+a+b}\right)^2 + c_2.$$

Отсюда следует, что $\delta^*(x) = \frac{x+a}{n+a+b}$. Вычислим функцию риска:

$$R(\theta,\ \delta^*) = \boldsymbol{E}_\theta\left(\frac{X+a}{n+a+b}-\theta\right)^2 = \mathrm{D}_\theta\left(\frac{X+a}{n+a+b}\right) +$$

$$+\left(\frac{n\theta+a}{n+a+b}-\theta\right)^2 = \frac{(a-\theta(a+b))^2+n\theta(1-\theta)}{(n+a+b)^2}.$$

Условие $R(\theta,\ \delta^*) \equiv \mathrm{const}$ выполняется при $a = b = \sqrt{n}/2$, следовательно, минимаксное решение $\tilde{\delta}(x) = \frac{x+\sqrt{n}/2}{n+\sqrt{n}}$, а его риск

$$m(\tilde{\delta}) = R(\theta,\ \tilde{\delta}) = \frac{1}{4(1+\sqrt{n})^2}$$

5.16. Запишем среднюю потерю для решения $\delta(x) = d$ относительно апостериорного распределения $\pi(\theta|x)$ в виде

$$E[(\theta - d)^2|x] = E[(\theta - \delta^*(x) + \delta^*(x) - d)^2|x] = D(\theta|x) + (\delta^*(x) - d)^2 \geqslant \geqslant D(\theta|x).$$

Равенство здесь имеет место при $d = \delta^*(x)$, следовательно, $\delta^*(x)$ — искомое решение и его условный (при условии $X = x$) риск равен $D(\theta|x)$. Отсюда байесовский риск имеет указанный вид.

В задаче 5.15 апостериорное среднее параметра равно первому моменту распределения $\beta(a+x,\ b+n-x)$, т. е.

$$\delta^*(x) = E(\theta|x) = \frac{a+x}{n+a+b}.$$

5.17. Здесь $L_\theta(X) = \overline{Bi}(r, \theta)$ и в силу задачи 5.13 п. 2) апостериорное распределение $L(\theta|x) = \beta(a+x,\ b+r)$. Используя формулы для моментов бета-распределения (см. введение к гл. 1), отсюда (см. задачу 5.16) находим, что искомая байесовская оценка имеет вид

$$\delta^*(x) = E(\theta|x) = \frac{a+x}{a+b+r+x}.$$

5.18. В силу задачи 5.13 п. 3) апостериорное распределение

$$L(\theta|\boldsymbol{x}) = \Gamma\left(\frac{a}{na+1},\ \lambda + x\right),\quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Используя формулы для моментов гамма-распределения (см. введение к гл. 1), отсюда на основании задачи 5.16 находим, что

$$\delta^*(\boldsymbol{x}) = E(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{a(\lambda + x)}{na+1},\quad D(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{a^2(\lambda + x)}{(na+1)^2};$$

при этом, поскольку $L_\theta(X) = \Pi(n\theta)$ (см. задачу 1.39 п. 4), по формуле полного математического ожидания $EX = E(E_\theta(X)) = E(n\theta) = na\lambda$ и поэтому

$$r(\delta^*) = ED(\theta|X) = \frac{a^2}{(na+1)^2}(\lambda + EX) = \frac{\lambda a^2}{na+1}.$$

Наконец, минимизируя величину $\dfrac{\lambda a^2}{na+1} + cn$ по n, получаем оптимальное число наблюдений

$$n^* = \left(\frac{\lambda a}{c}\right)^{1/2} - \frac{1}{a}.$$

Замечание. Число n^* должно быть целым неотрицательным. Поэтому, если получаем отрицательное значение, то полагаем $n^* = 0$ (т. е. наблюдений делать не нужно), в остальных случаях в качестве искомого числа наблюдений берется наименьшее целое, большее или равное получаемого по указанной формуле значения. Это замечание относится и к последующим аналогичным задачам.

5.20. В силу задачи 5.13 п. 4) значение d^* байесовской оценки при $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ находится минимизацией по d

$$E(L(\theta, d)|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + n)} \int_0^\infty \left(d - \frac{ax+1}{a\theta}\right)^2 \theta^{\lambda+n-1} e^{-\theta} d\theta.$$

Решая относительно d соотношение $\frac{\partial}{\partial d}\mathbf{E}(L(\theta,\ d)|x) = 0$, получаем указанный вид δ^*.

Далее, так как $L_0\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \Gamma\left(\frac{1}{\theta},\ n\right)$ (см. задачу 1.39 п. 2), то

$$\mathbf{E}_0\delta^* = \frac{\theta + an}{\theta a(\lambda + n - 1)},\quad \mathbf{D}_0\delta^* = \frac{n}{\theta^2(\lambda + n - 1)^2}.$$

Отсюда находим функцию риска

$$R(\theta,\ \delta^*) = \mathbf{E}_0\left(\delta^* - \frac{1}{\theta}\right)^2 = \mathbf{D}_0\delta^* + \left(\mathbf{E}_0\delta^* - \frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{a^2 n + (\theta - a(\lambda - 1))^2}{\theta^2 a^2(\lambda + n - 1)^2}.$$

Наконец, $r(\delta^*) = \mathbf{E}R(0,\ \delta^*)$ и используя формулы для моментов гамма-распределения, приходим к указанному результату. Число n^* находится минимизацией по n величины $r(\delta^*) + cn$.

5.21. Среднее и дисперсия распределения Парето с параметрами a и $\alpha > 2$ равны соответственно $\frac{\alpha a}{\alpha - 1}$ и $\frac{\alpha a^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$. Отсюда (см. задачу 5.13 п. 5) на основании задачи 5.16 имеем указанный вид оценки δ^*. Кроме того, получаем также, что

$$\mathbf{D}(\theta|x) = \frac{n + \alpha}{(n + \alpha - 1)^2(n + \alpha - 2)}(\max(a,\ x_{(n)}))^2.$$

Для нахождения риска $r(\delta^*) = \mathbf{E}\mathbf{D}(\theta|X)$ достаточно вычислить

$$\mathbf{E}(\max(a,\ X_{(n)}))^2 = \mathbf{E}[\mathbf{E}_\theta(\max(a,\ X_{(n)}))^2].$$

Запишем

$$(\max(a,\ X_{(n)}))^2 = (aI(X_{(n)} \leqslant a) + X_{(n)}I(X_{(n)} > a))^2 = a^2 I(X_{(n)} \leqslant a) + X_{(n)}^2 I(X_{(n)} > a),$$

где $I(A)$ — индикатор события A. Тогда, поскольку плотность распределения $X_{(n)}$ при заданном θ равна nt^{n-1}/θ^n, $0 \leqslant t \leqslant \theta$ (см. задачу 1.35), имеем

$$\mathbf{E}_\theta(\max(a,\ X_{(n)}))^2 = \frac{na^2}{\theta^n}\int_0^a t^{n-1}dt + \frac{n}{\theta^n}\int_a^\theta t^{n+1}dt = \frac{n}{n+2}\theta^2 + \frac{2a^{n+2}}{(n+2)\theta^n}.$$

Далее находим

$$\mathbf{E}\theta^2 = \mathbf{D}\theta + (\mathbf{E}\theta)^2 = \frac{\alpha a^2}{\alpha - 2},\quad \mathbf{E}\theta^{-n} = \alpha a^\alpha\int_a^\infty \frac{d\theta}{\theta^{n+\alpha+1}} = \frac{\alpha}{(n + \alpha)a^n},$$

следовательно,

$$\mathbf{E}[E_\theta(\max(a,\ X_{(n)}))^2] = \frac{\alpha a^2(n + \alpha - 2)}{(n + \alpha)(\alpha - 2)}.$$

Окончательно получаем, что риск байесовской оценки равен

$$r(\delta^*) = \frac{\alpha a^2}{(\alpha - 2)(n + \alpha - 1)^2}$$

Наконец, минимизируя величину $r(\delta^*)+cn$ по n, находим, что оптимальное число наблюдений

$$n^*=\left(\frac{2\alpha a^2}{c(\alpha-2)}\right)^{1/3}-\alpha+1.$$

5.23. Искомое решение — это значение d, минимизирующее следующее математическое ожидание:

$$\mathbf{E}(L(\theta,\,\boldsymbol{d})|\boldsymbol{h})=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}[(\theta_i-d_i)^2|\boldsymbol{h}]=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}[(\theta_i-\mathbf{E}(\theta_i|\boldsymbol{h}))^2|\boldsymbol{h}]+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{E}(\theta_i|\boldsymbol{h})-d_i)^2=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}(\theta_i|\boldsymbol{h})+\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{E}(\theta_i|\boldsymbol{h})-d_i)^2.$$

Минимум этого выражения достигается при $d_i=\mathbf{E}(\theta_i|\boldsymbol{h})$, $i=1,\,\ldots,\,N$, и равен $\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{D}(\theta_i|\boldsymbol{h})$. Здесь (см. задачу 5.13 п. 6) и указание)

$$\mathbf{E}(\theta_i|\boldsymbol{h})=\frac{\alpha_i+h_i}{\alpha+n},\quad \mathbf{D}(\theta_i|\boldsymbol{h})=\frac{(\alpha_i+h_i)(\alpha+n-\alpha_i-h_i)}{(\alpha+n)^2(\alpha+n+1)}.$$

Первая формула определяет вид байесовской оценки $\delta_i^*(\boldsymbol{h})$, а вторая позволяет вычислить соответствующий риск: $r(\delta^*)=\sum\limits_{i=1}^{N}\mathbf{E}\mathbf{D}(\theta_i|\boldsymbol{h})$, если при этом воспользоваться формулами (см. задачу 1.52 и указание)

$$\mathbf{E}h_i=\mathbf{E}(\mathbf{E}_0h_i)=\mathbf{E}n\theta_i=n\alpha_i/\alpha,$$

$$\mathbf{E}h_i(h_i-1)=\mathbf{E}(\mathbf{E}_0h_i(h_i-1))=\mathbf{E}n(n-1)\theta_i^2=\frac{n(n-1)\alpha_i(\alpha_i+1)}{\alpha(\alpha+1)}.$$

5.24. Используя обозначения задачи 5.13 п. 7), на основании задачи 5.16 имеем, что искомая оценка

$$\delta^*(x)=\mathbf{E}(\theta|x)=\mu_1=\sigma_1^2\left(\frac{\mu}{\sigma^2}+\frac{x}{b^2}\right);$$

при этом $\mathbf{D}(\theta|x)=\sigma_1^2\equiv\mathrm{const}$, следовательно, риск $r(\delta^*)=(\sigma^{-2}+nb^{-2})^{-1}$. Минимизируя по n общие затраты $r(\delta^*)+cn$, находим оптимальный объем выборки

$$n^*=b\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{b}{\sigma^2}\right).$$

5.25. 1) Пусть $d>d^*$. Тогда

$$|\theta-d|-|\theta-d^*|=\begin{cases}d^*-d & \text{при } \theta\geqslant d,\\ d+d^*-2\theta & \text{при } d^*<\theta<d,\\ d-d^* & \text{при } \theta\leqslant d^*.\end{cases}$$

Так как $d+d^*-2\theta>d^*-d$ при $d^*<\theta<d$, то

$$\mathbf{E}[(|\theta-d|-|\theta-d^*|)|x]\geqslant(d^*-d)\mathbf{P}(\theta\geqslant d|x)+$$
$$+(d^*-d)\mathbf{P}(d^*<\theta<d|x)+(d-d^*)\mathbf{P}(\theta\leqslant d^*|x)=$$
$$=(d-d^*)[\mathbf{P}(\theta\leqslant d^*|x)-\mathbf{P}(\theta>d^*|x)].$$

Поскольку d^* — медиана, последняя разность больше или равна 0. Аналогично рассматривается случай $d<d^*$. Таким образом, решение

d^* минимизирует среднюю условную (при $X = x$) потерю, т. е. это — байесовское решение.

2) В силу задачи 5.13 п. 7) медианой апостериорного распределения $\boldsymbol{L}(\theta|\boldsymbol{x})$ является точка $d^* = \mu_1$, следовательно, байесовская оценка по выборке $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ имеет вид

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \sigma_1^2\left(\frac{\mu}{\sigma^2} + \frac{n\bar{X}}{b^2}\right)$$

и ее риск равен

$$r(\delta^*) = \mathbf{E}|\theta - \delta^*(\boldsymbol{X})| = \mathbf{E}[\mathbf{E}(|\theta - \delta^*(\boldsymbol{X})|\ |\boldsymbol{X})].$$

Но так как условное (при $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$) распределение случайной величины $\theta - \delta^*(\boldsymbol{X})$ есть $\boldsymbol{N}(0, \sigma_1^2)$ и для $\boldsymbol{L}(Y) = \boldsymbol{N}(0, \sigma_1^2)$ $\mathbf{E}|Y| = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma_1$, то

$$r(\delta^*) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sigma^{-2} + nb^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Если цена за одно наблюдение равна $c > 0$, то, минимизируя общие затраты $r(\delta^*) + cn$ по n, находим оптимальное число наблюдений

$$n^* = b^2((\sqrt{2\pi}cb^2)^{2/3} - \sigma^{-2}).$$

Глава 6

6.1. Для дисперсии $\bar{X}$ справедливо представление

$$\mathbf{D}\bar{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{k,s=1}^{n}\operatorname{cov}(X_k, X_s) = \frac{1}{n^2}\sum_{k,s=1}^{n}R_{k-s} = \frac{1}{n}\left[R_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)R_k\right],$$

из которого при условии (6.1) следует, что $\mathbf{D}\bar{X} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$, т. е. $\bar{X}$ — состоятельная оценка.

6.3. Для среднего $\mathbf{E}\tilde{C}_k(n)$ можно получить представление

$$\mathbf{E}\tilde{C}_k(n) = R_k - \frac{1}{n(n-k)}\sum_{t=1}^{n-k}\sum_{s=1}^{n}(R_{t-s} + R_{t+k-s}) + \frac{1}{n^2}\sum_{t,s=1}^{n}R_{t-s},$$

в котором добавок к R_k при условии (6.1) имеет порядок $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, когда $n \to \infty$.

6.4. Здесь $\mathbf{E}X_t = 0$ и

$$\operatorname{cov}(X_{k+t}, X_t) = \mathbf{E}(X_{k+t}, X_t) = \sigma^2(\cos\lambda(k+t)\cos\lambda t + \sin\lambda(k+t)\sin\lambda t) = \sigma^2\cos\lambda k.$$

6.5. Здесь $\mathbf{E}X_t = m\sum\limits_{j=0}^{r}\alpha_j$ и

$$\operatorname{cov}(X_{k+t}, X_t) = \sum_{i,j=0}^{r}\alpha_i\alpha_j\operatorname{cov}(\xi_{k+t-i}, \xi_{t-j}) = \begin{cases}\sigma^2\sum\limits_{j=0}^{r-|k|}\alpha_j\alpha_{j+|k|} \\ \text{при } |k| \leqslant r, \\ 0 \qquad \text{при } |k| > r,\end{cases}$$

поскольку $\operatorname{cov}(\xi_{k+t-i}, \xi_{t-j}) = \sigma^2$ при $i-j=k$ и равна нулю при $i-j \neq k$.

6.8. Значения коэффициентов оптимального предиктора определяются по формулам $\beta^*_{tn} = \sum_{j=-n}^{0} R^{tj} R_{j-1}$, где $\|R^{tj}\| = \|R_{t-j}\|^{-1}(t, j = 0, -1, \ldots, -n)$. Для величины $\sigma^2(n)$ справедливо представление $\sigma^2(n) = |R(n+2)|/|R(n+1)|$, где (см. [1], с. 218) матрица

$$\boldsymbol{R}(n+1) = \left\| \begin{vmatrix} R_0 R_1 \ldots\ldots R_n \\ R_1 R_0 \ldots\ldots R_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n R_{n-1} \ldots R_0 \end{vmatrix} \right\|$$

6.9. Поскольку $\|p_{ij}(t)\| = \|p_{ij}(1)\|^t$, достаточно проверить равенство $\|p_{ij}(t+1)\| = \|p_{ij}(t)\|\,\|p_{ij}(1)\|$. Так как матрица $\|p_{ij}(1)\|$ дважды стохастическая, то стационарное распределение является равномерным.

6.10. Пусть $U, U_0, U_1, \ldots$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Определим случайные величины:

$$\varsigma_0(U) = \begin{cases} 1 & \text{при } U < \frac{1}{2}, \\ 2 & \text{при } U \geqslant \frac{1}{2}; \end{cases} \qquad \varsigma^{(1)}(U) = \begin{cases} 1 & \text{при } U < 1-\alpha, \\ 2 & \text{при } U \geqslant 1-\alpha; \end{cases}$$
$$\varsigma^{(2)}(U) = \begin{cases} 1 & \text{при } U < \alpha, \\ 2 & \text{при } U \geqslant \alpha. \end{cases}$$

Тогда реализация цепи Маркова определяется формулами

$$\nu_0 = \varsigma_0(U_0),\ \nu_t = \varsigma^{(\nu_{t-1})}(U_t),\ t \geqslant 1.$$

6.11. Имеем $\mathbf{E}\eta_t = 0$,

$$R_k = \mathbf{E}\eta_{k+t}\eta_t = \mathbf{P}(\eta_{k+t} = \eta_t) - \mathbf{P}(\eta_{k+t} \neq \eta_t) =$$
$$= \frac{1}{2}(p_{11}(k) + p_{22}(k) - p_{12}(k) - p_{21}(k)) = (1-2\alpha)^k.$$

6.13. Здесь $\mathbf{E}\eta_t = \mathbf{E}[\mathbf{E}(\xi_{\nu_t}(t)|\nu_t)] = 0$, так как $\mathbf{E}\xi_i(t) = 0$. Далее (см. задачу 6.9) имеем

$$\mathbf{E}\eta_{k+t}\eta_t = \mathbf{E}[\mathbf{E}(\xi_{\nu_{k+t}}(k+t)\xi_{\nu_t}(t)|\nu_{k+t}, \nu_t)] = \mathbf{P}(\nu_{k+t} = \nu_t = 1)R_k^{(1)} +$$
$$+ \mathbf{P}(\nu_{k+t} = \nu_t = 2)R_k^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + (1-2\alpha)^k)(R_k^{(1)} + R_k^{(2)}).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Нормальное распределение

Квантили распределения: $p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} e^{-x^2/2} dx$

p	u_p	p	u_p	p	u_p
0,50	0,000	0,68	0,468	0,86	1,080
0,51	0,025	0,69	0,496	0,87	1,126
0,52	0,050	0,70	0,524	0,88	1,175
0,53	0,075	0,71	0,553	0,89	1,227
0,54	0,100	0,72	0,583	0,90	1,282
0,55	0,126	0,73	0,613	0,91	1,341
0,56	0,151	0,74	0,643	0,92	1,405
0,57	0,176	0,75	0,674	0,93	1,476
0,58	0,202	0,76	0,706	0,94	1,555
0,59	0,228	0,77	0,739	0,95	1,645
0,60	0,253	0,78	0,772	0,96	1,751
0,61	0,279	0,79	0,806	0,97	1,881
0,62	0,305	0,80	0,842	0,98	2,054
0,63	0,332	0,81	0,878	0,99	2,326
0,64	0,358	0,82	0,915	0,999	3,090
0,65	0,385	0,83	0,954	0,9999	3,720
0,66	0,412	0,84	0,994	0,99999	4,265
0,67	0,440	0,85	1,036		

2. Распределение Пуассона

Значения функции $\sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

x \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,095	0,181	0,259	0,330	0,394	0,451
2	005	018	037	062	090	122
3		001	003	008	014	023
4				001	002	003

x \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,503	0,551	0,593	0,632	0,865	0,950
2	156	191	228	264	594	801
3	034	047	063	080	323	577
4	006	009	014	019	143	353
5	001	001	002	004	053	185
6				001	018	084
7					005	034
8					001	012

x \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,982	0,993	0,998	0,999	1,000	1,000
2	908	960	983	924	0,997	0,999
3	762	875	938	970	986	994
4	567	735	849	918	958	979
5	371	560	715	827	900	945
6	215	384	554	699	809	884
7	111	238	394	550	687	793
8	051	138	256	401	547	676
9	021	068	153	271	408	544
10	008	032	084	170	283	413
11	003	014	043	099	184	294
12	001	005	020	053	112	197
13		002	008	027	068	124
14		001	004	013	034	074
15			001	006	017	042
16			001	002	008	022
17				001	004	011
18					002	005
19					001	002
20						001

3. Биномиальное распределение

95%-ные доверительные пределы (θ_1, θ_2) для параметра θ: $P_\theta(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 0{,}95$

k \ $n-k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	— —	0,98 0,00	0,84 0,00	0,71 0,00	0,60 0,00	0,52 0,00	0,46 0,00	0,41 0,00	0,37 0,00	0,34 0,00	0,31 0,00	0,29 0,00	0,27 0,00
1	1,00 0,03	0,99 0,01	0,91 0,01	0,81 0,01	0,72 0,01	0,64 0,00	0,58 0,00	0,53 0,00	0,48 0,00	0,45 0,00	0,41 0,00	0,39 0,00	0,36 0,00
2	1,00 0,16	0,99 0,09	0,93 0,07	0,85 0,05	0,78 0,04	0,71 0,04	0,65 0,03	0,60 0,03	0,56 0,03	0,52 0,02	0,48 0,02	0,45 0,02	0,43 0,02
3	1,00 0,29	0,99 0,19	0,95 0,15	0,88 0,12	0,82 0,10	0,76 0,09	0,70 0,08	0,65 0,07	0,61 0,06	0,57 0,06	0,54 0,05	0,51 0,05	0,48 0,04
4	1,00 0,40	1,00 0,29	0,96 0,22	0,90 0,18	0,84 0,16	0,79 0,14	0,74 0,12	0,69 0,11	0,65 0,10	0,61 0,09	0,58 0,08	0,55 0,08	0,52 0,07
5	1,00 0,48	1,00 0,36	0,96 0,29	0,92 0,25	0,86 0,21	0,81 0,19	0,77 0,17	0,72 0,15	0,68 0,14	0,65 0,13	0,62 0,12	0,59 0,11	0,56 0,10
6	1,00 0,54	1,00 0 42	0,97 0,35	0,93 0,30	0,88 0,26	0,83 0,23	0,79 0,21	0,75 0,19	0,71 0,18	0,68 0,16	0,65 0,15	0,52 0,14	0,59 0,13

7	1,00	1,00	0,97	0,93	0,89	0,85	0,81	0,77	0,73	0,70	0,67	0,64	0,62
	0,59	0,47	0,40	0,35	0,31	0,28	0,25	0,23	0,21	0,20	0,18	0,17	0,16
8	1,00	1,00	0,98	0,94	0,90	0,86	0,82	0,79	0,75	0,72	0,69	0,67	0,64
	0,63	0,52	0,44	0,39	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23	0,22	0,20	0,19
9	1,00	1,00	0,98	0,95	0,91	0,87	0,84	0,80	0,77	0,74	0,71	0,69	0,66
	0,66	0,56	0,48	0,43	0,39	0,35	0,32	0,30	0,28	0,26	0,24	0,23	0,22
10	1,00	1,00	0,98	0,95	0,92	0,88	0,85	0,82	0,79	0,76	0,73	0,70	0,68
	0,69	0,59	0,52	0,46	0,42	0,38	0,35	0,33	0,31	0,29	0,27	0,26	0,24
11	1,00	1,00	0,98	0,95	0,92	0,89	0,86	0,83	0,80	0,77	0,74	0,72	0,69
	0,72	0,62	0,57	0,49	0,45	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32	0,30	0,28	0,27
12	1,00	1,00	0,98	0,96	0,93	0,90	0,87	0,84	0,81	0,78	0,76	0,73	0,71
	0,74	0,64	0,57	0,52	0,48	0,44	0,41	0,38	0,36	0,34	0,32	0,31	0,29

Примечание. Значения ϑ_2 помещены в первых строках, значения ϑ_1 — во вторых.

4. Распределение $\chi^2(n)$

Квантили распределения: $p = \int\limits_0^{\chi^2_{p,n}} k_n(x)dx = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int\limits_0^{\chi^2_{p,n}} x^{n/2-1}e^{-x/2}dx$

n \ p	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,999	0,9999
1	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,584	1,42	2,37	3,67	6,25	7,82	11,3	16,3
4	1,06	2,20	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	18,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	25,7	34,5
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,09	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,3	37,7	44,3	52,6
26	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	45,6	54,1
27	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	47,0	55,5
28	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	48,3	56,9
29	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	49,6	58,3
30	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

5. Распределение Стьюдента $S(n)$

Значение функции $t'_{\gamma,n}$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \int_{-\infty}^{t'_{\gamma,n}} s_n(x)dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \int_{-\infty}^{t'_{\gamma,n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dx$$

n \ γ	0,9	0,95	0,98	0,99
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
12	1,782	2,179	2,681	3,055
14	1,761	2,145	2,625	2,977
16	1,746	2,120	2,584	2,921
18	1,734	2,101	2,552	2,878
20	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,697	2,042	2,457	2,750
	1,645	1,960	2,326	2,576

6. Распределение Снедекора $S(n_1,n_2)$

Значения функции $F_{p,n_1 n_2}$ при $p=0{,}95$ и $p=0{,}99$.

$$p=\int_0^{F_{p,n_1,n_2}} f_{n_1,n_2}(x)dx=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \int_0^{F_{p,n_1,n_2}} x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} dx.$$

«Левые» границы доверительных интервалов находятся из условия $F_{1-p,n_1,n_2}=F^{-1}_{p,n_2,n_1}$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	6	8	10	12	20	50	100
1	161 4052	200 4999	216 5403	225 5625	234 5859	239 5981	242 6056	244 6106	248 6208	252 6302	253 6334
2	18,51 98,49	19,00 99,01	19,16 99,17	19,25 99,25	19,33 99,33	19,37 99,36	19,39 99,40	19,41 99,42	19,44 99,45	19,47 99,48	19,49 99,49
3	10,13 34,12	9,55 30,81	9,28 29,46	9,12 28,71	8,94 27,91	8,84 27,49	8,78 27,23	8,74 27,05	8,66 26,69	8,58 26,35	8,56 26,23
4	6,71 21,20	6,94 18,00	6,59 16,69	6,39 15,98	6,16 15,21	6,04 14,80	5,96 14,54	5,91 14,37	5,80 14,02	5,70 13,69	5,66 13,57
5	6,61 16,26	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,39	4,95 10,67	4,82 10,27	4,74 10,05	4,68 9,89	4,56 9,55	4,44 9,24	4,40 9,13
6	5,99 13,74	5,14 10,92	4,76 9,78	4,53 9,15	4,28 8,47	4,15 8,10	4,06 7,87	4,00 7,72	3,87 7,39	3,75 7,09	3,71 6,99

8	5,32 11,26	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,58 6,37	3,44 6,03	3,34 5,82	3,28 5,67	3,15 5,36	3,03 5,06	2,98 4,96
10	4,96 10,04	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,22 5,39	3,07 5,06	2,97 4,85	2,91 4,71	2,77 4,41	2,64 4,12	2,59 4,01
12	4,75 9,33	3,88 6,93	3,49 5,95	4,26 5,41	3,00 4,82	2,85 4,50	2,76 4,30	2,69 4,16	2,54 3,86	2,40 3,56	2,35 3,46
20	4,35 8,10	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,60 3,87	2,45 3,56	2,35 3,37	2,28 3,23	2,12 2,94	1,96 2,63	1,90 2,53
30	4,17 7,56	3,32 5,39	2,92 4,51	2,69 4,02	2,42 3,47	2,27 3,17	2,16 2,98	2,09 2,84	1,93 2,55	1,76 2,24	1,69 2,13
50	4,03 7,17	3,18 5,06	2,79 4,20	2,56 3,72	2,29 3,18	2,13 2,88	2,02 2,70	1,95 2,56	1,78 2,26	1,60 1,94	1,52 1,82
100	3,94 6,90	3,09 4,82	2,70 3,98	2,46 3,51	2,19 2,99	2,03 2,69	1,92 2,51	1,85 2,36	1,68 2,06	1,48 1,73	1,39 1,59
200	3,89 6,76	3,04 4,71	2,65 3,88	2,41 3,41	2,14 2,90	1,98 2,60	1,87 2,41	1,80 2,28	1,62 1,97	1,42 1,62	1,32 1,48
1000	3,85 6,66	3,00 4,62	2,61 3,80	2,38 3,34	2,10 2,82	1,95 2,53	1,84 2,34	1,76 2,20	1,58 1,89	1,36 1,54	1,26 1,38

Примечания: 1. Значения $F_{0,95;n_1n_2}$ помещены в первых строках, значения $F_{0,99;n_1,n_2}$ — во вторых. 2. Здесь n_1 — степени свободы для большей дисперсии; n_2 — степени свободы для меньшей дисперсии.

7. Критерий Колмогорова

Значения функции λ_p: $p = \mathbf{P}(D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| > \lambda_p)$

n \ p	0,10	0,05	0,01	n \ p	0,10	0,05	0,01
1	0,950	0,975	0,995	19	0,271	0,301	0,361
2	776	842	929	20	265	294	352
3	636	708	829	25	238	264	317
4	565	624	734	30	218	242	290
5	509	563	669	35	202	224	269
6	468	519	617	40	189	210	252
7	436	483	576	45	179	198	238
8	410	454	542	50	170	188	226
9	387	430	513	55	162	180	216
10	369	409	489	60	155	172	207
11	352	391	468	65	149	166	199
12	338	375	449	70	144	160	192
13	325	361	432	75	139	154	185
14	314	349	418	80	135	150	179
15	304	338	404	85	131	145	174
16	295	327	392	90	127	141	169
17	286	318	381	95	124	137	165
18	279	309	371	100	121	134	161

8. Критерий Смирнова

Значения вероятности $\mathbf{P}(D_{nn} \leqslant k/n)$, где $D_{nn} = \sup\limits_x |F_{1n}(x) - F_{2n}(x)|$.

k \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,000										
2	0,667	1,000									
3	400	0,900	1,000								
4	229	771	0,971	1,000							
5	127	643	921	0,992	1,000						
6	069	526	857	974	0,998	1,000					
7	037	425	788	947	992	0,999	1,000				
8	020	340	717	913	981	998	1,000	1,000			
9	011	270	648	874	966	993	0,999	1,000	1,000		
10	006	213	582	832	948	988	998	1,000	1,000	1,000	
11	003	167	521	789	925	979	996	0,999	1,000	1,000	1,000
12	002	131	464	744	900	969	992	999	1,000	1,000	1,000
13	001	102	412	700	874	956	987	997	1,000	1,000	1,000
14	000	079	365	657	845	941	981	995	0,999	1,000	1,000
15	000	062	322	614	816	925	974	992	998	1,000	1,000
16	000	048	284	574	785	907	965	989	997	1,000	1,000
17	000	037	249	535	755	888	955	984	995	0,999	0,999
18	000	028	219	497	725	868	944	979	993	998	999
19	000	022	192	462	694	847	932	973	991	997	999
20	000	017	168	429	664	825	919	966	988	996	999
21	000	013	147	397	635	804	905	959	984	995	998
22	000	010	128	368	606	782	891	951	980	993	998
23	000	008	112	340	578	759	876	942	975	991	997
24	000	006	098	314	551	737	860	932	970	988	996

9. Равномерно распределенные на [0, 1] случайные числа

0,5916	3406	6079	4101	5314
6562	7463	8203	1643	5825
3127	1413	9711	6253	4135
0690	0120	3993	3136	3821
3617	6700	5940	9629	1094
7128	6396	6787	3147	2625
6635	5477	9121	4513	6213
9162	3901	7480	6319	2645
9313	5889	0399	2226	7919
8216	8851	4184	0471	9664
9470	2099	1992	0836	5050
3361	6387	3374	4963	1255
5303	5501	4237	5307	8954
1039	9430	6838	4188	2383
9031	4215	1197	8764	8382
9481	4474	8315	1752	8546
8922	6145	5759	5489	1479
5725	6542	2141	7449	1653
4398	7198	5643	3687	2311
3652	5889	8865	2378	2198
9612	0448	9632	3741	4776
6836	0101	8861	2786	5132
4601	8247	6883	2196	6570
9154	7397	3584	2139	1019
2212	8036	6484	9953	8382
7158	2036	5270	7441	4387
9192	9019	7880	4728	0115
3072	2267	6512	5673	2943
2380	4955	7803	1907	5803
3290	8562	2558	5986	1904
4448	1790	1932	0833	7005
7042	4161	9279	4049	1693
5978	5412	2154	9202	7586
7147	7403	5033	8549	6005
4386	9362	6122	0193	1987

10. Нормально распределенные $N(0, 1)$ случайные числа

−0,486	0,856	−0,491	−1,983	−1,787	−0,261
−0,256	−0,212	0,219	0,779	−0,105	−0,357
0,065	0,415	−0,169	0,313	−1,339	1,827
1,147	−0,121	1,096	0,181	1,041	0,535
−0,199	−0,246	1,239	−2,574	0,279	−2,056
1,237	1,046	−0,508	−1,630	−0,146	−0,392
−1,384	0,360	−0,992	−0,116	−1,698	−2,832
−0,959	0,424	0,969	−1,141	−1,041	0,362
0,731	1,377	0,983	−1,330	1,620	−1,040
0,717	−0,873	−1,096	−1,396	1,047	0,089

−1,805	−2,008	−1,633	0,542	0,250	−0,166
−1,186	1,180	1,114	0,882	1,265	−0,202
0,658	−1,141	1,151	−1,210	−0,927	0,425
−0,439	0,358	−1,939	0,891	−0,227	0,602
−1,399	−0,230	0,385	−0,649	−0,577	0,237
0,032	0,079	0,199	0,208	−1,083	−0,219
0,151	−0,376	0,159	0,272	−0,313	0,084
0,290	−0,902	2,273	0,606	0,606	−0,747
0,873	−0,437	0,041	−0,307	0,121	0,790
−0,289	0,513	−1,132	−2,098	0,921	0,145
−0,291	1,221	1,119	0,004	0,768	0,079
−2,828	−0,439	−0,792	−1,275	0,375	−1,656
0,247	1,291	0,063	−1,793	−0,513	−0,344
−0,584	0,541	0,484	−0,986	0,292	−0,521
0,446	−1,661	1,045	−1,363	1,026	2,990
0,034	−2,127	0,665	0,084	−0,880	−1,473
0,234	−0,656	0,340	−0,086	−0,158	−0,851
−0,736	1,041	0,008	0,427	−0,831	0,210
−1,206	−0,899	0,110	−0,528	−0,813	1,266
−0,491	−1,114	1,297	−1,433	−1,345	−0,574
−1,334	1,278	−0,568	−0,109	−0,515	−0,566
−0,287	−0,144	−0,254	0,574	−0,451	−1,181
0,161	−0,886	−0,921	−0,509	1,410	−0,518
−1,346	0,193	−1,202	0,394	−1,045	0,843
1,250	−0,199	−0,288	1,810	1,378	0,584
2,923	0,500	0,630	−0,537	0,782	0,060
−1,190	−0,318	0,375	−1,941	0,247	−0,491
0,192	−0,432	−1,420	0,489	−1,711	−1,186
0,942	1,045	−0,151	−0,243	−0,430	−0,762
1,216	0,733	−0,309	0,531	0,416	−1,541
0,499	−0,431	1,705	1,164	0,424	−0,444
0,665	−0,135	−0,145	−0,498	0,593	0,658
0,754	−0,732	−0,066	1,006	0,862	−0,885
0,298	1,049	1,810	2,885	0,235	−0,628
1,456	2,040	−0,124	0,196	−0,853	0,402
0,593	0,993	−0,106	0,116	0,484	−1,272
−1,127	−1,407	−1,579	−1,616	1,458	1,262
−0,142	−0,504	0,532	1,381	0,022	−0,281
−0,023	−0,463	−0,899	−0,394	−0,538	1,707
0,777	0,833	0,410	−0,349	−1,094	0,580
0,241	−0,957	−1,885	0,371	−2,830	−0,238
0,022	0,525	−0,255	−0,702	0,953	−0,869
−0,853	−1,865	−0,423	−0,973	−1,016	−1,726
−0,501	−0,273	0,857	−0,465	−1,691	0,417
0,439	−0,035	−0,260	0,120	−9,558	0,056

11. Д-1. Датчик случайных чисел на автокоде ЭВМ серии ЕС

```
RAN START
    USING *,15
    STM     1, 15, SA
    L       9,0(1)
    L       3, 0(9)
    SR      2, 2
    M       2,=F▼843314861▼
    O       3,=X▼80000000▼
    A       3,=F▼453816693▼
    N       3,=X▼7FFFFFFF▼
    ST      3,0(9)
    SRL     3, 7
    A       3,=X▼40000000▼
    ST      3, X
    LE      0, X
    LM      1, 15, SA
    BR      14
SA  DS      15F
X   DS      F
    END
```

12. Д-2. Датчик случайных чисел на автокоде БЭСМ-6

```
RAN    ,NAME,
         ,ATI,9
         ,NTR,3
        9,XTA,
         ,E+N,24
         ,A*X,=1431777206549
         ,YTA,
       AAX,=0017 77777777 7777
         ,AOX,= :642
         ,A+X,= 1 232354146751
         ,AAX,=7757 7777 7777 7777
        9, ATX,
        ,E+N,24
          NTR, 6
       13,UJ,
         ,END,
```

13. Подпрограмма «ВП» (вариационный ряд)

```
  SUBROUTINE RANK (X,N)
  DIMENSION X(N)
  M=N-1
  DO 2 I=1,M
  K=1
1 J=K+1
  IF(X(K),.LE.X(J)) GOTO 2
  R = X(K)
  X(K) = X(J)
  X(J)=R
  K=K-1
  IF(K.GE.1) GOTO 1
```

```
2 CONTINUE
  RETURN
  END
```

Подпрограмма располагает в неубывающем порядке числа массива X(N).

14. Подпрограмма «НЧ» (нормальные числа)

```
  REAL FUNCTION RNORM (K)
  S=Ø
  DO 1 I=1, 12
1 S=S+RAN (K)
  PNORM=S-6.
  RETURN
  END
```

Подпрограмма вызывается оператором Y=RNORM(K)

УКАЗАТЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

	3: 25, 36, 45, 70. 4: 7, 12, 33, 35. 5: 13, 21, 22.
9. Вейбулла $W(a,\alpha,b)$	1: 37. 2: 26, 76, 77, 102, 103, 107, 130. 3: 71.
10. Коши $K(a)$	1: 46. 2: 28, 43, 99. 3: 44.
11. Гипергеометрическое $H(r,N,n)$	2: 33, 113. 3: 57.
12. хи-квадрат $\chi^2(n)$	1: 40, 45, 47, 51, 57, 59, 147. 3: 19.
13. Бета $\beta(a,в)$	1: 44, 47, 48, 49. 2: 48. 5: 13, 17.
14. Стьюдента $S(n)$	1: 47, 50, 59
15. Снедекора $S(n_1,n_2)$	1: 48, 49, 50, 51
16. Логистическое	2: 27, 49
17. Степенного ряда	2: 60, 96, 140
18. Парето	5: 13, 21
19. Дирихле	5: 13, 23
20. Лапласа	2: 105
21. Кептайна	2: 95
22. Обратное гауссовское	2: 54,
23. Конечная совокупность	2: 34, 35, 36, 37, 83, 111, 112

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. М., 1984.
2. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. М., 1982.
3. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений. М., 1966.
4. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М., 1975.
5. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М., 1964.
6. *Бикел П., Доксам К.* Математическая статистика. М., 1983. Т. 2.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. М., 1984. Т. 1.
8. *Ивченко Г. И., Глибоченко А. Ф., Иванов В. А., Медведев Ю. И.* и др. Статистический анализ дискретных случайных последовательностей. МИЭМ. — М.: 1984.
9. *Кнут Д. Е.* Искусство программирования (т. 2. Получисленные алгоритмы). М., 1977.
10. *Ермаков С. М., Михайлов Г. А.* Статистическое моделирование. — М., 1982.

Учебное издание

Ивченко Григорий Иванович,
Медведев Юрий Иванович,
Чистяков Александр Владимирович

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
СТАТИСТИКЕ**

Зав. редакцией учебно-методической литературы по физике и математике Е. С. Гридасова
Редактор Ж. И. Яковлева
Мл. редакторы Г. В. Вятоха, Н. П. Майкова
Оформление художника И. Д. Блынского
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор В. М. Романова
Корректор Г. Н. Буханова

ИБ № 8011

Изд. № ФМ-942. Сдано в набор 10.03.89. Подп. в печать 19.10.89. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бум. тип. №2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 13,44 усл. печ. л. 13,65 усл. кр.-отт. 14,44 уч.-изд. л. Тираж 25 000 экз. Зак. № 190. Цена 55 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат Госкомпечати СССР, 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.