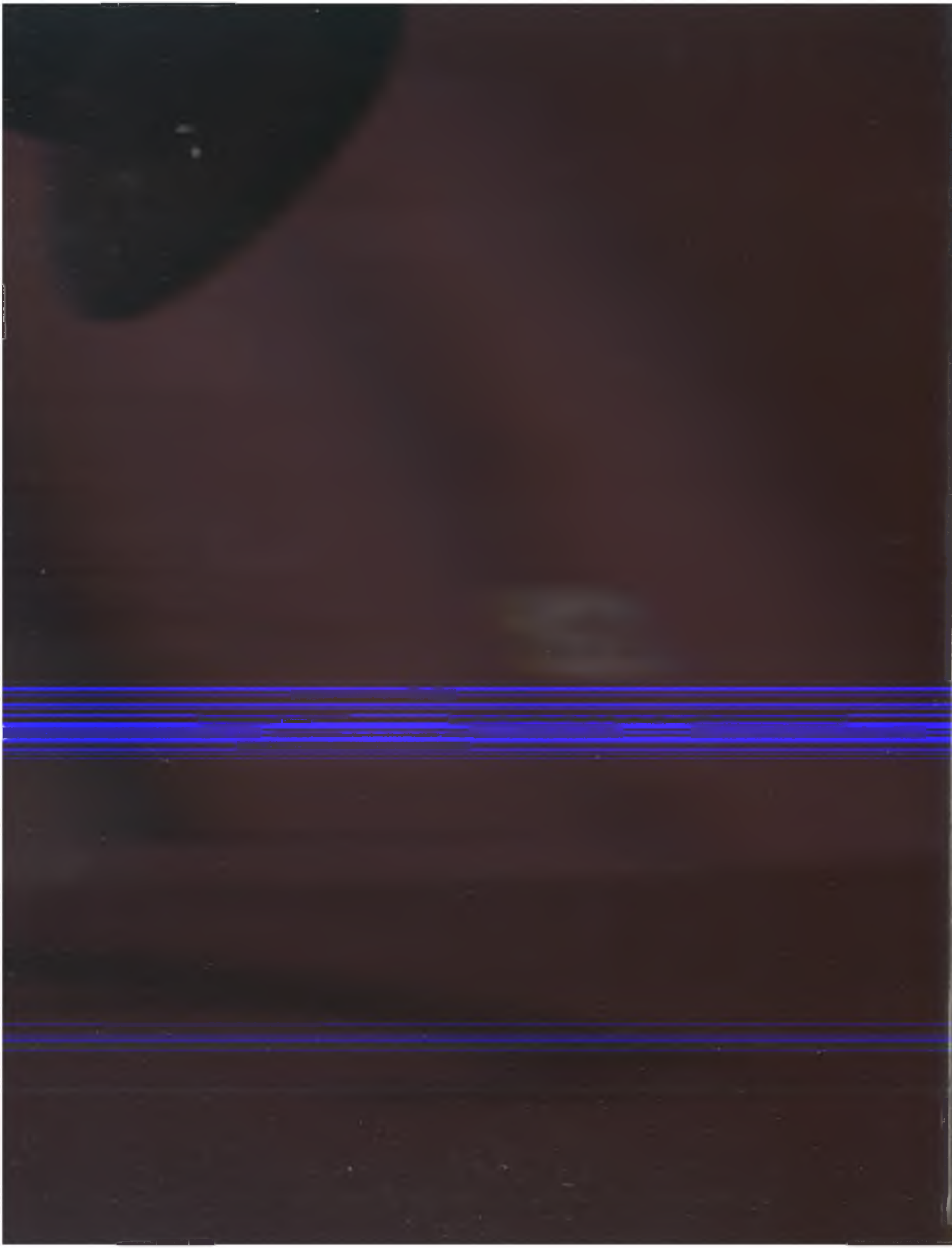

Г.Н. Берман

Сборник задач по курсу математического анализа

Учубное пособие

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к 22-му изданию

Настоящий сборник задач предлагается студентам, изучающим математический анализ в объеме программы для высших учебных заведений. «Сборник» содержит систематически подобранные задачи и упражнения к основным разделам курса математического анализа.

Теоретические справки о необходимых формулах в задачнике не помещены; имеется в виду, что читатель найдет их в соответствующих разделах учебника. Большинство параграфов для удобства подразделено на части, причем группам задач с однородным содержанием предшествует общее указание. Перед задачами физического содержания даются нужные справки по физике. Для более трудных задач указания к решению даны в разделе «Ответы»; такие задачи отмечены звездочкой.

Первое издание сборника вышло в 1947 году. За прошедшие годы ряд разделов математического анализа, изучавшихся ранее в вузах, были включены в программу средней школы. Задачи, относящиеся к таким разделам, редакторы двадцать второго издания сочли возможным исключить. Нумерация задач, однако, для удобства использования осталась такой же, как и в семнадцатом издании (1977 г.).

Глава I

ФУНКЦИЯ

§ 1. Первоначальные сведения о функции

Функции и способы их задания

1. Сумма внутренних углов плоского выпуклого многоугольника является функцией числа его сторон. Задать аналитически эту функцию. Какие значения может принимать аргумент?

4. Функция задана графиком, изображенным на рис. 1. По графику ответить на следующие вопросы:

а) При каких значениях независимой переменной функция обращается в нуль?

б) При каких значениях независимой переменной функция положительна?

в) При каких значениях независимой переменной функция отрицательна?

6. Записать функцию, выражающую зависимость радиуса r цилиндра от его высоты h при данном объеме $V = 1$. Вычислить значения r при следующих значениях h: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5. Построить график функции.

7. Выразить площадь равнобочной трапеции с основаниями a и b как функцию угла α при основании a. Построить график функции при $a = 2$, $b = 1$.

8. Выразить зависимость длины b одного катета прямоугольного треугольника от длины a другого при постоянной гипотенузе $c = 5$. Построить график этой функции.

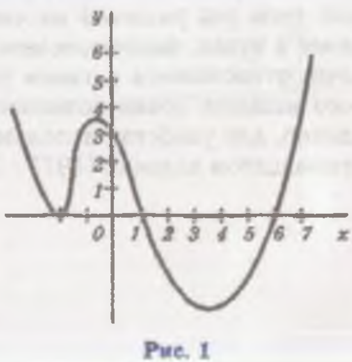

Рис. 1

9. Даны функции а) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$; б) $\varphi(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$.

Найти: $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\sqrt{2}\right)$; $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $\varphi(0)$; $\varphi(1)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-2)$; $\varphi(4)$. Существует ли $f(-1)$; $\varphi(-1)$?

10. Дана функция $f(u)=u^3-1$.
Найти: $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$; $f(a-1)$; $2f(2a)$.

11. Даны функции $F(z)=2^{z-2}$ и $\varphi(z)=2^{|z|-2}$.
Найти: $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$; $F(-1{,}5)$ и $\varphi(0)$; $\varphi(2)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(x)$; $\varphi(-1)+F(1)$.

12. Дана функция $\psi(t)=ta^t$.
Найти: $\psi(0)$; $\psi(1)$; $\psi(-1)$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right)$; $\psi(a)$; $\psi(-a)$.

13. $\varphi(t)=t^3+1$. Найти: $\varphi\left(t^2\right)$ и $[\varphi(t)]^2$.

14. $F(x)=x^4-2x^2+5$. Доказать, что $F(a)=F(-a)$.

15. $\Phi(z)=z^3-5z$. Доказать, что $\Phi(-z)=-\Phi(z)$.

16. $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$. Доказать, что $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

17. $f(x)=\sin x-\cos x$. Доказать, что $f(1)>0$.

18. $\psi(x)=\lg x$. Доказать, что $\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$.

19. $F(z)=a^z$. 1) Доказать, что при любом z справедливо соотношение $F(-z)F(z)-1=0$.

2) Доказать, что $F(x)F(y)=F(x+y)$.

20. Даны график функции $y=f(x)$ и значения a и b независимой переменной x (рис. 2). Построить на чертеже $f(a)$ и $f(b)$. Каков геометрический смысл отношения $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

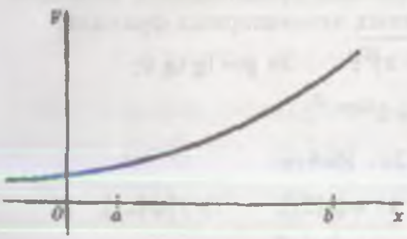

Рис. 2

21. Показать, что если любая хорда графика функции $y=f(x)$ лежит выше стягиваемой ею дуги, то для всех $x_1\neq x_2$ имеет место неравенство

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

22. Дано: $f(x)=x^2-2x+3$. Найти все корни уравнения: а) $f(x)=f(0)$; б) $f(x)=f(-1)$.

23. Дано: $f(x)=2x^3-5x^2-23x$. Найти все корни уравнения $f(x)=f(-2)$.

25. Указать два корня уравнения $f(x)=f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, если известно, что функция $f(x)$ определена на отрезке $[-5,5]$. Найти все корни данного уравнения для случая, когда $f(x)=x^2-12x+3$.

26. $F(x)=x^2+6$; $\varphi(x)=5x$. Найти все корни уравнения $F(x)=|\varphi(x)|$.

27. $f(x)=x+1$; $\varphi(x)=x-2$. Решить уравнение

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|.$$

28. Найти значения a и b в выражении функции $f(x)=ax^2+bx+5$, для которых справедливо тождество $f(x+1)-f(x)\equiv 8x+3$.

29. Пусть $f(x)=a\cos(bx+c)$. При каких значениях постоянных a, b и c выполняется тождество $f(x+1)-f(x)\equiv\sin x$.

Сложные и неявно заданные функции

33. Дано: $y=\sin x$; $v=\lg y$; $u=\sqrt{1+v^2}$. Выразить u как функцию x.

34. Дано: $y=1+x$; $z=\cos y$; $v=\sqrt{1-z^2}$. Выразить v как функцию x.

35. Следующие сложные функции представить с помощью цепочек, составленных из основных элементарных функций:

1) $y=\sin^3 x$; 2) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$; 3) $y=\lg\operatorname{tg} x$;

4) $y=\sin^3(2x+1)$; 5) $y=5^{(3x+1)^2}$.

36. $f(x)=x^3-x$; $\varphi(x)=\sin 2x$. Найти:

а) $f\left[\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$; б) $\varphi[f(1)]$; в) $\varphi[f(2)]$; г) $f[\varphi(x)]$;

д) $f[f(x)]$; е) $f\{f[f(1)]\}$; ж) $\varphi[\varphi(x)]$.

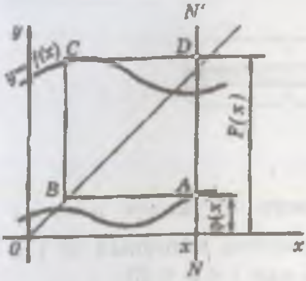

Рис. 3

37. Доказать справедливость следующего способа построения графика сложной функции $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ по известным графикам составляющих функций: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$. Из точки A графика функции $\varphi(x)$ (рис. 3), соответствующей данному значению независимой переменной x, проводится прямая, параллельная оси Ox, до пересечения в точке B с биссектрисой первого и третьего координатных углов; из точки B проводится прямая, параллельная оси Oy, до пересечения с графиком функции $f(x)$ в точке C. Если из точки C провести прямую, параллельную оси Ox, то точка D ее пересечения с прямой NN' будет точкой графика функции $F(x)$, соответствующей взятому значению x.

38. Написать в явном виде функцию y, неявно заданную следующим уравнением:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x^3 + y^3 = a^3$; 4) $xy = C$;

5) $2^{xy} = 5$; 6) $\lg x + \lg(y+1) = 4$; 7) $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$;

8) $(1+x)\cos y - x^2 = 0$.

39*. Показать, что при $x > 0$ уравнение $y + |y| - x - |x| = 0$ определяет функцию, графиком которой является биссектриса первого координатного угла, а при $x \le 0$ данному уравнению удовлетворяют координаты всех точек третьего координатного угла (включая и его граничные точки).

§ 2. Простейшие свойства функций

Область определения функции

40. Составить таблицу значений функции целочисленного аргумента $y = \frac{1}{x!}$ для $1 \le x \le 6$.

41. Значение функции целочисленного аргумента $u = \varphi(n)$ равно количеству простых чисел, не превосходящих n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

1078. Доказать, что функция, заданная параметр… уравнениями $x = \sin t$, $y = \sin kt$, удовлетворяет соотнош…

$$(1-x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2 y = 0.$$

1079. Доказать, что если

$x = f(t)\cos t - f'(t)\sin t$, $y = f(t)\sin t + f'(t)\cos t$, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[f(t) + f''(t)\right]^2 dt^2.$$

Ускорение движения

1080. Точка движется прямолинейно, причем $s = \frac{t^5}{5}$… $-t+5$. Найти ускорение a в конце второй секунды (s выраж… в метрах, t – в секундах).

1081. Прямолинейное движение происходит в соответств… формулой $s = t^2 - 4t + 1$. Найти скорость и ускорение движени…

1082. Точка движется прямолинейно, при… $s = \frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2} + s_0$. Найти ускорение в конце первой секунд… выражено в сантиметрах, t – в секундах).

1083. Точка движется прямолинейно, причем $s = \sqrt{t}$. До…зать, что движение замедленное и что ускорение a пропор…нально кубу скорости v.

1084. Тяжелую балку длиной 13 м спускают на землю так, что нижний ее конец прикреплен к вагонетке (рис. 15), а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Канат сматывается со скоростью 2 м/мин. С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она находится на расстоянии 5 м от точки O?

Рис. …

1085. Баржу, палуба которой на 4 м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот со скоростью 2 м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на 8 м (по горизонтали).

1086. Точка движется прямолинейно так, что скорость ее изменяется пропорционально квадратному корню из пройденного пути. Показать, что движение происходит под действием постоянной силы.

1087. Дано, что сила, действующая на материальную точку, обратно пропорциональна скорости движения точки. Доказать, что кинетическая энергия точки является линейной функцией времени.

Формула Лейбница

1088. Применить формулу Лейбница для вычисления производной:

1) $\left[\left(x^2+1\right)\sin x\right]^{(20)}$; 2) $\left(e^x \sin x\right)^{(n)}$; 3) $\left(x^3 \sin \alpha x\right)^{(n)}$.

1089. Показать, что если $y = (1-x)^{-\alpha} e^{-\alpha x}$, то

$$(1-x)\frac{dy}{dx} = \alpha x y.$$

Применив формулу Лейбница, показать, что

$$(1-x)y^{(n+1)} - (n+\alpha x)y^{(n)} - n\alpha y^{(n-1)} = 0.$$

1090. Функция $y = e^{\alpha \arcsin x}$ удовлетворяет соотношению $\left(1-x^2\right)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$ (см. задачу 1051).

Применив формулу Лейбница и дифференцируя это равенство n раз, показать, что

$$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - \left(n^2+\alpha^2\right)y^{(n)} = 0.$$

1091. Показать, что $\left(e^{ax}\cos bx\right)^{(n)} = r^n e^{ax}\cos(bx + n\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Используя формулу Лейбница, получить следующие формулы:

$$r^n \cos n\varphi = a^n - C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^4 a^{n-4}b^4 - \ldots,$$

$$r^n \sin n\varphi = C_n^1 a^{n-1}b - C_n^3 a^{n-3}b^3 + C_n^5 a^{n-5}b^5 - \ldots$$

1092. Доказать, что $\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

1093. Доказать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет отношению $\left(1 - x^2\right)y'' = xy'$. Применяя к обеим частям эт уравнения формулу Лейбница, найти $y^{(n)}(0)$ $(n \geq 2)$.

1094. Применяя формулу Лейбница n раз, показать, функция $y = \cos(m \arcsin x)$ удовлетворяет соотношению

$$\left(1 - x^2\right)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} + \left(m^2 - n^2\right)y^{(n)} = 0.$$

1095. Если $y = (\arcsin x)^2$, то

$$\left(1 - x^2\right)y^{(n+1)} - (2n-1)\,xy^{(n)} + (n-1)^2 y^{(n-1)} = 0.$$

Найти $y'(0)$, $y''(0), \ldots, y^{(n)}(0)$.

Дифференциалы высших порядков

1096. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $d^2y = ?$

1097. $y = x^m$; $d^3y = ?$

1098. $y = (x+1)^3(x-1)^2$; $d^2y = ?$

1099. $y = 4^{-x^2}$; $d^2y = ?$

1100. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$; $d^2y = ?$

1101. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$; $d^2y = ?$

1102. $y = \sin^2 x$; $d^3y = ?$

1103. $\rho^2 \cos^3 \varphi - a^2 \sin^3 \varphi = 0$; $d^2\rho = ?$

1104. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $d^2y = ?$

1105. $y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x = \operatorname{tg} t$; выразить d^2y через: 1) x и dx, 2) t и dt.

1106. $y = \sin z$; $z = a^x$; $x = t^3$; выразить d^2y через: 1) z и dz, 2) x и dx, 3) t и dt.

Глава IV

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

§ 1. Поведение функции

1107. Показать, что точка $x = 0$ есть точка минимума функции $y = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 1$.

1108. Исходя непосредственно из определения возрастающей и убывающей функции и точек максимума и минимума, показать, что функция $y = x^3 - 3x + 2$ возрастает в точке $x_1 = 2$, убывает в точке $x_2 = 0$, достигает максимума в точке $x_3 = -1$ и минимума в точке $x_4 = 1$.

1109. Так же, как в задаче 1108, показать, что функция $y = \cos 2x$ возрастает в точке $x_1 = \frac{3\pi}{4}$, убывает в точке $x_2 = \frac{\pi}{6}$, достигает максимума в точке $x_3 = 0$ и минимума в точке $x_4 = \frac{\pi}{2}$.

1110. Не пользуясь понятием производной, выяснить поведение данной функции в точке $x = 0$:

1) $y = 1 - x^4$; 2) $y = x^5 - x^3$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$;

4) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 5) $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$; 6) $y = |\operatorname{tg} x|$;

7) $y = |\ln(x+1)|$; 8) $y = e^{-|x|}$; 9) $y = \sqrt{x^3 + x^2}$.

1111. Показать, что функция $y = \ln(x^2 + 2x - 3)$ возрастает в точке $x_1 = 2$, убывает в точке $x_2 = -4$ и не имеет стационарных точек.

1112. Выяснить поведение функции $y = \sin x + \cos x$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$ и $x_4 = 2$.

1113. Выяснить поведение функции $y = x - \ln x$ в точ $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_3 = e$ и $x_4 = 1$ и показать, что если дан функция возрастает в точке $x = a > 0$, то она убывает в точке

1114. Выяснить поведение функции $y = x \operatorname{arctg} x$ в точ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 0$.

1115. Выяснить поведение функции

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

в точках $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ и $x_3 = 0$.

§ 2. Применение первой производной

Теоремы Ролля и Лагранжа

1116. Проверить справедливость теоремы Ролля для фу ции $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на отрезке $[-1, 2]$.

1117. Проверить справедливость теоремы Ролля для фу ции $y = \ln \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

1118. Проверить справедливость теоремы Ролля для фу ции $y = 4^{\sin x}$ на отрезке $[0, \pi]$.

1119. Проверить справедливость теоремы Ролля для фу ции $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ на отрезке $[1, 2]$.

1120. Функция $y = \frac{2 - x^2}{x^4}$ принимает равные значени концах отрезка $[-1, 1]$. Убедиться в том, что производн этой функции нигде на отрезке $[-1, 1]$ в нуль не обращается объяснить такое уклонение от теоремы Ролля.

1121. Функция $y = |x|$ принимает равные значения на к цах отрезка $[-a, a]$. Убедиться в том, что производная от э функции нигде на отрезке $[-a, a]$ в нуль не обращается, и о яснить такое уклонение от теоремы Ролля.

1122. Доказать теорему: если уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x = 0$$

имеет положительный корень $x = x_0$, то уравнение

$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

также имеет положительный корень и притом меньший x_0.

1123. Дана функция $f(x) = 1 + x^m (x-1)^n$, где m и n – целые положительные числа. Не вычисляя производной, показать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень в интервале $(0, 1)$.

1124. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + c = 0$ не может иметь двух различных корней в интервале $(0, 1)$.

1125. Не находя производной функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

выяснить, сколько действительных корней имеет уравнение $f'(x) = 0$, и указать интервалы, в которых они лежат.

1126. Показать, что функция $f(x) = x^n + px + q$ не может иметь более двух действительных корней при четном n и более трех при нечетном n.

1127. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \sin 3x$ на отрезке $[x_1, x_2]$.

1128. Написать формулу Лагранжа для функции $y = x(1 - \ln x)$ на отрезке $[a, b]$.

1129. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \arcsin 2x$ на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

1130. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = x^n$ на отрезке $[0, a]$; $n > 0$, $a > 0$.

1131. Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y = \ln x$ на отрезке $[1, e]$.

1132. Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенства $\frac{a-b}{a} \le \ln \frac{a}{b} \le \frac{a-b}{b}$ при условии $0 < b \le a$.

1133. Доказать с помощью формулы Лагранжа неравенства $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \le \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \le \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$ при условии $0 < \beta \le \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Элементы поведения функции

52. $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$; указать область определения функции $f(x)$ и убедиться, что эта функция неотрицательна.

53. Найти интервалы знакопостоянства и корни функции:

1) $y=3x-6$; 2) $y=x^2-5x+6$; 3) $y=2^{x-1}$;

4) $y=x^3-3x^2+2x$; 5) $y=|x|$.

54. Какие из указанных ниже функций четны, какие нечетны, какие не являются ни четными, ни нечетными:

1) $y=x^4-2x^2$; 2) $y=x-x^2$; 3) $y=\cos x$;

4) $y=2^x$; 5) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$; 6) $y=\sin x$;

7) $y=\sin x-\cos x$; 8) $y=1-x^2$; 9) $y=\operatorname{tg} x$;

10) $y=2^{-x^2}$; 11) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$; 12) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$;

13) $y=\frac{x}{a^x-1}$; 14) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$; 15) $y=x\cdot\frac{a^x-1}{a^x+1}$;

16) $y=2^{x-x^4}$; 17) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$?

55. Каждую из следующих функций представить в виде суммы четной и нечетной функций:

1) $y=x^2+3x+2$; 2) $y=1-x^3-x^4-2x^5$;

3) $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}+\operatorname{tg} x$.

56. Доказать, что $f(x)+f(-x)$ – четная функция, а $f(x)-f(-x)$ – нечетная функция.

57. Представить в виде суммы четной и нечетной функций следующие функции:

1) $y=a^x$; 2) $y=(1+x)^{100}$ (см. задачу 56).

58. Доказать, что произведение двух четных функций есть четная функция, произведение двух нечетных функций – четная функция, произведение четной и нечетной функции – нечетная функция.

59. Какие из нижеследующих функций будут периодическими:

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\sin x^2$; 3) $y=x\cdot\cos x$; 4) $y=\sin\frac{1}{x}$;

5) $y=1+\operatorname{tg} x$; 6) $y=5$; 7) $y=[x]$; 8) $y=x-[x]$?

(Функция $[x]$ определяется так: если x – целое число, то $[x] = x$. Если x не есть целое число, то $[x]$ равно наибольшему целому числу, меньшему x. Так, $[2] = 2$; $[3{,}25] = 3$; $[-1{,}37] = -2$.)

60. Построить график такой периодической функции с периодом $T = 1$, которая на полуинтервале $[0, 1)$ задана формулой:

1) $y = x$; 2) $y = x^2$.

61. Указать интервалы возрастания и убывания и интервалы постоянства функций:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - x$.

62. Указать наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos x^3$; 3) $y = 1 - \sin x$; 4) $y = 2^{x^2}$.

64. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = \frac{1}{2}\left[|f(x)| + f(x)\right]$; 3) $y = \frac{1}{2}\left[|f(x)| - f(x)\right]$.

§ 3. Элементарные функции. Обратная функция

65. Дано, что при напряжении $E = 2{,}4$ В сила тока $I = 0{,}8$ А. Выразить аналитически, используя закон Ома, зависимость между силой тока и напряжением; построить график найденной функции.

66. В сосуд произвольной формы налита жидкость. На глубине $h = 25{,}3$ см давление этой жидкости $p = 1{,}84 \cdot 10^3$ Па.

а) Составить функцию, выражающую зависимость давления от глубины.

б) Определить давление на глубине $h = 14{,}5$ см.

в) На какой глубине давление станет равным $2{,}65 \cdot 10^3$ Па?

67. Тело движется прямолинейно под действием силы F. Исходя из закона Ньютона, написать функцию, выражающую зависимость между силой F и ускорением w, если известно, что если тело движется с ускорением 12 м/с^2, то на пути $s = 15$ м производится работа $A = 32$ Дж.

1134. Доказать с помощью формулы Лагранжа спра-вость при $a > b$ неравенств $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a$ если $n > 1$, и неравенств противоположного смысла, если n

1135. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция дифференцируема при любом x. Напишем нее формулу Лагранжа на отрезке $[0, x]$: $f(x) - f(0) =$ $(0 < \xi < x)$. Будем иметь: $x^2 \sin\frac{1}{x} = x\left(2\xi \sin\frac{1}{\xi} - \cos\frac{1}{\xi}\right)$, от $\cos\frac{1}{\xi} = 2\xi \sin\frac{1}{\xi} - x \sin\frac{1}{x}$. Заставим теперь x стремиться к н тогда будет стремиться к нулю и ξ, и мы полу $\lim\limits_{\xi \to 0} \cos\frac{1}{\xi} = 0$.

Объяснить этот парадоксальный результат.

1136. Применяя на отрезке $[1; 1{,}1]$ к функции $f(x) = \mathrm{arc}$ формулу $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x$, найти прибли ное значение $\mathrm{arctg}\, 1{,}1$.

В задачах 1137–1141, используя формулу

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x,$$

вычислить приближенные значения данных выражений:

1137. $\arcsin 0{,}54$.

1138. $\lg 11$. Сравнить с табличным значением.

1139. $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ при $x = 0{,}2$.

1140. $\lg 7$, зная $\lg 2 = 0{,}3010$ и $\lg 3 = 0{,}4771$. Сравнить зультат с табличным.

1141. $\lg 61$. Сравнить результат с табличным.

1142. Убедиться в том, что применяя формулу

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

к вычислению логарифма от $N + 0{,}01N$, т. е. полагая

$$\lg(N + 0{,}01N) = \lg N + \frac{0{,}43429}{N + \frac{0{,}01}{2}N} \cdot 0{,}01N = \lg N + \frac{0{,}43429}{100{,}5},$$

допускаем погрешность, меньшую 0,00001, т. е. получаем пять верных цифр после запятой, если только $\lg N$ дан с пятью вер-ными цифрами.

Поведение функций в интервале

1143. Показать, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале $(-2, 1)$.

1144. Показать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает в ин-тервале $(0, 1)$ и убывает в интервале $(1, 2)$. Построить график данной функции.

1145. Показать, что функция $y = x^3 + x$ везде возрастает.

1146. Показать, что функция $y = \mathrm{arctg}\, x - x$ везде убывает.

1147. Показать, что функция $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ возрастает в любом интервале, на содержащем точки $x = 0$.

1148. Показать, что функция $y = \frac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$ изменяется мо-нотонно в любом интервале, не содержащем точек разрыва функции.

1149*. Доказать неравенство $\frac{\mathrm{tg}\, x_2}{\mathrm{tg}\, x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ при условии

$$0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

1150. Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$$

и построить по точкам ее график в интервале $(-2, 4)$.

1151. Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^4 - 2x^2 - 5.$$

В задачах 1152–1164 найти интервалы монотонности функций.

1152. $y = (x-2)^5 (2x+1)^4$.

1153. $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a > 0)$.

1154. $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$. **1155.** $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

1156. $y = x - e^x$. **1157.** $y = x^2 e^{-x}$. **1158.** $y = \frac{1}{\ln x}$.

68. Определить линейную функцию $y = ax + b$ по следующим данным:

1)

x	y
0	4
3	6

2)

x	y
2	4,3
−1,6	0

3)

x	y
2,5	7,2
3,2	6,8

69. Некоторое количество газа занимало при $20°$C объем 107 см^3, при $40°$C объем стал равным 114 см^3.

а) Составить, исходя из закона Гей-Люссака, функцию, выражающую зависимость объема V газа от температуры t.

б) Каков будет объем при $0°$C?

70. Равномерно движущаяся по прямой точка через 12 с после начала движения находилась на расстоянии +32,7 см от некоторой точки этой прямой; через 20 с после начала движения расстояние стало равным +43,4 см. Выразить расстояние s как функцию времени t.

71. Напряжение в некоторой цепи падает равномерно (по линейному закону). В начале опыта напряжение было равно 12 В, а по окончании опыта, длившегося 8 с, напряжение упало до 6,4 В. Выразить напряжение V как функцию времени t и построить график этой функции.

72. Найти приращение линейной функции $y = 2x - 7$ при переходе независимой переменной x от значения $x_1 = 3$ к значению $x_2 = 6$.

73. Найти приращение линейной функции $y = -3x + 1$, соответствующее приращению независимой переменной $\Delta x = 2$.

74. Функция $y = 2{,}5x + 4$ получила приращение $\Delta y = 10$. Найти приращение аргумента.

75. Даны функция $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$ и начальное значение независимой переменной $x_1 = a - b$. При каком конечном значении x_2 независимой переменной x приращение $\Delta y = \frac{1}{a-b}$?

76. Функция $\varphi(x)$ задана так: $\varphi(x) = \frac{x}{2} + 2$ при $-\infty < x \le 2$; $\varphi(x) = 5 - x$ при $2 \le x < +\infty$. Найти корни уравнения $\varphi(x) = 2x - 4$ аналитически и графически.

77. Построить график функции:

1) $y = |x+1| + |x-1|$; 2) $y = |x+1| - |x-1|$;

3) $y = |x-3| - 2|x+1| + 2|x| - x + 1$.

78*. Для каких значений x справедливо неравенство

$$|f(x)+\varphi(x)|<|f(x)|+|\varphi(x)|,$$

если $f(x)=x-3$, а $\varphi(x)=4-x$.

79. Для каких значений x справедливо неравенство

$|f(x)-\varphi(x)|>|f(x)|-|\varphi(x)|$, если $f(x)=x$, а $\varphi(x)=x-2$.

80. Функция $f(x)$ определена так: в каждом из интервалов $n\le x<n+1$, где n – целое положительное число, $f(x)$ меняется линейно, причем $f(n)=-1$, $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=0$. Построить график этой функции.

81. Построить график и указать интервалы возрастания и убывания данной функции:

1) $y=\frac{1}{2}x^2$; 2) $y=x^2-1$; 3) $y=|x^2-1|$;

4) $y=1-x^2$; 5) $y=x^2-x+4$; 6) $y=x-x^2$;

7) $y=|x-x^2|$; 8) $y=2x^2+3$; 9) $y=2x^2-6x+4$;

10) $y=-3x^2+6x-1$; 11) $y=|-3x^2+6x-1|$;

12) $y=-x|x|$.

82. Написать аналитическое выражение однозначной функции, определенной на полуинтервале $(-\infty, 6]$, если известно, что график ее состоит из точек оси Ox с абсциссами, меньшими числа -3, из точек параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки $A(-3, 0)$, $B(0, 5)$, и из точек отрезка CD с концами $C(3, 0)$ и $D(6, 2)$.

83. Найти наибольшее значение функции:

1) $y=-2x^2+x-1$; 2) $y=-x^2-3x+2$; 3) $y=5-x^2$;

4) $y=-2x^2+ax-a^2$; 5) $y=a^2x-b^2x^2$.

84. Найти наименьшее значение функции:

1) $y=x^2+4x-2$; 2) $y=2x^2-1{,}5x+0{,}6$;

3) $y=1-3x+6x^2$; 4) $y=a^2x^2+a^4$; 5) $y=(ax+b)(ax-2b)$.

85. Представить число a в виде суммы двух слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

86. Представить число a в виде суммы двух чисел так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

87. Около каменной стенки нужно сделать деревянный забор, чтобы огородить прямоугольный участок земли. Общая длина забора равна 8 м. Какова должна быть длина части забора, параллельной стенке, для того, чтобы забор охватил наибольшую площадь?

88. В треугольнике сумма сторон, заключающих данный угол, равна 100 см. Чему должны быть равны эти стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

89. Какой из цилиндров с данным периметром осевого сечения $P = 100$ см имеет наибольшую боковую поверхность?

90. Какой из конусов, периметр осевого сечения которых равен P, имеет наибольшую боковую поверхность?

91. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, на который поставлен конус (с тем же основанием). Угол при вершине конуса $60°$. Периметр осевого сечения тела 100 см. Каков должен быть радиус цилиндра, для того чтобы боковая поверхность тела была наибольшей?

93. В данный прямой конус вписан цилиндр так, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. При каком отношении радиусов оснований цилиндра и конуса цилиндр будет иметь наибольшую боковую поверхность?

94. Дан прямой круговой конус, радиус основания которого равен R, а высота H. В конус вписан цилиндр так, что плоскости и центры круговых оснований цилиндра и конуса совпадают. Каким должен быть радиус цилиндра, для того чтобы полная поверхность цилиндра имела наибольшую величину? Рассмотреть случаи $H > 2R$ и $H \le 2R$.

95. Каков должен быть радиус круга, для того чтобы сектор, периметр которого равен данному числу P, имел наибольшую площадь?

96. Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается правильным треугольником. Периметр окна P. Каково должно быть основание a прямоугольника, для того чтобы окно имело наибольшую площадь?

97. Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается полукругом. Каково должно быть основание прямоугольника, для того чтобы при периметре, равном 2 м, окно имело наибольшую площадь?

99. Из проволоки длиной 120 см нужно сделать модель прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Какова должна быть сторона основания, для того чтобы полная поверхность параллелепипеда была наибольшей?

100. Кусок проволоки длиной a нужно разрезать на две части; из одной сделать квадрат, из другой — правильный треугольник. Как нужно разрезать проволоку, чтобы сумма площадей полученных таким образом фигур была наименьшей?

101. Найти на прямой $y = x$ точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $(-a, 0)$, $(a, 0)$ и $(0, b)$ была бы наименьшей.

102. Найти на прямой $y = x + 2$ точку, сумма квадратов расстояний которой до прямых $3x - 4y + 8 = 0$ и $3x - y - 1 = 0$ была бы наименьшей.

104. Построить параболу $y = x^2$ и использовать ее для графического решения следующих уравнений:

1) $x^2 - x - 2{,}25 = 0$; 2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$;

3) $3{,}1x^2 - 14x + 5{,}8 = 0$; 4) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;

5) $3x^2 - 8x + 7 = 0$.

105. Функция $\varphi(x)$ задана так: $\varphi(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ при $-\infty < x \le \frac{11}{3}$; $\varphi(x) = 1 + x$ при $\frac{11}{3} \le x < +\infty$. Найти аналитически и графически все действительные корни уравнения $[\varphi(x)]^2 = 7x + 25$.

106. Указать область определения функции

$$y = \lg\left(ax^2 + bx + c\right).$$

107. Найти $f(x+1)$, если дано, что $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.

108*. Показать, что функция $f(x) = \frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$ принимает любое действительное значение, если $0 < c \le 1$.

109. Исходя из закона Бойля-Мариотта, найти функцию, выражающую зависимость объема газа от давления при $t = \mathrm{const}$, если известно, что при давлении 10^5 Па объем газа равен 2,3 л. Построить график этой функции.

110. Переменная x обратно пропорциональна y, y обратно пропорциональна z, z в свою очередь обратно пропорциональна v. В какой зависимости находятся x и v?

111. Переменная x обратно пропорциональна y, y прямо пропорциональна z, z прямо пропорциональна u, u обратно пропорциональна v. В какой зависимости находятся x и v?

112. При электролизе количество выделяющегося на электроде вещества пропорционально силе тока, сила тока пропорциональна проводимости электролита, проводимость пропорциональна концентрации электролита, концентрация при данном количестве вещества обратно пропорциональна объему растворителя. Как количество выделяющегося на электроде вещества зависит от объема растворителя?

113. Построить график дробно-линейной функции:

1) $y = \frac{x-1}{x-2}$; 2) $y = \frac{2x}{3-x}$; 3) $y = \frac{2x-5}{3x-7,5}$;

4) $y = \frac{x}{1-\frac{1}{2}x}$; 5) $y = \frac{4-3x}{3-2,25x}$.

114. Найти по графику наибольшее и наименьшее значения дробно-линейной функции на данном отрезке:

1) $y = \frac{4}{x}\ [1, 5]$; 2) $y = \frac{x}{2x-5}\ [-1, 2]$; 3) $y = \frac{1-x}{1+x}\ [0, 4]$.

116. С помощью графического сложения построить график функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

117. Найти функцию, обратную данной:

1) $y = x$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 1-3x$; 4) $y = x^2+1$;

5) $y = \frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{1}{1-x}$; 7) $y = x^2-2x$; 8) $y = \sqrt[3]{x^2+1}$;

9) $y = 10^{x+1}$; 10) $y = 1+\lg(x+2)$; 11) $y = \log_x 2$;

12) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$; 13) $y = \frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1$; 14) $y = 2\sin 3x$;

15) $y = 1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$; 16) $y = 4\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

118. Доказать, что функция, обратная к дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (считаем, что $ad-bc \neq 0$), также дробно-линейная.

119. При каком условии дробно-линейная функция задачи 118 совпадает со своей обратной?

120. Показать, что если $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$, $x > 0$, то $f[f(x)] = x$. Найти функцию, обратную $f(x)$.

121. Какова особенность графика функции, тождественной со своей обратной?

122. Функция y от x задана уравнением $y^2 - 1 + \log_2(x - 1) = 0$. Найти область определения данной функции и записать функцию, обратную данной.

123. Функция y от x задана уравнением $y^2 + \sin^3 x - y + 2 = 0$. Найти функцию, обратную данной.

124. Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{3}x^3$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^3$; 3) $y = x^3 + 3x^2$;

4) $y = x^3 - x + 1$; 5) $y = -x^3 + 2x - 2$; 6) $y = 2x^{\frac{3}{2}}$;

7) $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}}$; 8) $y = x^{0,3}$; 9) $y = x^{2,1}$; 10) $y = x^{0,62}$;

11) $y = \frac{1}{2}x^{-0,2}$; 12) $y = 5x^{-2,5}$; 13) $y = 1 - \sqrt{|x|}$.

125. Графически найти приближенные значения действительных корней уравнения $x + 3 = 4\sqrt[3]{x^2}$.

126*. Начертить кубическую параболу $y = x^3$ и использовать ее для графического решения уравнения:

1) $x^3 + x - 4 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$;

3) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$; 4) $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$.

127. По данному условию составить уравнение и решить его графически: 1) Квадрат какого числа равен самому числу, сложенному с его обратной величиной?

2) Деревянный шар с радиусом, равным 10 см, и плотностью, равной 0,8 г/см^3, плавает на поверхности воды. Найти высоту сегмента, погруженного в воду.

3) Общая масса деревянного куба и пирамиды с квадратным основанием равна 0,8 кг. Ребро куба равно стороне основания пирамиды, высота пирамиды 45 см. Найти ребро куба. Плотность дерева 0,8 г/см^3.

128. Дана функция $y = x^n$, $x > 0$. При каких значениях x эта функция имеет значения, бо́льшие значений обратной функции, и при каких – меньшие?

129. Построить график функции:

1) $y=-2^x$; 2) $y=2^{x+3}$; 3) $y=\frac{1}{3}\cdot 3^x$;

4) $y=1-3^{x-3}$; 5) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 6) $y=2^{-x^2}$.

130. Используя график функции $y=2^x$, построить без дальнейших вычислений график функции:

1) $y=2^{x-1}$; 2) $y=\frac{1}{12}\cdot 2^{\frac{x}{2}}$; 3) $y=\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{x-1}{2}}+1$.

131. Показать, что графиком функции $y=k\cdot a^x$ $(k>0)$ является та же линия, что и для функции $y=a^x$, только сдвинутая параллельно оси ординат.

132. С помощью графического сложения построить график функции: 1) $y=x^2+2^x$; 2) $y=x^2-2^x$.

133. Графически решить уравнение $2^x-2x=0$.

134. Построить фигуру, ограниченную линиями $y=2^x$, $y=\frac{1+x}{x}$ и $x=3$. По графику найти приближенно координаты точек пересечения данных линий.

135. Найти *наибольшее* возможное значение n, при котором $2^x>x^n$ для всех $x\geq 100$ (n – целое).

136. Доказать, что $y=\operatorname{sh}x$ и $y=\operatorname{th}x$ – нечетные функции, а $y=\operatorname{ch}x$ – четная функция. Являются ли эти функции периодическими?

137. Доказать справедливость следующих равенств:

1) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$; 2) $\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}2x$;

3) $2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x=\operatorname{sh}2x$; 4) $\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\alpha$;

5) $\operatorname{ch}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta$; 6) $1-\operatorname{th}^2x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$;

7) $1-\operatorname{cth}^2x=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$.

138. Построить график функции:

1) $y=-\log_2x$; 2) $y=\lg\frac{10}{x}$; 3) $y=|\lg x|$;

4) $y=\log_2|x|$; 5) $y=1+\lg(x+2)$; 6) $y=\log_2|1-x|$;

7) $y=a^{\log_a x}$; 8) $y=\log_x 2$.

139. Используя график функции $y = \lg x$, построить график функции: 1) $y = \frac{1}{2}\lg(x+1)$; 2) $y = 2\lg\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

140. Дана функция $y = x + \lg\frac{1}{x}$. С помощью графического сложения построить график данной функции и по графику найти наименьшее значение этой функции в полуинтервале $(0, 2]$.

141. Показать, что график функции $y = \log_a\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ симметричен относительно начала координат. Найти обратную функцию.

142. Доказать, что ордината графика функции $y = \log_a x$ равна соответствующей ординате графика функции $y = \log_{a^n} x$, умноженной на n.

143. Указать амплитуду и период гармоники:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = 5\cos 2x$; 3) $y = 4\sin \pi x$;

4) $y = 2\sin\frac{x}{2}$; 5) $y = \sin\frac{3\pi x}{4}$; 6) $y = 3\sin\frac{5x}{8}$.

144. Указать амплитуду, период, частоту и начальную фазу гармоники:

1) $y = 2\sin(3x+5)$; 2) $y = -\cos\frac{x-1}{2}$;

3) $y = \frac{1}{3}\sin 2\pi\left(\omega - \frac{1}{6}\right)$; 4) $y = \sin\frac{2t+3}{6\pi}$.

145. Построить график функции:

1) $y = -\sin x$; 2) $y = 1 - \sin x$; 3) $y = 1 - \cos x$;

4) $y = \sin 2x$; 5) $y = \sin\frac{x}{2}$; 6) $y = -2\sin\frac{x}{3}$;

7) $y = \cos 2x$; 8) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

9) $y = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$; 10) $y = \frac{1}{2}\sin(2\pi x - 1{,}2)$;

11) $y = 2 + 2\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; 12) $y = 2\cos\frac{x-\pi}{3}$;

13) $y = |\sin x|$; 14) $y = |\cos x|$; 15) $y = |\operatorname{tg} x|$;

16) $y = |\operatorname{ctg} x|$; 17) $y = \sec x$; 18) $y = \operatorname{cosec} x$;

19) $y = \begin{cases} \cos x & \text{для } -\pi \le x \le 0, \\ 1 & \text{для } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x} & \text{для } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

146. Стороны треугольника равны 1 см и 2 см. Построить график площади треугольника как функции угла x, заключенного между данными сторонами. Найти область определения этой функции и то значение аргумента x, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

147. Точка движется равномерно по окружности радиуса R с центром в начале координат против часовой стрелки с линейной скоростью v см/с. В начальный момент времени абсцисса этой точки была a. Составить уравнение гармонического колебания абсциссы точки.

148. Точка равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = 1$. В момент t_0 ее ордината была y_0, в момент t_1 ордината равнялась y_1. Найти зависимость ординаты точки от времени, период и начальную фазу колебания.

150. С помощью графического сложения построить график функции:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin 2\pi x + \sin 3\pi x$;

3) $y = 2\sin\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{3}$; 4) $y = x + \sin x$;

5) $y = x - \sin x$; 6) $y = -2^x + \cos x$.

151. Графически решить уравнение:

1) $x = 2\sin x$; 2) $x = \operatorname{tg} x$; 3) $x - \cos x = 0$;

4) $4\sin x = 4 - x$; 5) $2^{-x} = \cos x$.

152. Найти период сложной гармоники:

1) $y = 2\sin 3x + 3\sin 2x$; 2) $y = \sin t + \cos 2t$;

3) $y = \sin\frac{\pi t}{3} + \sin\frac{\pi t}{4}$;

4) $y = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin 5\pi t$.

153. Представить одной простой гармоникой:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

155*. Указать период функции и построить ее график:

1) $y = |\sin x| + |\cos x|$; 2) $y = \frac{1}{2}\left(\frac{|\sin x|}{\cos x} + \frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$.

156. Найти область определения и выяснить вид графика функции:

1) $y = \lg\sin x$; 2) $y = \sqrt{\lg\sin x}$; 3) $y = \sqrt{\lg\frac{1}{|\sin x|}}$.

157. Построить график функции:

1) $y = \operatorname{arcctg} x$; 2) $y = 2\arcsin\frac{x}{2}$; 3) $y = 1 + \operatorname{arctg} 2x$;

4) $y = \frac{\pi}{2} - \arccos 2x$; 5) $y = \arcsin\frac{1-x}{x}$.

158. Круговой сектор с центральным углом α свертывается в конус. Найти зависимость угла ω при вершине конуса от угла α и построить график.

159. Картина высотой a висит на стене наклонно, образуя со стеной двугранный угол φ. Нижний край картины на b выше уровня глаз наблюдателя, который стоит на расстоянии l от стены. Найти зависимость между углом γ, под которым наблюдатель видит картину, и углом φ.

161. Выяснить, для какого интервала изменения x справедливо тождество:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$; 4) $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$;

5) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; 6) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi$;

7) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$; 8) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = -2\operatorname{arctg} x$;

9) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

10) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

162. Пользуясь тождествами задачи 161, найти область определения и построить график функции:

1) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$;

3) $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 4) $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

163*. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$. Доказать, что эта функция периодична и найти ее период.

164. Построить график функции $y = \arccos(\cos x)$.

165. Построить график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

166. Построить график функции:

1) $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 2) $y = x - \arcsin(\sin x)$;

3) $y = x\arcsin(\sin x)$; 4) $y = \arccos(\cos x) - \arcsin(\sin x)$.

ГЛАВА II

ПРЕДЕЛ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1. Основные определения

Функции целочисленного аргумента

176. Функция целочисленного аргумента принимает значения

$$u_1 = 0{,}9;\ u_2 = 0{,}99;\ u_3 = 0{,}999;\ \ldots;\ u_n = \underbrace{0{,}999\ldots9}_{n\text{ раз}};\ \ldots$$

Чему равен $\lim_{n\to\infty} u_n$? Каково должно быть n, для того чтобы абсолютная величина разности между u_n и ее пределом была не больше 0,0001?

177. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = 1;\ u_2 = \frac{1}{4};\ u_3 = \frac{1}{9};\ \ldots;\ u_n = \frac{1}{n^2};\ \ldots$$

Найти $\lim_{n\to\infty} u_n$. Каково должно быть n, для того чтобы разность между u_n и ее пределом была меньше заданного положительного числа ε?

178. Доказать, что $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ стремится к 1 при неограниченном возрастании n. Начиная с какого n абсолютная величина разности между u_n и 1 не превосходит 10^{-4}?

179. Функция v_n принимает значения

$$v_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1};\ v_2 = \frac{\cos\pi}{2};\ v_3 = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{3};\ \ldots;\ v_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n};\ \ldots$$

Найти $\lim_{n\to\infty} v_n$. Каково должно быть n, для того чтобы абсолютная величина разности между v_n и ее пределом не превосходила 0,001? Принимает ли v_n значение своего предела?

180. Общий член u_n последовательности $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{5}{4}$, $u_3 = \frac{7}{8}$, $u_4 = \frac{17}{16}$, ... имеет вид $\frac{2^n-1}{2^n}$, если n – нечетное число, и $\frac{2^n+1}{2^n}$, если n – четное число. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Каково должно быть n, для того чтобы разность между u_n и ее пределом по абсолютной величине не превосходила 10^{-4}; данного положительного числа ε?

181. Доказать, что последовательность $u_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$ при неограниченном возрастании n стремится к пределу, равному $\frac{4}{3}$, монотонно возрастая. Начиная с какого n величина $\frac{4}{3} - u_n$ не превосходит данного положительного числа ε?

182. Доказать, что $u_n = \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ при неограниченном возрастании n имеет предел 1. Начиная с какого n величина $|1-u_n|$ не превосходит данного положительного числа ε? Какой характер имеет предельное изменение переменной u_n?

183. Функция v_n принимает значения биномиальных коэффициентов: $v_1 = m$, $v_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, $v_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots$

$$\ldots,\ v_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}, \ldots,$$

где m – целое положительное число. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

184. Доказать, что последовательность $u_n = 1 + (-1)^n$ не имеет предела при неограниченном возрастании n.

185. Доказать, что при неограниченном возрастании n последовательность $u_n = \frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ не имеет предела, а последовательность $v_n = \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$ имеет предел. Чему он равен?

186. Имеет ли предел последовательность:

1) $u_n = n\sin\frac{n\pi}{2}$; 2) $u_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\lg n}$ $(n>1)$?

187. Доказать теорему: если последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ стремятся к общему пределу a, то к тому же пределу стремится и последовательность $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots$

188. Доказать теорему: если последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ стремится к пределу a, то к тому же пределу стремится любая ее бесконечная подпоследовательность (например, $u_1, u_3, u_5, \ldots$).

189. Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ имеет предел $a \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Что можно сказать об этом пределе, если $a = 0$? (Привести примеры.)

Функции непрерывного аргумента

190. Дано $y = x^2$. Когда $x \to 2$, то $y \to 4$. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-2| < \delta$ следовало $|y-4| < \varepsilon = 0{,}001$?

191. Пусть $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. При $x \to 2$ имеем $y \to \frac{3}{5}$. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-2| < \delta$ следовало $\left|y - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1$?

192. Пусть $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$. При $x \to 3$ имеем $y \to \frac{1}{4}$. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-3| < \delta$ следовало $\left|\frac{1}{4} - y\right| < 0{,}01$?

193. Доказать, что $\sin x$ стремится к единице при $x \to \frac{\pi}{2}$. Каким условиям должен удовлетворять x в окрестности точки $x = \frac{\pi}{2}$, чтобы имело место неравенство $1 - \sin x < 0{,}01$?

194. При неограниченном возрастании x функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. Каково должно быть N, чтобы из $|x| > N$ следовало $y < \varepsilon$?

195. Если $x \to +\infty$, то $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. Каково должно быть N, чтобы из $|x| > N$ следовало $|y-1| < \varepsilon$?

§ 2. Бесконечные величины. Признаки существования предела

Бесконечные величины

196. Функция u_n принимает значения $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, ..., $u_n = 2n+1$, ... Доказать, что u_n – бесконечно большая величина при $n \to \infty$. Начиная с какого n величина u_n становится больше N?

197. Доказать, что общий член u_n любой арифметической прогрессии есть величина бесконечно большая при $n \to \infty$. (Когда она будет положительной и когда отрицательной?) Справедливо ли это утверждение для произвольной геометрической прогрессии?

198. При $x \to 0$ имеем $y = \frac{1+2x}{x} \to \infty$. Каким условиям должен удовлетворять x, чтобы имело место неравенство $|y| > 10^4$?

199. Доказать, что функция $y = \frac{x}{x-3}$ бесконечно велика при $x \to 3$. Каким должен быть x, чтобы величина $|y|$ была больше 1000?

200. Когда x стремится к 1, функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ неограниченно возрастает. Каково должно быть δ, чтобы из $|x-1| < \delta$ следовало $\frac{1}{(x-1)^2} > N = 10^4$?

201. Функция $y = \frac{1}{2^x - 1}$ бесконечно велика при $x \to 0$. Каким неравенствам должен удовлетворять x, чтобы $|y|$ было больше 100?

202. При $x \to +\infty$ имеем: $y = \lg x \to +\infty$. Каково должно быть M, чтобы из $x > M$ следовало $y > N = 100$?

203. Какие из основных элементарных функций являются ограниченными во всей области их определения?

204. Доказать, что функция $y = \frac{x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой оси.

205. Будет ли функция $y = \frac{x^2}{1+x^4}$ ограничена на всей числовой оси? Будет ли она ограничена в интервале $(0, +\infty)$?

206. Является ли функция $y = \lg \sin x$ ограниченной во всей области ее существования? Тот же вопрос относительно функции $y = \lg \cos x$?

207. 1) Доказать, что функции $y = x \sin x$ и $y = x \cos x$ не ограничены при $x \to \infty$ (указать для каждой из них хотя бы по одной такой последовательности x_n, для которой $y_n \to \infty$).

2) Будут ли указанные функции бесконечно большими?

3) Построить графики этих функций.

208. Построить графики функций $f(x) = 2^{x \sin x}$ и $f(x) = 2^{-x \sin x}$. Для каждой из этих функций указать такие две последовательности x_n и x_n' значений x, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 0$.

209. При каких значениях a функция $y = a^x \sin x$ будет не ограничена при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$?

210. Будет ли бесконечно большой неограниченная функция:

1) $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ при $x \to 0$;

2) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ при $x \to \infty$;

3) $f(x) = 2^x \arcsin(\sin x)$ при $x \to +\infty$;

4) $f(x) = (2 + \sin x) \lg x$ при $x \to +\infty$;

5) $f(x) = (1 + \sin x) \lg x$ при $x \to +\infty$?

211. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = 2, \ u_2 = \frac{3}{4}, \ u_3 = \frac{4}{9}, \ \ldots, \ u_n = \frac{n+1}{n^2}, \ \ldots$$

Доказать, что u_n – бесконечно малая величина при $n \to \infty$.

212. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = -7, \ u_2 = -\frac{1}{2}, \ u_3 = \frac{1}{27}, \ u_4 = \frac{1}{8}, \ \ldots, \ u_n = \frac{n^2-8}{n^3}, \ \ldots$$

Доказать, что u_n – бесконечно малая величина при $n \to \infty$.

213. Доказать, что $y = \frac{x}{x+1} \to 0$ при $x \to 0$. Каким условиям должен удовлетворять x, чтобы имело место неравенство $|y| < 10^{-4}$?

214. Показать, что при $x \to +\infty$ функция $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ стремится к нулю. Каким должно быть N, чтобы при $x > N$ было $y < \varepsilon$?

215. Доказать, что если предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$ равен a, то $f(x)$ можно представить в виде суммы $f(x) = a + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \to \infty$.

Представить в виде такой суммы следующие функции:

1) $y = \frac{x^3}{x^3-1}$; 2) $y = \frac{x^2}{2x^2+1}$; 3) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Признаки существования предела

216*. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = \frac{1}{4}, \ u_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}, \ \ldots, \ u_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \ldots + \frac{1}{3^n+1}, \ldots$$

Доказать, что u_n стремится к некоторому пределу при $n \to \infty$.

217. Функция u_n принимает значения

$$u_1 = \frac{1}{2}, \ u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}, \ u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \ldots$$

$$\ldots, \ u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}, \ldots$$

Доказать, что u_n стремится к некоторому пределу при $n \to \infty$.

218. Доказать теорему:

Если разность между двумя функциями при одном и том же изменении независимой переменной бесконечно мала, причем одна из функций возрастает, другая убывает, то обе стремятся к одному и тому же пределу.

219. Даны два числа u_0 и v_0 $(u_0 < v_0)$. Члены последовательностей u_n и v_n задаются формулами

$$u_1 = \frac{u_0+v_0}{2}, \ v_1 = \frac{u_0+2v_0}{3}, \ u_2 = \frac{u_1+v_1}{2}, \ v_2 = \frac{u_1+2v_1}{3},$$

вообще $u_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}$, $v_n = \frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{3}$.

Доказать на основе теоремы, приведенной в предыдущей задаче, что обе последовательности u_n и v_n стремятся к одному и тому же пределу, заключенному между u_0 и v_0.

220. Дана последовательность чисел u_n:

$$u_1 = \sqrt{6}\,,\ u_2 = \sqrt{6 + u_1}\,, \ldots,\ u_n = \sqrt{6 + u_{n-1}}\,, \ldots$$

Доказать, что эта последовательность имеет предел, и найти его.

§ 3. Непрерывные функции

221. Функция y определена следующим образом:

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{при } x < 0; \\ y = x & \text{при } 0 \le x < 1; \\ y = -x^2 + 4x - 2 & \text{при } 1 \le x < 3; \\ y = 4 - x & \text{при } x \ge 3. \end{array}$$

Будет ли эта функция непрерывной?

222. Три цилиндра, радиусы оснований которых соответственно равны 3, 2 и 1 м, а высоты одинаковы и равны 5 м, поставлены друг на друга. Выразить площадь поперечного сечения получившегося тела как функцию расстояния сечения от нижнего основания нижнего цилиндра. Будет ли эта функция непрерывной? Построить ее график.

223. Пусть $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \le 1; \\ 3 - ax^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной? (Построить ее график.)

224. Пусть $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & \text{если } x \le -\pi/2 \\ A\sin x + B, & \text{если } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ \cos x, & \text{если } x \ge \pi/2. \end{cases}$

Подобрать числа A и B так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной; построить ее график.

225. В каких точках терпят разрывы функции $y = \frac{1}{x-2}$ и $y = \frac{1}{(x+2)^2}$? Построить графики обеих функций. Выяснить разницу в поведении этих функций вблизи точек разрыва.

226. Функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ не определена при $x = 1$. Каким должно быть значение $f(1)$, чтобы доопределенная этим значением функция стала непрерывной при $x = 1$?

227. Какого рода разрывы имеют функции $y = \frac{\sin x}{x}$ и $y = \frac{\cos x}{x}$ при $x = 0$? Указать характер графиков этих функций в окрестностях точки $x = 0$.

228. Исследовать непрерывность функции, заданной так: $y = \frac{|x|}{x}$ при $x \ne 0$, $y = 0$ при $x = 0$. Построить график этой функции.

229. Сколько точек разрыва (и какого рода) имеет функция $y = \frac{1}{\lg|x|}$? Построить ее график.

230. Функция $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Можно ли так доопределить функцию $f(x)$ в точке $x = 0$, чтобы функция стала непрерывной в этой точке? Построить график этой функции.

231. Исследовать непрерывность функции, определенной так:

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{2x} \text{ при } x \ne 0,\ f(0) = 1.$$

Построить график этой функции.

232. Построить график функции $f(x) = x\sin\frac{\pi}{x}$. Какое значение должно иметь $f(0)$, чтобы функция $f(x)$ была везде непрерывной?

233. Доказать, что функция $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода. Построить схематично график этой функции в окрестности точки $x = 0$.

234. Исследовать характер разрыва функции $y = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ в точке $x = 1$. Можно ли так определить y при $x = 1$, чтобы функция стала непрерывной при $x = 1$?

235. Исследовать характер разрыва функции $y = \frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ в точке $x = 0$.

236. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x) = (x+1)2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} \text{ при } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Доказать, что в интервале $-2 \leq x \leq 2$ функция $f(x)$ принимает все без исключения значения, содержащиеся между $f(-2)$ и $f(2)$, и что она все же разрывна (в какой точке?). Построить ее график.

237. Исследовать непрерывность функции $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$. Выяснить характер ее графика.

238. Функция определена так: если x – рациональное число, то $f(x) = 0$; если x – иррациональное число, то $f(x) = x$. При каком значении x эта функция непрерывна?

239. Исследовать непрерывность и построить график функции:

1) $y = x - [x]$; 2) $y = \frac{1}{x-|x|}$; 3) $y = (-1)^{[x]}$.

[Функция $[x]$ равна наибольшему целому числу, не превосходящему x (см. задачу 59).]

240. Используя свойства непрерывных функций, убедиться в том, что уравнение $x^5 - 3x = 1$ имеет по меньшей мере один корень, заключенный между 1 и 2.

241*. Показать, что: а) многочлен нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень; б) многочлен четной степени имеет по меньшей мере два действительных корня, если он принимает хотя бы одно значение, противоположное по знаку коэффициенту при его старшем члене.

242. Показать, что уравнение $x \cdot 2^x = 1$ имеет по меньшей мере один положительный корень, не превосходящий 1.

243. Показать, что уравнение $x = a \sin x + b$, где $0 < x < 1$, $b > 0$, имеет по меньшей мере один положительный корень и притом не превосходящий $b + a$.

244*. Показать, что уравнение $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$, где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ и $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, имеет два действительных корня, заключенных в интервалах (λ_1, λ_2) и (λ_2, λ_3).

§ 4. Нахождение пределов. Сравнение бесконечно малых

Функции целочисленного аргумента

В задачах 245–267 найти пределы.

245. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$.

247. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

248. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$.

249. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

251. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

253. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

255. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$.

256. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$.

257. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

259. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

262. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

264*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$.

267. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

Функция непрерывного аргумента

В задачах 268–304 найти пределы.

268. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$. **269.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

270. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$. **271.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

272. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. **273.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

274. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. **275.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

276. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. **277.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

278. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right]$.

279. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3\left(x^2-3x+2\right)}\right]$.

280. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n – целые числа).

281. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$. **282.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

283. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$. **284.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

285. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. **286.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

287. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)\left(3x^2+x+2\right)}{4x^2}\right]$.

288. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

289. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$. **290.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

291. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$. **292.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

293. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. **294.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

295. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. **296.** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

297. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. **298.** $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

299. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. **300.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

301. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$.

302. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n и m – целые числа).

303*. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$. **304.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305. Как изменяются корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, когда b и c сохраняют постоянные значения $(b\neq0)$, а величина a стремится к нулю?

В задачах 306–378 найти пределы.

306. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$. **307.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

308. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$*). **309.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

310. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

311. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

312. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

313. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

314. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$. **315.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

316. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. **317.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$.

---

*) В примерах, где указано $x\to\pm\infty$, следует отдельно рассматривать случаи $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

318. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin(\alpha^n)}{(\sin\alpha)^m}$ (n и m – целые положительные числа).

319. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

321. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

324. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$.

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}$.

327. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

328. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

329. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

330. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}$.

331. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

332. $\lim\limits_{\alpha\to \pi} \dfrac{\sin\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

333. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$.

334. $\lim\limits_{y\to a} \left(\sin\dfrac{y-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2a}\right)$.

335. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

336. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

337. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$.

338. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

339. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

340. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

341. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

342. $\lim\limits_{\alpha\to \beta} \dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

343. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$.

344. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+2h)-2\operatorname{tg}(a+h)+\operatorname{tg} a}{h^2}$.

345. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

346. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

347. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

348. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

349. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt[3]{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg} 2x}}$. **350*.** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

351. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$. **352.** $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{t}$.

353. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$. **354.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

355. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. **356.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

357. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$. **358.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$.

359. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$. **360.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

361. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$. **362.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

363. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin x\right)^{\operatorname{cosec} x}$. **364.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$. **366.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x\to\infty} \left\{x\left[\ln(x+a)-\ln x\right]\right\}$. **368.** $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^h-1}{h}$. **370.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$. **372*.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. **374.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$. **376.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$. **378.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{th} x$.

В задачах 379–401 найти пределы.

379. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(ax+1)^n}{x^n+A}$. Отдельно рассмотреть случаи, когда n есть: 1) целое положительное число, 2) целое отрицательное число, 3) нуль.

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x}{a^x+1}\ (a>0)$. **382.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\ (a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$. **384.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$. **386.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

387. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(a+3h)-3\sin(a+2h)+3\sin(a+h)-\sin a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\sin^2 x+3\sin x+4}-\sqrt{\sin^2 x+6\sin x+2}\right)$.

389. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$. **390*.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$. **392.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

393*. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}\right)$. **395*.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^x\ (n>0)$. **397*.** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$. **399.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

400. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$. **401.** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

Сравнение бесконечно малых

402. Бесконечно малая величина u_n принимает значения

$$u_1=1,\ u_2=\frac{1}{2},\ u_3=\frac{1}{3},\ \ldots,\ u_n=\frac{1}{n},\ \ldots,$$

а бесконечно малая величина v_n – соответственно значения

$$v_1=1,\ v_2=\frac{1}{2!},\ v_3=\frac{1}{3!},\ \ldots,\ v_n=\frac{1}{n!},\ \ldots$$

Сравнить u_n и v_n; какая из них высшего порядка малости?

403. Функция u_n принимает значения

$$u_1=0,\ u_2=\frac{3}{8},\ u_3=\frac{8}{27},\ \ldots,\ u_n=\frac{n^2-1}{n^3},\ \ldots,$$

а функция v_n – соответственно значения

$$v_1=2,\ v_2=\frac{5}{8},\ v_3=\frac{10}{27},\ \ldots,\ v_n=\frac{n^2+1}{n^3},\ \ldots$$

Сравнить эти бесконечно малые величины.

404. Бесконечно малая величина u_n принимает значения

$$u_1=0,\ u_2=\frac{1}{4},\ u_3=\frac{2}{9},\ \ldots,\ u_n=\frac{n-1}{n^2},\ \ldots,$$

а бесконечно малая величина v_n – соответственно значения

$$v_1=3,\ v_2=\frac{5}{4},\ v_3=\frac{7}{9},\ \ldots,\ v_n=\frac{2n+1}{n^2},\ \ldots$$

Убедиться в том, что u_n и v_n – бесконечно малые одного порядка, но неэквивалентные.

405. При $x\to 1$ функции $y=\frac{1-x}{1+x}$ и $y=1-\sqrt{x}$ бесконечно малы. Которая из них высшего порядка малости?

406. Дана функция $y=x^3$. Показать, что Δy и Δx при $\Delta x\to 0$ и при $x\neq 0$ являются бесконечно малыми одного порядка. Проверить, что при $x=0$ величина Δy бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. При каком значении x приращения Δx и Δy будут эквивалентными?

407. Убедиться в том, что при $x\to 1$ бесконечно малые величины $1-x$ и $1-\sqrt[3]{x}$ будут одного порядка малости. Будут ли они эквивалентными?

408. Пусть $x\to 0$. Тогда $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}\ (a>0)$ будет бесконечно малой величиной. Определить порядок ее относительно x.

409. Определить порядок относительно x функции, бесконечно малой при $x\to 0$:

1) $x^3+1000x^2$; 2) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; 3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$.

410. Доказать, что приращения функций $u=a\sqrt{x}$ и $v=bx^2$ при $x>0$ и при общем приращении $\Delta x\to 0$ будут одного порядка малости. При каком значении x они будут эквивалентными (a и b отличны от нуля).

411. Показать, что при $x\to 1$ бесконечно малые величины $1-x$ и $a\left(1-\sqrt[k]{x}\right)$, где $a\neq 0$ и k – целое положительное число, будут одного порядка малости. При каком значении a они будут эквивалентными?

412. Доказать, что при $x \to \frac{\pi}{2}$ функции $\sec x - \operatorname{tg} x$ и $\pi - 2$
будут бесконечно малыми одного порядка. Будут ли они экв
валентными?

413. Доказать, что при $x \to 0$ бесконечно малые величин
$e^{2x} - e^{x}$ и $\sin 2x - \sin x$ будут эквивалентными.

414. Определить порядок относительно x функции, беск
нечно малой при $x \to 0$:

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$; 2) $\sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$; 3) $e^{\sqrt{x}} - 1$; 4) $e^{\sin x} - 1$

5) $\ln\left(1+\sqrt{x}\sin x\right)$; 6) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 7) $e^{x} - \cos x$;

8) $e^{x^2} - \cos x$; 9) $\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$; 10) $\sin\left(\sqrt{1+x} - 1\right)$;

11) $\ln\left(1+x^2\right) - 2\sqrt[3]{\left(e^{x}-1\right)^2}$; 12) $\arcsin\left(\sqrt{4+x^2} - 2\right)$.

Некоторые геометрические задачи

415. Дан правильный треугольник со стороной a; из тр
высот его строится новый правильный треугольник и так n ра
Найти предел суммы площадей всех треугольников при $n \to \infty$

416. В круг радиуса R вписан квадрат, в квадрат впис
круг, в этот круг опять вписан квадрат и так n раз. Найти пр
дел суммы площадей всех кругов и предел суммы площадей в
квадратов при $n \to \infty$.

417. В равнобедренный прямоугольный треугольник, осн
вание которого разбито на $2n$ равных частей, вписана ступенч
тая фигура (рис. 5). Доказать, что при неограниченно возра
тающем n разность между площадью треугольника и площадь
ступенчатой фигуры бесконечно мала.

418. В равнобедренном прямоугольном треугольнике, кате
которого равен a, гипотенуза разделена на n равных частей и и
точек деления проведены прямые, параллельные катетам. Пр
этом получается ломаная $AKLMNOPQRTB$ (рис. 6). Длина это
ломаной при любом n равна $2a$, значит и предел ее длины раве
$2a$. Но, с другой стороны, при неограниченном возрастании
ломаная неограниченно приближается к гипотенузе треуго
ника. Следовательно, длина гипотенузы равна сумме длин кате
тов. Найти ошибку в рассуждении.

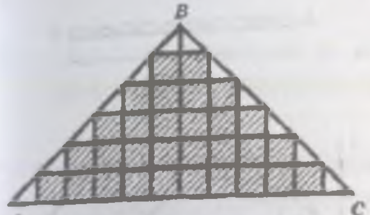

Рис. 5

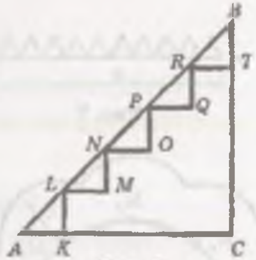

Рис. 6

419. Отрезок AB длины a разделен n точками на равные части, и из
этих точек проведены лучи под углами $\frac{\pi}{2n}$ (рис. 7). Найти предел длины
получившейся ломаной линии при неограниченном возрастании n.
Сравнить с результатом предыдущей задачи.

420. Отрезок AB длины a разделен на n равных частей. На каждом
частичном отрезке построена дуга окружности, равная $\frac{\pi}{n}$ радиан (рис.
8). Найти предел длины получившейся линии при $n \to \infty$. Как изменится результат, если на каждом частичном отрезке будет строиться
полуокружность?

421. Окружность радиуса R разделена n точками M_1, M_2, ..., M_n на
равные части. Из каждой такой точки проведена дуга окружности радиуса r до пересечения с дугами, построенными в соседних точках (рис.
9). Найти предел длины, получившейся замкнутой линии при неограниченном возрастании n.

422. Два круга с радиусами R и r $(R > r)$ касаются в начале координат оси OY и расположены правее нее (рис. 10). Какого порядка, относительно x при $x \to 0$ будут бесконечно малый отрезок MM' и бесконечно малый угол α?

423. Центр окружности соединен отрезком прямой OP с точкой P,
лежащей вне окружности. Из точки P проведена касательная PT к окружности и из точки T опущен перпендикуляр TN на прямую OP. Доказать, что отрезки AP и AN, где A – точка пересечения прямой OP с окружностью, – эквивалентные бесконечно малые при $P \to A$.

424. В конечных и в средней точках дуги AB окружности проведены
касательные и точки A и B соединены хордой. Доказать, что отношение
площадей образовавшихся при этом двух треугольников стремится к 4
при неограниченном уменьшении дуги AB.

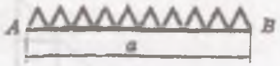

Рис. 7

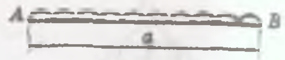

Рис. 8

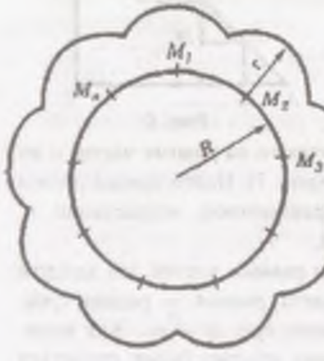

Рис. 9

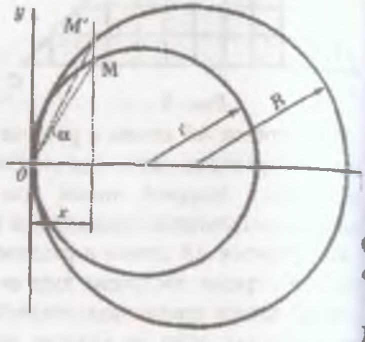

Рис. 10

Вычислительные задачи

425. Исходя из эквивалентности при $x \to 0$ функций $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{1}{2}x$, вычислить приближенно:

1) $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$;
4) $\sqrt{1632}$; 5) $\sqrt{0{,}31}$; 6) $\sqrt{0{,}021}$.

426. Показать, что при $x \to 0$ функции $\sqrt[n]{1+x}-1$ и $\frac{x}{n}$ – эквивалентные бесконечно малые. Воспользоваться этим для приближенного вычисления корней:

1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[4]{8144}$; 3) $\sqrt[5]{1{,}1}$; 4) $\sqrt[5]{1080}$.

427. Использовать эквивалентность $\ln(1+x)$ и x при $x \to 0$ для приближенного вычисления натуральных логарифмов следующих чисел: 1,01; 1,02; 1,1; 1,2.

ГЛАВА III

Производная и дифференциал. Дифференциальное исчисление

§ 1. Производная. Скорость изменения функции

Некоторые задачи физики

428. Дано уравнение прямолинейного движения точки: $s = 5t + 6$. Определить среднюю скорость движения: а) за первые 6 секунд, б) за промежуток времени от конца 3-й до конца 6-й секунды.

429. Точка M удаляется от неподвижной точки A так, что расстояние AM растет пропорционально квадрату времени. По истечении 2 мин от начала движения расстояние AM равнялось 12 м. Найти среднюю скорость движения: а) за первые 5 мин, б) за промежуток времени от $t = 4$ мин до $t = 7$ мин, в) за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$.

430. Дано уравнение прямолинейного движения: $s = t^3 + \frac{3}{t}$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 4$ до $t = 4 + \Delta t$, полагая $\Delta t = 2;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}03$.

431. Свободно падающее тело движется по закону $s = \frac{gt^2}{2}$, где g ($= 9{,}8$ м/с^2) есть ускорение силы тяжести. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени от $t = 5$ с до $(t + \Delta t)$ с, полагая $\Delta t = 1$ с; 0,1 с; 0,05 с; 0,001 с; найти скорость падающего тела в конце 5-й секунды, в конце 10-й секунды. Получить формулу для скорости падающего тела для любого момента времени t.

432. Имеется тонкий неоднородный стержень AB. Длина его $L = 20$ см. Масса отрезка AM растет пропорционально квадрату расстояния точки M от точки A, причем известно, что масса отрезка $AM = 2$ см равна 8 г. Найти: а) среднюю линейну плотность отрезка стержня $AM = 2$ см; б) среднюю линейну плотность всего стержня; в) плотность стержня в точке M.

433. В тонком неоднородном стержне AB длиной 30 см ма са (в граммах) распределена по закону $m = 3l^2 + 5l$, где l – дл на части стержня, отсчитываемая от точки A. Найти: 1) сре нюю линейную плотность стержня; 2) линейную плотность: а) точке, отстоящей от точки A на расстоянии $l = 5$ см, б) в сам точке A, в) в конце стержня.

434. Количество тепла Q (в джоулях), необходимого для н гревания 1 кг воды от 0 до $t°$C, определяется формулой

$$Q = 4186{,}8\left(t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3\right).$$

Вычислить теплоемкость воды для $t = 30°$, $t = 100°$.

435*. Угловую скорость равномерного вращения определяю как отношение угла поворота к соответствующему промежутк времени. Дать определение угловой скорости неравномерно вращения.

436. Если бы процесс радиоактивного распада протекал ра номерно, то под скоростью распада следовало бы понимать ко личество вещества, разложившегося в единицу времени. Н самом деле процесс протекает неравномерно. Дать определени скорости радиоактивного распада.

437. Сила постоянного тока определяется как количеств электричества, протекающее через поперечное сечение проводни ка в единицу времени. Дать определение силы переменного тока

438. Термическим коэффициентом линейного расширени стержня называют приращение единицы его длины при повыше нии температуры на 1° С, если предположить равномерность теп лового расширения. На самом же деле процесс протекает нерав номерно. Пусть $l = f(t)$, где l – длина стержня, t – температур Дать определение коэффициента линейного расширения.

439. Коэффициентом растяжения пружины называют при ращение единицы длины пружины под действием единичной силы, действующей на каждый квадратный сантиметр сечени пружины. При этом предполагается пропорциональность рас тяжения действующему усилию (закон Гука). Дать определение коэффициента растяжения k в случае уклонения от закона Гу ка. (Пусть l – длина пружины, S – площадь поперечного сече ния, P – растягивающая сила и $l = \varphi(P)$.)

Производная функция

440. Найти приращение функции $y = x^3$ в точке $x_1 = 2$, полагая приращение Δx независимой переменной равным: 1) 2; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,1.

441. Найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

1) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ при $x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$;

2) $y = \frac{1}{x}$ при $x = 2$; $\Delta x = 0{,}01$;

3) $y = \sqrt{x}$ при $x = 4$; $\Delta x = 0{,}4$.

Показать, что при $\Delta x \to 0$ предел этого отношения в первом случае равен 4, во втором равен $-\frac{1}{4}$, в третьем равен $\frac{1}{4}$.

442. Дана функция $y = x^2$. Найти приближенные значения производной в точке $x = 3$, полагая последовательно Δx равным: а) 0,5; б) 0,1; в) 0,01; г) 0,001.

443. $f(x) = x^2$; найти $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

444. $f(x) = x^3$; найти $f'(1)$; $f'(0)$; $f'\left(-\sqrt{2}\right)$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

445. $f(x) = x^2$. В какой точке $f(x) = f'(x)$?

446. Проверить, что для функции $f(x) = x^2$ справедливо соотношение $f'(a + b) = f'(a) + f'(b)$. Будет ли это тождество справедливым для функции $f(x) = x^3$?

447. Найти производную функции $y = \sin x$ при $x = 0$.

448. Найти производную функции $y = \lg x$ при $x = 1$.

449. Найти производную функции $y = 10^x$ при $x = 0$.

450. Известно, что $f(0) = 0$ и существует предел выражения $\frac{f(x)}{x}$ при $x \to 0$. Доказать, что этот предел равен $f'(0)$.

451. Доказать теорему: если $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x = 0$ равны нулю $[f(0) = 0,\ \varphi(0) = 0]$ и имеют производные при $x = 0$, причем $\varphi'(0) \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

452. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную при $x = a$,

то $\lim\limits_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$.

453. Доказать, что производная четной функции есть нечетная функция, а производная нечетной функции – четная функция.

Геометрический смысл производной

454. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y = x^2$: 1) в начале координат; 2) в точке $(3; 9)$; 3) в точке $(-2; 4)$; 4) в точках пересечения ее с прямой $y = 3x - 2$.

455. В каких точках угловой коэффициент касательной к кубической параболе $y = x^3$ равен 3?

456. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$: 1) параллельна оси Ox, 2) образует с осью Ox угол $45°$?

457. Может ли касательная к кубической параболе $y = x^3$ составлять с осью Ox тупой угол?

458. Под какими углами пересекаются парабола $y = x^2$ и прямая $3x - y - 2 = 0$?

459. Под какими углами пересекаются параболы $y = x^2$ и $y^2 = x$?

460. Под каким углом пересекается гипербола $y = \frac{1}{x}$ с параболой $y = \sqrt{x}$?

461. Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой 2. Найти подкасательную и поднормаль.

462. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y = x^2$ и $y = x^3$ параллельны?

463. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$: 1) параллельна прямой $y = 4x - 5$; 2) перпендикулярна к прямой $2x - 6y + 5 = 0$; 3) образует с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол $45°$?

464. Доказать, что подкасательная, соответствующая любой точке параболы $y = ax^2$, равна половине абсциссы точки касания. Используя это обстоятельство, дать способ построения касательной к параболе в данной ее точке.

465. Доказать, что нормаль к параболе в любой ее точке служит биссектрисой угла, составленного фокальным радиусом точки и прямой, параллельной оси параболы и проходящей через данную точку.

§ 2. Дифференцирование функций

Степенные функции

В задачах этого раздела x, y, z, t, u, v, s – независимые переменные; a, b, c, d, m, n, p, q – постоянные.

466. Продифференцировать функцию:

1) $3x^2 - 5x + 1$; 2) $x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}3x + 0{,}1$;

3) $ax^2 + bx + c$; 4) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$; 5) $2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$;

6) $0{,}8\sqrt[4]{y} - \frac{y^3}{0{,}3} + \frac{1}{5y^2}$; 7) $\frac{x}{n} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} + \frac{m^2}{x^2}$;

8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}} + \frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{p\sqrt{x}}{x}$; 9) $\frac{mz^2 + nz + 4p}{p + q}$; 10) $0{,}1t^{-\frac{2}{3}} - \frac{5{,}2}{t^{1{,}4}} + \frac{2{,}5}{\sqrt[3]{t}}$;

11) $(x - 0{,}5)^2$; 12) $\sqrt{x}\left(x^3 - \sqrt{x} + 1\right)$; 13) $(v + 1)^2(v - 1)$;

14) $0{,}5 - 3(a - x)^2$; 15) $\frac{ax^3 + bx^2 + c}{(a + b)x}$; 16) $\left(\frac{mu + n}{p}\right)^3$.

467. $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$; найти $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

468. $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}$; найти $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

469. $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$; найти $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

470. $f(x) = 4 - 5x + 2x^3 - x^5$. Показать, что $f'(a) = f'(-a)$.

В задачах 471–489 продифференцировать указанные функции.

471. 1) $y=\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+2x-1\right)$;

2) $y=\left(x^3-3x+2\right)\left(x^4+x^2-1\right)$; 3) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;

4) $y=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$;

5) $y=\left(\sqrt[3]{x}+2x\right)\left(1+\sqrt[3]{x^2}+3x\right)$;

6) $y=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$;

7) $y=\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)\left(1+\sqrt{3x}\right)$.

472. $y=\frac{x+1}{x-1}$. **473.** $y=\frac{x}{x^2+1}$.

474. $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$. **475.** $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$.

476. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. **477.** $z=\frac{x^2+1}{3\left(x^2-1\right)}+\left(x^2-1\right)(1-x)$.

478. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$. **479.** $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$. **480.** $y=\frac{2}{x^3-1}$.

481. $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$. **482.** $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$. **483.** $z=\frac{1}{t^2+t+1}$.

484. $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$. **485.** $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

486. $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$. **487.** $y=\frac{3}{\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)}$.

488. $y=\frac{ax+bx^2}{am+bm^2}$. **489.** $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

490. $f(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$; найти $f'(0)$ и $f'(1)$.

491. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; найти $F'(0)$, $F'(1)$ и $F'(2)$.

492. $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x^2+1}$; найти $F'(0)$ и $F'(-1)$.

493. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$; найти $s'(0)$ и $s'(2)$.

494. $y(x)=\left(1+x^3\right)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$; найти $y'(1)$ и $y'(a)$.

495. $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$; найти $\rho'(2)$ и $\rho'(0)$.

496. $\varphi(z)=\frac{a-z}{1+z}$; найти $\varphi'(1)$.

497. $z(t)=\left(\sqrt{t^3}+1\right)t$; найти $z'(0)$.

В задачах 498–513 продифференцировать данные функции.

498. 1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; 2) $\left(x^2+1\right)^4$; 3) $(1-x)^{20}$;

4) $(1+2x)^{30}$; 5) $\left(1-x^2\right)^{10}$; 6) $\left(5x^3+x^2-4\right)^5$; 7) $\left(x^3-x\right)^6$;

8) $\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$; 9) $s=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$; 10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$;

11) $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$; 12) $y=\left(2x^3+3x^2+6x+1\right)^4$.

499. $v=\frac{(s+4)^2}{s+3}$. **500.** $s=\frac{t^2}{(1-t)^2}$. **501.** $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$.

502. $y=\frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$. **503.** $y=\sqrt{1-x^2}$. **504.** $y=\left(1-2x^{\frac{1}{2}}\right)^4$.

505. $u=\left(\frac{v}{1-v}\right)^m$. **506.** $y=\frac{2}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.

507. $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **508.** $y=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$.

509. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$. **510.** $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

511. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$. **512.** $u=\frac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

513. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{\left(x^2+2\right)^3}}$.

514. $u(v)=\left(v^2+v+2\right)^{\frac{3}{2}}$; найти $u'(1)$.

515. $y(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; найти $y'(2)$.

516. $y(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; найти $y'(0)$.

Тригонометрические функции

В задачах 517–546 продифференцировать данные функции.

517. $y = \sin x + \cos x$. **518.** $y = \dfrac{x}{1-\cos x}$.

519. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. **520.** $\rho = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi$.

521. $z = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$. **522.** $s = \dfrac{\sin t}{1+\cos t}$.

523. $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$. **524.** $y = \dfrac{x \sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.

525. $y = \cos^2 x$. **526.** $y = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

527. $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$. **528.** $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$.

529. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$. **530.** $y = x\sec^2 x - \operatorname{tg} x$.

531. $y = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$. **532.** $y = \sin 3x$.

533. $y = a\cos\frac{x}{3}$. **534.** $y = 3\sin(3x+5)$.

535. $y = \operatorname{tg}\frac{x+1}{2}$. **536.** $y = \sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$.

537. $y = \sin\frac{1}{x}$. **538.** $y = \sin(\sin x)$.

539. $y = \cos^3 4x$. **540.** $y = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

541. $y = \sin\sqrt{1+x^2}$. **542.** $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

543. $y = \left(1+\sin^2 x\right)^4$. **544.** $y = \sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

545. $y = \cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. **546.** $y = \sin^2(\cos 3x)$.

547. Вывести формулы

$$\left(\sin^n x \cos nx\right)' = n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x;$$

$$\left(\sin^n x \sin nx\right)' = n\sin^{n-1} x\sin(n+1)x;$$

$$\left(\cos^n x \sin nx\right)' = n\cos^{n-1} x\cos(n+1)x;$$

$$\left(\cos^n x \cos nx\right)' = -n\cos^{n-1} x\sin(n+1)x;$$

Обратные тригонометрические функции

В задачах 548–572 продифференцировать данные функции.

548. $y = x\arcsin x$. **549.** $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$.

550. $y = (\arcsin x)^2$. **551.** $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

552. $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$. **553.** $y = x\sin x \operatorname{arctg} x$.

554. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$. **555.** $y = \sqrt{x}\operatorname{arctg} x$.

556. $y = (\arccos x + \arcsin x)^n$.

557. $y = \operatorname{arcsec} x$. **558.** $y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

559. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **560.** $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

561. $y = \arcsin(x-1)$. **562.** $y = \arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

563. $y = \operatorname{arctg} x^2$. **564.** $y = \arcsin\frac{2}{x}$.

565. $y = \arcsin(\sin x)$. **566.** $y = \operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$.

567. $y = \sqrt{1-(\arccos x)^2}$. **568.** $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

569. $y = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$. **570.** $y = \arcsin\dfrac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\sin x}$.

571. $y = \arccos\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$. **572.** $y = \operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$.

Логарифмические функции

В задачах 573–597 продифференцировать данные функции.

573. $y = x^2\log_3 x$. **574.** $y = \ln^2 x$. **575.** $y = x\lg x$.

576. $y = \sqrt{\ln x}$. **577.** $y = \dfrac{x-1}{\log_2 x}$. **578.** $y = x\sin x\ln x$.

579. $y = \dfrac{1}{\ln x}$. **580.** $y = \dfrac{\ln x}{x^n}$. **581.** $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

582. $y = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$. **583.** $y = x^n\ln x$. **584.** $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$.

585. $y = \ln(1-2x)$. **586.** $y = \ln\left(x^2-4x\right)$.

587. $y = \ln \sin x$.
588. $y = \log_3\left(x^2 - 1\right)$.
589. $y = \ln \operatorname{tg} x$.
590. $y = \ln \arccos 2x$.
591. $y = \ln^4 \sin x$.
592. $y = \operatorname{arctg}\left[\ln(ax + b)\right]$.
593. $y = (1 + \ln \sin x)^n$.
594. $y = \log_2\left(\log_3\left(\log_5 x\right)\right)$.
595. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1 + x^2}$.
596. $y = \arcsin^2\left[\ln\left(a^3 + x^3\right)\right]$.
597. $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$.

Показательные функции

В задачах 598–633 продифференцировать данные функции.

598. $y = 2^x$.
599. $y = 10^x$.
600. $y = \frac{1}{3^x}$.
601. $y = \frac{x}{4^x}$.
602. $y = x \cdot 10^x$.
603. $y = xe^x$.
604. $y = \frac{x}{e^x}$.
605. $y = \frac{x^2 + 2^x}{e^x}$.
606. $y = e^x \cos x$.
607. $y = \frac{e^x}{\sin x}$.
608. $y = \frac{\cos x}{e^x}$.
609. $y = \frac{x}{2^{\ln x}}$.
610. $y = x^3 - 3^x$.
611. $y = \sqrt{1 + e^x}$.
612. $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)e^x$.
613. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.
614. $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$.
615. $y = \frac{e^x}{1+x^2}$.
616. $y = xe^x(\cos x + \sin x)$.
617. $y = e^{-x}$.
618. $y = 10^{2x-3}$.
619. $y = e^{\sqrt{x+1}}$.
620. $y = \sin\left(2^x\right)$.
621. $y = 3^{\sin x}$.
622. $y = a^{\sin^3 x}$.
623. $y = e^{\arcsin 2x}$.
624. $y = 2^{3^x}$.
625. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.
626. $y = \sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$.
627. $y = 10^{1-\sin^4 3x}$.
628. $y = e^{\sqrt{\ln\left(ax^2+bx+c\right)}}$.
629. $y = \ln \sin \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.
630. $y = ae^{-b^2x^2}$.
631. $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.
632. $y = Ae^{-k^2 x} \sin(\omega x + \alpha)$.
633. $y = a^x x^a$.

Гиперболические функции

В задачах 634–649 продифференцировать данные функции.

634. $y = \mathrm{sh}^3 x$. **635.** $y = \ln \mathrm{ch}\, x$. **636.** $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{th}\, x)$.

637. $y = \mathrm{th}\left(1 - x^2\right)$. **638.** $y = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x$.

639. $y = \mathrm{ch}(\mathrm{sh}\, x)$. **640.** $y = \sqrt{\mathrm{ch}\, x}$. **641.** $y = e^{\mathrm{ch}^2 x}$.

642. $y = \mathrm{th}(\ln x)$. **643.** $y = x\,\mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x$.

644. $y = \sqrt[4]{\left(1 + \mathrm{th}^2 x\right)^3}$. **645.** $y = \frac{1}{2}\mathrm{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{th}^3\frac{x}{2}$.

646. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+\mathrm{th}\, x}{1-\mathrm{th}\, x}}$.

647. $y = \frac{1}{2}\mathrm{th}\, x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\,\mathrm{th}\, x}{1-\sqrt{2}\,\mathrm{th}\, x}$.

648. $y = \frac{1}{x}\mathrm{ch}\, 2x + \sqrt{x}\,\mathrm{sh}\, 2x$. **649.** $y = x^2 e^{3x}\,\mathrm{csch}\, x$.

Логарифмическое дифференцирование

В задачах 650–666 продифференцировать данные функции, используя правило логарифмического дифференцирования.

650. $y = x^{x^2}$. **651.** $y = x^{x^x}$. **652.** $y = (\sin x)^{\cos x}$.

653. $y = (\ln x)^x$. **654.** $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$.

655. $y = x^3 e^{x^2}\sin 2x$. **656.** $y = \dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$. **657.** $y = x^{\ln x}$.

658. $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. **659.** $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

660. $y = \sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$. **661.** $y = x^{\frac{1}{x}}$.

662. $y = x^{\sin x}$. **663.** $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

664. $y = 2x^{\sqrt{x}}$. **665.** $y = \left(x^2+1\right)^{\sin x}$. **666.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$.

Разные функции

В задачах 667–770 продифференцировать данные функции.

667. $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$.

668. $y = a\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{k} + b\right)$.

669. $y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$.

670. $y = \mathrm{arctg}\left(x^2 - 3x + 2\right)$.

671. $y = \lg\left(x - \cos x\right)$.

672. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.

673. $y = 5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{5} + \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}$.

674. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

675. $y = \sin\frac{x}{2}\sin 2x$.

676. $y = \sin e^{\cos x}$.

677. $y = x^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$.

678. $y = e^{-x^2}\ln x$.

679. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

680. $y = \mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{x-1}$.

681. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

682. $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$.

683. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y = \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

685. $y = \sin^2\frac{x}{3}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$.

686. $y = \frac{\sqrt[3]{4x^3+2}}{3x^4}$.

687. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

688. $y = x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

689. $y = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x}$.

690. $y = \cos 2x \ln x$.

691. $y = \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\, x + \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{1-x^2}$.

692. $y = \arcsin\left(n \sin x\right)$.

693. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$.

694. $y = \frac{1}{18}\sin^6 3x - \frac{1}{24}\sin^8 3x$.

695. $y = x - \sqrt{1 - x^2}\arcsin x$.

696. $y = \cos\frac{\arcsin x}{2}$.

697. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

698. $y = \arccos\sqrt{1 - 3x}$.

699. $y = \sin^3\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.

700. $y = \log_3\left(x^2 - \sin x\right)$.

701. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

702. $y = \ln\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y = x\arcsin\left(\ln x\right)$.

704. $y = \mathrm{tg}\,\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y = \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$.
706. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \sin 0{,}8x\right)^2$.

707. $y = x\cdot 10^{\sqrt{x}}$.
708. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

709. $y = \ln\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$.
710. $y = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

711. $y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$.
712. $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

713. $y = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.
714. $y = x^3\operatorname{arctg} x^3$.

715. $y = \frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$.
716. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

717. $y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}$.
718. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

719. $y = \ln\frac{1-e^x}{e^x}$.
720. $y = 10^{x\operatorname{tg}x}$.

721. $y = \sin^2 x\sin x^2$.
722. $y = \frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

723. $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.
724. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

725. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.
726. $y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

727. $y = \frac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x}$.
728. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

729. $y = \sqrt{a^2-x^2} - a\arccos\frac{x}{a}$.

730. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.
731. $y = \frac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

732. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

733. $y = e^{ax}(a\sin x - \cos x)$.
734. $y = xe^{1-\cos x}$.

735. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.
736. $y = e^x(\sin 3x - 3\cos 3x)$.

737. $y = 3x^3\arcsin x + \left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}$.

738. $y = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.
739. $y = 2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$.

740. $y = \ln\left(e^x\cos x + e^{-x}\sin x\right)$.

741. $y = \frac{1 + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$. **742.** $y = \frac{1}{\cos(x - \cos x)}$.

743. $y = e^x \sin x \cos^3 x$. **744.** $y = \sqrt[12]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y = x - \ln\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)$.

746. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. **747.** $y = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$.

748. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \ln(1 + \sin x) - x$.

749. $y = 2\ln\left(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\right) - 6\arcsin 2x$.

750. $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$.

751. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

752. $y = \ln\left(x \sin x \sqrt{1-x^2}\right)$. **753.** $y = x\sqrt{1+x^2}\sin x$.

754. $x = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$. **755.** $y = \sqrt{\left(1 + xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$.

756. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$.

757. $y = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

758. $y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$. **759.** $y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

760. $y = x\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$.

761. $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

762. $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. **763.** $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

764. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

765. $y = \ln\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

766. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$. **767.** $y = \sqrt{\frac{x-5}{\sqrt[3]{x^2+4}}}$.

768. $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

769. $y = \arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n+1}}$.

770. $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

771. Доказать, что функция $y = \ln\frac{1}{1+x}$ удовлетворяет соотношению $xy' + 1 = e^y$.

772. Доказать, что функция

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

удовлетворяет соотношению $2y = xy' + \ln y'$.

773. Доказать, что функция $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет соотношению $\left(1-x^2\right)y' - xy = 1$.

774*. Вычислить суммы

а) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$;

б) $2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$.

Обратные функции

775. Допустим, что правило дифференцирования степенной функции установлено только для целого положительного показателя. Вывести формулу дифференцирования корня, используя правило дифференцирования обратной функции.

776. $x = e^{\arcsin y}$; найти выражение для $\frac{dy}{dx}$ через y; через x.

777. $t = 2 - 3s + s^3$; выразить $\frac{ds}{dt}$ через s.

778. $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; проверить соотношение $\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{du} = 1$.

779. Зная, что функции $\arcsin\sqrt{x}$ и $\sin^2 x$ – взаимно обратные функции и что $(\sin^2 x)' = \sin 2x$, найти $\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'$.

780. Обозначим функцию, обратную степенно-показатель функции $y = x^x$, символом $\alpha(x)$, т. е. положим, что из $y =$ следует $x = \alpha(y)$. Найти формулу для производной от функц $y = \alpha(x)$.

781. Функции, обратные гиперболическим, обозначаю символами $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Найти производные эт функций.

782. $s = te^{-t}$; найти $\frac{dt}{ds}$.

783. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$. Выразить $\frac{dx}{dy}$ через x; через y. Показ справедливость соотношения $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

784. $x = y^3 - 4y + 1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

785. $t = \arcsin 2^s$. Найти выражение для $\frac{ds}{dt}$ через s; черев

786. Проверить справедливость соотношения $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$, е ли x и y связаны зависимостью:

1) $y = x^2 + ax + b$; 2) $y = x^{-n}$; 3) $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$.

Функции, заданные неявно

787. Убедиться дифференцированием в том, что произво ные от обеих частей равенства $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ тождестве равны между собой.

788. Убедиться дифференцированием в том, что произво ные от обеих частей равенства

$$\frac{2\sin^2 x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x\,(2\sin x + 1)}{1 + \sin x} = \operatorname{tg} x.$$

тождественно равны друг другу.

789. Чему равен угловой коэффициент касательной, про денной к эллипсу $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $\left(1, \sqrt{2}\right)$?

790. Чему равен угловой коэффициент касательной к гипе боле $xy = a$ $(a \neq 0)$, проведенной в точке $(a, 1)$?

791. Чему равен угловой коэффициент касательной к о ружности $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17$, проведенной в точке $(2, 1)$?

В задачах 792–812 найти производные функций y, заданных неявно.

792. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

793. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

794. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

795. $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$.

796. $y^3 - 3y + 2ax = 0$.

797. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

798. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

799. $x^3 + ax^2 y + bxy^2 + y^3 = 0$.

800. $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$.

801. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

802. $2y \ln y = x$.

803. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

804. $x^y = y^x$.

805. $y = \cos(x+y)$.

806. $\cos(xy) = x$.

807. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y = 1 + xe^y$.

809. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

810. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

811. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.

812. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

813. Убедиться в том, что функция y, определенная уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет также соотношению

$$y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Применения производной

814. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

815. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная к оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Доказать, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

816. Составить уравнение касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$. Найти подкасательную и поднормаль.

817. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

780. Обозначим функцию, обратную степенно-показательн функции $y = x^x$, символом $\alpha(x)$, т. е. положим, что из $y =$ следует $x = \alpha(y)$. Найти формулу для производной от функц $y = \alpha(x)$.

781. Функции, обратные гиперболическим, обознача символами $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Найти производные эт функций.

782. $s = te^{-t}$; найти $\frac{dt}{ds}$.

783. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$. Выразить $\frac{dx}{dy}$ через x; через y. Показ справедливость соотношения $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$.

784. $x = y^3 - 4y + 1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

785. $t = \arcsin 2^s$. Найти выражение для $\frac{ds}{dt}$ через s; чере

786. Проверить справедливость соотношения $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$, е ли x и y связаны зависимостью:

1) $y = x^2 + ax + b$; 2) $y = x^{-n}$; 3) $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$.

Функции, заданные неявно

787. Убедиться дифференцированием в том, что произво ные от обеих частей равенства $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ тождестве равны между собой.

788. Убедиться дифференцированием в том, что произво ные от обеих частей равенства

$$\frac{2\sin^2 x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x\,(2\sin x + 1)}{1 + \sin x} = \operatorname{tg} x.$$

тождественно равны друг другу.

789. Чему равен угловой коэффициент касательной, про денной к эллипсу $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $\left(1, \sqrt{2}\right)$?

790. Чему равен угловой коэффициент касательной к гипер боле $xy = a$ $(a \neq 0)$, проведенной в точке $(a, 1)$?

791. Чему равен угловой коэффициент касательной к о ружности $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17$, проведенной в точке $(2, 1)$?

В задачах 792–812 найти производные функций y, заданных неявно.

792. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **793.** $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

794. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **795.** $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x$.

796. $y^3 - 3y + 2ax = 0$. **797.** $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

798. $x^4 + y^4 = x^2y^2$. **799.** $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$.

800. $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$. **801.** $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

802. $2y \ln y = x$. **803.** $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

804. $x^y = y^x$. **805.** $y = \cos(x+y)$.

806. $\cos(xy) = x$. **807.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y = 1 + xe^y$. **809.** $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.

810. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\,\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **811.** $y \sin x - \cos(x-y) = 0$.

812. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

813. Убедиться в том, что функция y, определенная уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет также соотношению

$$y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Применения производной

814. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

815. Через фокус параболы проведена хорда, перпендикулярная к оси параболы. Через точки пересечения этой хорды с параболой проведены касательные. Доказать, что эти касательные пересекаются под прямым углом.

816. Составить уравнение касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$. Найти подкасательную и поднормаль.

817. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

842. В точках пересечения прямой $x - y + 1 = 0$ и параб… $y = x^2 - 4x + 5$ проведены нормали к параболе. Найти площ… треугольника, образованного нормалями и хордой, стягиваю… указанные точки пересечения.

843. Показать, что касательные, проведенные к гипербо… $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат, пар…лельны между собой.

844. Провести касательную к гиперболе $y = \frac{x+9}{x+5}$ так, что она прошла через начало координат.

845. На линии $y = \frac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касатель… параллельна оси абсцисс.

846. Найти уравнение касательной к линии $x^2(x + y…$ $= a^2(x - y)$ в начале координат.

847. Доказать, что касательные к линии $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, про…денные в точках, для которых $y = 1$, пересекаются в нача… координат.

848. Провести нормаль к линии $y = x\ln x$ параллельно пря…мой $2x - 2y + 3 = 0$.

849. Найти расстояние от начала координат до норма… к линии $y = e^{2x} + x^2$, проведенной в точке $x = 0$.

850. Построить график функции $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ и най… точку пересечения касательных к графику, проведенных в то…ках с абсциссой $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{5\pi}{12}$.

851. Показать, что у линии $y = ae^{bx}$ (a и b – постоянн… подкасательная во всех точках имеет постоянную длину.

852. Показать, что поднормаль линии $y = x\ln(cx)$ (c – пр…извольная константа) в любой точке данной линии есть четв… тая пропорциональная к абсциссе, ординате и сумме абсциссы… ординаты этой точки.

853. Показать, что любая касательная к лини… $y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}$ пересекается с осью ординат в точке, одинако… удаленной от точки касания и от начала координат.

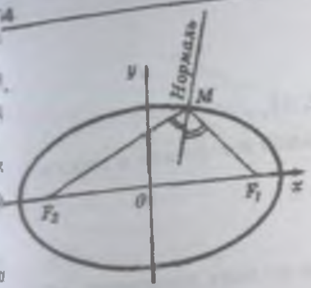

Рис. 11

854. Показать, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

855. Показать, что касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

856. Доказать, что нормаль к эллипсу в любой его точке де…лит пополам угол между фокальными радиусами (рис. 11) этой точки. Вывести отсюда способ построения касательной и норма…ли к эллипсу.

857. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярных к прямой $2x + 4y - 3 = 0$.

858. Через начало координат проведена прямая, параллель…ная касательной к кривой в произвольной ее точке M. Найти геометрическое место точек P пересечения этой прямой с пря…мой, параллельной оси ординат и проходящей через точку M.

Найти такие геометрические места для а) параболы $y^2 = 2px$, б) логарифмики $y = \log_b x$, в) окружности $x^2 + y^2 = a^2$, г) трак…трисы $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

В задачах 859–864 найти углы, под которыми пересекаются данные линии.

859. 1) $y = \frac{x+1}{x+2}$ и $y = \frac{x^2+4x+8}{16}$.

2) $y = (x-2)^2$ и $y = 4x - x^2 + 4$.

860. 1) $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.

2) $x^2 + y^2 - 4x = 1$ и $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

861. $x^2 - y^2 = 5$ и $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

862. $x^2 + y^2 = 8ax$ и $y^2 = \frac{x}{2a-x}$.

863. $x^2 = 4ay$ и $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

864. $y = \sin x$ и $y = \cos x$ $(0 \le x \le \pi)$.

865. Составить уравнение касательной и нормали к линии

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$$

в точке с абсциссой, равной a.

866. Доказать, что сумма отрезков на осях координат, об-
зуемых касательной к кривой

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}},$$

для всех ее точек равна a.

867. Показать, что отрезок касательной к астроиде

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

заключенный между осями координат, имеет постоянную д
ну, равную a.

868. Доказать, что отрезок касательной к трактрисе

$$y = \frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2},$$

заключенный между осью ординат и точкой касания, им
постоянную длину.

869. Показать, что для любой точки $M(x_0, y_0)$ равнобочн
гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2$$

отрезок нормали от точки M до точки пересечения с осью аб
цисс равен полярному радиусу точки M.

870. Показать, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс ка
тельной в произвольной точке кривой

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1,$$

пропорционален кубу абсциссы точки касания.

871. Доказать, что ордината любой точки линии

$$2x^2y^2 - x^4 = c$$

(c — постоянная) есть средняя пропорциональная между абс
сой и разностью абсциссы и поднормали, проведенной к
в той же точке.

Рис. 12

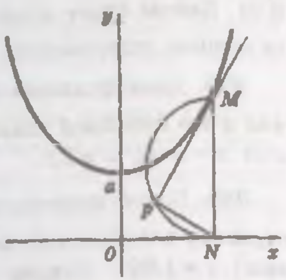

Рис. 13

872. Доказать, что у эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у которых ось $2a$ — общая, а оси $2b$ различны (рис. 12), касательные, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются в одной точке, лежащей на оси абсцисс. Воспользовавшись этим указать простой прием построения касательной к эллипсу.

873. Показать, что линия $y = e^{kx}\sin mx$, касается каждой из линий $y = e^{kx}$, $y = -e^{kx}$ во всех общих с ними точках.

874. Для построения касательной к цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ употребляется следующий способ: на ординате MN точки M, как на диаметре, строится полуокружность (рис. 13) и откладывается хорда $NP = a$; прямая MP будет искомой касательной. Доказать это.

§ 3. Дифференциал. Дифференцируемость функции

Дифференциал

877. Найти приращение функции $y = x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной. Вычислить Δy, если $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$; $0{,}01$. Какова будет погрешность (абсолютная и относительная) значения Δy, если ограничиться членом, содержащим Δx в первой степени?

878. Найти приращение Δv объема v шара при измен... радиуса $R = 2$ на ΔR. Вычислить Δv, если $\Delta R = 0{,}5$; 0,01. Какова будет погрешность значения Δv, если огранич... ся членом, содержащим ΔR в первой степени?

879. Дана функция $y = x^3 + 2x$. Найти значения прира... ния и его линейной главной части, соответствующие изменен... x от $x = 2$ до $x = 2{,}1$.

880. Какое приращение получает функция $y = 3x^2 - x$ ... переходе независимой переменной от значения $x = 1$ к зна... нию $x = 1{,}02$. Каково значение соответствующей линей... главной части? Найти отношение второй величины к первой.

881. Дана функция $y = f(x)$. В некоторой точке x дано пр... ращение $\Delta x = 0{,}2$; соответствующая главная часть приращен... функции оказалась равной 0,8. Найти производную в точке x.

882. Дана функция $f(x) = x^2$. Известно, что в некотор... точке приращению независимой переменной $\Delta x = 0{,}2$ соотв... ствует главная часть приращения функции $df(x) = -0{,}8$. Най... начальное значение независимой переменной.

883. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^2 -$ ... при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$. Вычислить абсолютную и относител... ную погрешности, которые получаются при замене приращен... дифференциалом. Сделать чертеж.

884. Найти приращение и дифференциал функции $y = \sqrt{\ }$... при $x = 4$ и $\Delta x = 0{,}41$. Вычислить абсолютную и относител... ную погрешности. Сделать чертеж.

885. $y = x^3 - x$. При $x = 2$ вычислить Δy и dy, давая Δ... значения $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$. Найти соответствующ... значения относительной погрешности $\delta = \dfrac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}$.

886. Найти графически (сделав чертеж на миллиметров... бумаге в большом масштабе) приращение, дифференциал и вы... числить абсолютную и относительную погрешности при зам... приращения дифференциалом для функции $y = 2^x$ при $x = 2$ ... $\Delta x = 0{,}4$.

887. Сторона квадрата равна 8 см. Насколько увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить на: а) 1 см; б) 0,5 см; в) 0,1 см. Найти главную линейную часть приращения площади этого квадрата и оценить относительную погрешность (в процентах) при замене приращения его главной частью.

888. Известно, что при увеличении сторон данного квадрата на 0,3 см линейная главная часть приращения площади составляет 2,4 см². Найти линейную главную часть приращения площади, соответствующую приращению каждой стороны на: а) 0,6 см; б) 0,75 см; в) 1,2 см.

889. Найти дифференциал функции:

1) $0{,}25\sqrt{x}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0{,}2}$; 3) $\frac{1}{0{,}5x^2}$; 4) $\frac{1}{4x^4}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$;

7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$; 8) $\frac{p}{q^x}$; 9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$; 10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$; 11) $\left(x^2 + 4x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$;

12) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$; 13) $\frac{1}{1-t^2}$; 14) $\left(1 + x - x^2\right)^3$; 15) $\operatorname{tg}^2 x$; 16) $5^{\ln \operatorname{tg} x}$;

17) $2^{-\frac{1}{\cos x}}$; 18) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$; 19) $\frac{\cos x}{1-x^2}$;

20) $\sqrt{\arcsin x} + (\operatorname{arctg} x)^2$;

21) $3\arcsin x - 4\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\arccos x - \frac{7}{2}\operatorname{arctg} x$;

22) $2^{-\frac{1}{x^2}} + 2x^3 - 4\sqrt{x}$.

890. Вычислить значение дифференциала функции: 1) $y = \frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ при изменении независимой переменой от $x = \frac{\pi}{6}$ до $x = \frac{61\pi}{360}$; 2) $y = \cos^2\varphi$ при изменении φ от 60° до $60^\circ30'$; 3) $y = \sin 2\varphi$ при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{61\pi}{360}$; 4) $y = \sin 3\varphi$ при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{61\pi}{360}$; 5) $y = \sin\frac{\theta}{3}$ при изменении θ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{61\pi}{360}$.

891. Найти приближенное значение приращения функции $y = \sin x$ при изменении x от 30° до $30^\circ1'$. Чему равен $\sin 30^\circ1'$?

892. Найти приближенное значение приращения функции $y = \operatorname{tg} x$ при изменении x от 45° до $45^\circ10'$.

893. Найти приближенное значение приращения функции $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ при изменении x от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{100}$.

894. $\rho = k\sqrt{\cos 2\varphi}$; найти $d\rho$.

895. $y = 3^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2^{2x}} + 6^{\sqrt{x}}$. Вычислить dy при $x = 1$ и $dx = 0$…

896. Вычислить приближенно $\sin 60°3'$, $\sin 60°18'$. Сопоставить полученные результаты с табличными значениями.

897. Проверить, что функция $y = \frac{1+\ln x}{x - x\ln x}$ удовлетворяет отношению $2x^2 dy = \left(x^2y^2 + 1\right)dx$.

898. Проверить, что функция y, определенная уравнением $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, удовлетворяет соотношению $x(dy - dx) = y(dy + dx)$.

899. $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$. Подсчитать приближенно $f(1{,}05)$.

900. Вычислить $\operatorname{arctg} 1{,}02$; $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

901. Вычислить приближенно $\sqrt{\frac{2{,}037^2-3}{2{,}037^2+5}}$.

902. Вычислить приближенно $\arcsin 0{,}4983$.

903. Если длина тяжелой нити (провода, цепи) (рис. 14) равна $2s$, полупролет l, а стрелка провеса f, то имеет место приближенное равенство $s = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$.

а) Подсчитать, какое изменение произойдет в длине нити при изменении ее стрелки провеса f на величину df.

б) Если учесть изменение длины провода ds (например, при изменения температуры или нагрузки), то как изменится при этом стрелка провеса?

904. Сравнить погрешности при нахождении угла по его тангенсу и по его синусу с помощью логарифмических таблиц, т. е. сопоставить точность нахождения угла x по формулам $\lg \sin x = y$ и $\lg \operatorname{tg} x = z$, если y и z даны с одинаковыми погрешностями.

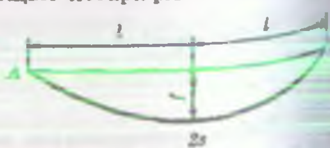

Рис. 14

905. При технических расчетах часто сокращают π и $\sqrt{g}$ (g – ускорение силы тяжести), когда одно из этих чисел стоит в числителе, а другое в знаменателе. Какую относительную погрешность делают при этом?

906. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал:

1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$, $x = t^3 + 2t + 1$;

2) $s = \cos^2 z$, $z = \frac{t^2-1}{4}$; 3) $z = \operatorname{arctg} v$, $v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}$;

4) $v = 3^{-\frac{1}{x}}$, $x = \ln \operatorname{tg} s$;

5) $s = e^z$, $z = \frac{1}{2}\ln t$, $t = 2u^2 - 3u + 1$;

6) $y = \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}$, $u = \arcsin v$, $v = \cos 2x$.

Дифференцируемость функций

907. Функция $y = |x|$ непрерывна при любом x. Убедиться, что при $x = 0$ она недифференцируема.

908. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = \left|x^3\right|$ при $x = 0$.

909. Функция $f(x)$ определена следующим образом: $f(x) = 1 + x$ для $x \le 0$; $f(x) = x$ для $0 < x < 1$; $f(x) = 2 - x$ для $1 \le x \le 2$ и $f(x) = 3x - x^2$ для $x > 2$. Исследовать непрерывность $f(x)$ и выяснить существование и непрерывность $f'(x)$.

910. Функция $y = |\sin x|$ непрерывна при любом x. Убедиться, что при $x = 0$ она недифференцируема. Имеются ли другие значения независимой переменной, при которых функция недифференцируема?

911. Исследовать непрерывность и дифференцируемость функции $y = e^{-|x|}$ при $x = 0$.

912. $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ при $x \ne 0$, $f(0) = 0$. Будет ли функция $f(x)$ дифференцируемой при $x = 0$?

913. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ при $x \neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной и дифференцируемой?

914. Дана функция $f(x)=1+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Показать, что п $x=1$ из приращения функции нельзя выделить линейн главную часть, и поэтому $f(x)$ при $x=1$ не имеет произв ной. Истолковать результат геометрически.

915. $f(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой? Истолков результат геометрически.

916. $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x \neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой?

§ 4. Производная как скорость изменени (дальнейшие примеры)

Относительная скорость

917. Точка движется по архимедовой спирали $\rho = a\varphi$. На ти скорость изменения полярного радиуса ρ относительно п лярного угла φ.

918. Точка движется по логарифмической спирали $\rho = e^{a\varphi}$ Найти скорость изменения полярного радиуса, если извест что он вращается с угловой скоростью ω.

919. Точка движется по окружности $\rho = 2r\cos\varphi$. Найти ск рость изменения абсциссы и ординаты точки, если полярны радиус вращается с угловой скоростью ω. Полярная ось служ осью абсцисс, полюс – началом системы декартовых координ

920. Круг радиуса R катится без скольжения по прямой Центр круга движется с постоянной скоростью v. Найти скоро сти изменения абсциссы x и ординаты y для точки, лежащей н границе круга.

921. Барометрическое давление p изменяется с высото в соответствии с функцией $\ln\frac{p}{p_0}=ch$, где через p_0 обозначе

нормальное давление, а c – постоянная. На высоте 5540 м давление достигает половины нормального; найти скорость изменения барометрического давления с высотой.

922. y связан с x соотношением $y^2 = 12x$. Аргумент x возрастает равномерно со скоростью 2 единицы в секунду. С какой скоростью возрастает y при $x = 3$?

923. Ордината точки, описывающей окружность $x^2 + y^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5 см/с. С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4 см?

924. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

925. Сторона квадрата увеличивается со скоростью v. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна a?

926. Радиус круга изменяется со скоростью v. Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен r?

927. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

928. При каком значении угла синус изменяется вдвое медленнее аргумента?

929. При каком значении угла скорости изменения синуса и тангенса одного и того же угла одинаковы?

930. Скорость роста синуса увеличилась в n раз. Во сколько раз при этом изменилась скорость роста тангенса?

931. Предполагая, что объем ствола дерева пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год, показать, что скорость роста объема, когда диаметр равен 90 см, в 25 раз больше скорости, когда диаметр равен 18 см.

Функции, заданные параметрически

932. Проверить, лежит ли заданная декартовыми координатами точка на линии, уравнение которой дано в параметрической форме: а) Лежит ли точка $(5, 1)$ на окружности $x = 2 + 5\cos t$, $y = -3 + 5\sin t$? б) Лежит ли точка $(2, \sqrt{3})$ на окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$?

913. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ при $x\neq0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной и дифференцируемой?

914. Дана функция $f(x)=1+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Показать, что в $x=1$ из приращения функции нельзя выделить линей главную часть, и поэтому $f(x)$ при $x=1$ не имеет произв ной. Истолковать результат геометрически.

915. $f(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ при $x\neq0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой? Истолков результат геометрически.

916. $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x\neq0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой?

§ 4. Производная как скорость изменени (дальнейшие примеры)

Относительная скорость

917. Точка движется по архимедовой спирали $\rho=a\varphi$. На ти скорость изменения полярного радиуса ρ относительно лярного угла φ.

918. Точка движется по логарифмической спирали $\rho=e^{}$ Найти скорость изменения полярного радиуса, если извест что он вращается с угловой скоростью ω.

919. Точка движется по окружности $\rho=2r\cos\varphi$. Найти ск рость изменения абсциссы и ординаты точки, если полярн радиус вращается с угловой скоростью ω. Полярная ось служ осью абсцисс, полюс – началом системы декартовых координ

920. Круг радиуса R катится без скольжения по прямой Центр круга движется с постоянной скоростью v. Найти скор сти изменения абсциссы x и ординаты y для точки, лежащей на границе круга.

921. Барометрическое давление p изменяется с высот в соответствии с функцией $\ln\frac{p}{p_0}=ch$, где через p_0 обозначе

нормальное давление, а c – постоянная. На высоте 5540 м давление достигает половины нормального; найти скорость изменения барометрического давления с высотой.

922. y связан с x соотношением $y^2 = 12x$. Аргумент x возрастает равномерно со скоростью 2 единицы в секунду. С какой скоростью возрастает y при $x = 3$?

923. Ордината точки, описывающей окружность $x^2 + y^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5 см/с. С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4 см?

924. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

925. Сторона квадрата увеличивается со скоростью v. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна a?

926. Радиус круга изменяется со скоростью v. Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен r?

927. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

928. При каком значении угла синус изменяется вдвое медленнее аргумента?

929. При каком значении угла скорости изменения синуса и тангенса одного и того же угла одинаковы?

930. Скорость роста синуса увеличилась в n раз. Во сколько раз при этом изменилась скорость роста тангенса?

931. Предполагая, что объем ствола дерева пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год, показать, что скорость роста объема, когда диаметр равен 90 см, в 25 раз больше скорости, когда диаметр равен 18 см.

Функции, заданные параметрически

932. Проверить, лежит ли заданная декартовыми координатами точка на линии, уравнение которой дано в параметрической форме: а) Лежит ли точка $(5, 1)$ на окружности $x = 2 + 5\cos t$, $y = -3 + 5\sin t$? б) Лежит ли точка $(2, \sqrt{3})$ на окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$?

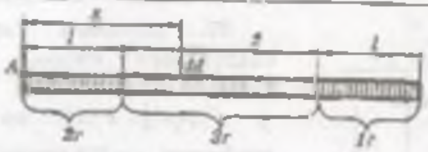

Рис. 4

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

44. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре – полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}\ (p>0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3-x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; 12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 14) $y = \arcsin(x-2)$;

15) $y = \arccos(1-2x)$; 16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;

17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$; 18) $y = \sqrt{1-|x|}$; 19) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; 22) $y = \lg\sin x$;

23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; 24) $y = \log_x 2$.

48. 1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;

5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$; 6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;

7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$; 10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; 12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;

15) $y = \lg\left[1 - \lg\left(x^2 - 5x + 16\right)\right]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;

3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

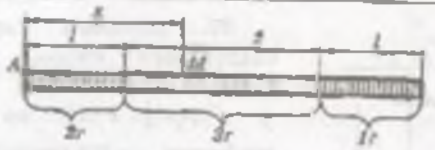

Рис. 4

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

44. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре – полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}\ (p > 0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^3+1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3-x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; 12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 14) $y = \arcsin(x-2)$;

15) $y = \arccos(1-2x)$; 16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;

17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$; 18) $y = \sqrt{1-|x|}$; 19) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; 22) $y = \lg\sin x$;

23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; 24) $y = \log_x 2$.

48. 1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;

5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$; 6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;

7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$; 10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; 12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;

15) $y = \lg\left[1 - \lg\left(x^2 - 5x + 16\right)\right]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;

3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

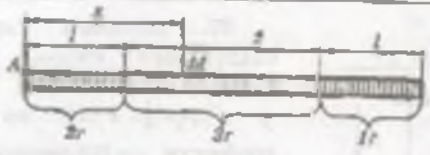

Рис. 4

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

44. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре – полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}\ (p > 0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3-x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; 12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 14) $y = \arcsin(x-2)$;

15) $y = \arccos(1-2x)$; 16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;

17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$; 18) $y = \sqrt{1-|x|}$; 19) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; 22) $y = \lg\sin x$;

23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; 24) $y = \log_x 2$.

48. 1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;

5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$; 6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;

7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$; 10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; 12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;

15) $y = \lg\left[1 - \lg\left(x^2 - 5x + 16\right)\right]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;

3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

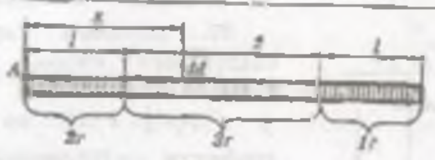

Рис. 4

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

44. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре – полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}$ $(p > 0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^3+1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3-x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; 12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 14) $y = \arcsin(x-2)$;

15) $y = \arccos(1-2x)$; 16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;

17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$; 18) $y = \sqrt{1-|x|}$; 19) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; 22) $y = \lg\sin x$;

23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; 24) $y = \log_x 2$.

48. 1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;

5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$; 6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;

7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$; 10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; 12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;

15) $y = \lg\left[1 - \lg\left(x^2 - 5x + 16\right)\right]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;

3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

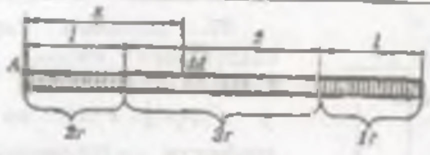

Рис. 4

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

44. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре – полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}$ $(p > 0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3-x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; 12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 14) $y = \arcsin(x-2)$;

15) $y = \arccos(1-2x)$; 16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;

17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$; 18) $y = \sqrt{1-|x|}$; 19) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; 22) $y = \lg\sin x$;

23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; 24) $y = \log_x 2$.

48. 1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;

5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$; 6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;

7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$; 10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; 12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;

15) $y = \lg\left[1 - \lg\left(x^2 - 5x + 16\right)\right]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;

3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

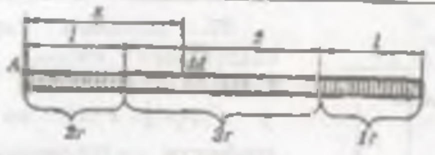

Рис. 4

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

44. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре – полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}\ (p > 0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3-x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; 12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 14) $y = \arcsin(x-2)$;

15) $y = \arccos(1-2x)$; 16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;

17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$; 18) $y = \sqrt{1-|x|}$; 19) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; 22) $y = \lg\sin x$;

23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; 24) $y = \log_x 2$.

48. 1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;

5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$; 6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;

7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$; 10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; 12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;

15) $y = \lg\left[1 - \lg\left(x^2 - 5x + 16\right)\right]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;

3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

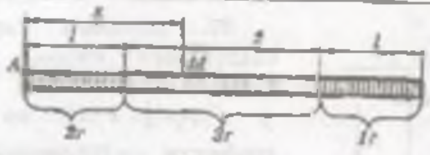

Рис. 4

42. Значение функции целочисленного аргумента $u = f(n)$ равно количеству целых делителей аргумента, отличных от 1 и самого n. Составить таблицу значений u для $1 \le n \le 20$.

43. Из трех материальных отрезков, длины которых равны 1; 2; 1 единицам длины, а массы соответственно равны 2; 3; 1 единицам массы, составлен брус (рис. 4). Масса переменного отрезка AM длины x есть функция от x. При каких значениях x определена эта функция? Составить ее аналитическое выражение и построить график.

44. Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре – полусфера радиуса R. Выразить площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x сечения от нижнего основания конуса. Построить график функции $S = f(x)$.

45. В шар радиуса R вписывается цилиндр. Найти функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты x. Указать область определения этой функции.

46. В шар радиуса R вписывается прямой конус. Найти функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса от его образующей x. Указать область определения этой функции.

В задачах 47–48 найти области определения данных функций:

47. 1) $y = 1 - \lg x$; 2) $y = \lg(x+3)$; 3) $y = \sqrt{5-2x}$;

4) $y = \sqrt{-px}\ (p > 0)$; 5) $y = \frac{1}{x^2-1}$; 6) $y = \frac{1}{x^3+1}$;

7) $y = \frac{1}{x^3-x}$; 8) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$; 9) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; 11) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$; 12) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

13) $y = \arcsin\frac{x}{4}$; 14) $y = \arcsin(x-2)$;

15) $y = \arccos(1-2x)$; 16) $y = \arccos\frac{1-2x}{4}$;

17) $y = \arcsin\sqrt{2x}$; 18) $y = \sqrt{1-|x|}$; 19) $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$;

20) $y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$; 21) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$; 22) $y = \lg\sin x$;

23) $y = \arccos\frac{2}{2+\sin x}$; 24) $y = \log_x 2$.

48. 1) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin\frac{3-2x}{5}$;

3) $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$;

5) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$; 6) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$;

7) $y = \lg\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 8) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;

9) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$; 10) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

11) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$; 12) $y = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

13) $y = \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}$; 14) $y = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;

15) $y = \lg\left[1 - \lg\left(x^2 - 5x + 16\right)\right]$.

49. Тождественны ли функции:

1) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ и $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ и $\varphi(x) = x$;

3) $f(x) = x$ и $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$; 4) $f(x) = \lg x^2$ и $\varphi(x) = 2\lg x$?

50. Придумать пример аналитически заданной функции:

1) определенной только в интервале $-2 \le x \le 2$;

2) определенной только в интервале $-2 < x < 2$ и неопределенной при $x = 0$;

3) определенной для всех действительных значений x, за исключением $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

51. Найти области определения однозначных ветвей функции $y = \varphi(x)$, заданной уравнением:

1) $y^2 - 1 + \log_2(x-1) = 0$; 2) $y^4 - 2xy^2 + x^2 - x = 0$.

956. Найти углы, под которыми пересекаются линии:

1) $y = x^2$ и $x = \frac{5}{3}\cos t$, $y = \frac{5}{4}\sin t$;

2) $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ и $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2}$.

957. Показать, что при любом положении производящ круга циклоиды касательная и нормаль в соответствующей т ке циклоиды проходят через его высшую и низшую точки.

958. Найти длины касательной, нормали, подкасательной поднормали к кардиоиде $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin$ $-\sin 2t)$ в произвольной ее точке.

959. Найти длины касательной, нормали, подкасательной поднормали к астроиде $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ в произвольн ее точке.

960. Доказать, что касательная к окружности $x^2 + y^2 =$ служит нормалью к эвольвенте окружности $x = a(\cos t + t\sin$ $y = a(\sin t - t\cos t)$.

961. Найти длины касательной, нормали, подкасательн и поднормали эвольвенты окружности (см. уравнения последн в предыдущей задаче).

962. Доказать, что отрезок нормали к кривой $x = 2a\sin$ $+ a\sin t\cos^2 t$, $y = -a\cos^3 t$, заключенный между осями коорд нат, равен $2a$.

В задачах 963–966 составить уравнения касательной в но мали к данным линиям в указанных точках.

963. $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$ при $t = 0$.

964. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$ при $t = \frac{\pi}{6}$.

965. $x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1$, $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$ при $t = \frac{\pi}{4}$.

966. 1) $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ при $t = 2$;

2) $x = t(t\cos t - 2\sin t)$, $y = t(t\sin t + 2\cos t)$ при $t = \frac{\pi}{4}$;

3) $x = \sin t$, $y = a^t$ при $t = 0$.

967. Показать, что в двух точках кардиоиды (см. задачу 958), соответствующих значениям параметра t, отличающимся на $\frac{2}{3}\pi$, касательные параллельны.

968. Доказать, что если OT и ON – перпендикуляры, опущенные из начала координат на касательную и нормаль к астроиде в любой ее точке (см. задачу 959), то

$$4\cdot OT^2 + ON^2 = a^2.$$

969. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к линии

$$2x = a(3\cos t + \cos 3t),\quad 2y = a(3\sin t + \sin 3t).$$

Показать, что $4\rho^2 = 3p^2 + 4a^2$, где ρ – полярный радиус данной точки, а p – длина указанного перпендикуляра.

Скорость изменения полярного радиуса

970. Дана окружность $\rho = 2r\sin\varphi$. Найти угол θ между полярным радиусом и касательной и угол α между полярной осью и касательной.

971. Доказать, что у параболы $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ сумма углов, образованных касательной с полярным радиусом и с полярной осью, равна двум прямым. Использовать это свойство для построения касательной к параболе.

972. Дана линия $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (конхоида); показать, что $\alpha = 4\theta$ (обозначения те же, что в задаче 970).

973. Показать, что две параболы $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ и $\rho = b\operatorname{cosec}^2\frac{\varphi}{2}$ пересекаются под прямым углом.

974. Найти тангенс угла между полярной осью и касательной к линии $\rho = \sec^2\varphi$ в точках, в которых $\rho = 2a$.

975. Найти тангенс угла между полярной осью и касательной в начале координат: 1) к линии $\rho = \sin^3\varphi$, 2) к линии $\rho = \sin 3\varphi$.

976. Показать, что две кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$ и $\rho = a(1-\cos\varphi)$ пересекаются под прямым углом.

977. Уравнение линии в полярных координатах задано раметрически: $\rho = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$. Выразить тангенс угла между касательной и полярным радиусом в виде функции t.

978. Линия задана уравнениями $\rho = at^3$, $\varphi = bt^2$. На угол между полярным радиусом и касательной.

979. Дан эллипс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Выразить поляр радиус ρ и полярный угол φ как функции параметра t. пользовать полученную форму задания эллипса для вычисл угла между касательной и полярным радиусом.

Полярной подкасательной называется проекция отр касательной от точки касания до ее пересечения с перпенд ляром, восстановленным к полярному радиусу в полюсе, на перпендикуляр. Аналогично определяется полярная норм маль. Учитывая это, решить задачи 980–984.

980. Вывести формулу для полярной подкасательной и лярной поднормали линии $\rho = f(\varphi)$.

981. Показать, что длина полярной подкасательной ги болической спирали $\rho = \frac{a}{\varphi}$ постоянна.

982. Показать, что длина полярной поднормали архим вой спирали $\rho = a\varphi$ постоянна.

983. Найти длину полярной подкасательной логарифм ской спирали $\rho = a^{\varphi}$.

984. Найти длину полярной поднормали логарифмичес спирали $\rho = a^{\varphi}$.

Скорость изменения длины

В задачах 985–999 через s обозначена длина дуги соотве вующей линии.

985. Прямая $y = ax + b$; $\frac{ds}{dx} = ?$

986. Окружность $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{ds}{dx} = ?$

987. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{ds}{dy} = ?$

988. Парабола $y^2 = 2px$; $ds = ?$

989. Полукубическая парабола $y^2 = ax^3$; $\frac{ds}{dy} = ?$

990. Синусоида $y = \sin x$; $ds = ?$

991. Цепная линия $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(y = \operatorname{ch} x)$; $\frac{ds}{dx} = ?$

992. Окружность $x = r\cos t$, $y = r\sin t$; $\frac{ds}{dt} = ?$

993. Циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\frac{ds}{dt} = ?$

994. Астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $ds = ?$

995. Архимедова спираль $x = at\sin t$, $y = at\cos t$; $ds = ?$

996. Кардиоида $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$; $ds = ?$

997. Трактриса $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$; $ds = ?$

998. Развертка окружности

$$x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t);\quad \frac{ds}{dt} = ?$$

999. Гипербола $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$; $ds = ?$

Скорость движения

1000. Лестница длиной 10 м одним концом прислонена к вертикальной стене, а другим – опирается о пол. Нижний конец отодвигается от стены со скоростью 2 м/мин. С какой скоростью опускается верхний конец лестницы, когда основание ее отстоит от стены на 6 м? Как направлен вектор скорости?

1001. Поезд и воздушный шар отправляются в один и тот же момент из одного пункта. Поезд движется равномерно со скоростью 50 км/ч, шар поднимается (тоже равномерно) со скоростью 10 км/ч. С какой скоростью они удаляются друг от друга? Как направлен вектор скорости?

1002. Человек, рост которого 1,7 м, удаляется от источника света, находящегося на высоте 3 м, со скоростью 6,34 км/ч. С какой скоростью перемещается тень его головы?

1003. Лошадь бежит по окружности со скоростью 20 км/ч. В центре окружности находится фонарь, а по касательной к окружности в точке, откуда лошадь начинает бег, расположен забор. С какой скоростью перемещается тень лошади вдоль забора в момент, когда она пробежит $\frac{1}{8}$ окружности?

913. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной и дифференцируемой?

914. Дана функция $f(x)=1+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Показать, что $x=1$ из приращения функции нельзя выделить линей главную часть, и поэтому $f(x)$ при $x=1$ не имеет произв ной. Истолковать результат геометрически.

915. $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой? Истолк результат геометрически.

916. $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ $f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой?

§ 4. Производная как скорость изменени (дальнейшие примеры)

Относительная скорость

917. Точка движется по архимедовой спирали $\rho=a\varphi$. Н ти скорость изменения полярного радиуса ρ относитель лярного угла φ.

918. Точка движется по логарифмической спирали $\rho=e^{a\varphi}$ Найти скорость изменения полярного радиуса, если извест что он вращается с угловой скоростью ω.

919. Точка движется по окружности $\rho=2r\cos\varphi$. Найти с рость изменения абсциссы и ординаты точки, если поляр радиус вращается с угловой скоростью ω. Полярная ось слу осью абсцисс, полюс – началом системы декартовых коорд

920. Круг радиуса R катится без скольжения по прям Центр круга движется с постоянной скоростью v. Найти ско сти изменения абсциссы x и ординаты y для точки, лежащей границе круга.

921. Барометрическое давление p изменяется с выс в соответствии с функцией $\ln\frac{p}{p_0}=ch$, где через p_0 обо

нормальное давление, а c – постоянная. На высоте 5540 м давление достигает половины нормального; найти скорость изменения барометрического давления с высотой.

922. y связан с x соотношением $y^2 = 12x$. Аргумент x возрастает равномерно со скоростью 2 единицы в секунду. С какой скоростью возрастает y при $x = 3$?

923. Ордината точки, описывающей окружность $x^2 + y^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5 см/с. С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4 см?

924. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

925. Сторона квадрата увеличивается со скоростью v. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна a?

926. Радиус круга изменяется со скоростью v. Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен r?

927. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

928. При каком значении угла синус изменяется вдвое медленнее аргумента?

929. При каком значении угла скорости изменения синуса и тангенса одного и того же угла одинаковы?

930. Скорость роста синуса увеличилась в n раз. Во сколько раз при этом изменилась скорость роста тангенса?

931. Предполагая, что объем ствола дерева пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год, показать, что скорость роста объема, когда диаметр равен 90 см, в 25 раз больше скорости, когда диаметр равен 18 см.

Функции, заданные параметрически

932. Проверить, лежит ли заданная декартовыми координатами точка на линии, уравнение которой дано в параметрической форме: а) Лежит ли точка $(5, 1)$ на окружности $x = 2 +$ [illegible] $+ 5\sin t$? б) Лежит ли точка $(2, \sqrt{3})$ на окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$?

913. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ
$f(x)$ при $x=0$ непрерывной и дифференцируемой?

914. Дана функция $f(x)=1+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Показать, что
$x=1$ из приращения функции нельзя выделить линей
главную часть, и поэтому $f(x)$ при $x=1$ не имеет произ
ной. Истолковать результат геометрически.

915. $f(x)=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ
$f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой? Истолк
результат геометрически.

916. $f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Будет ли функ
$f(x)$ при $x=0$ непрерывной, дифференцируемой?

§ 4. Производная как скорость изменени
(дальнейшие примеры)

Относительная скорость

917. Точка движется по архимедовой спирали $\rho=a\varphi$. Н
ти скорость изменения полярного радиуса ρ относительно
лярного угла φ.

918. Точка движется по логарифмической спирали $\rho=e^{\dots}$
Найти скорость изменения полярного радиуса, если извест
что он вращается с угловой скоростью ω.

919. Точка движется по окружности $\rho=2r\cos\varphi$. Найти с
рость изменения абсциссы и ординаты точки, если поляр
радиус вращается с угловой скоростью ω. Полярная ось слу
осью абсцисс, полюс – началом системы декартовых коорд

920. Круг радиуса R катится без скольжения по прям
Центр круга движется с постоянной скоростью v. Найти ско
сти изменения абсциссы x и ординаты y для точки, лежащ
границе круга.

921. Барометрическое давление p изменяется с выс
h соответствии с функцией $\ln\frac{p}{p_0}=ch$, где через p_0 обо

нормальное давление, а c — постоянная. На высоте 5540 м давление достигает половины нормального; найти скорость изменения барометрического давления с высотой.

922. y связан с x соотношением $y^2 = 12x$. Аргумент x возрастает равномерно со скоростью 2 единицы в секунду. С какой скоростью возрастает y при $x = 3$?

923. Ордината точки, описывающей окружность $x^2 + y^2 = 25$, убывает со скоростью 1,5 см/с. С какой скоростью изменяется абсцисса точки, когда ордината становится равной 4 см?

924. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с такой же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

925. Сторона квадрата увеличивается со скоростью v. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна a?

926. Радиус круга изменяется со скоростью v. Какова скорость изменения длины окружности и площади круга в тот момент, когда его радиус равен r?

927. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

928. При каком значении угла синус изменяется вдвое медленнее аргумента?

929. При каком значении угла скорости изменения синуса и тангенса одного и того же угла одинаковы?

930. Скорость роста синуса увеличилась в n раз. Во сколько раз при этом изменилась скорость роста тангенса?

931. Предполагая, что объем ствола дерева пропорционален кубу его диаметра и что последний равномерно увеличивается из года в год, показать, что скорость роста объема, когда диаметр равен 90 см, в 25 раз больше скорости, когда диаметр равен 18 см.

Функции, заданные параметрически

932. Проверить, лежат ли заданные декартовыми координатами точки на линии, уравнение которой дано в параметрической форме: а) Лежит ли точка $(5, 1)$ на окружности $x = 2 +$ [illegible] $+ 5\sin t$? б) Лежит ли точка $(2, \sqrt{3})$ на окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$?

1042. Доказать, что ф

тношению $y'' - 2y' + 2y$

ношению $y'' + 2y' + 2y = 0$

1043. Доказать, что

ношению $2y'^2 = (y-1)y''$

1044. Доказать, что

соотношению $y^3 y'' + 1 = 0$

1045. Доказать, что

соотношению $y''' - 13y' -$

1046. Доказать, что

соотношению $xy'' + \frac{1}{2}y' -$

1047. Доказать, что

ряет соотношению $y'' - y'$

1048. Доказать, что ф

$y = A\sin(\omega t + \omega_0) + B\cos$

удовлетворяет соотношени

1049. Доказать, что ф

$a_1 e^{nx} + a_2 e$

(a_1, a_2, a_3, a_4, n – постоя

1050. Доказать, что

ряет соотношению $(1 - x^2$

1051. Доказать, что

ношению $(1 - x^2)y'' - xy' -$

1052. Доказать, что

ряет соотношению $(1 + x^2$

1042. Доказать, что

тношению $y'' - 2y' + 2y$

ношению $y'' + 2y' + 2y = 0$

1043. Доказать, что

ношению $2y'^2 = (y-1)y''$

1044. Доказать, что

соотношению $y^3y'' + 1 = 0$

1045. Доказать, что

соотношению $y''' - 13y' -$

1046. Доказать, что

соотношению $xy'' + \frac{1}{2}y' -$

1047. Доказать, что

ряет соотношению $y'' - y'$

1048. Доказать, что ф

$y = A\sin(\omega t + \omega_0) + B\cos$

удовлетворяет соотношен

1049. Доказать, что ф

$a_1e^{nx} + a_2e$

(a_1, a_2, a_3, a_4, n – постоя

1050. Доказать, что

ряет соотношению $(1 - x^2$

1051. Доказать, что

ношению $(1 - x^2)y'' - xy' -$

1052. Доказать, что

ряет соотношению $(1 + x^2$

1053. Доказать, что выражение $S = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ не и[зме]нится, если заменить y на $\frac{1}{y}$, т. е. если положить $y = \frac{1}{y_1}$, то

$$\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2 = S.$$

1054. Дано $y = f(x)$. Выразить $\frac{d^2x}{dy^2}$ через $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$. П[оказа]ть, что формулу $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ можно преобразовать к виду

$$R^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

1055. Дано: $F(x) = f(x)\varphi(x)$, при этом $f'(x)\varphi'(x) = C$. До[ка]зать, что $\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{2C}{f\cdot\varphi}$ и $\frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{\varphi'''}{\varphi}$.

Функции, заданные в неявном виде

1056. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1057. $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$ **1058.** $y = \operatorname{tg}(x+y)$; $\frac{d^3y}{dx^3}$

1058. $s = 1 + te^s$; $\frac{d^2s}{dt^2} = ?$ **1060.** $y^3 + x^3 - 3axy = 0$; y''

1059. $y = \sin(x+y)$; $y'' = ?$ **1062.** $e^{x+y} = xy$; $y'' = ?$

1063. Вывести формулу для второй производной функ[ции], обратной данной $y = f(x)$.

1064. $e^y + xy = e$; найти $y''(x)$ при $x = 0$.

1065. $y^2 = 2px$; определить выражение $k = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1066. Убедиться в том, что из $y^2 + x^2 = R^2$ следует $k = \frac{1}{R}$, где $k = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1067. Доказать, что если

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2fy + h = 0, \text{ то}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by+g}{bx+cy+f} \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{(bx+cy+f)^3},$$

где A – постоянная (не зависящая от x и y).

1068. Доказать, что если $(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, то

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2.$$

Функции, заданные параметрически

1069. $x = at^2$, $y = bt^3$; $\frac{d^2x}{dy^2} = ?$

1070. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1071. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $\frac{d^3y}{dx^3} = ?$

1072. $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1073. 1) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

2) $x = a\cos^2 t$, $y = a\sin^2 t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1074. 1) $x = \ln t$, $y = t^2 - 1$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

2) $x = \arcsin t$, $y = \ln(1 - t^2)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1075. $x = at\cos t$, $y = at\sin t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1076. Доказать, что функция $y = f(x)$, заданная параметрически уравнениями $y = e^t\cos t$, $x = e^t\sin t$, удовлетворяет соотношению $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

1077. Доказать, что функция $y = f(x)$, заданная параметрически уравнениями $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$, удовлетворяет соотношению $36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3$.

1159. $y = 2x^2 - \ln x.$ **1160.** $y = x - 2\sin x \ (0 \le x \le 2\pi).$

1161. $y = 2\sin x + \cos 2x \ (0 \le x \le 2\pi).$

1162. $y = x + \cos x.$ **1163.** $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$

1164. $y = x\sqrt{ax - x^2} \ (a > 0).$

В задачах 1165–1184 найти экстремумы функций.

1165. $y = 2x^3 - 3x^2.$ **1166.** $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$

1167. $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$ **1168.** $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8^2}.$

1169. $y = \frac{1}{\ln\left(x^4 + 4x^3 + 30\right)}.$ **1170.** $y = -x^2\sqrt{x^2 + 2}.$

1171. $y = \frac{2}{3}x\sqrt[3]{6x - 7}.$ **1172.** $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}.$

1173. $y = \frac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}.$ **1174.** $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - a^2\right)^2}.$

1175. $y = x - \ln(1 + x).$ **1176.** $y = x - \ln\left(1 + x^2\right).$

1177. $y = (x - 5)^2\sqrt[3]{(x + 1)^2}.$

1178. $y = \left(x^2 - 2x\right)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$

1179. $y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{x}.$

1180. $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} - \frac{\pi}{12}x^2.$

1181. $y = x\sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2 \ \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$

1182. $y = \left(\frac{1}{2} - x\right)\cos x + \sin x - \frac{x^2 - x}{4} \ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$

1183. $y = \frac{2 - x}{\pi}\cos\pi(x + 3) + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi(x + 3) \ (0 < x < 4).$

1184. $y = ae^{px} + be^{-px}.$

В задачах 1185–1197 найти наибольшее и наименьшее значения данных функций на указанных отрезках и в указанных интервалах.

1185. $y = x^4 - 2x^2 + 5; \ [-2, 2].$

1186. $y = x + 2\sqrt{x}; \ [0, 4].$

1187. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; \ [-1, 2].$

1188. $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2; \ [-1, 1].$

1189. $y = \sqrt{100 - x^2} \ (-6 \le x \le 8).$

1190. $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} \ (0 \le x \le 1).$

1191. $y = \frac{x-1}{x+1} \ (0 \le x \le 4).$

1192. $y = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x} \ (0 < x < 1) \ (a > 0, b > 0).$

1193. $y = \sin 2x - x \ \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$

1194. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x \ \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right).$

1195. $y = x^x \ (0{,}1 \le x < +\infty).$

1196. $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 2x\right)^2} \ (0 \le x \le 3).$

1197. $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} \ (0 \le x \le 1).$

Неравенства

В задачах 1198–1207 доказать справедливость неравенств.

1198. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \ (x > 1).$ **1199.** $e^x > 1 + x \ (x \ne 0).$

1200. $x > \ln(1 + x) \ (x > 0).$ **1201.** $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1} \ (x > 1).$

1202. $2x\operatorname{arctg} x \ge \ln\left(1 + x^2\right).$

1203. $1 + x\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \ge \sqrt{1 + x^2}.$

1204. $\ln(1 + x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x} \ (x > 0).$

1205. $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ (x > 0).$

1206. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$

1207. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2} \ (x \ne 0).$

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций

1208. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы су
их кубов была наименьшей.

1209. Какое положительное число, будучи сложено с об
ным ему числом, дает наименьшую сумму?

1210. Число 36 разложить на два таких множителя, чт
сумма их квадратов была наименьшей.

1211. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем кот
о был бы равен 72 см^3, причем стороны основания относи
ы, как 1 : 2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чт
олная поверхность была наименьшей?

1212. Из углов квадратного листа картона размером 18×18 см^2 нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (рис. 16), получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата?

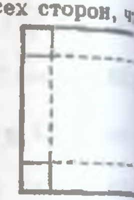

Рис. 16

1213. Решить предыдущую задачу для прямоугольного л
та размером 8×5 см^2.

1214. Объем правильной треугольной призмы равен v. Ка
ва должна быть сторона основания, чтобы полная поверхн
призмы была наименьшей?

1215. Открытый чан имеет форму цилиндра. При данн
объеме v каковы должны быть радиус основания и высота
линдра, чтобы его поверхность была наименьшей?

1216. Найти соотношение между радиусом R и высотой
цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полн
поверхность.

1217. Требуется изготовить коническую воронку с образу
щей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, что
ее объем был наибольшим?

1218. Из круга вырезан сектор с центральным углом α.
сектора свернута коническая поверхность. При каком значен
угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

1219. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. К
ковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образова
го вращением этого треугольника вокруг его основания, б
наибольшим?

1220. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

1221. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

1222. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

1223. Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем.)

1224. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A; в точке B $(AB = a)$ подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен k. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой? (Момент уравновешивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага.)

1225. Расходы топлива для топки парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости в 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час, остальные же расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

1226. Три пункта A, B и C расположены так, что $\angle ABC = 60°$. Из пункта A выходит автомобиль, а одновременно из пункта B – поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, поезд – по направлению к C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $AB = 200$ км?

1227. На окружности дана точка A. Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

1228. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

1229. В данный сегмент круга вписать прямоугольник наибольшей площади.

1230. Около данного цилиндра описать конус наимены объема (плоскость основания цилиндра и конуса должны сов дать).

1231. Найти высоту прямого кругового конуса наименьш объема, описанного около шара радиуса R.

1232. Найти угол при вершине осевого сечения кону наименьшей боковой поверхности, описанного около данн шара.

1233. Каков должен быть угол при вершине равнобедренно треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного этот треугольник круга был наибольшим?

1234. Найти высоту конуса наименьшего объема, описан го около полушара радиуса R (центр основания конуса лежи центре шара).

1235. Какова должна быть высота конуса, вписанного в ш радиуса R, для того чтобы его боковая поверхность была на большей?

1236. Доказать, что конический шатер данной вместимос требует наименьшего количества материи, когда его высота $\sqrt{2}$ раз больше радиуса основания.

1237. Через данную точку $P(1,4)$ провести прямую т чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею координатных осях, была наименьшей.

1238. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1239. Найти наименьший по площади эллипс, описанны около данного прямоугольника (площадь эллипса с полуосями и b равна πab).

1240. Через какую точку эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$ следует про вести касательную, чтобы площадь треугольника, составленно этой касательной и осями координат, была наименьшей?

1241. На эллипсе $2x^2+y^2=18$ даны две точки $A(1,4)$ $B(3,0)$. Найти на данном эллипсе третью точку C такую, что бы площадь треугольника ABC была наибольшей.

1242. На оси параболы $y^2=2px$ дана точка на расстоянии от вершины. Указать абсциссу x ближайшей к ней точки кривой

1243. Полоса железа шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

1244. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны соответственно 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна и объем которой был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

1245. Ряд опытов привел к n различным значениям x_1, x_2, ... x_n для исследуемой величины A. Часто принимают в качестве значения A такое значение x, что сумма квадратов отклонений его от x_1, x_2, ... x_n имеет наименьшее значение. Найти x, удовлетворяющее этому требованию.

1246. Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега (лагерь расположен на берегу). Если гонец может делать пешком по 5 км/ч, а на веслах по 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

1247. Прямо над центром круговой площадки радиуса R нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка. (Степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

1248. На отрезке длиной l, соединяющем два источника света силы I_1 и I_2, найти наименее освещенную точку.

1249. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (т. е. чтобы угол зрения был наибольшим)?

1250. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой F. Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против сдвигающей силы. Коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен k. Под каким углом φ к горизонту

надо приложить силу F, чтобы величина ее оказалась наимен
Определить наименьшую величину сдвигающей силы.

1251. Скорость течения воды по круглой трубе прямо пр
циональна так называемому гидравлическому радиусу R, в
ляемому по формуле $R = \frac{S}{p}$, где S – площадь сечения потока
в трубе, а p – смоченный (подводный) периметр сечения
Степень заполнения трубы водой характеризуется централ
углом, опирающимся на горизонтальную поверхность теку
воды. При какой степени заполнения трубы скорость теч
воды будет наибольшей? (Корни получающегося при реш
задачи трансцендентного уравнения найти графически.)

1252. На странице книги печатный текст должен зани
S квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля дол
быть по a см, правое и левое – по b см. Если принимать во
мание только экономию бумаги, то какими должны быть
более выгодные размеры страницы?

1253*. Коническая воронка, радиус основания которо
а высота H, наполнена водой. В воронку опущен тяжелый
Каким должен быть радиус шара, чтобы объем воды, вытес
ной из воронки погруженной частью шара, был наибольши

1254. Вершина параболы лежит на окружности радиуса
ось параболы направлена по диаметру. Каков должен быт
раметр параболы, чтобы площадь сегмента, ограниченного
раболой и ее общей с окружностью хордой, была наиболь
[Площадь симметричного параболического сегмента равна д
третям произведения его основания на «стрелку» (высоту).]

1255. Конус, радиус основания которого R, а высота H,
ресечен плоскостью, параллельной образующей. Каково дол
быть расстояние между линией пересечения этой плоскос
плоскостью основания конуса и центром основания конуса,
того чтобы площадь сечения была наибольшей? (См. пред
щую задачу.)

1256. Для какой точки P параболы $y^2 = 2px$ отрезок норм
в P, расположенный внутри кривой, имеет наименьшую длину

1257. Показать, что касательная к эллипсу, отрезок котор
между осями имеет наименьшую длину, делится в точке ка
ния на две части, соответственно равные полуосям эллипса.

1258. Доказать, что в эллипсе расстояние от центра до
бой нормали не превосходит разности полуосей. (Удобно
пользоваться параметрическим заданием эллипса.)

1259. В прямоугольной системе координат xOy даны точка (a, b) и кривая $y = f(x)$. Показать, что расстояние между постоянной точкой (a, b) и переменной $(x, f(x))$ может достигнуть экстремума только в направлении нормали к кривой $y = f(x)$.

Первообразной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции: $F'(x) = f(x)$.

В задачах 1260–1262 показать (при помощи дифференцирования и без него), что данные функции являются первообразными одной и той же функции.

1260. $y = \ln ax$ и $y = \ln x$.

1261. $y = 2\sin^2 x$ и $y = -\cos 2x$.

1262. $y = \left(e^x + e^{-x}\right)^2$ и $y = \left(e^x - e^{-x}\right)^2$.

1263*. Показать, что функция

$$y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

есть константа (т. е. не зависит от x). Найти значение этой константы.

1264. Показать, что функция $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ есть константа при $x \geq 1$. Найти значение этой константы.

1265. Показать, что функция

$$y = \arccos\frac{a\cos x + b}{a + b\cos x} - 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

где $0 < b \leq a$, есть константа при $x \geq 0$. Найти значение этой константы.

1266. Убедиться в том, что функции $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ и $e^x \operatorname{ch} x$ отличаются одна от другой на постоянную величину. Показать, что каждая из данных функций является первообразной для функции e^{2x}.

§ 3. Применение второй производной

Экстремумы

В задачах 1267–1275 найти экстремумы данных фун[кций], пользуясь второй производной.

1267. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x \quad (a > 0)$.

1268. $y = x^2(a - x)^2$. 1269. $y = x + \frac{a^2}{x} \quad (a > 0)$.

1270. $y = x + \sqrt{1 - x}$. 1271. $y = x\sqrt{2 - x^2}$.

1272. $y = \operatorname{ch} ax$. 1273. $y = x^2 e^{-x}$.

1274. $y = \frac{x}{\ln x}$. 1275. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1276. При каком значении a функция $f(x) = a\sin$ … $+\frac{1}{3}\sin 3x$ имеет экстремум при $x = \frac{\pi}{3}$? Будет ли это макс[имум] или минимум?

1277. Найти значения a и b, при которых фун[кция] $y = a\ln x + bx^2 + x$ имеет экстремумы в точках $x_1 = 1$ и x_2 … Показать, что при этих значениях a и b данная функция и[меет] минимум в точке x_1 и максимум в точке x_2.

Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

1278. Выяснить, выпукла или вогнута линия $y = x^5 -$ … $-15x^2 + 30$ в окрестностях точек $(1, 11)$ и $(3, 3)$.

1279. Выяснить, выпукла или вогнута линия $y = \operatorname{arc}$… в окрестностях точек $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$.

1280. Выяснить, выпукла или вогнута линия $y = x^{\ldots}$ в окрестностях точек $(1, 0)$ и $\left(\frac{1}{e^2}, -\frac{2}{e^4}\right)$.

1281. Показать, что график функции $y = x \operatorname{arctg} x$ везд[е во]гнутый.

1282. Показать, что график функции $y = \ln(x^2 - 1)$ … выпуклый.

1283. Доказать, что если график функции везде выпуклый или везде вогнутый, то эта функция на может иметь более одного экстремума.

1284. Пусть $P(x)$ – многочлен с положительными коэффициентами и четными показателями степеней. Показать, что график функции $y = P(x) + ax + b$ везде вогнутый.

1285. Линии $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ вогнуты на интервале (a, b). Доказать, что на данном интервале: а) линия $y = \varphi(x) + \psi(x)$ вогнута; б) если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и имеют общую точку минимума, то линия $y = \varphi(x)\psi(x)$ вогнута.

1286. Выяснить вид графика функции, если известно, что в интервале (a, b):

1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' < 0$; 2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$;

3) $y < 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$; 4) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.

В задачах 1287–1300 найти точки перегиба и интервалы вогнутости и выпуклости графиков данных функций.

1287. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. 1288. $y = (x + 1)^4 + e^x$.

1289. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

1290. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$. 1291. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.

1292. $y = (x + 2)^6 + 2x + 2$. 1293. $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2} \quad (a > 0)$.

1294. $y = a - \sqrt[3]{x - b}$. 1295. $y = e^{\sin x} \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

1296. $y = \ln(1 + x^2)$. 1297. $y = \frac{a}{x}\ln\frac{x}{a} \quad (a > 0)$.

1298. $y = a - \sqrt[5]{(x - b)^2}$. 1299. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

1300. $y = x^4(12\ln x - 7)$.

1301. Показать, что линия $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

1302. Показать, что точки перегиба линии $y = x\sin x$ лежат на линии $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

1303. Показать, что точки перегиба линий $y = \frac{\sin x}{x}$ на линии $y^2\left(4 + x^4\right) = 4$.

1304. Убедиться в том, что графики функций $y = \pm$ $y = e^{-x}\sin x$ (кривая затухающих колебаний) имеют касательные в точках перегиба линии $y = e^{-x}\sin x$.

1305. При каких значениях a и b точка $(1, 3)$ служ кой перегиба линии $y = ax^3 + bx^2$?

1306. Выбрать α и β так, чтобы линия $x^2y + \alpha x + \beta$ имела точку $A(2; 2{,}5)$ точкой перегиба. Какие еще точки гиба будет она иметь?

1307. При каких значениях a график функции $y = e^x +$ имеет точки перегиба?

1308. Доказать, что абсцисса точки перегиба графика ции не может совпадать с точкой экстремума этой функци

1309. Доказать, что у любой дважды дифференци функции, между двумя точками экстремума лежит по кра мере одна абсцисса точки перегиба графика функции.

1310. На примере функции $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ рить, что между абсциссами точек перегиба графика фу может и не быть точек экстремума (ср. с предыдущей зада

1311. По графику функции (рис. 17) выяснить вид граф ее первой и второй производных.

1312. То же сделать по графику функции (рис. 18).

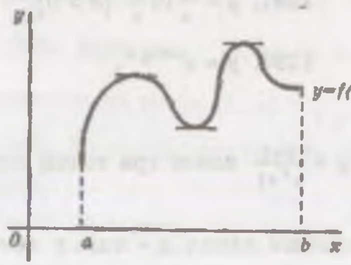

Рис. 17

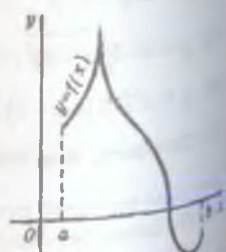

Рис. 18

Рис. 19

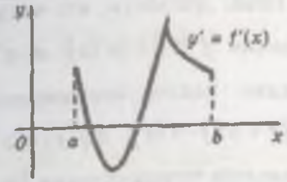

Рис. 20

1313. Выяснить вид графика функции по данному графику ее производной (рис. 19).

1314. Выяснить вид графика функции по данному графику ее производной (рис. 20).

1315. Линия задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Убедиться в том, что значениям t, при которых выражение $\frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi'}$ меняет знак (штрихом обозначено дифференцирование по t), а $\varphi'(t) \neq 0$, соответствуют точки перегиба линии.

1316. Найти точки перегиба линии $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

1317. Найти точки перегиба линии $x = e^t$, $y = \sin t$.

§ 4. Дополнительные вопросы. Решение уравнений

Формулы Коши и правило Лопиталя

1318. Написать формулу Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $\varphi(x) = \ln x$ на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b$.

1319. Написать формулу Коши для функций $f(x) = e^{2x}$ и $\varphi(x) = 1 + e^x$ на отрезке $[a, b]$.

1320. Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x) = x^3$ и $\varphi(x) = x^2 + 1$ на отрезке $[1, 2]$.

1321. Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x) = \sin x$ и $\varphi(x) = x + \cos x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1322. Доказать, что если на отрезке $[a, b]$ имеет место соотношение $|f'(x)| \geq |\varphi'(x)|$ и $\varphi'(x)$ не обращается в нуль, то справедливо также соотношение $|\Delta f(x)| \geq |\Delta\varphi(x)|$, где $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$, а x и $x+\Delta x$ – произвольные точки отрезка $[a, b]$.

1323. Доказать, что на отрезке $\left[x, \frac{1}{2}\right]$ $(x \geq 0)$ приращение функции $y = \ln\left(1 + x^2\right)$ меньше приращения функции $y = \operatorname{arctg} x$, на отрезке $\left[\frac{1}{2}, x\right]$ – наоборот: $\Delta \operatorname{arctg} x < \Delta \ln(1+x^2)$. Пользуясь последним соотношением, показать, что на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $\operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right) \geq \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

В задачах 1324–1364 найти пределы.

1324. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$. **1325.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x}$.

1326. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$. **1327.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$.

1328. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. **1329.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$.

1330. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$. **1331.** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

1332. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$. **1333.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$.

1334. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. **1335.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$.

1336. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x\sqrt{1 - x^2}}$. **1337.** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln\left(e^x - e^a\right)}$.

1338. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. **1339.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$.

1340. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}$. **1341.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 x}$.

1342. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)^4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6 \sin x - 6x + x^3}$.

1343. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$. **1344.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$.

1345. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(1 - x) + \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}$. **1346.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^n e^{-x}\right)$.

1347. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x\right]$. **1348.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x \sin \frac{a}{x}\right]$.

1349. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right]$. **1350.** $\lim\limits_{\varphi \to a} \left[\left(a^2 - \varphi^2\right) \operatorname{tg} \frac{\pi\varphi}{2a}\right]$.

1351. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$. **1352.** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

1353. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2} \ln(1 - x)}$. **1354.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{(a + x)(b + x)(c + x)} - x\right]$.

1355. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$. **1356.** $\lim\limits_{x \to 0} \left[x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right]$.

1357. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$. **1358.** $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$.

1359. $\lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{1}{\ln\left(e^x - 1\right)}}$. **1360.** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1361. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$. **1362.** $\lim\limits_{x \to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

1363. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$. **1364.** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\ln(1 + x)^{1 + x}}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right]$.

1365. Проверить, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ существует, но не может быть вычислен про правилу Лопиталя.

1366. Значение какой функции (при достаточно больших значениях x) больше: $a^x x^a$ или x^x?

1367. Значения какой функции (при достаточно больших значениях x) больше: $f(x)$ или $\ln f(x)$, при условии, что $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

1368. Пусть $x \to 0$. Доказать, что $e - (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ – бесконечно малая первого порядка относительно x.

1369. Пусть $x \to 0$. Доказать, что $\ln(1 + x) - e \ln \ln(e + x)$ – бесконечно малая второго порядка относительно x.

…0. К окружности радиуса r про…на касательная в точке A (ри…) и на ней отложен отрезок AN …ина которого равна длине дуг…M. Прямая MN пересекает про…жение диаметра AO в точке B. …новить, что

$$OB = \frac{r(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sin\alpha - \alpha},$$

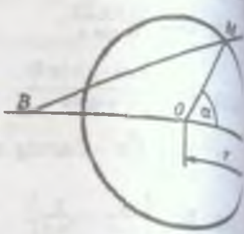

Рис. 21

где – радианная мера центрального угла, соответству… дуг…M, и показать, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} OB = 2r$.

…симптотическое изменение функций и асимптоты линий

…71. Проверить, исходя непосредственно из определе… что…ямая $y = 2x+1$ есть асимптота линии $y = \frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$.

…72. Проверить, исходя непосредственно из определе… что…ямая $x+y=0$ есть асимптота линии $x^2y+xy^2=1$.

…73. Доказать, что линии $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ и $y=\frac{x^2}{x-1}$ аси… то…ски приближаются друг к другу при $x\to\pm\infty$.

…74. Доказать, что функции $f(x)=\sqrt{x^6+2x^4+7x^2+1}$ … φ(… x^3+x асимптотически равны друг другу при $x\to$… Во…льзоваться этим обстоятельством и вычислить при… же… $f(115)$ и $f(120)$. Какую погрешность сделаем, пола… $f(…)=\varphi(100)$?

…задачах 1375–1391 найти асимптоты данных линий.

…75. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. 1376. $xy=a$.

…77. $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$. 1378. $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$.

…79. $2y(x+1)^2=x^3$. 1380. $y^3=a^3-x^3$.

…81. $y^3=6x^2+x^3$. 1382. $y^2(x^2+1)=x^2(x^2-1)$.

1383. $xy^2+x^2y=a^3$.

1384. $y(x^2-3bx+2b^2)=x^3-3ax^2+a^3$.

1385. $(y+x+1)^2=x^2+1$. 1386. $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$.

1387. $y=xe^x$. 1388. $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

1389. $y=x\operatorname{arcsec}x$. 1390. $y=2x+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.

1391. $y=\frac{xf(x)+a}{f(x)}$, где $f(x)$ – многочлен $(a\neq 0)$.

1392. Линия задана параметрически уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Доказать, что асимптоты, не параллельные координатным осям, могут быть только при тех значениях $t=t_0$, при которых одновременно

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty \text{ и } \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\infty.$$

При этом, если уравнение асимптоты есть $y=ax+b$, то

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)},\quad b=\lim_{t\to t_0}\left[\psi(t)-a\varphi(t)\right].$$

Как найти асимптоты, параллельные координатным осям?

1393. Найти асимптоты линии $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{t}{t+1}$.

1394. Найти асимптоты линии $x=\frac{2e^t}{t-1}$, $y=\frac{te^t}{t-1}$.

1395. Найти асимптоты линии $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$.

1396. Найти асимптоты декартова листа $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

1397. Найти асимптоты линии $x=\frac{t-8}{t^2-4}$, $y=\frac{3}{t(t^2-4)}$.

Общее исследование функций и линий

В задачах 1398–1464 провести полное исследование данных функций и начертить их графики.

1398. $y=\frac{x}{1+x^2}$. 1399. $y=\frac{1}{1-x^2}$. 1400. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1401. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

1402. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

1403. $y = \left(x^2 - 1\right)^3$.

1404. $y = 32x^2\left(x^2 - 1\right)^3$.

1405. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

1406. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

1407. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1408. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.

1409. $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1410. $y(x - 1) = x^3$.

1411. $y\left(x^3 - 1\right) = x^4$.

1412. $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^3}$.

1413. $y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

1414. $xy = \left(x^2 - 1\right)(x - 2)$.

1415. $(y - x)x^4 + 8 = 0$.

1416. $y = \frac{x}{e^x}$.

1417. $y = x^2e^{-x}$.

1418. $y = \frac{e^x}{x}$.

1419. $y = x - \ln(x + 1)$.

1420. $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

1421. $y = x^2e^{-x^2}$.

1422. $y = x^3e^{-x}$.

1423. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1424. $y = \frac{1}{e^x-1}$.

1425. $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

1426. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

1427. $y = x + \sin x$.

1428. $y = x\sin x$.

1429. $y = \ln\cos x$.

1430. $y = \cos x - \ln\cos x$.

1431. $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$.

1432. $y = \frac{1}{e^{x^2-4x+3}}$ (без отыскания точек перегиба).

1433. $y = e^{\sin x} - \sin x$ (без отыскания точек перегиба).

1434. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

1435. $y^3 = x^2\left(x^2 - 4\right)^3$.

1436. $(3y + x)^3 = 27x$.

1437. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$

1438. $y = (x - 1)^{\frac{2}{3}}(x + 1)^3$.

1439. $y^3 = 6x^2 - x^3$.

1440. $(y-x)^2 = x^5$.

1441. $\left(y-x^2\right)^2 = x^5$.

1442. $y^2 = x^3+1$.

1443. $y^2 = x^3 - x$.

1444. $y^2 = x(x-1)^2$.

1445. $y^2 = x^2(x-1)$.

1446. $y^2 = \frac{x^3-2}{3x}$.

1447. $x^2y + xy^2 = 2$.

1448. $y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}$ (строфоида) $(a>0)$.

1449. $9y^2 = 4x^3 - x^4$.

1450. $25y^2 = x^2\left(4-x^2\right)^3$.

1451. $y^2 = x^2 - x^4$.

1452. $x^2y^2 = 4(x-1)$.

1453. $y^2(2a-x) = x^3$ (циссоида) $(a>0)$.

1454. $x^2y^2 = (x-1)(x-2)$.

1455. $x^2y^2 = (a+x)^3(a-x)$ (конхоида) $(a>0)$.

1456. $16y^2 = \left(x^2-4\right)^2\left(1-x^2\right)$.

1457. $y^3 = \left(1-x^2\right)^3$.

1458. $y^2x^4 = \left(x^2-1\right)^3$.

1459. $y^2 = 2exe^{-2x}$.

1460. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

1461. $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

1462. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$.

1463. $y = 1 - xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$ при $x \neq 0$, $y = 1$ при $x = 0$.

1464. $y = x^2 - 4|x| + 3$.

В задачах 1465–1469 исследовать функции, заданные параметрически, и начертить их графики.

1465. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.

1466. $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t$.

1467. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

1468. $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

1469. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ (кардиоида).

В задачах 70–1477 исследовать линии, уравнения рых заданы в ярных координатах.

1470. $\rho = a \, 3\varphi$ (трехлепестковая роза).

1471. $\rho = a\varphi$.

1472. $\rho = a + \operatorname{tg}\varphi)$.

1473. $\rho = a + \cos\varphi)$ (кардиоида).

1474. $\rho = a + b\cos\varphi)$ $(a > 0,\ b > 1)$.

1475. $\rho = \sqrt{\ }$ (жезл). **1476.** $\rho = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{\pi}$.

1477. $\rho = \sqrt{\ t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1 - t^2}$.

В задачах 78–1481 исследовать и построить линии, варительно приведя их уравнения к полярным координатам.

1478. $\left(x^2 + \right)^3 = 4a^2x^2y^2$. **1479.** $\left(x^2 + y^2\right)x = a^2y$.

1480. $x^4 + = a^2\left(x^2 + y^2\right)$.

1481. $\left(x^2 + \right)\left(x^2 - y^2\right)^2 = 4x^2y^2$.

Решение уравнений

1482. Проверить, что уравнение $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ имеет один простой корень $x_1 = -3$ и один двукратный корень $x_2 = 2$.

1483. Проверить, что уравнение $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ имеет два двукратных корня $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

1484. Убедиться в том, что уравнение $x\arcsin x = 0$ имеет только один действительный корень $x = 0$ и притом кратный.

1485. Показать, что корни уравнения $x\sin x = 0$ имеют $y = kx$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, причем значению $k = 0$ соответствует двукратный корень. Какова кратность остальных корней

1486. Показать, что уравнение $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет единственный действительный простой корень, принадлежащий интервалу $(0, 1)$ и найти этот корень с точностью до 0,1, пользуясь методом проб.

1487. Показать, что уравнение $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ имеет два (и только два) действительных простых корня, принадлежащих соответственно интервалам $(-1, 0)$ и $(0, 1)$. С помощью метода проб найти эти корни с точностью до 0,1.

1488. Показать, что уравнение $f(x) = a \neq 0$, где $f(x)$ – многочлен с положительными коэффициентами, показатели степеней всех членов которого нечетны, имеет один и только один действительный корень (который может быть и кратным). Рассмотреть случай, когда $a = 0$. Найти с точностью до 0,01 корень уравнения $x^3 + 3x - 1 = 0$, комбинируя метод проб с методом хорд.

1489. Доказать теорему: для того чтобы уравнение $x^3 + px + q = 0$ имело три простых действительных корня, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты p и q удовлетворяли неравенству $4p^3 + 27q^2 < 0$. Найти с точностью до 0,01 все корни уравнения $x^3 - 9x + 2 = 0$, комбинируя метод проб с методом хорд.

1490. Показать, что уравнение $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ имеет два (и только два) действительных простых корня, принадлежащих соответственно интервалам $(0, 1)$ и $(1, 2)$. Комбинируя метод хорд с методом касательных, найти эти корни с точностью до 0,01.

1491. Показать, что уравнение $x^5 + 5x + 1 = 0$ имеет единственный действительный простой корень, принадлежащий интервалу $(-1, 0)$, и найти этот корень с точностью до 0,01, комбинируя метод хорд с методом касательных.

В задачах 1492–1497 приближенные значения корней уравнения следует считать комбинированием трех методов: метода проб, метода хорд и метода касательных. (При необходимости следует пользоваться таблицами значений функций, входящих в уравнение.)

1492. Показать, что уравнение $xe^x = 2$ имеет только один действительный корень, который принадлежит интервалу $(0, 1)$, и найти этот корень с точностью до 0,01.

1493. Показать, что уравнение $x\ln x = a$ не имеет вовсе действительных корней при $a < -\frac{1}{e}$, имеет один действительный двукратный корень при $a = -\frac{1}{e}$, два действительных простых

корня при $-\frac{1}{e} < a < 0$ и один действительный простой ко
при $a \geq 0$. Найти корень уравнения $x \ln x = 0{,}8$ с точность
0,01.

1494. Показать, что так называемое уравнение Кеп
$x = \varepsilon \sin x + a$, где $0 < \varepsilon < 1$, имеет один простой действи
ный корень, и найти этот корень с точностью до 0,001
$\varepsilon = 0{,}538$ и $a = 1$.

1495. Показать, что уравнение $a^x = ax$ при $a > 1$ всегда им
два (и только два) действительных и положительных кор
причем один корень равен 1, а второй корень меньше, бол
или равен 1 в зависимости от того, будет ли a больше, мен
или равно e. Найти с точностью до 0,001 второй корень эт
уравнения при $a = 3$.

1496. Показать, что уравнение $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, где $a \neq$
имеет один действительный корень. Найти с точностью до 0,0
корень этого уравнения при $a = 1$.

1497. При каком основании a системы логарифмов суще
вуют числа, равные своим логарифмам? Сколько таких чи
может быть? Найти такое число (с точностью до 0,01) п
$a = \frac{1}{2}$?

§ 5. Формула Тейлора и ее применение

Формула Тейлора для многочленов

1498. Разложить многочлен $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ по степ
ням двучлена $x - 4$.

1499. Разложить многочлен $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеня
двучлена $x + 1$.

1500. Разложить многочлен $x^{10} - 3x^5 + 1$ по степеням дв
члена $x - 1$.

1501. Функцию $f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)^3$ разложить по степен
x, пользуясь формулой Тейлора.

1502. $f(x)$ – многочлен четвертой степени. Зная,
$f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{IV}(2) = 24$.
числить $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

Формула Тейлора

1503. Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции
$= \frac{1}{x}$ при $x_0 = -1$.

1504. Написать формулу Тейлора (формулу Маклорена) n-го
порядка для функции $y = xe^x$ при $x_0 = 0$.

1505. Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции
$y = \sqrt{x}$ при $x_0 = 4$.

1506. Написать формулу Тейлора $2n$-го порядка для функ-
ции $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ при $x_0 = 0$.

1507. Написать формулу Тейлора n-го порядка для функции
$y = x^5 \ln x$ при $x_0 = 1$.

1508. Написать формулу Тейлора $2n$-го порядка для функ-
ции $y = \sin^2 x$ при $x_0 = 0$.

1509. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции
$y = \frac{x}{x-1}$ при $x_0 = 2$ и построить графики данной функции и ее
многочлена Тейлора 3-й степени.

1510. Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции
$y = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = 0$ и построить графики данной функции и ее
многочлена Тейлора 2-й степени.

1511. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции
$y = \arcsin x$ при $x_0 = 0$ и построить графики данной функции и
ее многочлена Тейлора 3-й степени.

1512. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции
$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x_0 = 1$ и построить графики данной функции и ее
многочлена Тейлора 3-й степени.

1513*. Доказать, что число θ в остаточном члене формулы
Тейлора 1-го порядка

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h)$$

стремится к $\frac{1}{3}$ при $h \to 0$, если $f'''(x)$ непрерывна при $x = a$ и
$f'''(a) \neq 0$.

Некоторые применения формулы Тейло

В задачах 1514–1519 выяснить поведение данных фу в указанных точках.

1514. $y = 2x^6 - x^3 + 3$ в точке $x = 0$.

1515. $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ в точке $x = 0$.

1516. $y = 2\cos x + x^2$ в точке $x = 0$.

1517. $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ в точке $x = 1$.

1518. $y = 6\sin x + x^2$ в точке $x = 0$.

1519. $y = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4$ в точке $x = 0$.

1520. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. Найти первые три разложения по формуле Тейлора при $x_0 = 1$. Подсчитать ближенно $f(1{,}03)$.

1521. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Найти первые три разложения по формуле Тейлора при $x_0 = 2$. Подсчитать ближенно $f(2{,}02)$ и $f(1{,}97)$.

1522. $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Найти первые три члена р жения $f(x)$ по степеням $x - 1$ и найти приближенно $f(1{,}00$

1523. $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Найти первые три члена разл ния по степеням $x - 2$. Вычислить приближенно $f(2{,}1)$ числить $f(2{,}1)$ точно и найти абсолютную и относител погрешности.

1524. Проверить, что при вычислении значений функци при $0 < x \le \frac{1}{2}$ по приближенной формуле $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ допускаемая погрешность меньше 0,01. Пользуясь этим, н $\sqrt{e}$ с тремя верными цифрами.

1525. Пользуясь приближенной формулой $e^x \approx 1 + x$ найти $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ и оценить погрешность.

1526. Проверить, что для углов, меньших 28°, погрешность, которая получится, если вместо $\sin x$ взять выражение $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, будет меньше 0,000001. Пользуясь этим, вычислить $\sin 20^\circ$ с шестью верными цифрами.

1527. Найти $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,001. Убедиться в том, что для достижения указанной точности достаточно взять соответствующую формулу Тейлора 2-го порядка.

1528. Пользуясь приближенной формулой

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

найти $\ln 1{,}5$ и оценить погрешность.

§ 6. Кривизна

В задачах 1529–1536 найти кривизну данных линий.

1529. Гиперболы $xy = 4$ в точке $(2, 2)$.

1530. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в вершинах.

1531. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ в начале координат.

1532. $y^2 = 8x$ в точке $\left(\frac{9}{8}, 3\right)$.

1533. $y = \ln x$ в точке $(1, 0)$.

1534. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ в начале координат.

1535. $y = \sin x$ в точках, соответствующих экстремальным значениям функции.

1536. Декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ в точке $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$.

В задачах 1537–1542 найти кривизну данных линий в произвольной точке (x, y).

1537. $y = x^3$. **1538.** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **1539.** $y = \ln \sec x$.

1540. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **1541.** $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$. **1542.** $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

В задачах 1543–1549 найти кривизну данных линий.

1543. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ при $t = 1$.

1544. $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t$ при $t = t_1$.

1545. $x = a(\cos t + t\sin t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t)$ при $t = \frac{\pi}{2}$.

1546. $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ \ y = 2a\sin t - a\sin 2t$ в прои-вольной точке.

1547. $\rho = a^{\varphi}$ в точке $\rho = 1,\ \varphi = 0$.

1548. $\rho = a\varphi$ в произвольной точке.

1549. $\rho = a\varphi^k$ в произвольной точке.

1550. Найти радиус кривизны эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в той т-точке, в которой отрезок касательной между осями коорди-делится точкой касания пополам.

1551. Показать, что радиус кривизны параболы равен удв-енному отрезку нормали, заключенному между точками пере-чения нормали с параболой и ее директрисой.

1552. Показать, что радиус кривизны циклоиды в любой точке вдвое больше длины нормали в той же точке.

1553. Показать, что радиус кривизны лемниск-$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ обратно пропорционален соответствующему п-лярному радиусу.

1554. Найти окружность кривизны параболы $y = x^2$ в точ-$(1, 1)$.

1555. Найти окружность кривизны гиперболы $xy = 1$ в т-ке $(1, 1)$.

1556. Найти окружность кривизны линии $y = e^x$ в точ-$(0, 1)$.

1557. Найти окружность кривизны линии $y = \operatorname{tg} x$ в точ-$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

1558. Найти окружность кривизны циссоиды $\left(x^2 + y^2\right)x -2ay^2 = 0$ в точке (a, a).

В задачах 1559–1562 найти вершины (точки, в котор-кривизна принимает экстремальное значение) данных лин-

1559. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. **1560.** $y = \ln x$. **1561.** $y = e^x$.

1562. $x = a(3\cos t + \cos 3t),\ \ y = a(3\sin t + \sin 3t)$.

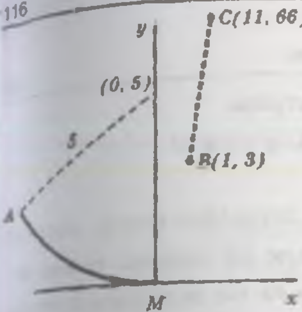

Рис. 22

1563. Найти наибольшее значение радиуса кривизны линии $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

1564. Показать, что кривизна в точке P линии $y = f(x)$ равна $\left|y''\cos^3\alpha\right|$, где α – угол, образуемый касательной к линии в точке P с положительным направлением абсцисс.

1565. Показать, что кривизну линии в произвольной точке можно представить выражением $k = \left|\frac{d\sin\alpha}{dx}\right|$, где α имеет то же значение, что и в предыдущей задаче.

1566. Функция $f(x)$ определена так: $f(x) = x^3$ в интервале $-\infty < x \le 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ в интервале $1 < x < +\infty$. Каковы должны быть a, b, c, для того чтобы линия $y = f(x)$ имела везде непрерывную кривизну.

1567. Даны (рис. 22): дуга AM окружности с радиусом, равным 5, и с центром в точке $(0, 5)$ и отрезок BC прямой, соединяющей точки $B(1, 3)$ и $C(11, 66)$. Требуется точку M соединить с точкой B дугой параболы так, чтобы линия $AMBC$ имела везде непрерывную кривизну. Найти уравнение искомой параболы (взять параболу 5-го порядка).

В задачах 1568–1574 найти координаты центра кривизны и уравнение эволюты для данных линий.

1568. Парабола n-го порядка $y = x^n$.

1569. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1570. Астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

1571. Полукубическая парабола $y^3 = ax^2$.

1572. Парабола $x = 3t,\ \ y = t^2 - 6$.

1573. Циссоида $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

1574. Линия $x = a\left(1 + \cos^2 t\right)\sin t,\ \ y = a\sin^2 t\cos t$.

1575. Показать, что эволюта трактрисы

$$x = -a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right),\quad y = a\sin t$$

есть цепная линия.

1576. Показать, что эволюта логарифмической сп... $\rho = a^{\varphi}$ представляет собой точно такую же спираль, толь... вернутую на некоторый угол. Можно ли так подобрать a, ч... эволюта совпала с самой спиралью?

1577. Показать, что любую эвольвенту окружности м... получить путем поворота одной из них на соответству... угол.

1578. Показать, что расстояние некоторой точки цикл... от центра кривизны соответствующей точки эволюты р... удвоенному диаметру производящего круга.

1579. Эволютой параболы $y^2 = 4px$ служит полукуби... парабола $py^2 = \frac{4}{27}(x - 2p)^3$. Найти длину дуги полукуби... параболы от острия до точки (x, y).

1580. Найти длину эволюты эллипса, полуоси которо... ны a и b.

1581. Показать, что эволютой астроиды $x = a...$ $y = a\sin^3 t$ является астроида вдвое больших линейных р... ров, повернутая на 45°. Воспользовавшись этим, вычи... длину дуги данной астроиды.

1582*. Показать, что эволюта кардиоиды $x = 2a...$ $-a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ есть также кардиоида, под... данной. Воспользовавшись этим, найти длину дуги всей... диоиды.

1583*. Доказать теорему: если кривизна дуги некоторой... нии либо только возрастает, либо только убывает, то окру... сти кривизны, соответствующие различным точкам этой д... не пересекаются и лежат одна внутри другой.

Глава V

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл и его простейшие свойства

1592. Выразить с помощью интеграла площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

1) осями координат, прямой $x = 3$ и параболой $y = x^2 + 1$;

2) осью абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и линией $y = e^x + 2$ $(b > a)$;

3) осью абсцисс и дугой синусоиды $y = \sin x$, соответствующей первому полупериоду;

4) параболами $y = x^2$ и $y = 8 - x^2$;

5) параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;

6) линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.

1593. Фигура ограничена осью абсцисс и прямыми $y = 2x$, $x = 4$, $x = 6$. Найти площади входящих и выходящих n-ступенчатых фигур («лестниц»), разбивая отрезок $[4, 6]$ на равные части. Убедиться, что оба полученных выражения стремятся при неограниченном возрастании n к одному и тому же пределу S – площади фигуры. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене данной площади площадями входящих и выходящих n-ступенчатых «лестниц».

1594. Криволинейная трапеция с основанием $[2, 3]$ ограничена параболой $y = x^2$. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене данной площади площадью входящей 10-ступенчатой «лестницы».

корость нагрева

$\psi(t)$. На сколь

ента T_0 до моме

- суммой, б) точ

Переменный то

$= I(t)$. Выразит

) количество Q

ечение проводи

Напряжение E

времени $E = \varphi($

$= \psi(t)$. Выразит

ента T_1: а) приб

лектрическая це

10 мин напряж

0 В до $E = 40$

личество электр

Напряжение эле

ь на $a = 1{,}5$ В в

120 В; сопротив

мин. Индуктивно

В цепь равноме

ряжение равно

тигает 120 В. Со

тью и емкостью

одной минуты.

Прямоугольная с

й, имеет основа

воды на всю ст

точно – с помощ

а) Вычислить си

давит на одну

ьника. Длина

ить горизонталь

лы давления на

Вычисление интегралов суммированием

1616. Непосредственным суммированием и последую переходом к пределу вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^x dx$. (Инте интегрирования делить на n равных частей.)

1617. Непосредственным суммированием и последую переходом к пределу вычислить $\int\limits_a^b x^k dx$, где k – целое поло тельное число (интервал интегрирования делить на части чтобы абсциссы точек деления образовывали геометриче прогрессию).

1618. При помощи формулы, полученной в предыдущ даче, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{10} x\,dx$; 2) $\int\limits_{a-2}^{a+2} x\,dx$; 3) $\int\limits_{a/2}^{a} x^2 dx$; 4) $\int\limits_a^{2a} \frac{b^2x^3}{a^2} dx$;

5) $\int\limits_0^a (3x^2 - x + 1)dx$; 6) $\int\limits_0^m \frac{x^2+m^2}{m^2} dx$; 7) $\int\limits_1^{2,5} (2x+1)^2 d$

8) $\int\limits_a^b (x-a)(x-b)dx$; 9) $\int\limits_{-a}^0 \frac{(a+x)^2}{a} dx$; 10) $\int\limits_0^1 \left(\frac{ax-b}{a-b}\right)^2$

11) $\int\limits_0^2 x^3 dx$; 12) $\int\limits_1^3 \frac{x^4}{3} dx$; 13) $\int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\right) dx$.

1619*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}\right)$ при $k > 0$. Вычис приближенно $1^5 + 2^5 + \ldots + 100^5$.

1620. Непосредственным суммированием и послед переходом к пределу вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$. (Интерва тегрирования делить на части так, чтобы абсциссы точек ния образовывали геометрическую прогрессию.)

1621. Для интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ составить интегральную сумму, разбив интервал интегрирования на n равных частей. Сравнив с результатом предыдущей задачи, вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

1622*. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{an}\right)$ (a – целое число). Подсчитать приближенно $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{300}$.

1623*. Непосредственным суммированием и последующим переходом к пределу вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^a xe^x dx$; 2) $\int\limits_1^a \ln x\,dx$; 3) $\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x} dx$;

[В 1) разбивать интервал интегрирования на равные части, в 2) и 3) – как в задаче 1620.]

§ 2. Основные свойства определенного интеграла

Геометрическая интерпретация определенного интеграла

1624. Выразить при помощи интеграла площадь фигуры, ограниченной дугой синусоиды, соответствующей интервалу $0 \le x \le 2\pi$, и осью абсцисс.

1625. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y = x^3$ и прямой $y = x$.

1626. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = -x^2 + 6x - 3$.

1627. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3 - x$ и $y = x^4 - 1$.

Оценка интеграла

1628. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{10} \frac{x\,dx}{x^3+16}$ меньше чем $\frac{5}{6}$.

1629. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^2 e^{x^2-x}dx$ заключен меж[ду]

и $2e^2$.

В задачах 1630–1635 оценить интегралы.

1630. $\int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2dx}{x-1}$. **1631.** $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}dx$. **1632.** $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(1+\sin^2 x\right)$

1633. $\int\limits_{1/2}^{5/2} \frac{x}{1+x^2}dx$. **1634.** $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$. **1635.** $\int\limits_{1/e}^{e} x^2e^{-x^2}dx$

1636. Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов бол[ьше]:

1) $\int\limits_0^1 x^2dx$ или $\int\limits_0^1 x^3dx$; 2) $\int\limits_1^2 x^2dx$ или $\int\limits_1^2 x^3dx$?

1637. Выяснить, какой из интегралов больше:

1) $\int\limits_0^1 2^{x^2}dx$ или $\int\limits_0^1 2^{x^3}dx$; 2) $\int\limits_1^2 2^{x^2}dx$ или $\int\limits_1^2 2^{x^3}dx$;

3) $\int\limits_1^2 \ln x\,dx$ или $\int\limits_1^2 (\ln x)^2dx$; 4) $\int\limits_3^4 \ln x\,dx$ или $\int\limits_3^4 (\ln x)^2dx$?

1638. Доказать, что $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$, воспользовавш[ись не]равенством Коши–Буняковского

$$\left|\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right| \le \sqrt{\int\limits_a^b [f_1(x)]^2dx}\sqrt{\int\limits_a^b [f_2(x)]^2dx}.$$

Убедиться, что применение общего правила дает менее точ[ную] оценку.

1639. Доказать, исходя из геометрических соображ[ений,] следующие предложения:

а) если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ возрастает и и[меет] вогнутый график, то

$$(b-a)f(a) < \int\limits_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

б) если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ возрастает и имеет выпуклый график, то

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} < \int\limits_a^b f(x)dx < (b-a)f(b).$$

1640. Оценить интеграл $\int\limits_2^3 \frac{x^2dx}{1+x^2}$, пользуясь результатом задачи 1639.

1641. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$, пользуясь:

а) основной теоремой об оценке интеграла,

б) результатом задачи 1639,

в) неравенством Коши–Буняковского (см. задачу 1638).

Среднее значение функции

1642. Вычислить среднее значение линейной функции $y = kx+b$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Найти точку, в которой функция принимает это значение.

1643. Вычислить среднее значение квадратичной функции $y = ax^2$ на отрезке $[x_1, x_2]$. В скольких точках интервала функция принимает это значение?

1644. Вычислить среднее значение функции $y = 2x^2+3x+3$ на отрезке $[1, 4]$.

1645. Исходя из геометрических соображений, вычислить среднее значение функции $y = \sqrt{a^2-x^2}$ на отрезке $[-a, a]$.

1646. Исходя из геометрических соображений, указать среднее значение непрерывной нечетной функции на интервале, симметричном относительно начала координат.

1647. Сечение желоба имеет форму параболического сегмента. Основание его $a = 1$ м, глубина $h = 1{,}5$ м (см. рис. 23). Найти среднюю глубину желоба.

1648. Напряжение электрической цепи в течение минуты равномерно увеличивается от $E_0 = 100$ В до $E_1 = 120$ В. Найти среднюю силу тока за это время. Сопротивление цепи 10 Ом.

1649. Напряжение электрической цепи равномерно пад... убывая на 0,4 В в минуту. Начальное напряжение в цепи 10... Сопротивление в цепи 5 Ом. Найти среднюю мощность в те... ние первого часа работы.

Интеграл с переменным пределом

1650. Вычислить интегралы с переменным верхним преде...

1) $\int\limits_0^x x^2 dx$; 2) $\int\limits_a^x x^5 dx$; 3) $\int\limits_1^x \left(\frac{x^2}{5} - \frac{x^4}{4}\right) dx$.

1651. Скорость движения тела пропорциональна квадр... времени. Найти зависимость между пройденным расстоянием и временем t, если известно, что за первые 3 с тело про... 18 см, а движение началось в момент $t = 0$.

1652. Сила, действующая на материальную точку, меня... равномерно относительно пройденного пути. В начале пути... равнялась 100 Н, а когда точка переместилась на 10 м, с... возросла до 600 Н. Найти функцию, определяющую зави... мость работы от пути.

1653. Напряжение электрической цепи равномерно мен... ся. При $t = t_1$ оно равно E_1, при $t = t_2$ оно равно E_2. Сопрот... ление R постоянно, сомоиндукцией и емкостью пренебрег... Выразить работу тока как функцию времени t, прошедшего... начала опыта.

1654. Теплоемкость тела зависит от температуры ... $c = c_0 + \alpha t + \beta t^2$. Найти функцию, определяющую зависимос... количества тепла, полученного телом при нагревании от ... до t, от температуры t.

1655. Криволинейная трапеция ограничена парабол... $y = x^2$, осью абсцисс и подвижной ординатой. Найти значе... приращения ΔS и дифференциала dS площади трапеции ... $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

1656. Криволинейная трапеция ограничена лини... $y = \sqrt{x^2 + 16}$, осями координат и подвижной ординатой. ... значение дифференциала dS площади трапеции при $x = ...$ $\Delta x = 0{,}2$.

1657. Криволинейная трапеция ограничена линией $y = x^3$, осью абсцисс и подвижной ординатой. Найти значение приращения ΔS площади, ее дифференциала dS, абсолютную (α) и относительную $\left(\delta = \frac{\alpha}{\Delta S}\right)$ погрешности, возникающие при замене приращения дифференциалом, если $x = 4$, а Δx принимает значения 1; 0,1 и 0,01.

1658. Найти производную от функции $y = \int\limits_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2} dt$ при $x = 1$.

1659. Найти производную от функции $y = \int\limits_0^x \sin x\, dx$ при $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

1660. Чему равна производная от интеграла с переменным нижним и постоянным верхним пределом по нижнему пределу?

1661. Найти производную от функции $y = \int\limits_x^5 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ при $x = 0$ и $x = \frac{3}{4}$.

1662. Найти производную по x от функции $y = \int\limits_0^{2x} \frac{\sin x}{x} dx$.

1663. Найти производную по x от функции:

1) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x^2} \frac{\ln z}{z} dz$; 2) $\int\limits_{x^2}^{1} \ln x\, dx$.

1664*. Найти производную по x от функции $\int\limits_x^{2x} \ln^2 x\, dx$.

1665. Найти производную по x от функции y, заданной не-явно: $\int\limits_0^y e^t dt + \int\limits_0^x \cos t\, dt = 0$.

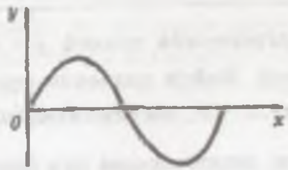

Рис. 24

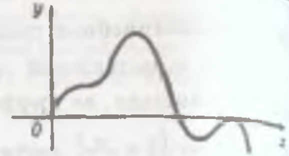

Рис. 25

1666. Найти производную по x от функции y, заданной ра-
раметрически:

1) $x = \int\limits_0^t \sin t\,dt$, $y = \int\limits_0^t \cos t\,dt$; 2) $x = \int\limits_1^{t^2} t\ln t\,dt$, $y = \int\limits_{t^2}^{1} t^2 \ln$

1667. Найти значение второй производной по z от функ

$y = \int\limits_0^{z^3} \frac{dx}{1+x^3}$ при $z = 1$.

1668. При каком значении x функция $I(x) = \int\limits_0^x xe^{-x^2}dx$ и

ет экстремум? Чему он равен?

1669. Найти кривизну в точке $(0, 0)$ линии, заданной у

нением: $y = \int\limits_0^x (1+t)\ln(1+t)\,dt$.

1670. Найти точки экстремумов и точки перегиба граф

функции $y = \int\limits_0^x \left(x^2 - 3x + 2\right)dx$. Построить график этой функц

1671. По графикам функций, данным на рис. 24 и 25, вы
нить вид графиков из первообразных.

Формула Ньютона–Лейбница

1672. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_4^1 \frac{dx}{x^3}$; 3) $\int\limits_1^9 3\sqrt{x}\,dx$; 4) $\int\limits_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$;

5) $\int\limits_4^9 \sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)dx$; 6) $\int\limits_1^2 \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)dx$; 7) $\int\limits_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{ax}}$;

8) $\int\limits_1^4 \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt$; 9) $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$ $(a > 0, b > 0)$; 10) $\int\limits_{z_0}^{z_1} \left(\sqrt{z} - 1\right)^2 dz$.

1673. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_0^\pi \cos x\,dx$

(объяснить геометрический смысл полученного результата);

3) $\int\limits_0^3 e^x dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1674. Функция $f(x)$ имеет равные значения в точках $x = a$ и $x = b$ и непрерывную производную. Чему равен $\int\limits_a^b f'(x)dx$?

1675. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ составляет с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{3}$ и в точке с абсциссой $x = b$ – угол $\frac{\pi}{4}$.

Вычислить $\int\limits_a^b f''(x)dx$ и $\int\limits_a^b f'(x)f''(x)dx$; $f''(x)$ предполагается непрерывной.

В задачах 1703–1780 найти интегралы, воспользо теоремой об инвариантности формул интегрирования.

1703. $\int \sin x \, d(\sin x)$.

1704. $\int \operatorname{tg}^3 x \, d(\operatorname{tg} x)$.

1705. $\int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$.

1706. $\int (x+1)^{15} dx$.

1707. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.

1708. $\int \frac{dx}{(a+bx)^c}$ $(c \neq 1)$.

1709. $\int \sqrt[3]{(8-3x)^6}\, dx$.

1710. $\int \sqrt{8-2x}\, dx$.

1711. $\int \frac{m}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} dx$.

1712. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$.

1713. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$.

1714. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2}\, dx$.

1715. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1716. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{4+x^5}}$.

1717. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

1718. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$.

1719. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$.

1720. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}$.

1721. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

1722. $\int \cos^3 x \sin 2x\, dx$.

1723. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

1724. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2\, dx}{1+x^2}$.

1725. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$.

1726. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

1727. $\int \cos 3x\, d(3x)$.

1728. $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$.

1729. $\int \cos 3x\, dx$.

1730. $\int (\cos\alpha - \cos 2x)\, dx$.

1731. $\int \sin(2x-3)\, dx$.

1732. $\int \cos(1-2x)\, dx$.

1733. $\int \left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2} dx$.

1734. $\int e^x \sin(e^x)\, dx$.

1735. $\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$.

1736. $\int \frac{d(\arcsin x)}{\arcsin x}$.

1737. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{x^2-3x+8}$.

Глава VI

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Простейшие приемы интегрирован

В задачах 1676–1702, воспользовавшись основной таб интегралов и простейшими правилами интегрирования, н интегралы.

1676. $\int \sqrt{x}\,dx$. 1676. $\int \sqrt[m]{x^n}\,dx$. 1678. $\int \frac{dx}{x^2}$.

1679. $\int 10^x\,dx$. 1680. $\int a^x e^x\,dx$. 1681. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

1682. $\int \frac{dh}{\sqrt{3gh}}$. 1683. $\int 3{,}4x^{-0{,}17}\,dx$. 1684. $\int (1-2u)du$

1685. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$. 1686. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$

1687. $\int \left(2x^{-1{,}2}+3x^{-0{,}8}-5x^{0{,}38}\right)dx$.

1688. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$. 1689. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

1690. $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 1691. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$. 1693. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$.

1694. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$. 1695. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$.

1696. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$. 1697. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$. 1698. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$

1699. $\int \frac{\left(1+2x^2\right)dx}{x^2\left(1+x^2\right)}$. 1700. $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x\left(1+x^2\right)}$.

1701. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$. 1702. $\int (\arcsin x+\arccos x)dx$.

1787. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}\,dx$. 1788. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$.

1789. $\int \frac{x^4}{1-x}\,dx$. 1790. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$.

В задачах 1791–1807 найти интегралы, использовав прием разложения подынтегрального выражения и прием выделения полного квадрата.

1791. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$. 1792. $\int \frac{dx}{x(x+1)}$. 1793. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$.

1794. $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)}$. 1795. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$. 1796. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

1797. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$. 1798. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$. 1799. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

1800. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$. 1801. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$. 1802. $\int \frac{dx}{x-x^2-2{,}5}$.

1803. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 1804. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$. 1805. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

1806. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$. 1807. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

В задачах 1808–1831 найти интегралы, использовав формулы тригонометрии для преобразования подынтегрального выражения.

1808. $\int \cos^2 x\,dx$. 1809. $\int \sin^2 x\,dx$. 1810. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1811. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$. 1812. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx$. 1813. $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,dx$.

1814. $\int \left(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x\right)dx$. 1815. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin x\cos x}$.

1816. $\int \cos x\sin 3x\,dx$. 1817. $\int \cos 2x\cos 3x\,dx$.

1818. $\int \sin 2x\sin 5x\,dx$. 1819. $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$.

1820. $\int \frac{dx}{\cos x}$. 1821. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}\,dx$. 1822. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$.

1823. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x}$. 1824. $\int \frac{\sin^3\alpha}{\sqrt{\cos\alpha}}\,d\alpha$. 1825. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1826. $\int \cos^3 x\,dx$. 1827. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. 1828. $\int \sin^5 x\,dx$.

1829. $\int \sin^4 x\,dx$. 1830. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. 1831. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

1738. $\int \frac{dx}{2x-1}$. **1739.** $\int \frac{dx}{cx+m}$. **1740.** $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

1741. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$. **1742.** $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$. **1743.** $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+a^2}$.

1744. $\int \operatorname{tg} x\,dx$. **1745.** $\int \operatorname{ctg} x\,dx$. **1746.** $\int \operatorname{tg} 3x\,dx$.

1747. $\int \operatorname{ctg}(2x+1)dx$. **1748.** $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$. **1749.** $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

1750. $\int \frac{(\ln x)^m}{x}\,dx$. **1751.** $\int e^{\sin x} d(\sin x)$.

1752. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. **1753.** $\int a^{3x}dx$. **1754.** $\int a^{-x}dx$

1755. $\int e^{-3x+1}dx$. **1756.** $\int e^{x^2}x\,dx$. **1757.** $\int e^{-x^3}x^2dx$

1758. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$. **1759.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$. **1760.** $\int \frac{dx}{1+9x^2}$.

1761. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **1762.** $\int \frac{dx}{2x^2+9}$. **1763.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

1764. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$. **1765.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^4}}$. **1766.** $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$.

1767. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$. **1768.** $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$. **1769.** $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

1770. $\int \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{a^2+\sin^2\alpha}$. **1771.** $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$. **1772.** $\int (e^x+1)^{\ldots}$

1773. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **1774.** $\int \frac{8x-1}{x^2+9}\,dx$. **1775.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

1776. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$. **1777.** $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$. **1778.** $\int \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ldots}$

1779. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **1780.** $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

В задачах 1781–1790 найти интегралы, выделив ... часть подынтегральной дроби.

1781. $\int \frac{x}{x+4}\,dx$. **1782.** $\int \frac{x}{2x+1}\,dx$. **1783.** $\int \frac{Ax}{a+bx}\,dx$.

1784. $\int \frac{3+x}{3-x}\,dx$. **1785.** $\int \frac{(2x-1)dx}{x-2}$. **1786.** $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx$.

1873. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$. **1874.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. **1875.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$.

1876. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$. **1877.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **1878.** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$.

1879. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ (подстановка $x=z^6$).

1880. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$. **1881.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. **1882.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}\,dx$.

1883. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (подстановка $e^x+1=z^4$).

1884. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. **1885.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$.

1886. $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x\cos 2x\,dx$.

1887. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x\cos x}\,dx$. **1888.** $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$. **1889.** $\int \frac{x^5dx}{\left(x^2-4\right)^2}$.

1890. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{z}$, или $x=a\operatorname{tg} z$, или $x=a\operatorname{sh} z$).

1891. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (подстановка $x=a\sin z$).

1892. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ (подстановка $x=\frac{1}{z}$, или $x=\frac{a}{\cos z}$, или $x=a\operatorname{ch} z$).

1893. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$. **1894.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$. **1895.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$.

1896. $\int \frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}\,dx$. **1897.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

1898. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. **1899.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}$.

1900. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. **1901.** $\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{4x^2+1}}$.

1902*. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{dx}{x^2}$. **1903*.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$. **1904*.** $\int \frac{(x+1)dx}{x\left(1+xe^x\right)}$.

§ 2. Основные методы интегрирования

Интегрирование по частям

В задачах 1832–1868 найти интегралы.

1832. $\int x\sin 2x\,dx$. **1833.** $\int x\cos x\,dx$. **1834.** $\int xe^{-x}dx$.

1835. $\int x\cdot 3^x\,dx$. **1836.** $\int x^n \ln x\,dx\ (n \neq -1)$.

1837. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **1838.** $\int \arccos x\,dx$. **1839.** $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}$

1840. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$. **1841.** $\int x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$. **1842.** $\int x\cos^2 x\,dx$

1843. $\int \frac{\lg x}{x^3}\,dx$. **1844.** $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. **1845.** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

1846. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$. **1847.** $\int \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

1848. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$. **1849.** $\int x^2\ln(1+x)\,dx$.

1850. $\int x^2e^{-x}dx$. **1851.** $\int x^3e^x dx$. **1852.** $\int x^2a^x dx$.

1853. $\int x^3\sin x\,dx$. **1854.** $\int x^2\cos^2 x\,dx$. **1855.** $\int \ln^2 x$

1856. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$. **1857.** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$. **1858.** $\int (\arcsin x)^2$

1859. $\int (\mathrm{arctg}\,x)^2 x\,dx$. **1860.** $\int e^x\sin x\,dx$.

1861. $\int e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)\,dx$. **1862.** $\int e^{ax}\cos nx\,dx$.

1863. $\int \sin\ln x\,dx$. **1864.** $\int \cos\ln x\,dx$. **1865*.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1866*. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$. **1867.** $\int \frac{x^2e^xdx}{(x+2)^2}$. **1868.** $\int x^2e^x\sin x\,dx$

Замена переменной

В задачах 1869–1904 найти интегралы.

1869. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ (подстановка $x+1=z^2$).

1870. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}$. **1871.** $\int \frac{3x+4}{(x-2)^3}\,dx$. **1872.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

1936. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}}$. 1937. $\int x\sqrt{a+x}\,dx$.

1938. $\int \left(\sqrt{\sin x}+\cos x\right)^2 dx$. 1939. $\int a^{mx}b^{nx}dx$.

1940. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$. 1941. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$. 1942. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

1943. $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$. 1944. $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2}$. 1945. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

1946. $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$. 1947. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. 1948. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$.

1949. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$. 1950. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$.

1951. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$. 1952. $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$. 1953. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

1954. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{2x+3}}$. 1955. $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$. 1956. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

1957. $\int x\sin x\cos x\,dx$. 1958. $\int x^2\cos\omega x\,dx$.

1959. $\int e^{2x}x^3dx$. 1960. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$. 1961. $\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln\sin x}dx$.

1962. $\int \frac{x^2dx}{[illegible]}$. 1963. $\int \frac{\cos^2 3x}{\sin 3x}dx$. 1964. $\int \frac{dx}{1-\sin 3x}$.

1965. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{4-\cos^2 2x}$. 1966. $\int \frac{dx}{e^x+1}$. 1967. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

1968. $\int e^{e^x+x}dx$. 1969. $\int e^{2x^2+\ln x}dx$. 1970. $\int \frac{3+x^3}{\sqrt{2+2x^2}}dx$.

1971. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 1972. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$. 1973. $\int e^x\sin^2 x\,dx$.

1974. $\frac{(1+\operatorname{tg} x)dx}{\sin 2x}$. 1975. $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}dx$. 1976. $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{3}\cos\varphi+\sin\varphi}$.

1977. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$. 1978. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\left(1+\sin^2 x\right)}dx$. 1979. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$.

1980. $\int \frac{\ln\ln x}{x}dx$. 1981. $\int x^3e^{x^2}dx$. 1982. $\int e^{-x^2}x^5dx$.

1983. $\int \frac{x^{[illegible]}dx}{\sqrt{1+2x^{[illegible]}}}$. 1984. $\int \frac{x^{[illegible]}dx}{\sqrt{(1-x^2)^{[illegible]}}}$. 1985. $\int \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^{[illegible]}}}{x}dx$.

В задачах 1905–1909 найти интегралы, применив с замену переменной, а потом интегрирование по частям.

1905. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$ **1906.** $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx.$

1907. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,dx.$ **1908.** $\int \frac{x^3 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$

1909. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2\left(1+x^2\right)}\,dx.$

Разные задачи

В задачах 1910–2011 найти интегралы.

1910. $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x}\,dx.$ **1911.** $\int \left(1+e^{3x}\right)^2 e^{3x}\,dx.$

1912. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **1913.** $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx.$ **1914.** $\int \sqrt{1-e^{x}}\,e^{x}$

1915. $\int x\cos x^2\,dx.$ **1916.** $\int \left(2-3x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{3}}\,dx.$

1917. $\int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}\,dx.$ **1918.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}.$

1919. $\int \frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}.$ **1920.** $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}.$

1921. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$ **1922.** $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx.$

1923. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$ **1924.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}.$

1925. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}.$ **1926.** $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\,dx.$

1927. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^n}{1+x^2}\,dx.$ **1928.** $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$

1929. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx.$ **1930.** $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^6 x}.$

1931. $\int \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}\,\sec^4 x\,dx.$ **1932.** $\int \left(1-\operatorname{tg} 3x\right)^2 dx.$

1933. $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}.$ **1934.** $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3}.$ **1935.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}.$

2016. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$ **2017.** $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx.$

2018. $\int \frac{32x\,dx}{(2x-1)\left(4x^2-16x+15\right)}.$ **2019.** $\int \frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}.$

2020. $\int \frac{\left(2x^2-5\right)dx}{x^4-5x^2+6}.$ **2021.** $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx.$

2) ***Знаменатель имеет только действительные корни; некоторые корни – кратные.***

2022. $\int \frac{\left(x^2-3x+2\right)dx}{x\left(x^2+2x+1\right)}.$ **2023.** $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}.$

2024. $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}.$ **2025.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx.$

2026. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx.$ **2027.** $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$

2028. $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$ **2029.** $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}\,dx.$

2030. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx.$ **2031.** $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)}.$

2032. $\int \frac{\left(x^2-2x+3\right)dx}{(x-1)\left(x^3-4x^2+3x\right)}.$ **2033.** $\int \frac{\left(7x^3-9\right)dx}{x^4-5x^3+6x^2}.$

2034. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx.$ **2035.** $\int \frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}\,dx.$

3) ***Знаменатель имеет комплексные различные корни.***

2036. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}.$ **2037.** $\int \frac{dx}{1+x^3}.$ **2038.** $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}.$

2039. $\int \frac{\left(2x^2-3x-3\right)dx}{(x-1)\left(x^2-2x+5\right)}.$ **2040.** $\int \frac{\left(x^4+1\right)dx}{x^3-x^2+x-1}.$

2041. $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}.$ **2042.** $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+x\right)}.$ **2043.** $\int \frac{dx}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}.$

2044. $\int \frac{\left(3x^2+x+3\right)dx}{(x-1)^3\left(x^2+1\right)}.$ **2045.** $\int \frac{x^3+2x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx.$

2046. $\int \frac{\left(x^3-6\right)dx}{x^4+6x^2+8}.$ **2047*.** $\int \frac{dx}{1+x^4}.$

1986. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$. **1987.** $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^4}\,dx$. **1988.** $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^6}\,dx$.

1989. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$. **1990.** $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$. **1991.** $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$.

1992. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$. **1993.** $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$. **1994.** $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$.

1995*. $\int \frac{x^7\,dx}{\left(1-x^2\right)^5}$. **1996.** $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{x}}$. **1997.** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{12}}\,dx$.

1998. $\int \frac{x\,dx}{\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}}$. **1999.** $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$. **2000.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$.

2001. $\int \frac{\sqrt{1-x^3}}{x^2\sqrt{x}}\,dx$. **2002.** $\int \frac{x^4\,dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

2003. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx$. **2004.** $\int \frac{e^x\left(1+e^x\right)dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

2005. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$. **2006*.** $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$.

2007. $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$. **2008.** $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

2009. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

2010. $\int \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{\cos^{14} x}}\,dx$. **2011.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$.

§ 3. Основные классы интегрируемых функций

Дробно-рациональные функции

В задачах 2012–2067 найти интегралы.

1) *Знаменатель имеет только действительные различные корни.*

2012. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$. **2013.** $\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x-2}$.

2014. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$. **2015.** $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$.

2072. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx.$

2073. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx.$

2074. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

2075*. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

2) *Дифференциальные биномы* $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx.$

2076. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx.$

2077. $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx.$

2078. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$

2079. $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx.$

2080. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

2081. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

2082. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx.$

2083. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

2084. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx.$

2085. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}.$

2086. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx.$

2087. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$

2088. $\int \sqrt[3]{x\left(1-x^2\right)}\,dx.$

2089. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

Тригонометрические функции

В задачах 2090–2131 найти интегралы.

2090. $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx.$

2091. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$

2092. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$

2093. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\,dx.$

2094. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}.$

2095. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

2096. $\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}.$

2097. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^2}.$

2098. $\int \cos^6 x\,dx.$

2099. $\int \mathrm{ctg}^4 x\,dx.$

2100. $\int \mathrm{tg}^5 x\,dx.$

2101. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^5 x}.$

4) *Знаменатель имеет комплексные кратные корни.*

2048. $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)^2}dx.$

2049. $\int \frac{dx}{x\left(4+x^2\right)^2\left(1+x^2\right)}.$

2050. $\int \frac{\left(5x^2-12\right)dx}{\left(x^2-6x+13\right)^2}.$

2051. $\int \frac{(x+1)^4\,dx}{\left(x^2+2x+2\right)^3}.$

2052. $\int \frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}.$

2053. $\int \frac{2x\,dx}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}.$

2054. $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^4}.$

2055. $\int \frac{x^9\,dx}{\left(x^4-1\right)^2}.$

5) *Метод Остроградского.*

2056. $\int \frac{x^7+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx.$

2057. $\int \frac{\left(4x^2-8x\right)dx}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)^2}.$

2058. $\int \frac{x^2+x+1}{x^5-2x^4+x^3}dx.$

2059. $\int \frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3\left(x^2+1\right)^2}dx.$

2060. $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2dx}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}.$

2061. $\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2}.$

2062. $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+10\right)^3}.$

2063. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\left(x^2+2x+2\right)^3}.$

2064. $\int \frac{x^5-x^4-26x^2-24x-25}{\left(x^2+4x+5\right)^2\left(x^2+4\right)^2}dx.$

2065. $\int \frac{3x^4+4}{x^2\left(x^2+1\right)^3}dx.$

2066. $\int \frac{5-3x+6x^2+5x^3-x^4}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}dx.$

2067. $\int \frac{9\,dx}{5x^2\left(3-2x^2\right)^3}.$

Некоторые иррациональные функции

В задачах 2068–2089 найти интегралы.

1) *Функции вида* $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}, \ldots\right).$

2068. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}.$

2069. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}.$

2070. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$

2071. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}.$

2137. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$. **2138.** $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$. **2139.** $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

2140. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx$. **2141.** $\int \operatorname{ch}^3 x\,dx$. **2142.** $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$.

2143. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x\,dx$. **2144.** $\int \operatorname{cth}^5 x\,dx$.

2145. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$. **2146.** $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$. **2147.** $\int \frac{dx}{(1+\operatorname{ch} x)^2}$.

2148. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$. **2149.** $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$. **2150.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\operatorname{sh}^4 x}$.

Рациональные функции от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$

В задачах 2151–2174 найти интегралы.

2151*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. **2152.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

2153. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$. **2154.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

2155. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$. **2156.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

2157. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. **2158.** $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.

2159. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$. **2160.** $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

2161. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$. **2162.** $\int \frac{dx}{x^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

2163. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. **2164.** $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

2165. $\int \frac{(2x^2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$. **2166.** $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

2167. $\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **2168.** $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

2169. $\int \frac{3x^2-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx$. **2170.** $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

2102. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

2103. $\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$.

2104. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.

2105. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

2106. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$.

2107. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos 2x}$.

2108. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin x \cos 3x}$.

2109. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$.

2110. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$.

2111. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$.

2112. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\, dx$.

2113. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - \operatorname{tg} x}$.

2114. $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x}$.

2115. $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\sec x)^2}$.

2116. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$.

2117. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$.

2118. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

2119. $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$.

2120. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

2121. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$.

2122. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.

2123. $\int \sqrt{1 + \sin x}\, dx$.

2124. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x}\, dx$.

2125*. $\int \frac{\sqrt{\sin^4 2x}}{\sin^5 x}\, dx$.

2126. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2127. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$.

2128. $\int \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}\, dx$.

2129. $\int \frac{(\cos 2x - 3)\, dx}{\cos^4 x \sqrt{4 - \operatorname{ctg}^2 x}}$.

2130. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3 \frac{x}{2}}}$.

2131. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.

Гиперболические функции

В задачах 2132–2150 найти интегралы.

2132. $\int \operatorname{ch} x\, dx$.

2133. $\int \operatorname{sh} x\, dx$.

2134. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

2135. $\int \frac{e^x\, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$.

2136. $\int \left(\operatorname{ch}^2 ax + \operatorname{sh}^2 ax\right) dx$.

2199. $\int \frac{x^4 dx}{x^{10}-1}$.

2200. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$.

2201. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

2202. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x}$.

2203. $\int x\ln\left(1+x^3\right)dx$.

2204. $\int \frac{(\ln x - 1)dx}{\ln^2 x}$.

2205. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}dx$.

2206. $\int x^2 e^x \cos x\,dx$.

2207. $\int xe^{x^2}\left(x^2+1\right)dx$.

2208. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

2209. $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cos^5 x}$.

2210. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

2211. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

2212. $\int \sqrt{\mathrm{tg}^2\, x + 2}dx$.

2213. $\int \frac{\left(x^2-1\right)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$.

2214. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

2215. $\frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$.

2216. $\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

2217. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x\,dx}{x^4}$.

2218. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\, x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

2219. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{(1+x)^3}dx$.

2220. $\int \frac{dx}{\left(1-2^x\right)^4}$.

2221. $\int \frac{\left(e^{3x}+e^x\right)dx}{e^{4x}-e^{2x}+1}$.

2222. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

2223. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x\,dx}{1-\mathrm{tg}\, x+\mathrm{tg}^2\, x}$.

2224. $\int \sin^8 x\,dx$.

2225. $\int \frac{\left(3+x^2\right)^2 x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

2226. $\int \frac{x^2-8x+7}{\left(x^2-3x-10\right)^2}dx$.

2227. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

2228. $\int \frac{(x+\sin x)dx}{1+\cos x}$.

2229*. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

2230. $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Глава VII

СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Способы точного вычисления интегралов

Непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница

В задачах 2231–2258 вычислить интегралы.

2231. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$. **2232.** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$. **2233.** $\int\limits_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

2234. $\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy$. **2235.** $\int\limits_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0\right)dt$. **2236.** $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$

2237. $\int\limits_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x\,dx$. **2238.** $\int\limits_0^{2a} \frac{3dx}{2b-x}$ $(b>a>0)$.

2239. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$. **2240.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$. **2241.** $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

2242. $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$. **2243.** $\int\limits_0^{\sqrt[n]{a/2}} \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$. **2244.** $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

2245. $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$. **2246.** $\int\limits_0^{a/2} \frac{a\,dx}{(x-a)(x-2a)}$.

2247. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$. **2248.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$. **2249.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

2283. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^3}$. **2284.** $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$. **2285.** $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$.

2286. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. **2287.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. **2288.** $\int\limits_0^1 \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\,dx$.

2289. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. **2290.** $\int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$. **2291.** $\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

2292. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}}$. **2293.** $\int\limits_{2,5}^5 \frac{\left(\sqrt{25-x^2}\right)^3}{x^4}dx$. **2294.** $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

2295. $\int\limits_{\sqrt{6}/3}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2-2\right)^5}}$.

Разные задачи

2296. Вычислить среднее значение функции $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[1,\ 4]$.

2297. Вычислить среднее значение функции $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ на отрезке $[1;\ 1{,}5]$.

2298. Вычислить среднее значение функций $f(x)=\sin x$ и $f(x)=\sin^2 x$ на отрезке $[0,\ \pi]$.

2299. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$ на отрезке $[0,\ 2]$.

2300. При каком a среднее значение функции $y=\ln x$ на отрезке $[1,\ a]$ равно средней скорости изменения функции на этом отрезке?

В задачах 2301–2317 вычислить интегралы:

2301. $\int\limits_1^2$ [illegible] **2302.** $\int\limits_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^5dx}{\left(1+x^3\right)^3}$. **2303.** $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}$.

2304. $\int\limits_0^{\sqrt[8]{2}} \frac{x^{15}dx}{\left(1+x^8\right)^{\frac{2}{5}}}$. **2305.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. **2306.** $\int\limits_{-a}^{a} \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

2270. Составить рекуррентную формулу для вычисления интеграла $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx$ (m и n – целые положительные или нули; исследовать частные случаи четных и нечетных значений m и n).

2271. Составить рекуррентную формулу и вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{0} x^n e^x dx$ (n – целое положительное число).

2272. Доказать рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}$$

(n – целое положительное число) и вычислить с ее помощью интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

2273. Доказать, что если $J_m = \int\limits_1^e \ln^m x\,dx$, то $J_m = e - mJ_{m-1}$ (m – целое положительное число).

2274*. Найти $\int\limits_0^1 x^p (1-x)^q dx$ (p и q – целые положительные числа).

Замена переменной в определенном интеграле

В задачах 2275–2295 вычислить интегралы:

2275. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$. **2276.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$. **2277.** $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

2278. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$. **2279.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$. **2280.** $\int\limits_2^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

2281*. $\int\limits_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}\,dx$. **2282*.** $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^7 2x\,dx$.

2323*. Показать, что $0{,}5 < \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{\pi}{6} \approx 0{,}523$ $(n \ge 1)$.

2324. Используя неравенство $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, справедливое при $x > 0$, и неравенство Коши–Буняковского (см. задачу 1638), оценить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{x \sin x}\,dx$.

2325*. Показать, что $0{,}78 < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0{,}93$.

2326. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $F(x) = \int\limits_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,dt$ на отрезке $[-1, 1]$.

2327. Найти точку экстремума и точки перегиба графика функции $y = \int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$.

В задачах 2328–2331, не вычисляя интегралов, доказать справедливость равенств:

2328. $\int\limits_{-\pi/8}^{\pi/8} x^{10} \sin^9 x\,dx = 0$. **2329.** $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x}{\cos^2 x}\,dx = 0$.

2330. $\int\limits_{-1}^{1} e^{\cos x} dx = 2\int\limits_0^1 e^{\cos x} dx$. **2331.** $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx = 0$.

2332*. а) Показать, что если $f(t)$ – функция нечетная, то $\int\limits_a^x f(t)dt$ – функция четная, т. е. что $\int\limits_a^{-x} f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt$.

б) Будет ли $\int\limits_a^x f(t)dt$ функцией нечетной, если $f(t)$ – функция четная?

2307. $\int\limits_0^1 \sqrt{2x+x^2}\,dx.$ **2308.** $\int\limits_0^{\sqrt3} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx.$

2309. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$ **2310.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

2311. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$ **2312.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}.$

2313. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\frac{1}{e}\sin^2 x}.$ **2314.** $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^4\,dx.$

2315. $\int\limits_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx.$ **2316.** $\int\limits_0^1 \frac{(3x+2)dx}{(x^2+4x+1)^{\frac32}}.$

2317. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}.$

2318. Показать, что $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{|ab|\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}$, где a и b – любые действительные числа, отличные от нуля.

2319. Решить уравнение $\int\limits_{\sqrt2}^{x} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}.$

2320. Решить уравнение $\int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}.$

2321. Убедившись в справедливости неравенства $\frac{x}{e}>\ln x$ при $x>e$, показать, что интеграл $\int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}$ меньше единицы, но больше 0,92.

2322*. Показать, что $\frac{\pi}{6}\approx 0{,}523<\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi}{4\sqrt2}$

2341*. О функции $f(x)$ известно, что она нечетная на отрезке $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ и имеет период, равный T. Доказать, что $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ есть также периодическая функция с тем же периодом.

2342. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx$, где n – целое положительное число, двумя способами: разлагая степень двучлена по формуле для бинома Ньютона и с помощью подстановки $x=\sin\varphi$. Сравнив результаты, получить следующую формулу суммирования (C_n^k – биномиальные коэффициенты):

$$C_n^0-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}.$$

2343. Интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x}$ легко берется с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$. Имеем $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x}=\int\limits_0^0\frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(5-3\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}=0.$

Но, с другой стороны, $-3<-3\cos x<+3$, следовательно, $2<5-3\cos x<8$ и $\frac12>\frac{1}{5-3\cos x}>\frac18$.

Отсюда $\int\limits_0^{2\pi}\frac12\,dx>\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x}>\int\limits_0^{2\pi}\frac18\,dx$ и, значит, $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5-3\cos x}>\frac{\pi}{4}$.

Найти ошибку в рассуждении.

2344*. Пусть $I_n=\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^n x\,dx$ ($n>1$ и целое). Проверить, что $I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$. Доказать, что $\frac{1}{2n+2}<I_n<\frac{1}{2n-2}$.

2345*. Доказать справедливость равенства

$$\int\limits_0^x e^{zx}e^{-z^2}dz=e^{\frac{x^2}{4}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{4}}dz.$$

2346*. Доказать, что $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\frac{e^{k\omega^2x^2}}{\int\limits_a^b e^{k\omega^2x^2}dx}=\begin{cases}0, & \text{если } x<b,\\ +\infty, & \text{если } x=b\end{cases}$ ($k>0$, $b>a>0$).

2333*. Доказать справедливость равенства $\int\limits_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_1$ $(x > 0)$.

2334. Доказать тождество $\int\limits_{1/e}^{\operatorname{tg} x} \frac{t\,dt}{1+t^2} + \int\limits_{1/e}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t\left(1+t^2\right)} = 1.$

2335. Доказать тождество

$$\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

2336. Доказать справедливость равенства

$$\int\limits_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int\limits_0^1 x^n(1-x)^m\,dx.$$

2337. Доказать справедливость равенства

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx.$$

2338. Доказать, что $\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx.$

Применить полученный результат к вычислению интегра

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx.$$

2339*. Доказать, что

$$\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\cdot 2\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \pi\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)$$

Применить полученный результат к вычислению интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2340*. Показать, что если $f(x)$ – функция перио

с периодом T, то $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx$ не зависит от a.

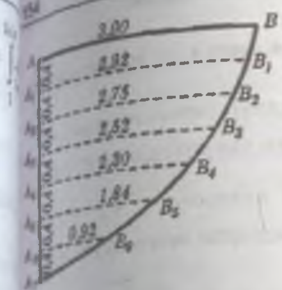

Рис. 26

2354. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\sin^2\varphi}\,d\varphi \ (n=6).$

2355. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx \ (n=10).$

2356. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int\limits_{1,05}^{1,35} f(x)dx$, пользуясь следующей таблицей значений функции $f(x)$:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

2357. Прямая линия касается берега реки в точках A и B. Для измерения площади участка между рекой и прямой AB проведены 11 перпендикуляров к AB от реки через каждые 5 м (следовательно, прямая AB имеет длину 60 м). Длины этих перпендикуляров оказались равными 3,28 м; 4,02 м; 4,64 м; 5,26 м; 4,98 м; 3,62 м; 3,82 м; 4,68 м; 5,26 м; 3,82 м; 3,24 м. Вычислить приближенное значение площади участка.

2358. Вычислить площадь поперечного сечения судна при следующих данных (рис. 26):

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4 \text{ м},$$

$$AB = 3 \text{ м}, \ A_1B_1 = 2{,}92 \text{ м}, \ A_2B_2 = 2{,}75 \text{ м}, \ A_3B_3 = 2{,}52 \text{ м},$$

$$A_4B_4 = 2{,}30 \text{ м}, \ A_5B_5 = 1{,}84 \text{ м}, \ A_6B_6 = 0{,}92 \text{ м}.$$

2359. Для вычисления работы пара в цилиндре паровой машины вычисляют площадь индикаторной диаграммы, представляющей собой графическое изображение зависимости между давлением пара в цилиндре и ходом поршня. На рис. 27 изображена индикаторная диаграмма паровой машины. Ординаты точек линий ABC и ED, соответствующие абсциссам $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, даны следующей таблицей:

Абсциссы	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ординаты линии ABC	60,6	53,0	32,2	24,4	19,9	17,0
Ординаты линии ED	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8

Абсциссы	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Ординаты линии ABC	15,0	13,8	12,0	11,0	6,2
Ординаты линии ED	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7

§ 2. Приближенные методы

В задачах 2347–2349 вычисления вести с точност 0,001.

2347. Площадь четверти круга, радиус которого раве иице, равна $\frac{\pi}{4}$. С другой стороны, взяв единичный круг с тром в начале координат, уравнение которого $x^2+y^2=1$ применяя для вычисления площади четверти этого круга ин грирование, получим $\frac{\pi}{4}=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$, т. е. $\pi=4\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Пользуясь правилами прямоугольников, трапеций и пр лом Симпсона, вычислить приближенно число π, разбив резок интегрирования $[0,1]$ на 10 частей. Полученные рез таты сравнить между собой и с табличным значением числ

2348. Зная, что $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$, вычислить приближенно π. Результаты, полученные по различным правилам, при биении отрезка интегрирования на 10 частей сравнить м собой и с результатами предыдущей задачи.

2349. Вычислить $\ln 10=\int\limits_1^{10}\frac{dx}{x}$, используя правило Симп при $n=10$. Найти модуль перехода от натуральных логар мов к десятичным. Сравнить с табличным значением.

В задачах 2350–2355 вычислить приближенно, польз формулой Симпсона, интегралы, которые не могут быть вы ны в конечном виде с помощью элементарных функций. Ч n частичных интервалов задается в скобках.

2350. $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^3}\,dx$ $(n=10)$. **2351.** $\int\limits_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx$ $(n=1$

2352. $\int\limits_2^5\frac{dx}{\ln x}$ $(n=6)$. **2353.** $\int\limits_0^{\pi/3}\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$ $(n=$

ставленных на чертеже (в мм), вычислить площадь $ABCDO$, если известно уравнение линии $BC: pv^{\gamma}=\mathrm{const}$ (линия BC называется адиабатой), $\gamma=1{,}3$, AB – прямая, параллельная оси Ov.

2365. На рис. 29 представлена индикаторная диаграмма дизельного двигателя. Отрезок AB соответствует процессу сгорания смеси, адиабата BC – расширению, отрезок CD – выпуску и адиабата DA – сжатию. Уравнение адиабаты $BC: pv^{1,3}=\mathrm{const}$, уравнение адиабаты $AD: pv^{1,35}=\mathrm{const}$. Исходя из размеров, проставленных на чертеже (в мм), определить площадь $ABCD$.

§ 3. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами

В задачах 2366–2385 вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2366. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$. **2367.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **2368.** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx$ $(a>0)$.

2369. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}$. **2370.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$. **2371.** $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$.

2372. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$. **2373.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\,dx$. **2374.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2375. $\int\limits_{\text{[illegible]}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. **2376.** $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$. **2377.** $\int\limits_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}\,dx$.

2378. $\int\limits_0^{+\infty}x\sin x\,dx$. **2379.** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,dx$. **2380.** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$.

2381. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$. **2382.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}\,dx$. **2383.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

2384. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. **2385.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

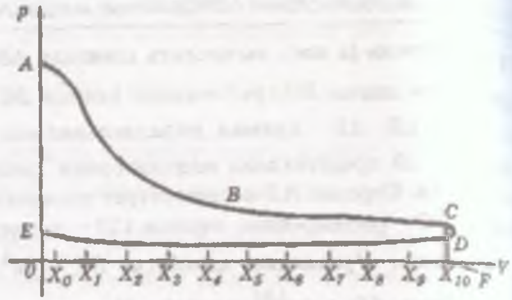

Рис. 27

Вычислить с помощью формулы Симпсона площадь ABC
Ординаты даны в миллиметрах. Длина $OF = 88{,}7$ мм (точка
общая проекция точек C и D на ось абсцисс).

В задачах 2360–2363 при нахождении пределов интегр
вания необходимо воспользоваться методами приближен
решения уравнений.

2360. Найти площадь фигуры, ограниченной дугами пара
$y = x^3 - 7$ и $y = -2x^2 + 3x$ и осью ординат.

2361. Найти площадь фигуры, ограниченной параб
$y = x^3$ и прямой $y = 7(x+1)$.

2362. Найти площадь фигуры, ограниченной параб
$y = 16 - x^2$ и полукубической параболой $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

2363. Найти площадь фигуры, ограниченной лини
$y = 4 - x^4$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

2364. На рис. 28 изображена индикаторная диагра
(упрощенная) паровой машины. Исходя из размеров, п

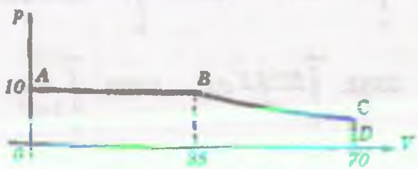

Рис. 28

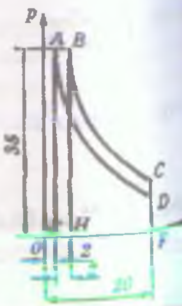

Рис. 29

В задачах 2412–2417 исследовать сходимость интегралов.

2412. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$ **2413.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^5}}.$ **2414.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$

2415. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}.$ **2416.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}.$ **2417.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$

Разные задачи

2418. Функция $f(x)$ в полуинтервале $[a,+\infty)$ непрерывна и $f(x) \to A \neq 0$ при $x \to +\infty$. Может ли интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходиться?

2419. При каких значениях k интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^k \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\,dx$ будет сходящимся?

2420. При каких значениях k сходятся интегралы

1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}$; 2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$?

2421. При каких значениях k сходится интеграл $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(b<a)$?

2422. Можно ли найти такое k, чтобы интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\,dx$ сходился?

2423. При каких значениях k и l интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^l}\,dx$ сходится?

2424. При каких значениях m интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$ сходится?

В задачах 2386–2393 исследовать сходимость интегралов

2386. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$. **2387.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4}\,dx$. **2388.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{11}}{(x^3+x^2+1)}$…

2389. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$. **2390.** $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$. **2391.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^4}}$…

2392. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$. **2393.** $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$.

Интегралы от функций с бесконечными разрывами

В задачах 2394–2411 вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

2394. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **2395.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. **2396.** $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$…

2397. $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$. **2398.** $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **2399.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$…

2400. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **2401.** $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$.

2402. $\int\limits_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$. **2403.** $\int\limits_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

2404. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. **2405.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$. **2406.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}$…

2407. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. **2408.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$. **2409.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$…

2410. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$. **2411.** $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

В задачах 2439–2448 вычислить интегралы, пользуясь формулами

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (интеграл Пуассона)},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \text{ (интеграл Дирихле)}.$$

2439. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx$ $(a>0)$. **2440.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$. **2441*.** $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

2442. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx$ (n – целое положительное число).

2443. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$. **2444.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$.

2445. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax\cos bx}{x}\,dx$ $(a>0,\ b>0)$.

2446. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$. **2447*.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$. **2448*.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$.

2449*. Положим $\varphi(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos y\,dy$. (Этот интеграл называется интегралом Лобачевского.) Доказать соотношение

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2.$$

С помощью найденного соотношения вычислить величину

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos y\,dy \text{ (впервые вычисленную Эйлером).}$$

В задачах 2450–2454 вычислить интегралы.

2450. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. **2451.** $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx$.

2452*. $\int\limits_0^{\pi/2} x\,\mathrm{ctg}\,x\,dx$. **2453*.** $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\,dx$. **2454.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2425. При каких значениях k интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$ сходится?

В задачах 2426–2435 вычислить несобственные интегралы.

2426. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. **2427*.** $\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **2428.** $\int\limits_0^{+\infty} \ldots$

2429. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}$ (n – целое положительное число).

2430. $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (n – целое положительное число).

2431. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx$ (n – целое положительное число).

2432. $\int\limits_0^{1} (\ln x)^n\,dx$ (n – целое положительное число).

2433*. $\int\limits_0^{1} \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при m: а) четном, б) нечетном $(m>0)$.

2434*. $\int\limits_0^{1} \frac{\left(1-x^n\right)}{\sqrt{x}}\,dx$ (n – целое положительное число).

2435. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $(0<\alpha<2\pi)$.

2436*. Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2437*. Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = 0$.

2438. Вычислить интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

2464. Найти площадь фигуры, ограниченной дугой гиперболы и ее хордой, проведенной из фокуса перпендикулярно к действительной оси.

2465. Окружность $x^2+y^2=a^2$ разбивается гиперболой $x^2-2y^2=\frac{a^2}{4}$ на три части. Определить площади этих частей.

2466. Вычислить площади криволинейных фигур, образованных пересечением эллипса $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ и гиперболы $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

2467. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y=\frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y=\frac{x^2}{2}$.

2468. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y=x(x-1)^2$ и осью абсцисс.

2469. Найти площадь фигуры, ограниченной осью ординат и линией $x=y^2(y-1)$.

2470. Найти площадь части фигуры, ограниченной линиями $y^m=x^n$ и $y^n=x^m$, где m и n – целые положительные числа, расположенной в первом квадранте. Рассмотреть вопрос о площади всей фигуры в зависимости от характера четности чисел m и n.

2471. а) Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и линией $y=x-x^2\sqrt{x}$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной двумя ветвями линии $(y-x)^2=x^3$ и прямой $x=4$.

2472. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(y-x-2)^2=9x$ и осями координат.

2473. Найти площадь петли линии $y^2=x(x-1)^2$.

2474. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2=\left(1-x^2\right)^3$.

2475. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $y^2=x^2-x^4$.

Глава VIII

ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

§ 1. Некоторые задачи геометрии и стати...

Площадь фигуры

2455. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лини... уравнения которых $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

2456. Найти площадь фигуры, заключенной между пар... лой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $(0, -3)$ $(3, 0)$.

2457. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб... $y^2 = 2px$ и нормалью к ней, наклоненной к оси абсцисс углом $135°$.

2458. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб...ми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

2459. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб...ми $y^2 + 8x = 16$ и $y^2 - 24x = 48$.

2460. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб...ми $y = x^2$ и $y = \frac{x^2}{3}$.

2461. Окружность $x^2 + y^2 = 8$ разделена параболой $y^2 ...$ на две части. Найти площади обеих частей.

2462. Найти площади фигур, на которые парабола $y^2 ...$ делит окружность $x^2 + y^2 = 16$.

2463. Из круга радиуса a вырезан эллипс, большая ось ко... торого совпадает с одним из диаметров круга, а меньшая р... $2b$. Доказать, что площадь оставшейся части равна площ... эллипса с полуосями a и $a - b$.

2489. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $(y - \arcsin x)^2 = x - x^2$.

2490. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс.

2491. Вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2492. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

2493. Найти площадь фигуры, ограниченной: 1) эпициклоидой $x = (R + r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t$, $y = (R + r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t$;

2) гипоциклоидой

$x = (R - r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t$, $y = (R - r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t$,

причем $R = nr$ (n – целое число). Здесь R – радиус неподвижной, а r – радиус подвижной окружностей; центр неподвижной окружности совпадает с началом координат, а t означает угол поворота радиуса, проведенного из центра неподвижной окружности в точку касания.

2494. Найти площадь петли линии:

1) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$; 2) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

2495. а) Вычислить площадь, описываемую полярным радиусом спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ при одном его обороте, если началу движения соответствует $\varphi = 0$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной вторым и третьим витками спирали и отрезком полярной оси.

2496. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\sin 2\varphi$ (двулепестковая роза).

2497. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\cos 5\varphi$.

2498. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $\rho = 2a(2 + \cos\varphi)$.

2499. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$ $(a > 0)$ и прямой $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2500. Найти площадь общей части фигур, ограниченных линиями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ и $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

2476. Найти площадь фигуры, ограниченной замкнутой линией $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$.

2477. Найти площадь конечной части фигуры, ограниченной линией $x^2y^2 = 4(x-1)$ и прямой, проходящей через ее точки перегиба.

2478. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

2479. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \left(x^2 + 2x\right)e^{-x}$ и осью абсцисс.

2480. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = e^{-x}\left(x^2 + 3x + 1\right) + e^2$, осью Ox и двумя прямыми, параллельными оси Oy, проведенными через точки экстремума функции y.

2481. Найти площадь конечной части фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2e^x$ и $y = -x^3e^x$.

2482. а) Вычислить площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной линией $y = \ln x$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = \ln x$, осью ординат и прямыми $y = \ln a$ и $y = \ln b$.

2483. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.

2484. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{\ln x}{4x}$ и $y = x\ln x$.

2485. Вычислить площадь одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

2486. Вычислить площадь криволинейного треугольника, ограниченного осью ординат и линиями $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \frac{2}{3}\cos x$.

2487. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ и отрезком оси абсцисс, соединяющим две последовательные точки пересечения линии с осью абсцисс.

2488. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$.

2501. Найти площадь части фигуры, ограниченной линией $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, лежащей вне линии $\rho = 2 + \sin\varphi$.

2502. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho^2 = a^2 \cos n\varphi$ (n – целое положительное число).

2503. Показать, что площадь фигуры, ограниченной любыми двумя полярными радиусами гиперболической спирали $\rho\varphi = a$ и ее дугой, пропорциональна разности этих радиусов.

2504. Показать, что площадь фигуры, ограниченной любыми полярными радиусами логарифмической спирали $\rho = ae^{m\varphi}$ и ее дугой, пропорциональна разности квадратов этих радиусов.

2505*. Найти площадь фигуры, заключенной между внешней и внутренней частями линии $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

2506. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = \sqrt{1-t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}$.

В задачах 2507–2511 удобно перейти предварительно к полярным координатам.

2507. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$.

2508. Найти площадь части фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли (см. задачу 2507), лежащей внутри окружности $x^2+y^2 = \frac{a^2}{2}$.

2509. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

2510. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\left(x^2+y^2\right)^3 = 4a^2xy\left(x^2-y^2\right)$.

2511. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $x^4+y^4 = x^2+y^2$.

2512. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой.

2513. Найти площадь фигуры, заключенной между линией $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой.

2514. Найти площадь фигуры, содержащейся между циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой.

2515. Найти площадь фигуры, заключенной между линией $xy^2 = 8-4x$ и ее асимптотой.

2516*. 1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2e^{-x^2}$ и ее асимптотой.

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y^2 = xe^{-2x}$.

2517. Найти площадь фигуры, заключенной между трактрисой $x = a\left(\cos t - \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ и осью абсцисс.

2518. Для линии $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$ найти площадь петли и площадь фигуры, заключенной между линией и ее асимптотой.

Длина линии[*]

2519. Вычислить длину дуги цепной линии $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ (от $x_1 = 0$ до $x_2 = b$).

2520. Найти длину дуги параболы $y^2 = 2px$ от вершины до ее точки $M(x, y)$. (Взять y в качестве независимой переменной.)

2521. Найти длину дуги линии $y = \ln x$ (от $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$).

2522. Найти длину дуги линии $y = \ln\left(1-x^2\right)$ (от $x_1 = 0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$).

2523. Найти длину дуги линии $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ (от $x_1 = a$ до $x_2 = b$).

[*] В задачах на вычисление длин дуг там, где это необходимо, в скобках указывается интервал изменения независимой переменной, соответствующий спрямляемой дуге.

2524. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

2525. Вычислить длину дуги полукубической параболы $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

2526. Вычислить длину петли линии $9ay^2 = x(x-3a)^2$.

2527. Найти периметр одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \ln\cos x$ и $y = \ln\sin x$.

2528. Найти длину дуги линии $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, заключенной между ее наинизшей точкой и вершиной (точкой линии с экстремальной кривизной).

2529. Найти длину линии $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

2530. Найти длину линии $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

2531. На циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении 1 : 3.

2532. Дана астроида $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ и две точки на ней $A(R, 0)$, $B(0, R)$. Найти на дуге $\breve{AB}$ такую точку M, чтобы длина дуги $\breve{AM}$ составляла четверть длины дуги AB.

2533*. Найти длину линии $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

2534. Найти длину линии $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

2535. Найти длину дуги трактрисы $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ от ее точки $(0, a)$ до ее точки (x, y).

2536. Найти длину дуги эвольвенты окружности
$$x = R(\cos t + t\sin t), \quad y = R(\sin t - t\cos t)$$
(от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

2537. Вычислить длину дуги линии
$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \quad y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$$
(от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

2538. Найти длину петли линии $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

2539. По окружности радиуса a, вне и внутри ее с одинаковой угловой скоростью катятся (без скольжения) две окружности с радиусами, равными b. В момент $t = 0$ они касаются своими точками M_1 и M_2 точки M неподвижной окружности. Показать, что отношение путей, проходимых точками M_1 и M_2 за произвольный промежуток времени t, постоянно и равно $\frac{a+b}{a-b}$ (см. задачу 2498).

2540. Доказать, что длина дуги линии
$$x = f''(t)\cos t + f'(t)\sin t, \quad y = -f''(t)\sin t + f'(t)\cos t,$$
соответствующей интервалу (t_1, t_2), равна $\left[f(t) + f''(t)\right]\Big|_{t_1}^{t_2}$.

2541. Применить результат предыдущей задачи к вычислению длины дуги линии $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$ (от $t_1 = 0$ до $t_2 = t$).

2542. Доказать, что дуги линий
$$x = f(t) - \varphi'(t), \quad y = \varphi(t) + f'(t) \text{ и}$$
$$x = f'(t)\sin t - \varphi'(t)\cos t, \quad y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t,$$
соответствующие одному и тому же интервалу изменения параметра t, имеют равные длины.

2543. Найти длину дуги архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ от начала до конца первого завитка.

2544. Доказать, что дуга параболы $y = \frac{1}{2p}x^2$, соответствующая интервалу $0 \le x \le a$, имеет ту же длину, что и дуга спирали $\rho = p\varphi$, соответствующая интервалу $0 \le \rho \le a$.

2545. Вычислить длину дуги гиперболической спирали $\rho\varphi = 1$ (от $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ до $\varphi_2 = \frac{4}{3}$).

2546. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2547. Найти длину линии $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (см. задачу 2505).

2548. Доказать, что длина линии $\rho = a\sin^m\frac{\varphi}{m}$ (m — целое ...) ... с 2 при m четном и соизмерима с длиной ... радиуса a при m нечетном.

2524. Вычислить длину дуги полукубической параб... $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

2525. Вычислить длину дуги полукубической параб... $5y^3 = x^2$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6$.

2526. Вычислить длину петли линии $9ay^2 = x(x-3a)^2$.

2527. Найти периметр одного из криволинейных треуго... ников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \ln\cos x$ ... $y = \ln\sin x$.

2528. Найти длину дуги линии $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, заключен... между ее наинизшей точкой и вершиной (точка линии с эк... тремальной кривизной).

2529. Найти длину линии $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

2530. Найти длину линии $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

2531. На циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ най... точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отно... шении 1 : 3.

2532. Дана астроида $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ и точки ... ней $A(R, 0)$, $B(0, R)$. Найти на дуге $\overset{\frown}{AB}$ такую точку M, что... бы длина дуги $\overset{\frown}{AM}$ составляла четверть длины дуги $\overset{\frown}{AB}$.

2533*. Найти длину линии $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

2534. Найти длину линии $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

2535. Найти длину дуги трактрисы $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ от ее точки $(0, a)$ до ее точки (x, y).

2536. Найти длину дуги эвольвенты окружности

$$x = R(\cos t + t\sin t),\quad y = R(\sin t - t\cos t)$$

(от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

2537. Вычислить длину дуги линии

$$x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\quad y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$$

(от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$).

2538. Найти длину петли линии $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

2539. По окружности радиуса a, вне и внутри ее с одинаковой угловой скоростью катятся (без скольжения) две окружности с радиусами, равными b. В момент $t = 0$ они касаются своими точками M_1 и M_2 точки M неподвижной окружности. Показать, что отношение путей, проходимых точками M_1 и M_2 за произвольный промежуток времени t, постоянно и равно $\frac{a+b}{a-b}$ (см. задачу 2493).

2540. Доказать, что длина дуги линии

$$x = f''(t)\cos t + f'(t)\sin t,\quad y = -f''(t)\sin t + f'(t)\cos t,$$

соответствующей интервалу (t_1, t_2), равна $\left[f(t) + f''(t)\right]\Big|_{t_1}^{t_2}$.

2541. Применить результат предыдущей задачи к вычислению длины дуги линии $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$ (от $t_1 = 0$ до $t_2 = t$).

2542. Доказать, что дуги линий

$$x = f(t) - \varphi'(t),\quad y = \varphi(t) + f'(t)\quad \text{и}$$

$$x = f'(t)\sin t - \varphi'(t)\cos t,\quad y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\sin t,$$

соответствующие одному и тому же интервалу изменения параметра t, имеют равные длины.

2543. Найти длину дуги архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ от начала до конца первого завитка.

2544. Доказать, что дуга параболы $y = \frac{1}{2p}x^2$, соответствующая интервалу $0 \le x \le a$, имеет ту же длину, что и дуга спирали $\rho = p\varphi$, соответствующая интервалу $0 \le \rho \le a$.

2545. Вычислить длину дуги гиперболической спирали $\rho\varphi = 1$ (от $\varphi_1 = \frac{3}{4}$ до $\varphi_2 = \frac{4}{3}$).

2546. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2547. Найти длину линии $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (см. задачу 2505).

2548. Доказать, что длина линии $\rho = a\sin^m\frac{\varphi}{m}$ (m — целое число) соизмерима с a при m четном и соизмерима с длиной окружности радиуса a при m нечетном.

2549. При каких значениях показателя k $(k \neq 0)$ длина линии $y = ax^k$ выражается в элементарных функциях? (…вываясь на теореме Чебышева об условиях интегрируемости дифференциального бинома в конечном виде.)

2550. Найти длину линии, заданной уравнением

$$y = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos x}\, dx.$$

2551. Вычислить длину дуги линии

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z}\, dz, \quad y = \int_1^t \frac{\sin z}{z}\, dz$$

от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

2552. Доказать, что длина дуги синусоиды $y = \sin x$, соответствующей периоду синуса, равна длине эллипса, полуоси которого равны $\sqrt{2}$ и 1.

2553. Показать, что длина дуги «укороченной» или «удлиненной» циклоиды $x = mt - n\sin t$, $y = m - n\cos t$ (m и n — положительные числа) в интервале от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$ равна длине эллипса с полуосями $a = m + n$, $b = |m - n|$.

2554*. Доказать, что длина эллипса с полуосями a и b удовлетворяет неравенствам $\pi(a + b) < L < \pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ (задача И. Бернулли).

Объем тела

2555. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением параболы $y^2 = 4x$ вокруг своей оси (параболоид вращения), и плоскостью, перпендикулярной к ее оси и отстоящей от вершины параболы на расстояние, равное единице.

2556. Эллипс, большая ось которого равна $2a$, малая — $2b$, вращается: 1) вокруг большой оси, 2) вокруг малой оси. Найти объем получающихся эллипсоидов вращения. В частном случае получить объем шара.

2557. Симметричный параболический сегмент, основание которого a, высота h, вращается вокруг основания. Вычислить объем тела вращения, которое при этом получается («лимон» Кавальери).

2558. Фигура, ограниченная гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и прямой $x = a + h$ $(h > 0)$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

2559. Криволинейная трапеция, ограниченная линией $y = xe^x$ и прямыми $x = 1$ и $y = 0$, вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

2560. Цепная линия $y = \operatorname{ch} x$ вращается вокруг оси абсцисс. При этом получается поверхность, называемая **катеноидом**. Найти объем тела, ограниченного катеноидом и двумя плоскостями, отстоящими от начала на a и b единиц и перпендикулярными к оси абсцисс.

2561. Фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2$ и $y^2 = x$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем тела, которое при этом получается.

2562. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс трапеции, лежащей над осью Ox и ограниченной линией $(x - 4)y^2 = x(x - 3)$.

2563. Найти объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \arcsin x$, с основанием $[0, 1]$ вокруг оси Ox.

2564. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

2565. Вычислить объем тела, которое получится от вращения вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$, соответствующей полупериоду.

2566. Лемниската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая при этом получается.

2567. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линией:
1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$.

2568. Одна арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \ldots$ вращается вокруг своего основания. Вычислить объем ... ограниченного полученной поверхностью.

2569. Фигура, ограниченная аркой циклоиды (см. предыдущую задачу) и ее основанием, вращается вокруг прямой, перпендикулярной к середине основания (ось симметрии). ... объем получающегося при этом тела.

2570. Найти объем тела, полученного при вращении астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг своей оси симметрии.

2571. Фигура, ограниченная дугой линии $x = \frac{c^2}{a}\cos \ldots$ $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$ (эволюта эллипса), лежащей в первом квадранте, ... координатными осями, вращается вокруг оси абсцисс. Найти ... объем получающегося при этом тела.

2572. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью бесконечного веретена, образованного вращением ... $y = \frac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

2573. Линия $y^2 = 2exe^{-2x}$ вращается вокруг своей асимптоты. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, которая получается в результате этого вращения.

2574*. 1) Фигура, ограниченная линией $y = e^{-x^2}$ и ее асимптотой, вращается вокруг оси ординат. Вычислить объем тела, которое при этом получается.

2) Та же фигура вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем получающегося тела.

2575*. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении линии $y = x^2e^{-x^2}$ вокруг ее асимптоты.

2576*. Фигура, ограниченная линией $y = \frac{\sin x}{x}$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем получающегося тела.

2577*. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, производимой вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ $(a > 0)$ вокруг ее асимптоты.

2578. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении трактрисы $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ вокруг ее асимптоты.

2579*. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2580. 1) Вычислить объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ и плоскостью $z = 1$.

2) Найти объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ и плоскостями $z = -1$ и $z = 2$.

2581. Вычислить объемы тел, ограниченных параболоидом $z = x^2 + 2y^2$ и эллипсоидом $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

2582. Найти объемы тел, образованных пересечением двуполостного гиперболоида $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ и эллипсоида $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

[illegible] Найти объем тела, ограниченного конической поверхностью $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ и плоскостью $z = 0$.

[illegible] Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ и конусом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

2585*. Найти объем тела, отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания («цилиндрический отрезок», рис. 30). В частности, положить $R = 10$ см и $H = 6$ см.

2586. Параболический цилиндр пересечен двумя плоскостями, из которых одна перпендикулярна к образующей. В результате получается тело, изображенное на рис. 31. Общее основание параболических сегментов $a = 10$ см, высота параболического сегмента, [illegible] в основании, $H = 8$ см, высота тела [illegible] Вычислить объем тела.

[illegible] Цилиндр, основанием которого служит эллипс, пересечен [illegible] плоскостью, проходящей через малую ось эллипса. Вычислить объем тела, которое при этом получается. Линейные размеры указаны на рис. 32.

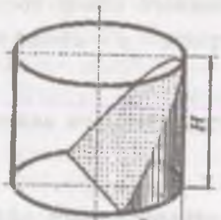

Рис. 30

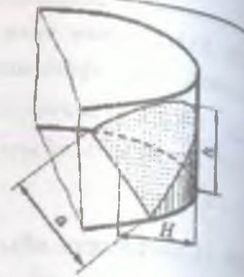

Рис. 31

2588*. На всех хордах круга радиуса R, параллельных одному направлению, построены симметричные параболические сегменты постоянной высоты H. Плоскости сегментов перпендикулярны к плоскости окружности. Найти объем полученного таким образом тела.

2589*. Прямой круглый конус радиуса R, высотой H рассечен на две части плоскостью, проходящей через центр основания параллельно образующей (рис. 33). Найти объемы обеих частей конуса. (Сечение конуса плоскостями, параллельными образующей, суть параболические сегменты.)

2590. Центр квадрата переменного размера перемещается вдоль диаметра круга радиуса a, причем плоскость, в которой лежит квадрат, остается перпендикулярной к плоскости круга, а две противоположные вершины квадрата перемещаются по окружности. Найти объем тела, образованного этим движущимся квадратом.

2591. Круг переменного радиуса перемещается таким образом, что одна из точек его окружности остается на оси абсцисс,

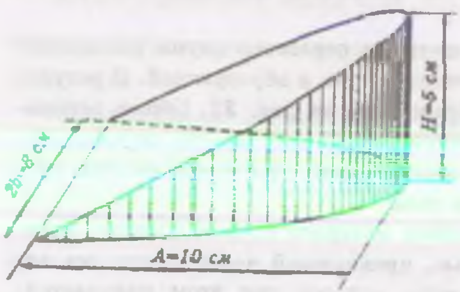

Рис. 32

Рис. 33

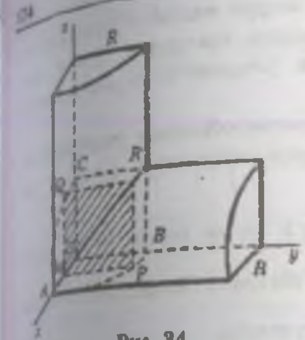

Рис. 34

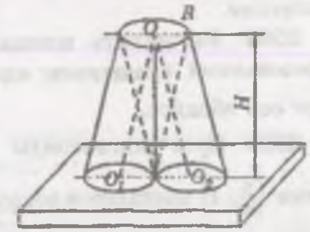

Рис. 35

центр движется по окружности $x^2 + y^2 = r^2$, а плоскость этого круга перпендикулярна к оси абсцисс. Найти объем тела, которое при этом получается.

2592. Оси двух равных цилиндров пересекаются под прямым углом. Найти объем тела, составляющего общую часть цилиндра (на рис. 34 изображена 1/8 тела). (Рассмотреть сечения, образованные плоскостями, параллельными осям обоих цилиндров.)

2593. Два одинаковых цилиндра имеют одну и ту же высоту H и общее верхнее основание радиуса R, а нижние основания их соприкасаются (рис. 35). Найти объем общей части цилиндров.

Площадь поверхности вращения

2594. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси абсцисс от вершины до точки с абсциссой $x = 3a$.

2595. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кубической параболы $3y - x^3 = 0$ вокруг оси абсцисс (от $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

2596. Вычислить площадь катеноида – поверхности, образованной вращением цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ вокруг оси абсцисс (от $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

2597. При вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг большой оси получается поверхность, называемая удлиненным эллипсоидом вращения, при вращении вокруг малой – поверх… называемая укороченным эллипсоидом вращения. Найти … щадь поверхности удлиненного и укороченного эллипсо… вращения.

2598. Вычислить площадь веретенообразной поверхн… образованной вращением одной арки синусоиды $y = \sin x$ … круг оси абсцисс.

2599. Дуга тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ от ее точки $(0, 0)$ д… точки $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить площ… поверхности, которая при этом получается.

2600. Найти площадь поверхности, образованной вращен… петли линии $9ay^2 = x(3a - x)^2$ вокруг оси абсцисс.

2601. Дуга окружности $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в перв… квадранте, вращается вокруг стягивающей ее хорды. Вычисл… площадь получающейся при этом поверхности.

2602. Найти площадь поверхности, образованной вращен… вокруг оси абсцисс дуги линии $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ … $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

2603. Найти площадь поверхности, образованной вращен… астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ вокруг оси абсцисс.

2604. Арка циклоиды вращается вокруг своей оси симм… рии. Найти площадь получающейся при этом поверхн… (См. задачу 2568.)

2605. Найти площадь поверхности, образованной вращен… кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

2606. Окружность $\rho = 2r\sin\varphi$ вращается вокруг поляр… оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получа… ется.

2607. Лемниската $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ вращается вокруг поляр… оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получа… ется.

2608. Бесконечная дуга линии $y = e^{-x}$, соответст… положительным значениям x, вращается вокруг оси абсц… Вычислить площадь поверхности, которая при этом получ…

2609. Трактриса $x = a\left(\cos t + \ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти площадь получающейся бесконечной поверхности.

Моменты и центр масс*)

2610. Вычислить статический момент прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его основания.

2611. Вычислить статический момент прямоугольного равнобедренного треугольника, катеты которого равны a, относительно каждой из его сторон.

2612. Доказать, что имеет место следующая формула:

$$\int_a^b (ax + b) f(x)\,dx = (a\xi + b)\int_a^b f(x)\,dx,$$

где ξ – абсцисса центра масс криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$, ограниченной линией $y = f(x)$.

2613. Найти центр масс симметричного параболического сегмента с основанием, равным a, и высотой h.

2614. Прямоугольник со сторонами a и b разбивается на две части дугой параболы, вершина которой совпадает с одной из вершин прямоугольника и которая проходит через его противоположную вершину (рис. 36). Найти центр масс обеих частей S_1 и S_2 прямоугольника.

2615. Найти координаты центра масс полуокружности

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

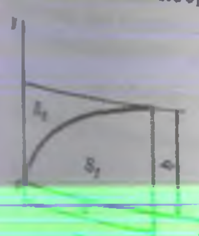

Рис. 36

2616. Найти координаты центра масс полукруга, ограниченного осью абсцисс и полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

2617. Найти центр масс дуги окружности радиуса R, стягивающей центральный угол α.

*) Во всех задачах этого раздела (2610–2662) плотность принимается равной единице.

2618. Найти координаты центра масс фигуры, огранич[енной] осями координат и параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

2619. Найти координаты центра масс фигуры, ограни[ченной] координатными осями и дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащ[ей в] первом квадранте.

2620. Найти статический момент дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащей в первом квадранте, относительно оси абсцисс.

2621. Найти координаты центра масс фигуры, огранич[енной] дугой синусоиды $y=\sin x$ и отрезком оси абсцисс (от $x_1=0$ до $x_2=\pi$).

В задачах 2622–2624 найти статический момент фигуры, ограниченной данными линиями, относительно оси абсцисс:

2622. $y=\frac{2}{1+x^2}$ и $y=x^2$.

2623. $y=\sin x$ и $y=\frac{1}{2}$ (для одного сегмента).

2624. $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

2625. Найти координаты центра масс фигуры, огранич[енной] замкнутой линией $y^2=ax^2-x^4$.

2626. Найти координаты центра масс дуги цепной ли[нии] $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, содержащейся между точками с абсциссами $x_1=\ldots$ и $x_2=a$.

2627. Доказать, что статический момент произвольной [дуги] параболы относительно оси параболы пропорционален раз[ности] радиусов кривизны в конечных точках дуги. Коэффициент [про]порциональности равен $\frac{p}{3}$, где p – параметр параболы.

2628. Найти координаты центра масс первой арки цикл[оиды] $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

2629. Найти координаты центра масс фигуры, ограни[ченной] первой аркой циклоиды и осью абсцисс.

2630. Найти координаты центра масс дуги [астроиды] $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной в первом ква[дранте].

2631. Найти координаты центра масс фигуры, огр[аниченной] осями координат и дугой астроиды (в первом квадранте).

2632. Доказать, что абсцисса и ордината центра масс сектора, ограниченного двумя полярными радиусами и линией, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, выражаются так:

$$x=\frac{2}{3}\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\cos\varphi\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi},\quad y=\frac{2}{3}\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3\sin\varphi\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi}.$$

2633. Найти декартовы координаты центра масс сектора, ограниченного одним полувитком архимедовой спирали $\rho=a\varphi$ (от $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\pi$).

2634. Найти центр масс сектора круга радиуса R с центральным углом, равным 2α.

2635. Найти декартовы координаты центра масс фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

2636. Найти декартовы координаты центра тяжести фигуры, ограниченной правой петлей лемнискаты Бернулли $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

2637. Доказать, что декартовы координаты центра масс дуги линии, уравнение которой дано в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, выражаются так:

$$x=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\cos\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi},\quad y=\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}.$$

2638. Найти декартовы координаты центра масс дуги логарифмической спирали $\rho=ae^{\varphi}$ (от $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2=\pi$).

2639. Найти декартовы координаты центра масс дуги кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (от $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\pi$).

2640. На каком расстоянии от геометрического центра лежит центр масс полукруга радиуса R?

2641. Найти центр масс поверхности полусферы.

2642. Дан прямой круговой конус; радиус основания его R, высота H. Найти расстояние от основания конуса до центра масс его боковой поверхности, полной поверхности и объема.

2643. На каком расстоянии от основания лежит центр тела, ограниченного параболоидом вращения и плоск перпендикулярной к его оси? Высота тела h.

2644. Найти момент инерции отрезка $AB = l$ относит оси, лежащей с ним в одной плоскости, зная, что конец A резка отстоит от оси на a единиц, конец B – на b единиц.

2645. Найти момент инерции полуокружности радиу относительно ее диаметра.

2646. Найти момент инерции дуги линии $y = e^x$ $(0 \leq x$ относительно оси абсцисс.

2647. Вычислить момент инерции одной арки циклои $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ относительно обеих осей динат.

2648. Найти момент инерции прямоугольника со сторо a и b относительно стороны a.

2649. Найти момент инерции треугольника с основани высотой h относительно:

1) основания;

2) прямой, параллельной основанию, проходящей через шину;

3) прямой, параллельной основанию, проходящей центр тяжести треугольника.

2650. Найти момент инерции полукруга радиуса R отн тельно его диаметра.

2651. Найти момент инерции круга радиуса R относите его центра.

2652. Найти момент инерции эллипса с полуосями a и b носительно обеих его осей.

2653. Найти момент инерции цилиндра, радиус основ которого R, высота H, относительно его оси.

2654. Найти момент инерции конуса, радиус основания торого R, высота H, относительно его оси.

2655. Найти момент инерции шара радиуса R относит его диаметра.

2656. Эллипс с полуосями a и b вращается вокруг своих осей. Найти момент инерции получающегося те соид вращения) относительно оси вращения.

2657. Найти момент инерции параболоида вращения основания которого R, высота H, относительно оси вращ

2658. Вычислить момент инерции тела, ограниченного однополостным гиперболоидом

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1$$

и плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, относительно оси Oz.

2659. Криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, вращается: 1) вокруг оси Ox, 2) вокруг оси Oy. Вычислить момент инерции получающегося тела относительно оси вращения.

2660. Найти момент инерции боковой поверхности цилиндра (радиус основания R, высота H) относительно его оси.

2661. Найти момент инерции боковой поверхности конуса (радиус основания R, высота H) относительно его оси.

2662. Найти момент инерции поверхности шара радиуса R относительно его диаметра.

Теоремы Гульдина

2663. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. Найти объем тела, которое при этом получается.

2664. Эллипс с осями $AA_1 = 2a$ и $BB_1 = 2b$ вращается вокруг прямой, параллельной оси AA_1 и отстоящей от нее на расстоянии $3b$. Найти объем тела, которое при этом получается.

2665. Астроида вращается вокруг прямой, проходящей через два соседних острия. Найти объем и поверхность тела, которое при этом получается (см. задачу 2630).

2666. Фигура, образованная первыми арками циклоид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad \text{и}$$

$$x = a(t - \sin t), \quad y = -a(1 - \cos t),$$

вращается вокруг оси ординат. Найти объем и поверхность тела, которое при этом получается.

2667. Квадрат вращается вокруг прямой, лежащей в его плоскости и проходящей через одну из его вершин. При каком положении этой прямой относительно квадрата объем получающегося тела вращения будет наибольшим? Тот же вопрос для треугольника.

§ 2. Некоторые задачи физики

2668. Скорость тела задается формулой $v = \sqrt{1+t}$ м/с. [illegible]ти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала [illegible]ния.

2669. При гармоническом колебательном движении [illegible] абсцисс около начала координат скорость $\frac{dx}{dt}$ дается форму[illegible]

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$$

(t – время, T – период колебания, φ_0 – начальная фаза). [illegible] положение точки в момент времени t_2, если известно, [illegible] момент t_1 она находилась в точке $x = x_1$.

Сила взаимодействия двух точечных масс определяет[illegible] формуле $f = k\frac{mM}{r^2}$, где m и M – массы точек, r – расстоя[illegible] между ними, а k – коэффициент пропорциональности, рав[illegible] $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг$\cdot$с^2 (закон Ньютона). Учитывая это, ре[illegible] задачи 2670–2678. (Предполагается, что плотность посто[illegible])

2670. Стержень AB, длина которого l, масса M, притя[illegible] точку C массы m, которая лежит на его продолжении [illegible]стоянии a от ближайшего конца B стержня. Найти силу [illegible]модействия стержня и точки. Какую точечную массу [illegible] поместить в A, для того чтобы она действовала на C с той [illegible] силой, что и стержень AB? Какую работу совершит сила [illegible]тяжения, когда точка, отстоящая от стержня на расстоя[illegible] приблизится к нему на расстояние r_2, двигаясь вдоль пря[illegible] составляющей продолжение стержня?

2671. С какой силой полукольцо радиуса r и массы M [illegible]ствует на материальную точку массы m, находящуюся [illegible] центре?

2672. С какой силой проволочное кольцо массы M, радиуса R действует на материальную точку C массы m, [illegible] прямой, проходящей через центр кольца перпенди[illegible] плоскости? Расстояние от точки до центра кольца [illegible] кую работу совершит сила притяжения при перемеще[illegible] из бесконечности в центр кольца?

2673. Используя результат предыдущей задачи, вычислить, с какой силой плоский диск, радиус которого равен R, масса M, действует на материальную точку массы m, которая лежит на [illegible] оси на расстоянии a от центра.

2674. Используя результат предыдущей задачи, вычислить, с какой силой действует на материальную точку массы m бес[illegible]конечная плоскость, на которой равномерно распределена масса с поверхностной плотностью σ. Расстояние от точки до плоско[illegible]сти равно a.

2675*. Радиусы оснований усеченного прямого кругового ко[illegible]нуса равны R и r, высота h, плотность γ. С какой силой действу[illegible]ет он на материальную точку массы m, помещенную в его вер[illegible]шине?

2676. С какой силой материальная ломаная $y = |x| + 1$ при[illegible]тягивает материальную точку массы m, находящуюся в начале координат? (Линейная плотность равна γ.)

2677. Доказать, что материальная ломаная $y = a|x| + 1$ ($a \geq 0$) притягивает материальную точку, находящуюся в нача[illegible]ле координат, с одной и той же силой независимо от a, т. е. [illegible] от величины угла между сторонами ломаной.

2678*. Два одинаковых стержня (длиной l и массы M каж[illegible]дый) лежат на одной прямой на расстоянии l один от другого. Подсчитать силу их взаимного притяжения.

2679. Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную m. Какова работа силы тяжести за время от на[illegible]чала движения до полного испарения капли? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем.)

2680. Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме усеченного конуса высоты H, имеющего радиусы оснований R и r ($r < R$)? Плотность равна d (песок поднимают с поверхности земли, на которой покоится большее основание конуса).

2681. [illegible] пирамиды Хеопса приблизительно таковы: [illegible] ребро основания (квадрата) 200 м. Плотность [illegible] из которого она сделана, приблизительно равна [illegible] кг/м^3. Вычислить работу, затраченную при ее построй[illegible]ке на преодоление силы тяжести.

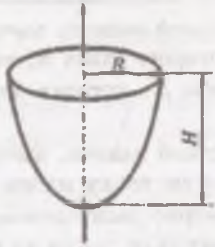

Рис. 37

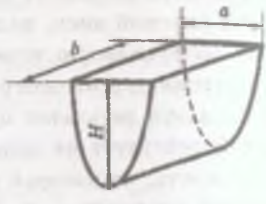

Рис. 38

2682. Вычислить работу, которую необходимо затратить, для того чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар высотой $H = 5$ м, имеющий в основании круг радиуса $R = 3$ м.

2683. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности d из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной вниз конуса, высота которого равна H, а радиус основания R. Как изменится результат, если конус будет обращен вершиной кверху?

2684. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический резервуар радиуса $R = 0{,}6$ м.

2685. Котел имеет форму параболоида вращения (рис. 37). Радиус основания $R = 2$ м, глубина котла $H = 4$ м. Он наполнен жидкостью, плотность которой $d = 800$ кг/м^3. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

2686. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из цистерны, которая имеет следующие размеры (рис. 38): $a = 0{,}75$ м, $b = 1{,}2$ м, $H = 1$ м. Боковая поверхность цистерны – параболический цилиндр.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна $\frac{1}{2}J\omega^2$, где ω – угловая скорость, а J – момент инерции относительно оси вращения. Зная это, решить задачи 2687–2692.

2687. Стержень AB (рис. 39) вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси OO' с угловой скоростью $\omega = 10\pi$ рад/с. Поперечное сечение стержня $S = 4$ см^2, длина его $l = 20$ см, плот

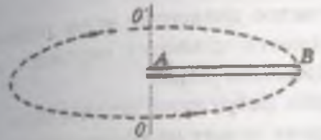

Рис. 39

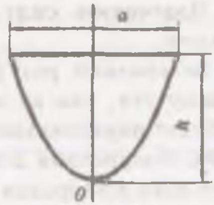

Рис. 40

ность материала, из которого он изготовлен, $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти кинетическую энергию стержня.

2688. Прямоугольная пластинка, стороны которой $a = 50$ см и $b = 40$ см, вращается с постоянной угловой скоростью ω, равной 3π рад/с, вокруг стороны a. Найти кинетическую энергию пластинки. Толщина пластинки d равна 0,3 см, плотность γ материала, из которого сделана пластинка, равна $8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

2689. Треугольная пластинка, основание которой $a = 40$ см, а высота $h = 30$ см, вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью $\omega = 5\pi$ рад/с. Найти кинетическую энергию пластинки, если толщина ее $d = 0{,}2$ см, а плотность материала, из которого она изготовлена, $\gamma = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

2690. Пластинка в форме параболического сегмента (рис. 40) вращается вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью $\omega = 4\pi$ рад/с. Основание сегмента $a = 20$ см, высота $h = 30$ см, толщина пластинки $d = 0{,}3$ см, плотность материала $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти кинетическую энергию пластинки.

2691. Круглый цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота H, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна γ. Найти кинетическую энергию цилиндра.

2692. Тонкая проволока массы M согнута в виде полуокружности радиуса R и вращается вокруг своей оси, проходящей через концы полуокружности, делая n оборотов в минуту. Вычислить ее кинетическую энергию. Вычислить кинетическую энергию, если осью вращения служит касательная в средней точке полуокружности.

2693. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h.

а) Подсчитать силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

б) Во сколько раз увеличится давление, если перевернуть пластинку так, что на поверхности окажется вершина, а основание будет параллельно поверхности воды?

2694. Квадратная пластинка погружена вертикально в воду так, что одна из вершин квадрата лежит на поверхности воды, а одна из диагоналей параллельна поверхности. Сторона квадрата равна a. С какой силой вода давит на каждую сторону пластинки?

2695. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой $a = 6{,}4$ м, нижнее $b = 4{,}2$ м, а высота $H = 3$ м.

2696. Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость (вертикально), так, что одна из осей (длиной $2b$) лежит на поверхности. Как велика сила давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки, если длина погруженной полуоси эллипса равна a, а плотность жидкости d?

2697. Прямоугольная пластинка со сторонами a и b $(a > b)$ погружена в жидкость под углом α к поверхности жидкости. Большая сторона параллельна поверхности и лежит на глубине h. Вычислить силу давления жидкости на каждую из сторон пластинки, если плотность жидкости d.

2698. Прямоугольный сосуд наполнен равными по объему частями воды и масла, причем масло вдвое легче воды. Показать, что давление на каждую стенку сосуда уменьшится на одну пятую, если вместо смеси будет взято одно масло. (Учесть, что все масло находится сверху.)

При решении задач 2699–2700 следует опираться на закон Архимеда: подъемная сила, действующая на погруженное в жидкость твердое тело, равна весу вытесненной им жидкости.

2699. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого $S = 4000$ см², а высота $H = 50$ см, плавает на поверхности воды. Плотность дерева $d = 0{,}8 \cdot 10^3$ [illegible]. а) Какую работу нужно произвести, чтобы вытащить поплавок из воды? б) Вычислить, какую работу нужно затратить, чтобы поплавок погрузить в воду целиком.

2700. Шар радиуса R с плотностью 1 погружен в воду так, что он касается поверхности. Какую работу нужно затратить, чтобы извлечь шар из воды?

Задачи 2701–2706 связаны с явлением истечения жидкости из малого отверстия. Скорость истечения жидкости определяется по закону Торричелли: $v = \sqrt{2gh}$, где h – высота столба жидкости над отверстием, g – ускорение силы тяжести*).

2701. В дне цилиндрического сосуда, площадь основания которого равна 100 см, а высота 30 см, имеется отверстие. Вычислить площадь этого отверстия, если известно, что вода, наполняющая сосуд, вытекает из него в течение 2 мин.

2702. Коническая воронка высотой $H = 20$ см наполнена водой. Радиус верхнего отверстия $R = 12$ см. Нижнее отверстие, через которое вода начинает вытекать из воронки, имеет радиус $r = 0{,}3$ см. а) В течение какого времени уровень воды в воронке понизится на 5 см? б) Когда воронка опорожнится?

2703. В дне котла, имеющего форму полушара радиуса $R = 43$ см, образовалась пробоина площадью $S = 0{,}2$ см². Через сколько времени вода, наполняющая котел, вытечет из него?

2704. Котел имеет форму эллиптического цилиндра с горизонтальной осью. Полуоси эллиптического сечения (перпендикулярного к оси цилиндра) равны b (горизонтальная) и a (вертикальная); образующая цилиндра равна L (рис. 41). Котел наполнен водой до половины. За какое время вода вытечет из котла через отверстие в его дне, имеющее площадь S?

2705. В вертикальной стенке призматического сосуда, наполненного водой, проделана прямоугольная вертикальная щель, высота которой равна h, ширина b. Верхний край щели, параллельный поверхности воды, расположен на расстоянии H от поверхности. Какое количество воды вытечет из сосуда за 1 с, если считать, что уровень воды поддерживается все время на одной высоте? Рассмотреть случай $H = 0$ (задача о водосливе).

*) [illegible] форма закона Торричелли применима только к идеальной [illegible]. Для этой [illegible] жидкости [illegible] формулой $v = \mu\sqrt{2gh}$, где μ – коэффициент, зави[illegible] жидкости и характера отверстия, из которого происходит [illegible]. Для воды в простейшем случае $\mu = 0{,}6$.)

2706. Сосуд, наполненный до краев водой, имеет форму параллелепипеда с площадью основания 100 см^2. В боковой стенке его имеется узкая щель высотой 20 см и шириной 0,1 см (рис. 42). За какое время уровень воды в сосуде понизится на: а) 5 см; б) 10 см; в) 19 см; г) 20 см? (Воспользоваться результатом предыдущей задачи.)

Уравнение состояния идеального газа имеет вид $pv = RT$, где p – давление, v – объем, T – абсолютная температура и R – постоянная для данной массы газа. Решить задачи 2707–2709, считая газы идеальными.

2707. В цилиндре, площадь основания которого 10 см^2, а высота 30 см, заключен атмосферный воздух. Какую работу необходимо затратить, чтобы вдвинуть поршень на 20 см, т. е. вдвинуть его так, чтобы он остановился на расстоянии 10 см от дна цилиндра (рис. 43)? Атмосферное давление равно 10^5 Па. Процесс протекает изотермически, т. е. при постоянной температуре.

2708. В цилиндрическом сосуде, поперечное сечение которого 100 см^2, заключен воздух при атмосферном давлении. В сосуде имеется поршень. Первоначальное расстояние его от дна сосуда равно 0,1 м. Цилиндр помещен в пустоту, благодаря чему воздух в нем расширяется, выталкивая поршень. 1) Вычислить работу, совершаемую воздухом в цилиндре, когда он поднимает поршень на высоту: а) 0,2 м, б) 0,5 м, в) 1 м. 2) Может ли эта работа неограниченно увеличиваться при неограниченном расширении газа? (Процесс, как и в предыдущем примере, протекает изотермически.)

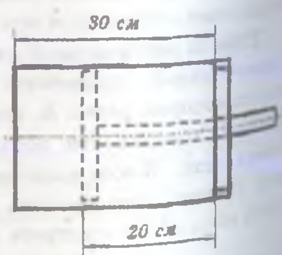

Рис. 43

2709. В цилиндрическом сосуде объемом $v_0 = 0{,}1$ м^3 находится атмосферный воздух, который подвергается сжатию быстрым вдвиганием поршня (считаем при этом, что процесс протекает без притока или отдачи тепла, т.е. адиабатически). Какую работу надо затратить, чтобы сжать воздух в сосуде до объема $v = 0{,}03$ м^3? (Атмосферное давление равно 10^5 Па.) При адиабатическом процессе давление и объем газа связаны соотношением $pv^\gamma = p_0v_0^\gamma$ (уравнение Пуассона). Для двухатомных газов (а также для воздуха) $\gamma = 1{,}40$.

По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. На основании этого закона решить задачи 2710–2711.

2710. Тело, температура которого 25°, погружено в термостат (в котором поддерживается температура 0°). За какое время тело охладится до 10°, если за 20 мин оно охлаждается до 20°?

2711. Тело, температура которого 30°, за 30 мин пребывания в термостате, температура которого 0°, охладилось до 22,5°. Какова будет температура тела через 3 часа после начала опыта?

По закону Кулона сила взаимодействия двух электрических зарядов равна $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ Н, где q_1 и q_2 – величины зарядов в кулонах, r – расстояние между зарядами в метрах, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м $\left(4\pi\varepsilon_0 = 1{,}11\cdot10^{-10}\right)$ и ε – диэлектрическая проницаемость среды относительно вакуума (для воздуха $\varepsilon = 1$). На основании этого закона решить задачи 2712 – 2714.

2712. Бесконечная прямая равномерно заряжена положительным электричеством (линейная плотность электричества σ). С какой силой действует эта прямая на единичный заряд, находящийся в точке A на расстоянии a от нее? Диэлектрическая проницаемость среды равна единице.

2713. Два электрических заряда: $q_1 = 6{,}67\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2 = 10\cdot10^{-9}$ Кл находятся на расстоянии 10 см друг от друга.

Разделяющей их средой служит воздух. Сначала оба заряда закреплены неподвижно, затем заряд q_2 освобождается. Тогда под действием силы отталкивания заряд q_2 начнет перемещаться, удаляясь от заряда q_1. Какую работу совершит сила отталкивания, когда заряд: а) удалится на расстояние 30 см; б) удалится в бесконечность?

2714. Два электрических заряда: $q_1 = 33{,}3 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 40 \cdot 10^{-9}$ Кл, находятся на расстоянии 20 см друг от друга. Каково будет расстояние между зарядами, если мы приблизим второй к первому, затратив при этом работу $18 \cdot 10^5$ Дж? (Разделяющей средой служит воздух.)

2715. Напряжение на клеммах электрической цепи $V = 120$ В. В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью 0,1 Ом в секунду. Кроме того, в цепь включено постоянное сопротивление $r = 10$ Ом. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение двух минут?

2716. Напряжение на клеммах электрической цепи, равное первоначально 120 В, равномерно падает, убывая на 0,01 В в секунду. Одновременно с этим в цепь вводится сопротивление тоже с постоянной скоростью, именно 0,1 Ом в секунду. Кроме того, в цепи имеется постоянное сопротивление, равное 12 Ом. Сколько кулонов электричества протечет через цепь за 3 мин?

2717. При изменении температуры сопротивление металлических проводников меняется (при обычных температурах) по закону $R = R_0(1 + 0{,}004\theta)$, где R_0 – сопротивление при 0° C и θ – температура по Цельсию. (Этот закон справедлив для большинства чистых металлов.) Проводник, сопротивление которого при 0° C равно 10 Ом, равномерно нагревается от $\theta_1 = 20°$ до $\theta_2 = 200°$ в течение 10 мин. В это время по нему идет ток под напряжением в 120 В. Сколько кулонов электричества протечет за это время через проводник?

2718. Закон изменения напряжения синусоидального тока, имеющего частоту ω, дается следующей формулой: $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где E_0 – максимальное напряжение, φ – фаза, а t – время. Найти среднее значение квадрата напряжения за 1 период. Показать, что при постоянном сопротивлении переменный ток выделяет за 1 период столько же тепла, сколько постоянный, имеющий напряжение, равное $\sqrt{\left(E^2\right)_{cp}}$. (Ве этого выражение $\sqrt{\left(E^2\right)_{ср}}$ называют эффективным напряжение переменного тока.)

2719. Напряжение синусоидального тока дается формуло $E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$, а ток – формулой $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)$, где E_0 I_0 – постоянные величины (наибольшие значения напряжени и тока), T – период, а φ_0 – так называемая разность фаз. Вычислить работу тока за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = T$ и показать что наибольшее значение эта работа будет иметь тогда, когда разность фаз φ_0 равна нулю.

2720. Найти время, в течение которого 1 кг воды нагреется электроприбором от 20° С до 100° С, если напряжение тока 120 В, сопротивление спирали 14,4 Ом, температура воздуха в комнате 20° С и если известно, что 1 кг воды остывает от 40° С до 30° С за 10 мин. (По закону Джоуля–Ленца $Q = I^2 Rt$, где Q – количество теплоты в джоулях, I – ток в амперах, R – сопротивление в омах и t – время в секундах; удельная теплоемкость воды $4190 \frac{Дж}{кг \cdot К}$. Кроме того, воспользоваться законом Ньютона об охлаждении; см. задачу 2710.)

2721. Воздух, наполняющий сосуд вместимостью 3 л, содержит 20% кислорода. Сосуд имеет две трубки. Через одну из них в сосуд начинают впускать чистый кислород, через другую вытекает наружу столько же воздуха, сколько притекает в сосуд кислорода. Какое количество будет содержаться в сосуде, после того как через него протечет 10 л газа?

2722. Воздух содержит $a\%$ $(= 8\%)$ CO_2; он пропускается через цилиндрический сосуд с поглотительной массой. Тонкий слой массы поглощает количество газа, пропорциональное его концентрации и толщине слоя.

а) Если воздух, прошедший слой в H см $(= 10$ см$)$ толщиной, содержит $b\%$ $(= 2\%)$ CO_2, то какой толщины H_1 должен быть поглотительный слой, для того чтобы, выходя из поглотителя, воздух содержал только $c\%$ $(= 1\%)$ углекислоты?

б) Сколько [illegible] углекислоты (в %) останется в воздухе, прошедшем [illegible] поглотитель, если толщина поглотительного слоя будет равна 30 см?

2723. Если при прохождении через слой воды толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 30 м? Количество света, поглощенного при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально толщине слоя и количеству света, падающего на его поверхность.

2724. Если первоначальное количество фермента 1 г через час становится равным 1,2 г, то чему оно будет равно через 5 часов после начала брожения, если считать, что скорость прироста фермента пропорциональна его наличному количеству?

2725. Если через два часа после начала брожения наличное количество фермента составляет 2 г, а через три часа 3 г, то каково было первоначальное количество фермента? (См. предыдущую задачу.)

2726. 2 кг соли растворяются в 30 л воды. Через 5 мин растворяется 1 кг соли. Через какое время растворится 99% первоначального количества соли? (Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией насыщенного раствора, которая равна 1 кг на 3 л, и концентрацией раствора в данный момент.)

Глава IX

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

Сходимость числового ряда

В задачах 2727–2736 для каждого ряда: 1) найти сумму n первых членов ряда $\left(S_n\right)$, 2) доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и 3) найти сумму ряда (S).

2727*. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2728. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

2729. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2730. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$

2731. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$

2732. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

2733. $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

2734. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

2735. $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

2736. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\ldots$

Ряды с положительными членами

В задачах 2737–2753 вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью признаков сравнения.

2737. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\ldots$

2738. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2739. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

2740. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots$

2741. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)n}+\ldots$

2742. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

2743. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

2744. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

2745. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2746. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}.$

2747. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2.$

2748. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}.$

2749. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}.$

2750. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$

2751. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}.$

2752. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right).$

2753. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right).$

В задачах 2754–2762 доказать сходимость данных рядов с помощью признака Даламбера.

2754. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

2755. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

2756. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

2757. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$

2758. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

2759. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

2760. $\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2761. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

2762. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$

В задачах 2763–2766 доказать сходимость данных рядов с помощью радикального признака Коши.

2763. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

2764. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$

2765. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$

2766. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$

В задачах 2767–2770 вопрос о сходимости данных рядов решить с помощью интегрального признака Коши.

2767. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$

2768. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

2769. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

2770. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

В задачах 2771–2784 выяснить, какие из данных рядов сходятся, какие расходятся.

2771. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$

2772. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$

2774. $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

2775. $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

2776. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$

2777. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\ldots+\frac{n}{1+n^2}+\ldots$

2778. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3^n}+\ldots$

2779. $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}+\ldots$

2780. $2+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots$

2781. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}+\ldots$

2782. $\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\ldots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$

2783. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2784*. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2n}+\ldots$

В задачах 2785–2789 доказать каждое из соотношений с помощью ряда, общим членом которого является данная функция.

2785. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

2786. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0 \quad (a>0).$

2787. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0.$

2788. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0.$

2789. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$

Ряды с произвольными членами. Абсолютная сходимость

В задачах 2790–2799 выяснить, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие не абсолютно, какие расходятся.

2790. $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2791. $1-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

2792. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2793. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$

2794. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$

2795. $2-\frac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

2796. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2797. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$

2798. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

2799. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

2800. Показать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ абсолютно сходится.

2801. Показать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}a_n$ также абсолютно сходится.

§ 2. Функциональные ряды

Сходимость функциональных рядов

В задачах 2802–2816 определить области сходимости рядов.

2802. $1+x+\ldots+x^n+\ldots$

2803. $\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$

2804. $x+x^4+\ldots+x^{n^2}+\ldots$

2805. $x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

2806. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

2807. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\ldots+\frac{1}{1+x^n}+\ldots$

2808. $2x+6x^2+\ldots+n(n+1)x^n+\ldots$

2809. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$

2810. $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{x^n}{1+x^{2n}}+\ldots$

2811. $\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{4}+\ldots+\sin\frac{x}{2^n}+\ldots$

2812. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x^2\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$

2813. $\sin x+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$

2814. $\frac{\cos x}{e^x}+\frac{\cos 2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{\cos nx}{e^{nx}}+\ldots$

2815. $e^{-x}+e^{-4x}+\ldots+e^{-n^2x}+\ldots$

2816. $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{nx}{e^{nx}}+\ldots$

Равномерная (правильная) сходимость

В задачах 2817–2820 доказать, что данные ряды равномерно (правильно) сходятся на всей оси Ox.

2817. $1+\frac{\sin x}{1!}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left[1+(nx)^2\right]}$. **2819.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$. **2820.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

2821. Показать, что ряд $\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}+\frac{1}{4+[\varphi(x)]^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}+\ldots$ сходится равномерно (правильно) в любом интервале, в котором определена функция $\varphi(x)$.

2822. Показать, что ряд $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}+\ldots$ равномерно (правильно) сходится на всей положительной полуоси. Сколько нужно взять членов, чтобы при любом неотрицательном x можно было вычислить сумму ряда с точностью до 0,001?

2823*. Показать, что ряд $\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}+\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}+\ldots$ равномерно сходится в полуинтервале $1+\omega\le x<+\infty$, где ω – любое положительное число. Убедиться, что при любом x из отрезка $2\le x\le 100$ достаточно взять восемь членов, чтобы получить сумму ряда с точностью до 0,01.

2824. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$.

2825. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}.$$

Показать, что функция $f(x)$ определена и непрерывна при любом x. Найти $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Убедиться в том, что для вычисления приближенных значений функции $f(x)$ при любом x с точностью до 0,001 достаточно взять три члена ряда. Найти с указанной точностью $f(1)$ и $f(-0,2)$.

2826. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+n\omega)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-n\omega)^2}\quad(\omega>0).$$

Показать, что функция $f(x)$ определена и непрерывна при любом x. Убедиться, что $f(x)$ – периодическая функция с перио-

Интегрирование и дифференцирование рядов

2827. Показать, что ряд $x^2 + x^6 + \ldots + x^{4n-2} + \ldots$ равномерно сходится на отрезке $-1+\omega \le x \le 1-\omega$, где ω – любое положительное число, меньшее единицы. Интегрированием данного ряда найти в интервале $(-1, 1)$ сумму ряда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots$$

2828. Найти сумму ряда $x + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$

2829. Найти сумму ряда $\frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \ldots$

2830. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + \ldots + ne^{-nx} + \ldots$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна на всей положительной полуоси Ox. Вычислить $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$.

2831. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = 1 + 2\cdot 3x + \ldots + n\cdot 3^{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Вычислить $\int\limits_{0}^{0,125} f(x)dx$.

2832*. Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} + \ldots$$

Вычислить $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} f(x)dx$, предварительно убедившись в том, что функция $f(x)$ непрерывна в заданном интервале интегрирования.

2833*. Функция $f(x)$ определяется рядом

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}.$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

2834. Исходя из соотношения $\int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, найти сумму ряда: 1) $1-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\ldots$; 2) $1-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}+\ldots$

2835. Исходя из соотношения $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}$, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$

2836. Исходя из соотношения

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n} x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2},$$

найти сумму ряда $\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}+\ldots$

2837. Доказать, что ряд $\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 4\pi x}{4}+\ldots+\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}+\ldots$ равномерно сходится на всей числовой оси. Показать, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком интервале.

2838. Исходя из равенства $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$, просуммировать ряды $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ и $1+3x+\ldots$ $\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\ldots$ и показать, что ряд $1+2x+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ равномерно сходится на отрезке $[-\rho,\rho]$, где $|\rho|<1$.

2839. Показать справедливость равенства

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\ldots+\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}+\ldots=\frac{1}{1-x},$$

где $m=2^{n-1}$ и $-1<x<1$.

2840. Убедиться, что функция $y=f(x)$, определяемая рядом $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\ldots$, удовлетворяет соотношению $xy'=y(x+1)$.

§ 3. Степенные ряды

Разложение функции в степенные ряды

2841. Разложить функцию $y = \ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$ (при $x_0 = 1$).

2842. Разложить функцию $y = \sqrt{x^3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$.

2843. Разложить функцию $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 3$.

2844. Разложить функцию $y = \sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

В задачах 2845–2849 разложить данные функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ (ряд Маклорена):

2845. $y = \operatorname{ch} x$. **2846.** $y = x^2 e^x$. **2847.** $y = \cos(x + \alpha)$.

2848. $y = e^x \sin x$. **2849.** $y = \cos x \operatorname{ch} x$.

В задачах 2850–2854 найти первые пять членов ряда Тейлора для данных функций в окрестности точки $x = 0$.

2850. $y = \ln(1 + e^x)$. **2851.** $y = e^{\cos x}$. **2852.** $y = \cos^2 x$.

2853. $y = -\ln\cos x$. **2854.** $y = (1 + x)^x$.

В задачах 2855–2868 разложить данные функции в окрестности точки $x = 0$, пользуясь формулами разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$ и $(1 + x)^m$.

2855. $y = e^{2x}$. **2856.** $y = e^{-x^2}$.

2857. $y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **2858.** $y = \begin{cases} \frac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

2859. $y = \sin\frac{x}{2}$. **2860.** $y = \cos^2 x$.

2861. $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$ **2862.** $y = (x - \operatorname{tg} x)\cos x$.

2863. $y = \ln(10 + x)$. **2864.** $y = x\ln(1 + x)$.

2865. $y = \sqrt{1+x^2}$. **2866.** $y = \sqrt[3]{8-x^3}$.

2867. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. **2868.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

2869. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ в окрестности точки $x = 0$. Воспользовавшись этим разложением, найти сумму ряда $1 + \dfrac{4}{2} + \ldots + \dfrac{n^2}{2^{n-1}} + \ldots$

2870. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, найти значение:

1) седьмой производной от функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ при $x = 0$,

2) пятой производной от функции $y = x^2\sqrt{1+x}$ при $x = 0$,

3) десятой производной от функции $y = x^6 e^x$ при $x = 0$,

4) кривизны линии $y = x\left[\sqrt[3]{(1+x)^4} - 1\right]$ в начале координат.

В задачах 2871–2877, пользуясь разложением функций в ряд Тейлора, вычислить пределы:

2871. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)}{x^3}$. **2872.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$.

2873. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right) + \ln\left(1-x+x^2\right)}{x\left(e^x - 1\right)}$.

2874. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$. **2875.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

2876. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. **2877.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2+\cos x}{x^3 \sin x} - \dfrac{3}{x^4}\right)$.

Интервал сходимости

В задачах 2878–2889 найти интервалы сходимости степенных рядов.

2878. $10x + 100x^2 + \ldots + 10^n x^n + \ldots$

2879. $x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots$

2880. $x + \dfrac{x^2}{20} + \ldots + \dfrac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} + \ldots$ **2881.** $1 + x + \ldots + n!\,x^n + \ldots$

2882. $1+2x^2+\ldots+2^{n-1}x^{2(n-1)}+\ldots$

2883. $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+\ldots$

2884. $1+3x+\ldots+(n-1)\cdot 3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$

2885. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$ 2886. $x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(nx)^n}{n!}+\ldots$

При исследовании сходимости на правом конце интервала учесть, что факториалы больших чисел могут быть выражены приближенно формулой Стирлинга: $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

2887. $x+4x^2+\ldots+(nx)^n+\ldots$

2888. $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$

2889. $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\ldots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\ldots$

2890. Функцию $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$, исходя из соотношения

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

и указать интервал сходимости полученного ряда.

2891. Функцию $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$, исходя из соотношения

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int\limits_0^x\frac{dx}{1-x^2},$$

и указать интервал сходимости полученного ряда.

2892. Функцию $y=\ln\left[(1+x)^{1+x}\right]+\ln\left[(1-x)^{1-x}\right]$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ и указать интервал сходимости полученного ряда.

2893. Функцию $y=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ и указать интервал сходимости полученного ряда. Пользуясь разложением, найти сумму ряда $\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)!}+\ldots$

§ 4. Некоторые применения рядов Тейлора

Вычисления приближенных значений функций

2894. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{e}$, взяв три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$, и оценить погрешность.

2895. Вычислить приближенное значение $\sin 18°$, взяв три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = \sin x$, и оценить погрешность.

2896. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1{,}25}$, взяв четыре члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x) = (1 + x)^m$, и оценить погрешность.

В задачах 2897–2904, пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$ и $\cos x$, вычислить указанные выражения.

2897. e^2 с точностью до 0,001.

[illegible] с точностью до 0,001.

[illegible] $\frac{1}{e}$ с точностью до 0,0001.

2900. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью до 0,0001.

2901. $\sin 1°$ с точностью до 0,0001.

2902. $\cos 1°$ с точностью до 0,001.

2903. $\sin 10°$ с точностью до 0,00001.

2904. $\cos 10°$ с точностью до 0,0001.

В задачах 2905–2911, пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $(1 + x)^m$, вычислить указанные корни с точностью до 0,001.

2905. [illegible]. 2906. $\sqrt[3]{70}$. 2907. $\sqrt[3]{500}$. 2908. $\sqrt[3]{1{,}015}$.

2909. [illegible]250. 2910. $\sqrt[7]{129}$. 2911. $\sqrt[10]{1027}$.

В задачах 2912–[illegible], пользуясь формулой разложения в ряд [illegible] функции $\ln\frac{1+x}{1-x}$, вычислить выражения.

2912. $\ln 8$ с точностью до 0,0001.

2913. $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$ с точностью до 0,000001.

2914. $\lg 5$ с точностью до 0,0001.

Решение уравнений

2915. Дано уравнение $xy + e^x = y$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найти разложение функции y в ряд Тейлора по степеням x. Решить задачу, находя коэффициенты ряда Тейлора последовательным дифференцированием.

2916. Дано уравнение $y = \ln(1 + x) - xy$. Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найти разложение функции y в ряд Тейлора по степеням x. Решить задачу, находя коэффициенты ряда Тейлора последовательным дифференцированием.

В задачах 2917–2919 решить уравнения относительно y (найти явное выражение для y) с помощью ряда Тейлора двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и последовательным дифференцированием.

2917. $y^3 + xy = 1$ (найти три члена разложения).

2918. $2\sin x + \sin y = x - y$ (найти два члена разложения).

2919. $e^x - e^y = xy$ (найти три члена разложения).

Интегрирование функций

В задачах 2920–2929 выразить в форме ряда интегралы, используя разложение в ряд подынтегральных функций; указать области сходимости полученных рядов.

2920. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx.$ **2921.** $\int \frac{\cos x}{x}\,dx.$ **2922.** $\int \frac{e^x}{x}\,dx.$

2923. $\int \frac{e^x}{x^3}\,dx.$ **2924.** $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx.$ **2925.** $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

2926. $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ **2927.** $\int\limits_0^x \sqrt{1+x^3}\,dx.$

2928. $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^9}.$ **2929.** $\int\limits_0^x \frac{\sqrt[3]{1+x^4}-1}{x^2}\,dx.$

В задачах 2930–2934 вычислить приближенные значения определенных интегралов, взяв указанное число членов разложения подынтегральной функции в ряд; указать погрешность.

2930. $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos x}{x}\,dx$ (3 члена). **2931.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{1/4} e^{-x^2}\,dx$ (3 члена).

2932. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 члена). **2933.** $\displaystyle\int\limits_{0,1}^{1}\frac{e^x}{x}\,dx$ (6 членов).

2934. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ (2 члена).

В задачах 2935–2938 вычислить с точностью до 0,001 интегралы.

2935. $\displaystyle\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}\,dx.$ **2936.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{0,5}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

2937. $\displaystyle\int\limits_{0}^{0,8} x^{10}\sin x\,dx.$ **2938.** $\displaystyle\int\limits_{0}^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}.$

2939. Показать, что в интервале $(-0{,}1;\,0{,}1)$ функция $\displaystyle\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ отличается от функции $\operatorname{arctg} x-\dfrac{x^5}{10}$ не больше, чем на 0,0000001.

2940. Принимая во внимание тождество

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

вычислить π с 10 верными знаками.

2941. Разложить в ряд Тейлора функцию $y=e^{x^2}\displaystyle\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$ двумя способами: путем непосредственного вычисления последовательных производных при $x=0$ и путем перемножения рядов.

2942*. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 x^x\,dx.$

2943. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} e^{\sin x}\,dx$ с точностью до 0,0001.

2944. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{\cos x}\,dx$ с точностью до 0,001.

Разные задачи

2945. Вычислить площадь, ограниченную линией $y^2 = x^3 + 1$, осью ординат и прямой $x = \frac{1}{2}$, с точностью до 0,001.

2946*. Вычислить площадь овала $x^4 + y^4 = 1$ с точностью до 0,01.

2947. Вычислить длину дуги линии $25y^2 = 4x^5$ от острия до точки пересечения с параболой $5y = x^2$ с точностью до 0,0001.

2948. Вычислить длину одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ с точностью до 0,001.

2949. Фигура, ограниченная линией $y = \operatorname{arctg} x$, осью абсцисс и прямой $x = \frac{1}{2}$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем тела вращения с точностью до 0,001.

2950. Фигура, ограниченная линиями $y^3 - x^3 = 1$, $4y + x^3 = 0$, прямой $y = \frac{1}{2}$ и осью ординат, вращается вокруг оси ординат. Вычислить объем тела вращения с точностью до 0,001.

2951. Вычислить с точностью до 0,001 координаты центра масс дуги гиперболы $y = \frac{1}{x}$, ограниченной точками с абсциссами $x_1 = \frac{1}{4}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.

2952. Вычислить с точностью до 0,01 координаты центра масс криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = \frac{1}{\ln x}$, прямыми $x = 1,5$ и $x = 2$ и осью абсцисс.

Глава X

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Функции нескольких переменных

2953. Выразить объем z конуса как функцию его образук щей x и высоты y.

2954. Выразить площадь S треугольника как функцию е трех сторон x, y, z.

2955. Составить таблицу значений функции $z = 2x - 3y +$ давая независимым переменным значения от 0 до 5 через ед ницу.

2956. Составить таблицу значений функции $z = \sqrt{x^2 + y^{}}$ давая независимым переменным значения от 0 до 1 через 0, Значения функции вычислять с точностью до 0,01.

2957. Найти значения функции:

1) $z = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ при $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

2) $z = e^{\sin(x+y)}$ при $x = y = \frac{\pi}{2}$;

3) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}$ при $x = 2$, $y = 2$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y =$

2958. Дана функция $F(x, y) = \frac{\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)}{\varphi(xy)\psi(xy)}$. Най $F\left(a, \frac{1}{a}\right)$. В частности, положить $\varphi(u) = u^3$, $\psi(u) = u^2$ и подсч тать $F\left(a, \frac{1}{a}\right)$.

2959. Дана функция $F(x, y) = y^x - \frac{1}{2}x^y$. Если x и y меняю ся с одинаковой скоростью, то какая функция при $x = 3$, $y =$ растет быстрее: та, которая получается из F при фиксированн y (меняется только x), или та же, которая получается при фи сированном x (меняется только y)?

2960. Дана функция

$$\varphi(x, y, z) = y^2 - (y\cos z + z\cos y)x + x^{\frac{y+z}{y-z}}.$$

Переменные y и z сохраняют фиксированные значения y_0 и z_0, причем $y_0 = 3z_0$. Что представляет собой график функции $v = \varphi(x, y_0, z_0)$? Является ли $\varphi(x, y, z)$: 1) рациональной функцией от y, от z; 2) целой функцией от x?

2961*. Функцию $z = f(x, y)$, удовлетворяющую тождественно соотношению $f(mx, my) = m^k f(x, y)$ при любом m, называют однородной функцией k-го порядка. Показать, что однородная функция k-го порядка $z = f(x, y)$ всегда может быть представлена в виде $z = x^k F\left(\frac{y}{x}\right)$.

2962. Однородность функции любого числа независимых переменных определяется аналогично функции двух переменных: например, $f(x, y, z)$ – однородная функция k-го порядка, если $f(mx, my, mz) = m^k f(x, y, z)$ при любом m. Также имеет место свойство $f(x, y, z) = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$; доказать его.

2963. Проверить, что функция $z = F(x, y) = xy$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(ax + bu, cy + dv) = acF(x, y) + bcF(u, y) + adF(x, v) + bdF(u, v).$$

2964. Проверить, что функция $z = F(x, y) = \ln x \ln y$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v)$$

(x, y, u, v положительны).

2965. Из уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ определить z как явную функцию x и y. Будет ли функция однозначной?

2966. Дана сложная функция $z = u^v$, где $u = x + y$, $v = x - y$. Найти значение функции: 1) при $x = 0$, $y = 1$; 2) при $x = 1$, $y = 1$; 3) при $x = 2$, $y = 3$; 4) при $x = 0$, $y = 0$; 5) при $x = -1$, $y = -1$.

2967. $z = \frac{u+v}{uv}$, $u = w^t$, $v = w^{-t}$, $w = \sqrt{x+y}$, $t = 2(x-y)$. Выразить z непосредственно в виде функции от x и y. Является ли z рациональной функцией от u и v; от w и t; от x и y?

2968. Дана сложная функция $z = u^w + w^{u+v}$, где $u = x+y$, $v = x-y$, $w = xy$. Выразить z непосредственно в виде функции от x и y.

2969. $u = (\xi+\eta)^2 - \xi^3 - \eta^3$, $\xi = \frac{e^\omega + e^\varphi}{2}$, $\eta = \frac{e^\omega - e^\varphi}{2}$, $\omega = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $\varphi = 2\ln(x+y+z)$. Выразить u непосредственно в виде функции от x, y и z. Является ли u целой рациональной функцией от ξ и η; от ω и φ; от x, y и z?

2970. Сложную функцию

$$z = \left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^{xy} + x^2 + y^2$$

представить в виде «цепочки» зависимостей из двух звеньев.

2971. Исследовать методом сечений график функции $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$. Что представляют собой сечения плоскостями $x = \text{const}$; $y = \text{const}$; $z = \text{const}$?

2972. Исследовать методом сечений график функции $z = xy$. Что представляют собой сечения плоскостями $x = \text{const}$; $y = \text{const}$; $z = \text{const}$?

2973. Исследовать методом сечений график функции $z = y^2 - x^3$.

2974. Исследовать методом сечений график функции

$$z^3 = ax^2 + by^2 \quad (a > 0,\ b > 0).$$

§ 2. Простейшие свойства функции

Область определения

2975. Область ограничена параллелограммом со сторона $y = 0$, $y = 2$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x - 1$; граница параллелограм исключается. Задать эту область неравенствами.

76. Областью служит фигура, ограниченная параболами и $x = y^2$ (включая границы). Задать эту область нера-ами.

77. Записать с помощью неравенств открытую область, щуюся правильным треугольником с вершиной в начале нат, со сторонами, равными a, причем одна из них на-на по положительной полуоси Ox (треугольник лежит эм квадранте).

78. Область ограничена бесконечным круглым цилиндром а R (границы исключаются) с осью, параллельной оси Oz ходящей через точку (a, b, c). Задать эту область с помо-еравенства.

79. Записать с помощью неравенства область, ограничен-ферой радиуса R с центром в точке (a, b, c) (включая гра-

80. Вершины прямоугольного треугольника лежат внутри радиуса R. Площадь S треугольника является функцией тетов x и y: $S = \varphi(x, y)$. Какова область определения ии $S = \varphi(x, y)$.

81. В шар, радиуса R вписана пирамида с прямоугольным нием, вершина которой ортогонально проектируется в пересечения диагоналей основания. Объем пирамиды я-ся функцией сторон x и y ее основания. Будет ли эта ия однозначной? Составить для нее аналитическое выра-. Найти область определения функции.

82. Квадратная доска состо-четырех квадратных клеток; черных и двух белых, как ю на рис. 44; сторона каж-з них равна единице длины. отрим прямоугольник, сто-которого x и y параллельны нам доски и один из углов ого совпадает с черным ее . Площадь черной части это-ямоугольника будет функци-x и y. Какова область опре-ия этой функции? Выразить ункцию аналитически.

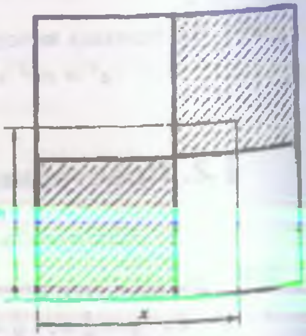

Рис. 44

В задачах 2983–3002 найти области определения функций.

2983. $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$.

2984. $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$.

2985. $z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$.

2986. $z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$.

2987. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.

2988. $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$.

2989. $z = \ln xy$.

2990. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

2991. $z = \arcsin \dfrac{x^2+y^2}{4} + \operatorname{arcsec}\left(x^2 + y^2\right)$.

2992. $z = \dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$.

2993. $z = \sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2994. $z = xy\sqrt{\ln \dfrac{R^2}{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

2995. $z = \operatorname{ctg} \pi\left(x + y\right)$.

2996. $z = \sqrt{\sin \pi\left(x^2 + y^2\right)}$.

2997. $z = \sqrt{x \sin y}$.

2998. $z = \ln x - \ln \sin y$.

2999. $z = \ln\left[x \ln\left(y - x\right)\right]$.

3000. $z = \arcsin\left[2y\left(1 + x^2\right) - 1\right]$.

3001. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

3002. $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $\left(R > r\right)$.

Предел. Непрерывность функции

В задачах 3003–3008 вычислить пределы функций, полагая, что независимые переменные произвольно стремятся к своим предельным значениям.

3003. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

3004. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

3005. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$.

3006. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$.

3007. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$. **3008.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

3009. Показать, что функция $u = \dfrac{x+y}{x-y}$ при $x \to 0$, $y \to 0$ может стремиться к любому пределу (в зависимости от того, как стремятся к нулю x и y). Привести примеры таких изменений x и y, чтобы: а) $\lim u = 1$; б) $\lim u = 2$.

3010. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{2}{x^2+y^2}$. Как ведет себя функция в окрестности точки разрыва?

3011. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$.

3012. Где будет разрывна функция $z = \dfrac{1}{x-y}$?

3013. Где будет разрывна функция $z = \dfrac{1}{\sin \pi x} + \dfrac{1}{\sin \pi y}$?

3014. Где будет разрывна функция $z = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$?

3015*. Исследовать непрерывность функции при $x = 0$, $y = 0$:

1) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, $f(0, 0) = 0$; 2) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$;

3) $f(x, y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$; 4) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$;

5) $f(x, y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$, $f(0, 0) = 0$; 6) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, $f(0, 0) = 0$.

Линии и поверхности уровня

3016. Дана функция $z = f(x, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Построить линии уровня этой функции для $z = 1, 2, 3, 4$.

3017. Функция $z = f(x, y)$ задана следующим образом: в точке $P(x, y)$ ее значение равно углу, под которым виден из этой точки данный в плоскости Oxy отрезок AB. Найти линии уровня функции $f(x, y)$.

В задачах 3018–3021 начертить линии уровня данных функций, придавая z значения от -5 до $+5$ через 1.

3018. $z = xy$.

3019. $z = x^2y + x$.

3020. $z = y\left(x^2 + 1\right)$.

3021. $z = \frac{xy-1}{x^2}$.

3022. Построить линии уровня функции $z = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^2 - y^2\right)$, придавая z значения от -1 до $\frac{3}{2}$ через $\frac{1}{2}$.

3023. Построить линии уровня функции z, неявно заданной уравнением

$$\left(\frac{3}{2}\right)^z\left[(x-5)^2 + y^2\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^z\left[(x+5)^2 + y^2\right],$$

давая z значения от -4 до 4 через единицу.

3024. Построить линии уровня функции z, заданной неявно уравнением $y^2 = 2^{-z}(x - z)$, давая z значения от -3 до 3 через 1.

3025. Найти линии уровня функции z, заданной неявно уравнением $z + x\ln z + y = 0$.

3026. В пространстве дана точка A. Расстояние переменной точки M от точки A есть функция координат точки M. Найти поверхности уровня этой функции, соответствующие расстояниям, равным 1, 2, 3, 4.

3027. Функция $u = f(x, y, z)$ задана следующим образом: в точке $P(x, y, z)$ ее значение равно сумме расстояний этой точки от двух данных точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Указать поверхности уровня функции $f(x, y, z)$.

3028. Найти поверхности уровня функции

$$u = \ln\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3029. Найти поверхности уровня функции $u = \frac{x^2+y^2}{z}$.

3030. Найти поверхности уровня функции:

1) $u = 5^{2x+3y+z}$;

2) $u = \operatorname{tg}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$.

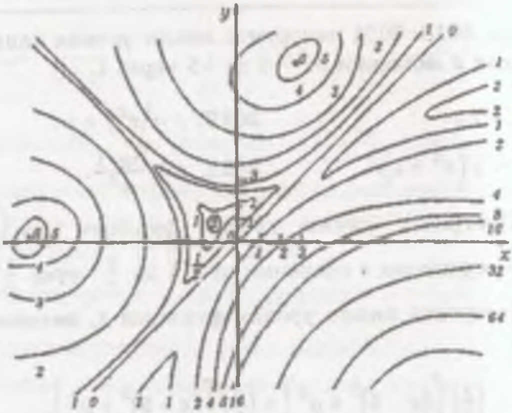

Рис. 45

3031. На рис. 45 изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$. Построить график функции:

1) $z = f(x, 0)$; 2) $z = f(x, 4)$; 3) $z = f(1, y)$;

4) $z = f(-5, y)$; 5) $z = f(x, 3x)$; 6) $z = f(x, x^2)$.

§ 3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Частные производные

3032. Объем газа v является функцией его температуры и давления: $v = f(p, T)$. Средним коэффициентом расширения газа при постоянном давлении и изменении температуры от T_1 до T_2 называют выражение $\frac{v_2 - v_1}{v_1(T_2 - T_1)}$. Что следует назвать коэффициентом расширения при постоянном давлении при данной температуре T_0?

3033. Температура в данной точке A стержня Ox является функцией абсциссы x точки A и времени t: $\theta = f(x, t)$. Какой физический смысл имеют частные производные $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ и $\frac{\partial \theta}{\partial x}$?

3034. Площадь S прямоугольника выражается через основание b и высоту h формулой $S = bh$. Найти $\frac{\partial S}{\partial h}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$ и выяснить геометрический смысл полученных результатов.

3035. Даны две функции: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ (a – постоянная) $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Найти $\frac{du}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$. Сравнить результаты.

В задачах 3036–3084 найти частные производные данных функций по каждой из независимых переменных (x, y, z, u, t, φ и ψ – переменные):

3036. $z = x - y$.

3037. $z = x^3 y - y^3 x$.

3038. $\theta = axe^{-t} + bt$ (a, b – постоянные).

3039. $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$.

3040. $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

3041. $z = \left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^3$.

3042. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

3043. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3044. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

3045. $z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$.

3046. $z = x^y$.

3047. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

3048. $z = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

3049. $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3050. $z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

3051. $z = e^{-\frac{x}{y}}$.

3052. $z = \ln\left(x + \ln y\right)$.

3053. $u = \operatorname{arctg}\frac{v + w}{v - w}$.

3054. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

3055. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.

3056. $z = \left(1 + xy\right)^y$.

3057. $z = xy\ln\left(x + y\right)$.

3058. $z = x^{xy}$.

3059. $u = xyz$.

3060. $u = xy + yz + zx$.

3061. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3062. $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$.

3063. $w = xyz + yzv + zvx + vxy$.

3064. $u = e^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$. **3065.** $u = \sin\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

3066. $u = \ln(x + y + z)$. **3067.** $u = x^{\frac{y}{z}}$. **3068.** $u = x^{y^z}$.

3069. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(3, 4)$.

3070. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ в точке $(1, 2)$. **3071.** $z = (2x + y)^{2x+y}$.

3072. $z = \left(1 + \log_y x\right)^3$. **3073.** $z = xye^{\sin \pi xy}$.

3074. $z = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}$.

3075. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$. **3076.** $z = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$.

3077. $z = \ln\left[xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + \left(xy^2 + yx^2\right)^2}\right]$.

3078. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\frac{x+y}{xy}$.

3079. $z = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+1} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3080. $u = \frac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$. **3081.** $u = \operatorname{arctg}(x - y)^z$.

3082. $u = (\sin x)^{yz}$. **3083.** $u = \ln\frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3084. $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\left(x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv\right) + \ln\cos\left(x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv\right)$.

3085. $u = \frac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\varphi+2\psi)}$. Найти $\left.\frac{\partial u}{\partial \psi}\right|_{\substack{\varphi=\pi/4\\ \psi=\pi}}$.

3086. $u = \sqrt{az^3 - bt^3}$. Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $z = b$, $t = a$.

3087. $z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x = y = 0$.

3088. $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Найти $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\ y=0\\ z=\pi/4}}$.

3089. $u=\ln\left(1+x+y^2+z^3\right)$. Найти $u_x+u_y+u_z$ при $x=y=z=$

3090. $f(x,y)=x^3y-y^3x$. Найти $\left.\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}$.

3091. Какой угол образует с положительным направлени оси абсцисс касательная к линии $z=\dfrac{x^2+y^2}{4}$, $y=4$ в то $(2,4,5)$?

3092. Какой угол образует с положительным направлени оси ординат касательная к линии $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$, $x=1$ в т ке $\left(1,1,\sqrt{3}\right)$?

3093. Под каким углом пересекаются плоские линии, по чающиеся в результате пересечения поверхностей $z=x^2+\dfrac{y^2}{6}$ $z=\dfrac{x^2+y^2}{3}$ плоскостью $y=2$?

Дифференциалы. Приближенные вычислени

В задачах 3094–3097 найти частные дифференциалы дан функций по каждой из независимых переменных.

3094. $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$. **3095.** $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3096. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. **3097.** $u=\ln\left(x^3+2y^3-z^3\right.$

3098. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$. Найти d_yz при $x=2$, $y=5$, $\Delta y=0,$

3099. $z=\sqrt{\ln xy}$. Найти d_xz при $x=1$, $y=$ $\Delta x=0{,}016$.

3100. $u=p-\dfrac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$. Найти d_pu при $p=1$, q $r=5$, $\Delta p=0{,}01$.

В задачах 3101–3109 найти полные дифференциалы функ

3101. $u=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$. **3102.** $z=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

3103. $z=\dfrac{x+y}{x-y}$. **3104.** $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

3105. $z = \sin(xy)$. **3106.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

3107. $z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. **3108.** $z = \operatorname{arctg}(xy)$. **3109.** $u = x^{y/z}$.

Применения к вычислениям

3110. Найти значение полного дифференциала функции $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

3111. Найти значение полного дифференциала функции $z = e^{xy}$ при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}15$, $\Delta y = 0{,}1$.

3112. Найти значение полного дифференциала функции $z = \frac{xy}{x^2-y^2}$ при $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = 0{,}03$.

3113. Вычислить приближенно изменение функции $z = \frac{x+3y}{y-3x}$ при изменении x от $x_1 = 2$ до $x_2 = 2{,}5$ и y от $y_1 = 4$ до $y_2 = 3{,}5$.

3114. Вычислить приближенно $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$.

3115. Подсчитать приближенно $1{,}04^{2{,}02}$.

3116. Найти длину отрезка прямой $x = 2$, $y = 3$, заключенного между поверхностью $z = x^2 + y^2$ и ее касательной плоскостью в точке $(1, 1, 2)$.

3117. Тело взвесили в воздухе ($4{,}1 \pm 0{,}1$ Н) и в воде ($1{,}8 \pm 0{,}2$ Н). Найти плотность тела и указать погрешность подсчета.

3118. Радиус основания конуса равен $10{,}2 \pm 0{,}1$ см, образующая равна $44{,}6 \pm 0{,}1$ см. Найти объем конуса и указать погрешность подсчета.

3119. Для вычисления площади S треугольника по стороне a и углам B и C пользуются формулой $S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$. Найти относительную погрешность δ_s при вычислении S, если относительные погрешности данных элементов равны соответственно δ_a, δ_B, δ_C.

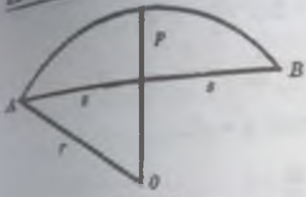

Рис. 46

3120. Сторона треугольника имеет длину 2,4 м и возрастает со скоростью 10 см/с; вторая сторона длиной 1,5 м уменьшается со скоростью 5 см/с. Угол, заключенный между этими сторонами, равный 60°, возрастает со скоростью 2° в секунду. Как и с какой скоростью изменяется площадь треугольника?

3121. В усеченном конусе радиусы оснований равны $R = 30$ см, $r = 20$ см, высота $h = 40$ см. Как изменится объем конуса, если увеличить R на 3 мм, r на 4 мм, h на 2 мм?

3122. Показать, что при вычислении периода T колебаний маятника по формуле $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести) относительная погрешность равна полусумме относительных погрешностей, допущенных при определении величин l и g (все погрешности предполагаются достаточно малыми).

3123. Выразить погрешность при вычислении радиуса r дуги AB (рис. 46) окружности по хорде $2s$ и стрелке p через погрешности ds и dp. Вычислить dr при $2s = 19{,}45$ см $\pm$ 0,5 мм, $p = 3{,}87$ см $\pm$ 0,3 мм.

§ 4. Дифференцирование функций

Сложная функция*)

3124. $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$; $\frac{du}{dt} = ?$

3125. $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \sin t$; $y = e^t$; $\frac{du}{dt} = ?$

3126. $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$; $\frac{dz}{dt} = ?$

3127. $z = x^2y - y^2x$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$; $\frac{dz}{du} = ?$ $\frac{dz}{dv} = ?$

*) Начиная с этого раздела и до конца главы X нумерация задач в настоящем издании отличается от нумерации 9-го и более ранних изданий.

3128. $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$; $\frac{dz}{du} = ?$ $\frac{dz}{dv} = ?$

3129. $u = \ln\left(e^x + e^y\right)$; $\frac{du}{dx} = ?$ Найти $\frac{du}{dx}$, если $y = x^3$.

3130. $z = \operatorname{arctg}(xy)$; найти $\frac{dz}{dx}$, если $y = e^x$.

3131. $u = \arcsin\frac{x}{z}$, $z = \sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx} = ?$

3132. $z = \operatorname{tg}\left(3t + 2x^2 - y\right)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

3133. $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$; $\frac{du}{dx} = ?$

3134. $z = \frac{xy \operatorname{arctg}(xy+x+y)}{x+y}$; $dz = ?$

3135. $z = \left(x^2 + y^2\right)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\frac{dz}{dx} = ?$ $\frac{dz}{dy} = ?$ $dz = ?$

3136. $z = f\left(x^2 - y^2, e^{xy}\right)$; $\frac{dz}{dx} = ?$ $\frac{dz}{dy} = ?$

3137. Показать, что функция $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, где $x = u + v$, $y = u - v$, удовлетворяет соотношению $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{v^2+u^2}$.

3138. Показать, что функция $z = \varphi\left(x^2 + y^2\right)$, где $\varphi(u)$ – дифференцируемая функция, удовлетворяет соотношению $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3139. $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$; убедиться, что

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x \cos y,$$

какова бы ни была дифференцируемая функция F.

3140. $z = \frac{y}{f\left(x^2 - y^2\right)}$; убедиться, что $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, какова бы ни была дифференцируемая функция f.

3141. Показать, что однородная дифференцируемая функция нулевого порядка $z = F\left(\frac{y}{x}\right)$ (см. задачу 2961) удовлетворяет соотношению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3142. Показать, что однородная функция k-го поряд $u = x^k F\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$, где F – дифференцируемая функция, удовлетв ряет соотношению $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = ku$.

3143. Проверить предложение задачи 3142 для функц $u = x^5 \sin\frac{x^2+y^2}{x^2}$.

3144. Дана дифференцируемая функция $f(x, y)$. Доказа что если переменные x, y заменить линейными однородны функциями от X, Y, то полученная функция $F(X, Y)$ связан данной функцией соотношением $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y}$.

Неявно и параметрически заданные функци

В задачах 3145–3155 найти производную $\frac{dy}{dx}$ от функци заданных неявно.

3145. $x^3y - y^3x = a^4$. 3146. $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

3147. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$. 3148. $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) =$

3149. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$. 3150. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

3151. $xy - \ln y = a$. 3152. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

3153. $yx^2 = e^y$. 3154. $ye^x + e^y = 0$. 3155. $y^x = x^y$.

3156. $F(x, y) = F(y, x)$. Показать, что производная от y x может быть выражена с помощью дроби, числитель кото получается из знаменателя перестановкой букв y и x.

3157. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$; найти $\frac{dy}{dx}$ при $x = 6$, y и при $x = 6$, $y = 8$. Дать геометрическое истолкование по ченных результатов.

3158. $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$; найти $\frac{dy}{dx}$ при $x = y = a$.

3159. Доказать, что из $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ след $\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0$.

3160. Доказать, что из $a+b(x+y)+cxy=m(x-y)$ следует $\frac{dx}{a+2bx+cx^2}=\frac{dy}{a+2by+cy^2}$.

3161. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{dz}{dx}=?$ $\frac{dz}{dy}=?$

3162. $x^3-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$; $\frac{dz}{dx}=?$ $\frac{dz}{dy}=?$

3163. $z^3+3xyz=a^3$; $\frac{dz}{dx}=?$ $\frac{dz}{dy}=?$

3164. $e^z-xyz=0$; $\frac{dz}{dx}=?$ $\frac{dz}{dy}=?$

3165. Показать, что, какова бы ни была дифференцируемая функция φ, из соотношения $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ следует $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

3166. $F(x,y,z)=0$. Доказать, что

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=-1.$$

3167. Найти полный дифференциал функции z, определяемый уравнением $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

3168. Функция z задана параметрически: $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$. Выразить z как явную функцию от x и y.

3169. $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$. Выразить z как явную функцию от x и y.

3170. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=kv$. Выразить z как явную функцию от x и y.

В задачах 3171–3175 выразить dz через x, y, z, dx и dy от функций, заданных параметрически.

3171. $x=\frac{u^2+v^2}{2}$, $y=\frac{u^2-v^2}{2}$, $z=uv$.

3172. $x=\sqrt{a}(\sin u+\cos v)$, $y=\sqrt{a}(\cos u-\sin v)$,
$z=1+\sin(u-v)$.

3173. $x=u+v$, $y=u-v$, $z=u^2v^2$.

3174. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u^2$.

3175. $x=v\cos u-u\cos u+\sin u$, $y=v\sin u-u\sin u-\cos u$, $z=(u-v)^2$.

3176. $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$. Выразить dz через u, v, dx и dy.

3177. Соотношения $u = f(x, y)$, $v = F(x, y)$, где f и F – дифференцируемые функции x и y, определяют x и y как дифференцируемые функции от u и v. Доказать, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1.$$

3178. u и v являются функциями x, y, z, удовлетворяющими соотношениям $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Показать, что

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3179. Пусть $y = f(x, t)$, $F(x, y, t) = 0$. Проверить, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

3180. Пусть $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$. Проверить, что

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

§ 5. Повторное дифференцирование

3181. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3182. $z = x^y$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3183. $z = e^x(\cos y + x\sin y)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3184. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Показать, что $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

В задачах 3185–3192 найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ от данных функций.

3185. $z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$. **3186.** $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3187. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. **3188.** $z = \sin^2(ax + by)$.

3189. $z = e^{xe^y}$. **3190.** $z = \frac{x-y}{x+y}$.

3191. $z = y^{\ln x}$. **3192.** $z = \arcsin(xy)$.

3193. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$

3194. $z = e^{xy^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = ?$ **3195.** $z = \ln(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

3196. $z = \sin xy$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$ **3197.** $w = e^{xyz}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = ?$

3198. $v = x^m y^n z^p$; $\frac{\partial^6 v}{\partial x\,\partial y^3\,\partial z^2} = ?$

3199. $z = \ln(e^x + e^y)$; убедиться, что $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ и что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0.$$

3200. $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$; показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3201. $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3202. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

3203. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; показать, что $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$, $\frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$.

3204. При каком значении постоянной a функция $v = x^3 + axy^2$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$?

3205. $z = \frac{y}{y^2 - a^2x^2}$; показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3206. $v = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$; показать, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}\right) = 0.$$

3207. $z = f(x, y)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$; проверить, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}.$$

3208. $v = x\ln(x+r) - r$, где $r^2 = x^2 + y^2$; показать, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x+r}.$$

3209. Найти выражение для второй производной $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ функции y, заданной неявно уравнением $f(x, y) = 0$.

3210. $y = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$. Показать, что $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x}$

каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции φ и

3211. $u = \varphi(x) + \psi(y) + (x - y)\psi'(y)$. Проверить, что

$$(x - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

(φ и ψ – дважды дифференцируемые функции).

3212. $z = y\varphi(x^2 - y^2)$. Проверить, что $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ (φ дифференцируемая функция).

3213. $r = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 0$$

(φ и ψ – дважды дифференцируемые функции).

3214. $u = \frac{1}{y}[\varphi(ax + y) + \psi(ax - y)]$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

3215. $u = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - y) + \psi(x + y)\right]$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3216. $u = xe^y + ye^x$. Показать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}.$$

3217. $u = e^{xyz}$. Показать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + u.$$

3218. $u = \ln\frac{x^2 - y^2}{xy}$. Показать, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right).$$

В задачах 3219–3224 найти дифференциалы второго порядка от данных функций.

3219. $z = xy^2 - x^2y$. 3220. $z = \ln(x - y)$.

3221. $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$. 3222. $z = x\sin^2 y$.

3223. $z = e^{xy}$. 3224. $u = xyz$.

3225. $z = \sin(2x + y)$. Найти d^2z в точках $(0, \pi)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3226. $u = \sin(x + y + z)$; $d^2u = ?$

3227. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $d^2z = ?$

3228. $z^3 - 3xyz = a^3$; $d^2z = ?$

3229. $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0$. Найти d^2z в точке $(2, 1, 2)$.

Замена переменных

3230. Преобразовать дифференциальное выражение

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{dy}{dx} + y,$$

полагая $x = \frac{1}{t}$.

3231. Преобразовать дифференциальное выражение

$$x^2y'' - 4xy' + y,$$

полагая $x = e^z$.

3232. Преобразовать дифференциальное выражение

$$\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ay,$$

полагая $x = \sin t$.

3233. Преобразовать дифференциальное выражение $\frac{y''}{y'^3} + y$, считая y независимой переменной, x – функцией от нее.

3234. Преобразовать выражение $y'y''' - 3y''^2$, принимая за независимую переменную y.

3235. Преобразовать выражение $yy'' - 2\left(y^2 + y'^2\right)$ к новой функции v, полагая $y = \frac{1}{v}$.

3236. Преобразовать к полярным координатам уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$. Полярные координаты связаны с декартовыми формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

3237. Выражение $k = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ преобразовать к полярным координатам ρ, φ.

3238. Функция z зависит от x, y. В выражении $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y}$ сделать замену независимых переменных с помощью формул $x = u\cos v$; $y = u\sin v$.

3239. Оператор Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ преобразовать к полярным координатам.

3240. Выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + kz$ преобразовать к полярным координатам, считая, что $z = \omega(\rho)$ зависит только от ρ и не зависит от φ.

3241. В выражении $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ независимые переменные x и y заменить переменными u и v, а функцию z – переменной w, полагая, что эти переменные связаны соотношениями $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$, $z = \frac{u^2-v^2}{4} - w$.

Глава XI

ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Формула Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных

Формула Тейлора

3242. $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$; разложить функцию $f(x+h, y+k)$ по степеням h и k.

3243. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$; найти приращение, которое получает функция при переходе независимых переменных от значений $x = 5$, $y = 6$ к значениям $x = 5 + h$, $y = 6 + k$.

3244. $f(x, y) = \frac{xy^3}{4} - yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$; найти приращение, которое получает функция при переходе независимых переменных от значений $x = 1$, $y = 2$ к значениям $x = 1 + h$, $y = 2 + k$. Ограничиваясь членами до второго порядка включительно, вычислить $f(1{,}02;\ 2{,}03)$.

3245. $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx$; разложить $f(x + h, y + k, z + l)$ по степеням h, k и l.

3246. Разложить $z = \sin x \sin y$ по степеням $x - \frac{\pi}{4}$ и $y - \frac{\pi}{4}$. Найти члены первого и второго порядка и R_2 (остаточный член второго порядка).

3247. Функцию $z = x^y$ разложить по степеням $x - 1$, $y - 1$, найдя члены до третьего порядка включительно. Использовать результат для вычисления (без таблиц!) $z_1 = 1{,}1^{1{,}02}$.

3248. $f(x, y) = e^x \sin y$; разложить $f(x+h, y+k)$ по сте[пе]ням h и k, ограничиваясь членами третьего порядка отно[си]тельно h и k. Использовать результат для вычислен[ия] $z_1 = e^{0,1} \sin 0{,}49\pi$.

3249. Найти несколько первых членов разложения функц[ии] $e^x \sin y$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$.

3250. Найти несколько первых членов разложения функц[ии] $e^x \ln(1+y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$.

В задачах 3251–3256 разложить в ряд Тейлора при $x_0 =$ $y_0 = 0$ данные функции.

3251. $z = \frac{1}{1-x-y+xy}$. **3252*.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$.

3253. $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$. **3254.** $z = \ln \frac{1-x-y+xy}{1-x-y}$.

3255. $z = \sin(x^2 + y^2)$. **3256.** $z = e^x \cos y$.

3257. Найти несколько первых членов разложения по сте[пе]ням $x-1$, $y-1$ функции z, заданной неявно уравнен[ием] $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$ и равной единице при $x = 1$, $y = 1$.

3258. Получить приближенную формулу $\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 -$ для достаточно малых значений $|x|$, $|y|$.

Экстремумы

В задачах 3259–3267 найти стационарные точки функци[й].

3259. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$. **3260.** $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

3261. $z = xy(a - x - y)$. **3262.** $z = (2ax - x^2)(2by - y^2$

3263. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}, 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\right)$.

3264. $z = \frac{a+bx+cy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$. **3265.** $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$.

3266. $u = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

3267. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

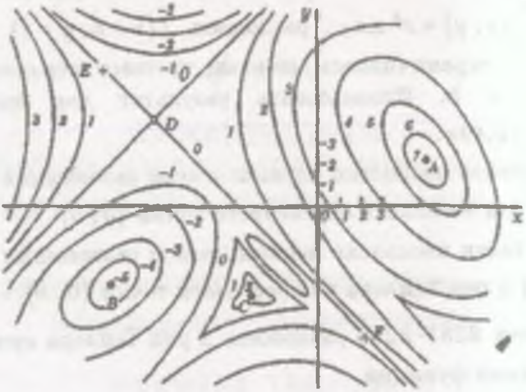

Рис. 47

268. На рис. 47 изображены линии уровня функции (x, y). Какие особенности имеет функция в точках A, B, C, а линии EF?

269. Функция z задана неявно: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z +$ 0. Найти ее стационарные точки.

270. Функция z задана неявно: $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz -$ $-72 = 0$. Найти ее стационарные точки.

271*. Найти точки экстремума функции $z = 2xy - 3x^2 -$ $+10$.

272. Найти точки экстремума функции $z = 4(x - y) -$ y^2.

273. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + xy + y^2 +$ $y + 1$.

274. Убедиться, что функция $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ минимум в точке $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

275. Убедиться, что при $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ и при $x = -\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ функция $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ имеет минимум.

3276. Убедиться, что при $x = 5$, $y = 6$ функция $z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 20$ имеет минимум.

3277. Найти стационарные точки функции $z = x^3y^2 \times (12 - x - y)$, удовлетворяющие условию $x > 0$, $y > 0$, и исследовать их характер.

3278. Найти стационарные точки функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ и исследовать их характер.

Наибольшие и наименьшие значения

3279. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

3280. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

3281. Найти наибольшее значение функции $z = x^2y \times (4 - x - y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

3282. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{-x^2-y^2}\left(2x^2 + 3y^2\right)$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

3283. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

3284. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

3285. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

3286. На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ была бы наименьшей.

3287. Через точку (a, b, c) провести плоскость так, чтобы объем тетраэдра, отсекаемого ею от координатного трехгранника, был наименьшим.

3288. Даны n точек: $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от всех данных точек была бы наименьшей.

3289. Даны три точки $A(0, 0, 12)$, $B(0, 0, 4)$ и $C(8, 0, 8)$. На плоскости Oxy найти такую точку D, чтобы сфера, проходящая через A, B, C и D, имела наименьший радиус.

3290. В данный шар диаметра $2R$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Условные экстремумы

В задачах 3291–3296 исследовать функции на экстремум.

3291. $z = x^m + y^m$ $(m > 1)$ при $x + y = 2$ $(x \geq 0, y \geq 0)$.

3292. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 2a^2$.

3293. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

3294. $z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$ при $y - x = \frac{\pi}{4}$.

3295. $u = x + y + z$ при $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

3296. $u = xyz$ при: 1) $x + y + z = 5$, 2) $xy + xz + yz = 8$.

3297*. Доказать справедливость соотношения

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

3298. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 18y$, причем $3x^2y - y^3 - 6x = 0$. …оказать, что функция $f(x, y)$ достигает экстремума в точках …$= y = \pm\sqrt{3}$.

3299. Найти минимум функции $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, где a, b, … – положительные постоянные, а x, y, z связаны соотношением …$+ y + z = 1$.

3300. Найти наибольшее и наименьшее значения функции …$= y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$ при условии $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$.

3301. На плоскости $3x - 2z = 0$ найти точку, сумма квадра…ов расстояний которой от точек $A(1, 1, 1)$ и $B(2, 3, 4)$ была …а наименьшей.

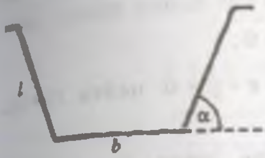

Рис. 48

3302. На плоскости $x + y - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от плоскостей $x + 3z = 6$ и $y + 3z = 2$ была бы наименьшей.

3303. Даны точки $A(4, 0, 4)$, $B(4, 4, 4)$, $C(4, 4, 0)$. На поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти такую точку S, чтобы объем пирамиды $SABC$ был: а) наибольшим, б) наименьшим. Проверить ответ элементарно-геометрическим путем.

3304. Найти прямоугольный параллелепипед данного объема V, имеющий наименьшую поверхность.

3305. Найти прямоугольный параллелепипед данной поверхности S, имеющий наибольший объем.

3306. Найти объем наибольшего прямоугольного параллелепипеда, который можно вписать в эллипсоид с полуосями a, b и c.

3307. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме?

3308. Сечение канала имеет форму равнобочной трапеции данной площади. Как выбрать его размеры, чтобы омываемая поверхность канала была наименьшей (рис. 48)?

3309. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ, найти тот, объем которого наибольший.

3310. Указать наружные размеры открытого (без крышки) ящика формы прямоугольного параллелепипеда с заданной толщиной стенок α и объемом V, чтобы на него пошло наименьшее количество материала.

3311. Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме $12a$ всех его ребер.

3312. Около данного эллипса описать треугольник с основанием, параллельным большой оси, площадь которого была бы наименьшей.

3313. На эллипсе $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти точки, наименее и наиболее удаленные от прямой $3x + y - 9 = 0$.

3314. На параболе $x^2+2xy+y^2+4y=0$ найти точку, наименее удаленную от прямой $3x-6y+4=0$.

3315. На параболе $2x^2-4xy+2y^2-x-y=0$ найти точку, ближайшую к прямой $9x-7y+16=0$.

3316. Найти наибольшее расстояние точек поверхности $2x^2+3y^2+2z^2+2xz=6$ от плоскости $z=0$.

3317. Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

3318. В прямой эллиптический конус, полуоси основания которого равны a и b, высота H, вписана призма с прямоугольным основанием, так, что стороны основания параллельны осям, а пересечение диагоналей основания лежит в центре эллипса. Каковы должны быть стороны основания и высота этой призмы, для того, чтобы ее объем был наибольшим? Каков этот наибольший объем?

3319. Найти правильную треугольную пирамиду заданного объема, имеющую наименьшую сумму ребер.

3320. На эллипсе даны две точки; найти на том же эллипсе третью точку так, чтобы треугольник, имеющий вершинами указанные точки, был наибольшим по площади.

3321. К эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ провести нормаль, наиболее удаленную от начала координат.

3322. На эллипсоиде вращения $\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ найти точки, наименее и наиболее удаленные от плоскости $3x+4y+12z=288$.

3323. Даны плоские линии $f(x,y)=0$ и $\varphi(x,y)=0$. Показать, что экстремум расстояния между точками (α,β) и (ξ,η), лежащими соответственно на этих линиях, имеет место при выполнении следующего условия:

$$\frac{\alpha-\xi}{\beta-\eta}=\frac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}}=\frac{\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}{\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{\substack{x=\xi\\ y=\eta}}}.$$

Пользуясь этим, найти кратчайшее расстояние между эллипсом $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ и прямой $x+y-8=0$.

§ 2. Плоские линии

Касательные и нормали

В задачах 3324–3327 написать уравнения касательной нормали к линиям в указанных точках.

3324. $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$ в точке $(1, 1)$.

3325. $a^2\left(x^4 + y^4\right) - x^3y^3 = 9a^6$ в точке $(a, 2a)$.

3326. $\cos xy = x + 2y$ в точке $(1, 0)$.

3327. $2x^3 - x^2y + 3x^2 + 4xy - 5x - 3y + 6 = 0$ в точке ее пересечения с осью Oy.

Особые точки

В задачах 3328–3340 найти особые точки.

3328. $y^2 = x^2(x-1)$. **3329.** $a^2x^2 = \left(x^2 + y^2\right)y^2$.

3330. $y^2 = ax^2 + bx^5$. **3331.** $y^2 = x(x-a)^2$.

3332. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **3333.** $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0$.

3334. $x^4 + 12x^3 - 6y^3 + 36x^2 + 27y^2 - 81 = 0$.

3335. $x^3 + y^3 + 3axy = 0$. **3336.** $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

3337. $y = x\ln x$. **3338.** $y^2 = \sin^3 x$.

3339. $y^2 = (x-a)^3$. **3340.** $x^5 = \left(y - x^2\right)^2$.

Огибающие

3341. Найти уравнение огибающей семейства прямых $y = ax + f(a)$. В частности, положить $f(a) = \cos a$.

3342. Найти огибающую семейства прямых $y = 2mx + m^4$.

3343. Через точку $A(a, 0)$ проведен пучок прямых. Найти огибающую семейства нормалей, проведенных к прямым этого пучка в точках их пересечения с осью Oy.

3344. Найти огибающую семейства парабол $y^2 = a(x-a)$.

3345. Найти огибающую семейства парабол $ax^2 + a^2y = 1$.

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

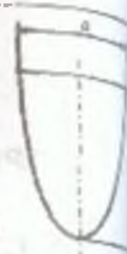

Рис. 23

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной ду парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной парб ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между парб $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v =$ $+ 4$ см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. Н путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Р гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая р будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ра тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

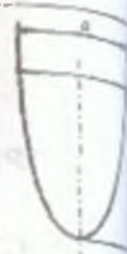

Рис. 2

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дв парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v =$ + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен п пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затра работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ради тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

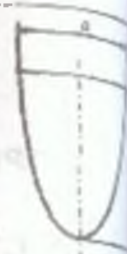

Рис. 2

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v =$ + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. Н путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату в мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен п пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ради тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батарей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

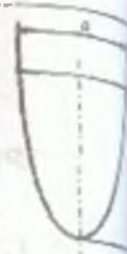

Рис. 2[...]

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб[...] $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д[...] парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб[...]ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб[...] $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд[...] и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью [...] + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На[...] путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату [...]мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен [...] пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж[...] пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра[...]гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра[...] будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ[...] работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр[...] работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада[...] функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ради[...]тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д[...]мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

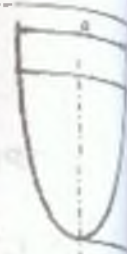

Рис. 2

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дв парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v =$ $+ 4$ см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно прои работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ра тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интеграло

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1,5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{x^2}{2}$, прямыми $x=3$, $x=6$ и осью абсцисс.

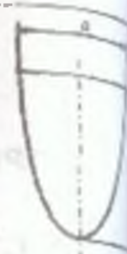

Рис. 2

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y=2x+3$ от параболы $y=x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a=10$ см и стрелкой $h=6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пара... $y=x^2-4x+5$, осью абсцисс и прямыми $x=3$, $x=5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной ... парабол $y=\frac{1}{4}x^2$ и $y=3-\frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пара... ми $y=x^2-6x+10$ и $y=6x-x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между пара... $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд... и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью ... + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На... путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату ... мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен ... пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж... пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра... гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра... будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ... работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр... работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада... функцией времени: $v=v(t)$. Выразить количество m ра... тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д... момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интеграло...

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I=I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E=\varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I=\psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0=60$ В до $E=40$ В. Сопротивление цепи $R=20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a=1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0=120$ В; сопротивление цепи $R=60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a=60$ см, а высота $b=25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

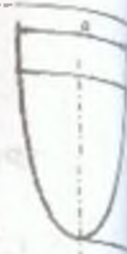

Рис. 2

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пара ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между пара $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v =$ + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. Н путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая р будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является задан функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ра тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батарей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

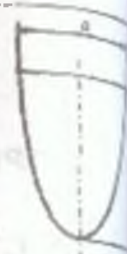

Рис. 2

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб
$y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дв
парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб
ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб
$y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд
и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью v =
+ 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. Н
путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату
мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен
пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растя
пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра
гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра
будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ
работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр
работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада
функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ради
тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д
мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батарей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

Рис. 2

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пара[...] $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д[...] парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пара[...]ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между пара[...] $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью ор[...] и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью [...] + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На[...] путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату [...]мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен [...] пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растя[...] пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра[...]гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра[...] будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ[...] работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр[...] работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является задан[...] функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ра[...]тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 [...]мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

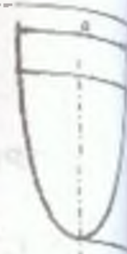

Рис. 23

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб... $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д... парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб... ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб... $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд... и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью ... + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. Н... путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату ... мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен ... пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж... пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра... гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра... будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произв... работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр... работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является задан... функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m радио... тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д... момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интеграло...

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 6 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{x^2}{2}$, прямыми $x=3$, $x=6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y=2x+3$ от параболы $y=x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a=10$ см и стрелкой $h=6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

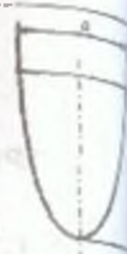

Рис. 2

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб $y=x^2-4x+5$, осью абсцисс и прямыми $x=3$, $x=5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д парабол $y=\frac{1}{4}x^2$ и $y=3-\frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб ми $y=x^2-6x+10$ и $y=6x-x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v=$ + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату в мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен п пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада функцией времени: $v=v(t)$. Выразить количество m ра тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I=I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E=\varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I=\psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0=60$ В до $E=40$ В. Сопротивление цепи $R=20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a=1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0=120$ В; сопротивление цепи $R=60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a=60$ см, а высота $b=25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

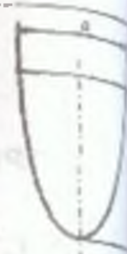

Рис. 2

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дв парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v =$ + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. Н путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ради тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

Рис. 2

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб… $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д… парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб…ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб… $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд… и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью … + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На… путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату … мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен … пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж… пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра… гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра… будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ… работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затра… работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада… функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m радио… тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д… момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интеграло…

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

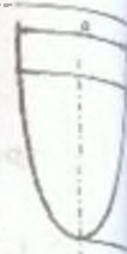

Рис. 2[illegible]

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пара[illegible] $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дв[illegible] парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной пара[illegible]ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб[illegible] $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд[illegible] и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью [illegible] + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. [illegible] путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату [illegible]мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен [illegible] пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж[illegible] пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра[illegible]гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра[illegible] будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно прои[illegible] работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр[illegible] работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада[illegible] функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ра[illegible]тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 [illegible]мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батарей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

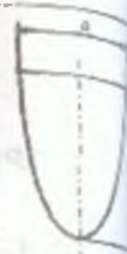

Рис. 23

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб... $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дв... парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб... ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб... $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд... и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью $v = ...$ $+ 4$ см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На... путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату в... мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен п... пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж... пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра... гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра... будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ... работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затра... работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада... функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m радио... тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 д... мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

Рис. 2[illegible]

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб[illegible] $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной д[illegible] парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб[illegible] ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб[illegible] $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд[illegible] и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью [illegible] + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На[illegible] путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату [illegible] мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен [illegible] пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж[illegible] пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра[illegible] гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра[illegible] будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ[illegible] работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр[illegible] работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является задан[illegible] функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ра[illegible] тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 [illegible] мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батарей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 6 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

1595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, прямыми $x = 3$, $x = 6$ и осью абсцисс.

1596. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 2x + 3$ от параболы $y = x^2$.

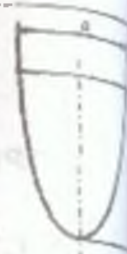

Рис. 2

1597. Вычислить площадь параболического сегмента с основанием $a = 10$ см и стрелкой $h = 6$ см. (Основанием служит хорда, перпендикулярная к оси параболы, рис 23.)

1598. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб... $y = x^2 - 4x + 5$, осью абсцисс и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

1599. Вычислить площадь фигуры, ограниченной ... парабол $y = \frac{1}{4}x^2$ и $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

1600. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параб... ми $y = x^2 - 6x + 10$ и $y = 6x - x^2$.

1601. Вычислить площадь, заключенную между параб... $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке (3, 5), осью орд... и осью абсцисс.

1602. Материальная точка движется со скоростью ... + 4 см/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 с.

1603. Скорость v при свободном падении равна gt. На... путь, пройденный за первые 5 с падения.

1604. Скорость движения, пропорциональная квадрату ... мени, в конце 4-й секунды равна 1 см/с. Чему равен ... пройденный за первые 10 с?

1605. Известно, что сила, противодействующая растяж... пружины, пропорциональна удлинению ее (закон Гука). Ра... гивая пружину на 4 см, произвели работу 10 Дж. Какая ра... будет произведена при растяжении пружины на 10 см?

1606. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно произ... работу 20 Дж. Насколько можно растянуть пружину, затр... работу 80 Дж?

1607. Скорость v радиоактивного распада является зада... функцией времени: $v = v(t)$. Выразить количество m ради... тивного вещества, распавшегося за время от момента T_0 ... мента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1608. Скорость нагревания тела является заданной функцией времени $\psi(t)$. На сколько градусов θ нагреется тело за время от момента T_0 до момента T_1? Выразить решение : а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1609. Переменный ток I является заданной функцией времени $I = I(t)$. Выразить (приближенно – суммой и точно – интегралом) количество Q электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за время T, считая от начала опыта.

1610. Напряжение E переменного тока является заданной функцией времени $E = \varphi(t)$; ток I – тоже заданной функцией времени $I = \psi(t)$. Выразить работу A тока за время от момента T_0 до момента T_1: а) приближенно – суммой, б) точно – интегралом.

1611. Электрическая цепь питается батареей аккумуляторов. В течение 10 мин напряжение на клеммах равномерно падает от $E_0 = 60$ В до $E = 40$ В. Сопротивление цепи $R = 20$ Ом. Найти количество электричества, протекшее через цепь за 10 мин.

1612. Напряжение электрической цепи равномерно падает, уменьшаясь на $a = 1{,}5$ В в минуту. Первоначальное напряжение цепи $E_0 = 120$ В; сопротивление цепи $R = 60$ Ом. Найти работу тока за 5 мин. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем.

1613. В цепь равномерно вводится напряжение. В начале опыта напряжение равно нулю. По истечении минуты напряжение достигает 120 В. Сопротивление цепи равно 100 Ом. Индуктивностью и емкостью пренебрегаем. Найти работу тока в течение одной минуты.

1614. Прямоугольная стенка аквариума, до краев наполненного водой, имеет основание a и высоту b. Выразить силу P давления воды на всю стенку: а) приближенно – с помощью суммы, б) точно – с помощью интеграла.

1615. а) Вычислить силу P, с которой вода, наполняющая аквариум, давит на одну из его стенок. Стенка имеет форму прямоугольника. Длина ее $a = 60$ см, а высота $b = 25$ см. б) Разделить горизонтальной прямой стенку аквариума так, чтобы силы давления на обе части стенки были одинако-

3415. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ в точке $\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}, \dfrac{b\sqrt{3}}{3}, \dfrac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ в точке $(1, 2, -1)$.

3417. $3x^4-4y^3z+4z^2xy-4z^3x+1=0$ в точке $(1, 1, 1)$.

3418. $\left(z^2-x^2\right)xyz-y^5=5$ в точке $(1, 1, 2)$.

3419. $4+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z$ в точке $(2, 3, 6)$.

3420. Показать, что уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^3}=1$ в любой его точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b}+\dfrac{z_0z}{c}=1$.

3421. К эллипсоиду $x^2+2y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$.

3422. К эллипсоиду $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ провести касательную плоскость, отсекающую на положительных полуосях координат равные отрезки.

3423. Показать, что поверхности $x+2y-\ln z+4=0$ и $x^2-xy-8x+z+5=0$ касаются друг друга (т. е. имеют общую касательную плоскость) в точке $(2, -3, 1)$.

3424. Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, пересекаются в одной точке.

3425. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к шару $r\left\{u\cos v, u\sin v, \sqrt{a^2-u^2}\right\}$ в точке $r_0\{x_0, y_0, z_0\}$.

3426. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к гиперболическому параболоиду $r\{a(u+v), b(u-v), uv\}$ в произвольной точке (x_0, y_0, z_0).

3427. Доказать, что поверхности $x^2+y^2+z^2=ax$ и $x^2+y^2+z^2=by$ ортогональны друг к другу.

3428. Показать, что касательная плоскость к поверхности $xyz=a^3$ в любой ее точке образует с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема. Найти этот объем.

3429. Показать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ отсекают на координатных осях отрезки, сумма которых равна a.

3430. Для поверхности $z=xy$ написать уравнение касательной плоскости, перпендикулярной к прямой $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

3431. Показать, что для поверхности $x^2+y^2+z^2=y$ длина отрезка нормали между поверхностью и плоскостью xOy равна расстоянию от начала координат до следа нормали на этой плоскости.

3432. Доказать, что нормаль к поверхности эллипсоида вращения $\frac{x^2+z^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ в любой его точке $P(x, y, z)$ образует равные углы с прямыми PA и PB, если $A(0, -4, 0)$ и $B(0, 4, 0)$.

3433. Доказать, что все нормали к поверхности вращения $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ пересекают ось вращения.

3434. К поверхности $x^2-y^2-3z=0$ провести касательную плоскость, проходящую через точку $A(0, 0, -1)$, параллельно прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.

3435. На поверхности $x^2+y^2+z^2-6y+4z=12$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

3436. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$ в произвольной точке. Выразить коэффициенты этого уравнения:

а) через значения параметров u_0 и v_0;

б) через координаты x_0, y_0, z_0 точки касания.

3437. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости к параболоиду вращения $2pz=x^2+y^2$.

3438. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$.

4021*. Если в каком-либо процессе одно вещество превращается в другое, причем скорость образования продукта пропорциональна наличному количеству превращающегося вещества, то такое явление называют процессом (или реакцией) первого порядка.

Некоторое вещество, начальное количество которого m_0, превращается в другое вещество, а из образовавшегося продукта немедленно начинает получаться второй продукт. Оба превращения происходят как процессы первого порядка; коэффициенты пропорциональности известны: k_1 – в первом процессе и k_2 – во втором.

Какое количество второго продукта образуется через t единиц времени после начала процесса?

4022. В резервуаре, объем которого 100 л, находится рассол, содержащий 10 кг растворенной соли. В резервуар втекает вода со скоростью 3 л/мин, а смесь с такой же скоростью перекачивается во второй резервуар емкостью также 100 л, первоначально наполненный чистой водой, из которого избыток жидкости выливается. Сколько соли будет содержать второй резервуар по прошествии часа? Каково максимальное количество соли во втором резервуаре? Когда это максимальное количество достигается? (Концентрация соли в каждом из резервуаров поддерживается равномерной посредством перемешивания.)

4023. Напряжение и сопротивление цепи равномерно меняются в течение минуты соответственно от нуля до 120 В и от нуля до 120 Ом (см. задачи 3977–3978). Индуктивность цепи постоянна (1 Гн). Начальный ток I_0. Найти зависимость между током и временем в течение первой минуты опыта.

4024*. В узкой горизонтальной цилиндрической трубке AB, герметически закрытой, заключен газ. Трубка равномерно вращается вокруг вертикальной оси OO_1 (рис. 56), проходящей через один из ее концов с угловой скоростью ω. Длина трубки l см, поперечное сечение S см^2, масса заключенного в ней газа M г, давление в покоящейся трубке (постоянное вдоль всей трубки) p_0. Найти распределение давления вдоль трубки при ее вращении, т. е. выразить p как функцию от x.

Рис. 56

4065. Найти условия, при которых уравнение

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

допускает интегрирующий множитель вида $M = F(x + y)$.

4066. Найти условия, при которых уравнение

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$$

допускает интегрирующий множитель вида $M = F(xy)$.

Разные задачи

В задачах 4067–4088 найти общие решения уравнений:

4067. $y' = ax + by + c$.

4068. $ay' + by + cy^m = 0$.

4069. $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$.

4070. $y' = \frac{y^2+xy-x^2}{y^2}$.

4071. $y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$.

4072. $y'(y^2 - x) = y$.

4073. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$.

4074. $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

4075. $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.

4076. $y' = \frac{(x-y)^2}{x(y+1)-x^2}$.

4077. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

4078. $\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0$.

4079. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$.

4080. $y\sin x + y'\cos x = 1$.

4081. $y' - y + y^2\cos x = 0$.

4082. $y' = \frac{\cos x\sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin x\cos y}$.

4083. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

4084. $\left(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right)y\,dx + \left(x\cos\frac{y}{x} - y\sin\frac{y}{x}\right)x\,dy = 0$.

4085. $y' = \frac{[illegible]}{\cos y} - \operatorname{tg} y$.

4086. $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x)$.

4087. $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$.

4049. Найти линии, заданные уравнениями вида $\rho = f(\varphi)$, для которых площадь секторов, ограниченных линией и полярным радиусом постоянной точки (ρ_0, φ_0) и текущей точки (ρ, φ) линии, пропорциональна произведению полярных координат ρ и φ этой текущей точки. Коэффициент пропорциональности равен k.

Уравнения в полных дифференциалах

В задачах 4050–4057 найти общие решения уравнений:

4050. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2y\right)dy = 0.$

4051. $\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx.$ **4052.** $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0.$

4053. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\,dy = 0.$ **4054.** $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}.$

4055. $\frac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}dy + \sin y\,dy = 0.$

4056. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)y\,dy = 0.$

4057. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

Интегрирующий множитель

В задачах 4058–4062 найти интегрирующий множитель и общие решения уравнений:

4058. $\left(x^2 + y\right)dx - x\,dy = 0.$ **4059*.** $y(1 + xy)dx - x\,dy = 0.$

4060. $\left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + 2y\,dy = 0.$

4061. $\frac{y}{x}dx + \left(y^3 - \ln x\right)dy = 0.$

4062. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0.$

4063. Убедиться, что интегрирующим множителем линейного уравнения $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ служит функция $e^{\int P(x)dx}$.

4064. Найти интегрирующий множитель уравнения Бернулли $y' + P(x)y = y^n Q(x)$.

4096. Написать дифференциальное уравнение, изоклинами которого служат: 1) равнобочные гиперболы $xy = a$; 2) параболы $y^2 = 2px$; 3) окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

4097. Найти изоклины дифференциального уравнения семейства парабол $y = ax^2$. Сделать чертеж. Истолковать результат геометрически.

4098. Убедиться, что изоклинами однородного уравнения (и только однородного уравнения) служат прямые, проходящие через начало координат.

4099. Указать линейные уравнения, изоклинами которых являются прямые.

4100. Пусть y_1, y_2, y_3 – ординаты трех любых изоклин некоторого линейного уравнения, соответствующие одной абсциссе. Убедиться, что отношение $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$ сохраняет одно и то же значение, какова бы ни была эта абсцисса.

Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

4101. Дано уравнение $y' = \frac{x^2 + y^2}{10}$. Построить приближенно интегральную кривую, соответствующую отрезку $1 \le x \le 5$, проходящую через точку $M(1, 1)$.

4102. Дано уравнение $y' = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Построить приближенно интегральную кривую, соответствующую отрезку $0{,}5 \le x \le 3{,}5$ проходящую через точку $(0{,}5; 0{,}5)$.

4103. Дано уравнение $y' = yx^3 + x^2$. Применяя способ Эйлера, вычислить y при $x = 1$, если y – частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0} = 0$. Вычислить y с двумя десятичными знаками.

4104. Дано уравнение $y' = \sqrt{x} \cdot y^2 + 1$. Применяя способ Эйлера, вычислить y при $x = 2$, если y – частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=1} = 0$. Вычислить y с двумя десятичными знаками.

4088. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

4089. Найти линию, у которой поднормаль в любой точке так относится к сумме абсциссы и ординаты, как ордината этой точки к ее абсциссе.

4090. Найти линию, обладающую тем свойством, что отрезок касательной в любой ее точке, заключенный между осью Ox и прямой $y = ax + b$, делится точкой касания пополам.

4091. Найти линию, для которой отношение расстояния от нормали в любой ее точке до начала координат к расстоянию от той же нормали до точки (a, b) равно постоянной k.

4092. Найти линию, для которой расстояние от начала координат до касательной в произвольной ее точке равно расстоянию от начала координат до нормали в той же точке.

4093*. Найти линию, обладающую следующим свойством: ордината любой ее точки есть средняя пропорциональная между абсциссой и суммой абсциссы и поднормали, проведенной к линии в той же точке.

4094. В электрическую цепь с сопротивлением $R = \frac{3}{2}$ Ом в течение двух минут равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 В). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число, выражающее индуктивность цепи в генри, равно числу, выражающему ток в амперах. Найти зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.

§ 2. Уравнения первого порядка (продолжение)

Поле направлений. Изоклины

4095. Дано дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$. а) Построить поле направлений, устанавливаемое данным уравнением. б) Выяснить расположение вектора поля относительно полярного радиуса любой точки поля. в) Выяснить вид интегральных кривых уравнения, исходя из поля направлений. г) Найти интегральные кривые, решая данное уравнение обычным методом (разделяя переменные). д) Указать семейство изоклин данного уравнения.

4088. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0.$

4089. Найти линию, у которой поднормаль в любой точке так относится к сумме абсциссы и ординаты, как ордината этой точки к ее абсциссе.

4090. Найти линию, обладающую тем свойством, что отрезок касательной в любой ее точке, заключенный между осью Ox и прямой $y = ax + b$, делится точкой касания пополам.

4091. Найти линию, для которой отношение расстояния от нормали в любой ее точке до начала координат к расстоянию от той же нормали до точки (a, b) равно постоянной k.

4092. Найти линию, для которой расстояние от начала координат до касательной в произвольной ее точке равно расстоянию от начала координат до нормали в той же точке.

4093*. Найти линию, обладающую следующим свойством: ордината любой ее точки есть средняя пропорциональная между абсциссой и суммой абсциссы и поднормали, проведенной к линии в той же точке.

4094. В электрическую цепь с сопротивлением $R = \frac{3}{2}$ Ом в течение двух минут равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 В). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число, выражающее индуктивность цепи в генри, равно числу, выражающему ток в амперах. Найти зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.

§ 2. Уравнения первого порядка (продолжение)

Поле направлений. Изоклины

4095. Дано дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$. а) Построить поле направлений, устанавливаемое данным уравнением. б) Выяснить расположение вектора поля относительно полярного радиуса любой точки поля. в) Выяснить вид интегральных кривых уравнения, исходя из поля направлений. г) Найти интегральные кривые, решая данное уравнение обычным методом (разделяя переменные). д) Указать семейство изоклин данного уравнения.

[illegible] $y|_{x=0}=1$. [illegible] уравнение [illegible]

[illegible] погрешность [illegible]

[illegible] уравнение [illegible]

$y|_{x=0}=0$. [illegible]

[illegible]

[illegible] $y' = y^2 + xy + x^2$ [illegible] $y|_{x=0}=1$.

[illegible]

[illegible]

В задачах 4109—4116 [illegible]

[illegible]

4109. [illegible] $y|_{x=0}=1$.

4110. [illegible]

4111. [illegible]

4112. [illegible]

[illegible]

4115. [illegible]

4116. [illegible]

4105. Дано: уравнение $y' = \frac{xy}{2}$ и начальное условие $y\big|_{x=0} = 1$. Решить это уравнение точно и найти значение y при $x = 0{,}9$. Далее, найти это значение при помощи приближенного метода, разбивая отрезок $[0;\,0{,}9]$ на 9 частей. Указать относительную погрешность последнего результата.

4106. Дано: уравнение $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$ и начальное условие $y\big|_{x=1} = 0$. Решить уравнение точно и, пользуясь каким-либо из приближенных методов интегрирования уравнений, вычислить значение x при $y = 1$ (сравнить со значением x, получаемым при точном решении).

4107. $y' = y^2 + xy + x^2$. Найти по методу последовательных приближений второе приближение для решения, удовлетворяющего начальному условию $y\big|_{x=0} = 1$.

4108. $y' = xy^3 - 1$. Найти при $x = 1$ значение того решения данного уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y\big|_{x=0} = 0$. Ограничиться третьим приближением по методу последовательных приближений. Вычисления вести с двумя десятичными знаками.

В задачах 4109–4116 найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решений уравнений при указанных начальных условиях:

4109. $y' = y^3 - x$; $y\big|_{x=0} = 1$.

4110. $y' = x^2y^2 - 1$; $y\big|_{x=0} = 1$.

4111. $y' = x^2 - y^2$; $y\big|_{x=0} = 0$.

4112. $y' = \frac{1-x^2}{y} + 1$; $y\big|_{x=0} = 1$.

4113. $y' = \frac{xy}{1+x+y}$; $y\big|_{x=0} = 0$.

4114. $y' = e^y + xy$; $y\big|_{x=0} = 0$.

4115. $y' = \sin y - \sin x$; $y\big|_{x=0} = 0$.

4116. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$; $y\big|_{x=1} = 1$.

Особые решения. Уравнения Клеро и Лагранжа

В задачах 4117–4130 найти общие и особые решения уравнений Клеро и уравнений Лагранжа:

4117. $y = xy' + y'^2$.

4118. $y = xy' - 3y'^3$.

4119. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

4120. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

4121. $y = xy' + \sin y'$.

4122. $xy' - y = \ln y'$.

4123. $y = y'^2(x + 1)$.

4124. $2yy' = x\left(y'^2 + 4\right)$.

4125. $y = yy'^2 + 2xy'$.

4126. $y = x(1 + y') + y'^2$.

4127. $y' = \ln(xy' - y)$.

4128. $y = y'(x + 1) + y'^2$.

4129. $y = y'x + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$.

4130. $x = y\left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

В задачах 4131–4133 найти особые решения уравнений, применяя тот же прием, какой используется в случае уравнений Лагранжа и Клеро:

4131. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

4132. $x^2y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0$.

4133. $y'(y' - 2x) = 2\left(y - x^2\right)$.

4134. Доказать теорему: если линейное дифференциальное уравнение является уравнением Клеро, то семейство его интегральных кривых представляет собой пучок прямых.

4135. Площадь треугольника, образованного касательной к искомой линии и осями координат, есть величина постоянная. Найти линию.

4136. Найти линию, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, сумма которых равна $2a$.

4137. Найти линию, для которой произведение расстояний любой касательной до двух данных точек постоянно.

4138. Найти линию, для которой площадь прямоугольника, имеющего сторонами касательную и нормаль в любой точке, равна площади прямоугольника со сторонами, равными по длине абсциссе и ординате этой точки.

4139. Найти линию, для которой сумма нормали и поднормали пропорциональна абсциссе.

4187. $x^2 y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0$. **4188.** $yy'' = y'\left(2\sqrt{yy'} - y'\right)$.

В задачах 4189–4199 найти частные решения уравнений при указанных начальных условиях:

4189. $y''\left(x^2+1\right) = 2xy'$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=3$.

4190. $xy''+x(y')^2 - y' = 0$; $y|_{x=2}=2$, $y'|_{x=2}=1$.

4191. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$; $y|_{x=2}=0$, $y'|_{x=2}=4$.

4192. $2y''=3y^2$; $y|_{x=-2}=1$, $y'|_{x=-2}=-1$.

4193. $yy''=(y')^2-(y')^3$; $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=-1$.

4194. $y^3y''=-1$; $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=0$.

4195. $y^4 - y^3y''=1$; $y|_{x=0}=\sqrt{2}$, $y'|_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4196. $y''=e^{2y}$; $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$.

4197. $2(y')^2 = y''(y-1)$; $y|_{x=1}=2$, $y'|_{x=1}=-1$.

4198*. $x^4y''=(y-xy')^3$; $y|_{x=1}=1$, $y'|_{x=1}=1$.

4199. $y''=xy'+y+1$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$.

4200*. Какая линия обладает тем свойством, что радиус кривизны в любой ее точке пропорционален длине нормали? Принять коэффициент пропорциональности $k = -1$, $+1$, -2, $+2$.

4201. Найти линию, для которой проекция радиуса кривизны на ось Oy есть величина постоянная, равная a.

4202. Найти линию, проходящую через начало координат, у которой отношение площади треугольника MTP (рис. 57) образованного касательной в какой-нибудь точке M линии, ординатой этой точки MP и осью абсцисс, к площади криволинейного треугольника OMP равно постоянному числу k $\left(k > \frac{1}{2}\right)$.

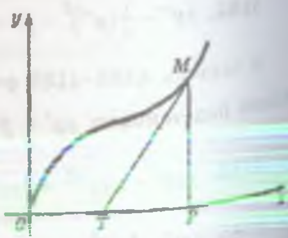

Рис. 57

4203. Найти линию, длина дуги которой, отсчитываемая от некоторой точки, пропорциональна угловому коэффициенту касательной в конечной точке дуги.

4204. Точка массы m вертикально брошена вверх с начальной скоростью v_0. Сила сопротивления воздуха равна kv^2. Поэтому, если принять вертикаль за ось Oy, то при движении вверх имеем $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - kv^2$, а при падении $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + kv^2$, где $v = \frac{dy}{dt}$. Найти скорость, которую будет иметь тело в тот момент, когда оно падает на землю.

4205. Тонкая гибкая и нерастяжимая нить подвешена за оба конца. Какую форму в равновесии примет нить под действием нагрузки, равномерно распределяющейся по проекции нити на горизонтальную плоскость? (Весом нити пренебрегаем.)

4206. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m, если известно, что работа силы, действующей в направлении движения и зависящей от пути, пропорциональна времени, протекшему с момента начала движения. Коэффициент пропорциональности равен k.

4207*. Луч света из воздуха (показатель преломления m_0) падает под углом α_0 с вертикалью в жидкость с переменным показателем преломления. Последний линейно зависит от глубины и постоянен в плоскости, параллельной горизонту; на поверхности жидкости он равен m_1, а на глубине h он равен m_2. Найти форму светового луча в жидкости. (Показатель преломления среды обратно пропорционален скорости распространения света.)

Частные случаи уравнений более высоких порядков

В задачах 4208–4217 найти общие решения уравнений:

4208. $y''' = \frac{1}{x}$.

4209. $y'''' = \cos 2x$.

4210. $y^{X} = e^{ax}$.

4211. $x^2y'' = (y')^2$.

4212. $xy^{V} = y^{IV}$.

4213. $y''' = (y'')^2$.

4214. $y'y''' = 3(y'')^2$.

4215. $yy''' - y'y'' = 0$.

4216. $y''\left[1 + (y')^2\right] = 3y'(y'')^2$.

4217. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

Приближенные решения

4218. При исследовании колебания материальной системы с одной степенью свободы встречается дифференциальное уравнение вида $y'' = f_1(x) + f_2(y) + f_3(y')$. Решить это уравнение графически, если

1) $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = -\sqrt{y}$, $f_3(y') = 0{,}5y'$ и $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$;

2) $f_1(x) = -x$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y') = -0{,}1y' - 0{,}1y'^3$ и $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

4219. $y'' = yy' - x^2$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

1) Решить данное уравнение графически.

2) Найти несколько первых членов разложения решения в степенной ряд.

4220. Найти шесть первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

4221. Найти в форме степенного ряда частное решение уравнения $y'' = x\sin y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

4222. Найти в форме степенного ряда частное решение $y = f(x)$ уравнения $y'' = xyy'$, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Если ограничиться пятью первыми членами разложения, то будет ли этого достаточно для вычисления $f(-0{,}5)$ с точностью до 0,001?

4223. Найти семь первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $yy'' + y' + y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Какого порядка малости будет при $x \to 0$ разность $y - (2 - x - e^{-x})$?

4224. Найти 12 первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'' + yy' - 2 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 y\,dx$ с точностью до 0,001. Вычислить $y'|_{x=0,5}$ с точностью до 0,00001.

4225*. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности $L = 0{,}4$ Гн и электрической ванны. В ванне находится литр воды, подкисленной небольшим количеством серной кислоты. Вода разлагается током, при этом меняются концентрация, а следовательно и сопротивление раствора в ванне. Напряжение на клеммах поддерживается постоянным (20 В). Количество вещества, выделяющееся при электролизе, пропорционально току, времени и электрохимическому эквиваленту вещества (закон Фарадея). Электрохимический эквивалент воды равен 0,000187 г/Кл. Сопротивление раствора в начале опыта $R_0 = 2$ Ом, начальный ток 10 А. Найти зависимость (в форме степенного ряда) объема воды в сосуде от времени.

4226*. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности $L = 0{,}4$ Гн и электрической ванны, первоначальное сопротивление которой 2 Ом. В ванне в литре воды растворено 10 г хлористого водорода. Кислота разлагается током, при этом меняется концентрация раствора (ср. с предыдущей задачей, где количество растворенного вещества не менялось, а менялся объем растворителя). Напряжение на клеммах цепи 20 В, электрохимический эквивалент k хлористого водорода равен 0,000381 г/Кл, начальный ток 10 А. Найти зависимость (в форме степенного ряда) между количеством соляной кислоты в растворе и временем.

§ 4. Линейные уравнения

4227. Функции x^3 и x^4 удовлетворяют некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Убедиться, что они образуют фундаментальную систему, и составить уравнение.

4228. То же для функций e^x и x^2e^x.

4229. Функции x, x^3 и e^x образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения третьего порядка. Составить это уравнение.

4230. Функции x^2 и x^3 образуют фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения второго порядка. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 0$.

4231. Функции $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$ удовлетворяют некоторому линейному однородному уравнению второго порядка:
а) проверить, что они составляют фундаментальную систему решений; б) составить уравнение; в) показать, что другой фундаментальной системой этого уравнения являются функции 1 и $\cos 2x$.

4232*. Если y_1 есть частное решение уравнения

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0,$$

то

$$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)\,dx} \frac{dx}{y_1^2} \quad (C \text{ – постоянная})$$

тоже является решением. Показать это тремя способами:

1) непосредственной проверкой, 2) заменой $y = y_1 z$, 3) из формулы Остроградского.

4233. Пользуясь формулой задачи 4232, найти общее решение уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, зная его частное решение $y_1 = x$.

4234. Решить уравнение $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, зная его частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

4235. Уравнение $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$ имеет решение $y = e^x$. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = 0$, $y'\big|_{x=1} = 1$.

4236*. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $y'' + y'P(x) - yQ(x) = 0$ имело два линейно независимых решения y_1 и y_2, удовлетворяющих условию $y_1 y_2 = 1$.

4237*. Найти общее решение уравнения $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, если его частное решение есть многочлен третьей степени.

В задачах 4238–4240 легко подобрать одно частное решение (не считая тривиального $y = 0$) для данного уравнения. Найти общие решения этих уравнений:

4238. $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$. **4239.** $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

4240. $y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$.

4241. Найти общее решение уравнения $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, зная частные решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$.

В задачах 4242–4244 найти общие решения неоднородных уравнений:

4242. $x^2y'' - xy' + y = 4x^3$.

4243. $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1$.

4244. $\left(3x + 2x^2\right)y'' - 6(1 + x)y' + 6y = 6$.

4245. Уравнение $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ допускает частное решение $y = x^2$. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $y\big|_{x=-1} = 0$, $y'\big|_{x=-1} = 0$.

4246. Найти шесть первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - \left(1 + x^2\right)y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y\big|_{x=0} = -2$, $y'\big|_{x=0} = 2$.

4247. Найти девять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2y - y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 0$.

4248. Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y'' - xy' + y - 1 = 0$; $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 0$.

4249. Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y'' = ye^x$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

4250. Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y'' + xy' - x^2y = 0$. (Ограничиться шестью первыми членами.)

Уравнения с постоянными коэффициентами

В задачах 4251–4261 найти общие решения уравнений:

4251. $y'' + y' - 2y = 0$.

4252. $y'' - 9y = 0$.

4253. $y'' - 4y' = 0$.

4254. $y'' - 2y' - y = 0$.

4255. $3y''-2y'-8y=0$. **4256.** $y''+y=0$.

4257. $y''+6y'+13y=0$. **4258.** $4y''-8y'+5y=0$.

4259. $y''-2y'+y=0$. **4260.** $4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$.

4261. $2y''+y'+2\sin^2 15^\circ\cos^2 15^\circ\cdot y=0$.

В задачах 4262–4264 найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

4262. $y''-4y'+3y=0$; $y\big|_{x=0}=6$, $y'\big|_{x=0}=10$.

4263. $y''+4y'+29y=0$; $y\big|_{x=0}=0$, $y'\big|_{x=0}=15$.

4264. $4y''+4y'+y=0$; $y\big|_{x=0}=2$, $y'\big|_{x=0}=0$.

4265. Дано частное решение некоторого линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y_1=e^{mx}$. Дискриминант соответствующего характеристического уравнения равен нулю. Найти частное решение этого дифференциального уравнения, обращающееся вместе со своей производной в 1 при $x=0$.

4266. Найти интегральную кривую уравнения $y''+9y=0$, проходящую через точку $M(\pi,-1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y+1=x-\pi$.

4267. Найти интегральную кривую уравнения $y''+k^2y=0$, проходящую через точку $M(x_0,y_0)$ и касающуюся в этой точке прямой $y-y_0=a(x-x_0)$.

В задачах 4268–4282 составить общие решения неоднородных уравнений, находя их частные решения либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных:

4268. $2y''+y'-y=2e^x$. **4269.** $y''+a^2y=e^x$.

4270. $y''-7y'+6y=\sin x$. **4271.** $y''+2y'+5y=-\frac{17}{2}\cos 2x$.

4272. $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$.

4273. $y''-2y'+2y=2x$. **4274.** $y''+4y'-5y=1$.

4275. $y''-3y'+2y=f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\sin x$; 4) $2x^3-30$; 5) $2e^x\cos\frac{x}{2}$;

6) $x-e^{-2x}+1$; 7) $e^x(3-4x)$; 8) $3x+5\sin 2x$; 9) $2e^x-$ [illegible];

10) $\sin x\sin 2x$; 11) $\operatorname{sh} x$.

4276. $2y'' + 5y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) $5x^2 - 2x - 1$; 2) e^x; 3) $29\cos x$; 4) $\cos^2 x$;

5) $0{,}1e^{-2{,}5x} - 25\sin 2{,}5x$; 6) $29x\sin x$; 7) $100xe^{-x}\cos x$;

8) $3\operatorname{ch}\frac{5}{2}x$.

4277. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) 1; 2) e^{-x}; 3) $3e^{2x}$; 4) $2(\sin 2x + x)$; 5) $\sin x\cos 2x$;

6) $\sin^3 x$; 7) $8\left(x^2 + e^{2x} + \sin 2x\right)$; 8) $\operatorname{sh} 2x$; 9) $\operatorname{sh} x + \sin x$;

10) $e^x - \operatorname{sh}(x-1)$.

4278. $y'' + y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) $2x^3 - x + 2$; 2) $-8\cos 3x$; 3) $\cos x$; 4) $\sin x - 2e^{-x}$;

5) $\cos x\cos 2x$; 6) $24\sin^4 x$; 7) $\operatorname{ch} x$.

4279. $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) $5e^{\frac{3x}{5}}$; 2) $\sin\frac{4}{5}x$; 3) $e^{2x} + 2x^3 - x + 2$; 4) $e^{\frac{3x}{5}}\cos x$;

5) $e^{\frac{3x}{5}}\sin\frac{4}{5}x$; 6) $13e^x\operatorname{ch} x$.

4280. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. **4281.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

4282. $y'' - y' = f(x)$, если $f(x)$ равна:

1) $\frac{e^x}{1+e^x}$; 2) $e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$; 3) $e^{2x}\cos e^x$.

В задачах 4283–4287 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

4283. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3x}{2}}$; $y\big|_{x=0} = 3$, $y'\big|_{x=0} = -5{,}5$.

4284. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 3{,}2$.

4285. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y\big|_{x=0} = 1$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

4286. $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right)$; $y\big|_{x=0} = 2$, $y'\big|_{x=0} = 2$.

4287. $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y\big|_{x=\pi} = y'\big|_{x=\pi} = 1$.

4288*. Показать, что частное решение $\overline{y}$ уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = Ae^{px}$ (a_0, a_1, a_2 – постоянные коэффициенты, p и A – действительные или комплексные числа) имеет вид $\overline{y} = \frac{A}{\varphi(p)} e^{px}$, если p не является корнем характеристического уравнения $\varphi(r) \equiv a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$; $\overline{y} = \frac{Ax}{\varphi'(p)} e^{px}$, если p – простой корень характеристического уравнения; $\overline{y} = \frac{Ax^2}{\varphi''(p)} e^{px}$, если p – двойной корень характеристического уравнения.

В задачах 4289–4292 найти общие решения уравнений Эйлера:

4289. $x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$. **4290.** $x^2 y'' + xy' + y = x$.

4291. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$. **4292.** $x^2 y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

4293. Если ось вала турбины расположена горизонтально и если центр масс диска, насаженного на вал, не лежит на оси, то прогиб y оси вала (рис. 58) при его вращении удовлетворяет уравнению $\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right) y = g\cos\omega t + \omega^2 e$, где m – масса диска, α – постоянное число, не зависящее от рода закрепления концов A и B; ω – угловая скорость вращения, e – эксцентриситет центра масс диска. Найти общий интеграл этого уравнения.

4294. Материальная точка массы 1 г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной ее расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 см, а скорость – нулю. Найти закон движения.

4295. Частица массы 1 г движется по прямой к точке A под действием некоторой силы притяжения, пропорциональной расстоянию ее от точки A. На расстоянии 1 см действует сила 10^{-6} Н. Сопротивление среды пропорционально скорости движения и равно $4 \cdot 10^{-6}$ Н при скорости 1 см/с. В момент

Рис. 58

$t = 0$ частица расположена на расстоянии 10 см от точки A и скорость ее равна нулю. Найти зависимость расстояния от времени и вычислить это расстояние для $t = 3$ с (с точностью до 0,01 см).

4296. Материальная точка массы m движется по прямой из A в B под действием постоянной силы F. Сопротивление среды пропорционально расстоянию тела от B и в начальный момент (в точке A) равно f $(f < F)$. Начальная скорость точки равна нулю Сколько времени точка будет двигаться из A в B $(AB = a)$?

4297. Тело массы 200 г подвешено на пружине и выведено из состояния покоя вытягиванием пружины на 2 см, после чего отпущено (без начальной скорости). Найти уравнение движения тела, считая, что сопротивление среды пропорционально скорости движения. Если тело движется со скоростью 1см/с, то среда оказывает сопротивление 10^{-3} Н; сила напряжения пружины при растяжении ее на 2 см равна 100 Н. Весом пружины пренебрегаем.

4298. Деревянный цилиндрический чурбанчик ($S = 100$ см^2, $h = 20$ см, $\gamma = 0{,}5$ г/см^3) полностью погружен в воду и отпущен без начальной скорости. Считая, что сила трения пропорциональна высоте погруженной части, выяснить, каков должен быть коэффициент пропорциональности k, чтобы в результате первого подъема над поверхностью воды показалась ровно половина чурбанчика.

Сколько времени (t_1) будет продолжаться первый подъем?

Каково будет уравнение движения при первом подъеме?

4299*. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней вертикальной оси. В начальный момент на расстоянии a_0 от оси внутри трубки находился шарик массы m. Считая, что в начальный момент скорость шарика относительно трубки была равна нулю, найти закон движения шарика относительно трубки.

4300. Решить предыдущую задачу в предположении, что шарик прикреплен к точке O пружиной. Сила действия пружины на шарик пропорциональна деформации пружины, сила $8 \cdot 10^{-3}$ Н вызывает изменение длины пружины на 1 см. Длина пружины в свободном состоянии равна a_0.

Уравнения высших порядков

В задачах 4301–4311 найти общие решения уравнений:

4301. $y''' + 9y' = 0$. **4302.** $y^{\mathrm{IV}} - 13y'' + 36y = 0$.

4303. $y^{\mathrm{IV}} = 8y'' - 16y$. **4304.** $y^{\mathrm{IV}} = 16y$.

4305. $y''' - 13y' - 12y = 0$. **4306.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

4307. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0$. **4308.** $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

4309. $y^{\mathrm{IV}} + y = 0$.

4310. $64y^{\mathrm{VIII}} + 48y^{\mathrm{VI}} + 12y^{\mathrm{IV}} + y'' = 0$.

4311. $y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}y' + y = 0$.

4312. $y''' = -y'$; $y\big|_{x=0} = 2$, $y'\big|_{x=0} = 0$, $y''\big|_{x=0} = -1$.

4313. $y^{\mathrm{V}} = y'$; $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$, $y''\big|_{x=0} = 0$, $y'''\big|_{x=0} = 1$, $y^{\mathrm{IV}}\big|_{x=0} = 2$.

В задачах 4314–4320 составить общие решения неоднородных уравнений, находя их частные решения либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных:

4314. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.

4315. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}\left(4x^2 + 4x - 10\right)$.

4316. $y^{\mathrm{IV}} + 8y'' + 16y = \cos x$.

4317. $y^{\mathrm{IV}} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax$.

4318. $y^{\mathrm{V}} + y''' = x^2 - 1$.

4319. $y^{\mathrm{IV}} - y = xe^x + \cos x$.

4320. $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = 8\left(e^x + e^{-x}\right) + 4(\sin x + \cos x)$.

4321. $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0$; $y\big|_{x=0} = 2$, $y'\big|_{x=0} = 1$, $y''\big|_{x=0} = 1$.

4322. $y''' - y' = 3\left(2 - x^2\right)$; $y\big|_{x=0} = y'\big|_{x=0} = y''\big|_{x=0} = 1$.

4323. Решить уравнение Эйлера $x^3y''' + xy' - y = 0$.

§ 5. Системы дифференциальных уравнений

4324.1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$ **4324.2.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4324.3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ **4324.4.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

4324.5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z, \end{cases}$ **4324.6.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$

(корни характеристического уравнения $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 5$).

4324.7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$ **4325.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

(корни характеристического уравнения $r_1 = 2$, $r_{2,3} = 3 \pm i$).

4326. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$ **4327.** $\begin{cases} yzy' = x\left(y' = \frac{dy}{dx}\right), \\ y^2z' = x\left(z' = \frac{dz}{dx}\right). \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{z}, \\ z' = \frac{x-y}{y}. \end{cases}$ **4329.** $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

4330. $\begin{cases} y' = \frac{2xy}{x^2-y^2-z^2}, \\ z' = \frac{2xz}{x^2-y^2-z^2}. \end{cases}$ **4331.** $\begin{cases} z = y'(z-y)^2, \\ y = z'(z-y)^2. \end{cases}$

4332. $\begin{cases} 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 3x = \sin t, \\ \frac{dx}{dt} + y = \cos t. \end{cases}$ **4333.** $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = y. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = e^t, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 1. \end{cases}$ **4335.** $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}.$

В задачах 4336–4339 найти частные решения систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

4336. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-yz}{x^2-yz}, & y\big|_{x=0} = 1; \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z(x+y)}{x^2-yz}, & z\big|_{x=0} = -1. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{2x}{t}, & x\big|_{t=1} = \dfrac{1}{8}; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}, & y\big|_{t=1} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$ $\begin{matrix} x\big|_{t=0} = 1; \\ y\big|_{t=0} = z\big|_{t=0} = 0. \end{matrix}$

4339. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, & x\big|_{t=0} = -1; \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, & y\big|_{t=0} = 1; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y, & z\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$

4340. Найти пару линий, обладающих следующими свойствами: а) касательные, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси ординат; б) нормали, проведенные в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс; в) одна из линий проходит через точку $(1, 1)$, другая – через точку $(1, 2)$.

4341. Даны две линии: $y = f(x)$, проходящая через точку $(0, 1)$, и $y = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, проходящая через точку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Касательные, проведенные к обеим линиям в точках с одинаковыми абсциссами, пересекаются на оси абсцисс. Найти линию $y = f(x)$.

4342. Найти линию в пространстве, проходящую через точку $(0, 1, 1)$ и обладающую следующими свойствами: а) след касательной на плоскости Oxy при перемещении точки касания вдоль линии описывает биссектрису угла между положительными направлениями осей Ox и Oy; б) расстояние этого следа от начала координат равно координате z точки касания.

4343. Два шарика, масса каждого из которых m, соединены очень легкой пружиной (удлинение ее пропорционально растягивающей силе). Длина нерастянутой пружины l_0. Пружина растянута до длины l_1, а затем в момент $t = 0$ оба шарика, расположенные вертикально один над другим, начинают падать (сопротивлением среды пренебрегаем). Через время T длина нити сокращается до l_0. Найти закон движения каждого из шариков.

4344. Горизонтальная трубка вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 2 радиана в секунду. В трубке находятся два шарика с массами 300 и 200 г, соединенные невесомой упругой нерастянутой пружиной длиной 10 см, причем более тяжелый шарик дальше от оси вращения. Сила 0,24 Н растягивает пружину на 1 см, а центр масс системы шариков удален от оси вращения на 10 см. Шарики удерживаются в указанном положении некоторым механизмом. В момент, который считаем началом отсчета времени, действие механизма прекращается, и шарики приходят в движение. Найти закон движения каждого шарика относительно трубки. (Трением пренебрегаем.)

4345. Скорость роста культуры микроорганизмов пропорциональна их количеству и количеству питательных веществ (коэффициент пропорциональности равен k). Скорость убывания питательных веществ пропорциональна наличному количеству микроорганизмов (коэффициент пропорциональности равен k_1). В начале опыта в сосуде имелось A_0 микроорганизмов и B_0 питательных веществ. Найти зависимость количества A микроорганизмов и количества B питательных веществ от времени ($k > 0$, $k_1 > 0$).

4346*. Допустим, что бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их наличному количеству (коэффициент пропорциональности равен a), но в то же время вырабатывают яд, уничтожающий их со скоростью, пропорциональной количеству яда и количеству бактерий (коэффициент пропорциональности равен b). Далее, допустим, что скорость выработки яда пропорциональна наличному количеству бактерий (коэффициент пропорциональности равен c). Число бактерий сначала возрастает до некоторого наибольшего значения, а затем убывает, стремясь к нулю. Показать, что для любого момента t число N бактерий дается формулой

$$N = \frac{4M}{\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)^2},$$

где M – наибольшее число бактерий и время t измеряется от того момента, когда $N = M$, k – некоторая постоянная.

4347. Два цилиндра, основания которых лежат в одной плоскости, соединенные внизу капиллярной трубкой, наполнены жидкостью до разной высоты (H_1 и H_2). Через трубку в единицу времени протекает объем жидкости, пропорциональный разности высот, т. е. равный $\alpha\left(h_1 - h_2\right)$, где α – коэффициент пропорциональности. Найти закон изменения высоты жидкости в сосудах над капиллярной трубкой. Поперечное сечение сосудов S_1 и S_2.

§ 6. Вычислительные задачи

4348. 1 кг воды, теплоемкость которой считается постоянной, а начальная температура равна θ_0, нагревается погруженным в воду электрическим прибором, сопротивление которого R зависит от температуры θ линейно: $R = R_0(1 + 0{,}004\theta)$, где R_0 – сопротивление при $0°$ С (закон, справедливый для большинства чистых металлов). Термоизоляция сосуда настолько хороша, что теплоотдачей пренебрегаем.

Найти зависимость между температурой θ и временем t при $0 \le t \le T$, если:

1) Напряжение E вводится равномерно от $E = 0$ до $E = E_1$ в течение T с. Вычислить с точностью до 1° С, на сколько градусов повысится температура воды к концу 10-й минуты, если $\theta_0 = 0°$ С, $E_1 = 110$ В, $R_0 = 10$ Ом и $T = 10$ мин.

2) Напряжение изменяется по закону $E = E_0 \sin 100\pi t$. Вычислить с точностью до 1° С, на сколько градусов повысится температура воды к концу 10-й минуты, если $\theta_0 = 0°$ С, $E_0 = 110$ В и $R_0 = 10$ Ом.

4349. Литр воды нагревается спиралью, сопротивление которой 24 Ом. При этом вода отдает тепло окружающей среде, имеющей температуру 20° С (скорость охлаждения пропорциональна разности между температурами тела и среды). Известно также, что если ток выключить, то температура воды понизится с 40° С до 30° С за 10 мин. Начальная температура воды 20° С. До какой температуры нагреется вода за 10 мин, если:

1) Напряжение вводится равномерно от $E_0 = 0$ до $E_1 = 120$ В в течение 10 мин? Погрешность $0{,}1^\circ$ С.

2) Ток переменный, и напряжение изменяется по формуле $E = 110 \sin 100\pi t$? Погрешность $0{,}1^\circ$ С.

4350. Дано уравнение $y' = \frac{x}{y} - x^2$. Составить таблицу значений решения, удовлетворяющего начальному условию $y\big|_{x=1} = 1$, давая x значения от 1 до 1,5 через 0,05. Вычисления вести до третьего десятичного знака.

4351. Вычислить при $x = 1$ значение частного решения дифференциального уравнения $y' = y + x$, удовлетворяющего начальному условию $y\big|_{x=0} = 1$. Вычислить затем первые пять приближений y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (до четвертого десятичного знака) по методу последовательных приближений. Сравнить результаты.

4352. Известно, что интеграл $\int e^{-x^2} dx$ не берется в конечном виде в элементарных функциях. Пользуясь тем, что функция $y = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ является решением уравнения $y' = 2xy + 1$, вычислить $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2} dx$. Воспользоваться методом последовательных приближений, ограничиваясь пятым приближением. Сравнить результат с приближенным значением, вычисленным по правилу Симпсона.

4353. Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y' = y^2 - x$ при начальном условии $y\big|_{x=0} = 1$. Найти по методу последовательных приближений четвертое приближение (y_4), ограничиваясь таким количеством слагаемых, которое необходимо, чтобы вычислить $y_4(0,3)$ с тремя десятичными знаками. Найти затем несколько первых членов разложения $f(x)$ в степенной ряд; вычислить $f(0,3)$ также с тремя знаками после запятой и, и считая $f(0,3)$ более точным результатом, оценить погрешность значения $y_4(0,3)$.

4354. Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ при начальных условиях $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Найти $f(1,6)$ с точностью до 0,001.

4355*. Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' = y' - y + x$ при начальных условиях $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$. Найти $f(1,21)$ с точностью до 0,000001.

4356*. Функция $y = f(x)$ является решением дифференциального уравнения $y'' = xy' - y + e^x$ при начальных условиях $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. Найти $f\left(\frac{1}{2}\right)$ с точностью до 0,0001.

4357. Линия задана уравнением $y = f(x)$. Найти разложение функции $f(x)$ в ряд, зная, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' = xy$ и начальным условиям $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$. Вычислить с точностью до 0,0001 кривизну линии в точке с абсциссой 1.

Глава XV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

§ 1. Тригонометрические многочлены

4358. Пользуясь формулами Эйлера $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, доказать, что функции $\sin^n x$ и $\cos^n x$ могут быть представлены в виде тригонометрических многочленов n-го порядка.

4359. Доказать соотношения

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^n x \sin mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \cos mx\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^n x \sin mx\,dx = 0, \text{ если } m > n \ (m \text{ и } n - \text{целые числа}).$$

4360. Показать, что всякий тригонометрический многочлен n-го порядка, составленный из одних косинусов, можно представить в виде $P(\cos\varphi)$, где $P(x)$ – многочлен n-й степени относительно x.

4361. С помощью формулы Эйлера (см. задачу 4358) доказать соотношение

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

4362. Доказать соотношения:

1) $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$;

2) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

4363. Найти корни тригонометрических многочленов $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$ и $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

4364. Показать, что тригонометрический многочлен

$$\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \ldots + \frac{\sin n\varphi}{n}$$

на отрезке $[0, \pi]$ имеет максимумы в точках $\frac{\pi}{n+1}$, $3\frac{\pi}{n+1}$, ..., $(2q-1)\frac{\pi}{n+1}$ и минимумы в точках $\frac{2\pi}{n}$, $2\cdot\frac{2\pi}{n}$, ..., $(q-1)\frac{2\pi}{n}$, где $q = \frac{n}{2}$, если n четное, и $q = \frac{n+1}{2}$, если n нечетное.

4365*. Доказать, что тригонометрический многочлен без свободного члена $\Phi_n(\varphi) = a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi$, не равный тождественно нулю, не может сохранять для всех φ постоянного знака.

§ 2. Ряды Фурье

4366. Убедиться, что функция $y = x^3\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывна вместе со своей первой производной, но не удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Можно ли ее разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$?

Решить задачи 4367–4371 в предположении, что $f(x)$ – непрерывная функция.

4367. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x+\pi) = -f(x)$. Доказать, что все ее четные коэффициенты Фурье равны нулю $(a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \ldots = 0)$.

4368. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(x+\pi) = f(x)$. Доказать, что все ее нечетные коэффициенты Фурье равны нулю.

4369. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(-x) = f(x)$ и $f(x+\pi) = -f(x)$.

Доказать, что $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$ и $a_0 = a_2 = a_4 = \ldots = 0$.

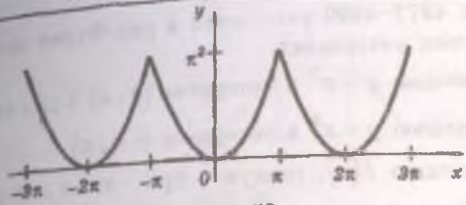

Рис. 59

4370. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(-x) = -f(x)$ и $f(x+\pi) = -f(x)$. Доказать, что $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ и $b_2 = b_4 = b_6 = \ldots = 0$.

4371. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(-x) = f(x)$ и $f(x+\pi) = f(x)$;

2) $f(-x) = -f(x)$ и $f(x+\pi) = f(x)$. Какие из ее коэффициентов Фурье обращаются в нуль?

4372. Разложить в ряд Фурье функцию, равную -1 в интервале $(-\pi, 0)$ и 1 в интервале $(0, \pi)$.

4373. Разложить в ряд по синусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0, \pi)$.

4374. Используя результаты задач 4372 и 4373, получить разложения для функций $y = x$ и $y = \frac{\pi - x}{2}$. Указать интервалы, в которых полученные формулы будут справедливы.

4375. Разложить функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд по косинусам.

4376. Разложить функцию $y = x^2$ в ряд Фурье: 1) в интервале $(-\pi, \pi)$, 2) в интервале $(0, 2\pi)$ (рис. 59 и 60).

При помощи полученных разложений вычислить суммы рядов

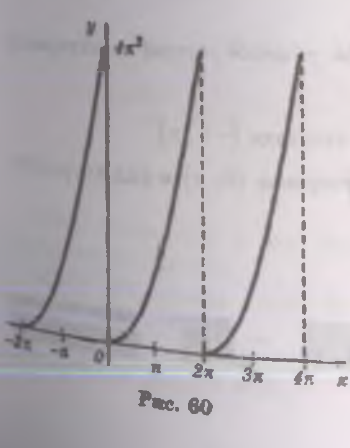

Рис. 60

В задачах 4377–4390 разложить в ряд Фурье данные функции в указанных интервалах:

4377. Функцию $y = x^2$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.

4378. Функцию $y = x^3$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

4379. Функцию $f(x)$, равную 1 при $-\pi < x < 0$ и равную 1 при $0 < x < \pi$.

4380. Функцию $f(x)$, равную 1 в интервале $(0, h)$ и равную 0 в интервале (h, π), в ряд косинусов $(0 < h < \pi)$.

4381. Непрерывную функцию $f(x)$, равную 1 при $x = 0$, равную 0 в интервале $(2h, \pi)$ и линейную в интервале $(0, 2h)$, в ряд косинусов $\left(0 < h < \frac{\pi}{2}\right)$.

4382. Функцию $y = |x|$ в интервале $(-l, l)$.

4383. Функцию $y = e^x - 1$ в интервале $(0, 2\pi)$.

4384. Функцию $y = e^x$ в интервале $(-l, l)$.

4385. Функцию $y = \cos ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a – не целое число).

4386. Функцию $y = \sin ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a – не целое число).

4387. Функцию $y = \sin ax$ (a – целое число) в интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов.

4388. Функцию $y = \cos ax$ (a – целое число) в интервале $(0, \pi)$ в ряд синусов.

4389. Функцию $y = \operatorname{sh} ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

4390. Функцию $y = \operatorname{ch} x$ в интервале $(0, \pi)$ в ряд косинусов и ряд синусов.

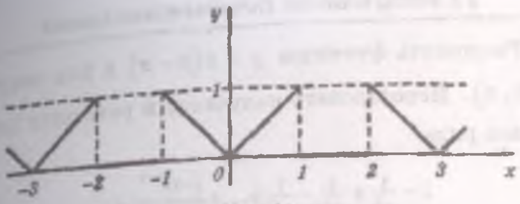

Рис. 61

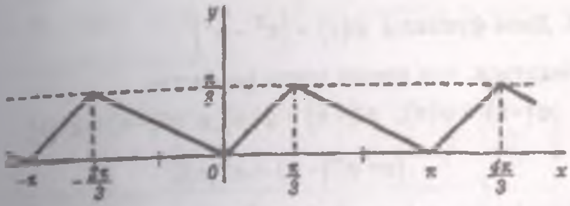

Рис. 62

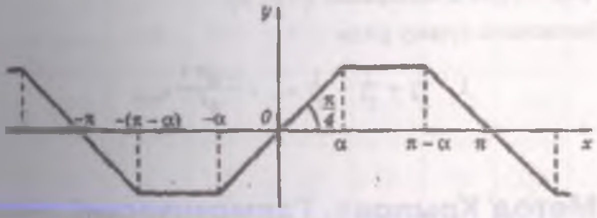

Рис. 63

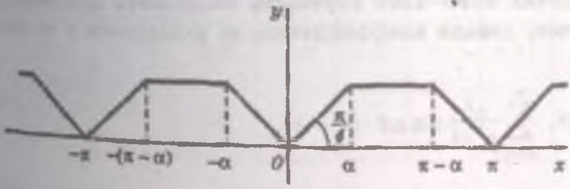

Рис. 64

4391. Разложить в ряд Фурье функцию, график которо[illegible] изображен на рис. 61.

4392*. Разложить в ряд Фурье функцию, график которо[illegible] изображен на рис. 62.

4393*. Разложить в ряды Фурье функции, графики которы[illegible] приведены на рис. 63 и 64.

4394. Разложить функцию $y = x(\pi - x)$ в ряд синусов в интервале $(0, \pi)$. Использовать полученный результат для нахождения суммы ряда

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots$$

4395. Дана функция $\varphi(x) = \left(\pi^2 - x^2\right)^2$.

а) Убедиться, что имеют место равенства

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi),\ \ \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi)\ \text{ и }\ \varphi''(-\pi) = \varphi''(\pi)$$

$$\left[\text{но } \varphi'''(-\pi) \ne \varphi'''(\pi)\right].$$

б) Используя полученные равенства, разложить функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$.

в) Вычислить сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} + \ldots$$

§ 3. Метод Крылова. Гармонический анализ

В задачах 4396–4399 улучшить сходимость тригонометрических рядов, доведя коэффициенты до указанного в скобках порядка k:

4396*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \sin nx \quad (k = 4).$

4397*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2+1} \sin nx \quad (k = 2).$

4398*. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1} \cos nx \quad (k = 4).$

4399*. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-1} \cos nx \quad (k = 5).$

4400. Функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ заданы в полуинтервале $[0, 2\pi)$ следующей таблицей:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$f_1(x)$	27	32	35	30	26	20
$f_2(x)$	0,43	0,37	0,64	0,57	0,28	0
$f_3(x)$	2,3	3,2	2,1	1,6	−0,4	−0,2
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f_1(x)$	18	22	28	30	32	36
$f_2(x)$	−0,30	−0,64	−0,25	0,04	0,42	0,84
$f_3(x)$	−0,4	0,3	0,7	0,9	1,2	1,6

Найти приближенное выражение этих функций в виде тригонометрического многочлена второго порядка.

Глава XVI

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ*)

Векторное поле, дивергенция и ротор

4401. Найти векторные линии однородного поля $A(P)=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$, где a, b и c – постоянные.

4402. Найти векторные линии плоского поля $A(P)=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}$, где ω – постоянная.

4403. Найти векторные линии поля $A(P)=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}+h\boldsymbol{k}$, где ω и h – постоянные.

4404. Найти векторные линии поля:

1) $A(P)=(y+z)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$;

2) $A(P)=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}$;

3) $A(P)=x\left(y^2-z^2\right)\boldsymbol{i}-y\left(z^2+x^2\right)\boldsymbol{j}+z\left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{k}$.

В задачах 4405–4408 вычислить дивергенцию (расходимость) и ротор (вихрь) заданных векторных полей:

4405. $A(P)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

4406. $A(P)=\left(y^2+z^2\right)\boldsymbol{i}+\left(z^2+x^2\right)\boldsymbol{j}+\left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{k}$.

4407. $A(P)=x^2yz\boldsymbol{i}+xy^2z\boldsymbol{j}+xyz^2\boldsymbol{k}$.

4408. $A(P)=\operatorname{grad}\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

4409. Векторное поле образовано силой, имеющей постоянную величину F и направление положительной оси абсцисс. Вычислить дивергенцию и ротор этого поля.

4410. Плоское векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния от точки ее приложения до начала координат и направленной к началу координат. (Например, плоское электрическое поле, образованное точечным зарядом.) Найти дивергенцию и ротор этого поля.

*) Задачи на свойства скалярного поля и его градиента помещены в § 4 главы XI.

4411. Найти дивергенцию и ротор пространственного поля, если силы поля подчинены тем же условиям, что и в задаче 4410.

4412. Векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной расстоянию от точки ее приложения до оси Oz, перпендикулярной к этой оси и направленной к ней. Вычислить дивергенцию и ротор этого поля.

4413. Векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной расстоянию от точки ее приложения до плоскости xOy и направленной к началу координат. Вычислить дивергенцию этого поля.

В задаче 4414 и дальше $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, $r = |\boldsymbol{r}|$ – его модуль.

4414. Вычислить $\operatorname{div}(a\boldsymbol{r})$, где a – постоянный скаляр.

4415. Доказать соотношение $\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \operatorname{grad} \varphi$, где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – скалярная функция.

4416. Вычислить $\operatorname{div} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – постоянные векторы.

4417. Вычислить $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

4418. Не переходя к координатам, вычислить дивергенцию векторного поля:

1) $\boldsymbol{A}(P) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{a}r^2$, 2) $\boldsymbol{A}(P) = \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3}$, 3) $\operatorname{grad} \dfrac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}$.

4419. Вычислить дивергенцию векторного поля

$$\boldsymbol{A}(P) = f(|\boldsymbol{r}|)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Доказать, что дивергенция поля равна нулю только тогда, когда $f(|\boldsymbol{r}|) = \dfrac{C}{r^2}$, если поле пространственное, и $f(|\boldsymbol{r}|) = \dfrac{C}{|\boldsymbol{r}|}$, если поле плоское, где C – произвольное постоянное число.

4420. Доказать, что

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{A}_1(P) + \boldsymbol{A}_2(P)] = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1(P) + \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2(P).$$

4421. Вычислить $\operatorname{rot}[\varphi \boldsymbol{A}(P)]$, где $\varphi = \varphi(x, y, z)$ – скалярная функция.

4422. Вычислить $\operatorname{rot} r\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

4423. Вычислить $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор.

4424. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси. Найти дивергенцию и ротор поля линейных скоростей.

4425. Доказать соотношение

$$n\left(\operatorname{grad}(An) - \operatorname{rot}(A \times n)\right) = \operatorname{div} A,$$

если n – единичный постоянный вектор.

Дифференциальные операции векторного анализа (grad, div, rot) удобно представлять с помощью символического вектора ∇ («набла» – оператор Гамильтона): $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$.

Применение этого оператора к той или иной (скалярной или векторной) величине нужно понимать так: следует проделать по правилам векторной алгебры операцию умножения этого вектора на данную величину, а затем умножение символа $\frac{\partial}{\partial x}$ и т. п. на величину S рассматривать как нахождение соответствующей производной. Тогда $\operatorname{grad} u = \nabla u$; $\operatorname{div} A = \nabla A$; $\operatorname{rot} A = \nabla \times A$.

При помощи оператора Гамильтона можно записывать и дифференциальные операции второго порядка:

$$\nabla\nabla u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u;\quad \nabla \times \nabla u = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u;\quad \nabla(\nabla A) = \operatorname{grad}\operatorname{div} A;$$

$$\nabla\left(\nabla \times A\right) = \operatorname{div}\operatorname{rot} A;\quad \nabla \times \left(\nabla \times A\right) = \operatorname{rot}\operatorname{rot} A.$$

4426. Доказать, что $r \cdot \nabla r^n = n r^n$, где r – радиус-вектор.

4427. Доказать соотношения:

1) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$; 2) $\operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0$.

4428. Доказать, что $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

(Это выражение называется оператором Лапласа и обычно обозначается Δu. При помощи оператора Гамильтона его можно записать в виде $\Delta u = (\nabla\nabla)u = \nabla^2 u$.)

4429. Доказать, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot} A(P) = \operatorname{grad}\operatorname{div} A(P) - \Delta A(P)$, где $\Delta A(P) = \Delta A_x i + \Delta A_y j + \Delta A_z k$.

Потенциал

4430. Векторное поле образовано постоянным вектором A. Убедиться, что это поле имеет потенциал, и найти его.

4431. Векторное поле образовано силой, пропорциональной расстоянию от точки приложения до начала координат и направленной к началу координат. Показать, что это поле консервативное, и найти потенциал.

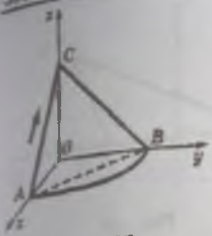

Рис. 65

4432. Силы поля обратно пропорциональны расстоянию точек их приложения от плоскости Oxy и направлены к началу координат. Будет ли поле консервативным?

4433. Силы поля пропорциональны квадрату расстояния точек их приложения от оси аппликат и направлены к началу координат. Будет ли поле консервативным?

4434. Векторное поле образовано силой, обратно пропорциональной расстоянию точки ее приложения от оси Oz, перпендикулярной к этой оси и направленной к ней. Показать, что это поле консервативно, и найти его потенциал.

4435. Векторное поле образовано линейными скоростями точек твердого тела, вращающегося вокруг своей оси. Имеет ли это поле потенциал?

4436. Силы поля задаются так: $A(P) = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ (так называемое центрированное поле). Показать, что потенциал поля равен

$$u(x, y, z) = \int_a^r f(r)\,dr \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Получить отсюда как частный случай потенциал поля сил притяжения точечной массы и потенциал поля задачи 4431.

4437. Найти работу сил поля $A(p) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ при перемещении точки массы m по замкнутой линии, состоящей из отрезка прямой $x + z = 1$, $y = 0$, четверти окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ и отрезка прямой $y + z = 1$, $x = 0$ (рис. 65) по направлению, указанному на чертеже. Как изменится работа, если дуга BA будет заменена ломаной BOA или отрезком BA?

Потенциал силы притяжения*)

4438. Дан в плоскости $O\xi\eta$ однородный стержень AB длины $2l$ с линейной плотностью δ, расположенный на оси $O\xi$ симметрично относительно начала координат (рис. 66).

а) Найти потенциал $u(x, y)$ стержня.

*) Здесь (в задачах 4438–4449) везде имеется в виду сила тяжести, действующая по закону Ньютона. Вместо выражения «потенциал массы, расположенной на (или в) данном геометрическом объекте», для краткости мы говорим «потенциал данного объекта».

б) Показать, что проекции X и Y силы притяжения, действующей на точку P массы m с координатами $\xi = x$, $\eta = y$, равны

$$X = mk\delta\left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB}\right),$$

$$Y = -\frac{mk\delta}{y}\left(\frac{CB}{PB} + \frac{AC}{PA}\right),$$

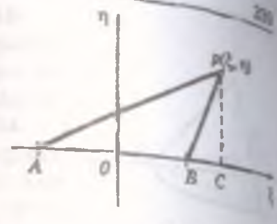

Рис. 66

а результирующая сила R по величине равна $R = \frac{2mk\delta}{y}\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, где k – постоянная тяготения (C – проекция точки P на ось $O\xi$, α – угол APC, β – угол BPC).

4439. Найти потенциал окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$ в точке $(R, 0, 2R)$, если плотность в каждой точке равна абсолютной величине синуса угла между радиус-вектором точки и осью абсцисс.

4440. Найти потенциал первого витка однородной (плотность δ) винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ в начале координат.

4441. Найти потенциал однородного квадрата со стороной a (поверхностная плотность δ) в одной из его вершин.

4442. На плоскости Oxy распределена масса с плотностью δ, убывающей с расстоянием ρ от начала координат по закону $\delta = \frac{1}{1+\rho^2}$. Найти потенциал в точке $(0, 0, h)$. (Рассмотреть три случая: $h < 1$, $h = 1$ и $h > 1$.)

4443*. Вычислить потенциал однородной боковой поверхности круглого цилиндра: 1) в центре его основания,

2) в середине его оси (радиус цилиндра R, высота H, поверхностная плотность δ).

4444. Вычислить потенциал однородной боковой поверхности прямого круглого конуса (радиус цилиндра R, высота H) в его вершине.

4445. Дан прямой круглый однородный цилиндр (радиус основания R, высота H, плотность δ).

1) Найти потенциал в центре его основания.

2) Найти потенциал в середине его оси.

4446. Дан прямой круглый однородный конус (радиус основания R, высота H, плотность δ). Найти потенциал конуса в его вершине.

4447. Найти потенциал однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ $(z \ge 0)$ с плотностью δ в точке $A(0, 0, a)$. (Рассмотреть два случая: $a \ge R$ и $a \le R$.)

4448*. Найти потенциал однородного тела, ограниченного двумя концентрическими сферами с радиусом R и r $(R > r)$ и плотностью δ, в точке, удаленной от центра шара на расстояние a. (Рассмотреть три случая: $a \ge R$, $a \le r$ и $r \le a \le R$.) Показать, что если точка находится во внутренней полости тела, то сила притяжения, действующая на эту точку, равна нулю.

4449. Найти потенциал неоднородного сплошного шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R$ в точке $A(0, 0, a)$ $(a > R)$, если плотность $\delta = \lambda z^2$, т. е. пропорциональна квадрату расстояния точки от плоскости Oxy.

Поток и циркуляция (плоский случай)

4450. Вычислить поток и циркуляцию постоянного вектора A вдоль произвольной замкнутой кривой L.

4451. Вычислить поток и циркуляцию вектора $A(P) = ar$, где a – постоянный скаляр, а r – радиус-вектор точки P, вдоль произвольной замкнутой кривой L.

4452. Вычислить поток и циркуляцию вектора $A(P) = xi - yj$ вдоль произвольной замкнутой кривой L.

4453. Вычислить поток и циркуляцию вектора $A(P) = (x^3 - y)i + (y^3 + x)j$ вдоль окружности радиуса R с центром в начале координат.

4454. Потенциал поля скоростей частиц текущей жидкости равен $u = \ln r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Определить количество жидкости, вытекающей из замкнутого контура L, окружающего начало координат, в единицу времени (поток) и количество жидкости, протекающей в единицу времени вдоль этого контура (циркуляция). Как изменится результат, если начало координат лежит вне контура?

4455. Потенциал поля скоростей частиц текущей жидкости равен $u = \varphi$, где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Определить поток и циркуляцию вектора вдоль замкнутого контура L.

4456. Потенциал поля скоростей частиц текущей жидкости равен $u(x, y) = x\left(x^2 - 3y^2\right)$. Вычислить количество жидкости, протекающей за единицу времени через отрезок прямой линии, соединяющей начало координат с точкой $(1, 1)$.

Поток и циркуляция (пространственный случай)

4457. Доказать, что поток радиус-вектора r через любую замкнутую поверхность равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

4458. Вычислить поток радиус-вектора через боковую поверхность круглого цилиндра (радиус основания R, высота H), если ось цилиндра проходит через начало координат.

4459. Пользуясь результатами задач 4457 и 4458, установить, чему равен поток радиус-вектора через оба основания цилиндра предыдущей задачи.

4460. Вычислить поток радиус-вектора через боковую поверхность круглого конуса, основание которого находится на плоскости xOy, а ось совпадает с осью Oz. (Высота конуса 1, радиус основания 2.)

4461. Найти поток вектора $A(P) = xyi + yzj + xzk$ через границу части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.

4462*. Найти поток вектора $A(P) = yzi + xzj + xyk$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $S(0, 0, 2)$, основанием которой служит треугольник с вершинами $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$ и $B(0, 1, 0)$.

4463. Вычислить циркуляцию радиус-вектора вдоль одного витка AB винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, где A и B – точки соответствующие значению параметра 0 и 2π.

4464. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Вычислить циркуляцию поля линейных скоростей вдоль окружности радиуса R, центр которой лежит на оси вращения, а плоскость окружности перпендикулярна к оси вращения в направлении вращения.

4465*. Вычислить поток ротора поля векторов $A(P) = yi + zj + xk$ через поверхность параболоида вращения $z = 2\left(1 - x^2 - y^2\right)$, отсеченную плоскостью $z = 0$.

ОТВЕТЫ

К главе I

1. Все числа n натурального ряда, кроме $n = 1$ и $n = 2$. Если сумма углов S, а число сторон n, то $S = \pi(n - 2)$. 4. а) При $x = -2$, $x = 1$, $x = 6$ функция обращается в нуль; б) при $x < -2$, $-2 < x < 1$, $x > 6$ функция положительна; в) при $1 < x < 6$ функция отрицательна. 6. $r = \frac{1}{\sqrt{\pi s}}$. 7. $S = \frac{a^2 - b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. 8. $b = \sqrt{25 - a^2}$. 9. $f(0) = 2$; $f(1) = -0,5$; $f(2) = 0$; $f(-2) = 4$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$; $f\left(\sqrt{2}\right) = -0,242\ldots$ $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$; $\varphi(0) = 2$; $\varphi(1) = 0,5$; $\varphi(2) = 0$; $\varphi(-2) = -4$; $\varphi(4) = 0,4$; $f(-1)$ не существует; $\varphi(-1)$ не существует. 10. $f(1) = 0$; $f(a) = a^3 - 1$; $f(a + 1) = a^3 + 3a^2 + 3a$; $f(a - 1) = a^3 - 3a^2 + 3a + 2$; $2f(2a) = 16a^3 - 2$; 11. $F(0) = \frac{1}{4}$; $F(2) = 1$; $F(3) = 2$; $F(-1) = \frac{1}{8}$; $F(2,5) = \sqrt{2}$; $F(-1,5) = \frac{1}{\sqrt{128}}$; $\varphi(0) = \frac{1}{4}$; $\varphi(2) = 1$; $\varphi(-1) = \frac{1}{2}$; $\varphi(x) = 2^{x-2}$ при $x > 0$ и $\varphi(x) = 2^{-x-2}$ при $x < 0$; $\varphi(-1) + F(1) = 1$. 12. $\psi(0) = 0$; $\psi(1) = a$; $\psi(-1) = -\frac{1}{a}$; $\psi\left(\frac{1}{a}\right) = a^{\frac{1-a}{a}}$; $\psi(a) = a^{a+1}$; $\psi(-a) = -a^{1-a}$. 13. $\varphi\left(t^2\right) = t^6 + 1$; $[\varphi(t)]^2 = t^6 + 2t^3 + 1$. 20. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно тангенсу угла между секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, и положительным направлением оси Ox. 22. а) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. 23. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -\frac{1}{2}$. 25. 4 и -2; -2, 2, 4, 10. 26. $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. 27. $x \le -1$ и $x \ge 2$. 28. $a = 4$, $b = -1$. 29. $a = -\frac{1}{2\sin 0,5} \approx -1,04$ (полагая $\sin 0,5 \approx 0,48$); $b = 1$; $c = -\frac{1}{2} + 2k\pi$ или $a = \frac{1}{2\sin 0,5} \approx 1,04$; $b = -1$; $c = \frac{1}{2} + (2k + 1)\pi$ ($k = 0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$). 33. $u = \sqrt{1 + (\lg\sin x)^2}$. 34. $v = \sin(1 + x)$. 35. 1) $y = v^3$, $v = \sin x$; 2) $y = \sqrt[3]{v}$, $v = u^2$, $u = x + 1$; 3) $y = \lg v$, $v = \operatorname{tg} x$; 4) $y = u^3$, $u = \sin v$, $v = 2x + 1$; 5) $y = 5^u$, $u = v^2$, $v = 3x + 1$. 36. а) $-\frac{3}{8}$; б) 0; в) $\sin 12$; г) $-\sin 2x\cos^2 2x$; д) $x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$; е) 0; ж) $\sin(2\sin 2x)$. 38. 1) $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{a^3 - x^3}$; 4) $y = \frac{C}{x}$; 5) $y = \frac{\lg 2,5}{x}$; 6) $y = \frac{10000}{x} - 1$; 7) $y = \log_2\left(x^3 + 7\right) -$

$-\log_2\left(x^2-2\right)-x$; 8) $y=\operatorname{Arccos}\frac{x^2}{1+x}$. **39*.** Пусть $x>0$ и $y>0$, тогда $y+y-x-x=0$; $y=x$ (график – биссектриса первого координатного угла). Пусть $x>0$ и $y<0$, тогда $y-y-x-x=0$; $x=0$ (график – отрицательная полуось Oy). Пусть $x<0$ и $y>0$, тогда $y+y-x+x=0$; $y=0$ (график – отрицательная полуось Ox). Пусть $x<0$ и $y<0$, тогда $y-y-x+x=0$ – тождество (график – множество всех внутренних точек третьего координатного угла).

41.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	8	8

42.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	0	0	0	1	0	2	0	2	1	2	0	4	0	2	2	3	0	4	0	4

43. Если $f(x)$ – масса отрезка AM, то $f(x)=2x$ при $0\le x\le 1$, $f(x)=2+\frac{3}{2}(x-1)$ при $1<x\le 3$, $f(x)=x+2$ при $3<x\le 4$. Функция определена при $0\le x\le 4$. **45.** $V=\pi x\left(R^2-\frac{x^2}{4}\right)$; $0<x<2R$. **47.** 1) $x>0$; 2) $x>-3$; 3) $x\le\frac{3}{2}$; 4) $-\infty<x\le 0$; 5) вся числовая ось, кроме точек $x=\pm 1$; 6) вся числовая ось; 7) не определена только при $x=0$, $x=-1$, $x=1$; 8) вся числовая ось, кроме точек $x=1$ и $x=2$; 9) $-1\le x\le 1$; 10) $-\infty<x<0$ и $4<x<+\infty$; 11) $-\infty<x\le 1$ и $3\le x<+\infty$; в интервале $(1,3)$ функция не определена; 12) $-\infty<x<1$ и $2<x<+\infty$; на отрезке $[1,2]$ функция не определена; 13) $-4\le x\le 4$; 14) $1\le x\le 3$; 15) $0\le x\le 1$; 16) $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$; 17) $0\le x\le\frac{1}{2}$; 18) $-1\le x\le 1$; 19) $-\infty<x<0$; 20) не имеет смысла; 21) $1\le x\le 4$; 22) $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, где k – целое число; 23) $2k\pi\le x\le(2k+1)\pi$, где k – целое число; 24) $0<x<1$ и $1<x<+\infty$. **48.** 1) $-2\le x<0$ и $0<x<1$; 2) $-1\le x\le 2$; 3) $1\le x<4$; 4) $\frac{3}{2}<x<2$ и $2<x<+\infty$; 5) область определения состоит только из одной точки $x=1$; 6) $-1<x<0$ и $1<x<2$; $2<x<+\infty$; 7) $3-2\pi<x<3-\pi$ и $3<x\le 4$; 8) $-4\le x\le-\pi$ и $0\le x\le\pi$; 9) $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, где k – целое число; 10) $4<x<5$ и $6<x<+\infty$; 11) нигде не определена; 12) $-1<x\le 1$ и $2\le x<3$; 13) вся числовая ось; 14) $4\le x\le 6$; 15) $2<x<3$. **49.** 1) Да; 2) тождественны на любом интервале, не содержащем точку $x=0$; 3) тождественны на полуинтервале $[0,+\infty)$; 4) тождественны на интервале $(0,+\infty)$. **50.** 1) Например, $y=\sqrt{4-x^2}$; 2) например, $y=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; 3) например, $y=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}$. **51.** 1) $1<x\le 3$; 2) $0\le x<+\infty$ для двух ветвей и $1\le x<+\infty$ для двух других ветвей. **52.** $-\infty<x<+\infty$; **53.** 1) $y>0$ при $x>2$; $y<0$ при $x<2$; $y=0$

при $x=2$; 2) $y>0$ при $x<2$ и $x>3$; $y<0$ при $2<x<3$; $y=0$ при $x_1=2$ и $x_2=3$; 3) $y>0$ в интервале $(-\infty,+\infty)$, функция корней не имеет; 4) $y>0$ в интервалах $(0,1)$, $(2,+\infty)$; $y<0$ в интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,2)$; $y=0$ при $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$; 5) $y>0$ при $x\neq 0$; $y=0$ при $x=0$. 54. 1), 3), 8), 10), 11), 15) четные; 5), 6), 9), 12), 14), 17) нечетные; 2), 4), 7), 13), 16) ни четные, ни нечетные. 55. 1) $y=\left(x^2+2\right)+3x$; 2) $y=\left(1-x^4\right)+\left(-x^3-2x^5\right)$; 3) $y=(\sin 2x+\operatorname{tg} x)+$ $+\cos\frac{x}{2}$. 57. 1) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}+\frac{a^x-a^{-x}}{2}$; 2) $y=\frac{(1+x)^{100}+(1-x)^{100}}{2}+\frac{(1+x)^{100}-(1-x)^{100}}{2}$. 59. Функции 1), 5), 6), 8). 60. Графики см. на рис. 67 и 68. 61. 1) В интервале $(-\infty,0)$ убывает, в интервале $(0,+\infty)$ возрастает; 2) в интервале $(-\infty,0)$ убывает, в интервале $(0,+\infty)$ сохраняет постоянное значение – нуль. 62. 1) Наибольшее 1; наименьшее 0; 2) наибольшее 1, наименьшее -1; 3) наибольшее 2, наименьшее 0; 4) наибольшего значения не имеет, наименьшее 1. 76. $x=3$; при графическом решении ищется точка пересечения графика функции $y=\varphi(x)$ и прямой $y=2x-4$. 78*. Следует обратить внимание на то, что из всегда справедливого соотношения $|f(x)+\varphi(x)|\le|f(x)|+|\varphi(x)|$ в условии задачи исключен знак равенства. Строгое неравенство будет иметь место при $x<3$ и $x>4$. Можно решить задачу путем построения графиков функций $\Phi(x)=|f(x)+\varphi(x)|$ и $\psi(x)=|f(x)|+|\varphi(x)|$.

$$82.\quad y=\begin{cases}0 & \text{на интервале } (-\infty,-3),\\ -\frac{5}{9}x^2+5 & \text{на отрезке } [-3,3],\\ \frac{2}{3}x-2 & \text{на отрезке } [3,6].\end{cases}$$

105. $x_1=-3$, $x_2=8$. При графическом решении ищется точка пересечения графика функции $y=\varphi(x)$ и параболы $y^2=7x+25$. 106. Если $b^2-4ac>0$ и $a>0$, то функция определена на всей числовой оси, кроме интервала $x_1\le x\le x_2$, где x_1 и x_2 – корни трехчлена. При $b^2-4ac>0$ и $a<0$ функция определена только при $x_1<x<x_2$. Если $b^2-4ac<0$ и $a>0$, то функция определена на всей числовой оси. Если $b^2-4ac<0$ и $a<0$, то функция нигде не определена. Наконец, при $b^2-4ac=0$ функция будет определена на всей числовой оси, кроме одной ее точки $x=-\frac{b}{2a}$, если $a>0$, и нигде не определена, если $a<0$.

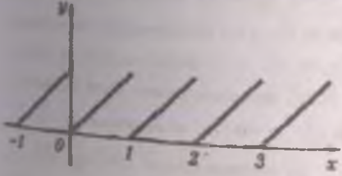

Рис. 67

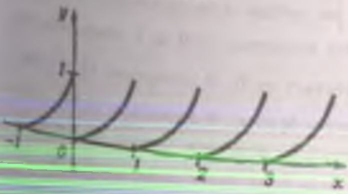

Рис. 68

107. $f(x+1) = 2x^2 + 5x + 3$. **108*.** Пусть $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c} = m$, где m – произвольное действительное число; тогда $(m-1)x^2 + 2(2m-1)x + c(3m-1) = 0$. Аргумент x должен быть действительным числом, следовательно, $(2m-1)^2 - (m-1)(3mc-c) \geq 0$, или $(4-3c)m^2 + 4(c-1)m - (c-1) \geq 0$; но так как m – действительное число, то это неравенство в свою очередь справедливо лишь при условии, что $4-3c > 0$, $4(c-1)^2 + (4-3c)(c-1) \leq 0$; отсюда $0 \leq c \leq 1$, но по условию $c \neq 0$, следовательно, $0 < c \leq 1$. **117.** 1) $y = x$. 2) $y = \frac{x}{2}$; 3) $y = \frac{1-x}{4}$; 4) $y = \pm\sqrt{x-1}$; 5) $y = \frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{x-1}{x}$; 7) $y = 1 \pm \sqrt{x+1}$; 8) $y = \pm\sqrt{x^2-1}$; 9) $y = \lg\frac{x}{10}$; 10) $y = -2 + 10^{x-1}$; 11) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 12) $y = \log_2\frac{x}{1-x}$; 13) $y = \frac{1}{2}\lg\frac{x}{2-x}$; 14) $y = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}$; 15) $y = \frac{1+\arcsin\frac{x-1}{2}}{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}$; 16) $y = \pm\cos\frac{x}{4}$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$. **119.** $d = -a$. **122.** $1 < x \leq 3$; $y = 1 + 2^{1-x^2}$. **123.** $y = \arcsin\sqrt[3]{x - x^2 - 2}$. **128.** Если $y_1 = x^n$, $y_2 = \sqrt[n]{x}$, то при $n > 1$ для $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 > y_2$; при $0 < n < 1$ для $0 < x < 1$ $y_1 > y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 < y_2$; при $-1 < n < 0$ для $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 > y_2$, при $n < -1$ для $0 < x < 1$ $y_1 < y_2$, а для $1 < x < +\infty$ $y_1 < y_2$. **135.** $n = 15$. **136.** Исходя из определения гиперболических функций, можно доказать, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Периодическими эти функции не являются. **141.** График функции симметричен относительно начала координат, так как функция нечетная. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. **146.** Область определения $(0, \pi)$. Площадь будет наибольшей при $x = \frac{\pi}{2}$. **155*.** 1) Период $\frac{\pi}{2}$. На отрезке $[0, 2\pi]$ функция может быть представлена так: $y = \sin(x) + \cos(x)$ на отрезке $[0, \pi/2]$, $y = -\sin(x) + \cos(x)$ на отрезке $[\pi/2, \pi]$, $y = -\sin(x) - \cos(x)$ на отрезке $[\pi, 3\pi/2]$, $y = -\sin(x) + \cos(x)$ на отрезке $[3\pi/2, 2\pi]$. 2) Период 2π. На отрезке $[0, 2\pi]$ функция может быть представлена так: $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 0$ на полуинтервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $y = -\operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $y = 0$ на полуинтервале $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. **156.** 1) Область определения состоит из бесчисленного множества интервалов вида $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, где $n = 0, \pm1, \pm2 \ldots$; ни четная и ни нечетная, периодическая, период 2π. В интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ синус возрастает от 0 до 1, следовательно, $\lg\sin x$, оставаясь отрицательным, возрастает до 0. В интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ синус убывает от 1 до 0, следовательно, убывает и $\lg\sin x$. В интервале $(\pi, 2\pi)$ синус имеет отрицательные значения, следовательно, функция $\lg\sin x$ не определена. 2) Область определения состоит из отдельных точек вида $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ В этих точках $y = 0$. График состоит из отдельных точек

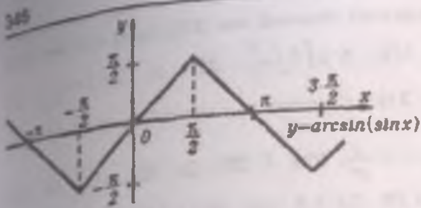

Рис. 69

оси абсцисс. 3) Функция определена на всей числовой оси, кроме точек $x = \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 161. 1) $-1 \le x \le 1$; 2) $0 \le x \le 1$; 3) $0 \le x \le 1$; 4) $-1 \le x \le 0$; 5) $0 < x < +\infty$; 6) $-\infty < x < 0$; 7) $0 \le x < +\infty$; 8) $-\infty < x \le 0$; 9) $-\infty < x < 1$; 10) $1 < x < +\infty$.

163*. Период 2π. График см. на рис. 69. *Указание*. На интервале $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ имеем $y = \arcsin(\sin x) = x$ по определению функции $\arcsin x$. Для получения графика функции на интервале $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ полагаем $z = x - \pi$, тогда $x = \pi + z$, $-\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}$, $y = \arcsin(\sin x) = \arcsin\sin(z + \pi) = -\arcsin(\sin z) = -z$; $y = \pi - x$ и т. д.

К главе II

176. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $n \ge 4$. 177. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 178. $n = 19999$. 179. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, $n \ge 1000$. Величина v_n бывает то больше своего предела, то меньше, то равна ему (последнее при $n = 2k + 1$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$). 180. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; $n \ge 14$; $n \ge \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. 181. $n \ge \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, если $\varepsilon \le \frac{1}{6}$; $n = 0$, если $\varepsilon > \frac{1}{6}$. 182. $n \ge \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}$; последовательность u_n убывающая. 183. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; v_n достигает своего предела при $n = m + 1$, так как, начиная с этого значения n, $v_n = 0$. 185. 0. 186. 1) Нет. 2) Да. 189. При $a = 0$ этот предел может равняться любому числу или не существовать. 190. $\delta < \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$; $\delta < 0{,}00025$. 191. $\delta < 2 - \sqrt{3}$. 192. $\delta < \frac{2}{13}$. 193. $\left|x - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}99 \approx 0{,}133$. 194. $N \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, если $\varepsilon \le 1$; $N = 0$, если $\varepsilon > 1$. 195. $N \ge \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 3}$, если $\varepsilon \le \frac{4}{3}$; $N = 0$, если $\varepsilon > \frac{4}{3}$. 196. $n > \frac{N-1}{2}$. 197. u_n — положительная бесконечно большая величина, если разность прогрессии $d > 0$, и отрицательная, если $d < 0$. Для геометрической прогрессии утверждение справедливо только тогда, когда знаменатель прогрессии по абсолютной величине больше 1. 198. $-\frac{1}{10^4+2} < x < \frac{1}{10^4-2}$. 199. $\frac{2000}{1001} < x < \frac{2000}{999}$. 200. $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}} = 0{,}01$. 201. $\log_2 0{,}99 < x < \log_2 1{,}01$. 202. $M \ge 10^N = 10^{100}$. 203. $\sin x$, $\cos x$ и все обратные тригонометрические функции. 205. Нет. Да. 206. Нет. 207. 1) Например, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и $x_n = 2\pi n$. 2) Нет. 209. Если $a > 1$, то функция при $x \to +\infty$ не ограничена (но не бесконечно большая); при $x \to -\infty$ она стремится к нулю. Если $0 < a < 1$, то функция при $x \to -\infty$ не ограничена (но не бесконечно большая); при $x \to +\infty$ она стремится к нулю.

При $a = 1$ функция ограничена на всей числовой оси. 210. 1), 3) и 5) нет; 2) и 4) да. 213. $\frac{-1}{10001} < x < \frac{1}{9999}$. 214. $N \geq \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$. 215. 1) $y = 1 + \frac{1}{x^2-1}$; 2) $y = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2\left(2x^2+1\right)}$; 3) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$. 216*. Сравнить u_n с суммой членов геометрической прогрессии $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}$. 220. 3. 221. Да. 222. $f(x) = 9\pi$ при $0 \leq x \leq 5$; $f(x) = 4\pi$ при $5 < x \leq 10$; $f(x) = \pi$ при $10 < x \leq 15$. Функция разрывна при $x = 5$ и при $x = 10$. 223. $a = 1$. 224. $A = -1$, $B = 1$. 225. $x = 2$, $x = -2$. 226. $\frac{2}{3}$. 227. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв, $y = \frac{\cos x}{x}$ – разрыв второго рода (бесконечный). 228. Функция разрывна при $x = 0$. 229. Функция имеет три точки разрыва. При $x = 0$ разрыв устранимый, при $x = \pm 1$ разрыв второго рода (бесконечный). 230. Нет. Если $x \to 0$ справа, то $f(x) \to \frac{\pi}{2}$, если $x \to 0$ слева, то $f(x) \to -\frac{\pi}{2}$. 231. Функция разрывна при $x = 0$. 232. 0. 234. Нет. Если $x \to 1$ справа, то $y \to 1$; если $x \to 1$ слева, то $y \to 0$. 235. Если $x \to 0$ справа, то $y \to 1$; если $x \to 0$ слева, то $y \to -1$. 236. Функция разрывна при $x = 0$ (разрыв первого рода). 237. Функция имеет разрывы первого рода в точках $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 238. При $x = 0$ функция непрерывна, при $x \neq 0$ функция разрывна. 239. Все три функции разрывны, когда x равен целому числу (положительному или отрицательному) или нулю. 241*. Записать многочлен в виде $x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right)$ и исследовать его поведение при $x \to \pm\infty$. 244*. Построить схематично график функции $y = \frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3}$, исследовав ее поведение в окрестности точек λ_1, λ_2 и λ_3. 245. 1. 246. $\frac{1}{3}$. 247. 3. 248. ∞. 249. 0. 250. 0. 251. $\frac{15}{17}$. 252. 1. 253. 0. 254. 4. 255. 1. 256. 0. 257. 0. 258. 0. 259. 1. 260. $\frac{4}{3}$. 261. $\frac{1}{2}$. 262. $-\frac{1}{2}$. 263. –1. 264*. 1. Заметить, что $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. 265. $\frac{1}{2}$. 266. 1. 267. 0. 268. 9. 269. $\frac{3}{4}$. 270. ∞. 271. 0. 272. 0. 273. $-\frac{2}{5}$. 274. $\frac{1}{2}$. 275. 6. 276. ∞. 277. –1. 278. ∞. 279. 0. 280. $\frac{m}{n}$. 281. 0. 282. ∞. 283. $\frac{1}{2}$. 284. –1. 285. 0. 286. $\frac{1}{4}$. 287. $-\frac{1}{2}$. 288. 100. 289. –1. 290. 1. 291. ∞. 292. 0. 293. 0. 294. ∞. 295. 4. 296. $\frac{1}{4}$. 297. 3. 298. $\frac{1}{3\sqrt{x}}$, если $x > 0$; ∞, если $x = 0$. 299. $\frac{1}{3}$. 300. $\frac{2}{3}$. 301. $\frac{1}{4a\sqrt{a-1}}$. 302. $\frac{3}{2}$. 303*. $\frac{1}{2}$. К числителю прибавить и отнять единицу. 304. $-\frac{1}{4}$. 305. Один корень стремится к $-\frac{c}{b}$, другой – к ∞. 306. 0. 307. 0. 308. 0, если $x \to +\infty$; [illegible], если $x \to -\infty$. 309. $\frac{1}{2}$, если $x \to +\infty$; $-\infty$, если $x \to -\infty$. 310. $\frac{\pi+1}{2}$, если [illegible] ∞, если $x \to -\infty$. 311. $\pm\frac{1}{2}$. 312. 0. 313. 1. 314. 0. [illegible] 316. $\frac{\pi}{2}$. 317. $\frac{3}{2}$. [illegible] 318. [illegible] если $n > m$; 1, если $n = m$; ∞, если $n < m$. 319. $\frac{2}{3}$. 320. $\frac{1}{3}$. 321. $\frac{1}{2}$.

323. ∞. 324. -1. 325. $\frac{1}{2}$. 326. ∞. 327. 0. 328. $\frac{1}{2}$. 329. ∞. 330. $-\frac{3}{2}$. 331. 1. 332. $\frac{1}{2}$. 333. $\frac{2}{\pi}$. 334. $-\frac{a}{\pi}$. 335. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 336. 2. 337. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 338. -2. 339. $-2\sin a$. 340. $\frac{b^2-a^2}{2}$. 341. $\cos^2\alpha$. 342. $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. 343. $-\sin\alpha$. 344. $\frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}$. 345. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 346. 1. 347. 6. 348. $\frac{3}{2}$. 349. -1. 350*. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Положить $\arccos x = y$. 351. $\frac{1}{e}$. 352. $\frac{1}{e}$. 353. 1. 354. e^{mk}. 355. e^6. 356. $e^{-\frac{1}{6}}$. 357. e^2. 358. 0, если $x\to+\infty$; ∞, если $x\to-\infty$. 359. ∞, если $x\to+\infty$; 0, если $x\to-\infty$. 360. 1. 361. ∞, если $x\to+\infty$; 0, если $x\to-\infty$. 362. e^2. 363. e. 364. $\sqrt{e}$. 365. k. 366. $\frac{1}{a}$. 367. a. 368. $\frac{1}{e}$. 369. $\ln a$. 370. $\frac{2}{3}$. 371. e. 372*. $\frac{3}{2}$; к числителю прибавить и отнять единицу. 373. 2. 374. 1. 375. $a-b$. 376. 1. 377. 0, если $x\to+\infty$; ∞, если $x\to-\infty$. 378. 1, если $x\to+\infty$; -1, если $x\to-\infty$. 379. 1) a^n; 2) 0, если $A\neq 0$, a^n, если $A=0$ и $a\neq 0$, и ∞, если $A=a=0$; 3) $\frac{1}{1+A}$. 380. 0, если $x\to+\infty$; $-\infty$, если $x\to-\infty$. 381. При $a>1$ предел равен 1, если $x\to+\infty$, и 0, если $x\to-\infty$. При $a<1$ предел равен 0, если $x\to+\infty$, и 1, если $x\to-\infty$. При $a=1$ предел равен $\frac{1}{2}$. 382. При $a>1$ предел равен 1, если $x\to+\infty$, и -1, если $x\to-\infty$. При $a<1$ – наоборот. При $a=1$ предел равен 0. 383. 0. 384. 0. 385. 1. 386. 0. 387. $-\cos a$. 388. $\frac{1}{12}$. 389. $\frac{1}{8}$. 390*. $\frac{\sin x}{x}$. Умножить и разделить на $\sin\frac{x}{2^n}$. 391. $\frac{1}{2}$. 392. 0. 393*. $-\frac{1}{2}$. Воспользоваться формулой $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+ab}$. 394. $\frac{1}{3}$. 395*. $\frac{1}{2}$. Заменить $\arcsin x$ на $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и воспользоваться указанием к задаче 393. 396. ∞, если $n<1$; e, если $n=1$; 1, если $n>1$. 397*. 1. Взять вместо $\cos x$ выражение $1-(1-\cos x)$. 398. $-\frac{1}{2}$. 399. $\frac{1}{e}$. 400. e. 401. e^{ab}. 402. v_n высшего порядка малости. 403. u_n и v_n – эквивалентные бесконечно малые. 405. Одного порядка. 406. При $x=0$ порядок малости различен. При $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ величины Δy и Δx эквивалентны. 407. Нет. 408. Третьего порядка. 409. 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 10. 410. $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$. 411. $a=k$. 412. Нет. 414. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) эквивалентная бесконечно малая; 5) эквивалентная бесконечно малая; 6) 1; 7) эквивалентная бесконечно малая; 8) 2; 9) 2; 10) 1; 11) $\frac{2}{3}$; 12) 2. 415. $a^2\sqrt{3}$. 416. $2\pi R^2$; $4R^2$. 418. Из того, что ломаная линия стремится к прямой (в смысле сближения их точек), не следует, что длина ломаной стремится к длине отрезка. 419. [illegible] 420. a. $\frac{\pi a}{2}$. 421. $2\pi(R+r)$. 422. И отрезок и угол [illegible] порядка $\frac{1}{2}$. 425. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145. [illegible] 10,10 [illegible] 30,12; [illegible] 4,04. 427. $\ln 1{,}01 = 0{,}01$; $\ln 1{,}02 = 0{,}02$ [illegible] $= 0{,}1$; $\ln 1{,}2 = 0{,}2$.

К главе III

428. а) 5; б) 5. **429.** а) $v = 0{,}25$ м/с; б) $v = 0{,}55$ м/с; в) $\frac{t_1+t_2}{1200}$ м/с. **430.** 75,88; 60,85; 49,03; 48,05. **431.** 53,9 м/с; 49,49 м/с; 49,25 м/с; 49,005 м/с; $v_5 = 49{,}0$ м/с; $v_{10} = 98{,}0$ м/с; $v = 9{,}8t$ м/с. **432.** а) 4 г/см; б) 40 г/см; в) $4l$ г/см, где l – длина отрезка AM. **433.** 1) 95 г/см; 2) а) 35 г/см; б) 5 г/см; в) 185 г/см. **434.** 1) 4195 Дж/кг · К; 2) 4241 Дж/кг · К. **435*.** Ввести среднюю угловую скорость, затем путем перехода к пределу получить искомую величину. **438.** $k = \frac{f'(t)}{f(t)}$, где k – коэффициент линейного расширения. **439.** $k = S\frac{[illegible]}{[illegible]}$ **440.** 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261. **441.** 1) 4,52; 2) –0,249; 3) 0,245. **442.** а) 6,5; б) 6,1; в) 6,01; г) 6,001. **443.** $f'(5) = 10$; $f'(-2) = -4$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$. **444.** 3; 0; 6. $\frac{1}{[illegible]}$ **445.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **446.** Для функции $f(x) = x^3$ не будет. **447.** 1. **448.** 0,4343. **449.** 2,303. **454.** 1) 0; 2) 6; 3) –4; 4) $k_1 = 2$, $k_2 = 4$. **455.** $(1,1)$; $(-1,-1)$. **456.** 1) $(0,0)$; 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. **457.** Не может. **458.** $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{7}$, $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{13}$. **459.** $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$. **460.** $\mathrm{arctg}\,3$. **461.** $y = 12x - 16$; $x + 12y - 98 = 0$; подкасательная равна $\frac{2}{3}$, поднормаль равна 96. **462.** При $x = 0$ и $x = \frac{2}{3}$. **463.** 1) $(2,4)$; 2) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$; 3) $(-1,1)$ и $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. **466.** 1) $6x - 5$; 2) $4x^3 - x^2 + 5x - 0{,}2$; 3) $2ax + b$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{0{,}2}{\sqrt[5]{y^3}} - 10y^4 - \frac{0{,}4}{y^3}$; 7) $\frac{1}{n} - \frac{n}{x^2} + \frac{2x}{m^2} - \frac{2m^2}{x^3}$; 8) $\frac{3}{2}m\sqrt{x} + \frac{7}{5}n\sqrt[5]{x} + \frac{1}{2}p\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 9) $\frac{2mx+n}{p+q}$; 10) $-\frac{1}{15}t^{-\frac{5}{3}} + 7{,}28t^{-2{,}4} - \frac{0{,}5}{[illegible]}$; 11) $2x - 1$; 12) $3{,}5x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 13) $3v^2 + 2v - 1$; 14) $6(a - x)$; 15) $\frac{2ax}{a+b} + \frac{b}{a+b} - [illegible]$; 16) $\frac{3m(mx+n)^2}{p^3}$. **467.** $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$; $f(4) = 8$, $f'(4) = 2{,}5$; $f(a^2) = 3a^2 - 2|a|$, $f'(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}$. **468.** $f(-1) = -5$; $f'(-1) = -8$; $f'(2) = \frac{19}{16}$; $f'\left(\frac{1}{a}\right) = 3a^4 + 10a^3 - a^2$. **469.** 13. **471.** 1) $4x^3 - 3x^2 - 8x + 9$; 2) $7x^6 - 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x + 2$; 3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; 4) $\frac{1}{9}\left(\frac{90}{\sqrt[4]{x}} - \frac{5}{x\sqrt[9]{x^5}} + \frac{\sqrt{[illegible]}}{x\sqrt[6]{x}} - 48\sqrt[6]{27x^2}\right)$; 5) $\frac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{[illegible]}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 6) $2x(3x^4 - 28x^2 + 49)$; 7) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+3x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$. **472.** $-\frac{2}{(x-1)^2}$. **473.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. **474.** $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$. **475.** $\frac{[illegible]}{(v^2+v+1)^2}$. **476.** $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **477.** $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2} + 1 + 2x - 3x^2$. **478.** $\frac{2v^4(v^3-6)}{(v^3-2)^2}$. **479.** $-\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$. **480.** $-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$. **481.** $\frac{2x-1}{x^2-3}$. **482.** $-\frac{[illegible]}{[illegible]}$ **483.** $-\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$. **484.** $\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$. **485.** $\frac{4x^3(2a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^2}$. **486.** $\frac{1+2x+3x^2-[illegible]}{(1+x^2)^2}$

487. $\frac{6x\left(1+2x-2x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2\left(1-2x^3\right)^2}$. 488. $-\frac{1+2bx}{m(a+bm)^2}$. 489. $-\frac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)]}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$.

490. $f'(0)=0$, $f'(1)=6$. 491. $F'(0)=11$, $F'(1)=2$, $F'(2)=-1$. 492. $F'(0)=-\frac{1}{4}$, $F'(-1)=\frac{1}{2}$. 493. $s'(0)=\frac{2}{25}$, $s'(2)=\frac{17}{15}$. 494. $y'(1)=16$, $y'(a)=15a^2+\frac{2}{a^2}-1$. 495. $\rho'(2)=\frac{1}{8}$, $\rho'(0)=1$. 496. $\varphi'(1)=-\frac{\pi+1}{4}$. 497. $z'(0)=1$. 498. 1) $4x^3-3x^2\times(a+b+c+d)+2x(ab+ac+ad+bc+db+cd)-(abc+abd+acd+bcd)$; 2) $8x\left(x^2+1\right)^3$; 3) $-20(1-x)^{19}$; 4) $60(1+2x)^{29}$; 5) $-20x\left(1-x^2\right)^9$; 6) $5\left(15x^2+2x\right)\left(5x^3+x^2-4\right)^4$; 7) $6\left(3x^2-1\right)\left(x^3-x\right)^5$; 8) $6\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5$; 9) $4\left(3t^2+\frac{3}{t^4}\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3$; 10) $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$; 11) $\frac{5\left(x^2+2x-1\right)\left(1+x^2\right)^4}{(1+x)^6}$; 12) $24\left(x^2+x+1\right)\left(2x^3+3x^2+6x+1\right)^3$.

499. $\frac{(t+2)(t+4)}{(t+3)^2}$. 500. $\frac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$. 501. $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{2x}\right)^2}$. 502. $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}\left(1+\sqrt[3]{2x}\right)^2}$. 503. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

504. $-\frac{3\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}$. 505. $\frac{mv^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}$. 506. $-\frac{4(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^3}$. 507. $\frac{x}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$.

508. $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^4}}$. 509. $\frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{\left(1-x^4-x^8\right)^3}}$. 510. $-\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$. 511. $\frac{x\left(x^2+2a^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}}$.

512. $-\frac{y+\sqrt{a^2+y^2}}{a^2\sqrt{a^2+y^2}}$. 513. $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-\frac{15x}{2\sqrt[4]{\left(x^2+2\right)^7}}$. 514. $u'(1)=9$. 515. $y'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

516. 0. 517. $\cos x-\sin x$. 518. $\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$. 519. $\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$. 520. $\varphi\cos\varphi$.

521. $(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$. 522. $\frac{1}{1+\cos t}$. 523. $\frac{\sin x+\cos x+x(\sin x-\cos x)}{1+\sin 2x}$.

524. $\frac{(1+\operatorname{tg}x)(\sin x+x\cos x)-x\sin x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^2}$. 525. $-\sin 2x$. 526. $\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x$. 527. $-\sin^3 x$.

528. $\frac{1}{2}\sin 2x(2-\sin x)$. 529. $\operatorname{tg}^4 x$. 530. $2x\frac{\sin x}{\cos^3 x}$. 531. $-\frac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}$. 532. $3\cos 3x$.

533. $-\frac{2}{3}\sin\frac{x}{3}$. 534. $9\cos(3x+5)$. 535. $\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$. 536. $\frac{1}{\sqrt{1-2\operatorname{tg}x}\cos^2 x}$. 537. $-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$.

538. $\cos(\sin x)\cos x$. 539. $-12\cos^2 4x\sin 4x$. 540. $\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}$. 541. $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

542. $-\frac{2x}{3\sin^2\sqrt[3]{1+x^2}\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}}$. 543. $4\left(1+\sin^2 x\right)^3\sin 2x$. 544. $\frac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$.

545. $-\frac{\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$. 546. $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$. 548. $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

549. $\frac{x}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$. 550. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 551. $\arcsin x$. 552. $-\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

553. $\sin x\,\mathrm{arctg}\,x + x\cos x\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{x\sin x}{1+x^2}$. 554. $-\frac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

555. $\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. 556. 0. 557. $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 558. $-\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. 559. $\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$.

560. $\frac{2x}{\mathrm{arctg}\,x}-\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)(\mathrm{arctg}\,x)^2}$. 561. $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. 562. $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$. 563. $\frac{2x}{1+x^4}$.

564. $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$. 565. $\frac{\sin x}{|\cos x|}$. 566. $-\frac{2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$. 567. $-\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\arccos x)^2}}$.

568. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$. 569. $\frac{x+1}{3\sqrt[3]{\left(\arcsin\sqrt{x^2+2x}\right)^2}\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$. 570. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$.

571. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$. 572. $\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}$. 573. $2x\log_2 x+\frac{x}{\ln 2}$. 574. $\frac{2\ln x}{x}$. 575. $\frac{\ln x+1}{\ln 10}$.

576. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. 577. $\frac{x\ln x-x-1}{x\ln^2 x}\ln 2$. 578. $\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$. 579. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$.

580. $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$. 581. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$. 582. $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x\left(1+x^2\right)^2}$. 583. $x^{n-1}(n\ln x+1)$.

584. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$. 585. $-\frac{2}{1-2x}$. 586. $\frac{2x-4}{x^2-4x}$. 587. $\mathrm{ctg}\,x$. 588. $\frac{2x}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$. 589. $\frac{2}{\sin 2x}$.

590. $-\frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$. 591. $4\ln^3\sin x\,\mathrm{ctg}\,x$. 592. $\frac{a}{(ax+b)\left[1+\ln^2(ax+b)\right]}$.

593. $n(1+\ln\sin x)^{n-1}\mathrm{ctg}\,x$. 594. $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$.

595. $\frac{x}{\mathrm{arctg}\sqrt{1+x^2}\left(2+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$. 596. $\frac{4x^2\arcsin\left[\ln\left(a^3+x^3\right)\right]}{\left(a^3+x^3\right)\sqrt{1-\ln^2\left(a^3+x^3\right)}}$. 597. $\frac{\mathrm{ctg}\frac{x+1}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+1}{4}}}$.

598. $2^x\ln 2$. 599. $10^x\ln 10$. 600. $-\frac{\ln 3}{3^x}$. 601. $4^{-x}(1-x\ln 4)$. 602. $10^x(1+x\ln 10)$.

603. $e^x(1+x)$. 604. $\frac{1-x}{e^x}$. 605. $\frac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{e^x}$. 606. $e^x(\cos x-\sin x)$.

607. $\frac{e^x}{\sin^2 x}(\sin x-\cos x)$. 608. $-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$. 609. $\frac{(\ln x-1)\ln 2}{\ln^2 x}2^{\frac{x}{\ln x}}$. 610. $3x^2-3^x\ln 3$.

611. $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$. 612. $e^x\left(x^2+1\right)$. 613. $\frac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}$. 614. $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{\left(1+10^x\right)^2}$. 615. $\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

616. $e^x(\cos x+\sin x+2x\cos x)$. 617. $-e^{-x}$. 618. $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$. 619. $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$.

620. $2^x\ln 2\cdot\cos\left(2^x\right)$. 621. $3^{\sin x}\cos x\ln 3$. 622. $3\sin^2 x\cos x\,a^{\sin^3 x}\ln a$.

623. $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$. 624. $2^{3^x}\cdot 3^x\ln 2\ln 3$. 625. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

626. $\cos\left(e^{x^2+3x-2}\right)e^{x^2+3x-2}(2x+3)$. 627. $-12\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot\sin^3 3x\cos 3x$.

628. $\frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln\left(ax^2+bx+c\right)}}}{2\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{\ln\left(ax^2+bx+c\right)}}$. 629. $\frac{\mathrm{ctg}\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\left(e^{3x}\right)}e^{3x}}{\left(1+e^{6x}\right)\sqrt[3]{\left[\mathrm{arctg}\left(e^{3x}\right)\right]^2}}$. 630. $-2ab^2xe^{-b^2x^2}$.

631. $\frac{1}{a^2}xe^{-\frac{x^2}{a^2}}\left(a^2-x^2\right)$. 632. $Ae^{-k^2x}\left[\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\sin(\omega x+\alpha)\right]$.

633. $a^xx^a\left(\frac{a}{x}+\ln a\right)$. 634. $3\,\mathrm{sh}^2x\,\mathrm{ch}\,x$. 635. $\mathrm{th}\,x$. 636. $\frac{1}{\mathrm{ch}\,2x}$. 637. $-\frac{2x}{\mathrm{ch}^2(1-x)^2}$.

638. $2\,\mathrm{sh}\,2x$. 639. $\mathrm{sh}(\mathrm{sh}\,x)\mathrm{ch}\,x$. 640. $\frac{\mathrm{sh}\,x}{2\sqrt{\mathrm{ch}\,x}}$. 641. $e^{\mathrm{ch}^2x}\mathrm{sh}\,2x$. 642. $\frac{1}{x\,\mathrm{ch}^2(\ln x)}$.

643. $x\,\mathrm{ch}\,x$. 644. $\frac{2\,\mathrm{sh}\,x}{3\,\mathrm{ch}^2x\sqrt[3]{1+\mathrm{ch}^2x}}$. 645. $\frac{1}{4\,\mathrm{ch}^4\frac{x}{2}}$. 646. $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x}}$. 647. $\frac{1}{1-\mathrm{sh}^4x}$.

648. $\frac{x\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{sh}\,2x-\left(2x^2\sqrt{x}-1\right)\mathrm{ch}\,2x}{2x^2}$. 649. $\frac{xe^{3x}}{\mathrm{sh}^2x}\left[(3x+2)\mathrm{sh}\,x-x\,\mathrm{ch}\,x\right]$.

650. $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$. 651. $x^{x^x}x^x\left(\ln^2x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

652. $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$. 653. $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

654. $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$. 655. $x^2e^{x^2}\sin 2x\left(3+2x^2+2x\,\mathrm{ctg}\,2x\right)$.

656. $-\frac{2(x-2)\left(x^2+11x+1\right)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$. 657. $2x^{\ln x-1}\ln x$. 658. $\frac{51x^2-302x+261}{20(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

659. $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\mathrm{ctg}\,x-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{1-e^x}\right)$. 660. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\left[(\arcsin x)^2-1\right]}\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

661. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. 662. $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$. 663. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{x}{x+1}\right)$.

664. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$. 665. $\left(x^2+1\right)^{\sin x}\left[\frac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\ln\left(x^2+1\right)\right]$.

666. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x\left(1-x^4\right)}\sqrt[3]{\frac{x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}}$. 667. $\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$. 668. $\frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}$. 669. $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$.

670. $\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$. 671. $\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)\ln 10}$. 672. $\frac{3}{2}\sin 2x(\cos x-2)$. 673. $\sec^2\frac{x}{5}$.

674. $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x}\right)^4}}$. 675. $2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\sin 2x$. 676. $e^{\cos x}\left(\cos x-\sin^2x\right)$.

677. $\frac{x^4\left(7x^5-40\right)}{\sqrt[3]{\left(x^5-8\right)^2}}$. 678. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$. 679. $\frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$. 680. $-\frac{1}{1+x^2}$.

681. $7x^6e^{x^7+1}$. 682. $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$. 683. $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. 684. $-\frac{2(x\cos x+\sin x)}{x^3\sin^3 x}$.

685. [illegible] $-\frac{1}{3}\sin^2\frac{x}{3}\,\mathrm{cosec}^2\frac{x}{3}$. 686. $-\frac{4\left(3x^3+16\right)}{27x^3\sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^5}}$. 687. $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

688. $\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$. 689. $\frac{\operatorname{tg}x\left(1+2\operatorname{tg}^2x\right)}{\cos^2x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x}}$. 690. $\frac{\cos 2x}{x}-2\sin 2x\ln x$.

691. $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. 692. $\frac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2\sin^2x}}$. 693. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2x}}$. 694. $\sin^5 3x\cos^3 3x$.

695. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 696. $-\frac{1}{2}\sin\frac{\arcsin x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 697. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. 698. $\frac{1}{3\sqrt[3]{3x-x^2}}$.

699. $\frac{\ln x+2}{x^2}\sin\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]$. 700. $\frac{2x-\cos x}{\left(x^2-\sin x\right)\ln 3}$. 701. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. 702. $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$.

703. $\arcsin(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2x}}$. 704. $-\frac{2e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\sec^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$. 705. $-\frac{2\sin^3x}{\sqrt{1+\sin^2x}}$.

706. $-0{,}8\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\sin 0{,}8x\right)\left(\sin\frac{2x+1}{2}+0{,}8\cos 0{,}8x\right)$. 707. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$.

708. $-\frac{4}{\operatorname{tg}2x\sin^2 2x}$. 709. $-\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$. 710. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 711. $\frac{x+1}{2\sqrt{x+3}\sqrt{\left(1+x\sqrt{x+3}\right)^3}}$.

712. $\frac{x\left(5+9\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. 713. $-\frac{\sin 2x}{2\sqrt[3]{\left(1+\sin^2x\right)^2}}$. 714. $3x^2\operatorname{arctg}x^3+\frac{3x^5}{1+x^6}$.

715. $\frac{\operatorname{ctg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$. 716. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 717. $\frac{4}{(1-4x)^2}\left(\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}+\arcsin 4x\right)$.

718. $-\frac{x^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2x}$. 719. $\frac{1}{e^x-1}$. 720. $10^{x\operatorname{tg}x}\ln 10\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2x}\right)$.

721. $2\sin x\left(x\sin x\cos x^2+\cos x\sin x^2\right)$. 722. $\frac{2\sin x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. 723. $\frac{1-2x-x^2}{2(1-x)\left(1+x^2\right)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.

724. $\frac{x^2}{1-x^4}$. 725. $2^{\frac{x}{\ln x}}\frac{\ln x-1}{\ln^2x}\ln 2$. 726. $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$. 727. $-\frac{2\left(2\cos^2x+1\right)}{\sin^2 2x}$.

728. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. 729. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. 730. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. 731. $-\cos 2x$. 732. $\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$.

733. $\left(a^2+1\right)\sin xe^{ax}$. 734. $e^{1-\cos x}(1+x\sin x)$. 735. $\frac{3e^{-2x}}{\left(1+e^{-4x}\right)\left(\operatorname{arctg}e^{-2x}\right)^2}$.

736. $10e^x\sin 3x$. 737. $9x^2\arcsin x$. 738. $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt[3]{\left(1+e^{-\sqrt{x}}\right)^3}}$. 739. $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

740. $\frac{(\cos x-\sin x)\left(e^x+e^{-x}\right)}{e^x\cos x+e^{-x}\sin x}$. 741. $\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. 742. $\frac{\sin(x-\cos x)(1+\sin x)}{\cos^3(x-\cos x)}$.

743. $e^x\sin x\cos^2x(1+\operatorname{ctg}x-3\operatorname{tg}x)$. 744. $\frac{64\sqrt[3]{x^4}}{55\sqrt[5]{\left(9+5\sqrt[3]{x^9}\right)^{10}}}$. 745. $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

746. $\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)(2+\ln(2x+3))\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. 747. $\frac{e^{x^2}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^3}\left[2x\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)\right]$.

748. $\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2x}$. 749. $\frac{40}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}$. 750. $\frac{x^5+1}{x^4\left(x^2+1\right)}$. 751. $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

752. $\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{ctg}x$. 753. $\frac{\left(1+2x^2\right)\sin x+x\left(1+x^2\right)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$. 754. $\frac{\left(x^2-82x-73\right)(8-x)^2}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.

755. $\frac{3e^{\sqrt{x}}\left(2+\sqrt{x}\right)}{10\sqrt[5]{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^2}}$. 756. $\left(2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$. 757. $\frac{1}{\cos^5x}$.

758. $\frac{x^x\operatorname{arctg}x}{\ln^3x}\left[1+x+\frac{x}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x}-\frac{3}{\ln x}\right]$.

759. $\frac{\left(1-x^2\right)^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^2}\left[\frac{1-2x-3x^2}{1-x^2}-\operatorname{tg}x+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$. 760. $4\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}$.

761. $(\arcsin x)^2$. 762. $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$. 763. $\frac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$. 764. $\frac{1}{x^2+1}$. 765. $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

766. $(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\frac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\frac{\ln\operatorname{tg}2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$. 767. $\frac{3x^2+10x+20}{15\left(x^2+4\right)\sqrt[5]{(x-5)^2}\sqrt[3]{x^2+4}}$. 768. $\frac{1}{x^4+x^2+1}$.

769. $-\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$, если n – четное число, и $-\frac{2nx^n}{|x|\left(x^{2n}+1\right)}$, если n – нечетное число.

770. $\frac{24x^3}{\left(1+8x^3\right)^2}$. 774. а) $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; б) $\frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2\left(n^2-1\right)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$. *Указание*: использовать значение суммы $x+x^2+\ldots+x^n$. 776. $\sqrt{1-y^2}e^{-\arcsin x}$ и $\frac{\sin\ln x}{x}$. 777. $\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}}$. 779. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 780. $\alpha'(x)=\frac{1}{x\left[1+\ln\alpha(x)\right]}$.

781. $(\operatorname{Arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $(\operatorname{Arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\operatorname{Arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}$. 782. $\frac{t^2}{1-t}$.

783. $\frac{-\left(1+x^4\right)^2}{6x^3}$; $-\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$. 784. $\frac{1}{3y^2-4}$. 785. $\frac{1}{2^t\ln 2}\sqrt{1-2^{2t}}$, $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{ctg}t$.

789. $-\sqrt{2}$. 790. $-\frac{1}{a}$. 791. $-\frac{1}{4}$. 792. $-\frac{k^2x}{a^2y}$. 793. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 794. $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

795. $\frac{3x^2\cos 3x+y^2\sin x}{2y\cos x}$. 796. $\frac{2x}{2\left(1-y^2\right)}$. 797. $\frac{y}{y-x}$. 798. $\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$.

799. $-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$. 800. $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))+1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))+1}$. 801. $2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$. 802. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$.

803. $\frac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$. 804. $\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$. 805. $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. 806. $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

807. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 808. $\frac{e^y}{2-y}$. 809. $\frac{\sin y}{2\sin 2y-\sin y-x\cos y}$. 810. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+b\cos x}$. 811. $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

812. $\frac{1+y^2}{y^2}$. 814. $(2,4)$. 816. $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; подкасательная

равна $\frac{1}{2}$; поднормаль равна -8. **819.** а) $t_1 = 0$, $t_2 = 8$; б) $t_1 = 0$, $t_2 = 4$, $t_3 = 8$. **820.** 0,01815 Дж. **821.** $\omega = 13$ рад/с. **822.** $\omega = 2\pi$ рад/с. **823.** $\omega = (2at - b)$ рад/с; скорость обратится в нуль при $t = \frac{b}{2a}$ с. **824.** 23 А. **825.** $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(2, 0)$. **827.** $(1, 0)$; $(-1, -4)$. **828.** $y = 2x - 2$; $y = 2x + 2$. **829.** $3x + y + 6 = 0$. **830.** Касательная $y - y_0 = (x - x_0)\cos x_0$; нормаль $y - y_0 = -(x - x_0)\sec x_0$. **831.** Касательная $x_0(y - y_0) = x - x_0$; нормаль $(y - y_0) + x_0(x - x_0) = 0$. **832.** Касательная $x + 2y = 4a$; нормаль $y = 2x - 3a$. **833.** Касательная $y - y_0 = \frac{x_0^2(3a - x_0)}{y_0(2a - x_0)^2}(x - x_0)$; нормаль $y - y_0 = -\frac{y_0(2a - x_0)^2}{x_0^2(3a - x_0)}(x - x_0)$. **835.** Подкасательные равны соответственно $\frac{x}{3}$, $\frac{2x}{3}$ и $-2x$; поднормали равны соответственно $-3x^5$, $-\frac{3x^2}{2}$ и $\frac{2}{x}$. **836.** $y = \frac{x_0}{2a}\left(x - \frac{x_0}{2}\right)$; $y - y_0 = -\frac{2a}{x_0}(x - x_0)$. **837.** $2x - y + 1 = 0$. **838.** $27x - 3y - 79 = 0$. **839.** $2x - y - 1 = 0$. **840.** $4x - 4y - 21 = 0$. **842.** 3,75. **844.** $x + 25y = 0$; $x + y = 0$. **845.** $(0, 1)$. **846.** $y = x$. **848.** $x - y - 3e^{-2} = 0$. **849.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **850.** $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. **857.** $2x - y + 1 = 0$. **858.** Если $y = f(x)$ – уравнение данной кривой, то уравнением искомого геометрического места будет $y = xf'(x)$. а) Парабола $y^2 = \frac{1}{2}px$; б) прямая, параллельная оси Ox, $y = \frac{1}{\ln b}$; в) кривая Каппа $y\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 = 0$; г) окружность $x^2 + y^2 = a$. **858.** Если $y = f(x)$ – уравнение данной кривой, то уравнением искомого геометрического места будет $y = xf'(x)$. а) Парабола $y^2 = \frac{1}{2}px$; б) прямая, параллельная оси Ox, $y = \frac{1}{\ln b}$; в) кривая Каппа $y\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 = 0$; г) окружность $x^2 + y^2 = a$. **859.** 1) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{16}{33}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. **860.** 1) $\operatorname{arctg} 3$; 2) 45°. **861.** 90°. **862.** 45° и 90°. **863.** $\operatorname{arctg} 3$. **864.** $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)$. **865.** При нечетном n касательная $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, нормаль $ax - by = a^2 - b^2$. При четном n касательные $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 2$, нормали $ax \pm by = a^2 - b^2$. **879.** $\Delta y = 1{,}461$; $dy = 1{,}4$. **880.** $\Delta y = 0{,}1012$; $dy = 0{,}1$; $\frac{dy}{\Delta y} = 0{,}9880$. **881.** 4. **882.** -2. **883.** $\Delta y = 1{,}91$; $dy = 1{,}9$; $\Delta y - dy = 0{,}01$; $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0{,}0052$. **884.** $\Delta y = 0{,}1$; $dy = 0{,}1025$; $\Delta y - dy = -0{,}0025$; $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = -0{,}025$.

885.

$\Delta x =$	1,	0,1	0,01
$\Delta y =$	18,	1,161	0,110601
$dy =$	11,	1,1	0,11
$\Delta y - dy =$	7,	0,061	0,000601
$\delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} =$	0,39	0,0526	0,0055

886. $\Delta y = 1{,}3$; $dy = 1{,}1$; $\Delta y - dy = 0{,}2$; $\delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0{,}15$. **887.** а) $dy = 16$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\% = 5{,}88\%$; б) $dy = 8$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\% = 3{,}03\%$; в) $dy = 1{,}6$, $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\% = 0{,}62\%$.

888. а) $dy = 4{,}8$ см²; б) $dy = 6{,}0$ см²; в) $dy = 9{,}6$ см².

889. 1) [illegible]dx; 2) $\frac{2dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $-\frac{4dx}{x^3}$; 4) $-\frac{dx}{x^3}$; 5) $-\frac{dx}{4x\sqrt{x}}$; 6) $-\frac{dx}{3ax\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{dx}{2(a+b)\sqrt{x}}$;

8) $-\frac{p\ln q}{t^2}dx$; 9) $-\frac{0{,}2(m-n)}{x^{1,2}}dx$; 10) $-\frac{(m+n)dx}{2x\sqrt{x}}$;

11) $\left[(2x+4)\left(x^2-\sqrt{x}\right)+\left(x^2+4x+1\right)\left(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]dx$; 12) $-\frac{[illegible]\,x^2dx}{\left(x^3-1\right)^2}$; 13) $\frac{[illegible]}{\left(1-t^2\right)^2}$;

14) $3\left(1+x-x^2\right)^2(1-2x)dx$; 15) $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}dx$; 16) $5^{\ln \mathrm{tg}\,x}\frac{2\ln 5}{\sin 2x}dx$;

17) $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 18) $-\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}}$; 19) $\frac{\left(x^2-1\right)\sin x+2x\cos x}{\left(1-x^2\right)^2}dx$;

20) $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{\arcsin x}\sqrt{1-x^2}}+\frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\right)dx$; 21) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{2}$;

22) $\left(3^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\cdot\ln 3+9x^2-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

890. 1) $-0{,}0069$; 2) $-0{,}0075$; 3) $0{,}0086$; 4) 0; 5) $0{,}00287$. **891.** $\Delta y = 0{,}00025$; $\sin 30°1' = 0{,}50025$. **892.** 0,00582. **893.** $-0{,}0693$. **894.** $d\rho = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$.

895. 0,3466. **896.** $\sin 60°03' = 0{,}8665$; $\sin 60°18' = 0{,}8686$. **899.** 0,995.

900. $\mathrm{arctg}\,1{,}02 = 0{,}795$; $\mathrm{arctg}\,0{,}97 \approx 0{,}770$. **901.** 0,355. **902.** 0,52164. **903.** а) Изменение длины нити: $ds = \frac{8f}{3l}df$; б) изменение стрелки провеса: $df = \frac{3l}{4f}ds$.

904. Погрешность при определении угла по его синусу: $\Delta x_s = \mathrm{tg}\,x\Delta y$; погрешность при определении угла по его тангенсу: $\Delta x_T = \frac{1}{2}\sin 2x\Delta z$ (где Δy, Δz — погрешности, с которыми даны величины y и z); $\frac{\Delta x_s}{\Delta x_T} = \frac{1}{\cos^2 x}$; точность определения угла по логарифму его тангенса выше, чем при определении по логарифму его синуса. **905.** 0,3%.

906. 1) $dy = \frac{\left(3t^2+4t+7\right)\left(3t^2+2\right)dt}{3\sqrt[3]{\left[\left(t^3+3t+1\right)\left(t^3+2t+6\right)\right]^2}}$; 2) $ds = -\frac{1}{2}\sin\frac{t^2-1}{2}dt$; 3) $dz = -dx$;

4) $ds = \frac{2\ln 2}{2^{[illegible]}\,[illegible]}\cdot\frac{dx}{\sin 2x}$; 5) $ds = \frac{(4u-3)du}{2\sqrt{2u^2-3u+1}}$; 6) $dy = -\frac{2dt}{\cos 2t}$.

908. Непрерывна и дифференцируема. **909.** $f(x)$ непрерывна всюду, кроме точек $x = 0$ и $x = 2$; $f'(x)$ существует и непрерывна всюду, кроме точек $x = 0$, 1, 2, где она не существует. **910.** При $x = k\pi$, где k — произвольное целое число. **911.** Непрерывна, но недифференцируема. **912.** $f'(0) = 0$. **913.** Непрерывна, но недифференцируема. **914.** Δy и Δx — величины различных порядков малости. **915.** Непрерывна, но недифференцируема. **916.** Да; нет. **917.** a. **918.** $a\omega e^{\omega t}$. **919.** Абсцисса изменяется со скоростью $v_x = -2r\omega\sin 2\varphi$; ордината изменяется со скоростью $v_y = -2r\omega\cos 2\varphi$. **920.** Скорость изменения абсциссы $v_x = v(1+\cos\varphi)$; скорость изменения ординаты $v_y = v\sin\varphi$ (φ — угол между осью ординат и подвижным радиусом точки). **921.** $-\frac{p\ln 2}{5540} = -0{,}000125p$. **922.** 2 ед./с в точке $(3, 6)$ и -2 ед./с в точке $(3, -6)$. **923.** 2 см/с в точке $(3, 4)$ и -2 см/с в точке $(-3, 4)$.

924. В точках $\left(3, \frac{14}{3}\right)$ и $\left(-3, -\frac{14}{3}\right)$. 925. $4v$ и $2av$. 926. $2\pi v$ и $2\pi rv$. 927. $4\pi r^2 v$ и $8\pi rv$. 928. При $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ и при $x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}$. 929. При $x = 2\pi k$. 930. В 1/9 раз. 932. а) Да; б) нет. 934. 1) $x^2 - 18x + 9y = 0$; 2) $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$; 3) $y^3 = (x - 1)^2$; 4) $x = \operatorname{Arccos}(1 - y) \mp \sqrt{2y - y^2}$; 5) $y = \frac{2\left(1 + x - x^2\right)}{1 + x^2}$.

935. 1) $t = (2k + 1)\pi$; 2) $t = 1$; 3) $t = \frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. 936. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. 937. $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$. 938. $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. 939. $\frac{3t^2 - 1}{2t}$. 940. -1. 941. $\frac{t}{2}$. 942. $\frac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1 - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}$.

943. $\frac{1 + t^2}{t\left(3 + 3t - t^3\right)}$. 944. $\frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$. 945. $\frac{t\left(2 - t^3\right)}{1 - 2t^3}$. 946. $-\frac{4}{3}$. 947. 0 и $\frac{1}{2}$. 948. Не существует. 949. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. 950. 1) $t = \frac{\pi}{2} - \alpha$; 2) $t = \pi - \alpha$; 3) $t = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3}$, где α – угол, образованный касательной с осью Ox. 956. 1) Кривые пересекаются в двух точках под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{41}{2} \approx 87°12'$; 2) кривые пересекаются в трех точках под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 30°$ и $\alpha_3 = 0°$. 958. Длина касательной $T = \left|\frac{y}{\sin\frac{3}{2}t}\right|$; длина нормали $N = \left|\frac{y}{\cos\frac{3}{2}t}\right|$; длина подкасательной $S_T = \left|y\operatorname{ctg}\frac{3}{2}t\right|$; длина поднормали $S_N = \left|y\operatorname{tg}\frac{3}{2}t\right|$. 959. $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $\left|\frac{y}{\sin t}\right|$, $|y\operatorname{tg} t|$ и $|y\operatorname{ctg} t|$. 961. $\left|\frac{y}{\sin t}\right|$, $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$, $|y\operatorname{ctg} t|$ и $|y\operatorname{tg} t|$. 963. $x + 2y - 4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$. 964. $4x + 2y - 3 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$. 965. $y = 2$, $x = 1$. 966. 1) $4x + 3y - 12a = 0$; $3x - 4y + 6a = 0$; 2) $x + y = \frac{a^2\sqrt{2}}{10}$; $y - x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $y = 1 + x\ln a$. 969. $\rho = 2a\cos t$. 970. $\theta = \varphi$, $a = 2\varphi$. 974. 3; -3. 975. 1) 0; 2) 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$. 977. $\frac{f_1(t)f_2(t)}{f_1'(t)} = \operatorname{tg}\theta$. 978. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}bt^2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\varphi$.

979. $\rho = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)$; тангенс угла между касательной и полярным радиусом равен $\frac{2ab}{\left(b^2 - a^2\right)\sin 2t}$. 980. Полярная подкасательная $S_T = \frac{\rho^2}{d\rho}$; полярная поднормаль $S_N = \frac{d\rho}{d\varphi}$. 983. $\frac{\rho}{\ln a}$. 984. $\rho\ln a$. 985. $\sqrt{1 + \rho^2}$.

986. $\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r}{y}$. 987. $\frac{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}{b^2x}$. 988. $\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx$ или $\frac{\sqrt{y^2 + p^2}}{y}\,dx$.

989. $\sqrt{1 + \frac{1}{9ax}}$. 990. $\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx$. 991. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$. 992. r. 993. $2a\sin\frac{t}{2}$.

994. $3a\cos t\sin t\,dt$. 995. $a\sqrt{1 + t^2}\,dt$. 996. $4a\sin\frac{t}{2}\,dt$. 997. $a\operatorname{ctg} t\,dt$. 998. at.

999. $a\sqrt{\operatorname{ch} 2t}\,dt$. 1000. $\frac{4}{3}$ м/мин; вектор скорости направлен вертикально вниз. 1001. $10\sqrt{26} \approx 51$ км/ч; вектор скорости параллелен гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого горизонтален и равен 50 км, а другой вертикален и равен 10 км. 1002. 14,63 км/ч. 1003. 40 км/ч. 1006. 2.

1007. $-24x$. 1008. 207 360. 1009. 360. 1010. $6\left(5x^4 + 6x^2 + 1\right)$. 1011. $4\sin 2x$. 1012. $\frac{1}{e}$. 1013. $-\frac{1}{2}$. 1014. $\frac{5!}{(1-x)^6}$. 1015. $\frac{6}{x}$. 1016. $\frac{an(n+1)}{x^{n+2}}$. 1017. $16a\sin 2\varphi$. 1018. $\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. 1019. $2e^{x^2}\left(3x + 2x^3\right)$. 1020. $\frac{6x\left(2x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$. 1021. $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$.

1022. $-\frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$. 1023. $-\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. 1024. $\frac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\left(a+\sqrt{x}\right)^3}$. 1025. $\frac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}$.

1026. $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. 1027. $-\frac{a\left(a^2-1\right)\sin x}{\sqrt{\left(1-a^2\sin^2 x\right)^3}}$. 1028. $x^x\left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x}\right]$. 1029. $a^n e^{ax}$.

1030. $(-1)^n e^{-x}$. 1031. $a^n\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + b^n\cos\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right)$. 1032. $2^{n-1}\sin\left[2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right]$. 1033. $e^x(x + n)$. 1034. $\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n \ge 2)$. 1035. $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$. 1036. $\frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$.

1037. $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln a}$. 1038. $(-1)^n\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

1039. $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$. 1040. $4^{n-1}\cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right)$. 1054. $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$.

1056. $-\frac{b^4}{a^2y^3}$. 1057. $-\frac{3x^2z}{y^3}$. 1058. $-\frac{2\left(3y^4+8y^2+5\right)}{y^8}$. 1059. $\frac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}$. 1060. $-\frac{2a^3xy}{\left(y^2-ax\right)^3}$.

1061. $-\frac{y}{\left[1-\cos(x+y)\right]^3}$. 1062. $-\frac{y\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]}{x^2(y-1)^3}$. 1063. $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$. 1064. $\frac{1}{e^2}$.

1065. $-\frac{p^2}{\sqrt{\left(p^2+y^2\right)^3}}$. 1069. $-\frac{3a}{99^2t^4}$. 1070. $-\frac{x^2}{y^3} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$. 1071. $-\frac{3\cos t}{a^3\sin^5 t}$.

1072. $\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$. 1073. 1) $\frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\sin^3 t}$; 2) 0, так как $x + y = a$. 1074. 1) $4t^2$; 2) $-\frac{1}{1-t^2}$. 1075. $\frac{2\sin t}{a(\cos t - t\sin t)^3}$. 1080. 16 м/с². 1081. $v = 2t - 4$, $a = 2$. 1082. $-\frac{x^2}{16}$ см/с². 1084. $-0{,}0015$ м/с². 1085. $-\frac{1}{8}$ м/с².

1088. 1) $\left(x^2 - 379\right)\sin x - 40x\cos x$; 2) $e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$; 3) $\alpha^n x^3\sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3n\alpha^{n-1}x^2\sin\left[\alpha x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right] + 3n(n-1)\alpha^{n-2}x\sin\left[\alpha x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right] + n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3}\times \sin\left[\alpha x + \frac{(n-3)\pi}{2}\right]$. 1093. $y^{(2n)}(0) = 0$; $y^{(2n+1)}(0) = [1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)]^2$. 1095. $y^{(2n-1)}(0) = 0$; $y^{(2n)}(0) = 2\cdot[2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)]^2$. 1096. $-\frac{3dx^2}{8x\sqrt{x}}$. 1097. $m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$. 1098. $4(x+1)\left(5x^2 - 2x - 1\right)dx^3$. 1099. $4^{-x^2}\cdot 2\ln 4\cdot\left(2x^2\ln 4 - 1\right)dx^2$. 1100. $\frac{ab\left(a^2-b^2\right)\sin 2x\,dx^2}{\left(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x\right)^{3/2}}$. 1101. $\frac{4\ln x - 4 - \ln^2 x}{x^2\sqrt{\left(\ln^2 x - 4\right)^3}}\,dx^2$. 1102. $-4\sin 2x\,dx^2$. 1103. $\pm\frac{3a\sec^2\varphi}{4\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}\left(1 + 5\operatorname{tg}^2\varphi\right)d\varphi^2$. 1104. $\frac{a^{\frac{2}{3}}dx^2}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$.

мание, что разность между расстоянием от центра шара до вершины конуса и радиусом шара равна разности между высотой конуса и высотой погруженного сегмента. 1254. $R/4$. 1255. $R/2$. 1256. $P\left(p, \pm p\sqrt{2}\right)$. 1263*. 3/4. Так как функция есть константа $(y' = 0)$, то значение этой константы равно значению данной функции при любом значении x, например при $x = 0$. 1264. к. 1265. 0
1267. $y_{\text{макс}} = 4a^3/27$ при $x = a/3$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = a$. 1268. $y_{\text{макс}} = a^4/16$ при $x = a/2$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$ и при $x = a$. 1269. $y_{\text{макс}} = -2a$ при $x = -a$, $y_{\text{мин}} = 2a$ при $x = a$. 1270. $y_{\text{макс}} = 5/4$ при $x = 3/4$. 1271. $y_{\text{макс}} = 1$ при $x = 1$, $y_{\text{мин}} = -1$ при $x = -1$. 1272. $y_{\text{мин}} = 1$ при $x = 0$. 1273. $y_{\text{макс}} = 4/e^3$ при $x = 2$, $y_{\text{мин}} = 0$ при $x = 0$. 1274. $y_{\text{мин}} = e$ при $x = e$. 1275. $y_{\text{макс}} = \sqrt[e]{e}$ при $x = e$.
1276. При $a = 2$ максимум. 1277. $a = -2/3$, $b = -1/6$. 1278. Выпукла в окрестности точки $(1, 11)$, вогнута в окрестности точки $(3, 3)$. 1279. Выпукла в окрестности точки $(1, \pi/4)$, вогнута в окрестности точки $(-1, -\pi/4)$.
1280. Выпукла в окрестности точки $\left(1/e^2, -2/e^4\right)$, вогнута в окрестности точки $(1, 0)$. 1287. Точка перегиба $(5/3, -250/27)$. Интервалы: выпуклости – $(-\infty, 5/3)$, вогнутости – $(5/3, +\infty)$. 1288. Точек перегиба нет, график вогнутый. 1289. Точки перегиба $(2, 62)$ и $(4, 206)$. Интервалы: вогнутости – $(-\infty, 2)$, выпуклости – $(2, 4)$, вогнутости – $(4, +\infty)$. 1290. Точки перегиба $(-3, 294)$ и $(2, 114)$. Интервалы: выпуклости – $(-\infty, -3)$, вогнутости – $(-3, 2)$, выпуклости – $(2, +\infty)$. 1291. Точка перегиба $(1, -1)$. Интервалы: выпуклости – $(-\infty, 1)$, вогнутости – $(1, +\infty)$. 1292. Точек перегиба нет, график вогнутый. 1293. Точки перегиба $(-3a, -9a/4)$, $(0, 0)$, $(3a, 9a/4)$. Интервалы: вогнутости – $(-\infty, -3a)$, выпуклости – $(-3a, 0)$, вогнутости – $(0, 3a)$, выпуклости – $(3a, +\infty)$. 1294. Точки перегиба (b, a). Интервалы: выпуклости – $(-\infty, b)$, вогнутости – $(b, +\infty)$. 1295. Точка перегиба $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{(\sqrt{5}-1)/2}\right)$. Интервалы: вогнутости – $\left(-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, выпуклости – $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 1296. Точки перегиба $(\pm 1, \ln 2)$. Интервалы: выпуклости – $(-\infty, -1)$, вогнутости – $(-1, 1)$, выпуклости – $(1, +\infty)$. 1297. Точка перегиба $\left(ae^{3/2}, \frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$. Интервалы: выпуклости – $\left(0, ae^{3/2}\right)$, вогнутости – $\left(ae^{3/2}, +\infty\right)$. 1298. Точек перегиба нет, график вогнутый. 1299. Точка перегиба $\left(1/2, e^{\operatorname{arctg} 1/2}\right)$. Интервалы: вогнутости – $(-\infty, 1/2)$, выпуклости – $(1/2, +\infty)$. 1300. Точка перегиба $(1, -7)$. Интервалы: выпуклости – $(0, 1)$, вогнутости – $(1, +\infty)$. 1305. $a = -3/2$, $b = 9/2$. 1306. $\alpha = -20/3$, $\beta = 4/3$. Точками перегиба будут также точки $(-2, -25)$ и $(0, 0)$. 1307. При $a \leq -e/6$ и при $a > 0$. 1316. Точки перегиба $(1, 4)$ и $(1, -4)$. 1317. Точки перегиба при $t = 3\pi/4 \pm k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.
1318. $\frac{\sin b - \sin a}{\ln\frac{b}{a}} = \xi\cos\xi$, где $a < \xi < b$. 1319. $e^b + e^a = 2e^{\xi}$, где $a < \xi < b$.
1324. $\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}$. 1325. 0. 1326. 1. 1327. α/β. 1328. 1/3. 1329. $a/\sqrt{b}$. 1330. $-1/$

1331. 2. 1332. $\frac{m}{n}a^{m-n}$. 1333. $\frac{\ln\frac{c}{b}}{\ln\frac{c}{d}}$. 1334. −2. 1335. 2. 1336. $\ln\frac{a}{b}$. 1337. $\cos a$. 1338. 2. 1339. 1. 1340. 1. 1341. 1/128. 1342. 16. 1343. 1. 1344. 1. 1345. −2. 1346. 0. 1347. 0. 1348. a. 1349. 1/2. 1350. $4a^2/\pi$. 1351. −1. 1352. 0. 1353. ∞. 1354. $\frac{a+b+c}{3}$. 1355. 1. 1356. ∞. 1357. 1. 1358. 1. 1359. e. 1360. 1. 1361. e^2. 1362. e^3. 1363. 1. 1364. 1/2. 1366. Значения x^x больше, чем значения $a^x x^a$. 1367. Значения $f(x)$ больше, чем значения $\ln f(x)$. 1374. $f(115) = 1520990$; $f(120) = 1728120$; $\delta\big|_{x=100} = 0{,}03$ (абсолютная погрешность). 1375. $y = \pm\frac{b}{a}x$. 1376. $x = 0$, $y = 0$. 1377. $y = 0$. 1378. $x = b$, $y = c$. 1379. $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$. 1380. $x + y = 0$. 1381. $y = x + 2$. 1382. $y = \pm x$. 1383. $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$. 1384. $x = b$, $x = 2b$, $y = x + 3(b - a)$. 1385. $y + 1 = 0$, $2x + y + 1 = 0$. 1386. $x = -1/e$, $y = x + 1/e$. 1387. $x = 0$, $y = x$. 1388. $x = 0$, $y = x + 3$. 1389. $y = \frac{3}{2}x - 1$. 1390. $y = 2x \pm \pi/2$. 1391. $y = x$, если $f(x)$ не есть тождественная постоянная. 1392. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = \infty$, а $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t) = b$, то $y = b$ – асимптота; если $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t) = \infty$, а $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t) = a$, то $x = a$ – асимптота. 1393. $x = -1$, $y = 0$. 1394. $y = \frac{1}{2}x + e$. 1395. $y = \pm\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. 1396. $x + y + a = 0$. 1397. $x = 2$, $2x + 8y + 1 = 0$, $6x - 40y + 9 = 0$. 1398. Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{\text{макс}} = 1/2$ при $x = 1$, $y_{\text{мин}} = -1/2$ при $x = -1$. Точки перегиба графика $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$ и $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$. Асимптота $y = 0$. 1399. Определена везде, кроме значений $x = \pm1$. График симметричен относительно оси ординат. Максимумов нет. $y_{\text{мин}} = 1$ при $x = 0$. Точек перегиба нет. Асимптоты $x = \pm1$, $y = 0$. 1400. Определена везде, кроме значений $x = \pm1$. График симметричен относительно начала координат. Экстремумов нет. Точка перегиба $(0, 0)$. Асимптоты $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$. 1401. Определена везде, кроме значений $x = 1$, $x = 2$ и $x = 3$. $y_{\text{макс}} = -2{,}60$ при $x = 2{,}58$. $y_{\text{мин}} = 2{,}60$ при $x = 1{,}42$. Точек перегиба нет. Асимптоты $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$. 1402. Не определена при $x = \pm1$. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$. Минимумов нет. При $x < -1$ возрастает, при $x > 1$ убывает. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pm1$, $y = 1$. 1403. Определена везде, график симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{мин}} = -1$ при $x = 0$; $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ – точки перегиба графика с горизонтальной касательной; $(\pm\sqrt{5}/5, -64/125)$ – точки перегиба. Асимптот нет. 1404. Определена везде; график симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{макс}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{мин}} = -27/8$ при $x = \pm1/2$. Точки перегиба графика с горизонтальной касательной $(\pm1, 0)$. При $x = \pm0{,}7$ и $x = \pm0{,}26$ – еще четыре точки перегиба графика. Асимптот нет. 1405. Определена везде, кроме $x = 0$. $y_{\text{мин}} = 3$ при $x = 1/2$. Максимумов нет. Точка перегиба графика $(-\sqrt[3]{2}/2, 0)$. Асимптота $x = 0$. 1406. Определена везде, кроме $x = 0$. График симметричен относительно оси ординат. $y_{\text{мин}} = 2$ при $x = \pm1$. Максимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптота $x = 0$.

1407. Определена везде, кроме $x = 1$. $y_{мин} = -1$ при $x = 0$. Максимумов нет. Точка перегиба графика $(-1/2, -8/9)$. Асимптоты $x = 1$ и $y = 0$. **1408**. Определена везде, кроме $x = \pm\sqrt{3}$. График симметричен относительно начала координат. $y_{макс} = -4{,}5$ при $x = 3$, $y_{мин} = 4{,}5$ при $x = -3$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ и $x + y = 0$. **1409**. Определена везде, кроме $x = -1$. Минимумов нет. $y_{макс} = -3\frac{3}{8}$ при $x = -3$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптоты $x = -1$ и $y = \frac{1}{2}x - 1$. **1410**. Определена везде, кроме $x = 1$. Максимумов нет. $y_{мин} = 27/4$ при $x = 3/2$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптота $x = 1$. **1411**. Определена везде, кроме $x = 1$. $y_{макс} = 0$ при $x = 0$, $y_{мин} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ при $x = \sqrt[3]{4}$. Точка перегиба графика $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптоты $x = 1$ и $y = x$. **1412**. Определена везде, кроме $x = -1$. $y_{макс} = 2/27$ при $x = 5$, $y_{мин} = 0$ при $x = 1$. Абсциссы точек перегиба графика $5 \pm 2\sqrt{3}$. Асимптоты $x = -1$ и $y = 0$. **1413**. Определена везде, кроме $x = 0$. $y_{макс} = 7/2$ при $x = 1$, $y_{макс} = -11/6$ при $x = -3$, $y_{мин} = 27/8$ при $x = 2$. Абсцисса точки перегиба графика $9/7$. Асимптоты $x = 0$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$. **1414**. Определена везде, кроме $x = 0$. Максимумов нет. $y_{мин} \approx -0{,}28$ при $x = 1{,}46$. Абсцисса точки перегиба графика $-\sqrt[3]{2}$. Асимптота $x = 0$. **1415**. Определена везде, кроме $x = 0$. $y_{макс} = -2{,}5$ при $x = -2$, минимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$ и $y = x$. **1416**. Определена везде. $y_{макс} = 1/e$ при $x = 1$. Минимумов нет. Точка перегиба графика $(2, 2/e^2)$. Асимптота $y = 0$. **1417**. Определена везде. $y_{макс} = 4/e^2$ при $x = 2$, $y_{мин} = 0$ при $x = 0$. Абсциссы точек перегиба графика $2 \pm \sqrt{2}$. Асимптота $y = 0$. **1418**. Определена везде, кроме $x = 0$. $y_{мин} = e$ при $x = 1$. Максимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$. **1419**. Определена при $x > -1$. $y_{мин} = 0$ при $x = 0$. Максимумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптота $x = -1$. **1420**. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{мин} = 0$ при $x = 0$. Максимумов нет. Точки перегиба графика $(\pm 1, \ln 2)$. Асимптот нет. **1421**. Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{макс} = 1/e$ при $x = \pm 1$, $y_{мин} = 0$ при $x = 0$. Абсциссы точек перегиба графика $\pm\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}/2$. Асимптота $y = 0$. **1422**. Определена везде. $y_{макс} = 27/e^3$ при $x = 3$. Минимумов нет. Абсциссы точек перегиба 0 и $3 \pm \sqrt{3}$. Асимптота $y = 0$. **1423**. Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{макс} = 1/\sqrt{e}$ при $x = 1$, $y_{мин} = -1/\sqrt{e}$ при $x = -1$. Точки перегиба графика $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2}\right)$ и $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-3/2}\right)$. Асимптота $y = 0$. **1424**. Определена везде, кроме $x = 0$. Экстремумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$ и $y = -1$. **1425**. Определена при $x > 0$. Экстремумов нет. Точка перегиба графика $\left(e^{3/2}, e^{3/2} + \frac{3}{2}e^{-3/2}\right)$. Асимптоты $x = 0$ и $y = x$. **1426**. Функция определена при

$-\infty < x < -1$ и при $0 < x < +\infty$. В интервале $(-\infty, -1)$ возрастает от e до $+\infty$; в интервале $(0, +\infty)$ возрастает от 1 до e. График состоит из двух отдельных ветвей. Асимптоты $y = e$ и $x = -1$. **1427.** Определена везде. Экстремумов нет. При $x = \pm k\pi$ ($k = 1, 3, 5, \dots$) стационарна. График симметричен относительно начала координат, не имеет асимптот; точка перегиба $(k\pi, k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); в точках перегиба график пересекает прямую $y = x$. **1428.** Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. Точки экстремума удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x = -x$. Абсциссы точек перегиба удовлетворяют уравнению $x \operatorname{tg} x = 2$. Асимптот нет. **1429.** Определена в интервалах $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Период 2π. График симметричен относительно оси ординат. $y_{макс} = 0$ при $x = 2k\pi$. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pi / 2 + k\pi$. **1430.** Определена в интервалах $(-\pi / 2 + 2k\pi, \pi / 2 + 2k\pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2$. Период 2π. График симметричен относительно оси ординат. $y_{мин} = 1$ при $x = 2k\pi$. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pi / 2 + k\pi$. **1431.** Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{макс} = \pi / 2 - 1$ при $x = -1$, $y_{мин} = 1 - \pi / 2$ при $x = 1$. Точка перегиба $(0, 0)$. Асимптоты $y = x \pm \pi$. **1432.** Определена везде, кроме $x = 1$ и $x = 3$. $y_{макс} = 1 / e$ при $x = 2$. Минимумов нет. Асимптоты $x = 1$, $x = 3$ и $y = 1$. **1433.** Определена везде. Период 2π. $y_{мин} = 1$ при $x = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $y_{макс} = e - 1$ при $x = \pi / 2 + 2k\pi$ и $y_{макс} = 1 + 1 / e$ при $x = 3\pi / 2 + 2k\pi$. Асимптот нет. **1434.** Определена везде. $y_{макс} = 4 / 27$ при $x = 8 / 27$, $y_{мин} = 0$ при $x = 0$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот. **1435.** Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{макс} = 0$ при $x = 0$, $y_{мин} = -3$ при $x = \pm 1$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот. **1436.** Определена везде. График симметричен относительно начала координат. $y_{макс} = 2 / 3$ при $x = 1$, $y_{мин} = -2 / 3$ при $x = -1$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптот нет. **1437.** Определена везде. $y_{макс} = 2$ при $x = 0$, $y_{мин} = 0$ при $x = -1$. Точка перегиба графика $(-1 / 2, 1)$. Асимптота $y = 1$. **1438.** Определена везде. $y_{макс} = 2{,}2$ при $x = 7 / 11$, $y_{мин} = 0$ при $x = 1$. Абсциссы точек перегиба графика -1 и $\frac{7 \pm 3\sqrt{2}}{11}$. Асимптот нет. **1439.** Определена везде. $y_{макс} = 2\sqrt[3]{4}$ при $x = 4$, $y_{мин} = 0$ при $x = 0$. Точка перегиба графика $(6, 0)$. Асимптота $x + y = 2$. **1440.** Функция определена при $x \geq 0$, двузначна. Функция $y = x + \sqrt{x^5}$ (верхняя ветвь графика) монотонно возрастает. Функция $y = x - \sqrt{x^5}$ (нижняя ветвь графика) имеет максимум при $x = \sqrt[3]{20 / 5}$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот. **1441.** Определена при $x \geq 0$, двузначна. Функция $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ (верхняя ветвь графика) монотонно возрастает. Функция $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ (нижняя ветвь графика) имеет максимум при $x = 16 / 25$. Абсцисса точки перегиба нижней ветви графика $64 / 225$. Асимптот нет. **1442.** Определена при $x \geq -1$, двузначна. Экстремумов нет. График симметричен относительно оси абсцисс, имеет точки перегиба $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Асимптот нет. **1443.** Определена на отрезке $[-1, 0]$ и в интервале $(1, +\infty)$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = \sqrt[4]{12/3}$ при $x = -\sqrt{3}/3$. Абсцисса точек перегиба графика $\sqrt{1 + \sqrt{12}/3}$. Асимптот нет. **1444.** Определена при $x \geq 0$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = \sqrt{12}/9$ при $x = 1/3$. График не имеет точек перегиба. Асимптот нет. **1445.** Определена при $x = 0$ и при $x \geq 1$. Начало координат – изолированная точка. График симметричен относительно оси абсцисс. Экстремумов нет. Точки перегиба графика $(4/3, \pm 4\sqrt{3}/9)$. Асимптот нет. **1446.** Определена при $x < 0$ и при $x \geq \sqrt[3]{2}$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = -1$. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$ и $y = \pm x\sqrt{3}/3$. **1447.** Определена при $x \leq -2$ и при $x > 0$, двузначна. График симметричен относительно прямой $y = x$. $y_{\text{макс}} = -2$ при $x = 1$. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 0$. **1448.** Определена при $-a \leq x < a$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс $|y|_{\text{макс}} = a\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$ при $x = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Точек перегиба нет. Асимптота $x = a$. **1449.** Определена при $0 \leq x \leq 4$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = \sqrt{3}$ при $x = 3$. Абсцисса точек перегиба графика $3 - \sqrt{3}$. Асимптот нет. **1450.** Определена при $-2 \leq x \leq 2$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. $|y|_{\text{макс}} = 3\sqrt{3}/5$ при $x = \pm 1$. Точки перегиба графика $(0, 0)$ и $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}/5)$. Асимптот нет. **1451.** Определена при $-1 \leq x \leq 1$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. $|y|_{\text{макс}} = 1/2$ при $x = \pm\sqrt{2}/2$. Точка перегиба графика $(0, 0)$. Асимптот нет. **1452.** Определена при $x \geq 1$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = 2$. Абсцисса точек перегиба $\frac{5+2\sqrt{3}}{3}$. Асимптота $y = 0$. **1453.** Определена при $0 \leq x < 2a$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. Экстремумов нет. Точек перегиба нет. Асимптота $x = 2a$. **1454.** Определена при $x < 0$, при $0 < x \leq 1$ и при $x \geq 2$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс, имеет асимптоты $x = 0$ и $y = \pm 1$ и две точки перегиба. Экстремумов нет. **1455.** Определена при $-a \leq x < 0$ и при $0 < x \leq a$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. Экстремумов нет. Точки перегиба графика $\left(a(\sqrt{3} - 1), \pm a\sqrt[4]{27/4}\right)$. Асимптота $x = 0$. **1456.** Определена при $-1 \leq x \leq 1$ и при $x = \pm 2$, двузначна. График симметричен относительно осей координат и имеет две изолированные точки: $(\pm 2, 0)$. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = 0$. Точек перегиба и асимптот нет. **1457.** Определена при $-1 \leq x \leq 1$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. $|y|_{\text{макс}} = 1$ при $x = 0$. Точки перегиба графика $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/4)$. Асимптот нет. **1458.** Определена при $x \leq -1$ и при $x \geq 1$, двузначна. График симметричен относительно осей координат. Экстремумов нет. Точки перегиба графика $(\pm\sqrt{2}, \pm 1/\ldots$

Асимптоты $y = \pm x$. **1459.** Определена при $x \geq 0$, двузначна. График симметричен относительно оси абсцисс. $|y|_{макс} = 1$ при $x = 1/2$. Абсцисса точек перегиба графика $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Асимптота $y = 0$. **1460.** Определена везде, кроме $x = 0$. Экстремумов нет. Точка перегиба графика $\left(-1/2, e^{-2} + 1/2\right)$. Асимптоты $x = 0$ и $x + y = 1$. **1461.** Определена везде, кроме $x = \pi/2 + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Период π. Экстремумов нет. График не имеет точек перегиба. Асимптоты $x = \pi/2 + k\pi$. **1462.** Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. Точки экстремумов удовлетворяют уравнению $x = \operatorname{tg} x$. Асимптота $y = 0$. **1463.** Определена везде. Экстремумов нет. График не имеет точек перегиба. При $x \leq 0$ функция тождественно равна линейной функции $y = 1 - x$. Асимптота $x + y = 3$. $(0, 1)$ – угловая точка графика с двумя различными касательными. **1464.** Определена везде. График симметричен относительно оси ординат. $y_{макс} = 3$ при $x = 0$, $y_{мин} = -1$ при $x = \pm 2$. График не имеет ни точек перегиба, ни асимптот, и правая его часть представляет собой часть параболы $y = x^2 - 4x + 3$, лежащую правее оси ординат. $(0, 3)$ – угловая точка графика с двумя различными касательными. **1465.** $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t, а $y(x)$ – при всех x. $(-3, 3)$ – максимум, $(5, -1)$ – минимум, $(1, 1)$ – точка перегиба. Асимптот нет. При $x \to +\infty$ угол наклона линии к оси абсцисс стремится к 45°. **1466.** $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t, а $y(x)$ – при всех x. Асимптоты $y = x$ и $y = x + 6\pi$; $(-1-3\pi, -1+3\pi/2)$ – максимум, $(1-3\pi, 1-3\pi/2)$ – минимум, $(-3\pi, 0)$ – точка перегиба. **1467.** $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t, кроме $t = -1$. Асимптота $x + y + 1 = 0$. $(0, 0)$ – точка самопересечения, касательными в этой точке служат оси координат. Точек перегиба нет. В первом квадранте – замкнутая петля. **1468.** $x(t)$ и $y(t)$ определены при всех t. Функция $y(x)$ при $x < -1/e$ не определена, при $-1/e < x < 0$ эта функция двузначна, при $x > 0$ – однозначна. Линия симметрична относительно прямой $x + y = 0$. Максимум – $(e, 1/e)$. Имеются две точки перегиба. Координатные оси служат асимптотами. **1469.** Замкнутая линия, симметричная относительно оси абсцисс, с точкой возврата $(a, 0)$. **1470.** Замкнутая трехлепестковая роза. Функция определена на отрезках $[0, \pi/3]$, $[2\pi/3, \pi]$, $[4\pi/3, 5\pi/3]$. Экстремумы при $\varphi = \pi/6$, $\varphi = 5\pi/6$ и $\varphi = 3\pi/2$. **1471.** Функция определена в полуинтервалах $[0, \pi/2)$, $[\pi, 3\pi/2)$. График функции симметричен относительно полюса. Прямые $x = a$ и $x = -a$ являются асимптотами*). **1472.** Функция определена в полуинтервалах $[0, \pi/2)$, $[3\pi/4, 3\pi/2)$ и на отрезке $[7\pi/4, 2\pi]$. График функции симметричен относительно полюса. Асимптоты $x = a$ и $x = -a$. В полюсе кривая касается прямой $\varphi = 3\pi/4$. **1473.** Существует при всех значениях φ. При $\varphi = 0$ максимум равен $2a$, при $\varphi = \pi$ минимум равен 0. Линия замкнута, симметрична относительно полярной оси. Полюс – точка возврата. **1474.** Функция определена на отрезках $[0, \pi/2 + \arccos 1/b]$, $[3\pi/2 - \arccos 1/b, 2\pi]$. В точке $\varphi = 0$ функция имеет максимум, равный $a(1+b)$, в точках $\varphi = \pi/2 + \arccos 1/b$ и

*) В этой и следующих задачах асимптоты даны в декартовой системе координат, в которой осью абсцисс служит полярная ось, а осью ординат – перпендикуляр к полярной оси, проходящей через полюс.

$\varphi = 3\pi/2 - \arccos 1/b$ – минимум, равный 0. График функции симметричен относительно полярной оси. **1475.** Существует при $\varphi > 0$. Точка перегиба $(\sqrt{2\pi}; 0{,}5)$. Полярная ось является асимптотой. Линия спирально закручивается вокруг полюса, асимптотически приближаясь к нему. **1476.** Существует при $\varphi \ge 0$. График – спираль, исходящая из полюса и асимптотически приближающаяся к окружности $\rho = 1$. **1477.** Существует при $-1 \le t \le 1$, расположена целиком правее оси ординат. Замкнутая линия. Максимум при $t = 0$ ($\varphi = 1$ радиану, $\rho = 1$). Точек перегиба нет. При $t = \pm 1$ касается оси ординат. **1478.** Четырехлепестковая роза. *Начало координат* – двойная точка самоприкосновения. **1479.** Линия целиком лежит в полосе $-a\sqrt{2}/2 \le x \le a\sqrt{2}/2$. Симметрична относительно начала. Асимптота $x = 0$. $(0, 0)$ – точка перегиба с осью абсцисс в качестве касательной. Имеются еще две точки перегиба. **1480.** Симметричная относительно четырех осей $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ замкнутая линия с четырьмя точками возврата: $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$ и $(0, -a)$. Начало координат – изолированная точка. **1481.** Симметричная относительно осей координат и биссектрис координатных углов линия. Асимптоты $(x \pm y)^2 = \frac{1}{2}$. Начало координат – четырехкратная точка самопересечения; в ней ветви линии касаются координатных осей. Линия имеет форму «мельницы». **1485.** Остальные корни простые. **1486.** $0{,}1 < x < 0{,}2$. **1487.** $-0{,}7 < x_1 < -0{,}6$ и $0{,}8 < x_2 < 0{,}9$. **1488.** $0{,}32 < x < 0{,}33$. **1489.** $-3{,}11 < x_1 < -3{,}10$, $0{,}22 < x_2 < 0{,}23$ и $2{,}88 < x_3 < 2{,}89$. **1490.** $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$ и $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$. **1491.** $-0{,}20 < x < -0{,}19$. **1492.** $0{,}84 < x < 0{,}85$. **1493.** $1{,}63 < x < 1{,}64$. **1494.** $1{,}537 < x < 1{,}538$. **1495.** $0{,}826 < x < 0{,}827$. **1496.** $1{,}096 < x < 1{,}097$. **1497.** $0{,}64 < x < 0{,}65$. При $0 < a < 1$ существует единственное действительное число, равное своему логарифму, притом меньшее 1. При $1 < a < e^{1/e}$ существуют два различных числа, равных своим логарифмам; одно из интервала $(1, e)$, другое из интервала $(e, +\infty)$. При $a = e^{1/e}$ единственным числом, равным своему логарифму, будет число e (оно является двукратным корнем уравнения $\log_a x = x$). При $e^{1/e} < a < +\infty$ не существует действительных чисел, равных своим логарифмам.

1498. $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$. **1499.** $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.

1500. $(x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1$.

1501. $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$. **1502.** $f(-1) = 143$; $f'(0) = -60$; $f''(1) = 26$. **1503.** $-1-(x+1)-(x+1)^2-\ldots-(x+1)^n+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, где $0<\theta<1$. **1504.** $x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x + n + 1)e^{\theta x}$, где $0<\theta<1$.

1505. $2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!(x-4)^n}{n!(n-1)!\cdot 2^{4n-2}} + \frac{(-1)^n(2n)!(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}n!(n+1)!\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$, где $0<\theta<1$. **1506.** $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2}$, где $0<\theta<1$.

1507. $(x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \ldots + \frac{(-1)^n 6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n} + \frac{(-1)^{n+1}6(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$, где $0<\theta<1$.

1508. $\frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \frac{2^7x^8}{8!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n 2^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin 2\theta x$, где $0<\theta<1$.

1509. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\frac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}$, где $0<\theta<1$.

1510. $x + \frac{x^3}{3}\frac{1+2\sin^2\theta x}{\cos^4\theta x}$, где $0<\theta<1$. **1511.** $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!}\frac{9\theta x + 6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$, где $0<\theta<1$.

1512. $1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}(x-1)^2 - \frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}(x-1)^3 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4\cdot4!}\frac{(x-1)^4}{\sqrt{[1+\theta(x-1)]^9}}$, $0<\theta<1$.

1513*. В силу существования третьей производной имеем $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1h)$. Сравнивая с выражением в тексте, получаем $\frac{h^2}{2}[f''(a+\theta h) - f''(a)] = \frac{h^3}{3!}f'''(a+\theta_1h)$, т. е. $\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{h} = \theta\frac{f''(a+\theta h)-f''(a)}{\theta h} = \frac{1}{3}f'''(a+\theta_1h)$. Остается совершить предельный переход при $h \to 0$.

1514. Функция убывает. $(0, 3)$ – точка перегиба графика. **1515.** Функция имеет минимум, равный 1. **1516.** Функция имеет минимум, равный 2. **1517.** Функция имеет максимум, равный -11. **1518.** Функция возрастает. $(0, 0)$ – точка перегиба графика. **1519.** Функция возрастает. $(0, 4)$ – точка перегиба графика. **1520.** $f(x) = 1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + \ldots$; $f(1{,}03) \approx 0{,}82$.

1521. $f(x) = 321 - 1087(x-2) + 1648(x-2)^2 + \ldots$; $f(2{,}02) \approx 343{,}4$; $f(1{,}97) \approx 289{,}9$.

1522. $f(x) = 1 + 60(x-1) + 2570(x-1)^2 + \ldots$; $f(1{,}005) \approx 1{,}364$.

1523. $f(x) = -6 + 21(x-2) + 50(x-2)^2 + \ldots$; $f(2{,}1) \approx -3{,}4$; $f(2{,}1) \approx -3{,}36399$; $\delta = 0{,}036$; $\delta' = 0{,}011 = 1{,}1\%$. **1524.** 1,65. **1525.** 0,78, $\delta < 0{,}01$. **1526.** 0,342020. **1527.** 0,985. **1528.** 0,40, $\delta < 0{,}01$. **1529.** $\sqrt{2}/4$. **1530.** a/b^2; b/a^2. **1531.** 36. **1532.** 0,128. **1533.** $\sqrt{2}/4$. **1534.** 0. **1535.** 1. **1536.** $\frac{8\sqrt{2}}{3a}$. **1537.** $6|x|/(1+9x^4)^{3/2}$.

1538. $a^4b^4/(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}$. **1539.** $|\cos x|$. **1540.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{a|xy|}}$.

1541. $\frac{|(n-1)(ab)^{2n}(xy)^{n-2}|}{(b^{2n}x^{2n-2}+a^{2n}y^{2n-2})^{3/2}}$. **1542.** $\frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}$. **1543.** $1/6$. **1544.** $\frac{2}{3a|\sin 2t_1|}$. **1545.** $\frac{2}{\pi a}$.

1546. $\frac{1}{4a|\sin\frac{t}{2}|}$. **1547.** $\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$. **1548.** $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{3/2}}$. **1549.** $\frac{\varphi^2+k^2+k}{a\varphi^{k-1}(\varphi^2+k^2)^{3/2}}$.

1550. $\frac{(a^2+b^2)^{3/2}}{2ab\sqrt{2}}$. **1554.** $(x+4)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$. **1555.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$.

1556. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$. **1557.** $\left(x - \frac{\pi-10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

1558. $\left(x + \frac{7}{3}a\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}a\right)^2 = \frac{125}{9}a^2$. **1559.** $(a/4, a/4)$.

1560. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **1561.** $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **1562.** При $t = k\pi$. **1563.** $\frac{3}{4}a$.

1566. $a = 3,\ b = -3,\ c = 1$. **1567.** $y = -x^5 - 0{,}6x^4 + 4{,}5x^3 + 0{,}1x^2$.

1568. $\xi = x - \frac{\left[1+n^2x^{2(n-1)}\right]x}{n-1}$, $\eta = x^n + \frac{1+n^2x^{2(n-1)}}{n(n-1)x^{n-2}}$. **1569.** $\xi = \left(a^2+b^2\right)x^3/a^4$, $\eta = -\left(a^2+b^2\right)y^3/b^4$; $(a\xi)^{2/3} - (b\eta)^{2/3} = \left(a^2+b^2\right)^{2/3}$. **1570.** $\xi = x + 3x^{1/3}y^{2/3}$, $\eta = y + 3x^{2/3}y^{1/3}$; $(\xi+\eta)^{2/3} + (\xi-\eta)^{2/3} = 2a^{2/3}$. **1571.** $\xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}(2y+a)$, $\eta = -\frac{9y^2+2ay}{2a}$. **1572.** $\xi = -\frac{4}{3}t^3$, $\eta = 3t^2 - \frac{3}{2}$, $\xi^2 = \frac{16}{243}\left(\eta+\frac{3}{2}\right)^3$.

1573. $(3\eta/8)^4 + 6a^2(3\eta/8)^2 + 3a^2\xi = 0$. **1574.** $\xi^{2/3} + \eta^{2/3} = (2a)^{2/3}$. **1576.** Да, можно. **1579.** $2p\left[\sqrt{\left(\frac{r+p}{3p}\right)^3} - 1\right]$. **1580.** $\frac{4\left(a^3-b^3\right)}{ab}$. **1581.** $6a$. **1582*.** $16a$. Получив параметрические уравнения эволюты, преобразовать их к новым координатам и параметру, положив $x = -x_1$, $y = -y_1$, $t = t_1 + \pi$. **1583*.** Воспользоваться зависимостью между длиной эволюты и приращением радиуса кривизны.

К главе V

1592. 1) $\int\limits_0^3\left(x^2+1\right)dx$; 2) $\int\limits_a^b\left(e^x+2\right)dx$; 3) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^2\left(8-2x^2\right)dx$; 5) $\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$; 6) $\int\limits_1^e\left(\ln x - \ln^2 x\right)dx$. **1593.** $20 - 4/n$ и $20 + 4/n$; $\alpha = 4/n$; $\sigma = \frac{1}{5n}$. **1594.** $\alpha = 149/600 \approx 0{,}248$. $\delta \approx 0{,}039$. **1595.** 31,5. **1596.** $10\frac{2}{3}$.

1597. $\frac{2}{3}ah = 40$ см^2. **1598.** $10\frac{2}{3}$. **1599.** 8. **1600.** $21\frac{1}{3}$. **1601.** $2\frac{7}{8}$. **1602.** 140 см. **1603.** $\approx 122{,}6$ м. **1604.** $20\frac{5}{6}$ см. **1605.** 625 Дж. **1606.** 4 см.

1607. а) $m_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} v(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; б) $m = \int\limits_{T_0}^{T_1} v(t)\,dt$.

1608. а) $\theta_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \psi(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; б) $\theta = \int\limits_{T_0}^{T_1} \psi(t)\,dt$.

1609. $Q_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$, $t_0 = 0$, $t_n = T$; $Q = \int\limits_0^T I(t)\,dt$.

1610. а) $A_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\psi(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)$, $t_0 = T_0$, $t_n = T_1$; б) $A = \int\limits_{T_0}^{T_1} \varphi(t)\psi(t)\,dt$.

1611. 1500 Кл. **1612.** ≈ 67600 Дж. **1613.** 2880 Дж.

1614. а) $P_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a\xi_i(x_{i+1} - x_i)$, $x_0 = 0$, $x_n = b$; б) $P = \int\limits_0^b ax\,dx$.

1615. а) $ab^2/2 = 187{,}5$ Н; б) прямая должна быть проведена на расстоянии $h/\sqrt{2} \approx 17{,}7$ см от поверхности. **1616.** $e - 1$. **1617.** $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$. **1618.** 1)

2) $4a$; 3) $\frac{7a^3}{24}$; 4) $\frac{7}{8}ab^2$; 5) $a\left(a^2 - \frac{a}{2} + 1\right)$; 6) $\frac{4}{3}m$; 7) 31,5; 8) $\frac{(a-b)^2}{6}$; 9) $\frac{a^2}{3}$; 10) $\frac{a\pi(3-2ab+2b^2)}{3(a-b)^2}$; 11) 4; 12) $16\frac{2}{15}$; 13) 0. **1619***. $\frac{1}{k+1}$; $\approx 1{,}67\cdot 10^{11}$. Записать выражение, предел которого ищется, в виде n-й интегральной суммы некоторой функции. **1620.** $\ln 2$. **1621.** $\ln 2$. **1622*.** $\ln a$, $\ln 3 \approx 1{,}1$. См. задачи 1620 и 1621. **1623*.** 1) $ae^a - e^a + 1$; 2) $a\ln a - a + 1$; 3) $\frac{(\ln b)^3 - (\ln a)^3}{2}$. Выражение $q + 2q^2 + \ldots + nq^n$ находится при помощи дифференцирования суммы членов геометрической прогрессии. **1624.** $\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$. **1625.** 1/2. **1626.** 64/3. **1627.** 8/5.

1630. $8 < I < 9{,}8$. **1631.** $3 < I < 5$. **1632.** $\pi < I < 2\pi$. **1633.** $20/29 < I < 1$.

1634. $\pi/9 < I < 2\pi/3$. **1635.** $\frac{e^2-1}{e^2 \cdot e^2-1} < I < \frac{e^2-1}{e^2}$. **1636.** 1) Первый; 2) второй.

1637. 1) Первый; 2) второй; 3) первый; 4) второй. **1640.** $0{,}85 < I < 0{,}90$.

1641. а) $1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414$; б) $1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$; в) $1 < I < \sqrt{6/5} \approx 1{,}095$.

1642. $y_{cp} = \frac{k(x_1+x_2)}{2} + b$; $\frac{x_1+x_2}{2}$. **1643.** $y_{cp} = \frac{a}{3}\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right)$. Если $x_1x_2 \geq 0$, то в одной точке; если $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$, то при соблюдении неравенств $-x_1/2 \leq x_2 \leq -2x_1$ в двух точках, в противном случае – в одной. **1644.** 24,5. **1645.** $\pi a/4$. **1646.** 0. **1647.** $\frac{2}{3}h = 1$ м. **1648.** 11 А. **1649.** – 1558 Вт. **1650.** 1) $\frac{x^3}{3}$; 2) $\frac{x^3-x^2}{3}$; 3) $\frac{x^4-x^3}{20}$. **1651.** $s = \frac{2}{3}t^3$. **1652.** $A = 100s + 25s^2$ Дж, s – путь в метрах. **1653.** $A = \frac{1}{R}\left(\frac{\alpha^2}{3}t^3 + \alpha\beta t^2 + \beta^2 t\right)$, где $\alpha = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1}$, $\beta = \frac{E_1t_2 - E_2t_1}{t_2 - t_1}$.

1654. $Q = c_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3$. **1655.** $dS = 10$, $\Delta S = 10{,}10023\ldots$ **1656.** $dS = 1$.

1657.

Δx	ΔS	dS	α	δ
1	92,25	64	28,25	0,442
0,1	6,644	6,4	0,244	0,0382
0,01	0,6424	0,64	0,0024	0,00376

1658. 1/3. **1659.** 0; $\sqrt{2}/2$; 1. **1660.** $\frac{d}{dx}\int\limits_x^a f(x)dx = -f(x)$. **1661.** –1, –5/4.

1662. $\frac{\sin 2x}{x}$. **1663.** 1) x; 2) $-4x\ln x$. **1664*.** $2\ln^2 2x - \ln^2 x$. Представить интеграл $\int\limits_x^{2x} \ln^2 x\,dx$ в виде суммы интегралов $\int\limits_x^a \ln^2 x\,dx + \int\limits_a^{2x} \ln^2 x\,dx$, где $a > 0$.

1665. $y' = -\frac{\cos x}{e^y}$. **1666.** 1) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} t$; 2) $\frac{dy}{dx} = -t^2$. **1667.** –2. **1668.** Минимум при $x = 0$, $f(0) = 0$. **1669.** 1. **1670.** $y_{макс} = 5/6$ при $x = 1$, $y_{мин} = 2/3$ при $x = 2$. Точка перегиба графика $(3/2, 3/4)$. **1672.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{15}{32}$; 3) 52; 4) $4\frac{5}{6}$; 5) $4\pi\frac{1}{4}$; 6) $\approx 0{,}08$; 7) $2 - \sqrt{2}$; 8) $6\frac{2}{3}$; 9) $3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)$; 10) $\frac{z_1^2 - z_0^2}{2} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{z_1^3} - \sqrt{z_0^3}\right) + z_1 - z_0$. **1673.** 1) 2; 2) 0; 3) $e^5 - 1$; 4) 1; 5) $\pi/4$; 6) $\pi/6$. **1674.** 0. **1675.** $1 - \sqrt{3}$; –1.

К главе VI

1676. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. 1677. $\frac{mx^{n/m+1}}{n+m}+C$. 1678. $C-\frac{1}{x}$. 1679. $-0{,}4343\cdot 10^x+C$.

1680. $\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$. 1681. $\sqrt{x}+C$. 1682. $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$. 1683. $\approx 4{,}1x^{3{,}88}+C$.

1684. $u-u^2+C$. 1685. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$. 1686. $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$.

1687. $C-10x^{-0{,}2}+15x^{0{,}2}-3{,}62x^{1{,}38}$. 1688. $x-2\ln|x|-\frac{1}{x}+C$. 1689. $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$.

1690. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{6}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$. 1691. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+C$.

1692. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C$. 1693. $3x-\frac{2\cdot 1{,}5^x}{\ln 1{,}5}+C$. 1694. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C$.

1695. $C-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x$. 1696. $\operatorname{tg}x-x+C$. 1697. $C-\operatorname{ctg}x-x$. 1698. $x-\sin x+C$.

1699. $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}+C$. 1700. $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$. 1701. $\operatorname{tg}x+C$. 1702. $\frac{5}{2}x+C$.

1703. $\frac{\sin^2 x}{2}+C$. 1704. $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. 1705. $2\sqrt{1+x^2}+C$. 1706. $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$.

1707. $C-\frac{4}{5(2x-3)^4}$. 1708. $\frac{(a+bx)^{1-c}}{b(1-c)}+C$. 1709. $C-\frac{3}{33}(8-3x)^{11/3}$.

1710. $C-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$. 1711. $\frac{3a}{b}\sqrt[3]{a+bx}+C$. 1712. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$.

1713. $C-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$. 1714. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$. 1715. $\sqrt{x^2+1}+C$.

1716. $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$. 1717. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$. 1718. $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$.

1719. $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$. 1720. $\sec x+C$. 1721. $3\sqrt[3]{\sin x}+C$. 1722. $C-\frac{2}{5}\cos^5 x$.

1723. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$. 1724. $\frac{(\operatorname{arctg}x)^2}{2}+C$. 1725. $C-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}$.

1726. $2\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+C$. 1727. $\sin x+C$. 1728. $\operatorname{tg}(1+\ln x)+C$. 1729. $\frac{1}{3}\sin 3x+C$.

1730. $x\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin 2x+C$. 1731. $C-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$. 1732. $C-\frac{1}{2}\sin(1-2x)$.

1733. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$ или $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}4x-\sec 4x)+C$. 1734. $c-\cos(e^x)$.

1735. $\ln(1+x^2)+C$. 1736. $\ln|\arcsin x|+C$. 1737. $\ln(x^2-3x+8)+C$.

1738. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. 1739. $\frac{1}{c}\ln|cx+m|+C$. 1740. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

1741. $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$. 1742. $\ln(e^x+1)+C$. 1743. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)+C$.

1744. $C-\ln|\cos x|$. 1745. $\ln|\sin x|+C$. 1746. $C-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|$.

1747. $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|+C$. 1748. $C-\ln(1+\cos^2 x)$. 1749. $\ln|\ln x|+C$.

1750. $\frac{\ln^{m+1}x}{m+1}+C$, если $m\neq-1$, и $\ln|\ln x|+C$, если $m=-1$.

1751. $e^{\sin x}+C$. 1752. $e^{\sin x}+C$. 1753. $\frac{a^{3x}}{3\ln a}+C$. 1754. $C-\frac{a^{-x}}{\ln a}$.

1755. $C-\frac{e^{1-3x}}{3}$. 1756. $0{,}5e^{x^2}+C$. 1757. $C-\frac{1}{3}e^{-x^3}$.

1758. $\arcsin\frac{x}{3}+C$. 1759. $\frac{1}{5}\arcsin 5x+C$. 1760. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C$.

1761. $\arcsin\frac{x}{2}+C$. 1762. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}x+C$. 1763. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$.

1764. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$. 1765. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{a}+C$. 1766. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C$.

1767. $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$. 1768. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$. 1769. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$.

1770. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{a}+C$. 1771. $e^x+e^{-x}+C$. 1772. $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x+C$.

1773. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. 1774. $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

1775. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. 1776. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$.

1777. $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 1778. $\frac{2}{3}\left[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right]-x+C$.

1779. $C-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$. 1780. $C-\frac{1}{9}\left[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3\right]$.

1781. $x-4\ln|x+4|+C$. 1782. $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+C$.

1783. $\frac{a}{b}\left[x-\frac{c}{b}\ln|bx+c|\right]+C$. 1784. $C-x-6\ln|3-x|$. 1785. $2x+3\ln|x-2|+C$.

1786. $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\ln|2x-1|+C$. 1787. $x+\ln(x^2+1)+C$. 1788. $x-2\operatorname{arctg}x+C$.

1789. $C-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|$.

1790. $\frac{x^2}{2}-x+\operatorname{arctg}x+C$. 1791. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. 1792. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

1793. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$. 1794. $\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{b-x}{a-x}\right|+C$. 1795. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

1796. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$. 1797. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$. 1798. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$.

1799. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x\sqrt{2}}{\sqrt{3}-x\sqrt{2}}\right|+C$. 1800. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. 1801. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

1802. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1-2x}{3}+C$. 1803. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$. 1804. $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3)+C$.

1805. $\arcsin(x-2)+C$. 1806. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C$. 1807. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$.

1808. $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. 1809. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$. 1810. $C-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. 1811. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

1812. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x+C$. 1813. $2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-x+C$. 1814. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

1815. $\ln(2+\sin 2x)+C$. 1816. $C-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right)$. 1817. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

1818. $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$. 1819. $\frac{1}{8}\left(2x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x\right)+C$.

1820. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. 1821. $\ln(1+\sin x)+C$. 1822. $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$.

1823. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$. 1824. $2\sqrt{\cos\alpha}\left(\frac{\cos^2\alpha}{5}-1\right)+C$. 1825. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$.

1826. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$. 1827. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+C$.

1828. $C-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$. 1829. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

1830. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$. 1831. $C-\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$.

1832. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$. 1833. $x\sin x+\cos x+C$.

1834. $C-e^{-x}(x+1)$. 1835. $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$. 1836. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$.

1837. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$. 1838. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

1839. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

1840. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. 1841. $x\operatorname{tg}x-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+C$.

1842. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 1843. $C-\frac{1}{2x^2}\lg\left(x\sqrt{e}\right)$.

1844. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. 1845. $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)+C$.

1846. $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$. 1847. $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

1848. $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}+C$.

1849. $\left(x^3+1\right)\ln(1+x)/3-x^3/9+x^2/6-x/3+C$.

1850. $C-e^{-x}\left(2+2x+x^2\right)$. 1851. $e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+C$.

1852. $a^x\left(x^2/\ln a-2x/\ln^2 a+2/\ln^3 a\right)+C$.

1853. $C-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x$.

1854. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

1855. $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$. 1856. $C-\frac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6\right)$.

1857. $C-\frac{8}{27\sqrt{x^3}}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)$.

1858. $x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$.

1859. $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$. 1860. $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$.

1861. $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x-5\cos 2x)+C$. 1862. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx+a\cos nx)+C$.

1863. $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. 1864. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.

1865*. $C-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. (Положить $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и далее $\int\sqrt{1-x^2}dx$ преобразовать к виду $\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.)

1866*. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$. (Положить $u=\sqrt{a^2+x^2}$.)

1867. $\frac{x-2}{x+2}e^x+C$. 1868. $\frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)\sin x-(x-1)^2\cos x\right]e^x+C$.

1869. $2\left[\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right]+C$. 1870. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}\left(5x^3+6x^2+8x+16\right)+C$.

1871. $C-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$. 1872. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$.

1873. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$. 1874. $2\left[\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+C$.

1875. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. 1876. $2\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+C$.

1877. $\frac{3}{2}(x+1)^{2/3}-3(x+1)^{1/3}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right|+C$.

1878. $\frac{2}{a}\left[\sqrt{ax+b}-m\ln\left|\sqrt{ax+b}+m\right|\right]+C$.

1879. $x+\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

1880. $3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C$. 1881. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)+C$.

1882. $\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[6]{x^2}+2\ln\left|\sqrt[6]{x^2}-1\right|\right]+C$. 1883. $\frac{4}{21}\left(3e^x-4\right)\sqrt[4]{\left(e^x+1\right)^3}+C$.

1884. $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$. 1885. $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right|+C$.

1886. $0.4\sqrt{\left(1+\cos^2 x\right)^3}\left(3-2\cos^2 x\right)+C$. 1887. $\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg}x+C$.

1888. $C-\frac{1}{3}\sqrt{a^2-x^2}\left(2a^2+x^2\right)$. 1889. $\frac{x^2-4}{2}+\frac{8}{x^2-4}+4\ln\left|x^2-4\right|+C$.

1890. $C-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$. 1891. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$. 1892. $C-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{|x|}$.

1893. $C-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$. 1894. $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x$. 1895. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$.

1896. $C-\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{45x^5}$. 1897. $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C$. 1898. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$. 1899. $C-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

1900. $\frac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$. 1901. $\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}+2\sqrt{4x^2+1}}{x\sqrt{15}-2\sqrt{4x^2+1}}\right|+C$.

1902*. $\arccos\frac{1}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$. (Можно применить подстановку $x=\frac{1}{z}$.)

1903*. $2\arcsin\sqrt{x}+C$. (Можно применить подстановку $x=\sin^2 z$.)

1904*. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$. (Умножить числитель и знаменатель на e^x и положить $xe^x=z$.) 1905. $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$. 1906. $3\left[\left(2-\sqrt[3]{x^2}\right)\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}\right]+C$.

1907. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)+C$. 1908. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$.

1909. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$. 1910. $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+2x\right)^3}+C$.

1911. $\frac{1}{6}\left(1+e^{2x}\right)^3+C$. 1912. $2e^{\sqrt{x}}+C$. 1913. $e^{-\cos x}+C$. 1914. $C-\frac{2}{3}\left(1-e^x\right)^{3/2}$.

1915. $\frac{1}{2}\sin x^2+C$. 1916. $C-\frac{5}{24}\left(2-3x^{4/3}\right)^{6/5}$. 1917. $C-\frac{1}{3}\ln\left|1+3x^3-x^6\right|$.

1918. $\frac{2}{3}\ln\left(1+x^{3/2}\right)+C$. 1919. $C-\ln\left(3+e^{-x}\right)$. 1920. $C-\arcsin e^{-x}$.

1921. $2\sqrt{1+x^2}+3\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

1922. $\frac{1}{9}\left[2\sqrt{9x^2-4}-3\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right|\right]+C$. **1923.** $2\sin\sqrt{x}+C$.

1924. $\arcsin\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$. **1925.** $C-\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right|$. **1926.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

1927. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{n+1}+C$, если $n\neq -1$, и $\ln\left|\operatorname{arctg} x\right|$, если $n=-1$. **1928.** $C-2\operatorname{ctg}2x$.

1929. $2x-\operatorname{tg}x+C$. **1930.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C$. **1931.** $\frac{2}{45}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}\left(5\operatorname{tg}^2 x+9\right)+C$.

1932. $\frac{1}{9}\left(\operatorname{tg}3x+\ln\cos^2 3x\right)+C$. **1933.** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C$.

1934. $C-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}$. **1935.** $\frac{\sqrt{2+4x}\,(x-1)}{6}+C$. **1936.** $x\sqrt{1+2x}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3}+C$.

1937. $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}+C$. **1938.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{4}{3}\sqrt{\sin^3 x}+\cos x+C$.

1939. $\frac{a^{mx}b^{nx}}{m\ln a+n\ln b}+C$. **1940.** $C-\ln\left[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}\right]$.

1941. $\frac{1}{3}\ln\left(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right)+C$. **1942.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{\sqrt{2}}+C$.

1943. $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}$. **1944.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

1945. $C-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}$. **1946.** $\frac{3}{8}\left[\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$.

1947. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$. **1948.** $\ln\frac{(x-4)^2}{|x+3|}+C$.

1949. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C$. **1950.** $C-\ln\left|2x^2-3x+1\right|$.

1951. $\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}-\frac{1}{10}\ln\left(5x^2+6x+18\right)+C$.

1952. $\frac{41}{16}\ln\left|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}\right|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C$.

1953. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\frac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{11}{6}+\sqrt{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{2}{3}}\right|+C$.

1954. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left(x+\frac{3}{4}+\sqrt{x^2+\frac{3x}{2}}\right)+C$.

1955. $\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}+C$.

1956. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$. **1957.** $\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$.

1958. $\frac{1}{a^3}\left[\left(a^2x^2-2\right)\sin ax+2ax\cos ax\right]+C$. **1959.** $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)+C$.

1960. $\operatorname{tg}x\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x+C$. **1961.** $\ln\left|\ln\sin x\right|+C$.

1962. $\frac{1}{4}\left[\ln\left(1+x^4\right)+\frac{1}{1+x^4}\right]+C$. **1963.** $\frac{1}{3}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|+\cos 3x\right)+C$.

1964. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}+\frac{3x}{2}\right)+C$. **1965.** $C-\frac{1}{8}\ln\frac{2+\cos 2x}{2-\cos 2x}$. **1966.** $\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C$.

1967. $2\ln\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)+C$. **1968.** $e^{e^x}+C$. **1969.** $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$.

1970. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[3\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)\sqrt{1+x^2}\right]+C$.

1971. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$. **1972.** $C-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)$.

1973. $\frac{e^x}{2}\left(1-\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}\right)+C$. **1974.** $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}x+\ln\left|\operatorname{tg}x\right|\right)+C$.

1975. $\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$. **1976.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{6}\right)\right|+C$. **1977.** $\sec x-\operatorname{tg}x+x+C$.

1978. $\sin x-\operatorname{arctg}\sin x+C$. **1979.** $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|+C$. **1980.** $\ln x\ln\ln x-\ln x+C$.

1981. $\frac{e^{x^2}\left(x^2-1\right)}{2}+C$. **1982.** $C-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^4+2x^2+2\right)$.

1983. $\frac{1}{6}\left(x^2-1\right)\sqrt{1+2x^2}+C$. **1984.** $C-\frac{x\left(x^2-3\right)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x$.

1985. $\frac{1}{5}\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^5}-\frac{a^2}{3}\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}+a^4\sqrt{x^2-a^2}+a^5\arcsin\frac{a}{|x|}+C$.

1986. $\frac{\sqrt{4+x^2}\left(x^2-2\right)}{24x^3}+C$. **1987.** $\frac{\sqrt{\left(x^2-8\right)^3}}{24x^3}+C$. **1988.** $\frac{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}\left(x^2-6\right)}{120x^5}+C$.

1989. $\frac{\sqrt{x^2-3}\left(2x^2+3\right)}{27x^3}+C$. **1990.** $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right]+C$.

1991. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)+C$. **1992.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C$.

1993. $\ln\frac{x}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6}+C$. **1994.** $\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$.

1995*. $\frac{x^3}{3\left(1-x^2\right)^{3/2}}+C$. (Удобна подстановка $x=\sin u$.) **1996.** $\frac{2}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax}{b}}+C$.

1997. $C-\frac{\left(1+x^4\right)^{3/2}}{12x^{12}}$. **1998.** $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}}+C$. **1999.** $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+4}-\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+4}\right)+C$.

2000. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C$. **2001.** $C-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x^3}{x^3}}-\frac{2}{3}\arcsin\sqrt{x^3}$.

2002. $C-\frac{x^3}{4\left(1+x^2\right)^2}-\frac{3x}{8\left(1+x^2\right)}+\frac{3\operatorname{arctg}x}{8}$. **2003.** $\frac{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C$.

2004. $\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}+C$. **2005.** $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$.

2006*. $C-\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (подстановка $u=1+\frac{1}{x}$).

2007. $\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$. **2008.** $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

2009. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$. **2010.** $\frac{3}{55}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^5 x}\left(5\operatorname{tg}^2 x+11\right)+C$.

2011. $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{tg}^2 x+6\right)\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$. **2012.** $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$. **2013.** $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C$.

2014. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$. **2015.** $\frac{3}{11}\ln|3x+1|+\frac{2}{33}\ln|2x-3|-\frac{1}{3}\ln|x|+C$.

2016. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

2017. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$.

2018. $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C$.

2019. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C$. **2020.** $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{x-\sqrt2}{x+\sqrt2}\right|+\frac{1}{2\sqrt3}\ln\left|\frac{x-\sqrt3}{x+\sqrt3}\right|+C$.

2021. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$. **2022.** $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{4}{x+1}+C$.

2023. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C$. **2024.** $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$.

2025. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$. **2026.** $C-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|$.

2027. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **2028.** $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C$.

2029. $\frac{3}{2(x-3)^2}+\ln|x-5|+C$. **2030.** $\frac{x}{8}-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C$.

2031. $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C$.

2032. $\frac{1}{x-1}+\ln\frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{|x|}+C$. **2033.** $\frac{1}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+20\ln|x-3|-\frac{42}{4}\ln|x-2|+C$.

2034. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C$. **2035.** $C-\frac{x}{\left(x^2-1\right)^3}$.

2036. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **2037.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C$.

2038. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}+C$. **2039.** $\ln\frac{\sqrt{\left(x^2-2x+5\right)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

2040. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C$. **2041.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

2042. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **2043.** $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2(x+1)}+C$.

2044. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\operatorname{arctg}x-\frac{1}{(x-1)^2}\right]+C$.

2045. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

2046. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt2}{2}+C$.

2047*. $\frac{1}{4\sqrt2}\ln\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}+\frac{\sqrt2}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt2}{1-x^2}+C$. (В знаменателе подынтегрального выражения прибавить и вычесть $2x^2$.)

2048. $\frac{2-x}{4\left(x^2+2\right)}+\frac{\ln\left(x^2+2\right)}{2}-\frac{1}{4\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt2}+C$.

2049. $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{7}{288}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{24\left(x^2+4\right)}+C$.

2050. $\frac{13x-159}{8\left(x^2-4x+13\right)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C$.

2051. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{3x^3+15x^2+18x+8}{8\left(x^2+2x+2\right)^2}+C$.

2052. $\frac{x}{216\left(x^2+9\right)}+\frac{x}{36\left(x^2+9\right)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

2053. $\frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

2054. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48\left(1+x^2\right)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+C$. 2055. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C$.

2056. $\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}-2\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+C$.

2057. $\frac{3x^2-x}{(x-1)\left(x^2+1\right)}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x+C$. 2058. $C-6\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{12x^2-3x-1}{2\left(x^3-x^2\right)}$.

2059. $\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}+\ln\sqrt{x^2+1}+C$. 2060. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x-2}{x^2+1}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$.

2061. $\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3\left(x^3+1\right)}+C$.

2062. $\frac{1}{648}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+\frac{3(x+1)}{x^2+2x+10}+\frac{18(x+1)}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\right]+C$.

2063. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{3}{8}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x}{4\left(x^2+2x+2\right)^2}+C$.

2064. $C-\frac{x}{8\left(x^2+4\right)}-\frac{2x+3}{2\left(x^2+4x+5\right)}-\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}(x+2)$.

2065. $C-\frac{57x^4+103x^2+32}{8x\left(x^2+1\right)^2}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}x$. 2066. $\frac{3-7x-2x^2}{2\left(x^3-x^2-x+1\right)}+\ln\frac{|x-1|}{(x+1)^2}+C$.

2067. $\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{5}\right)\frac{1}{x\left(3-2x^2\right)^2}+\frac{1}{5\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt3+x\sqrt2}{\sqrt3-x\sqrt2}\right|+C$.

2068. $\ln\frac{x}{\left(1+\sqrt[10]{x}\right)^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$.

2069. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+48\sqrt[12]{x}+3\ln\left(1+\sqrt[12]{x}\right)+$

$+\frac{33}{2}\ln\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2\right)-\frac{171}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt7}+C$.

2070. $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{3/2}-\frac{1}{8}(x+1)^{4/3}+\frac{1}{7}(x+1)^{7/6}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{5/6}-\frac{1}{4}(x+1)^{2/3}\right]+C$.

2071. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$.

2072. $\left(\sqrt{x}-2\right)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$.

2073. $6\sqrt[6]{(1+x)^2}\left[\frac{(1+x)^2}{16}-\frac{1+x}{5}+\frac{\sqrt{1+x}}{7}+\frac{1}{4}\right]+C$.

2074. $\ln\frac{\left|u^2-1\right|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt3}+C$, где $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

2075*. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C$. Умножить числитель и знаменатель дроби на $\sqrt[4]{x-1}$ и вынести множители за знак радикала.

2076. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$.

2077. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$.

2078. $\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)-\frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$

2079. $\frac{1}{8}\sqrt[4]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$.

2080. $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, где $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$.

2081. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$. **2082.** $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C$.

2083. $\frac{3}{7}\left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

2084. $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, где $u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$.

2085. $\frac{1}{5}\ln\frac{|u-1|}{\sqrt{u^2+u+1}}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{1+2u}{\sqrt{3}}+C$, где $u=\sqrt[3]{1+x^5}$.

2086. $C-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{x\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+x^3}+x^2}\right|$.

2087. $C-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}$.

2088. $\frac{u}{2(u^3+1)}-\frac{1}{6}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}+C$, где $u=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}$.

2089. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{u^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{u^4}}{4}\right]+C$, где $u=1+\sqrt[4]{x}$.

2090. $\frac{1}{15}\cos^3 x\left(3\cos^2 x-5\right)+C$. **2091.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$.

2092. $\ln|\operatorname{tg} x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$. **2093.** $\operatorname{tg} x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{3}{2}x+C$.

2094. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x\right)+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$. **2095.** $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$.

2096. $\frac{1}{\cos x-1}+C$. **2097.** $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}+C$.

2098. $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 2x\left(\cos^4 x+\frac{5}{4}\cos^2 x+\frac{15}{8}\right)+C$.

2099. $x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$. **2100.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$.

2101. $x-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+C$.

2102. $C-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2103.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\right|+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$.

2104. $C-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x}$. **2105.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. **2106.** $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}{2}\right|+C$.

2107. $\ln\frac{|C\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}}$. **2108.** $\ln\frac{|C\sin x|}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}$. **2109.** $\frac{1}{2}\left[x+\ln|\sin x+\cos x|\right]+C$.

2110. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. **2111.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

2112. $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

2113. $\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{4}-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x|+C$.

2114. $\frac{4}{25}x-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+C$.

2115. $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\sin 2x)}+\frac{4}{15\sqrt{15}}\arcsin\frac{4\sin 2x+1}{4+\sin 2x}+C$.

2116. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$. **2117.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x)+C$. **2118.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)+C$.

2119. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right)+C$. **2120.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{a\operatorname{tg} x}{b}+C$.

2121. $C-\frac{1}{2}\left[\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right]$. **2122.** $\ln\frac{\left|\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1\right|}{\sqrt[6]{\operatorname{tg}^{2/3} x+\operatorname{tg}^{1/3} x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{3}}+C$.

2123. $2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ для значений x, удовлетворяющих неравенству $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\geq 0$, и $-2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C$ для значений x, удовлетворяющих неравенству $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\leq 0$. **2124.** $2\sqrt{\operatorname{tg} x}+C$. **2125*.** $C-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}$. (Положить $x=\operatorname{ctg} x$.) **2126.** $4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}+C$. **2127.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}\right)+C$.

2128. $2\arcsin\sqrt{\sin x}+C$. **2129.** $C-\frac{1}{3}\operatorname{tg} x\left(2+\operatorname{tg}^2 x\right)\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}$.

2130. $\frac{4}{\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\ln\frac{1+\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\frac{x}{2}}}+C$.

2131. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x}\right)+\arcsin(\sin x-\cos x)\right]+C$.

2132. $\operatorname{sh} x+C$. **2133.** $\operatorname{ch} x+C$. **2134.** $\operatorname{th} x+C$. **2135.** $x+C$.

2136. $\frac{1}{4a}\operatorname{sh} 2ax-C$. **2137.** $\frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x-x}{2}+C$. **2138.** $x-\operatorname{th} x+C$.

2139. $x-\operatorname{cth} x+C$. **2140.** $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch} x+C$.

2141. $\operatorname{sh} x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+C$. **2142.** $x-\operatorname{th} x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x+C$.

2143. $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x+C$. **2144.** $\ln|\operatorname{sh} x|-\frac{1}{2}\operatorname{cth}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{cth}^4 x+C$.

2145. $\ln|\operatorname{th} x|+C$. **2146.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C$. **2147.** $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}+C$.

2148. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\operatorname{th} x}}{\left|1-\sqrt{\operatorname{th} x}\right|}-\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{th} x}+C$. **2149.** $x\operatorname{th} x-\ln\operatorname{ch} x+C$.

2150. $C-\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3\operatorname{sh}^3 x}$. **2151*.** $\ln\frac{|cx|}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}$. (Можно применить подстановку, например, $x=\frac{1}{t}$.) **2152.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C$. **2153.** $\arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}+C$.

2154. $C-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt2}{x}+\frac{1}{2\sqrt2}\right|$. **2155.** $\ln\left|x+1+\sqrt{2x+x^2}\right|-\frac{4}{x+\sqrt{2x+x^2}}+C$.

2156. $C-\frac{1}{\sqrt3}\ln\left|\frac{3+2x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{x-1}\right|$. **2157.** $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$.

2158. $\frac12(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$.

2159. $\frac12\left(x-\frac12\right)\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt3}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt3}{2}(2x-1)\right|+C$.

2160. $\frac12\left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt5}\right]+C$.

2161. $C-\frac{3}{2\left(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right)}-\frac32\ln\left|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}\right|+2\ln\left|x-\sqrt{x^2-x+1}\right|$.

2162. $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$. **2163.** $\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$.

2164. $\frac12(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt2}+C$.

2165. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+C$.

2166. $C-\frac12(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\frac{x+1}{2}$.

2167. $\left(x^2-5x+20\right)\sqrt{x^2+4x+5}-15\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+C$.

2168. $\left(\frac13x^2-\frac56x+\frac16\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac52\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$.

2169. $\left(x^2+5x+36\right)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-7}\right|+C$.

2170. $\left(\frac14x^3-\frac76x^2+\frac{95}{24}x-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{35}{8}\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right)+C$.

2171. $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2}+\frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1}+C$. **2172.** $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

2173. $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C$. **2174.** $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}-\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C$.

2175. $C-\frac{1}{8(x-1)^8}-\frac{1}{3(x-1)^9}-\frac{3}{10(x-1)^{10}}-\frac{1}{11(x-1)^{11}}$.

2176. $\frac13\left[x^3+\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}\right]+C$. **2177.** $\frac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}+C$.

2178. $\frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+C$. **2179.** $\frac12\arcsin x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C$.

2180. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac18\ln\frac{|x-1|(x+2)^{32}}{|x+1|^3}+C$. **2181.** $\frac14\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac12\operatorname{arctg}x+C$.

2182. $\frac38\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4\left(x^4-1\right)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **2183.** $2\sqrt{x+1}\,[\ln|x+1|-2]+C$.

2184. $\left(\frac12x+\frac34\right)\cos 2x+\left(\frac12x^2+\frac32x+\frac94\right)\sin 2x+C$.

2185. $x^2\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x+C$.

2186. $x\operatorname{arctg}\left(1+\sqrt x\right)-\sqrt x+\ln\left|x+2\sqrt x+2\right|+C$.

2187. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\arcsin x}{x}+C$. **2188.** $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+C$.

2189. $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120\right)+C$.

2190. $e^{3x}\left(\frac13x^3-x^2+\frac23x+\frac{13}{9}\right)+C$. **2191.** $2\left(\sin\sqrt x-\sqrt x\cos\sqrt x\right)+C$.

2192. $\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}+\frac34\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}+C$.

2193. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac12\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$.

2194. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^2}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

2195. $\left(\frac14x^3-\frac38x\right)\sqrt{x^2+1}+\frac38\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

2196. $3\left[\ln|u|-\ln\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)-\arcsin u\right]+C$, где $u=\sqrt[3]{x}$.

2197. $\frac{15x^2+5x-2}{4x^3\sqrt{1+x}}+\frac{15}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$. **2198.** $C-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$.

2199. $\frac{1}{15}\left[\frac12\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}-\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt3}\right]+C$, где $z=x^5$.

2200. $C-\frac14\ln\left|\operatorname{tg}\frac x2\right|+\frac{1}{8\sin^2\frac x2}$. **2201.** $\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt2}+C$.

2202. $\frac{2}{b^2\sin 2\alpha}\ln\left|\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin(\alpha+x)}\right|+C$, где $\alpha=\arccos\frac{a}{b}$, если $a^2<b^2$; $\frac{1}{a^2\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}+C$, где $\alpha=\arccos\frac{b}{a}$, если $a^2>b^2$.

2203. $\frac12x^2\ln\left(1+x^3\right)-\frac34x^2+\frac14\ln\left(x^2-x+1\right)-\frac12\ln(x+1)+\frac{\sqrt3}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}+C$.

2204. $\frac{x}{\ln x}+C$. **2205.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}+C$.

2206. $\frac12e^x\left[\left(x^2-1\right)\cos x+(x-1)^2\sin x\right]+C$. **2207.** $\frac{x^2e^{x^2}}{2}+C$.

2208. $\frac23\frac{\operatorname{tg}^2x-3}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}+C$. **2209.** $\frac14\left(\operatorname{tg}^4x-\operatorname{ctg}^4x\right)+2\left(\operatorname{tg}^2x-\operatorname{ctg}^2x\right)+6\ln|\operatorname{tg}x|+C$.

2210. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2x\right)+C$. **2211.** $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac x2\right|+C$.

2212. $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}}+\ln\left(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2x}+\operatorname{tg}x\right)+C$. **2213.** $\ln\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}+C$.

2214. $C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left[\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right]$. **2215.** $\frac{e^x}{1+x}+C$.

2216. $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$.

2217. $\frac14\ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{\operatorname{arctg}x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C$. **2218.** $C-\frac{\operatorname{arctg}x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{4}+\frac{x}{4\left(1+x^2\right)}$.

2219. $\frac{1}{4}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{\operatorname{arctg}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{4(x+1)}+C$.

2220. $x-\log_2\left|1-2^x\right|+\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{1-2^x}+\frac{1}{2(1-2^x)^2}+\frac{1}{3(1-2^x)^3}\right]+C$.

2221. $\operatorname{arctg}\left(e^x-e^{-x}\right)+C$. **2222.** $\ln\frac{1+e^x-\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}{1-e^x+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}+C$.

2223. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$.

2224. $\frac{35}{128}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{7}{128}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin^3 2x+\frac{1}{1024}\sin 8x+C$.

2225. $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}+C$. **2226.** $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C$.

2227. $C-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{ctg}2x\right)$. **2228.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. **2229*.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. (Разделить числитель и знаменатель на x^2 и применить подстановку $x+\frac{1}{x}=z$.)

2230. $e^{\sin x}(x-\sec x)+C$.

К главе VII

2231. $2\left(\sqrt{8}-1\right)/3$. **2232.** $7/72$. **2233.** $-5\left(\sqrt[5]{16}-1\right)$. **2234.** $7\frac{2}{3}$. **2235.** $\frac{T}{\pi}\cos\varphi$.

2236. 12. **2237.** $0{,}2(e-1)^5$. **2238.** $3\ln\frac{a}{b-a}$. **2239.** $1/4$. **2240.** $\pi/2$.

2241. $1+\frac{1}{2}\lg e$. **2242.** $e-\sqrt{e}$. **2243.** $\frac{\pi}{6a}$. **2244.** 2. **2245.** $4/3$. **2246.** $\ln\frac{3}{2}$.

2247. $0{,}2\ln\frac{4}{3}$. **2248.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **2249.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. **2250.** $\pi/6$. **2251.** 2. **2252.** $2/7$.

2253. $4/3$. **2254.** $\frac{\pi}{2a}$. **2255.** $-0{,}083\ldots$ **2256.** $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{3}-\operatorname{ctg}\alpha$. **2257.** 1.

2258. $-\sqrt{2}/8$. **2259.** $1-2/e$. **2260.** $\pi/2-1$. **2261.** $\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2262. $\pi^3-6\pi$. **2263.** $2-\frac{3}{4\ln 2}$. **2264.** 1. **2265.** $\frac{141a^2\sqrt[3]{a}}{20}$. **2266.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2267.** $\frac{e^2-3}{5}$.

2268. $6-2e$. **2269.** а) $\frac{8}{15}$; б) $\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\approx 0{,}429$; в) $\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}{11\cdot9\cdot7\cdot5\cdot3}=\frac{256}{693}$.

2270. $J_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}=\frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}$. Если n нечетное, то $J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\ldots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)(m+1)}$; если m нечетное, то $J_{m,n}=\frac{(m-1)(m-3)\ldots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\ldots(n+3)(n+1)}$; если m четное, n четное, то $J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\ldots3\cdot1\cdot(m-1)(m-3)\ldots3\cdot1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

2271. $(-1)^n n!\left[1-\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{1!}+1\right)\right]$. **2272.** $11/48+5\pi/64$.

2274*. $p!q!/(p+q+1)!$. Положить $x=\sin^2 z$ и использовать результат задачи 2270. **2275.** $7+2\ln 2$. **2276.** $2-\pi/2$. **2277.** $32/3$. **2278.** $5/3-2\ln 2$.

2279. $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$. **2280.** $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$. **2281*.** $\frac{5}{16}\pi$. Полагая $x=2z$, преобразуем данный интеграл в $2\int_0^{\pi/2}\sin^6 z\,dz$. **2282*.** $8/35$. Положить $x=z/2$.

2283. $\pi/32$. **2284.** $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **2285.** $8/15$. **2286.** $\sqrt{3}-\pi/3$.

2287. $\frac{1}{27}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$. **2288.** $3\pi/16$. **2289.** $\pi/16$. **2290.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$.

2291. $\pi/4$. **2292.** $\sqrt{3}/24$. **2293.** $\pi/8$. **2294.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **2295.** $\sqrt{6}/27+\pi\sqrt{2}/48$.

2296. $20/9$. **2297.** $2\ln\frac{6}{5}\approx0{,}365$. **2298.** $2/\pi$; $1/2$. **2299.** $2+\ln\frac{1}{e^2+1}$.

2300. При $a=e$. **2301.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. **2302.** $2/45$. **2303.** $8\ln3-15\ln2+\frac{13}{8}$.

2304. $\frac{6}{192}\left(5+7\sqrt[4]{125}\right)$. **2305.** $\pi/6$. **2306.** $a^2\left[\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

2307. $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$. **2308.** $848/105$. **2309.** $4-\pi$. **2310.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

2311. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **2312.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2313.** $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}$. **2314.** $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$.

2315. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$. **2316.** $\frac{19}{27}-\frac{5}{6\sqrt{6}}$. **2317.** $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$. **2319.** $x=2$. **2320.** $x=\ln4$.

2322*. Использовать соотношения $4-x^2\geq4-x^2-x^3\geq4-2x^2$, справедливые при $0\leq x\leq1$. **2323*.** Воспользоваться неравенствами $\sqrt{1-x^2}\leq\sqrt{1-x^{2n}}\leq1$, где $-1\leq x\leq1$ и $n\geq1$. **2324.** $1{,}098<I<1{,}110$. **2325*.** Воспользоваться для оценки снизу неравенством $1+x^4<\left(1+x^2\right)^2$, а для оценки сверху – неравенством Коши–Буняковского. **2326.** $I(1)\approx1{,}66$ – наибольшее значение, $I(-1/2)\approx-0{,}11$ – наименьшее значение. **2327.** Минимум при $x=1$ $(y=-17/22)$, точки перегиба $(2,-4/3)$ и $(4/3,-112/81)$. **2332*.** а) Заменить переменную интегрирования по формуле $t=-x$, разбить отрезок $[-a,-x]$ на два отрезка: $[-a,a]$ и $[a,-x]$, и учесть, что интеграл от нечетной функции на отрезке $[-a,a]$ равен нулю. б) Нет, если $a\neq0$; да, если $a=0$. **2333*.** Положить $t=1/z$. **2338.** Каждый из интегралов равен $\pi/4$. **2339*.** Положить $x=\pi-z$. Интеграл равен $\pi^2/4$. **2340*.** Разбить отрезок $[a,a+T]$ на отрезки $[a,0]$, $[0,T]$ и $[T,a+T]$, затем, пользуясь свойством $f(x)=f(x+T)$, показать, что $\int_0^a f(x)dx=\int_T^{a+T}f(x)dx$.

2341*. Требуемое для доказательства равенство эквивалентно равенству $\int_x^{x+T}f(z)dz=0$. Убедиться, что интеграл в левой части этого равенства не зависит от x, и затем положить $x=-\frac{T}{2}$. **2342.** $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$. **2343.** Подстановка $z=\operatorname{tg}(x/2)$ незаконна, потому, что функция $\operatorname{tg}(x/2)$ при $x=\pi$ разрывна. **2344*.** Для оценки I_n использовать, что I_n убывает при увеличении n. **2345*.** Заменить переменную интегрирования по формуле $z=\frac{x+t}{2}$ и учесть свойство интеграла от четной функции. **2346*.** Заменить переменную интегрирования по формуле $z=k\omega^2x^2$ и применить затем правило Лопиталя. **2347.** По правилу прямоугольников $\pi\approx2{,}904$ (с недостатком) и $\pi\approx3{,}305$ (с избытком). По формуле трапеций $\pi\approx3{,}104$. По формуле Симпсона $\pi\approx3{,}127$. **2348.** По правилу прямоугольников $\pi\approx3{,}04$ (с недостатком) и $\pi\approx3{,}24$ (с избытком).

По формуле трапеций $\pi \approx 3{,}140$. По формуле Симпсона $\pi \approx 3{,}1416$ (верны все знаки). **2349.** $\ln 10 \approx 2{,}31$, $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}433$. **2350.** $\approx 0{,}84$. **2351.** $\approx 1{,}09$. **2352.** $\approx 2{,}59$. **2353.** $\approx 0{,}950$. **2354.** $\approx 1{,}53$. **2355.** $\approx 0{,}985$. **2356.** $\approx 0{,}957$. **2357.** ≈ 239 м^2 (по формуле Симпсона). **2358.** $\approx 5{,}7$ м^2 (по формуле Симпсона). **2359.** ≈ 1950 мм^2. **2360.** $\approx 10{,}9$. **2361.** $\approx 36{,}2$. **2362.** $\approx 98{,}2$. **2363.** $\approx 9{,}2$. **2364.** ≈ 569 мм^2. **2365.** ≈ 138 мм^2. **2366.** $1/3$. **2367.** Расходится. **2368.** $1/a$. **2369.** Расходится. **2370.** π. **2371.** Расходится. **2372.** $1 - \ln 2$. **2373.** $1/2$. **2374.** $\pi/4$. **2375.** $\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$. **2376.** $1/2$. **2377.** $1/2$. **2378.** Расходится. **2379.** 2. **2380.** $1/2$. **2381.** $\frac{a}{a^2+b^2}$, если $a > 0$; расходится, если $a \le 0$. **2382.** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. **2383.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2384.** $\pi/2$. **2385.** $1/2 + \pi/4$. **2386.** Сходится. **2387.** Расходится. **2388.** Сходится. **2389.** Расходится. **2390.** Сходится. **2391.** Расходится. **2392.** Расходится. **2393.** Сходится. **2394.** $\pi/2$. **2395.** Расходится. **2396.** $8/3$. **2397.** $-1/4$. **2398.** 1. **2399.** Расходится. **2400.** 2. **2401.** π. **2402.** $\pi(a+b)/2$. **2403.** $33\pi/2$. **2404.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **2405.** $\pi/\sqrt{3}$. **2406.** $14\frac{1}{7}$. **2407.** $10/7$. **2408.** Расходится. **2409.** $6 - \frac{9}{2}\ln 3$. **2410.** $-2/e$. **2411.** Расходится. **2412.** Сходится. **2413.** Расходится. **2414.** Сходится. **2415.** Сходится. **2416.** Расходится. **2417.** Сходится. **2418.** Нет. **2419.** При $k < -1$ сходится, при $k \ge -1$ расходится.

2420. 1) При $k > 1$ сходится, при $k \le 1$ расходится. 2) $I = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, если $k > 1$; расходится, если $k \le 1$. **2421.** При $k < 1$ сходится, при $k \ge 1$ расходится. **2422.** Расходится при любом k. **2423.** Сходится при совместном выполнении неравенств $k > -1$ и $t > k + 1$. **2424.** При $m < 3$ сходится, при $m \ge 3$ расходится. **2425.** При $k < 1$ сходится, при $k \ge 1$ расходится. **2426.** π. **2427*.** $5\pi/3$. Положить $x = \cos\varphi$ и проинтегрировать по частям. **2428.** $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi - \frac{3}{2}\ln 2$.

2429. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$. **2430.** $n!$. **2431.** $n!/2$. **2432.** $(-1)^n n!$.

2433*. а) $\frac{(m-1)(m-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{m(m-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{(m-1)(m-3)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{m(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}$. Положить $x = \sin\varphi$.

2434*. $2\frac{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}$. Положить $x = \sin^2\varphi$. **2435.** $\frac{\pi - \alpha}{\sin\alpha}$ ($I = 1$ при $\alpha = \pi$).

2436*. Для доказательства равенства интегралов положить в одном из них $x = 1/z$. Затем вычислить их сумму, воспользовавшись тождеством

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right).$$

2437*. Представить интеграл в виде суммы двух интегралов: $\int\limits_0^{\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\infty}$; во втором интеграле положить $x = \frac{1}{y}$. **2438.** 0. **2439.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. **2440.** $\sqrt{\pi}$. **2441*.** $\sqrt{\pi}/4$. Интегрировать по частям. **2442.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2443.** $\pi/2$. **2444.** $\pi/2$, если $a > 0$; 0, если $a = 0$; $-\pi/2$, если $a < 0$. **2445.** $\pi/2$, если $a > b$; $\pi/4$, если $a = b$; 0, если $a < b$. **2446*.** $\pi/2$. Интегрировать по частям. **2447*.** $\pi/4$. Представить числитель в виде разности синусов кратных дуг. **2448*.** $\pi/4$. Воспользоваться методами решения задач 2446 и 2447.

2449*. Полагая $y = \frac{\pi}{2} - z$, приводим $\varphi(x)$ к виду $\varphi(x) = \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2-x} \ln\sin z\,dz$. В соответствии с формулой $\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$ разбиваем интеграл на три, из которых один находим непосредственно. Два других интеграла при помощи замены переменной сводятся к интегралам типа первоначального; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

2450. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **2451.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. **2452*.** $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Интегрировать по частям.

2453*. $\frac{\pi}{2}\ln 2$. Заменой переменной сводится к предыдущей задаче.

2454. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

К главе VIII

2455. $16/3$. **2456.** $9/4$. **2457.** $16p^2/3$. **2458.** $1/3$. **2459.** $\frac{32}{3}\sqrt{6}$. **2460.** $2\frac{1}{4}$. **2461.** $2\pi + \frac{4}{3}$ и $6\pi - \frac{4}{3}$. **2462.** $\frac{4}{3}\left(4\pi + \sqrt{3}\right)$ и $\frac{4}{3}\left(8\pi - \sqrt{3}\right)$.

2464. $\frac{b^2\varepsilon}{2} - ab\ln\frac{a+b}{a} = b\left[\varepsilon b - a\ln\left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\right)\right]$, где ε – эксцентриситет.

2465. $a^2\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]$; $a^2\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]$ и $a^2\left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\right]$.

2466. $S_1 = S_3 = \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3 - 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}46$; $S_2 = 2(\pi - S_1)$. **2467.** $\pi/2 - 1/3$. **2468.** $1/12$. **2469.** $1/12$. **2470.** $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$; $4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, если m и n оба четны; $2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, если m и n оба нечетны; $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, если m и n разной четности. **2471.** а) $3/14$; б) [illegible]. **2472.** 1 (фигура состоит из двух частей, площади которых равны между собой). **2473.** $8/15$. **2474.** $3\pi/4$. **2475.** $4/3$. **2476.** $\pi a^2/8$.

2477. $8\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$. **2478.** $e + 1/e - 2$. **2479.** 4. **2480.** $3\left(e^2 - 4\right)/e$. **2481.** $18/e^2 - 2$. **2482.** а) $b(\ln b - 1) - a(\ln a - 1)$; б) $b - a$. **2483.** $3 - e$. **2484.** $\frac{1-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$. **2485.** $2 - \sqrt{2}$. **2486.** $\frac{1}{3} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2487.** $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. **2488.** $\sqrt{2} - 1$. **2489.** $\pi/4$. **2490.** $3\pi a^2$. **2491.** $3\pi a^2/8$. **2492.** $6\pi a^2$. **2493.** 1) $\frac{\pi R^2}{a^2}(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n-1)(n-2)$. **2494.** 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $8/15$. **2495.** 1) $4\pi^3 a^2/3$; 2) $76a^2\pi^2/3$. **2496.** $\pi a^2/4$. **2497.** $\pi a^2/4$. **2498.** $18\pi a^2$. **2499.** $a^2(4-\pi)/8$. **2500.** $37\pi/6 - 5\sqrt{3}$. **2501.** $51\sqrt{3}/16$. **2502.** a^2. **2505*.** $a^2\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}$. Для построения линии следует рассматривать изменение φ от 0 до 3π. **2506.** $\pi/4$. **2507.** a^2. **2508.** $a^2\left(1 + \pi/6 - \sqrt{3}/2\right)$. **2509.** $\frac{\pi}{2}\left(a^2 + b^2\right)$. **2510.** a^2. **2511.** $\pi/\sqrt{2}$. **2512.** π. **2513.** 2. **2514.** $3\pi a^2$. **2515.** 4π. **2516*.** 1) $\sqrt{\pi}/2$; 2) $\sqrt{\pi}$. Воспользоваться тем, что $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ (интеграл Пуассона).

2517. $\pi a^2/2$. **2518.** $2-\pi/2$ и $2+\pi/2$. **2519.** $a\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

2520. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$. **2521.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **2522.** $\ln 3-\frac{1}{2}$.

2523. $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. **2524.** $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$. **2525.** $4\frac{20}{27}$. **2526.** $4a\sqrt{3}$.

2527. $\frac{\pi}{2}+2\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. **2528.** $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 3$. **2529.** 2. **2530.** 8.

2531. При $t=2\pi/3$ $\left\{x=a\left(2\pi/3-\sqrt{3}/2\right),\ y=3a/2\right\}$.

2532. При $t=\pi/6$ $\left(x=3\sqrt{3}R/8,\ y=R/8\right)$.

2533*. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Положить $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.

2534. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$. **2535.** $a\ln\frac{a}{b}$. **2536.** $\pi^2R/2$. **2537.** $\pi^3/3$. **2538.** $4\sqrt{3}$.

2541. $2\left(e^t-1\right)$. **2543.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **2545.** $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$.

2546. $8a$. **2547.** $\frac{3}{2}\pi a$. **2549.** k должно иметь вид $\frac{2N+1}{2N}$ или $\frac{2N}{2N-1}$, где N – целое число. **2550.** 4. **2551.** $\ln\frac{e}{2}$.

2554*. Доказать, что длина эллипса может быть записана в виде

$$L=4\int_0^{\pi/4}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt,$$

и применить теорему об оценке интеграла.

2555. 2π. **2556.** 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^2b$. **2557.** $\frac{8}{15}\pi h^2a$. **2558.** $\frac{\pi h^2}{3}(3a+h)$.

2559. $\frac{\pi}{4}\left(e^3-1\right)$. **2560.** $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+2(b-a)\right]$. **2561.** $3\pi/10$.

2562. $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$. **2563.** $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$. **2564.** $8\pi/3$. **2565.** $2\pi^2$.

2566. $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}\right]$. **2567.** 1) $\frac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{\pi^2}{16}$. **2568.** $5\pi^2a^3$.

2569. $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{8}{3}\right)$. **2570.** $\frac{32}{105}\pi a^3$. **2571.** $\frac{16\pi c^3}{105ab^2}$. **2572.** $\frac{\pi^2}{2}$. **2573.** $\pi e/2$.

2574*. 1) π; 2) $\pi\sqrt{\pi/2}$. См. указание к задаче 2516. **2575*.** $3\pi\sqrt{2\pi}/32$. См. указание к задаче 2516. **2576*.** π^2. Воспользоваться тем, что $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (интеграл Дирихле). **2577*.** $2\pi^2a^3$. Целесообразно перейти к параметрическому заданию, положив $x=2a\sin^2 t$, $y=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t}$. **2578.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **2579*.** $\frac{4}{3}\pi abc$. Применить формулу $V=\int_{x_1}^{x_2}S(x)dx$, где $S(x)$ – площадь поперечного сечения.

2580. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) 36π. **2581.** $v_1=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-11/3\right)$, $v_2=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+11/3\right)$.

2582. $v_1=v_2=4\pi\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-4\right)$, $v_3=8\pi\left(4-\sqrt{3}\right)$. **2583.** $8\pi\sqrt{6}/3$. **2584.** 8π.

2585*. $\frac{2}{3}R^2H=400$ см³. Принять за ось абсцисс ось симметрии основания.

2586. $\frac{4}{15}abH=128$ см³. **2587.** $\frac{2}{3}abH=133\frac{1}{3}$ см³. **2588*.** $\frac{2}{3}\pi R^2H$. Площадь

симметричного параболического сегмента равна $\frac{2}{3}ah$, где a – основание сег-
мента, а h – «стрелка». **2589***. $\frac{R^2H}{6}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$ и $\frac{R^2H}{6}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. (См. указание к зада-
че 2588.) **2590.** $8a^3/3$. **2591.** $8\pi r^3/3$. **2592.** $\frac{16}{3}R^3$. **2593.** $\frac{4}{3}R^2H$. **2594.** $\frac{24}{5}\pi a^2$.
2595. $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+a^4)^3}-1\right)$. **2596.** $\frac{\pi e^2}{4}\left(e^2-e^{-2}+4\right)$. **2597.** $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ и
$2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, где ε – эксцентриситет эллипса. **2598.** $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$.
2599. $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$. **2600.** $3\pi a^2$. **2601.** $\pi a^2\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$. **2602.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$.
2603. $\frac{12}{5}\pi a^2$. **2604.** $8\pi a^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **2605.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2606.** $4\pi^2r^2$. **2607.** $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.
2608. $\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. **2609.** $4\pi a^2$. **2610.** $ah^2/2$. **2611.** $a^3/6$, $a^3/6$,
$a^3\sqrt{2}/12$. **2613.** Центр масс лежит на оси симметрии сегмента на расстоянии
$\frac{2}{5}h$ от основания. **2614.** Для $S_1: \xi=\frac{3}{5}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$; для $S_2: \xi=\frac{3}{10}a$, $\eta=\frac{3}{4}b$. **2615.**
$\xi=0$, $\eta=2r/\pi$. **2616.** $\xi=0$, $\eta=4r/3\pi$. **2617.** Центр масс лежит на биссек-
трисе центрального угла, стягивающего дугу, на расстоянии $2r\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от центра.
2618. $\xi=a/5$, $\eta=a/5$. **2619.** $\xi=4a/(3\pi)$, $\eta=4b/(3\pi)$. **2620.** $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, где
ε – эксцентриситет эллипса. **2621.** $\xi=\pi/2$, $\eta=\pi/8$. **2622.** $\pi/2+4/5$.
2623. $\pi/12+\sqrt{3}/8$. **2624.** $3/20$. **2625.** $\xi=5a/8$, $\eta=0$. **2626.** $\xi=0$, $\eta=a\frac{e^4+4e^2-1}{4e\left(e^2-1\right)}$.
2628. $\xi=\pi a$, $\eta=4a/3$. **2629.** $\xi=\pi a$, $\eta=5a/6$. **2630.** $\xi=2a/5$, $\eta=2a/5$.
2631. $\xi=256a/(315\pi)$, $\eta=256a/(315\pi)$. **2633.** $\xi=6a\left(4-\pi^2\right)/\pi^2$, $\eta=2a\left(\pi^2-6\right)/\pi^2$.
2634. Центр масс лежит на оси симметрии сектора на расстоянии $\frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ от
центра круга. **2635.** $\xi=5a/6$, $\eta=0$. **2636.** $\xi=\sqrt{2}\pi a/8$, $\eta=0$.
2638. $\xi=-\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$, $\eta=\frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$. **2639.** $\xi=4a/5$, $\eta=4a/5$. **2640.** $3R/8$.
2641. Центр масс находится на оси симметрии на расстоянии $R/2$ от центра.
2642. $H/3$, $\frac{H\sqrt{R^2+H^2}}{3\left(R+\sqrt{R^2+H^2}\right)}$, $H/4$. **2643.** $h/3$. **2644.** $\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$.
2645. $\frac{\pi R^3}{2}=M\frac{R^2}{2}$ (M – масса полуокружности). **2646.** $\frac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}$.
2647. $I_x=\frac{256}{15}a^3$; $I_y=16a^3\left(\pi^2-\frac{128}{45}\right)$. **2648.** $ab^3/3$.
2649. 1) $ah^3/12$; 2) $ah^3/4$; 3) $ah^3/36$. **2650.** $\pi R^4/8$. **2651.** $\pi R^4/2$.
2652. $\pi ab^3/4$ и $\pi ba^3/4$. **2653.** $\pi R^4H/2$. **2654.** $\pi R^4H/10$. **2655.** $8\pi R^5/15$.
2656. $8\pi ab^4/15$, где $2a$ – величина оси, вокруг которой происходит вращение.
2657. $\pi R^4H/6$. **2658.** $56\pi/15$. **2659.** 1) $I_x=\pi\left(e^4-1\right)/8$; 2) $I_y=4\pi(3-e)$.
2660. MR^2, где M – масса боковой поверхности цилиндра. **2661.** $MR^2/2$.
2662. $2MR^2/3$. **2663.** $9\pi a^3/2$. **2664.** $6\pi^2ab^2$. **2665.** Объем $3\sqrt{2}\pi^2a^3/8$, поверх-
ность $6\sqrt{2}\pi a^2$. **2666.** Объем $12\pi^3a^3$, поверхность $32\pi^2a^2$. **2667.** Ось вращения

должна быть перпендикулярна к диагонали квадрата; ось вращения должна быть перпендикулярна к медиане. 2668. $\approx 23{,}7$ м.

2669. $x_2 = x_1 + \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \varphi_0\right)$.

2670. $\frac{kmM}{a(a+l)}$, $\frac{a+l}{a}M$, $\frac{kmM}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$. 2671. $\frac{2kmM}{\pi r^2}$.

2672. $kmMa / \sqrt{\left(R^2 + a^2\right)^3} = kmM\cos^3\varphi / a^2$, где φ – угол между прямыми, соединяющими точку C с центром кольца и с любой из точек кольца; kmM/R.

2673. $\frac{2kmM}{R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. 2674. $2\pi kmo$. 2675*. $2\pi km\gamma h\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\right) =$ $= 2\pi km\gamma h(1-\cos\alpha)$, где α – угол между образующей конуса и его осью. Воспользоваться решением задачи 2673. 2676. $2km\gamma$. 2678*. $\frac{kM^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$. Сначала подсчитать силу взаимодействия элемента dx первого стержня со вторым стержнем (воспользоваться результатом задачи 2670), а затем найти всю силу взаимодействия. 2679. $g^2M^3/\left(6m^2\right)$. 2680. $\frac{\pi H^2 gd}{12}\left(R^2 + 2Rr + 3r^2\right)$.

2681. $\approx 1{,}63\cdot 10^{13}$ Дж. 2682. $3{,}5325\cdot 10^6$ Дж. 2683. $\pi gdR^2H^2/12$, $\pi gdR^2H^2/4$. Величина работы в ответах к задачам 2683–2686 получится в джоулях, если брать расстояние в метрах, а плотность – в кг/м³. 2684. $\pi gdR^4/4 \approx 1018$ Дж.

2685. $\pi gdR^2H^2/6 \approx 2{,}68\cdot 10^5$ Дж. 2686. $\frac{4}{15}gdabH^2 \approx 2{,}4\cdot 10^3$ Дж.

2687. $Sl^3\omega^2\gamma/6 \approx 4{,}2$ Дж. 2688. $ab^3d\gamma\omega^2/6 \approx 11{,}6$ Дж. 2689. $ah^3d\omega^2\gamma/24 \approx 0{,}5$ Дж.

2690. $ha^3d\omega^2\gamma/60 \approx 0{,}15$ Дж. 2691. $\pi R^4H\omega^2\gamma/4$. 2692. $MR^2\pi^2n^2/3600$; $MR^2(3\pi - 8)\pi n^2/3600$. 2693. а) $ah^2/6$; б) в два раза. 2694. $a\sqrt{2}/2$.

2695. $2{,}22\cdot 10^6$ Н. 2696. $\frac{2}{3}gda^2b$. 2697. $abgd\left(h + \frac{b}{2}\sin\alpha\right)$.

2699. а) $gd^2H^2S/2 = 320$ Дж; б) $\frac{1}{2}gSH^2(1-d)^2 = 20$ Дж. 2700. $\frac{1}{4}g\pi R^4$.

2701. $\approx 0{,}206$ см². 2702. а) $\approx 33{,}2$ с; б) $\approx 64{,}6$ с. 2703. ≈ 1 час 6 мин 53 с.

2704. $\frac{2bL\sqrt{2g}}{3S\sqrt{g}}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

2705. $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}\left[(H+h)^{3/2} - H^{3/2}\right]$; при $H = 0$: $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}h^{3/2} = \frac{2\sqrt{2g}}{3}S\sqrt{h}$, где S – площадь щели. 2706. а) $\approx 2{,}4$ с; б) $\approx 6{,}3$ с; в) ≈ 58 с; г) при $t \to \infty$.

2707. ≈ 84 Дж. 2708. 1) а) $\approx 71{,}6$ Дж; б) ≈ 166 Дж; в) ≈ 238 Дж; 2) при неограниченном расширении газа работа неограниченно увеличивается.

2709. $1{,}6\cdot 10^4$ Дж. 2710. ≈ 82 мин. 2711. Немного больше 5°. 2712. $\frac{1}{2\pi m_0}$.

2713. а) $4\cdot 10^{-6}$ Дж; б) $6\cdot 10^{-6}$ Дж. 2714. 5 см. 2715. ≈ 946 Кл.

2716. ≈ 1092 Кл. 2717. ≈ 5110 Кл. 2718. $E_0^2/2$. Эффективное напряжение переменного тока равно $E_0/\sqrt{2}$. 2719. $\frac{E_0I_0}{2}T\cos\varphi_0$. 2720. ≈ 7 мин.

2721. $\approx 2{,}915$ л. 2722. а) $H_1 = H\frac{\ln a - \ln c}{\ln a - \ln b} \approx 15$ см; б) $\approx 0{,}125\%$. 2723. 1/1024 от первоначального количества. 2724. $\approx 2{,}49$ г. 2725. 5/9 г. 2726. $\approx 87{,}5$ мин.

К главе IX

2727*. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $S = 1$. Представить каждый член ряда в виде суммы двух слагаемых. 2728. $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$, $S = \frac{1}{2}$. 2729. $S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$, $S = \frac{1}{3}$.

2730. $S_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$, $S = \frac{11}{18}$.

2731. $S_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right)$, $S = \frac{23}{90}$.

2732. $S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$, $S = \frac{1}{4}$. 2733. $S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2\cdot 3^n}$, $S = \frac{3}{2}$.

2734. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$. 2735. $S_n = \frac{1}{8}\left[1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$, $S = \frac{1}{8}$.

2736. $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$, $S = \frac{\pi}{4}$. 2737. Сходится. 2738. Сходится. 2739. Расходится.
2740. Сходится. 2741. Расходится. 2742. Расходится. 2743. Сходится.
2744. Расходится. 2745. Расходится. 2746. Сходится. 2747. Сходится.
2748. Расходится. 2749. Сходится. 2750. Расходится. 2751. Сходится.
2752. Сходится. 2753. Расходится. 2767. Сходится. 2768. Расходится.
2769. Сходится. 2770. Сходится. 2771. Сходится. 2772. Расходится.
2773. Расходится. 2774. Сходится. 2775. Расходится. 2776. Расходится.
2777. Расходится. 2778. Сходится. 2779. Сходится. 2780. Расходится.
2781. Сходится. 2782. Расходится. 2783. Сходится. 2784*. Расходится. Воспользоваться формулой

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha\,\sin\frac{k}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

или неравенством $\sin x > 2x/\pi$, если $0 < x < \pi/2$.

2790. Сходится, но не абсолютно. 2791. Сходится абсолютно. 2792. Сходится, но не абсолютно. 2793. Сходится абсолютно. 2794. Сходится абсолютно.
2795. Расходится. 2796. Сходится, но не абсолютно. 2797. Сходится абсолютно.
2798. Сходится, но не абсолютно. 2799. Расходится. 2802. $-1 < x < 1$.
2803. $\frac{1}{e} < x < e$. 2804. $-1 < x < 1$. 2805. $-1 \le x \le 1$. 2806. $-1 \le x < 1$.
2807. $x < -1$ и $x > 1$. 2808. $-1 < x < 1$. 2809. $-1 \le x < 1$. 2810. $x \ne \pm 1$.
2811. При любом x. 2812. $-2 < x < 2$. 2813. При любом x. 2814. $x > 0$.
2815. $x > 0$. 2816. $x \ge 0$. 2822. 11 членов. 2823*. Воспользоваться неравенством $\ln(1+\alpha) \le \alpha$. 2825. $f(0) = 1/9$; $f(\pi/2) = -1/101$; $f(\pi/3) = 44/1001$; $f(1) \approx 0{,}049$; $f(-0{,}2) \approx 0{,}108$. 2827. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. 2828. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
2829. $(x+1)\ln(x+1) - x$. 2830. 1/2. 2831. 0,2. 2832*. $\ln\frac{2}{\pi}$. Использовать соотношение $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\ldots = \frac{\sin x}{x}$. 2833*. $\pi^3/12$. Воспользоваться формулой $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 2834. 1) $\frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$. 2835. $\ln 2$. 2836. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
2837. Данный ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком интервале. Действительно, общий член ряда производных имеет вид $\pi\cos\left(2^n\pi x\right)$. Сколь бы мал ни был интервал (α, β) и где бы на числовой оси он ни лежал, всегда внутри него найдутся числа вида $k/2^N$, где k – целое, а N – достаточно боль-

шое целое положительное число. Но при $x = k/2^N$ ряд производных расходит-ся, так как для всех $n > N$ члены его становятся равными π.

2838. $\frac{1}{(1-x)^2}$ и $\frac{1}{(1-x)^3}$. **2841.** $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots$

2842. $1+\frac{3}{2}\left[(x-1)+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{2^2}\frac{(x-1)^3}{3!}+\ldots(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{2^{n-1}}\frac{(x-1)^n}{n!}+\ldots\right]$.

2843. $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$

2844. $1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$

2845. $1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$ **2846.** $x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\ldots$

2847. $\cos\alpha\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right]-$

$-\sin\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right]$.

2848. $x+x^2+\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\ldots+\sqrt{2^n}\sin\frac{\pi n}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$

2849. $1-\frac{4x^4}{4!}+\frac{4^2x^8}{8!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{4^{n-1}x^{4(n-1)}}{(4n-4)!}+\ldots$

2850. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+\ldots$ **2851.** $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$.

2852. $1-\frac{nx^2}{2}+\frac{3n^2-2n}{24}x^4+\ldots$ **2853.** $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\ldots$

2854. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}+\ldots$ **2855.** $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$

2856. $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots$ **2857.** $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$

2858. $1+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{12}}{5!}+\ldots+\frac{x^{6(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$ **2859.** $\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}+\ldots$

2860. $1-\left[x^2-\frac{(2x)^4}{2\cdot4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]$.

2861. $1-\frac{x^2}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-1)!}+\ldots$ **2862.** $-\frac{2x^3}{3!}+\frac{4x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{2nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$

2863. $\ln 10+\left[\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot10^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot10^n}+\ldots\right]$.

2864. $x^2-\frac{x^3}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n}+\ldots$

2865. $1+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)x^{2n}}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot2n}+\ldots\right]$.

2866. $2-2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right]$.

2867. $1-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1\cdot1}{3^2\cdot2!}x^6+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^{3n}+\ldots\right]$.

2868. $x^2+\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^6+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2}+\ldots\right]$.

2869. $1+2^2x+\ldots+n^2x^{n-1}+\ldots$, $S=12$. **2870.** 1) -7; 2) $105/16$; 3) $10!/4!$; 4) $8/3$.
2871. $1/6$. **2872.** $1/4$. **2873.** 1. **2874.** $1/2$. **2875.** $2/3$. **2876.** $1/3$. **2877.** $1/60$.
2878. $-1/10<x<1/10$. **2879.** $-1<x\le1$. **2880.** $-10\le x<10$. **2881.** $x=0$.
2882. $-\sqrt{2}/2<x<\sqrt{2}/2$. **2883.** $-\infty<x<+\infty$. **2884.** $-1/3<x<1/3$.
2885. $-1\le x\le1$. **2886.** $-1/e\le x<1/e$. **2887.** $x=0$. **2888.** $-1\le x<1$.
2889. $-1/e<x<1/e$.

2890. $x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$ $(-1\le x\le1)$.

2891. $x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ $(-1<x<1)$.

2892. $x^2+\frac{x^4}{2\cdot3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}+\ldots$ $(-1\le x\le1)$.

2893. $4\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots+\frac{nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\right)$ $(-\infty<x<+\infty)$. $1/2e$.

2894. 1,39, погрешность 0,01. **2895.** 0,3090, погрешность 0,0001. **2896.** 2,154, погрешность 0,001. **2897.** 7,389. **2898.** 1,649. **2899.** 0,3679. **2900.** 0,7788. **2901.** 0,0175. **2902.** 1,000. **2903.** 0,17365. **2904.** 0,9848. **2905.** 3,107. **2906.** 4,121. **2907.** 7,937. **2908.** 1,005. **2909.** 3,017. **2910.** 5,053. **2911.** 2,001. **2912.** 1,0986. **2913.** 0,434294. **2914.** 0,6990.

2915. $1+2x+\frac{5}{2}x^2+\ldots+\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]x^{n-1}+\ldots$

2916. $x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\ldots+(-1)^{n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right]x^n+\ldots$

2917. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{6!}+\ldots$ **2918.** $-\frac{x}{2}+\frac{5x^3}{32}+\ldots$ **2919.** $x-x^2+2x^6+\ldots$

2920. $C+x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$.

2921. $C+\ln|x|-\frac{x^2}{2\cdot2!}+\frac{x^4}{4\cdot4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}+\ldots$ $(-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty)$.

2922. $C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot2!}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot n!}+\ldots$ $(-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty)$.

2923. $C-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot3!}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)!}+\ldots$ $(-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty)$.

2924. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}+\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$.

2925. $x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\ldots$ $(-1\le x\le1)$.

2926. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$ $(-1\le x\le1)$.

2927. $x+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot4}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+\ldots$ $(-1\le x\le1)$.

2928. $x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{19}}{19}+\ldots+\frac{x^{9n-8}}{9n-8}+\ldots$ $(-1\le x\le1)$.

2929. $\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4\cdot8}\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{3\cdot7\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{4^n\cdot n!}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$ $(-1\le x\le1)$.

2930. 0,3230, погрешность 0,0001. **2931.** 0,24488, погрешность 0,00001. **2932.** 0,4971, погрешность 0,0001. **2933.** 3,518, погрешность 0,001. **2934.** 0,012, погрешность 0,001. **2935.** 21,831. **2936.** 0,487. **2937.** 0,006. **2938.** 0,494. **2940.** 3,141592654.

2941. $x+\frac{2}{1\cdot3}x^3+\frac{2^2}{1\cdot3\cdot5}x^5+\ldots+\frac{2^{n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}x^{2n-1}+\ldots$

2942*. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^n}+\ldots$ Представить x^x в форме $e^{x\ln x}$, разложить в ряд по степеням $x\ln x$ и проинтегрировать выражения вида $x^n\ln^n x$. **2943.** 0,6449. **2944.** 0,511. **2945.** 1,015. **2946*.** 3,71. Вычислить площадь посредством формулы $S=4\int_0^1\sqrt[4]{1-x^4}\,dx$ неудобно, потому что соответствующий ряд при $x=1$ сходится медленно. Следует вычислить площадь сектора, ограниченного линией, осью ординат и биссектрисой первого координатного угла. Это дает ряд быстро сходящийся. **2947.** 0,2505. **2948.** 3,821. **2949.** 0,119. **2950.** 1,225. **2951.** (0,347; 2,996). **2952.** (1,71; 0,94).

К главе X

2953. $z=\frac{a}{3}\left(x^2y-y^3\right)$. **2954.** $S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)}$.

2955.

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5
0	1	3	5	7	9	11
1	−2	0	2	4	6	8
2	−5	−3	−1	1	3	5
3	−8	−6	−4	−2	0	2
4	−11	−9	−7	−5	−3	−1
5	−14	−12	−10	−8	−6	−4

2956.

$y \backslash x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
0,1	0,10	0,14	0,22	0,32	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,90	1,00
0,2	0,20	0,22	0,28	0,36	0,45	0,54	0,63	0,73	0,83	0,93	1,01
0,3	0,30	0,32	0,36	0,42	0,50	0,58	0,67	0,76	0,85	0,95	1,04
0,4	0,40	0,41	0,45	0,50	0,57	0,64	0,72	0,81	0,89	0,98	1,08
0,5	0,50	0,51	0,54	0,58	0,64	0,71	0,78	0,86	0,94	1,03	1,12
0,6	0,60	0,61	0,63	0,67	0,72	0,78	0,85	0,92	1,00	1,08	1,16
0,7	0,70	0,71	0,73	0,76	0,81	0,86	0,92	0,99	1,06	1,14	1,22
0,8	0,80	0,81	0,82	0,85	0,89	0,94	1,00	1,06	1,13	1,20	1,28
0,9	0,90	0,91	0,92	0,95	0,98	1,03	1,08	1,14	1,20	1,27	1,34
1	1,00	1,00	1,02	1,04	1,08	1,12	1,16	1,22	1,28	1,34	1,41

2957. 1) 9/16; 2) 1; 3) 16; 2; 2. **2958.** $\frac{\varphi(a)\psi(1/a)-\psi(a)\varphi(1/a)}{\varphi(1)\psi(1)}$; $a-\frac{1}{a}$. **2959.** Вторая функция изменяется быстрее. **2960.** Парабола второго порядка; 1) нет; 2) нет. **2961*.** Положить $m=1/x$. **2965.** Функция не будет однозначной. **2966.** 1) 1; 2) 1; 3) 1/5; 4) не определена; 5) 1. **2967.** $z=(x+y)^{x-y}+(x+y)^{y-x}$ $(x+y>0)$; z будет рациональной функцией от u и v, но не от w, t, x и y. **2968.** $z=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

2969. $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-\frac{x^2+y^2+z^2}{4}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+3(x+y+z)^4\right]$; u является целой рациональной функцией относительно ξ и η, x, y и z, но не относительно u и φ. **2970.** $z=\left(\frac{u+\xi}{u-\xi}\right)^v+u$; $u=x^2+y^2$; $v=xy$. **2971.** $x=\text{const}$ – парабола, $y=\text{const}$ – парабола, $z=\text{const}\neq 0$ – гипербола, $z=0$ – пара прямых. **2972.** $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ – прямые, $z=\text{const}\neq 0$ – гипербола, $z=0$ – пара прямых. **2973.** $x=\text{const}$ – парабола, $y=\text{const}$ – кубическая парабола, $z=\text{const}\neq 0$ – кривая третьего порядка, $z=0$ – полукубическая парабола. **2974.** $z=\text{const}>0$ – эллипс, $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ – кривые третьего порядка (при $x=0$ и $y=0$ – полукубические параболы). **2975.** $0<y<2$; $-1<y-x/2<0$. **2976.** $x^2\le y\le\sqrt{x}$. **2977.** $0<y<x\sqrt{3}$; $y<(a-x)\sqrt{3}$. **2978.** $(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$; $-\infty<z<+\infty$. **2979.** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$. **2980.** $x^2+y^2<4R^2$. **2981.** $v=\frac{1}{6}xy\left(2R\pm\sqrt{4R^2-x^2-y^2}\right)$; функция не однозначна. Область определения функции $x^2+y^2\le 4R^2$; $x>0$, $y>0$. **2982.** $S=xy$ при $0<x\le 1$, $0<y\le 1$; $S=x$ при $0\le x\le 1$, $1\le y$; $S=y$ при $1\le x$, $0\le y\le 1$; $S=xy-x-y+2$ при $1\le x\le 2$, $1\le y\le 2$; $S=x$ при $1\le x\le 2$, $2\le y$; $S=y$ при $1\le x$, $1\le y\le 2$; $S=2$ при $2\le x$, $2\le y$. **2983.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$. **2984.** $y^2>4x-8$.

2985. Вся плоскость, за исключением точек окружности $x^2+y^2=R^2$.

2986. Внутренняя часть правого вертикального угла, образованного биссектрисами координатных углов, включая сами биссектрисы $x+y\ge 0$, $x-y\ge 0$. **2987.** То же, что в задаче 2986, но без границ. **2988.** Внутренняя часть правого и левого вертикальных углов, образованных прямыми $y=1+x$ и $y=1-x$, включая эти прямые, но без точки их пересечения: $1-x\le y\le 1+x$ $(x>0)$, $1+x\le y\le 1-x$ $(x<0)$ (при $x=0$ функция не определена). **2989.** Часть плоскости, лежащая внутри первого и третьего координатных углов (без границ). **2990.** Замкнутая область, лежащая между положительной полуосью абсцисс и параболой $y=x^2$ (включая границу): $x\ge 0$, $y\ge 0$; $x^2\ge y$. **2991.** Кольцо между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$, включая сами окружности: $1\le x^2+y^2\le 4$. **2992.** Часть плоскости, лежащая внутри параболы $y^2=4x$, между параболой и окружностью $x^2+y^2=1$, включая дугу параболы, кроме ее вершины, и исключая дугу окружности. **2993.** Часть плоскости, лежащая вне окружностей радиусов, равных единице, с центрами в точках $(-1,0)$ и $(1,0)$. Точки первой окружности принадлежат области, точки второй не принадлежат. **2994.** Только точки окружности $x^2+y^2=R^2$. **2995.** Вся плоскость, за исключением прямых $x+y=n$ (n – произвольное целое число, положительное, отрицательное или нуль). **2996.** Внутренность круга $x^2+y^2=1$ и кольца $2n\le x^2+y^2\le 2n+1$ (n – целое число), включая границы. **2997.** Если

$x \geq 0$, то $2n\pi \leq y \leq (2n+1)\pi$; если $x < 0$, то $(2n+1)\pi \leq y \leq (2n+2)\pi$ (n – целое число).

2998. $x > 0$; $2n\pi < y < 2(n+1)\pi$ (n – целое число). **2999.** Открытая область, заштрихованная на рис. 70, $y > x+1$ при $x > 0$; $x < y < x+1$ при $x < 0$. **3000.** Часть плоскости, заключенная между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и ее асимптотой, включая границу. **3001.** $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. **3002.** Часть пространства, заключенная между сферами $x^2+y^2+z^2 = r^2$ и $x^2+y^2+z^2 = R^2$, включая поверхность внешней и исключая поверхность внутренней сферы. **3003.** 2. **3004.** 0. **3005.** 0. **3006.** Функция не имеет предела при $x \to 0$, $y \to 0$. **3007.** 0. **3008.** 1. **3009.** а) $y = 0$ или $y = x^{\alpha}$ ($\alpha>1$), $x \to 0$ по произвольному закону; б) $y = x/3$, $x \to 0$ по произвольному закону. **3010.** Точка $(0, 0)$; вблизи этой точки функция может принимать сколь угодно большие положительные значения. **3011.** Все точки с целочисленными координатами. **3012.** На прямой $y = x$. **3013.** На прямых $x = m$, $y = n$ (m и n – целые числа). **3014.** На параболе $y^2 = 2x$. **3015.** 1) Непрерывна; 2) разрывна; непрерывна по x и y в отдельности; 3) непрерывна; 4) разрывна; 5) разрывна; 6) разрывна. Перейти к полярным координатам. **3016.** Окружности с центром в начале координат радиусов соответственно 1, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/3$, $1/2$. **3017.** Окружности, проходящие через точки A и B. **3025.** Прямые линии $y = ax+b$, где $a = \ln b$. **3026.** Концентрические сферы с центром в точке A и радиусами, равными 1, 2, 3, 4.

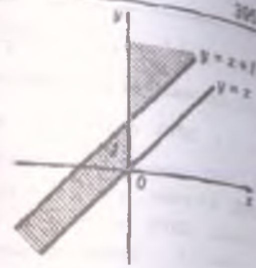

Рис. 70

3027. Эллипсоиды вращения с фокусами в точках A и B:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2} = \text{const}.$$

3028. Сферы $x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2$, где $c = e^u$. **3029.** Параболоиды вращения $x^2+y^2 = cz$. **3030.** 1) Плоскости $2x+3y-z = C$; 2) гиперболоиды вращения или конус $x^2+y^2-2z^2 = C$. **3032.** $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}$ при $T = T_0$. **3033.** $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ – скорость изменения температуры в данной точке; $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ – скорость изменения температуры в данный момент времени по длине (вдоль стержня). **3034.** $\frac{\partial S}{\partial h} = b$ – скорость изменения площади в зависимости от высоты прямоугольника; $\frac{\partial S}{\partial b} = h$ – скорость изменения площади в зависимости от основания прямоугольника.

3036. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$. **3037.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x$.

3038. $\frac{\partial\theta}{\partial x} = ae^{-t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial t} = -axe^{-t} + b$. **3039.** $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v} - \frac{v}{u^2}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2} + \frac{1}{u}$.

3040. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

3041. $\frac{\partial z}{\partial x} = 30xy\left(5x^2y-y^3+7\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3\left(5x^2y-y^3+7\right)^2\left(5x^2-3y^2\right)$.

3042. $\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. **3043.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

3044. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$. **3045.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}$.

3046. $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. **3047.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$.

3048. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

3049. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$.

3050. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$. **3051.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{y}e^{-x/y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-x/y}$.

3052. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+\ln y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y(x+\ln y)}$. **3053.** $\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{w}{v^2+w^2}$, $\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{v}{v^2+w^2}$.

3054. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

3055. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2}3^{-y/x}\ln 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x}3^{-y/x}\ln 3$.

3056. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(1+xy)^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y\ln(1+xy)$.

3057. $\frac{\partial z}{\partial x} = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$.

3058. $\frac{\partial z}{\partial x} = x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y x^{x^y}\ln^2 x$.

3059. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$.

3060. $\frac{\partial u}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x+z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x+y$.

3061. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3062. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2+3y-1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = z^2+3x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2yz+1$.

3063. $\frac{\partial w}{\partial x} = yz+vz+vy$, $\frac{\partial w}{\partial y} = xz+zv+vx$, $\frac{\partial w}{\partial z} = xy+yv+vx$, $\frac{\partial w}{\partial v} = yz+xz+xy$.

3064. $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(3x^2+y^2+z^2\right)e^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xye^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2xze^{x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$.

3065. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

3066. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x+y+z}$.

3067. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z}x^{y/z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z}x^{y/z}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}x^{y/z}\ln x$.

3068. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z}\ln x\ln y$.

3069. 2/5, 1/5. **3070.** 0, 1/4.

3071. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)]$, $\frac{\partial z}{\partial y} = (2x+y)^{2x+y}[1+\ln(2x+y)]$.

3072. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x\ln y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2$.

3073. $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{\sin \pi xy}(1 + \pi xy \cos \pi xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{\sin \pi xy}(1 + \pi xy \cos \pi xy)$.

3074. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2}}{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$.

3075. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^y}}{2x\left(1-x^y\right)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2\left(1+x^y\right)}$.

3076. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\sqrt{xy-x^2y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{\left(1+\sqrt{xy}\right)\sqrt{xy-x^2y^2}}$.

3077. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2+2xy}{\sqrt{1+\left(xy^2+yx^2\right)^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2+2xy}{\sqrt{1+\left(xy^2+yx^2\right)^2}}$.

3078. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{xy-x-y}{xy+x+y}}$.

3079. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right]}{\left(x^2+y^2\right)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x\left[\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)^2+2\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right]}{\left(x^2+y^2\right)\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}\right)\left(1+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$.

3080. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{4kx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{4ky}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{4kz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$.

3081. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

3082. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz(\sin x)^{yz-1}\cos x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = z(\sin y)^{yz}\ln\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y(\sin x)^{yz}\ln\sin x$.

3083. $\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{z} = \frac{2}{r\left(r^2-1\right)}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3084. $\frac{\partial w}{\partial x} = \left(2xy^2 - yzv\right)\operatorname{tg}^2\alpha$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \left(2x^2y - xzv\right)\operatorname{tg}^2\alpha$, $\frac{\partial w}{\partial z} = \left(2zv^2 - xyv\right)\operatorname{tg}^2\alpha$,
$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(2z^2v - xyz\right)\operatorname{tg}^2\alpha$, где $\alpha = x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv$.

3085. 4. **3086.** $\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{\substack{z=b\\t=a}} = \frac{3b}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$, $\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\substack{z=b\\t=a}} = -\frac{3a}{2}\sqrt{\frac{ab}{b^2-a^2}}$.

3087. 1 и −1. **3088.** $\sqrt{2}/2$. **3089.** 3/2. **3090.** −13/22. **3091.** 45°. **3092.** 30°.

3093. $\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. **3094.** $d_xz = \left(y^3 - 6xy^2\right)dx$, $d_yz = \left(3xy^2 - 6x^2y + 8y^3\right)dy$.

3095. $d_xz = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d_yz = \frac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **3096.** $d_xz = \frac{y\left(y^2-x^2\right)dx}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $d_yz = \frac{x\left(x^2-y^2\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

3097. $d_xu = \frac{3x^2dx}{x^3+2y^3-z^3}$, $d_yu = -\frac{6y^2dy}{x^3+2y^3-z^3}$, $d_zu = -\frac{3z^2dz}{x^3+2y^3-z^3}$.

3098. 1/270. **3099.** ≈ 0,0187. **3100.** 97/600.

3101. $xy\left[\left(2y^3 - 3xy^2 + 4x^2y\right)dx + \left(4y^2x - 3yx^2 + 2x^3\right)dy\right]$.

3102. $\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$. **3103.** $\frac{2(x\,dy-y\,dx)}{(x-y)^2}$. **3104.** $\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$. **3105.** $(x\,dy + y\,dx)\cos(xy)$.

3106. $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$. **3107.** $\frac{4xy(x\,dy-y\,dx)}{\left(x^2-y^2\right)^2}$. **3108.** $\frac{x\,dy+y\,dx}{1+x^2y^2}$.

3109. $x^{yz-1}(yz\,dx + zx\ln x\,dy + xy\ln x\,dz)$. **3110.** 0,08. **3111.** 0,25e. **3112.** 1/36.

3113. ≈ 7,5. **3114.** ≈ 0,005. **3115.** ≈ 1,08. **3116.** 5. **3117.** 1,8 ± 0,2.

3118. 4730 ± 100. **3119.** $2\delta_a = \frac{\delta_B B\sin C}{\sin B\sin(B+C)} + \frac{\delta_C C\sin B}{\sin C\sin(B+C)}$. **3120.** Возрастает со скоростью 444 см²/с. **3121.** На ≈ 2575 см³.

3123. $dr = \frac{1}{p}ds - \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2p^2}\right)dp = 0{,}16$ см, т. е. около 1%.

3124. $e^{\sin t - 2t^3}\left(\cos t - 6t^2\right)$. **3125.** $\sin 2t + 2e^{2t} + e^t(\sin t + \cos t)$. **3126.** $\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-\left(3t-4t^3\right)^2}}$.

3127. $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2\sin v\cos v(\cos v - \sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v\cos v)$.

3128. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{u}{v^2}\ln(3u - 2v) + \frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u - 2v) - \frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.

3129. $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e^z}{e^x+e^z}$; $\frac{du}{dx} = \frac{e^x+3e^{x^3}x^2}{e^x+e^{x^3}}$. **3130.** $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$. **3131.** $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

3132. $\frac{dz}{dt} = \left(3 - \frac{4}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\sec^2\left(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t}\right)$. **3133.** $\frac{du}{dx} = e^{ax}\sin x$.

3134. $dz = \frac{y^2dx+x^2dy}{(x+y)^2}\operatorname{arctg}(xy + x + y) + \frac{xy\left[(y+1)dx+(x+1)dy\right]}{(x+y)\left[1+(xy+x+y)^2\right]}$.

3135. $\frac{e^{(x^2+y^2)/(xy)}}{x^2y^2}\left[\left(y^4 - x^4 + 2xy^2\right)x\,dy + \left(x^4 - y^4 + 2x^2y\right)y\,dx\right]$.

3136. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{\partial f}{\partial u} + ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y\frac{\partial f}{\partial u} + xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}$ $\left(u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy}\right)$.

3145. $\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$. **3146.** $\frac{x\left(y^2-2x^2\right)}{y\left(2y^2-x^2\right)}$. **3147.** $\frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$. **3148.** $-\frac{x}{y}\cdot\frac{2\left(x^2+y^2\right)-a^2}{2\left(x^2+y^2\right)+a^2}$.

3149. $\frac{y}{x}\cdot\frac{2x+e^{xy}-\cos xy}{\cos xy-e^{xy}-x}$. **3150.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **3151.** $\frac{y^2}{1-xy}$. **3152.** $\frac{a^2}{(x+y)^2}$. **3153.** $\frac{2y}{x(y-1)}$.

3154. $\frac{y}{y-1}$. **3155.** $\frac{y^2}{x^2}\frac{\ln x-1}{\ln y-1}$. **3157.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=6\\y=2}} = \frac{4}{3}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=6\\y=8}} = -\frac{4}{3}$. **3158.** −1.

3161. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$. **3162.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2-x}{z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z+1}$.

3163. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz}{xy+z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz}{xy+z^2}$. **3164.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x(z-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y(z-1)}$.

3167. $dz = -\frac{\sin 2x\,dx+\sin 2y\,dy}{\sin 2z}$. **3168.** $z = \frac{x^2-y^2}{4}$. **3169.** $z = \frac{3xy-x^3}{2}$.

3170. $z = k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **3171.** $dz = \frac{x\,dx}{z} - \frac{y\,dy}{z}$. **3172.** $dz = \frac{x\,dx}{a} + \frac{y\,dy}{a}$.

3173. $dz = \sqrt{z}(x\,dx - y\,dy)$. **3174.** $2(x\,dx + y\,dy)$. **3175.** $2(x\,dx + y\,dy)$.

3176. $dz = e^{-u}\left[(v\cos v - u\sin v)dx + (u\cos v + v\sin v)dy\right]$.

3180. $\frac{\partial^2z}{\partial x^2} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3185. $\frac{\partial^2z}{\partial x^2} = -\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2} = \frac{x^3+\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y} = -\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$.

3187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{\left(1+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

3188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a^2 \cos 2(ax+by)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b^2 \cos 2(ax+by)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2ab \cos 2(ax+by)$.

3189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xe^y+2y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\left(1+xe^y\right)e^{xe^y+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1+xe^y\right)e^{xe^y+y}$.

3190. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

3191. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y(\ln y-1)}{x^2}e^{\ln x \ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}e^{\ln x \ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y+1}{xy}e^{\ln x \ln y}$.

3192. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{xy^3}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3y}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-x^2y^2\right)^3}}$.

3193. $\frac{(x-z)y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2-2xz\right)^3}}$. 3194. $2y^3\left(2+xy^2\right)e^{xy^2}$. 3195. $\frac{4x\left(3y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

3196. $-x(2\sin xy + xy\cos xy)$. 3197. $\left(x^2y^2z^2+3xyz+1\right)e^{xyz}$.

3198. $mn(n-1)(n-2)p(p-1)x^{m-1}y^{n-3}z^{p-2}$. 3204. $a=-3$.

3209. $$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

3219. $-2y\,dx^2 + 4(y-x)\,dx\,dy + 2x\,dy^2$. 3220. $-(dx-dy)^2/(x-y)^3$.

3221. $\frac{\left(x^2-y^2\right)dx^2+4xy\,dx\,dy+\left(y^2-x^2\right)dy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. 3222. $2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\cos 2y\,dy^2$.

3223. $e^{xy}\left[(y\,dx+x\,dy)^2+2\,dx\,dy\right]$. 3224. $2(z\,dx\,dy + y\,dx\,dz + x\,dy\,dz)$.

3225. $-\cos(2x+y)(2dx+dy)^3$; $(2dx+dy)^3$; 0.

3226. $-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

3227. $-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$.

3228. $-\frac{2z\left[zy^2dx^2+\left(x^2y^2+2xyz^2-z^4\right)dx\,dy+x^2z\,dy^2\right]}{\left(z^2-xy\right)^3}$.

3229. $-31{,}5\,dx^2 + 206\,dx\,dy - 306\,dy^2$. 3230. $\frac{d^2y}{dt^2}+y$. 3231. $y''-5y'+y$.

3232. $\frac{d^2y}{dt^2}+ay$. 3233. $y-x''$. 3234. $-\frac{x''}{x'^3}$. 3235. $-\frac{v''+2v}{v^3}$. 3236. $\frac{dr}{d\varphi}=\rho$.

3237. $\frac{2\rho'^2-\rho\rho''+\rho^2}{\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{3/2}}$. 3238. $-\frac{\partial z}{\partial \varphi}$. 3239. $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}$.

3240. $\omega''(\rho)+\frac{1}{\rho}\omega'(\rho)+k\omega(\rho)$. 3241. $-4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2$.

К главе XI

3242. $x^3+2y^3-xy+h\left(3x^2-y\right)+k\left(6y^2-x\right)+3xh^2-hk+6yk^2+h^3+2k^3$.

3243. $\Delta z = 15h^2-6hk+k^2+h^3$.

3244. $\Delta z = -2h+7k-4h^2+4hk+2k^2-2h^3-h^2k+$
$+\frac{5}{2}hk^2+\frac{1}{4}k^3-h^3k+\frac{1}{2}h^2k^2+\frac{1}{4}hk^3$; $f(1{,}02;\,2{,}03)\approx 2{,}1726$.

3245. $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+$
$+(2Ax+Dy+Fz)h+(2By+Dx+Ez)k+(2Cz+Ey+Fx)l+$
$+Ah^2+Bk^2+Cl^2+Dhk+Ekl+Fhl$.

3246. $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-$
$-\frac{1}{4}\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]-$
$-\frac{1}{6}\left[\cos\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\sin\xi\cos\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$
$\left.+3\cos\xi\sin\eta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\xi\cos\eta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\right]$.

3247. $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\ldots$; $z_1=1{,}1021$.

3248. $e^x\left[\sin y+h\sin y+k\cos y+\frac{1}{2}\left(h^2\sin y+2hk\cos y-k^2\sin y\right)+\right.$
$\left.+\frac{1}{6}\left(h^3\sin y+3h^2k\cos y-3hk^2\sin y-k^3\cos y\right)\right]+\ldots$; $z_1=1{,}1051$.

3249. $y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3+\ldots$ 3250. $y+\frac{1}{2!}\left(2xy-y^2\right)+\frac{1}{3!}\left(3x^2y-3xy^2+2y^3\right)+\ldots$

3251. $1+(x+y)+\ldots+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}+\ldots$

3252*. $x-y-\frac{1}{3}\left(x^3-y^3\right)+\frac{1}{5}\left(x^5-y^5\right)-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(x^{2n+1}-y^{2n+1}\right)+\ldots$ Заметить, что $\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y$.

3253. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^ny^m}{nm}$. 3254. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+y)^n-x^n-y^n}{n}$.

3255. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x^2+y^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$. 3256. $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^my^{2n}}{m!(2n)!}$.

3257. $z=1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{8}(x-1)(y-1)+\frac{9}{64}(y-1)^2+\ldots$

3259. $(0,0)$, $(-5/3,0)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$. 3260. $(1/2,-1)$. 3261. $(0,0)$, $(0,a)$, $(a,0)$, $(a/3,a/3)$. 3262. $(0,0)$, $(0,2b)$, (a,b), $(2a,0)$, $(2a,2b)$.

3263. $(\pi/6,\pi/6)$. 3264. $(b/a,c/a)$. 3265. $(-2/3,-2/3)$. 3266. $(2,1,7)$.

3267. $(6,4,10)$. 3268. A и C – максимумы. B – минимум; в окрестности D поверхность имеет вид седла, вдоль EF функция сохраняет постоянное значение. 3269. $(-2,0)$, $(16/7,0)$, каждая точка будет стационарной для одной из ветвей функции. **3270.** $(1,1)$, $(-1,-1)$. **3271*.** $(0,0)$. Чтобы убедиться, что найденная точка есть точка максимума, достаточно представить функцию в виде $z=10-(x-y)^3-2x^2-y^2$. **3272.** $(2,-2)$. **3273.** $(-1,1)$. **3277.** В точке $(6,4)$ – максимум. **3278.** В точке $(0,0)$ нет экстремума. В точке $(1,1)$ – минимум. **3279.** Наибольшие и наименьшие значения лежат на границе области; наибольшее значение $z=4$ в точках $(2,0)$ и $(-2,0)$; наименьшее значение $z=-4$ в точках $(0,2)$ и $(0,-2)$. Стационарная точка $(0,0)$ не дает экстремума. **3280.** Наибольшее значение $z=17$ в точке $(1,2)$; наименьшее значение $z=-3$ в точке $(1,0)$; стационарная точка $(-4,6)$ лежит вне заданной области. **3281.** Наибольшее значение $z=4$ в стационарной точке $(2,1)$ (эта точка является, таким образом, точкой максимума). Наименьшее значение $z=-64$ в точке $(4,2)$ – на границе. **3282.** Наименьшее значение функции $z=0$ в точке $(0,0)$. Наибольшее значение $z=3/e$ в точках $(0,\pm 1)$. **3283.** $z_{наиб}=3\sqrt{3}/2$ в точке $(\pi/3,\pi/6)$ (максимум), $z_{наим}=0$ в точке $(0,0)$ (на границе). **3284.** Все слагаемые равны между собой. **3285.** Все множители равны между собой.

3286. $(8/5, 16/5)$. **3287.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. **3288.** $x=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $y=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

3289. $(3,\sqrt{39},0)$; $(3,-\sqrt{39},0)$. **3290.** Куб. **3291.** В точке $(1,1)$ минимум, $z=2$. **3292.** (a,a) или $(-a,-a)$, $z=a^2$ (максимум), $(a,-a)$ или $(-a,a)$, $z=-a^2$ (минимум). **3293.** $(-a\sqrt{2},-a\sqrt{2})$, $z=-\sqrt{2}/a$ (минимум), $(a\sqrt{2},a\sqrt{2})$, $z=\sqrt{2}/a$ (максимум). **3294.** Стационарные точки $x=-\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{Arctg}\frac{a}{b}$. **3295.** $(3,3,3)$, $u=9$ (минимум). **3296.** Две из переменных равны каждая 2, третья равна 1 (минимум, равный 4); две из переменных равны каждая 4/3, третья равна 7/3 (максимум, равный 112/27). **3297*.** Исследовать на минимум функцию $\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}$ при $x_1+x_2+\ldots+x_n=A$. Вообще справедливо соотношение $\frac{\sum x_i^k}{n}\geq\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^k$, если $k\geq 1$ и $x_i\geq 0$.

3299. $u_{наим}=\frac{abc}{bc+ca+ab}$ при $x=\frac{bc}{bc+ca+ab}$, $y=\frac{ac}{bc+ac+ab}$, $z=\frac{ab}{bc+ac+ab}$.

3300. $u_{наиб}=1$, $u_{наим}=-1/2$. **3301.** $(21/13, 2, 63/26)$. **3302.** $(3,-1,1)$.

3303. а) $(-2,0,0)$; б) $(2,0,0)$. **3304.** Куб. **3305.** Куб. **3306.** $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$. **3307.** Если R – радиус основания палатки, H – высота цилиндрической части, h – высота конической верхушки, то должны иметь место следующие соотношения: $R=h\sqrt{5}/2$, $H=h/2$. **3308.** Если l – боковая сторона трапеции, b – основание и α – угол наклона боковой стороны, то должны иметь место следующие соотношения: $l=b=2\sqrt{A}/\sqrt[4]{3^3}$, $\alpha=\pi/3$, где A – данная площадь сечения. При этом омываемая поверхность $u=2\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{A}=2{,}632\sqrt{A}$. **3309.** Куб. **3310.** Стороны

основания равны каждая $2a+\sqrt[3]{2v}$, высота вдвое меньше: $a+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2v}$. **3311.** a^3 (куб). **3312.** Наименьшая площадь равна $3\sqrt{3}ab$. **3313.** $(4/\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})$ и $(-4/\sqrt{5},-3/\sqrt{5})$. **3314.** $(-5/9,-1/9)$. **3315.** $(3,5)$. **3316.** $z_{наиб}=2$. **3317.** Стороны треугольника $\sqrt{2S}$, $\sqrt{2S}$ и $2\sqrt{S}$. **3318.** Высота $H/3$, стороны основания $2a\sqrt{2}/3$ и $2b\sqrt{2}/3$, объем $V=8abH/27$. **3319.** Тетраэдр. **3320.** Нормаль к эллипсу в искомой точке должна быть перпендикулярна к линии, соединяющей данные точки. **3321.** Нормаль провести в точке с координатами $\left(\pm a\sqrt{a/(a+b)}, \pm b\sqrt{b/(a+b)}\right)$. **3322.** $(9, 1/8, 3/8)$; $(-9,-1/8,-3/8)$. **3323.** $2\sqrt{2}$. **3324.** $x+y=2$; $y=x$. **3325.** $x-y+a=0$; $x+y-3a=0$. **3326.** $x+2y-1=0$; $2x-y-2=0$. **3327.** $x-y+2=0$; $x+y-2=0$. **3328.** $(0,0)$. **3329.** $(0,0)$.

3330. $(0,0)$. **3331.** $(a,0)$. **3332.** $(0,a)$, $(0,-a)$, $(a,0)$, $(-a,0)$. **3333.** $(2,0)$, $(-2,0)$. **3334.** $(0,3)$, $(-3,0)$, $(-6,3)$. **3335.** $(0,0)$ – двойная точка.

3336. $(0,0)$ – изолированная точка. **3337.** $(0,0)$ – точка прекращения.

3338. $k\pi$, $k=0,1,2,\ldots$, – точки возврата. **3339.** $(a,0)$ – точка возврата.

3340. $(0,0)$. **3341.** $x=-f'(a)$, $y=f(a)-af'(a)$; $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$.

3342. $16y^3+27x^4=0$. **3343.** $y^2=4ax$. **3344.** $y=x/2$ и $y=-x/2$.

3345. $y=-x^4/4$. **3346.** $y=0$ и $16y=x^4$. **3347.** $y=x$ и $y=x-4/27$. Первая – геометрическое место особых точек, вторая – огибающая. **3348.** $x^2+\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$ и $x^2-\frac{2}{3\sqrt{3}}y^3=0$. **3349.** $x^{2/3}+y^{2/3}=d^{2/3}$. **3350.** Четыре прямые $x\pm y=\pm R$.

3351. $2by\left(x^2+y^2\right)+x^2=0$. **3352.** Парабола $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. **3353.** Циклоида $x=\frac{R}{2}(t-\sin t)$, $y=\frac{R}{2}(1-\cos t)$. **3354.** Эллипс $x^2+\frac{y^2}{2}=R^2$. **3355.** Гипербола $xy=\frac{S}{4}$. **3357.** Эволюта параболы $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$. **3359.** Гиперболы $xy=1/2$ и $xy=-1/2$. **3361.** а) $2r\frac{dr}{dt}=2|r|\frac{d|r|}{dt}$; б) $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r\frac{d^2r}{dt^2}$; в) $r\times\frac{d^2r}{dt^2}$; г) $\left(r\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}\right)$.

3362. Из равенства $\frac{dr}{dt}=\alpha(t)r$ следует $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d\alpha}{dt}r+\alpha\frac{dr}{dt}=\left(\frac{d\alpha}{dt}+\alpha^2\right)r=\beta(t)r$ и т. д. **3363.** Дифференцируя равенство $r^2=\text{const}$ (см. задачу 3361), получаем $r\frac{dr}{dt}=0$. Касательная к сферической линии (т. е. к линии, расположенной на сфере) перпендикулярна к радиусу сферы, проведенному в точку касания. Обратная теорема также имеет место.

3368. $\frac{dr}{dx}=\frac{dr}{du}\varphi'$; $\frac{d^2r}{dx^2}=\frac{d^2r}{du^2}\varphi'^2+\frac{dr}{du}\varphi''$; $\frac{d^3r}{dx^3}=\frac{d^3r}{du^3}\varphi'^3+3\frac{d^2r}{du^2}\varphi'\varphi''+\frac{dr}{du}\varphi'''$.

3370. Из равенства $a\frac{dr(\tau)}{dt}=0$, где $t_1<\tau<t_2$, следует, что на замкнутой (в силу равенства $r(t_1)=r(t_2)$) линии найдется точка, в которой касательная перпендикулярна к любому наперед заданному направлению. **3371.** Годограф скорости $v\{a\cos t, a\sin t, 2bt\}$ – винтовая линия; годограф ускорения $w\{-a\sin t, a\cos t, 2b\}$ – окружность. **3372.** Скалярное умножение на a и на r

дает $a\frac{dr}{dt} = 0$, $r\frac{dr}{dt} = 0$. Отсюда $ar = \text{const}$ – уравнение плоскости и $r^2 = \text{const}$ – уравнение шара. Искомая траектория – окружность, плоскость которой перпендикулярна вектору a. **3374.** Эллипс. Скорость будет максимальной в момент, когда материальная точка будет в конце малой полуоси, и минимальной, когда точка будет в конце большой полуоси. Ускорение будет максимальным (минимальным) в момент, когда скорость будет минимальной (максимальной). **3375.** Компоненты скорости $\frac{d\rho}{dt}$; $\rho\frac{d\varphi}{dt}$; $\rho\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}$. *Указание.* Найти скалярные произведения $\frac{dr}{dt}e_\rho$; $\frac{dr}{dt}e_\varphi$; $\frac{dr}{dt}e_\theta$.

3376. $\frac{x-\frac{t^4}{4}}{t^2} = \frac{y-\frac{t^3}{3}}{t} = \frac{z-\frac{t^2}{2}}{1}$; $t^2x + ty + z = \frac{t^6}{4} + \frac{t^4}{3} + \frac{t^2}{2}$.

3377. $\frac{x-a\sqrt{2}/2}{-a\sqrt{2}} = \frac{y-a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{2}} = \frac{z-h/8}{h/\pi}$; $-x+y+\frac{h}{\pi a\sqrt{2}}z = \frac{h^2}{8\pi a\sqrt{2}}$.

3378. $x-6a = \frac{y-18a}{6} = \frac{z-72a}{36}$; $x+6y+36z = 2706a$.

3379. $\frac{x-\pi/2+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $x+y+\sqrt{2}z = \frac{\pi}{2}+4$.

3380. $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$; $12x-4y+3z-12 = 0$.

3381. $\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$; $27x+28y+4z+2 = 0$.

3382. $\frac{x-x_0}{z_0} = \frac{y-y_0}{z_0} = \frac{z-z_0}{y_0-x_0}$; $\frac{x+y}{x_0+y_0}+\frac{z}{z_0} = 2$.

3383. $\frac{x-x_0}{y_0^2z_0^2} = \frac{y-y_0}{x_0^2z_0^2} = \frac{z-z_0}{-x_0^2y_0^2}$; $\frac{x-x_0}{x_0^2}+\frac{y-y_0}{y_0^2}-\frac{z-z_0}{z_0^2} = 0$.

3384. $r_0\left\{\sqrt{3}/2,\ 1/2,\ e^{\pi/6}\right\}$.

3385. $6x-8y-z+3 = 0$; $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-1}$; $\frac{x-1}{31} = \frac{y-1}{26} = \frac{z-1}{-22}$.

3386. $\sqrt{b}(x-x_0)-\sqrt{a}(y-y_0) = 0$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{b}} = \frac{y-y_0}{-\sqrt{a}} = \frac{z-z_0}{0}$; $\frac{x-x_0}{\sqrt{2az_0}} = \frac{y-y_0}{\sqrt{2bz_0}} = \frac{z-z_0}{-(a+b)}$.

3387. $\frac{1}{e}x-ey-\sqrt{2}z+2 = 0$; $\frac{x-e}{-1/e} = \frac{y-1/e}{e} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\frac{x-e}{1} = \frac{y-1/e}{1} = \frac{z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,1}$.

3389. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$; $2x-y+3z-5 = 0$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$; $3x+3y-z-2 = 0$; $\frac{x-1}{8} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{-9}$; $8x-11y-9z+1 = 0$.

3390. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$; $x-y = 0$; $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$; $z = 1$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$; $x+y-2 = 0$.

3391. $\frac{x-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}} = \frac{z-1}{4}$; $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z = 4$; $\frac{x-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}/2}{3\sqrt{2}} = \frac{z-1}{1}$; $\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5 = 0$, $\frac{x-\sqrt{2}/2}{13} = \frac{y-\sqrt{2}/2}{-3} = \frac{z-1}{-4\sqrt{2}}$; $-13x+3y+4\sqrt{2}z+\sqrt{2} = 0$.

3392. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-13}{3} = \frac{z}{6}$; $2x+3y+6z = 37$; $\frac{x+1}{6} = \frac{y-13}{2} = \frac{z}{-3}$; $6x+2y-3z = 20$; $\frac{x+1}{3} = \frac{y-13}{-6} = \frac{z}{2}$; $3x-6y+2z = -81$.

3393. Для любой точки линии уравнение соприкасающейся плоскости $3x-2y-11 = 0$, т. е. линия целиком лежит в этой плоскости.

3394. Соприкасающаяся плоскость одна и та же для всех точек линии. Ее уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3395. $\mathrm{ch}^2 t/\mathrm{sh}\,t$. **3396.** $R = \sqrt{2}\,\mathrm{cosec}\,2t$. **3398.** $k = \sqrt{\frac{(y'z''-z'y'')^2+y''^2+z''^2}{\left(1+y'^2+z'^2\right)^3}}$.

3399. $\tau_1 = \frac{r'}{|r'|}$, $\beta_1 = \frac{r'\times r''}{|r'\times r''|}$, $\nu_1 = \frac{(r'\times r'')\times r'}{|r'|\,|r'\times r''|}$. **3400.** $\tau_1 = \nu_1\times\beta_1$; $\nu_1 = \beta_1\times\tau_1$; $\beta_1 = \tau_1\times\nu_1$.

3401. Искомый вектор ω (если он существует) можно представить в виде

$$\omega = (\omega\tau_1)\tau_1 + (\omega\nu_1)\nu_1 + (\omega\beta_1)\beta_1. \qquad (1)$$

Из условия задачи следует (принимая во внимание формулы Френе), что

$$\omega\times\tau_1 = k\nu_1,\quad \omega\times\nu_1 = -k\tau_1 + T\beta_1,\quad \omega\times\beta_1 = -T\nu_1. \qquad (2)$$

Умножая эти равенства скалярно на ν_1, β_1, τ_1 соответственно, найдем, что $\omega\tau_1 = T$, $\omega\nu_1 = 0$, $\omega\beta_1 = k$ и, следовательно, $\omega = T\tau_1 + k\beta_1$. Подстановка в формулы (2) показывает, что этот вектор удовлетворяет условию задачи.

3402. $99 + \ln 10 = 101{,}43$. **3403.** $a\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = a\ln\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}$. **3404.** $\sqrt{3}\left(e^t-1\right)$. **3405.** 5.

3406. $4a$. **3407.** $s\sqrt{2}$. **3408.** $a\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}-\sqrt{x}}$. **3409.** $\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

3410. $9x-8y-z = 4$; $\frac{x-2}{9} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{-1}$. **3411.** $x+y-z-1 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

3412. $z+a = 0$, $x = a$, $y = a$. **3413.** $17x+11y+5z = 60$; $\frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}$.

3414. $x-y+2z-\frac{\pi}{2} = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi/2}{2}$.

3415. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = \sqrt{3}$; $a\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = b\left(y-\frac{b\sqrt{3}}{3}\right) = c\left(z-\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

3416. $x+11y+5z-18 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$.

3417. $3x-2y-2z+1 = 0$; $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.

3418. $2x+y+11z-25 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$.

3419. $5x+4y+z-28 = 0$; $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}$.

3421. $x-y+2z = \sqrt{\frac{11}{2}}$ и $x-y+2z = -\sqrt{\frac{11}{2}}$. **3422.** $x+y+z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

3424. Все плоскости проходят через начало координат.

3426. $x_0x+y_0y+z_0z = a^2$; $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$.

3428. $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2} = 2(z+z_0)$; $\frac{a(x-x_0)}{bx_0} = -\frac{b(y-y_0)}{ay_0} = \frac{z-z_0}{-2ab}$.

3429. $\frac{2}{3}a^2$. **3430.** $2x+y-z = 2$. **3434.** $4x-2y-3z = 3$.

3435. Параллельна плоскости xOy в точках $(0,3,3)$ и $(0,3,-7)$; параллельна плоскости yOz в точках $(5,3,-2)$ и $(-5,3,-2)$; параллельна плоскости xOz в точках $(0,-2,-2)$ и $(0,8,-2)$.

3436. а) $6u_0v_0x - 3(u_0 + v_0)y + 2z + (u_0 + v_0)(u_0^2 - 4u_0v_0 + v_0^2) = 0$;
б) $3(x_0^2 - y_0)x - 3x_0(y + y_0) + 2z + 4z_0 = 0$.

3437. $2z(x^2 + y^2 + z^2) + p(x^2 + y^2) = 0$. 3438. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27a^3xyz$.

3439. 1) $\{-2, 1\}$; 2) $\{10xy - 3y^3, 5x^2 - 9xy^2 + 4y^3\}$.

3440. 1) $6i - 4j$; 2) $\frac{1}{3}(2i + j)$; 3) $\frac{-y_0 i + x_0 j}{x_0^2 + y_0^2}$.

3441. 1) $\operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}342$, $\varphi \approx 18°52'$; 2) $\operatorname{tg}\varphi \approx 4{,}87$, $\varphi \approx 78°24'$.
3442. Отрицательная полуось y.
3443. 1) $\cos\alpha \approx 0{,}99$, $\alpha = 8°$; 2) $\cos\alpha \approx -0199$, $\alpha \approx 101°30'$.
3444. 1) $(-1/3, 3/4)$, $(7/3, -3/4)$; 2) точки, лежащие на окружности $x^2 + y^2 = 2/3$. 3447. 1) $\{3x_0^2y_0^2z_0, 2x_0^3y_0z_0, x_0^3y_0^2\}$; 2) $\frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{r}{|r|}$, где r – радиус-вектор. 3450. 1) $2r$; 2) $2\frac{r}{|r|}$; 3) $2F'(r^2)r$; 4) $a(br) + b(ar)$; 5) $a \times b$.

3451. 1) 0; 2) $\sqrt{2}/2$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $(\cos\alpha + \sin\alpha)/2$. 3452. $\sqrt{2}/3$.

3453. 1/2. 3455. 1) 5; 2) 98 / 13. 3456. –22. 3459. $1/r^2$.

К главе XII

3460. $M = \iint\limits_D \gamma(x, y)d\sigma$. 3461. $E = \iint\limits_D \tau(x, y)d\sigma$. 3462. $T = \frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_D y^2\gamma(x, y)d\sigma$.

3463. $Q = (t_2 - t_1)\iint\limits_D c(x, y)\gamma(x, y)d\sigma$. 3464. $M = \iiint\limits_\Omega \gamma(x, y, z)dv$.

3465. $E = \iiint\limits_\Omega \delta(x, y, z)dv$. 3466. $8\pi(5 - \sqrt{2}) < I < 8\pi(5 + \sqrt{2})$.

3467. $36\pi < I < 100\pi$. 3468. $2 < I < 8$. 3469. $-8 < I < 2/3$.
3470. $0 < I < 64$. 3471. $4 < I < 36$. 3472. $4 < I < 8(5 - 2\sqrt{2})$.
3473. $4\pi < I < 22\pi$. 3474. $0 < I < \frac{4}{3}\pi R^5$. 3475. $24 < I < 72$.

3476. $28\pi\sqrt{3} < I < 52\pi\sqrt{3}$. 3477. 1. 3478. $(e - 1)^2$. 3479. $\pi/12$.

3480. $\ln\frac{4}{3}$. 3481. $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. 3482. $\pi - 2$. 3483. 2. 3484. $-\pi/16$.

3485. $\int\limits_2^5 dx \int\limits_{(3x+1)/2}^{(3x+4)/2} f(x, y)dy$. 3486. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)dy$. 3487. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$.

3488. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(x, y)dy$. 3489. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x, y)dy$. 3490. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-3\sqrt{4-x^2}/2}^{3\sqrt{4-x^2}/2} f(x, y)dy$.

3491. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2-\sqrt{4x-x^2}}^{2+\sqrt{4x-x^2}} f(x, y)dy$. 3492. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y)dy$.

3493. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{3-x} f(x,y)\,dy.$

3494. $\int\limits_{-2/3}^{1/3} dx \int\limits_{1-2x}^{x+2} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1/3}^{2/3} dx \int\limits_x^{x+2} f(x,y)\,dy + \int\limits_{2/3}^{5/3} dx \int\limits_x^{5-2x} f(x,y)\,dy.$

3495. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{x/2}^{2/x} f(x,y)\,dy.$

3496. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^{9/2} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{9/2}^{8} dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{24-4x} f(x,y)\,dy.$

3497. $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy.$

3498. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy.$ 3499. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$ 3500. $\int\limits_0^r dy \int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx.$

3501. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx.$ 3502. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^y f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx.$

3503. $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{y/2} f(x,y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)\,dx.$

3504. 1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$; 3) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$

3505. 1) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{2y-3}^{(y+6)/2} f(x,y)\,dx$; 2) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_{(y+1)/2}^{(9-y)/2} f(x,y)\,dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_0^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x,y)\,dy$; 4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx.$

3506. 1) $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$; 2) 9; 3) 1/2. 3507. 0. 3508. 33/140. 3509. 9/4. 3510. -2.
3511. $\pi/6$. 3512. 4/135. 3513. 4. 3514. 3. 3515. $12\frac{2}{3}$. 3516. $2R/3$. 3517. 6.
3518. $abc(a+b+c)/2$. 3519. $a^6/48$. 3520. $a^{11}/110$. 3521. $2e-5$.
3522. $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$. 3523. 1/180. 3524. $\pi^2/16-1/2$.

3525. 1) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$; 2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho$. 3526. $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$

3527. $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho + \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$

3528. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\sec\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$ **3529.** $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}\sec(\varphi-\pi/4)}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$

3530. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$ **3531.** $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$

3532. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$ **3533.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$

3534. $\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{R} f(\rho^2)\rho\, d\rho.$ **3535.** $\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg} R} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi.$ **3536.** $\frac{\pi}{4}\left[(1+R^2)\ln(1+R^2)-R^2\right].$

3537. $\pi(\pi-2)/8.$ **3538.** $\pi R^2 h.$ **3539.** $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$ **3540.** $\pi^2/6.$

3542. $x = 2\rho\cos\varphi,\quad y = 3\rho\sin\varphi;\quad I = 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 f(2\rho\cos\varphi, 3\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$

3543. $x = \rho\cos\varphi,\quad y = \sqrt{3}\rho\sin\varphi;\quad I = \sqrt{3}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \sqrt{3}\rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$

3544. $x = a\rho\cos\varphi,\quad y = b\rho\sin\varphi;\quad I = ab\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^2 f\left(\sqrt{4-\rho^2}\right)\rho\, d\rho.$

3545. $a^2b^2/8.$ **3546.** $1/\sqrt[4]{6}.$ **3547.** $\int\limits_0^1 dz \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\rho.$

3548. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz.$

3549. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\, d\rho.$

3550. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho \int\limits_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz.$

3551. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{3}/2} \rho\, d\rho \int\limits_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz$

или $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\, d\rho +$

$+\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\, d\rho.$

3552. $\pi a/2$. 3553. $8a^2/9$. 3554. $4\pi R^5/15$. 3555. $\pi/8$. 3556. $4\pi\left(R^5-r^5\right)/15$.
3557. $2\pi/3$. 3558. $\pi\left[3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right]$. 3559. $186\frac{2}{3}$. 3560. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$.
3561. $abc/6$. 3562. 12. 3563. 1/6. 3564. $78\frac{15}{32}$. 3565. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. 3566. 16.
3567. 45. 3568. $13\frac{1}{3}$. 3569. $16\frac{1}{5}$. 3570. $ar^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$. 3571. 22π. 3572. $\frac{16}{3}R^3$.
3573. $12\frac{1}{21}$. 3574. $\frac{4R^5}{15a^2}$. 3575. 27. 3576. 3/8. 3577. 88/105. 3578. $abc/3$.
3579. $\pi a^3/4$. 3580. $2\left(e^2-\frac{2e^3+1}{9}\right)$. 3581. $3e-8$. 3582*. $4e-e^2-1$. Тело симметрично относительно плоскости $y=x$. 3583. $2\left(\pi^2-35/9\right)$. 3584. 1/45.
3585. 16/9. 3586. $\pi/4$. 3587. 40π. 3588. 2π. 3589. $5\pi R^3/2$. 3590. $3\pi a^3/2$.
3591. $\frac{1}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$. 3592. $a^3/24$. 3593. $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$. 3594. $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 3595. $\pi\sqrt{2}/24$.
3596. $\pi^2R^2h/16$. 3597. 1/2. 3598. 2. 3599. πab. 3600. $ab/6$. 3601. 16/3.
3602*. $5\pi a^3/8$. Перейти к полярным координатам. 3603. $3\pi/4$. 3604. $2a^2$.
3605. 2/3. 3606. 1/60. 3607. 1/1260. 3608*. 1) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$; 2) $\frac{32\pi}{25}$. Воспользоваться результатом задачи 3541. 3609. 8. 3610. 7/12. 3611. 3/35. 3612. $4\left(4-3\ln 3\right)$.
3613*. $\pi/2$. Проекция тела на плоскость Oxy есть круг. 3614. $\pi/6$. Перенести начало координат в точку $(1/2,\ 1/2,\ 0)$. 3615*. $19\pi/6$ и $15\pi/2$. Перейти к цилиндрическим координатам. 3616. $5\pi R^3/12$. 3617. $\pi/96$. 3618. $92\pi R^3/75$.
3619*. $\pi a^3/3$. Перейти к сферическим координатам. 3620. $a^3/360$. 3621. $4\pi a^3/12$. 3622. $4\pi a^3/3$. 3623. $64\pi a^3/105$. 3624. $\pi^2a^3/6$. 3625. $21\left(2-\sqrt{2}\right)\pi/4$.
3626. 14. 3627. 36. 3628. 8π. 3629. $2\sqrt{2}\pi p^2$. 3630*. $2\pi R^2$. Проектировать поверхность на плоскость Oyz. 3631. $8\sqrt{2}ab$. 3632. $\frac{16}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$.
3633. $\frac{2\pi}{3}\left\{\left(1+R^2\right)^{3/2}-1\right\}$. 3634. $\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8}-1\right)$. 3635. $4\pi a\left(a-\sqrt{a^2-R^2}\right)$.
3636. $2R^2(\pi-2)$. 3637. $2R^2\left(\pi+4-4\sqrt{2}\right)$.
3638. $\frac{\pi}{4}\left\{3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2+\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right\}$. 3639. $2a^2/\sin 2\alpha$.
3640*. $\frac{\pi R^2}{12}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\approx 3{,}42\cdot 10^6$ км². Перейти к сферическим координатам.
3641. $16\pi a^2/3$. 3642. $8R^2$. 3643. $ab^2/2$. 3644. $2R^2/3$. 3645. πR^3. 3646. $9a^2/4$.
3647. Статический момент равен $ah^2/6$. 3648. Центр масс лежит на малой оси на расстоянии $\frac{4b}{3\pi}$ от большой оси (b – малая полуось).
3649. $\xi=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$, $\eta=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$. 3650. Центр масс лежит на биссектрисе угла α на расстоянии $\frac{4}{3}R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ от центра круга. 3651. Центр масс лежит на биссектрисе угла α на расстоянии $\frac{4}{3}R\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ от центра круга.
3652. $\xi=3\pi/16$, $\eta=0$. 3653. $5\pi R^4/4$. 3654. $2a^4/3$. 3655. $\pi ab\left(a^2+b^2\right)/4$.

К главе XIV

3901. $1 + y^2 = C\left(1 - x^2\right)$. **3902.** $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$. **3903.** $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$.

3904. $y = C\sin x - a$. **3905.** $Cx = (y-1)/y$. **3906.** $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$.

3907. $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$. **3908.** $e^{s} = C\left(1 - e^{-t}\right)$. **3909.** $10^x + 10^{-y} = C$.

3910. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2}$. **3911.** $t = \frac{1}{a}\left(l + \frac{l^{1+n}}{2-n}\right)$.

3912. $t = \frac{y^2}{2\sqrt{k_1k_2}}\ln\frac{\sqrt{k_1}(1-x)+x\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}(1-x)-x\sqrt{k_2}}$. **3913.** $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **3914.** $y = \frac{1+x}{1-x}$.

3915. $\cos x = \sqrt{2}\cos y$. **3916.** $y = \frac{b+x}{1+bx}$. **3917.** Гипербола $xy = 6$.

3918. Трактриса $y = \sqrt{4-x^2} + 2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$. **3919.** Параболы $y^2 = Cx$.

3920. $y^2 = Cx$. **3921.** $y = e^{(x-a)/a}$. **3922.** $(x-C)^2 + y^2 = a^2$.

3923. $y = \frac{1}{k}\ln\left|C\left(k^2x^2 - 1\right)\right|$. **3924.** $x = y^n$. **3925.** $\approx 2{,}7$ м/с. **3927.** 0,467 км/ч; 85,2 м. **3928.** $H = \left[\sqrt{h} - \frac{\sqrt{2g}}{4S}qT\right]^2$. **3929.** $\ln\left|\frac{\theta_0-\theta_1}{\theta-\theta_1}\right| = \frac{k_0}{2}\left(2t + \alpha t^2\right)$.

3930*. *Если t – время, отсчитанное от полуночи и выраженное в часах, то дифференциальное уравнение задачи имеет вид* $\frac{dS}{S\sqrt{S}} = k\cos\frac{\pi(t-12)}{12}dt$; отсюда

$S = \frac{160000}{\left[9 - \sin\frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}$. Функция $S(t)$ определена при $6 \le t \le 18$.

3931. $x + \operatorname{ctg}\frac{x-y}{2} = C$. **3932.** $4y - 6x - 7 = Ce^{-2x}$.

3933. $x + C = 2u + \frac{2}{3}\ln|u-1| - \frac{8}{3}\ln(u+2)$, где $u = \sqrt{1+x+y}$.

3934. $y - 2x = Cx^3(y+x)$. **3935.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$.

3936. $\ln|y| + x/y = C$. **3937.** $x^2 + y^2 = Cy$. **3938.** $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

3939. $x^2 = C^2 + 2Cy$. **3940.** $e^{y/x} = Cy$. **3941.** $\ln|Cx| = -e^{-y/x}$.

3942. $y = xe^{1+Cx}$. **3943.** $(x+y)^2 = Cx^2e^{-x/(x+y)}$. **3944.** $Cx = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3945. $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **3946.** $y^3 = y^2 - x^2$. **3947.** $y = -x$.

3948. $y^2 = 5 \pm 2\sqrt{5}x$. **3949.** Если $\frac{y}{x} = u$, то $\ln|x| = \int\frac{du}{\varphi(1/u)}$; $\varphi(u) = -\frac{1}{u^2}$ или $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$. **3950.** $x = Ce^{\pm 2\sqrt{y/x}}$. **3951.** $x = y\ln|Cy|$. **3952.** $x^2 = 2Cy + C^2$.

3953*. Форму параболоида вращения. Пусть плоскость Oxy – меридианная плоскость поверхности зеркала; в этой плоскости лежит искомая линия, дифференциальное уравнение получится, если приравняем тангенсы углов падения и отражения, выраженные через x, y, y'.

3954. $y = Ce^{-3x} + 2x - 1$. 3955. $y = e^{-x^2}\left(C + x^2/2\right)$. 3956. $y = Cx^2e^{1/x} + x^2$.

3957. $y = (x + C)\left(1 + x^2\right)$. 3958. $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

3959. Если $m \neq -a$, то $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$; если $m = -a$, то $y = (C + x)e^{mx}$.

3960. $y^2 - 2x = Cy^3$. 3961. $x = Ce^2y + y^2/2 + y/2 + 1/4$.

3962. $x = y\ln y + C/y$. 3963. $y = e^x\left(\ln|x| + x^2/2\right) + Ce^x$.

3964. $y = Ce^{-\Phi(x)} + \Phi(x) - 1$. 3965. $y = x/\cos x$.

3966. $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$. 3967. $y = \frac{x}{x+1}\left(x - 1 + \ln|x|\right)$.

3968. $x = -t\operatorname{arctg} t$. 3969. б) $\alpha + \beta = 1$. 3971. $y = Cx - x\ln|x| - 2$.

3972*. $y = Cx \pm \frac{a^2}{2x}$. Дифференциальное уравнение задачи $\left|xy - x^2y'\right| = a^2$.

3973*. $x = Cy \pm a^2 / y$. Дифференциальное уравнение задачи $\left|xy - y^2\frac{dx}{dy}\right| = 2a^2$.

3974. $v = \frac{k_1}{k}\left(t - \frac{m}{k} + \frac{m}{k}e^{-kt/m}\right)$.

3975. $v = \left(v_0 + b\right)e^{-at^2} + b\left(at^2 - 1\right)$, где $a = \frac{k_1}{2m}$, $b = \frac{2km}{k_1^2}$.

3976. $\theta - \theta_0 = e^{-kt}\int_0^t \varphi(t)e^{kt}dt$. 3977. 9,03 А.

3978. $I = \frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}\left[\omega Le^{-Rt/L} + R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t\right]$. 3979. $x = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

3980. $y = Cx^2 + 1/x$. 3981. $y = \frac{C}{x}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{\left(1+x^2\right)^2}{3x}$. 3982. $y = Cx - 1$.

3983. $\left(1 + x^2\right)\left(1 + y^2\right) = Cx^2$. 3984. $(x + y)^2(2x + y)^3 = C$.

3985. $x = Ce^{-x^2/\left(2y^2\right)}$. 3986. $\sin\frac{y}{x} = Cx$. 3987. $\sin\frac{y}{x} + \ln|x| = C$.

3988. $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$. 3989. $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2$.

3990. $y = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$. 3991. $x = y^2\left(1 + Ce^{1/y}\right)$.

3992. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$. 3993. $y = \left(C + e^x\right)(1 + x)^n$.

3994. $y^4 = 4xy + C$. 3995. $y = Ce^x$ и $y = C + x^2/2$

3996*. $y^2 = \frac{2}{3}\sin x + \frac{C}{\sin^2 x}$. Привести к уравнению линейному относительно $z = y^2$.

3997. $\operatorname{arctg}(x + y) = x + C$. 3999. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln\left(x^2 + y^2\right) = \frac{\pi}{4} + \ln 2$.

4000. $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left[2 + x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right]$.

4001. $(1 + y)e^{-y} = \ln\frac{1+e^x}{2} + 1 - x$. 4002. $y = \frac{5}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}\left(2 + x^2\right)$.

4004. $y = \frac{1}{2k}\left[e^{kx+C} + e^{-(kx+C)}\right]$. 4005. $x^2 + y^2 = Cx$. 4006. $(y - x)^2(x + 2y) = 1$.

4007. Параболы $y = x + Cx^2$. 4008. $\left(2y^2 - x^2\right)^3 = Cx^2$.

4009. Цепная линия. 4010. $y = Cx^2$.

4011*. Пучок прямых $y - y_0 = C(x - x_0)$. Дифференциальное уравнение $y - y_0 = y'(x - x_0)$.

4012. Окружность с центром в точке (x_0, y_0): $x^2 + y^2 = 2(xx_0 + yy_0)$.

4013. Любая окружность с центром на оси Oy, касающаяся оси Ox.

4014. Если путь S, а время t, то $S = S_0 + Ce^{-k_2 t} - \frac{k_1}{k_2^2}t + \frac{k_1}{2k_2}t^2$, где S_0 – начальный путь, а k_1 и k_2 – коэффициенты пропорциональности.

4016. 1) 8/9 оборота в секунду; 2) через 6 мин 18 с. 4017. 0,00082 с.

4018*. $v = v_0\left(1 - \frac{m}{M_0}t\right)^k e^{-\frac{9\cdot10^3 k_1}{m v_0}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}\right)}$. Действующая сила F равна $\frac{d(mv)}{dt}$. Для решения этой задачи и следующих двух надо учесть, что масса m является переменной величиной, зависящей от времени t; скорость v – искомая функция.

4019*. $v = \frac{g}{2m-k}(M_0 - mt)\left[\left(1 - \frac{m}{M_0}t\right)^{k/m-2} - 1\right]$. См. указание к решению задачи 4018.

4020*. $v = \frac{g}{\mu}e^{k_1\mu^{2/3}}\int\limits_0^t \mu e^{-k_1\mu^{2/3}}\,dt$, где $\mu = M_0 - mt$, $k_1 = \frac{3k}{m}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2\gamma^2}}$. См. указание к решению задачи 4018.

4021*. $y = m_0 + \frac{m_0}{k_1 - k_2}\left(k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}\right)$, где t – время, y – количество второго продукта. Если x – количество первого продукта, образовавшееся через t единиц времени, то $\frac{dx}{dt} = k_1(m_0 - x)$. Отсюда находим $x = x(t)$. Скорость $\frac{dy}{dt}$ образования второго продукта пропорциональна величине $x - y$.

4022. 2,97 кг соли. Максимум достигается при $t = 33\frac{1}{3}$ мин и равен 3,68 кг.

4023. $I = 1 + (I_0 - 1)e^{-t^2}$.

4024*. $p = \frac{p_0 l e^{k\omega^2 x^2}}{\int\limits_0^l e^{k\omega^2 x^2}\,dx}$, где $k = \frac{M}{2p_0 lS}$. Практически важен случай, когда ω очень велико (центрифуги). Вместо того, чтобы вычислять интеграл в знаменателе при данном ω (он не выражается в элементарных функциях), вычисляют $\lim\limits_{\omega\to\infty} p$ (см. задачу 2439). Дифференциальное уравнение задачи имеет вид $S\,dp = \omega^2 x\,dm$, где dm – масса элемента CD. Далее, $\gamma = 2kp$ (одна из форм закона Бойля–Мариотта; коэффициент пропорциональности обозначен через $2k$ для упрощения записи в дальнейшем); $dm = \gamma S\,dx = 2kpS\,dx$. В результате получится уравнение с разделяющимися переменными $dp/p = 2k\omega^2 x\,dx$. Интегрирование его дает $p = Ce^{k\omega^2 x^2}$. Далее, $M = \int_0^M dm = C \cdot 2kS \int_0^l e^{k\omega^2 x^2} dx$, откуда находится C. Имеем $p = \frac{Me^{k\omega^2 x^2}}{2kS\int_0^l e^{k\omega^2 x^2} dx}$, но $\gamma_0 = 2kp_0 = \frac{M}{lS}$, $k = \frac{M}{2p_0 lS}$ и окончательно $p = \frac{p_0 l e^{k\omega^2 x^2}}{\int_0^l e^{k\omega^2 x^2} dx}$.

4025. $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$. 4026. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

4027. $x - 2y + \ln|x + y| = C$. 4028. $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y + 2)$.

4029. $y^2 = x + (x + 1)\ln\frac{C}{x+1}$. 4030. $y^2 e^{-y^2/x} = C$. 4031. $y = \frac{1}{x}\operatorname{tg}\ln|Cx|$.

4032. $x^2y^2 + 1 = Cy$. 4033. $Cx = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$. 4034. $(1 + Cx)e^y = 1$.

4035. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$. 4036. $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2$. 4037. $y = x\operatorname{tg}(x + C)$.

4038. $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$. 4039. $y = \frac{1}{(1+x)\left[C + \ln|1+x|\right]}$.

4040. $ny^n = Ce^{-nx/a} + nx - a$. 4041. $x^2 = y^2(C - y^2)$. 4042. $y(1 + \ln x + Cx) = 1$.

4043. $y(x + C) = \sec x$. 4044. $y = \left(\frac{C + \ln|\cos x|}{x} + \operatorname{tg} x\right)^2$. 4045. $y = \frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$.

4046. $y^2 = Ce^{-2a/x} - \frac{b}{a}$. 4047. $y = \frac{\varphi(x)}{x+C}$. 4048. 1) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$; 2) $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1$.

4049. $\frac{\rho-k}{\rho} = \frac{(\rho_0-k)\varphi}{\rho_0\varphi_0}$. 4050. $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$. 4051. $x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$.

4052. $xe^y - y^2 = C$. 4053. $x^y = C$. 4054. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$.

4055. $\operatorname{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C$. 4056. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$.

4057. $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$. 4058. $x - \frac{y}{x} = C$. Интегрирующий множитель $\mu(x) = 1/x^2$. 4059*. $x^2 + 2x/y = C$. Искать интегрирующий множитель в виде функции $\mu(y)$. 4060. $(x^2 + y^2)e^x = C$. 4061. $\frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} = C$.

4062. $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$. 4064. $\mu = y^{-n}e^{-(n-1)\int P(x)dx}$.

4065. Выражение $\frac{Y'_x - X'_y}{X - Y}$ должно быть функцией от $(x + y)$.

4066. Выражение $\frac{Y'_x - X'_y}{xX - yY}$ должно быть функцией от xy.

4067. $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$. 4068. $y = \left[Ce^{(m-1)bx/a} - \frac{c}{b}\right]^{1/(1-m)}$.

4069. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$. 4070. $\frac{2x}{x-y} + \ln|x + y| + 3\ln|y - x| = C$.

4071. $x+y=a\,\mathrm{tg}(C+y/a)$. 4072. $y^3-3xy=C$. 4073. $x^2-y^2=Cy^3$.

4074. $3x^2y+x^3y^3=C$. 4075. $y\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)=Ce^{-x}$. 4076. $\ln|1+y|-\frac{1+y}{x}=C$.

4077. $y^2-1+Cxy=0$. 4078. $\frac{xy}{x-y}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$.

4079. $3\sqrt{y}=C\sqrt[4]{x^2-1}+x^2-1$. 4080. $y=\sin x+C\cos x$.

4081. $y=\frac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\sin x)}$. 4082. $\mathrm{tg}\,x-\frac{\sin y}{\sin x}=C$. 4083. $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$.

4084. $xy\cos\frac{y}{x}=C$. 4085. $\sin y=x-1+Ce^{-x}$. 4086. $y=\frac{\mathrm{tg}\,x+\sec x}{C+\sin x}$.

4087. $\ln|Cx|=-e^{-(x^2+y^2)/x}$. 4088. $x+ye^{x/y}=C$. 4089. $y=x\ln|Cx|$.

4090. $y^2-by-axy=C$.

4091. Окружность $x^2+y^2-\frac{2k}{k+1}(ax+by)=C$ $(k\neq-1)$ или окружность $x^2+y^2-\frac{2k}{k-1}(ax+by)=C$ $(k\neq1)$; если $k=-1$ или $k=1$, то прямая $ax+by=C$.

4092. Логарифмические спирали $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\pm\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$.

4093*. $y^2=\frac{x^4+C^4}{2x^2}$. Дифференциальное уравнение задачи $y^2=x(x-yy')$.

4094. $I=t/2$. 4095. Вектор поля в каждой точке перпендикулярен к полярному радиусу точки. Интегральные кривые – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. Уравнение семейства $x^2+y^2=C$. Изоклины – семейство прямых, проходящих через начало координат.

4096. 1) $y'=f(xy)$; 2) $y'=f\left(y^2/x\right)$; 3) $y'=f\left(x^2+y^2\right)$.

4097. Прямые $y=Cx$. Результат может быть высказан в форме следующей геометрической теоремы: если семейство парабол, имеющих общую ось и общую вершину, пересечь прямой, проходящей через вершину, то касательные к различным параболам в точках пересечения их с прямой будут между собой параллельны.

4099. $y'=\frac{ay+b}{x}+C$; $y'=ay+bx+C$. 4103. $y=0{,}31$ при $\Delta x=0{,}05$.

4104. $y=1{,}68$ при $\Delta x=0{,}05$.

4105. Точное решение: $y=e^{x^2/4}=f(x)$; $f(0{,}9)=1{,}2244$. Приближенное решение: $f(0{,}9)=1{,}1942$. Относительная погрешность равна $-2{,}5\%$.

4106. При точном решении $x=\sqrt[3]{3(e-1)}\approx1{,}727$; численное интегрирование при делении интервала на 4 части дает $x\approx1{,}72$.

4107. $y_2=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+\frac{1}{63}x^7$.

4108. $-1{,}28$. 4109. $y=1+x+x^2+2x^3+\frac{13}{4}x^4+\ldots$

4110. $y=1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+\ldots$

4111. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot9}x^7-\frac{2}{7\cdot11\cdot27}x^{11}-\ldots$

4112. $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \dots$ 4113. $y = 0$.

4114. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \dots$ 4115. $y = -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{6!} - \dots$

4116. $y = 1 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{4(x-1)^4}{4!} - \frac{60(x-1)^5}{5!} + \dots$

4117. $y = Cx + C^2$; особый интеграл $x^2 + 4y = 0$. 4118. $y = Cx - 3C^3$; особый интеграл $9y \pm 2x\sqrt{x} = 0$. 4119. $y = Cx + 1/C$; особый интеграл $y^2 = 4x$.

4120. $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; особый интеграл $x^2 + y^2 = 1$.

4121. $y = Cx + \sin C$; особое решение $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$.

4122. $y = Cx - \ln C$; особое решение $y = \ln x + 1$. 4123. $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$; особое решение $y = 0$. 4124. $y = Cx^2 + 1/C$; особый интеграл $y^2 - 4x^2 = 0$.

4125. $2Cx = C^2 - y^2$; особого интеграла нет.

4126. $x = Ce^{-p} + 2(1-p)$, $y = x(1+p) + p^2$; особого интеграла нет.

4127. $y = Cx - e^C$; особое решение $y = x(\ln x - 1)$.

4128. $y = Cx + C + C^2$; особое решение $y = -(x+1)^2/4$.

4129. $y = Cx + a\sqrt[3]{1 - C^3}$; особый интеграл $\sqrt{y^3} - \sqrt{x^3} = \sqrt{a^3}$. 4130. $(C - x)y = C^2$; особое решение $y = 4x$. 4131. $y^2 - 4e^x = 0$. 4132. $xy = 1$. 4133. $2y - x^2 = 0$.

4135. Равнобочная гипербола $2xy = \pm a^2$, где a^2 – площадь треугольника; тривиальное решение – любая прямая семейства $y = \pm C^2x/2 + aC$.

4136. $(y - x - 2a)^2 = 8ax$. 4137. Эллипсы и гиперболы.

4138. $x = \frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}\left(1+p^2\right)}{p^2}$, $y = \frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}$ или $x = \frac{\left(p^2+1\right)C}{\sqrt{p}\sqrt[4]{\left(p^2+2\right)^3}}$, $y = \frac{-C\sqrt{p}}{\sqrt[4]{\left(p^2+2\right)^3}}$

4139. $y^2 = Cx^{-1/k} + \frac{k^2x^2}{2k+1}$.

4140*. $y = \cos\alpha\left(C + \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right)$, $x = \sin\alpha\left(a - C - \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right)$. В полученном дифференциальном уравнении положить $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, а затем выразить x через параметр α, найти dx, заменить dx через $dy/\operatorname{tg}\alpha$ и решить получившееся дифференциальное уравнение, считая y функцией α. 4141. $S = at^2$, где торая определенная константа. 4142. $x^2 + y^2 = 2a^2\ln|Cx|$.

4143. $y = Ce^{-x/2}$. 4144. $y = C\left(x^2 + y^2\right)$. 4145. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = C\left(y^2 + 2x^2\right)$.

4146. Если параметр парабол равен $2p$ и их прямая взята в качестве оси ординат, то уравнения траекторий будут $y = C \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}$. 4147. Трактрисы. 4148. О

4071. $x+y=a\,\mathrm{tg}(C+y/a)$. **4072.** $y^3-3xy=C$. **4073.** $x^2-y^2=Cy^3$.

4074. $3x^2y+x^3y^3=C$. **4075.** $y\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)=Ce^{-x}$. **4076.** $\ln|1+y|-\frac{1+y}{x}=C$.

4077. $y^2-1+Cxy=0$. **4078.** $\frac{xy}{x-y}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$.

4079. $3\sqrt{y}=C\sqrt[4]{x^2-1}+x^2-1$. **4080.** $y=\sin x+C\cos x$.

4081. $y=\frac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\sin x)}$. **4082.** $\mathrm{tg}\,x-\frac{\sin y}{\sin x}=C$. **4083.** $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$.

4084. $xy\cos\frac{y}{x}=C$. **4085.** $\sin y=x-1+Ce^{-x}$. **4086.** $y=\frac{\mathrm{tg}\,x+\sec x}{C+\sin x}$.

4087. $\ln|Cx|=-e^{-(x^2+y^2)/x}$. **4088.** $x+ye^{x/y}=C$. **4089.** $y=x\ln|Cx|$.

4090. $y^2-by-axy=C$.

4091. Окружность $x^2+y^2-\frac{2k}{k+1}(ax+by)=C$ $(k\neq-1)$ или окружность $x^2+y^2-\frac{2k}{k-1}(ax+by)=C$ $(k\neq1)$; если $k=-1$ или $k=1$, то прямая $ax+by=C$.

4092. Логарифмические спирали $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{k\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$.

4093*. $y^2=\frac{x^4+C^4}{2x^2}$. Дифференциальное уравнение задачи $y^2=x(x-yy')$.

4094. $l=t/2$. **4095.** Вектор поля в каждой точке перпендикулярен к полярному радиусу точки. Интегральные кривые – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат. Уравнение семейства $x^2+y^2=C$. Изоклины – семейство прямых, проходящих через начало координат.

4096. 1) $y'=f(xy)$; 2) $y'=f(y^2/x)$; 3) $y'=f(x^2+y^2)$.

4097. Прямые $y=Cx$. Результат может быть высказан в форме следующей геометрической теоремы: если семейство парабол, имеющих общую ось и общую вершину, пересечь прямой, проходящей через вершину, то касательные к различным параболам в точках пересечения их с прямой будут между собой параллельны.

4099. $y'=\frac{ay+b}{x}+C$; $y'=ay+bx+C$. **4103.** $y=0{,}31$ при $\Delta x=0{,}05$.

4104. $y=1{,}68$ при $\Delta x=0{,}05$.

4105. Точное решение: $y=e^{x^2/4}=f(x)$; $f(0{,}9)=1{,}2244$. Приближенное решение: $f(0{,}9)=1{,}1942$. Относительная погрешность равна $-2{,}5\%$.

4106. При точном решении $x=\sqrt[3]{3(e-1)}\approx1{,}727$; численное интегрирование при делении интервала на 4 части дает $x=1{,}72$.

4107. $y_3=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+\frac{1}{63}x^7$.

4108. $-1{,}28$. **4109.** $y=1+x+x^2+2x^3+\frac{13}{4}x^4+\dots$

4110. $y=1-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{5}+\dots$

4111. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7\cdot9}x^7-\frac{2}{7\cdot11\cdot27}x^{11}-\dots$

4112. $y=1+2x-x^2+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+\dots$ **4113.** $y=0$.

4114. $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{11x^4}{2\cdot3\cdot4}+\dots$ **4115.** $y=-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^6}{6!}-\dots$

4116. $y=1+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{2(x-1)^3}{3!}+\frac{4(x-1)^4}{4!}-\frac{60(x-1)^5}{5!}+\dots$

4117. $y=Cx+C^2$; особый интеграл $x^2+4y=0$. **4118.** $y=Cx-3C^3$; особый интеграл $9y\pm2x\sqrt{x}=0$. **4119.** $y=Cx+1/C$; особый интеграл $y^2=4x$.

4120. $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$; особый интеграл $x^2+y^2=1$.

4121. $y=Cx+\sin C$; особое решение $y=x(\pi-\arccos x)+\sqrt{1-x^2}$.

4122. $x=Cx-\ln C$; особое решение $y=\ln x+1$. **4123.** $y=\left(\sqrt{x+1}+C\right)^2$; особое решение $y=0$. **4124.** $y=Cx^2+1/C$; особый интеграл $y^2-4x^2=0$.

4125. $2Cx=C^2-y^2$; особого интеграла нет.

4126. $x=Ce^{-p}+2(1-p)$, $y=x(1+p)+p^2$; особого интеграла нет.

4127. $y=Cx-e^C$; особое решение $y=x(\ln x-1)$.

4128. $y=Cx+C+C^2$; особое решение $y=-(x+1)^2/4$.

4129. $y=Cx+a\sqrt[3]{1-C^3}$; особый интеграл $\sqrt{y^3}-\sqrt{x^3}=\sqrt{a^3}$. **4130.** $(C-x)y=C^2$; особое решение $y=4x$. **4131.** $y^2-4e^x=0$. **4132.** $xy=1$. **4133.** $2y-x^2=0$.

[illegible] Равнобочная гипербола $2xy=\pm a^2$, где a^2 – площадь треугольника; три- [illegible] решение – любая прямая семейства $y=\pm C^2x/2+aC$.

4136. $(y-x-2a)^2=8ax$. **4137.** Эллипсы и гиперболы.

4138. $x=\frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}(1+p^2)}{p^2}$, $y=\frac{Ce^{-\frac{1}{2p^2}}}{p}$ или $x=\frac{(p^2+1)C}{\sqrt{p}\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}$, $y=\frac{-C\sqrt{p}}{\sqrt[4]{(p^2+2)^3}}$.

4139. $y^2=Cx^{-1/k}+\frac{k^2x^2}{2k+1}$.

4140*. $y=\cos\alpha\left(C+\frac{a}{2}\sin^2\alpha\right)$, $x=\sin\alpha\left(a-C-\frac{a}{2}\sin^2\alpha\right)$. В полученном дифференциальном уравнении положить $\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\,\alpha$, а затем выразить x через y и параметр α, найти dx, заменить dx через $dy/\mathrm{tg}\,\alpha$ и решить получившееся дифференциальное уравнение, считая y функцией α. **4141.** $S=at^2$, где a – [illegible] константа. **4142.** $x^2+y^2=2a^2\ln|Cx|$.

4143. $r=Ce^{[illegible]}$. **4144.** $y=C(x^2+y^2)$. **4145.** $(x^2+y^2)^2=C(y^2+2x^2)$.

[illegible] Если параметр парабол равен $2p$ и прямая взята в качестве оси ординат, то уравнения траекторий будут $y=C+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}$. **4147.** Трактрисы. **4148.** Отсчитывая угол α в одном из двух возможных направлений, получим уравнение семейства $xy - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2 + y^2\right) = C$. **4149.** Отсчитывая угол α в одном из двух возможных направлений, получим уравнение семейства $\ln\left(2x^2 + xy + y^2\right) + \frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}} = C$. **4150*.** Можно принять, например, что ветер дует вдоль оси Ox. Линии распространения звука по плоскости Oxy ортогональными траекториями семейства окружностей $(x - at)^2 + y^2 = (v_0 t)^2$, где t – время, прошедшее после выхода звуковой волны из источника звука, а v_0 – скорость звука в неподвижном воздухе. Для любого фиксированного t дифференциальное уравнение искомых ортогональных траекторий $y' = \frac{y}{x-at}$ совместное с уравнением семейства окружностей. Исключая t, получим некоторое уравнение Лагранжа. Его общее решение $x = C(\cos\varphi + b)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{1/b}$, $y = C\sin\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{1/b}$, где $b = \pm\frac{a}{v_0}$, φ – параметр.

4151. $x = C\sin t + R(\cos t + t\sin t)$, $y = -C\cos t + R(\sin t - t\cos t)$.
4152. $x = C/\operatorname{ch} t + a(t - \operatorname{th} t)$, $y = C\operatorname{th} t + a/\operatorname{ch} t$.
4153. $x = a(\cos t + t\sin t) - \cos t\left(at^2/2 + C\right)$. $y = a(\sin t + t\cos t) - \sin t\left(at^2/2 + C\right)$.
4154. $x = C\sin t + 2\operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{tg}^2 t - C\cos t - 2$.
4155. $y = x^3/6 - \sin x + C_1x + C_2$.
4156. $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\left(x^2 - 1\right) - \frac{x}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C_1x + C_2$.
4157. $y = \frac{x^2}{2}\left[\ln x - \frac{3}{2}\right] + C_1x + C_2$. **4158.** $y = C_1x^3 + C_2$.
4159. $y = C_1e^x + C_2 - x - x^2/2$. **4160.** $y = x^3/3 + C_1x^2 + C_2$.
4161. $y = \left(1 + C_1^2\right)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$. **4162.** $y = \left(C_1x - C_1^2\right)e^{x/C_1+1} + C_2$.
4163. $y = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2$. **4164.** $y = \frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x - 1)^3} + C_2$.
4165. $y = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C_1\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right) + C_2$. **4166.** $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$.
4167. $y = C_1(x + C_2)^{2/3}$. **4168.** $y = C_1e^{x/a} + C_2e^{-x/a}$.
4169. $x = \pm\frac{4}{3}\left(y^{1/2} - 2C_1\right)\sqrt{y^{1/2} + C_1} + C_2$. **4170.** $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$. **4171.** $(x + C_2)^2 - y^2 = C_1$.
4172. $y = C_1e^{C_2x}$. **4173.** $y\cos^2(x + C_1) = C_2$. **4174.** $(x + C_2)\ln y = x + C_1$.
4175. Если произвольная постоянная, вводимая первым интегрированием, положительна $\left(+C_1^2\right)$, то $y = C_1\operatorname{tg}(C_1x + C_2)$; если же она отрицательна $\left(-C_1^2\right)$, то $y = C_1\frac{1+e^{2(C_1x+C_2)}}{1-e^{2(C_1x+C_2)}} = -C_1\operatorname{cth}(C_1x + C_2)$; если $C_1 = 0$, то $y = -\frac{1}{x+C_2}$.
4176. $x = C_1 + \cos C_2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|$. **4177.** $C_1x + C_2 = \ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$.

4178. $\frac{x+C_2}{2} = C_1\operatorname{arctg}(C_1\ln y)$, $C_1 > 0$. **4179.** $\ln|C_1y| = 2\operatorname{tg}(2x + C_2)$.
4180. $y = \ln\left|x^2 + C_1\right| + \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right| + C_2$, если $C_1 < 0$, и $y = \ln\left|x^2 + C_1\right| + \frac{2}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}} + C_2$, если $C_1 > 0$.
4181*. После подстановки $y' = p$ уравнение распадается на два, из которых одно – типа Клеро. Его общее решение $y = C_1 + C_2e^{C_1x}$, а особые решения $y = \frac{4}{C-x}$. Другое уравнение $y' = 0$. **4182.** $y = C_1x(x - C_1) + C_2$ и особые решения $y = x^3/3 + C$. **4183.** $y^2 = C_1x^4 + C_2$. **4184.** $x = \ln\left|\frac{C_1x^{C_1}}{C_2 - x^{C_1}}\right|$.
4185. $y = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2}$. **4186.** $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$. **4187.** $y = C_1xe^{C_2/x}$.
4188. $\ln|y + C_1| + \frac{C_1}{y+C_1} = x + C_2$. **4189.** $y = x^3 + 3x + 1$. **4190.** $y = 2 + \ln\frac{x^2}{4}$.
4191. $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$. **4192.** $y = \frac{4}{(x+4)^2}$. **4193.** $y - x = 2\ln|y|$.
4194. $y = \sqrt{2x - x^2}$. **4195.** $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$. **4196.** $y = -\ln|1 - x|$. **4197.** $y = (x + 1)/x$.
4198*. $y = x$. Сделать подстановку $y = ux$. **4199.** $y = 2e^{x^2/2} - 1$.
4200*. Дифференциальное уравнение линии $dx = \frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^{2/k} - 1}}$, где k – коэффициент пропорциональности. Если $k = 1$, то

$$y = \frac{1}{2C_1}\left[e^{C_1x+C_2} + e^{-(C_1x+C_2)}\right] = \frac{\operatorname{ch}(C_1x+C_2)}{C_1},$$

это – цепная линия. Если $k = -1$, то $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$; это – окружность. Если $k = 2$, то $(x + C_2)^2 = 4C(y - C_1)$; это – парабола. Если $k = -2$, то $dx = \sqrt{\frac{C_1y}{1-C_1y}}dy$; это – дифференциальное уравнение циклоиды.
4201. $e^{y/a} = C_2\sec(x/a + C_1)$. **4202.** $Cx = y^{2k-1}$. **4203.** Цепная линия.
4204. $v = \sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$. **4205.** Парабола. **4206.** $S = \frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t + C\right)^3} - \sqrt{C^3}\right]$.
4207*. Пусть ось абсцисс направлена вертикально вниз, начало координат – на поверхности жидкости, уравнение луча $y = f(x)$. На глубине x имеем $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+d\alpha)} = \frac{m+dm}{m}$, где m – показатель преломления на глубине x, а α – угол между вертикалью и касательной к световому лучу. Очевидно, $\operatorname{tg}\alpha$ равняется y'. Из уравнения $m\sin\alpha = (m + dm)(\sin\alpha\cos d\alpha + \cos\alpha\sin d\alpha)$ раскрыв скобки и отбросив бесконечно малые порядка выше первого, получим $m\,d\alpha = -dm\operatorname{tg}\alpha$, откуда $\frac{dm}{m} = -\frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$. Интегрируя это уравнение, найдем y' как функцию m.

Подставляя вместо m его выражение через x и интегрируя вторично, получим решение $y = \frac{m_0 h \sin\alpha_0}{m_2 - m_1} \ln\left|m + \sqrt{m^2 - m_0^2 \sin^2\alpha_0}\right| + C$, где $m = \frac{(m_2 - m_1)x + m_1 h}{h}$.

4208. $y = x^2 \ln\sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. 4209. $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

4210. $y = \frac{e^{ax}}{a^{10}} + P_9$ (P_9 – полином 9-й степени относительно x с произвольными коэффициентами).

4211. $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 - C_1^2 (x + C_1) \ln|x + C_1|$.

4212. $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

4213. $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2 x + C_3$. 4214. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

4215. Решения можно записать в трех формах: $y = C_1 \sin(C_2 x + C_3)$, или $y = C_1 \operatorname{sh}(C_2 x + C_3)$, или $y = C_1 \operatorname{ch}(C_2 x + C_3)$.

4216. $(x + C_2)^2 + (y + C_3)^2 = C_1^2$.

4217. $y = C_2\left(x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}\right) + C_3$.

4219. 2) $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \ldots$

4220. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{3(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4221. $y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4222. $y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots$ Если $f(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}$, то при $x = -0{,}5$ получается знакочередующийся числовой ряд и значение первого из отброшенных членов меньше 0,001.

4223. $y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{14x^6}{6!} + \ldots$; пятого.

4224. $y = x^2 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{80}x^8 - \frac{7}{4400}x^{11} + \ldots$; 0,318; 0,96951.

4225*. Дифференциальное уравнение задачи $E = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{V_0 - kQ}{k_1}$, где Q – количество электричества, протекшее через цепь за промежуток времени от начала опыта до момента t. Выразив Q через V (V – наличное количество воды в сосуде в момент t) и определив из условий задачи коэффициенты, придем к уравнению $V'' + aVV' + b = 0$, где $a = \frac{1}{k_1 L} = 0{,}005$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}00935$. Интегрируя его при начальных условиях $V_0 = 1000$ см^3, $V_0' = -kI_0 = -0{,}00187$ см^3/с, получим ряд

$$V = 1000 - 0{,}00187t - 10^{-9}\left[2{,}91t^3 - 3{,}64t^4 + 3{,}64t^5 - 3{,}04t^6 + 2{,}17t^7 - \ldots\right].$$

Ряд знакочередующийся, коэффициенты, начиная с шестого, убывают, стремясь к нулю, что удобно для вычислений. 4226*. Дифференциальное уравнение задачи имеет вид $L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{k_1}{M_0 - kQ} = E$. Взяв в качестве искомой функции количество y хлористого водорода, не разложившегося к моменту t, приведем уравнение к виду $yy'' + ay' + by = 0$, где $a = k_1/L = 50$, $b = kE/L = 0{,}0191$. Интегрируя это уравнение при начальных условиях $y_0 = M_0 = 10$, $y_0' = -kI_0 = -0{,}00381$, получим ряд $y = 10 - 0{,}00381t + 10^{-10}t^3 \cdot (1{,}21 - 1{,}52t + \ldots)$.

4227. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. 4228. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

4229. $(x^3 - 3x^2 + 3x)y''' - (x^3 - 3x + 3)y'' - 3x(1-x)y' + 3(1-x)y = 0$.

4230. $y = 3x^2 - 2x^3$.

4231. а) $\sin^2 x / \cos^2 x \neq \mathrm{const}$; б) $y''\sin 2x - 2y'\cos 2x = 0$.

4232*. 3) По формуле Остроградского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int P(x)dx}$, или, раскрывая определитель (вронскиан), $y_1y_2' - y_1'y_2 = Ce^{-\int P(x)dx}$. Делим обе части уравнения на y_1^2, тогда $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$, откуда и следует искомое соотношение.

4233. $y = C_1 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2x$. 4234. $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$. 4235. $y = x^2 - e^{x-1}$.

4236*. Функции P и Q должны быть связаны соотношением $Q' + 2PQ = 0$. Подставить $y_1 = 1/y_2$ в формулу (вытекающую из формулы Остроградского) задачи 4232, полученное соотношение продифференцировать дважды и y_2', y_2'' подставить в данное уравнение.

4237*. $y = C_1(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1-x^2}(4x^2 - 1)$. Полагаем согласно условию $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Подставляя y_1 в данное уравнение, получим $B = 0$, $D = 0$, $A/C = 4/-3$, или $A = 4k$, $C = -3k$. Следовательно, частное решение будет $y_1 = k(4x^3 - 3x)$. В соответствии со свойством линейного уравнения можно принять $k = 1$, тогда $y_1 = 4x^3 - 3x$. Зная одно частное решение, обычным путем находим второе и составляем общее решение.

4238. $y = C_1 \sin x + C_2\{1 - \sin x \ln|\operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)|\}$.

4239. $y = C_1x + C_2x\int \frac{e^{x^2}dx}{x^2}$. 4240. $y = C_1x + C_2(x^3 - 1)$.

4241. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. 4242. $y = x^3 + x(C_1 + C_2\ln|x|)$.

4243. $y = C_1e^x + C_2x - x^2 - 1$. 4244. $y = C_1x^2 + C_2(x+1) - x$.

4245. $y = 2 + 3x + x\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x\right) + x^2$.

4246. $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \ldots$

4247. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{52x^8}{8!} - \ldots$

4248. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^6}{2^3\cdot 5\cdot 3!} + \frac{x^8}{2^4\cdot 7\cdot 4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2^n(2n-1)n!}$

4249. $y = C_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \ldots\right) + C_2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \ldots\right)$.

Подставляя вместо m его выражение через x и интегрируя вторично, получим решение $y = \frac{m_0 h \sin\alpha_0}{m_2 - m_1} \ln\left|m + \sqrt{m^2 - m_0^2 \sin^2\alpha_0}\right| + C$, где $m = \frac{(m_2 - m_1)x + m_1 h}{h}$.

4208. $y = x^2 \ln\sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. 4209. $y = -\frac{1}{8}\sin 2x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

4210. $y = \frac{e^{ax}}{a^{10}} + P_9$ (P_9 – полином 9-й степени относительно x с произвольными коэффициентами).

4211. $y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 - C_1^2 (x + C_1) \ln|x + C_1|$.

4212. $y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$.

4213. $y = \frac{1}{3}(C_1 - 2x)^{3/2} + C_2 x + C_3$. 4214. $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$.

4215. Решения можно записать в трех формах: $y = C_1 \sin(C_2 x + C_3)$, или $y = C_1 \operatorname{sh}(C_2 x + C_3)$, или $y = C_1 \operatorname{ch}(C_2 x + C_3)$.

4216. $(x + C_2)^2 + (y + C_3)^2 = C_1^2$.

4217. $y = C_2\left(x e^{C_1 x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1 x}\right) + C_3$.

4219. 2) $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{14x^5}{5!} + \ldots$

4220. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{3(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4221. $y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4222. $y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \ldots$ Если $f(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!}$, то при $x = -0{,}5$ получается знакочередующийся числовой ряд и значение первого из отброшенных членов меньше 0,001.

4223. $y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{14x^6}{6!} + \ldots$; пятого.

4224. $y = x^2 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{80}x^8 - \frac{7}{4400}x^{11} + \ldots$; 0,318; 0,96951.

4225*. Дифференциальное уравнение задачи $E = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{V_0 - kQ}{k_1}$, где Q – количество электричества, протекшее через цепь за промежуток времени от начала опыта до момента t. Выразив Q через V (V – наличное количество воды в сосуде в момент t) и определив из условий задачи коэффициенты, придем к уравнению $V'' + aVV' + b = 0$, где $a = \frac{1}{k_1 L} = 0{,}005$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}00935$. Интегрируя его при начальных условиях $V_0 = 1000$ см^3, $V_0' = -kI_0 = -0{,}00187$ см^3/с, получим ряд

$$V = 1000 - 0{,}00187t - 10^{-6}\left[2{,}91t^3 - 3{,}64t^4 + 3{,}64t^5 - 3{,}04t^6 + 2{,}17t^7 - \ldots\right].$$

Ряд знакочередующийся, коэффициенты, начиная с шестого, убывают, стремясь к нулю, что удобно для вычислений. 4226*. Дифференциальное уравнение задачи имеет вид $L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{k_1}{M_0 - kQ} = E$. Взяв в качестве искомой функции количество y хлористого водорода, не разложившегося к моменту t, приведем уравнение к виду $yy'' + ay' + by = 0$, где $a = k_1/L = 50$, $b = kE/L = 0{,}0191$. Интегрируя это уравнение при начальных условиях $y_0 = M_0 = 10$, $y_0' = -kI_0 = -0{,}00381$, получим ряд $y = 10 - 0{,}00381t + 10^{-10}t^3 \cdot (1{,}21 - 1{,}52t + \ldots)$.

4227. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. 4228. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$.

4229. $(x^3 - 3x^2 + 3x)y''' - (x^3 - 3x + 3)y'' - 3x(1-x)y' + 3(1-x)y = 0$.

4230. $y = 3x^2 - 2x^3$.

4231. а) $\sin^2 x / \cos^2 x \neq \mathrm{const}$; б) $y'' \sin 2x - 2y' \cos 2x = 0$.

4232*. 3) По формуле Остроградского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int P(x)dx}$, или, раскрывая определитель (вронскиан), $y_1y_2' - y_1'y_2 = Ce^{-\int P(x)dx}$. Делим обе части уравнения на y_1^2, тогда $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$, откуда и следует искомое соотношение.

4233. $y = C_1 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2 x$. 4234. $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$. 4235. $y = x^2 - e^{x-1}$.

4236*. Функции P и Q должны быть связаны соотношением $Q' + 2PQ = 0$. Подставить $y_1 = 1/y_2$ в формулу (вытекающую из формулы Остроградского) задачи 4232, полученное соотношение продифференцировать дважды и y_2', y_2'' подставить в данное уравнение.

4237*. $y = C_1(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1-x^2}(4x^2 - 1)$. Полагаем согласно условию $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Подставляя y_1 в данное уравнение, получим $B = 0$, $D = 0$, $A/C = 4/-3$, или $A = 4k$, $C = -3k$. Следовательно, частное решение будет $y_1 = k(4x^3 - 3x)$. В соответствии со свойством линейного уравнения можно принять $k = 1$, тогда $y_1 = 4x^3 - 3x$. Зная одно частное решение, обычным путем находим второе и составляем общее решение.

4238. $y = C_1 \sin x + C_2\left[1 - \sin x \ln\left|\operatorname{tg}(\pi/4 + x/2)\right|\right]$.

4239. $y = C_1 x + C_2 x\int\frac{e^{x^2}dx}{x^2}$. 4240. $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$.

4241. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. 4242. $y = x^3 + x(C_1 + C_2 \ln|x|)$.

4243. $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$. 4244. $y = C_1 x^3 + C_2(x+1) - x$.

4245. $y = 2 + 3x + x\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x\right) + x^2$.

4246. $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \ldots$

4247. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{62x^8}{8!} - \ldots$

4248. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^6}{2^3 \cdot 5 \cdot 3!} + \frac{x^8}{2^4 \cdot 7 \cdot 4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2^n(2n-1)n!}$.

4249. $y = C_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \ldots\right) + C_2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30} + \ldots\right)$.

4250. $y = C_1\left(1 + \frac{x^4}{12} + \ldots\right) + C_2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots\right)$.

4251. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$. 4252. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$.

4253. $y = C_1e^{4x} + C_2$. 4254. $y = C_1e^{\left(1+\sqrt{2}\right)x} + C_2e^{\left(1-\sqrt{2}\right)x}$.

4255. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x/3}$. 4256. $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

4257. $y = e^{-3x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$.

4258. $y = e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)$. 4259. $y = e^{x}\left(C_1 + C_2x\right)$.

4260. $x = \left(C_1 + C_2t\right)e^{2,5t}$. 4261. $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-x/4}$.

4262. $y = 4e^{x} + 2e^{3x}$. 4263. $y = 3e^{-2x}\sin 5x$. 4264. $y = e^{-x/2}(2 + x)$.

4265. $y = \left[1 + (1 - m)x\right]e^{mx}$. 4266. $y = \cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x$.

4267. Если $k > 0$, то $y = \frac{a}{\sqrt{k}}\sin\left[\sqrt{k}\left(x - x_0\right)\right] + y_0\cos\left[\sqrt{k}\left(x - x_0\right)\right]$; если $k < 0$, то $y = \frac{1}{2\sqrt{k_1}}\left[\left(y_0\sqrt{k_1} + a\right)e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)} + \left(y_0\sqrt{k_1} - a\right)e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}\right]$, где $k_1 = -k$.

4268. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x/2} + e^{x}$. 4269. $y = C_1\cos ax + C_2\sin ax + \frac{e^{x}}{a^2+1}$.

4270. $y = C_1e^{6x} + C_2e^{x} + \frac{5\sin x + 7\cos x}{74}$.

4271. $y = e^{-x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$.

4272. $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

4273. $y = e^{x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + x + 1$. 4274. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-5x} - 0,2$.

4275. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \bar{y}$, где $\bar{y}$ равно:

1) $\frac{5}{3}e^{-x}$; 2) $3xe^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$; 4) $x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$;

5) $-\frac{3}{5}e^{x}\left[\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right]$; 6) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^{x}\left(2x^2 + x\right)$;

8) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}(9 + 3\cos 2x - \sin 2x)$; 9) $-2xe^{x} - \frac{1}{12}e^{-2x}$;

10) $\frac{1}{20}\cos x - \frac{3}{20}\sin x + \frac{7}{200}\cos 3x + \frac{9}{200}\sin 3x$; 11) $-\frac{1}{12}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{x}$.

4276. $y = C_1 + C_2e^{-5x/2} + \bar{y}$, где $\bar{y}$ равно:

1) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$; 2) $\frac{1}{7}e^{x}$; 3) $5\sin x - 2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x + \frac{5}{164}\sin 2x - \frac{1}{41}\cos 2x$;

5) $\cos 2,5x + \sin 2,5x - 0,02xe^{-2,5x}$; 6) $\left(-5x - \frac{13}{29}\right)\cos x - \left(2x - \frac{101}{29}\right)\sin x$;

7) $\frac{1}{169}e^{-x}\left[(650x + 2650)\sin x - (3250x - 400)\cos x\right]$; 8) $\frac{2}{10}\left(\frac{1}{5}e^{5x/2} - xe^{-5x/2}\right)$.

4277. $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x\right) + \bar{y}$, где $\bar{y}$ равно:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{x}$; 3) $\frac{1}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\sin 3x + 6\cos 3x\right) - \frac{1}{50}(3\sin x + 4\cos x)$;

6) $\frac{2}{100}(3\sin x + 4\cos x) + \frac{1}{676}(5\sin 3x - 12\cos 3x)$;

7) $2x^3+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

9) $\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\sin x+4\cos x)$; 10) $e^x-\frac{1}{2}e^{x+1}+\frac{1}{10}e^{1-x}$.

4278. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\overline{y}$, где $\overline{y}$ равно:

1) $2x^3-13x+2$; 2) $\cos 3x$; 3) $\frac{1}{2}x\sin x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$;

5) $\frac{1}{4}\left(x\sin x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$; 6) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\operatorname{ch}x$; 8) $0{,}5+0{,}1\operatorname{ch}2x$.

4279. $y=e^{3x/5}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\sin\frac{4}{5}x\right)+\overline{y}$, где $\overline{y}$ равно:

1) $\frac{25}{16}e^{3x/5}$; 2) $\frac{15}{219}\sin\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$; 3) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{28}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{1118}{125}\right)$;

4) $-\frac{5}{9}\cos x\,e^{3x/5}$; 5) $-\frac{1}{8}xe^{3x/5}\cos\frac{4}{5}x$; 6) $0{,}5e^{2x}+1{,}8$.

4280. $y=2+C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y=e^x\left(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\operatorname{arctg}x\right)$.

4282. 1) $y=e^x(x+C_1)-\left(e^x+1\right)\ln\left(e^x+1\right)+C_2$;

2) $y=\frac{1}{2}e^x\left[\arcsin e^x+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C_1\right]+\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-e^{2x}\right)^3}+C_2$; 3) $y=C_1e^x-\cos e^x+C_2$.

4283. $y=(1+x)e^{-3x/2}+2e^{-5x/2}$.

4284. $x=e^t(0{,}16\cos 3t+0{,}28\sin 3t)+t^2+2{,}2t+0{,}84$. 4285. $y=e^x+x^2$.

4286. $y=e^x\left(e^x-x^2-x+1\right)$. 4287. $y=\frac{1}{3}\sin 2x-\frac{1}{2}\sin x-\cos x$.

4288*. Дифференцировать указанное выражение для y дважды; подставить y, y', y'' в данное уравнение; во всех трех случаях получится тождество.

4289. $y=x^3\left(C_1+C_2x^4\right)$. 4290. $y=\frac{x}{2}+C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|$.

4291. $y=x\left[C_1+C_2\ln|x|+\ln^2|x|\right]$. 4292. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2x^2+x^3$.

4293. Если $\frac{1}{m\alpha}>\omega^2$, то $y=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{\varepsilon}{k^2-\omega^2}\cos\omega t+\frac{\varepsilon g^2}{k^2}$, где $k^2=\frac{1}{m\alpha}-\omega^2$. Если $\frac{1}{m\alpha}<\omega^2$, то $y=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}-\frac{\varepsilon}{k^2+\omega^2}\cos\omega t-\frac{\varepsilon g^2}{k^2}$, где $k^2=\omega^2-\frac{1}{m\alpha}$. 4294. $s=\frac{1}{5}\left(4e^t+e^{-4t}\right)$.

4295. $s=e^{-0{,}2t}\left[10\cos 0{,}245t+8{,}16\sin 0{,}245t\right]$; $s|_{t=3}=7{,}07$ см.

4296. $t=\sqrt{\frac{am}{f}}\ln\frac{F+\sqrt{f(2F-f)}}{F-f}$. 4297. $s=e^{-0{,}0245t}\left[2\cos 156{,}6t+0{,}00313\sin 156{,}6t\right]$.

4298*. $k=33\frac{1}{3}$ г/см $=33\frac{1}{3}\cdot g\cdot 10^{-5}$ Н/см; $t=0{,}38$ с; высота погруженной части чурбачка $x=5[3+\cos 8{,}16t]$. При составлении уравнения считать $g=1000$ см/с^2.

4299*. $r=\frac{a}{2}\left(e^{\omega t}+e^{-\omega t}\right)$. Все происходит так, как будто трубка неподвижна, но на шарик действует сила, равная $m\omega^2r$ (r – расстояние от оси вращения до шарика).

4250. $y = C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\dots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\dots\right)$.

4251. $y = C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$. **4252.** $y = C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

4253. $y = C_1e^{4x}+C_2$. **4254.** $y = C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

4255. $y = C_1e^{2x}+C_2e^{-4x/3}$. **4256.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

4257. $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

4258. $y = e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$. **4259.** $y = e^{x}(C_1+C_2x)$.

4260. $x = (C_1+C_2t)e^{2{,}5t}$. **4261.** $y = (C_1+C_2x)e^{-x/4}$.

4262. $y = 4e^{x}+2e^{3x}$. **4263.** $y = 3e^{-2x}\sin 5x$. **4264.** $y = e^{-x/2}(2+x)$.

4265. $y = [1+(1-m)x]e^{mx}$. **4266.** $y = \cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x$.

4267. Если $k>0$, то $y = \frac{a}{\sqrt{k}}\sin\left[\sqrt{k}(x-x_0)\right]+y_0\cos\left[\sqrt{k}(x-x_0)\right]$; если $k<0$, то $y = \frac{1}{2\sqrt{k_1}}\left[\left(y_0\sqrt{k_1}+a\right)e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)}+\left(y_0\sqrt{k_1}-a\right)e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}\right]$, где $k_1=-k$.

4268. $y = C_1e^{-x}+C_2e^{x/2}+e^{x}$. **4269.** $y = C_1\cos ax + C_2\sin ax + \frac{e^x}{a^2+1}$.

4270. $y = C_1e^{6x}+C_2e^{x}+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

4271. $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x$.

4272. $y = (C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

4273. $y = e^{x}(C_1\cos x + C_2\sin x)+x+1$. **4274.** $y = C_1e^{x}+C_2e^{-5x}-0{,}2$.

4275. $y = C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно:

1) $\frac{5}{3}e^{-x}$; 2) $3xe^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$; 4) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $-\frac{2}{5}e^{x}\left[\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right]$; 6) $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^{x}(2x^2+x)$;

8) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$; 9) $-2xe^{x}-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

10) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x$; 11) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{x}$.

4276. $y = C_1+C_2e^{-5x/2}+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно:

1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$; 2) $\frac{1}{7}e^{x}$; 3) $5\sin x-2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$;

5) $\cos 2{,}5x+\sin 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$; 6) $\left(-5x-\frac{18}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$;

7) $\frac{1}{169}e^{-x}\left[(650x+2650)\sin x-(3250x-400)\cos x\right]$; 8) $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{5x/2}-xe^{-5x/2}\right)$.

4277. $y = e^{2x}(C_1+C_2x)+\bar{y}$, где $\bar{y}$ равно:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{x}$; 3) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$;

6) $\frac{2}{100}(3\sin x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\sin 3x-12\cos 3x)$;

7) $2x^2 + 4x + 3 + 4x^2e^{2x} + \cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

9) $\frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{9}e^{-x}\right) + \frac{1}{25}(3\sin x + 4\cos x)$; 10) $e^x - \frac{1}{2}e^{x+1} + \frac{1}{10}e^{x+x}$.

4278. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \overline{y}$, где $\overline{y}$ равно:

1) $2x^2 - 13x + 2$; 2) $\cos 3x$; 3) $\frac{1}{2}x\sin x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x - e^{-x}$;

5) $\frac{1}{4}\left(x\sin x - \frac{1}{4}\cos 3x\right)$; 6) $9 + 4\cos 2x - 0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\,\mathrm{ch}\,x$; 8) $0{,}5 + 0{,}1\,\mathrm{ch}\,2x$.

4279. $y = e^{3x/5}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x\right) + \overline{y}$, где $\overline{y}$ равно:

1) $\frac{25}{16}e^{3x/5}$; 2) $\frac{15}{219}\sin\frac{4}{5}x + \frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$; 3) $\frac{1}{13}e^{2x} + \frac{1}{5}\left(2x^3 + \frac{28}{5}x^2 + \frac{107}{25}x - \frac{1118}{125}\right)$;

4) $-\frac{5}{9}\cos xe^{3x/5}$; 5) $-\frac{1}{8}xe^{3x/5}\cos\frac{4}{5}x$; 6) $0{,}5e^{2x} + 1{,}8$.

4280. $y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y = e^x\left(C_1 + C_2x - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arctg}\,x\right)$.

4282. 1) $y = e^x(x + C_1) - \left(e^x + 1\right)\ln\left(e^x + 1\right) + C_2$;

2) $y = \frac{1}{2}e^x\left[\arcsin e^x + e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + C_1\right] + \frac{1}{3}\sqrt{\left(1 - e^{2x}\right)^3} + C_2$; 3) $y = C_1e^x - \cos e^x + C_2$.

4283. $y = (1 + x)e^{-3x/2} + 2e^{-5x/2}$.

4284. $x = e^t(0{,}16\cos 3x + 0{,}28\sin 3x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$. 4285. $y = e^x + x^2$.

4286. $y = e^x\left(e^x - x^2 - x + 1\right)$. 4287. $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$.

4288*. Дифференцировать указанное выражение для y дважды; подставить y, y' и y'' в данное уравнение; во всех трех случаях получится тождество.

4289. $y = x^2\left(C_1 + C_2x^4\right)$. 4290. $y = \frac{x}{2} + C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x|$.

4291. $y = x\left[C_1 + C_2\ln|x| + \ln^2|x|\right]$. 4292. $y = x\ln|x| + C_1x + C_2x^2 + x^3$.

4293. Если $\frac{1}{m\alpha} > \omega^2$, то $y = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{\varepsilon}{k^2-\omega^2}\cos\omega t + \frac{a\omega^2}{k^2}$, где $k^2 = \frac{1}{m\alpha} - \omega^2$. Если $\frac{1}{m\alpha} < \omega^2$, то $y = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt} - \frac{\varepsilon}{k^2+\omega^2}\cos\omega t - \frac{a\omega^2}{k^2}$, где $k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}$. 4294. $s = \frac{1}{5}\left(4e^t + e^{-4t}\right)$.

4295. $s = e^{-0{,}2t}\left[10\cos 0{,}245t + 8{,}16\sin 0{,}245t\right]$; $s|_{t=3} = 7{,}07$ см.

4296. $t = \sqrt{\frac{am}{f}}\ln\frac{F + \sqrt{f(2F-f)}}{F-f}$. 4297. $s = e^{-0{,}245t}\left[2\cos 156{,}6t + 0{,}00313\sin 156{,}6t\right]$.

4298*. $k = 33\frac{1}{3}$ г/см $= 33\frac{1}{3}\cdot g\cdot 10^{-5}$ Н/см; $t = 0{,}38$ с; высота погруженной части чурбанчика $x = 5\left[3 + \cos 8{,}16t\right]$. При составлении уравнения считать $g = 1000$ см/с^2.

4299*. $r = \frac{a}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$. Все происходит так, как будто трубка неподвижна, но на шарик действует сила, равная $m\omega^2r$ (r — расстояние от оси вращения до шарика).

4300. Если $k > m\omega^2$, то $r = \frac{a_0}{k - m\omega^2}\left[k - m\omega^2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}\right)\right]$; если $k = m\omega^2$, то $r = a_0\left(1 + \frac{k}{2m}t^2\right)$; если $k < m\omega^2$, то $r = \frac{a_0}{m\omega^2 - k}\left[m\omega^2 \operatorname{ch}\left(t\sqrt{\omega^2 - \frac{k}{m}}\right) - k\right]$.

4301. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + C_3$.

4302. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$.

4303. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + (C_3 + C_4x)e^{-2x}$.

4304. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$.

4305. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}$.

4506. $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3x^2e^{x}$.

4307. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$.

4308. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3x^{n-3} + C_4x^{n-4} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

4309. $y = e^{x/\sqrt{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

4310. $y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)\cos\frac{x}{2} + \left(C_4 + C_5x + C_6x^2\right)\sin\frac{x}{2} + C_7x + C_8$.

4311. $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1}\right)$. **4312.** $y = 1 + \cos x$.

4313. $y = e^{x} + \cos x - 2$. **4314.** $y = (C_1 + C_2x)e^{x} + C_3e^{2x} - x - 4$.

4315. $y = (C_1 + C_2x)e^{x} + C_3e^{-2x} + \left(x^2 + x - 1\right)e^{-x}$.

4316. $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x + \frac{1}{9}\cos x$.

4317. $y = (C_1 + C_2x)\cos ax + (C_3 + C_4x)\sin ax - \frac{x^2\cos ax}{8a^2}$.

4318. $y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4\cos x + C_5\sin x$.

4319. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{x^2 - 3x}{8}e^{x} - \frac{1}{4}x\sin x$.

4320. $y = \left(C_1 + C_2x + x^2\right)e^{x} + \left(C_3 + C_4x + x^3\right)e^{-x} + \sin x + \cos x$.

4321. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$. **4322.** $y = e^{x} + x^3$.

4323. $y = x\left(C_1 - C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|\right)$.

4324.1. $x = e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, $y = e^{-6t}\left[(C_2 + C_1)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right]$.

4324.2. $x = C_1e^{t} + C_2e^{5t}$, $y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t}$.

4324.3. $x = e^{t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)$, $y = e^{t}(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t)$.

4324.4. $x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^{t} - 3C_3e^{-t}$, $z = C_1e^{t} + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$.

4324.5. $x = C_1 + 3C_2e^{2t}$, $y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{t}$.

4324.6. $x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$, $y = C_1e^{t} - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$,
$z = -C_1e^{t} - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$.

4324.7. $x = C_1e^{2t} + e^{2t}(C_2\cos t + C_3\sin t)$, $y = e^{2t}\left[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t\right]$,

$z = C_1e^{2t} + e^{2t}\left[(2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t\right]$.

4325. $x = C_1e^{t} + C_2e^{-t} + t\,\mathrm{sh}\,t$, $y = C_1e^{t} - C_2e^{-t} + \mathrm{sh}\,t + t\,\mathrm{ch}\,t$.

4326. $x = C_1e^{-4t} + C_2e^{-7t} + \frac{7}{40}e^{t} + \frac{1}{5}e^{-2t}$, $y = \frac{1}{2}C_1e^{-4t} - C_2e^{-7t} + \frac{1}{40}e^{t} + \frac{3}{10}e^{-2t}$.

4327. $z = C_1y$, $zy^2 - \frac{2}{3}x^3 = C_2$.

4328. $y = \sqrt{C_1 + x^2}\Big/\ln\left|\frac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|$, $z = \sqrt{C_1 + x^2}\,\ln\left|\frac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|$.

4329. $y/x = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

4330. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1y$, $z = C_2y$.

4331. $y^2 - z^2 = C_1$, $yz - y^2 - x = C_2$.

4332. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$, $y = C_1e^{-t} + 3C_2e^{-3t} + \cos t$.

4333. $x = C_1e^{t} + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$, $y = C_1e^{t} + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t$.

4334. $x = C_1 + C_2t + C_3t^2 - \frac{1}{6}t^3 + e^{t}$,

$y = C_4 - (C_1 + 2C_3)t - \frac{1}{2}(C_2 - 1)t^2 - \frac{1}{3}C_3t^3 + \frac{t^4}{24} - e^{t}$.

4335. $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

4336. $z = x - y$, $y(y - 2x)^3 = (x - y)^2$.

4337. $x = t/3$, $y = -t/3$.

4338. $x = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$, $y = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$, $z = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$.

4339. $x = -e^{-t}$, $y = e^{-t}$, $z = 0$.

4340. Линии $y_1 = \frac{C_1x^2 - C_2}{2x}$ и $y_2 = -\frac{C_1x^2 + C_2}{2x}$. При заданных начальных условиях получаются гиперболы $y_1 = \frac{3 - x^2}{2x}$, $y_2 = \frac{3 + x^2}{2x}$.

4341. $y = e^{2x}$.

4342. Плоская линия $x - y + z = 0$, $x = \pm\frac{z\ln|z|}{\sqrt{2}}$.

4343. $x = \frac{1}{2}\left[gt^2 + (l_1 - l_0)\left(1 - \cos\frac{\pi t}{2T}\right)\right]$, $y = \frac{1}{2}\left[gt^2 + l_0 + l_1 + (l_1 - l_0)\cos\frac{\pi t}{2T}\right]$.

4344. $x = 10\,\mathrm{ch}\,2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}$, $y = 10\,\mathrm{ch}\,2t + \frac{6}{49}\cos 14t - \frac{300}{49}$. Здесь x – путь более тяжелого шарика, а y – более легкого.

4345. $A = \frac{h\alpha^2}{2k_1}\left[1 - \left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$, $B = \alpha\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, где $\alpha = \sqrt{B_0^2 + \frac{2k_1}{h}A_0}$, $\beta = \frac{\alpha - B_0}{\alpha + B_0}$.

4346*. Если T – *количество яда*, то $\frac{dN}{dt} = aN - bNT$, $\frac{dT}{dt} = cN$ и $\frac{dN}{dt} = 0$ в момент, когда $N = M$.

4347. $h_1 = \frac{S_1H_1 + S_2H_2}{S_1 + S_2} + \frac{S_2}{S_1 + S_2}(H_1 - H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$,

$h_2 = \frac{S_1H_1 + S_2H_2}{S_1 + S_2} - \frac{S_1}{S_1 + S_2}(H_1 - H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$.

4348. 1) $\theta - \theta_0 + 0{,}002\left(\theta^2 - \theta_0^2\right) = 0{,}00008\frac{E^2T^3}{R_0T^2}$; на 53°;

2) $\theta - \theta_0 + 0{,}002\left(\theta^2 - \theta_0^2\right) = \frac{5E^2}{\pi R_0 \cdot 10^7}\cdot(200\pi t - \sin 200\pi t)$; на 76°.

4349. 1) $44{,}5^\circ$; 2) $46{,}2^\circ$.

4350.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	1,000	1,000	0,997	0,992	0,984	0,973

x	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y	0,959	0,942	0,923	0,901	0,876

4351. $y|_{x=1} = 3{,}43656\ldots$

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2,5	3,16667	3,37500	3,42500	3,43472

y_5 дает относительную погрешность порядка 0,1%.

4352. 0,46128; то же дает формула Симпсона при $2n = 10$. Все знаки верные.

4353. $y_4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{5x^5}{12} + \frac{16x^6}{75} +$ и т. д.; $y_4(0{,}3) = 1{,}543$;

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \frac{11x^5}{20} + \frac{22x^6}{45} +$ и т. д.; $f(0{,}3) = 1{,}545$. Погрешность менее 0,2%. 4354. 0,808. 4355*. 1,001624. Результат получается всего быстрее, если искомую функцию искать сразу в виде степенного ряда.

4356*. 1,0244. См. указание к предыдущей задаче.

4357. $y = x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^7 + \ldots + \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1} + \ldots$; $k = 0{,}2297$.

К главе XV

4358. $\sin^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\Big[\cos 2kx - C_{2k}^1\cos(2k-2)x +$

$+ C_{2k}^2\cos(2k-4)x - \ldots + (-1)^{k-1}C_{2k}^{k-1}\cos 2x\Big]$;

$\sin^{2k+1} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\Big[\sin(2k+1)x - C_{2k+1}^1\sin(2k-1)x +$

$+ C_{2k+1}^2\sin(2k-3)x - \ldots + (-1)^k C_{2k+1}^k\sin x\Big]$;

$$\cos^{2k} x = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\cos 2kx + C_{2k}^1 \cos(2k-2)x + C_{2k}^2 \cos(2k-4)x + \ldots + C_{2k}^{k-1}\cos 2x\right];$$

$$\cos^{2k+1} x = \frac{1}{2^{2k}}\left[\cos(2k+1)x + C_{2k+1}^1 \cos(2k-1)x + C_{2k+1}^2 \cos(2k-3)x + \ldots + C_{2k+1}^k \cos x\right].$$

4360. $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x \ldots$ Так как $\sin x$ входит только в четных степенях, то $\cos nx$ можно рационально выразить через $\cos x$.

4363. 1) $\varphi = \nu\frac{2\pi}{n}$ и $\varphi = \nu\frac{2\pi}{n+1}$, где $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$; 2) $\varphi = \nu\frac{2\pi}{n}$, где $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ при n нечетном и $\nu = 1, 2, \ldots, n$ при n четном, и $\varphi = (2\nu - 1)\frac{\pi}{n+1}$, где $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$. **4365.** Заметить, что $\int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi)\,d\varphi = 0$. **4366.** Да.

4371. а) $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0$ и $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$;
б) $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0$ и $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$.

4372. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. **4373.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$. **4374.** $x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$ $(-\pi < x < \pi)$;

$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ $(0 < x < 2\pi)$. **4375.** $\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

4376. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; 2) $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$; $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$,

$S_2 = \frac{\pi^2}{12}$, $S_3 = \frac{\pi^2}{8}$.

4377. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left\{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}\sin nx$. **4378.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$.

4379. $2 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. **4380.** $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right]$.

4381. $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$. **4382.** $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right]}{(2n+1)^2}$.

4383. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right] - 1$.

4384. $$\frac{e^l - e^{-l}}{2l} + l\left(e^l - e^{-l}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2} + \pi\left(e^l - e^{-l}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2} = \operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l} - n\pi\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right].$$

4385. $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \frac{a\cos x}{1-a^2} - \frac{a\cos 2x}{2^2-a^2} + \ldots\right)$.

4386. $\frac{2\sin \pi a}{\pi}\left([illegible] \frac{[illegible]}{1^2-a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-a^2} - \ldots\right).$

4387. $\sin a x\,[illegible]\begin{cases}\left[\frac{\cos x}{a^2-1} + \frac{\cos 3x}{a^2-3^2} + \frac{\cos 5x}{a^2-5^2} + \ldots\right] & (a \text{ четное});\\ \left[\frac{1}{a^2} + \frac{\cos 2x}{a^2-2^2} + \frac{\cos 4x}{a^2-4^2} + \ldots\right] & (a \text{ нечетное}).\end{cases}$

4388. $\cos a x\,[illegible]\begin{cases}\left[\frac{\sin x}{a^2-1^2} + \frac{3\sin 3x}{a^2-3^2} + \frac{5\sin 5x}{a^2-5^2} + \ldots\right] & (a \text{ четное});\\ \left[\frac{2\sin 2x}{a^2-2^2} + \frac{4\sin 4x}{a^2-4^2} + \frac{6\sin 6x}{a^2-6^2} + \ldots\right] & (a \text{ нечетное}).\end{cases}$

4389. $\frac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\,[illegible]\,\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx.$

4390. $\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\left[1\,[illegible]\,\frac{\cos nx}{1+n^2}\right]$; $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\,\mathrm{ch}\,\pi}{1+n^2}\,n\sin nx.$

4391. $f(x) = [illegible]\left[\frac{\sin\frac{2\pi n}{3}}{\pi n} - \frac{3\left(1-\cos\frac{2\pi n}{3}\right)}{2\pi n^2}\right]\cos\frac{2\pi n x}{3} =$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{2\pi x}{3}}{1} + \frac{\cos\frac{8\pi x}{3}}{4} - \ldots\right) - \frac{9}{2\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi x}{3}}{1^2} + \frac{\cos\frac{4\pi x}{3}}{2^2} + \frac{\cos\frac{8\pi x}{3}}{4^2} + \ldots\right).$$

4392*. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{3}\sin 2nx - \sin\frac{\pi n}{3}\cos 2nx\right) =$

$$= \frac{[illegible]\sqrt{3}}{8\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1^2} - \frac{\sin 4x}{2^2} + \frac{\sin 8x}{4^2} - \frac{\sin 10x}{5^2} + \ldots\right) -$$

$$- \frac{9}{8\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 8x}{4^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \ldots\right).$$

Воспользоват[illegible]льтатом задачи 4368.

4393*. 1) $f(x [illegible] \frac{\sin\alpha\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha\sin 2x}{2^2} + \ldots\right)$;

2) $f(x) = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}\,[illegible]\,\frac{\cos 2n\alpha}{n^2}\cos 2nx = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2\alpha\cos 2x}{1^2} + \frac{\sin^2 2\alpha\cos 4x}{2^2} + \ldots\right).$

Воспользоват[illegible]льтатом задачи 4371.

4394. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin [illegible]}{[illegible]}$; $\frac{\pi^3}{32}$.

4395. $\frac{8}{15}\pi^4 - [illegible]\frac{\cos nx}{n^4}$; в) $\frac{7}{720}\pi^4$.

4396*. $\frac{\pi-x}{2} = [illegible]$ (см. задачу 4374).

4397*. $\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n(n^2+1)}\sin nx$ (см. задачу 4374).

4398*. $\frac{(\pi-x)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2(n^4+1)}\cos nx$. Продифференцировать ряд и воспользоваться решением задачи 4374 и тем, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (см. задачу 4376).

4399. $\frac{\pi^3}{32}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x^2}{8}-2\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)}\cos nx$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$; воспользоваться рядом $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n}\cos nx$ (см. задачу 4380 при $h=\frac{\pi}{2}$) и тем, что $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}=\frac{\pi^3}{32}$ (см. задачу 4394).

4400. $f_1(x)=17{,}6+6{,}5\cos x-0{,}1\sin x-3{,}2\cos 2x+0{,}1\sin 2x$;

$f_2(x)=0{,}24+0{,}55\cos x+0{,}25\sin x-0{,}08\cos 2x-0{,}13\sin 2x$;

$f_3(x)=0{,}12+1{,}32\cos x+0{,}28\sin x-0{,}07\cos 2x+0{,}46\sin 2x$.

К главе XVI

4401. Прямые, параллельные вектору $A\{a, b, c\}$: $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

4402. Окружности с центром в начале координат: $x^2+y^2=R^2$.

4403. Винтовые линии с шагом $2\pi h/\omega$, расположенные на цилиндрах, оси которых совпадают с осью z: $x=R\cos(\omega t+\alpha)$, $y=R\sin(\omega t+\alpha)$, $z=ht+z_0$, где R, α и z_0 - произвольные постоянные. **4404.** 1) Окружности, образованные пересечением сфер с центром в начале координат и плоскостей, параллельных биссекторной плоскости $y-z=0$: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y-z+C=0$, где R и C - произвольные постоянные. 2) Окружности, образованные пересечением сфер с центром в начале координат и плоскостей, отсекающих на осях координат отрезки, равные по величине и по знаку: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$. 3) Линии пересечения сфер $x^2+y^2+z^2=R^2$ и гиперболических параболоидов $zy=Cx$.

4405. $\operatorname{div} A=3$, $\operatorname{rot} A=0$.

4406. $\operatorname{div} A=0$, $\operatorname{rot} A=2[(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k]$.

4407. $\operatorname{div} A=6xyz$, $\operatorname{rot} A=x(z^2-y^2)i+y(x^2-z^2)j+z(y^2-x^2)k$.

4408. $\operatorname{div} A=6$, $\operatorname{rot} A=0$. **4409.** $\operatorname{div} A=0$, $\operatorname{rot} A=0$.

4410. $\operatorname{div} A=k/r^2$, где k – коэффициент пропорциональности, r – расстояние от точки приложения силы до начала координат, $\operatorname{rot} A=0$.

4411. $\operatorname{div} A=0$, $\operatorname{rot} A=0$.

4412. $\operatorname{div} A=0$, $\operatorname{rot} A=0$. В точках оси Oz поле не определено.

4413. $\operatorname{div} A = -\frac{k}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где k – коэффициент пропорциональности. В точках плоскости Oxy поле не определено.

4414. $3a$. 4416. $\operatorname{div} b(ra) = ab$, $\operatorname{div} r(ra) = 4ra$.

4417. 0. 4418. 1) 0; 2) 0; 3) 0.

4419. $\operatorname{div} A = 2f(r)/r + f'(r)$, если поле пространственное, $\operatorname{div} A = f(r)/r + f'(r)$, если поле плоское.

4421. $\varphi \operatorname{rot} A + \operatorname{grad}\varphi \times A$. 4422. $\frac{r\times a}{|r|}$. 4423. $2a$.

4424. $2\omega n^0$, где n^0 – единичный вектор, параллельный оси вращения.

4430. $u = Ar + C$.

4431. $u = -\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)+C$. 4432. Нет. 4433. Нет.

4434. $u = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+C$. 4435. Нет. 4437. 2/3, 1/3, 1/2.

4438. б) $k\delta\ln\frac{\sqrt{(l-x)^2+y^2}+l-x}{\sqrt{(l+x)^2+y^2}-l-x}$. 4439*. $4k\left(\sqrt{2}-1\right)$ *).

4440. $\frac{k\delta\sqrt{a^2+b^2}}{b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{a^2+4\pi^2b^2}}{a}$. 4441. $2k\delta a\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

4442. $\frac{2\pi k}{\sqrt{1-h^2}}\arccos h$, если $h<1$; $2\pi k$, если $h=1$; $\frac{2\pi k}{\sqrt{h^2-1}}\ln\left(h+\sqrt{h^2-1}\right)$, если $h>1$.

4443*. 1) $2k\pi R\delta\ln\frac{H+\sqrt{H^2+R^2}}{R}$, 2) $2k\pi R\delta\ln\frac{H+\sqrt{H^2+4R^2}}{2R}$. Разделить цилиндр пополам сечением, параллельным основанию, и вычислить потенциал боковой поверхности цилиндра как сумму потенциалов боковых поверхностей обеих его половин, применяя результат 1). 4444. $2k\pi R\delta$.

4445*. 1) $k\pi\delta\left[H\sqrt{R^2+H^2}-H^2+R^2\ln\frac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}\right]$,

2) $\frac{k\pi\delta}{2}\left[H\sqrt{4R^2+H^2}-H^2+4R^2\ln\frac{H+\sqrt{4R^2+H^2}}{R}\right]$; см. указание к задаче 4443.

4446. $\pi k\delta H(l-H)$, где l – образующая конуса.

4447. $u = \frac{2}{3}k\frac{\pi R^3\delta}{a}\left[\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}-\left(\frac{a}{R}\right)^3-\frac{3a}{2R}+1\right]$ при $a \ge R$;

$u = \frac{2}{3}k\pi a^2\delta\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{3/2}-\left(\frac{R}{a}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2-2\right]$ при $a \le R$;

$u = \frac{k\pi R^2\delta}{3}\left(4\sqrt{2}-3\right)$ при $a = R$.

*) В ответах к задачам 4439–4449 k – гравитационная постоянная.

4448*. $u = \frac{4k\pi\delta}{3a}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{kM}{a}$ (M – масса тела) при $a \ge R$;

$u = 2k\pi\delta\left(R^2 - r^2\right)$ при $a \le r$;

$u = \frac{4k\pi\delta}{3a}\left(a^3 - r^3\right) + 2k\pi\delta\left(R^2 - a^2\right)$ при $r \le a \le R$.

Провести концентрическую сферу радиуса a и применить результаты первых двух случаев.

4449. $\frac{kM}{a}\left[1 + \frac{2}{7}\left(\frac{R}{a}\right)^2\right]$, где M – масса шара.

4450. И поток и циркуляция равны 0.

4451. Поток равен $2aS$, где S – площадь области, ограниченной контуром L. Циркуляция равна 0.

4452. И поток и циркуляция равны 0.

4453. Поток $3\pi R^4/2$, циркуляция $2\pi R^2$.

4454. В случае, когда начало координат лежит внутри контура, поток равен 2π, в противном случае поток равен 0. Циркуляция в обоих случаях равна 0.

4455. Циркуляция равна 2π, если начало координат лежит внутри контура, и равна 0, если вне контура. Поток в обоих случаях равен 0.

4456. 2. **4458.** $2\pi R^2 H$. **4459.** $\pi R^2 H$.

4460. 4π. Вычислить поток через основание конуса и воспользоваться результатом задачи 4457.

4461. $3\pi/16$. **4462*.** 1/6. Воспользоваться формулой Остроградского и вычислить поток через основание пирамиды.

4463. $2\pi^2 b^2$. **4464.** $2\pi\omega R^2$.

4465. $-\pi$. Применить теорему Стокса, взяв в качестве контура L линию пересечения параболоида с плоскостью Oxy.