Л. А. БЕКЛЕМИШЕВА
А. Ю. ПЕТРОВИЧ
И. А. ЧУБАРОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Под редакцией Д. В. БЕКЛЕМИШЕВА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических, инженерно-физических и инженерно-технических специальностей вузов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.151.5
Б42
УДК 514.12 (075.8)

Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. **Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре:** Учебн. пособие/Под ред. Д. В. Беклемишева. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 496 с.

Сборник соответствует объединенному курсу аналитической геометрии и линейной алгебры. Имеются теоретические введения ко всем разделам, большое число задач, способствующих усвоению основных понятий, и серии типовых задач с ответами.

Для студентов физико-математических, инженерно-физических и инженерно-технических специальностей вузов.

Рецензенты:
кафедра высшей алгебры Московского государственного университета (заведующий кафедрой — член-корреспондент АН СССР профессор *А. И. Кострикин*);
член-корреспондент АН СССР профессор *С. И. Похожаев*

Людмила Анатольевна Беклемишева,
Александр Юрьевич Петрович,
Игорь Андреевич Чубаров

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Редактор *Ф. И. Кизнер*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры: *М. Н. Дронова, М. Л. Медведская*

ИБ № 12635

Сдано в набор 15.10.86. Подписано к печати 02.07.87. Формат 84 × 108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 26,04. Усл. кр.-отт. 26,04. Уч.-изд. л. 31,09. Тираж 75 000 экз. Заказ 254.
Цена 1 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

Б $\dfrac{1702040000-153}{053\ (02)\text{-}87}$ 55-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов физико-математических, инженерно-физических и инженерно-технических специальностей вузов. Цель авторов состояла в создании единого сборника задач, соответствующего объединенному курсу аналитической геометрии и линейной алгебры. Все составители задачника имеют опыт преподавания математики в Московском физико-техническом институте, и этот опыт нашел отражение в содержании сборника. Последовательность разделов, а также определения и обозначения в основном соответствуют учебнику Д. В. Беклемишева «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры».

Отметим методические особенности сборника.

В задачник включены некоторые разделы, отличающиеся от традиционных: в главу «Преобразования плоскости. Группы» введен ряд задач, в которых обсуждается общее понятие об отображениях; глава «Функции на линейном пространстве» содержит параграф «Линейные функции»; задачи, относящиеся к точечным n-мерным пространствам, выделены в отдельную главу «Аффинные и точечные евклидовы пространства», и круг этих задач значительно расширен; наконец, глава «Тензоры», помимо детального обсуждения основных понятий, связанных с тензорами, содержит большое число упражнений с пространственными матрицами.

Каждой главе, а также некоторым параграфам предпосланы теоретические введения. Введения начинаются со словаря — списка необходимых новых понятий, определения которых затем частично приводятся. Введения содержат также обозначения, сводки важнейших формул и подробное изложение некоторых алгоритмов.

В число задач включен ряд устных вопросов по курсу лекций. Иногда решение нескольких мелких вопросов приводит к решению нетривиальной задачи. Такие задачи расположены группами или обеспечены ссылками. Некоторые задачи предваряют применение линейной алгебры в других математических курсах.

Выбор задач, как нам кажется, позволит использовать пособие при различных системах построения курса лекций. Так, в § 14 «Определители» включены задачи, в которых применяется умножение матриц, в главах X и XI даются параллельные формулировки задач для евклидовых и унитарных пространств и т. д.

Для облегчения работы преподавателя стандартные задачи даны большими сериями. При этом, чтобы сохранить объем задачника, авторам пришлось организовать банк столбцов и матриц (с. 470—495). При ссылках столбцы из банка обозначаются через c_k, матрицы — через A_k, где k — соответствующий номер в банке. Однако столбцы и матрицы из банка использованы не во всех числовых задачах; частично изложение оставлено традиционным.

Некоторые типовые и наиболее сложные задачи снабжены полными решениями, вынесенными в отдельный раздел. Такие задачи отмечены знаком (р).

При составлении сборника были использованы учебные пособия, список которых приведен на с. 496, а также отдельные задачи, предлагавшиеся на приемных экзаменах по математике в МФТИ.

Хотя каждый из авторов нес ответственность за определенную часть материала, труд их был в значительной мере коллективным. В работе над задачником большое участие принимали Б. В. Пальцев, которому принадлежат главы X, XI, § 34 и часть задач § 33, и Д. В. Беклемишев, составивший главу XIV, § 31 и введение к § 16, а также ряд задач в других параграфах. Некоторые задачи были предложены коллегами по Московскому физико-техническому институту — В. Б. Лидским, В. Р. Почуевым, А. А. Болибрухом. Всем им авторы приносят глубокую благодарность. Д. В. Беклемишева авторы благодарят также за труд по редактированию рукописи и другую большую помощь в работе.

Авторы считают своим приятным долгом отметить, что на их деятельность оказала решающее влияние система преподавания математики в МФТИ, сложившаяся под руководством члена-корреспондента АН СССР Л. Д. Кудрявцева.

ГЛАВА I

ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ

В этой главе используются следующие основные понятия: *вектор, нулевой вектор, равные векторы, коллинеарные и компланарные векторы, произведение вектора на вещественное число, сумма векторов, противоположный вектор, разность векторов, линейная комбинация векторов, линейно зависимые векторы* (*линейно зависимая система векторов*), *базис на плоскости и базис в пространстве, координаты вектора в базисе, радиус-вектор точки, общая декартова система координат, координаты точки, длина вектора, угол между векторами, скалярное произведение двух векторов, проекция вектора на прямую, ортогональный и ортонормированный базисы на плоскости и в пространстве, прямоугольная система координат, ориентация тройки векторов в пространстве, ориентация пары векторов на плоскости, ориентация базиса, векторное произведение двух векторов, смешанное произведение трех векторов, определители второго и третьего порядков.* Используются также основные свойства линейных операций, скалярного, векторного и смешанного произведений.

Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ имеют в некотором базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является пропорциональность соответствующих координат этих векторов.

Необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ является обращение в 0 определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Если базис ортонормированный, то:
длина вектора $\mathbf{a}$ равна

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2};$$

скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3;$$

векторное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ равно

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \varepsilon \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = +1$, если базис правый, и $\varepsilon = -1$, если базис левый. Определитель следует понимать символически:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в любом базисе выражается формулой

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

Если базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ортонормирован, то $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \varepsilon$ (число ε определено выше).

Тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ является правой, если знак определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

совпадает со знаком числа ε, и левой в противном случае. Это утверждение справедливо при любом базисе.

Косинус угла φ между векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, заданными своими координатами, можно вычислить по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, равна

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|.$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, равен

$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Любой вектор $\mathbf{b}$ на плоскости или в пространстве можно представить в виде суммы двух векторов $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ так, чтобы вектор $\mathbf{x}$ был коллинеарен данному ненулевому вектору $\mathbf{a}$, а вектор $\mathbf{y}$ ортогонален вектору $\mathbf{a}$. Вектор $\mathbf{x}$ называется ортогональной проекцией вектора $\mathbf{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\mathbf{a}$; вектор $\mathbf{y}$ называется ортогональной составляющей вектора $\mathbf{b}$ относительно этой прямой.

Пусть в пространстве даны два базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, и векторы второго базиса выражаются через векторы первого базиса по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда координаты α_1, α_2, α_3 вектора в первом базисе выражаются через его координаты α_1', α_2', α_3' во втором базисе следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\alpha_1' + a_{12}\alpha_2' + a_{13}\alpha_3', \\ \alpha_2 &= a_{21}\alpha_1' + a_{22}\alpha_2' + a_{23}\alpha_3', \\ \alpha_3 &= a_{31}\alpha_1' + a_{32}\alpha_2' + a_{33}\alpha_3' \end{aligned} \tag{2}$$

(коэффициенты в строках формул (1) превращаются в коэффициенты в столбцах формул (2)).

Пусть в пространстве даны две системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, причем начало второй системы координат имеет в первой системе координаты a_{10}, a_{20}, a_{30}, а векторы второго базиса выражаются через векторы первого базиса по формулам (1). Тогда координаты x, y, z точки в первой системе координат выражаются через ее координаты x', y', z' во второй системе формулами:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10}, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20}, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30}. \end{aligned}$$

В задачах § 1 система координат считается общей декартовой без каких-либо дополнительных условий. В задачах § 2, если не оговорено противное, координаты векторов задаются в ортонормированном базисе, а координаты точек — в прямоугольной системе координат. В задачах § 3, если не оговорено противное, координаты векторов задаются в ортонормированном правом базисе, координаты точек — в прямоугольной системе координат, базис которой имеет правую ориентацию.

§ 1. Линейные соотношения

1.1. Доказать утверждения:

1) конечная система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима;

2) конечная система векторов, содержащая два равных вектора, линейно зависима.

1.2. Может ли быть линейно зависимой система, состоящая из одного вектора?

1.3. Доказать, что для любых трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{c}$, $\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{a}$ линейно зависимы.

1.4. Даны три вектора $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(-5, -1)$, $\mathbf{c}(-1, 3)$. Найти координаты векторов $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $16\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$.

1.5. Даны три вектора $\mathbf{a}(1, 3)$, $\mathbf{b}(2, -1)$, $\mathbf{c}(-4, 1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

1.6. Проверить, что векторы $\mathbf{a}(-5, -1)$ и $\mathbf{b}(-1, 3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\mathbf{c}(-1, 2)$ и $\mathbf{d}(2, -6)$ в этом базисе.

1.7. Даны четыре вектора $\mathbf{a}(3, 0, -2)$, $\mathbf{b}(1, 2, -5)$, $\mathbf{c}(-1, 1, 1)$, $\mathbf{d}(8, 4, 1)$. Найти координаты векторов $-5\mathbf{a} + \mathbf{b} - 6\mathbf{c} + \mathbf{d}$, $3\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}$.

1.8. Даны четыре вектора $\mathbf{a}(4, 1, -1)$, $\mathbf{b}(3, -1, 0)$, $\mathbf{c}(-1, 1, 1)$, $\mathbf{d}(-1, 3, 4)$. Найти числа α, β, γ такие, что $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

1.9. Проверить, что векторы $\mathbf{a}(4, 1, -1)$, $\mathbf{b}(1, 2, -5)$ и $\mathbf{c}(-1, 1, 1)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты векторов $\mathbf{l}(4, 4, -5)$, $\mathbf{m}(2, 4, -10)$, $\mathbf{n}(0, 3, -4)$ в этом базисе.

1.10. Проверить, будут ли компланарны векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$; в случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую (здесь $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три некомпланарных вектора):

1) $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

2) $\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;

3) $\mathbf{l} = \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

1.11. Из одной точки пространства отложены три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Доказать, что конец вектора $\mathbf{c}$ тогда и только тогда лежит на отрезке, соединяющем концы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, когда выполнено равенство $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. В каком отношении конец вектора $\mathbf{c}$ делит этот отрезок?

1.12. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина отрезка BC и точка O — точка пересечения диагоналей. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{KD}$.

1.13. В треугольнике ABC точка M — середина отрезка AB и точка O — точка пересечения медиан. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$.

1.14. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $3:2$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

1.15. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

1.16. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$, найти в этом базисе координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CE}$.

1.17. В тетраэдре $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q — середины ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC соответственно, S — точка пересечения медиан треугольника ABC. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты:

1) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$;

2) векторов $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{KQ}$;

3) векторов $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{KS}$.

1.18. Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найти:

1) координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка M лежит на отрезке AB и $|AM|:|BM| = m:n$;

2) координаты вектора $\overrightarrow{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $|AN|:|BN| = m:n$.

1.19. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ в базисе, образованном векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.20. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$, найти координаты вершин шестиугольника и его центра.

1.21. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 4. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты вершин трапеции, точки M пересечения ее диагоналей и точки S пересечения боковых сторон.

1.22. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$, найти координаты:

1) вершин C, B_1 и C_1;

2) точек K и L — середин ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно;

3) точек M и N пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1 соответственно;

4) точки O пересечения диагоналей параллелепипеда.

1.23. Три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, не лежащие на одной прямой, являются последовательными вершинами параллелограмма. Найти координаты четвертой вершины D этого параллелограмма.

1.24. Даны две различные точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Найти координаты:

1) точки M, лежащей на отрезке AB и такой, что $|AM| : |BM| = m : n$;

2) точки N, лежащей на прямой AB вне отрезка AB и такой, что $|AN| : |BN| = m : n$.

1.25. Даны две точки $A(3, -2)$ и $B(1, 4)$. Точка M лежит на прямой AB, причем $|AM| = 3|AB|$. Найти координаты точки M, если:

1) M лежит по ту же сторону от точки A, что и точка B;

2) M и B лежат по разные стороны от точки A.

1.26. Даны три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

1.27. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$ вершин A, B, D, A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выразить через них радиус-векторы остальных четырех вершин.

1.28. Отношение длин оснований AD и BC трапеции $ABCD$ равно $m : n$. Выразить радиус-векторы вершины D, точки M пересечения диагоналей трапеции и точки S пересечения боковых сторон через радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин A, B, C.

1.29. Доказать, что радиус-вектор центра правильного многоугольника есть среднее арифметическое радиус-векторов его вершин.

1.30. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор центра окружности, вписанной в треугольник.

1.31. В плоскости треугольника ABC найти точку O такую, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$. Существуют ли такие точки вне плоскости треугольника?

1.32. В точках, имеющих радиус-векторы $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, сосредоточены массы $m_1, \ldots, m_n$. Найти радиус-вектор центра тяжести этой материальной системы.

1.33. Однородная проволока согнута в виде угла AOB со сторонами $|OA|=a$ и $|OB|=b$. Найти координаты центра тяжести проволоки в системе координат O, $\overrightarrow{OA}/a$, $\overrightarrow{OB}/b$.

1.34. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках A (3, 1), B (7, 3), C (0, 4), D (—1, 2).

1.35. Доказать, что если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

1.36. Точки K и L являются серединами сторон AB и BC параллелограмма $OABC$. Доказать, что точка пересечения диагоналей $OABC$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника OKL.

1.37. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $|AM|:|BM|=m_1:n_1$, $|AN|:|CN|=m_2:n_2$. Точку пересечения отрезков BN и CM обозначим через O. Найти отношения $|BO|:|ON|$ и $|CO|:|OM|$.

1.38. Применяя результат задачи 1.37 при $m_1=n_1=m_2=n_2=1$, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

1.39 (р). Вершина D параллелограмма $ABCD$ соединена с точкой K, лежащей на стороне BC, такой, что $|BK|:|KC|=2:3$. Вершина B соединена с точкой L, лежащей на стороне CD, такой, что $|CL|:|LD|=5:3$. В каком отношении точка M пересечения прямых DK и BL делит отрезки DK и BL?

1.40. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC расположены соответственно точки M и N так, что $|AM|:|BM|=m:1$, $|CN|:|BN|=n:1$. Прямая MN пересекает высоту BD треугольника в точке O. Найти отношение $|DO|:|BO|$.

1.41. 1) Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина средней линии равна полусумме длин оснований (теорема о средней линии трапеции).

2) Точки E и F являются серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (на плоскости или в пространстве). Доказать, что если $|EF| = (|BC| + |AD|)/2$, то $ABCD$ — трапеция (теорема, обратная теореме о средней линии трапеции).

1.42. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки M, N, P так, что $|AM| = |AB|/n$, $|BN| = |BC|/n$, $|CP| = |CA|/n$. Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь треугольника, полученного при пересечении прямых AN, BP и CM. Вывести отсюда, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

1.43. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении $3 : 1$, считая от вершины.

1.44. Доказать, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

1.45. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что прямые EF и BC_1 параллельны. Найти отношение $|EF| : |BC_1|$.

1.46. На диагонали BC_1 боковой грани треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка M, а на диагонали CA_1 другой боковой грани — точка N. Прямая MN параллельна плоскости ABB_1A_1. Найти отношение $|CN| : |CA_1|$, если $|BM| : |BC_1| = 1 : 3$.

§ 2. Скалярное произведение векторов

2.1. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если:

1) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 45°$;
2) $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 7$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 120°$;
3) $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 90°$;
4) $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены;
5) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ противоположно направлены.

2.2. Вычислить выражение $|\mathbf{a}|^2 - \sqrt{3}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 5\,|\mathbf{b}|^2$, если:

1) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 30°$;

2) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 150°$.

2.3. Найти скалярное произведение векторов **a** и **b**, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(4, -1)$, $\mathbf{b}(-1, -7)$;
2) $\mathbf{a}(2, 1)$, $\mathbf{b}(1, -3)$;
3) $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(-4, 2)$.

2.4. Найти угол между векторами **a** и **b**, заданными своими координатами:

1) $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(2, 4)$;
2) $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(4, 2)$;
3) $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(-2, 1)$;
4) $\mathbf{a}(1, -1)$, $\mathbf{b}(-4, 2)$;
5) $\mathbf{a}(2, -1)$, $\mathbf{b}(-4, 2)$.

2.5. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(-1, 2)$, $B(5, 10)$;
2) $A(3, -2)$, $B(3, 3)$;
3) $A(1, 2)$, $B(1, 2)$.

2.6. Найти скалярное произведение векторов **a** и **b**, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}(3, 2, -5)$, $\mathbf{b}(10, 1, 2)$;
2) $\mathbf{a}(1, 0, 3)$, $\mathbf{b}(-4, 15, 1)$;
3) $\mathbf{a}(2, 1, 5)$, $\mathbf{b}(7, -9, -1)$.

2.7. Найти угол между векторами **a** и **b**, заданными своими координатами:

1) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(5, 1, 1)$;
2) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(-2, 2, -2)$;
3) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(3, -3, 3)$;
4) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(3, 1, -2)$;
5) $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(4, 4, -4)$.

2.8. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(4, -2, 3)$, $B(4, 5, 2)$;
2) $A(-3, 1, -1)$, $B(-1, 1, -1)$;
3) $A(3, -3, -7)$, $B(1, -4, -5)$.

2.9. Даны три вектора: $\mathbf{a}(-1, 2)$, $\mathbf{b}(5, 1)$, $\mathbf{c}(4, -2)$. Вычислить:

1) $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
2) $|\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})$;
3) $|\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{b}, \mathbf{a} + 3\mathbf{c})$.

2.10. Даны три вектора: $\mathbf{a}(1, -1, 1)$, $\mathbf{b}(5, 1, 1)$, $\mathbf{c}(0, 3, -2)$. Вычислить:

1) $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
2) $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b}, \mathbf{c})$;

3) $(\mathbf{a}, \mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - |\mathbf{a}|^2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

2.11. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ взаимно перпендикулярны.

2.12. Верно ли, что для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ выполняется соотношение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}, \mathbf{d})$?

2.13. Даны три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ такие, что $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Вычислить $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

2.14. В треугольнике ABC даны длины сторон. Найти скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$, если:

1) $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = 4$;
2) $|AB| = 7$, $|BC| = 4$, $|AC| = 5$;
3) $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|AC| = 3$.

2.15. Дан треугольник ABC. Выразить через $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$:

1) длину стороны BC;
2) длину медианы AM;
3) площадь треугольника.

2.16. В треугольнике ABC проведена высота AH. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AH}$ в базисе, образованном векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2.17. Доказать, что для произвольного прямоугольника $ABCD$ и для произвольной точки M (лежащей или не лежащей в плоскости прямоугольника) имеют место равенства:

1) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$;
2) $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2$.

2.18. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований $|AD| : |BC|$ равно 3. Выразить через $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$:

1) длины сторон и углы трапеции;
2) длину отрезка SM, где S — точка пересечения боковых сторон трапеции, M — точка пересечения диагоналей.

2.19 (р). Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно $\sqrt{2}$ и 1, а угол между ними равен 45°. Вычислить длины диагоналей и углы параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты (2, 2) и (—1, 4).

2.20. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 4 и 2, а угол между базисными векторами равен 120°. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника A (—2, 2), B (—2, —1), C (—1, 0). Найти длины сторон и углы треугольника.

2.21. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ равны соответственно 3, $\sqrt{2}$, 4, а углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 45°$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 60°$. Вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты (1, —3, 0) и (—1, 2, 1).

2.22. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ равны соответственно 1, 1, 2; углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ (—1, 0, 2) и $\mathbf{b}$ (2, —1, 1).

2.23. Из одной точки отложены три вектора $\mathbf{a}$ (0, —3, 4), $\mathbf{b}$ (4, 1, —8) и $\mathbf{c}$. Вектор $\mathbf{c}$ имеет длину 1 и делит пополам угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Вычислить координаты вектора $\mathbf{c}$.

2.24 (р). Даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\mathbf{a}$.

2.25. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

2.26. Дан вектор $\mathbf{a}$ (1, 1). Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\mathbf{a}$, и ортогональную составляющую вектора $\mathbf{b}$ относительно этой прямой, если вектор $\mathbf{b}$ имеет координаты:

1) (1, —3);
2) (1, —1);
3) (3, 3);
4) (—2, —2).

2.27. Дан вектор $\mathbf{a}$ (1, —1, 2). Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\mathbf{a}$, и ортогональную составляющую вектора $\mathbf{b}$ относительно этой прямой, если вектор $\mathbf{b}$ имеет координаты:

1) (2, —2, 4);
2) (1, 1, 2);
3) (4, 0, —2).

2.28. Даны два вектора $\mathbf{a}$ (3, —1) и $\mathbf{b}$ (—1, 1). Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 13$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = -3$.

2.29. Даны три вектора **a** (4, 1, 5), **b** (0, 5, 2) и **c** (—6, 2, 3). Найти вектор **x**, удовлетворяющий системе уравнений (**x**, **a**) = 18, (**x**, **b**) = 1, (**x**, **c**) = 1.

2.30. Даны ненулевой вектор **a** и скаляр p. Выразить через **a** и p какой-нибудь вектор **x**, удовлетворяющий уравнению (**x**, **a**) = p.

2.31. Объяснить геометрический смысл всех решений векторного уравнения (**x**, **a**) = p, а также его частного решения, коллинеарного вектору **a**:

1) в плоском случае;

2) в пространственном случае.

2.32. Объяснить геометрический смысл:

1) решения системы векторных уравнений (**x**, **a**) = p, (**x**, **b**) = q на плоскости (векторы **a** и **b** неколлинеарны);

2) решения системы векторных уравнений (**x**, **a**) = p, (**x**, **b**) = q, (**x**, **c**) = s в пространстве (векторы **a**, **b**, **c** некомпланарны).

2.33 (р). Даны два вектора **a** (1, —1, 1) и **b** (5, 1, 1). Вычислить координаты вектора **c**, который имеет длину 1 и ортогонален векторам **a** и **b**. Сколько решений имеет задача?

2.34. Даны два вектора **a** (1, —1, 1) и **b** (5, 1, 1). Вектор **c** имеет длину 1, ортогонален вектору **a** и образует с вектором **b** угол $\arccos\left(\sqrt{2/27}\right)$. Вычислить координаты вектора **c**. Сколько решений имеет задача?

2.35. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти углы треугольника.

2.36. Длины соседних сторон параллелограмма относятся как $m : n$, а угол между этими сторонами равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

2.37. В выпуклом четырехугольнике сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон. Найти угол между диагоналями четырехугольника.

2.38. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а отношение длин оснований равно $m : n$ ($m > n$). Найти: 1) отношение длин боковых сторон; 2) отношение длин диагоналей; 3) величину острого угла трапеции.

2.39. Доказать, что если в треугольнике равны длины двух медиан, длины двух высот или длины двух биссектрис, то этот треугольник равнобедренный.

2.40. Длины ребер AA_1, AB и AC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно a, b, c. Величины углов между ними $\angle BAC$, $\angle A_1AC$ и $\angle A_1AB$ равны соответственно α, β, γ. Найти длину диагонали AC_1.

2.41. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Доказать: если перпендикулярны ребра AB и CD и ребра AC и BD, то ребра BC и AD также перпендикулярны.

2.42. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и P — середины ребер AD и CD соответственно, точки N и Q — центры граней BCD и ABC соответственно. Найти угол между прямыми MN и PQ.

2.43. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

2.44. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F являются серединами ребер AD и BC соответственно. На ребре CD взята точка N, на отрезке EF — точка M так, что $\angle MNC = 45°$, $\angle NME = \arccos(2/3)$. В каком отношении точки M и N делят отрезки EF и CD?

2.45. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) длина стороны основания равна 2. Вершины K и M ромба $KLMF$ лежат на ребрах AB и SD соответственно и $|KM| = 3$, а отрезок KL пересекает ребро SB. Найти объем пирамиды.

§ 3. Векторное и смешанное произведения векторов

3.1. Найти векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}\ (3, -1, 2)$, $\mathbf{b}\ (2, -3, -5)$;
2) $\mathbf{a}\ (2, -1, 1)$, $\mathbf{b}\ (-4, 2, -2)$;
3) $\mathbf{a}\ (6, 1, 0)$, $\mathbf{b}\ (3, -2, 0)$.

3.2. Упростить выражения:

1) $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}]$;
2) $\left[\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c},\ -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 5\mathbf{c}\right]$.

3.3. Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

3.4. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$?

3.5. Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют:

1) ортонормированный правый базис;

2) ортонормированный левый базис;

3) ортогональный правый базис.

Выразить векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ через векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

3.6. Известно, что $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Найти длины векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и углы между ними.

3.7. Решить задачи: 1) 2.33; 2) 2.34, дополнительно потребовав, чтобы ориентация тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ совпадала с ориентацией ортонормированного базиса, в котором заданы координаты векторов.

3.8. На векторах $\mathbf{a}$ (2, 3, 1) и $\mathbf{b}$ (—1, 1, 2), отложенных из одной точки, построен треугольник. Найти:

1) площадь этого треугольника;

2) длины трех его высот.

3.9 (р). Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ общей декартовой системы координат на плоскости равны соответственно 3 и 2, а угол между ними равен 30°. В этой системе координат даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма: (1, 3), (1, 0) и (—1, 2). Найти площадь параллелограмма.

3.10. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна половине длины векторного произведения $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$.

3.11. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням произвольного тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих этим граням, равна нулю.

3.12. Доказать, что для трех неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

3.13. Доказать тождества:

1) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}$;

2) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

3) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}$.

3.14. Даны α, β, γ — плоские углы трехгранного угла. Найти его двугранные углы.

3.15. Даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ такие, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ какой-нибудь вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий уравнению $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3.16. Объяснить геометрический смысл всех решений векторного уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, а также его частного решения, коллинеарного вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

3.17. Из одной точки отложены четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Вектор $\mathbf{d}$ имеет длину 1 и образует с некомпланарными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

1) равные острые углы;

2) равные тупые углы.

Выразить вектор $\mathbf{d}$ через векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

3.18. Из одной точки отложены четыре вектора $\mathbf{a}$ (—1, 1, —1), $\mathbf{b}$ (—1, 1, 1), $\mathbf{c}$ (5, —1, —1) и $\mathbf{d}$. Вектор $\mathbf{d}$ имеет длину 1 и образует с векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равные острые углы. Вычислить координаты вектора $\mathbf{d}$.

3.19. Найти смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, заданных своими координатами:

1) $\mathbf{a}$ (1, —1, 1), $\mathbf{b}$ (7, 3, —5), $\mathbf{c}$ (—2, 2, —2);

2) $\mathbf{a}$ (3, 5, 1), $\mathbf{b}$ (4, 0, —1), $\mathbf{c}$ (2, 1, 1);

3) $\mathbf{a}$ (2, 1, 0), $\mathbf{b}$ (3, 4, —1), $\mathbf{c}$ (—1, —3, 1);

4) $\mathbf{a}$ (1, 2, 3), $\mathbf{b}$ (5, —2, 1), $\mathbf{c}$ (2, 1, 2).

3.20. Проверить, компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе:

1) $\mathbf{a}$ (2, 3, 5), $\mathbf{b}$ (7, 1, —1), $\mathbf{c}$ (3, —5, —11);

2) $\mathbf{a}$ (2, 0, 1), $\mathbf{b}$ (5, 3, —3), $\mathbf{c}$ (3, 3, 10).

3.21. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $4\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 6\mathbf{c}$, $7\mathbf{a} + 8\mathbf{b} + \lambda^2\mathbf{c}$?

3.22. Три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ отложены из одной точки. Найти:

1) объем треугольной призмы, основание которой построено на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а боковое ребро совпадает с вектором $\mathbf{c}$;

2) объем тетраэдра, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

3.23. Даны точки A (2, 1, —1), B (3, 0, 2), C (5, 1, 1), D (0, —1, 3), являющиеся вершинами тетраэдра. Найти:

1) объем тетраэдра;

2) длину высоты тедраэдра, опущенной из вершины C.

3.24. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве равны соответственно 1, 2, $\sqrt{2}$, а углы между ними равны: $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 120°$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 45°$, $\angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 135°$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты (—1, 0, 2), (1, 1, 3) и (2, —1, 1).

3.25. Даны неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и скаляр p.

1) Найти какой-нибудь вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий уравнению $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$.

2) Объяснить геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$, а также его частного решения, ортогонального к векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

3.26. Доказать тождества:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 + |[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]|^2 = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 \cdot |\mathbf{c}|^2$;

2) $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$;

3) $\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$;

4) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$;

5) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}$;

6) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{z}) & (\mathbf{b}, \mathbf{z}) & (\mathbf{c}, \mathbf{z}) \end{vmatrix}$.

3.27. Доказать, что:

1) если векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ компланарны, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны;

2) если векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

3.28 (р). Две тройки векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ называются взаимными, если $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = 0$ при $i \neq j$, $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = 1$.

1) Доказать, что для существования тройки $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, взаимной к $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ были некомпланарны;

2) выразить в этом случае векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ через векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

3) Доказать, что если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют базис, то векторы взаимной тройки образуют базис той же ориентации (базис, взаимный к базису $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$).

3.29. Для тройки векторов $\mathbf{a}_1\,(3, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2\,(-1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3\,(1, 2, 1)$ найти взаимную тройку (см. задачу 3.28).

3.30. Решить систему векторных уравнений в пространстве: $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$, $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = q$, $(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = s$ (векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны). Геометрическая интерпретация решения дается в задаче 2.32.

3.31. Точка M лежит на ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем $|BM| : |MB_1| = 2 : 1$. Длина ребра куба равна a. Найти расстояние между прямыми CD_1 и MD.

3.32. Доказать, что площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC, равна 3/4 площади треугольника ABC.

3.33. В треугольнике ABC через точку H на стороне AC проведена прямая параллельно стороне BC до пересечения со стороной AB в точке M. Площадь треугольника BHM в 4,5 раза меньше площади треугольника ABC. Найти отношение $|AM|:|MB|$.

3.34. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если длина высоты ее равна h.

3.35. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение длин оснований $|AD|:|BC| = 3:1$. Отрезок MN параллелен стороне CD и пересекает сторону AB. При этом $|AM|:|BN| = 3:2$, $|MN|:|CD| = 1:3$; отрезок AM параллелен отрезку BN. Найти площадь треугольника BNC.

3.36. Точка M — середина бокового ребра AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые BD, MD_1 и A_1C попарно перпендикулярны. Известны длины отрезков: $|BD| = 2a$, $|A_1C| = 4a$, $|BC| = 3a/2$. Найти длину высоты параллелепипеда.

3.37. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер произвольного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две одинаковые по объему части.

3.38. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, параллельные ребрам AC и BD. Найти длину ребра тетраэдра, если площади сечений равны S_1 и S_2, а расстояние между секущими плоскостями равно d.

3.39. Доказать, что все четыре грани произвольного тетраэдра равновелики тогда и только тогда, когда они конгруэнтны.

§ 4. Замена базиса и системы координат

4.1. На плоскости даны два базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$. Векторы второго базиса имеют в первом базисе координаты $(-1, 3)$ и $(2, -7)$ соответственно.

1) Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты α'_1, α'_2 во втором базисе.

2) Найти координаты вектора во втором базисе, если известны его координаты α_1, α_2 в первом базисе.

3) Найти координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ во втором базисе.

4.2. В пространстве даны два базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Векторы второго базиса имеют в первом базисе координаты (1, 1, 1), (—1, —2, —3), (1, 3, 6) соответственно.

1) Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты α'_1, α'_2, α'_3 во втором базисе.

2) Найти координаты вектора во втором базисе, если известны его координаты α_1, α_2, α_3 в первом базисе.

3) Найти координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ во втором базисе.

4.3. На плоскости даны две системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты (—1, 3), а базисные векторы второй системы имеют в базисе первой системы координаты (2, 3) и (1, 1) соответственно.

1) Найти координаты точки в первой системе, если известны ее координаты x', y' во второй системе координат.

2) Найти координаты точки во второй системе, если известны ее координаты x, y в первой системе координат.

3) Найти координаты точки O во второй системе и координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ в базисе второй системы координат.

4.4. В пространстве даны две системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты (1, 1, 2), а базисные векторы второй системы координат имеют в базисе первой системы координаты (4, 2, 1), (5, 3, 2), (3, 2, 1) соответственно.

1) Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y', z' во второй системе.

2) Найти координаты точки во второй системе, если известны ее координаты x, y, z в первой системе.

3) Найти координаты точки O во второй системе координат и координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в базисе второй системы.

4.5. Координаты x, y каждой точки плоскости в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ выражаются через координаты x', y' этой же точки в системе O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ формулами $x = 2x' - y' + 5$, $y = 3x' + y' + 2$.

1) Выразить координаты x', y' через координаты x, y.

2) Найти координаты начала O и базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ первой системы координат во второй системе.

3) Найти координаты начала O' и базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ второй системы координат в первой системе.

4.6. Координаты x, y, z каждой точки пространства в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ выражаются через координаты x', y', z' этой же точки в системе O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ формулами $x = x' + y' + z' - 1$, $y = -x' + z' + 3$, $z = -x' - y' - 2$.

1) Выразить координаты x', y', z' через координаты x, y, z.

2) Найти координаты начала O и базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ первой системы координат во второй системе.

3) Найти координаты начала O' и базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ второй системы в первой системе.

4.7. Найти координаты вектора в базисе $\mathbf{e}_1$ (2, 3), $\mathbf{e}_2$ (3, 4) на плоскости, если известны его координаты α'_1, α'_2 в базисе $\mathbf{e}'_1$ (1, —1), $\mathbf{e}'_2$ (2, —3).

4.8. Найти координаты вектора в базисе $\mathbf{e}_1$ (1, 3, 2), $\mathbf{e}_2$ (—1, 1, 0), $\mathbf{e}_3$ (2, —1, 1) в пространстве, если известны его координаты α'_1, α'_2, α'_3 в базисе $\mathbf{e}'_1$ (—1, 0, 2), $\mathbf{e}'_2$ (1, 1, 1), $\mathbf{e}'_3$ (4, 3, —1).

4.9. Найти координаты точки в системе координат O (2, —1), $\mathbf{e}_1$ (1, 5), $\mathbf{e}_2$ (—1, 4) на плоскости, если известны ее координаты x', y' в системе координат O' (3, 2), $\mathbf{e}'_1$ (1, —1), $\mathbf{e}'_2$ (4, 2).

4.10. Найти координаты точки в системе координат O (1, 3, 3), $\mathbf{e}_1$ (3, 3, 1), $\mathbf{e}_2$ (3, 5, 2), $\mathbf{e}_3$ (1, 2, 1) в пространстве, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат O' (—1, 0, 2), $\mathbf{e}'_1$ (1, —2, 1), $\mathbf{e}'_2$ (4, 2, 1), $\mathbf{e}'_3$ (2, —1, 3).

4.11 (р). В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на диагонали BD, причем $|BE| : |ED| = 1 : 2$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат E, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{ED}$.

4.12. В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на стороне BC, а точка F — на стороне AB, причем $|BE| : |BC| = 1 : 4$, $|BF| : |AF| = 2 : 5$. Найти координаты точки плоскости в системе координат C, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат E, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$.

4.13. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне BC, а точка E лежит на продолжении стороны AC за точку C, причем $|BD|:|DC| = 1:2$, $|AC|:|CE| = 3:1$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат D, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DE}$.

4.14. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E — на отрезке BD, причем $|AD|:|AC| = 1:3$, $|BE|:|ED| = 2:3$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат C, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CE}$.

4.15. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат C, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CE}$.

4.16. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований BC и AD относятся как $2:3$. Найти координаты точки плоскости в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат E, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$.

4.17. В трапеции $ABCD$ длины оснований BC и AD относятся как $3:4$, точка E является серединой основания AD, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F. Найти координаты точки плоскости в системе координат E, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, если известны ее координаты x', y' в системе координат F, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{FC}$.

4.18. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с острым углом A, равным 60°. Точка K лежит на продолжении ребра AB за точку B, причем угол ADK прямой. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат K, $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{KC_1}$.

4.19. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат A_1, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{A_1M}$.

4.20. В тетраэдре $ABCD$ точка M — точка пересечения медиан грани BCD. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат M, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$.

4.21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является центром основания. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AS}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат S, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{SM}$.

4.22. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты точки пространства в системе координат A, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$, если известны ее координаты x', y', z' в системе координат D_1, $\overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{D_1B}$.

4.23. Координаты x, y каждой точки плоскости в первой системе координат выражаются через координаты x', y' этой же точки во второй системе координат соотношениями $x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10}$, $y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20}$. Первая система координат является прямоугольной. При каком необходимом и достаточном условии вторая система также является прямоугольной?

4.24. Координаты x, y, z каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты x', y', z' этой же точки во второй системе координат соотношениями

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{10},$$

$$y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{20},$$

$$z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{30}.$$

1) Пусть первая система координат является прямоугольной. При каком необходимом и достаточном условии вторая система также является прямоугольной?

2) При каком необходимом и достаточном условии ориентация базисов первой и второй систем одинакова?

4.25. На плоскости даны две прямоугольные системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты x_0, y_0, а векторы $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

1) Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе.

2) Найти координаты точки во второй системе координат, если известны ее координаты x, y в первой системе.

3) Найти координаты точки O во второй системе координат.

4.26. На плоскости даны две прямоугольные системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты 1, 3, а векторы $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе, считая угол φ равным:

1) 60°; 2) 135°; 3) 90°; 4) 180°.

4.27. На плоскости даны две прямоугольные системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты x_0, y_0, а векторы $\mathbf{e}_1'$ и $-\mathbf{e}_2'$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на один и тот же угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

1) Найти координаты точки в первой системе координат, если известны ее координаты x', y' во второй системе.

2) Найти координаты точки во второй системе координат, если известны ее координаты x, y в первой системе.

3) Найти координаты точки O во второй системе координат.

4.28. В прямоугольном треугольнике ABC, длины катетов которого равны $|AB| = 3$ и $|BC| = 4$, точка D является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла. Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ имеют длину 1, причем $\mathbf{e}_1$ сонаправлен с $\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{e}_2$ сонаправлен с $\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{e}_1'$ сонаправлен с $\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{e}_2'$ сонаправлен с $\overrightarrow{DB}$. Найти координаты точки плоскости в системе координат B, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, если известны ее координаты x', y' в системе координат D, $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$.

4.29. В пространстве даны две прямоугольные системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты -1, 3, 5. Вектор $\mathbf{e}_1'$ образует углы, равные 60°, с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и острый угол с вектором $\mathbf{e}_3$. Вектор $\mathbf{e}_2'$ компланарен с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образует с вектором $\mathbf{e}_2$ острый угол. Тройки $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ одинаково ориентированы. Найти координаты точки пространства в первой системе координат, если известны ее координаты x', y', z' во второй системе.

4.30. В пространстве даны две прямоугольные системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$. Точки O и O' различны, а концы векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_i'$, отложенных соответственно из точек O и O', совпадают ($i = 1, 2, 3$). Найти координаты точки пространства в первой системе координат, если известны ее координаты x', y', z' во второй системе.

ГЛАВА II

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

В этой главе уравнения прямой на плоскости, прямых и плоскостей в пространстве используются в векторной и координатной форме. Основные понятия: *направляющий вектор прямой*, *направляющие векторы плоскости*, *нормальный вектор прямой на плоскости*, *нормальный вектор плоскости*, *пучок прямых на плоскости*, *пучок* и *связка плоскостей*, а также *параллельность*, *перпендикулярность*, *углы*, *расстояния* и *проекции*. Всюду, кроме задач 6.31 и 6.32, под проекцией понимается ортогональная проекция.

§ 5. Прямая на плоскости

Прямая линия на плоскости может быть задана:

1) *векторным уравнением в параметрической форме*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t \qquad (\mathbf{a} \neq 0), \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор фиксированной точки на прямой;

2) *нормальным векторным уравнением*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0,\ \mathbf{n}) = 0 \qquad (\mathbf{n} \neq 0), \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор прямой;

3) *общим уравнением* в декартовой системе координат

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{3}$$

Уравнение (2) можно записать в виде

$$(\mathbf{r},\ \mathbf{n}) = D.$$

Если уравнение (1) записать в общей декартовой системе координат, то получим параметрические уравнения прямой на плоскости

$$x = x_0 + \alpha t, \qquad y = y_0 + \beta t.$$

При $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ исключением параметра t параметрические уравнения прямой приводятся к канонической форме

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

При $\alpha = 0$ каноническое уравнение прямой принимает вид $x = x_0$, при $\beta = 0$ — вид $y = y_0$.

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки, может быть записано в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\, t$$

и в координатной форме

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Здесь $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы данных точек, а x_1, y_1 и x_2, y_2 — их декартовы координаты. При $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$ уравнение прямой принимает соответственно вид $x = x_1$ или $y = y_1$.

Для данной прямой линии ее направляющий и нормальный векторы определены с точностью до умножения на ненулевое число. Направляющим вектором прямой, заданной общим уравнением (3), является, например, вектор с координатами $-B$, A. Если система координат прямоугольная, то нормальным вектором прямой (3) является, например, вектор с координатами A, B.

Если прямая задана общим уравнением (3), то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от нее («в положительной полуплоскости»), выполнено неравенство $Ax + By + C > 0$, а для координат всех точек, лежащих по другую сторону («в отрицательной полуплоскости»), — неравенство $Ax + By + C < 0$.

Расстояние от точки с радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ до прямой, заданной векторным уравнением (2), равно $|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})| / |\mathbf{n}|$. Расстояние от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой, заданной уравнением (3) в прямоугольной системе координат, равно

$$|Ax_1 + By_1 + C| / \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Векторные уравнения прямых (5.1—5.5)

5.1. При каком необходимом и достаточном условии прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$:

1) пересекаются в единственной точке;

2) параллельны, но не совпадают;

3) совпадают?

5.2. Найти угол между прямыми, заданными своими уравнениями:

1) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$;

2) $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$.

5.3. Две прямые заданы векторными уравнениями $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, причем $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$. Найти радиус-вектор точки пересечения прямых.

5.4. Даны точка M_0 с радиус-вектором $\mathbf{r}_0$ и прямая $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Найти радиус-векторы:

1) проекции точки M_0 на прямую;

2) точки M_1, симметричной с M_0 относительно данной прямой.

5.5. Найти расстояние от точки M_0 $(\mathbf{r}_0)$ до прямой, заданной уравнением:

1) $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$; 2) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

В задачах 5.6—5.20
система координат
общая декартова

5.6. Указать хотя бы один направляющий вектор прямой, которая:

1) имеет угловой коэффициент k;

2) задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

5.7. 1) Записать уравнение прямой $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$ в виде $Ax + By + C = 0$.

2) Записать уравнение прямой $3x - 4y + 4 = 0$ в параметрической и канонической формах.

3) Найти угловой коэффициент прямой $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$.

5.8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A $(-3, 4)$ и параллельной прямой:

1) $x - 2y + 5 = 0$; 2) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3}$; 3) $x = 2$;

4) $y = -1$; 5) $x = 3 + t$, $y = 4 - 7t$.

5.9. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

1) A $(-3, 1)$ и B $(1, 2)$;

2) A $(0, 2)$ и B $(-1, 0)$;

3) A $(2, 1)$ и B $(2, -5)$;

4) A $(1, -3)$ и B $(3, -3)$.

5.10. Установить, пересекаются, параллельны или совпадают прямые данной пары; если прямые пересекаются, найти координаты точки их пересечения:

1) $x - 3y - 2 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$;

2) $x + 3y - 1 = 0$ и $2 - 2x - 6y = 0$;

3) $-x - y - 3 = 0$ и $3x + 3y + 1 = 0$;

4) $x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$ и $x = 2 - t$, $y = 2 + t$.

5.11. При каких a прямые $ax - 4y = 6$ и $x - ay = 3$: 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?

5.12. При каких a три прямые $ax + y = 1$, $x - y = a$, $x + y = a^2$ имеют общую точку?

5.13. Точка M лежит на прямой $Ax + By + C = 0$; вектор $\overrightarrow{MM_1}$ имеет координаты A, B. Доказать, что точка M_1 лежит в положительной полуплоскости относительно прямой с уравнением $Ax + By + C = 0$.

5.14. Точка M (3, 2) является центром параллелограмма, а его стороны лежат на некоторых четырех прямых. На каждой из этих прямых расположена одна из точек: P (2, 1), Q (4, —1), R (—2, 0), S (1, 5). Найти уравнения прямых.

5.15. Даны две вершины треугольника (3, —1) и (1, 4) и точка пересечения его медиан (0, 2). Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

5.16. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (1, 2) так, что отрезок этой прямой, заключенный между прямыми $3x + y + 2 = 0$ и $4x + y - 1 = 0$, в точке A делится пополам.

5.17. Две медианы треугольника лежат на прямых $x + y = 3$ и $2x + 3y = 1$, а точка A (1, 1) является вершиной треугольника. Составить уравнения сторон треугольника.

5.18. Составить уравнения прямых, проходящих через точку A (—1, 5) и равноудаленных от двух точек B (3, 7) и C (1, —1).

5.19 (р). Составить уравнения прямых, равноудаленных от трех точек A (3, —1), B (9, 1) и C (—5, 5).

5.20. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая продолжения сторон AB и AD соответственно в точках K и L таких, что $|AK|/|AB| = 5\,|AL|/|AD|$. Найти отношение площади параллелограмма к площади треугольника AKL.

В задачах 5.21—5.52 система координат прямоугольная

5.21. Указать хотя бы один нормальный вектор прямой, которая:

1) имеет угловой коэффициент k;

2) задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

5.22. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A $(-3, 4)$ и перпендикулярной прямой:

1) $x - 2y + 5 = 0$;

2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}$;

3) $x = 2$;

4) $y = -1$;

5) $x = 3 + t$, $y = 4 - 7t$.

5.23. Точка A $(3, -2)$ является вершиной квадрата, а точка M $(1, 1)$ — точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон квадрата.

5.24. Длина стороны ромба с острым углом 60° равна 2. Диагонали ромба пересекаются в точке M $(1, 2)$, причем большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнения сторон ромба.

5.25. На прямой $5x - y - 4 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек A $(1, 0)$ и B $(-2, 1)$.

5.26. Найти расстояние от точки A $(1, -2)$ до прямой, заданной своим уравнением:

1) $2x - 3y + 5 = 0$;

2) $4x - 3y - 15 = 0$;

3) $4x = 3y$;

4) $4x - 3y - 10 = 0$;

5) $x = 7$;

6) $y = 9$.

5.27. Найти расстояние между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$.

5.28. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $-2x + y + 5 = 0$ и отстоящих от точки A $(1, -2)$ на расстояние $\sqrt{20}$.

5.29. Точка A лежит на прямой $2x - 3y + 4 = 0$. Расстояние от точки A до прямой $3y = 4x$ равно 2. Найти координаты точки A.

5.30. Точка A лежит на прямой $x + y = 8$, причем A равноудалена от точки B $(2, 8)$ и от прямой $x - 3y + 2 = 0$. Найти координаты точки A.

5.31. Найти множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух пересекающихся прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ есть постоянная величина $k > 0$.

5.32 (р). Даны точка A $(1, 2)$ и прямая $3x - y + 9 = 0$. Найти координаты:

1) проекции точки A на прямую;

2) точки B, симметричной с A относительно прямой.

5.33. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $3x - y + 5 = 0$ относительно прямой $x + y = 1$.

5.34. Даны уравнения сторон треугольника: $x + 2y + 1 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$. Составить уравнение высоты, опущенной на третью сторону.

5.35. Точка H $(-3, 2)$ является точкой пересечения высот треугольника, две стороны которого лежат на прямых $y = 2x$ и $y = -x + 3$. Составить уравнение третьей стороны.

5.36. Даны координаты двух вершин треугольника A $(-1, 3)$, B $(2, 5)$ и точки пересечения его высот H $(1, 4)$. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

5.37. Точка A $(1, 2)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка B $(3, -1)$ — серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}$. Составить уравнения остальных сторон трапеции.

5.38. Точки K $(1, 3)$ и L $(-1, 1)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки P $(3, 0)$ и Q $(-3, 5)$ лежат на ее боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.

5.39. Найти угол между прямыми:

1) $2x + y - 1 = 0$ и $y - x = 2$;

2) $x = 4$ и $2x - y - 1 = 0$;

3) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-4}$ и $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3}$;

4) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2}$ и $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-4}$;

5) $x = 3t$, $y = -1 + 2t$ и $x = 1 - 2t$, $y = -5 + t$.

5.40. Составить уравнения прямых, проходящих через точку A $(3, 1)$ и образующих с прямой $3x = y + 2$ углы в 45°.

5.41. Точка A $(2, 0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $x + y - 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

5.42. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $x + 2y = 2$, а одна из боковых сторон — на прямой $y + 2x = 1$. Составить уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что ее расстояние от точки пересечения данных прямых равно $1/\sqrt{5}$.

5.43. Рассматривается тот угол между прямыми $y = x + 1$ и $y = 7x + 1$, внутри которого лежит точка A (1, 3). Найти координаты точки B, лежащей внутри этого угла и удаленной от данных прямых соответственно на расстояния $4\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$.

5.44 (р). Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x - 7y = 1$ и $x + y = -7$, внутри которого лежит точка A (1, 1).

5.45. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 7y = 1$ и $x + y = -7$.

5.46. Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3y = 4x$, $4y = 3x$, $5x + 12y = 10$.

5.47. Вершинами треугольника являются точки A (20, 15), B (−16, 0), C (−8, −6). Найти длины радиусов и координаты центров вписанной и описанной окружностей.

5.48. Даны координаты двух вершин треугольника A (2, −1), B (1, 5) и точки пересечения его биссектрис L (3, 0). Составить уравнения сторон треугольника.

5.49. Точки A (1, 2) и B (−3, 0) — вершины равнобедренного треугольника ABC, углы A и B при основании равны $\arccos(1/\sqrt{5})$. Найти координаты вершины C, зная, что она лежит по ту же сторону от прямой AB, что и точка M (2, 3).

5.50. Сторона AB треугольника ABC задана уравнением $x - y + 1 = 0$, сторона BC — уравнением $2x - 3y + 5 = 0$, сторона AC — уравнением $3x - 4y + 2 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину C так, что точка пересечения этой прямой со стороной AB удалена от стороны AC на расстояние 1/5.

5.51. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку A (−1, 3) и касающейся прямых $7x + y = 0$ и $x - y + 8 = 0$.

5.52. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$, а точка C (3, −1) является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна 9/4. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты.

З а м е н а с и с т е м ы к о о р д и н а т (5.53—5.57)

5.53. Даны две системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты a_{10}, a_{20}, а базисные векторы второй системы имеют в базисе первой системы координаты a_{11}, a_{21} и a_{12}, a_{22} соответственно. В первой системе координат прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$. Составить уравнение этой прямой во второй системе.

5.54. На плоскости даны три точки A (2, 3), B (1, 4), C (—1, 2) и прямая $x - 5y + 7 = 0$. Составить уравнение этой прямой в новой системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

5.55. Прямые $3y = x + 2$ и $3x + 2y - 5 = 0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка A (—1, 2) имеет в новой системе координаты (1, 1).

1) Найти координаты точки в исходной системе координат, если известны ее координаты x', y' в новой системе.

2) Составить в новой системе координат уравнение прямой, которая в исходной системе задается уравнением $5x - 4y + 7 = 0$.

5.56. В прямоугольной системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ прямая задана уравнением $\sqrt{3}\,x + 2y - 6 = 0$. Начало новой прямоугольной системы координат находится в точке O' (—2, 3), а базисные векторы $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом на угол 30° в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Составить уравнение данной прямой в системе координат O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$.

5.57. Две взаимно перпендикулярные прямые, заданные в прямоугольной системе координат уравнениями $2x - y + 1 = 0$ и $x + 2y - 7 = 0$, являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой прямоугольной системы координат, а точка A (2, 0) имеет в новой системе положительные координаты.

1) Найти координаты точки в исходной системе координат, если известны ее координаты x', y' в новой системе.

2) Составить в новой системе координат уравнение прямой, которая в исходной системе задается уравнением $4x + y - 1 = 0$.

§ 6. Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость может быть задана:

1) *векторным параметрическим уравнением*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v \qquad ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0), \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — направляющие векторы плоскости, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор фиксированной точки плоскости;

2) *нормальным векторным уравнением*

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})=0 \qquad (\mathbf{n}\neq 0), \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор плоскости;

3) *общим уравнением* в декартовой системе координат

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (A^2+B^2+C^2\neq 0). \tag{3}$$

Уравнение (2) можно записать в виде

$$(\mathbf{r},\ \mathbf{n})=D,$$

а уравнение (1) — в виде

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a},\ \mathbf{b})=0. \tag{4}$$

Если уравнение (1) записать в общей декартовой системе координат, то получим параметрические уравнения плоскости

$$x=x_0+\alpha_1u+\alpha_2v,\quad y=y_0+\beta_1u+\beta_2v,\quad z=z_0+\gamma_1u+\gamma_2v.$$

Уравнение (4) в координатной форме равносильно уравнению

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой, можно записать в векторной форме

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0)=0$$

и в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$

Здесь x_i, y_i, z_i, $i=0,1,2$, — декартовы координаты данных точек, а $\mathbf{r}_i$ — соответствующие радиус-векторы.

Всякий вектор $\mathbf{a}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, компланарный плоскости, заданной в общей декартовой системе координат уравнением (3), удовлетворяет уравнению $A\alpha+B\beta+C\gamma=0$. Если система координат прямоугольная, то нормальным вектором плоскости (3) является, например, вектор с координатами A, B, C.

Если плоскость задана уравнением (3), то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от нее («в положительном полупространстве»), выполняется неравенство $Ax+By+Cz+D>0$, а для координат всех точек, лежащих по другую сторону («в отрицательном полупространстве»), — неравенство $Ax+By+Cz+D<0$.

Расстояние от точки с радиус-вектором $\mathbf{r}_1$ до плоскости, заданной уравнением (2), равно $|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})|/|\mathbf{n}|$. Расстояние от точки $M(x_1,$

y_1, z_1) до плоскости, заданной в прямоугольной системе координат уравнением (3), равно

$$|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Прямая линия в пространстве может быть задана:

1) векторным параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t \qquad (\mathbf{a} \neq 0), \tag{5}$$

где $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор фиксированной точки прямой;

2) векторными уравнениями

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \ \mathbf{a}] = 0 \qquad (\mathbf{a} \neq 0)$$

или

$$[\mathbf{r}, \ \mathbf{a}] = \mathbf{b} \qquad (\mathbf{a} \neq 0, \ (\mathbf{a}, \ \mathbf{b}) = 0),$$

равносильными уравнению (5).

Если уравнение (5) записать в общей декартовой системе координат, то получим параметрические уравнения прямой линии:

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad z = z_0 + \gamma t.$$

Исключением параметра t параметрические уравнения приводятся к канонической форме

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Если $\gamma = 0$, то канонические уравнения принимают вид

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}, \qquad z = z_0.$$

Аналогично записываются канонические уравнения прямой, если $\alpha = 0$ *или* $\beta = 0$. Если $\beta = \gamma = 0$, то канонические уравнения прямой имеют вид $y = y_0$, $z = z_0$. Аналогично записываются канонические уравнения, если другая пара компонент направляющего вектора нулевая.

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки, можно задать в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,t$$

и в координатной форме

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Здесь $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы данных точек, а (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) — их декартовы координаты. Если $x_1 = x_2$, то уравнения прямой принимают вид $x = x_1$, $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. Если же $x_1 = x_2$ и $y_1 =$

$= y_2$, то уравнения прямой запишутся в виде $x = x_1$, $y = y_1$. Аналогично рассматриваются другие случаи совпадения одной или двух координат точек.

Прямую можно задать и как линию пересечения двух непараллельных плоскостей с помощью их уравнений.

Векторные уравнения прямых и плоскостей (6.1—6.12)

6.1. Записать уравнение:

1) плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$ в виде $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$;
2) прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ в виде $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$;
3) прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$;
4) прямой $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i) = D_i$, $i = 1, 2$, в виде $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$;
5) прямой $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_i) = D_i$, $i = 1, 2$, в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.

6.2. Найти необходимое и достаточное условие, при котором плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$:

1) пересекаются по прямой;
2) параллельны, но не совпадают;
3) совпадают.

6.3. Найти необходимое и достаточное условие, при котором прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$:

1) пересекаются (т. е. имеют единственную общую точку);
2) скрещиваются;
3) параллельны, но не совпадают;
4) совпадают.

6.4. Даны прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ и плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. При каком необходимом и достаточном условии:

1) они пересекаются (имеют единственную общую точку);
2) они параллельны (не имеют общих точек);
3) прямая лежит в плоскости?

6.5. Найти радиус-вектор точки пересечения:

1) прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ с плоскостью $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ (если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$);
2) прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ с плоскостью $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ (если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$).

6.6. Точка M_0 определяется радиус-вектором $\mathbf{r}_0$. Составить уравнения:

1) прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$;
2) плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

6.7. Составить векторное уравнение плоскости, проходящей через прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ и точку M_1 ($\mathbf{r}_1$), не лежащую на этой прямой.

6.8. Даны точка M_0 ($\mathbf{r}_0$) и плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. Найти радиус-вектор:

1) проекции точки M_0 на плоскость;

2) точки M_1, симметричной с M_0 относительно плоскости.

6.9. Даны точка M_0 ($\mathbf{r}_0$) и прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$. Найти радиус-вектор:

1) проекции точки M_0 на прямую;

2) точки M_1, симметричной с M_0 относительно прямой.

6.10. Составить уравнения:

1) проекции прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, не перпендикулярной плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, на эту плоскость;

2) прямой, пересекающей прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ под прямым углом и проходящей через точку M_0 ($\mathbf{r}_0$), не лежащую на данной прямой (перпендикуляра, опущенного из точки M_0 ($\mathbf{r}_0$) на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$);

3) прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ и проходящей через точку M_0 ($\mathbf{r}_0$), не лежащую ни на одной из этих прямых;

4) прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ под прямыми углами (общего перпендикуляра к этим прямым).

6.11. Найти расстояние:

1) от точки M_0 ($\mathbf{r}_0$) до плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$;

2) между двумя параллельными плоскостями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$;

3) между двумя параллельными плоскостями $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_2$;

4) от точки M_0 ($\mathbf{r}_0$) до прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$;

5) от точки M_0 ($\mathbf{r}_0$) до прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$;

6) между двумя параллельными прямыми $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}t$;

7) между двумя параллельными прямыми $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_1$ и $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_2$;

8) между двумя скрещивающимися прямыми $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$;

9) между двумя скрещивающимися прямыми $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1$ и $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2$.

6.12. Даны прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ и плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, не параллельные между собой. Точка M лежит на прямой и удалена от плоскости на расстояние ρ. Найти радиус-вектор точки M.

В задачах 6.13—6.42 система координат общая декартова

6.13. Точка M лежит в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор $\overrightarrow{MM_1}$ имеет координаты (A, B, C). Доказать, что точка M_1 лежит в положительном полупространстве относительно данной плоскости.

6.14. 1) Зная параметрические уравнения плоскости: $x = 1 + u - v$, $y = 2 + u + 2v$, $z = -1 - u + 2v$, составить ее общее уравнение.

2) Зная общее уравнение плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$, составить ее параметрические уравнения.

6.15. Доказать, что направляющий вектор **a** прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можно находить по правилу «векторного произведения»

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

не только в прямоугольной правой, но и в общей декартовой системе координат.

6.16. 1) Записать уравнения прямой $x = 2 + 3t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + t$ в виде пересечения двух плоскостей и в канонической форме.

2) Записать уравнения прямой $x - y + 2z + 4 = 0$, $-2x + y + z + 3 = 0$ в параметрической и в канонической форме.

6.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (1, —1, 2) и параллельной плоскости:

1) $x - 3y + 2z + 1 = 0$;

2) $x = 5$;

3) $y = 4$;

4) $z = 3$;

5) $x = 4 - u + v$, $y = 2 + u + 2v$, $z = -1 + 7u + 3v$.

6.18. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A (1, 3, 1) и параллельной прямой:

1) $x + y - z + 2 = 0$, $2x + 3y + z = 0$;

2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{21}$;

3) $x = 2$, $y = 3$;

4) $x = 0,\ z = 0$;

5) $y = -1,\ z = 2$.

6.19. Составить уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

1) $A\ (1, 3, -1)$ и $B\ (4, 2, 1)$;

2) $A\ (3, 2, 5)$ и $B\ (4, 1, 5)$;

3) $A\ (-1, 1, 2)$ и $B\ (5, 1, 2)$.

6.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки (если эти точки определяют плоскость):

1) $A\ (2, 1, 3)$, $B\ (-1, 2, 5)$, $C\ (3, 0, 1)$;

2) $A\ (1, -1, 3)$, $B\ (2, 3, 4)$, $C\ (-1, 1, 2)$;

3) $A\ (3, 0, 0)$, $B\ (0, -1, 0)$, $C\ (0, 0, 4)$;

4) $A\ (2, 1, 1)$, $B\ (2, 0, -1)$, $C\ (2, 4, 3)$;

5) $A\ (1, 1, 2)$, $B\ (2, 3, 3)$, $C\ (-1, -3, 0)$.

6.21. Даны две плоскости. Установить, являются ли они пересекающимися, параллельными или совпадающими. Если плоскости пересекаются, составить канонические уравнения линии пересечения. Плоскости заданы уравнениями:

1) $3x + y - z + 1 = 0$ и $5x + 3y + z + 2 = 0$;

2) $x + y - 2z + 1 = 0$ и $6z - 3x - 3y - 3 = 0$;

3) $-x + y + z = 1$ и $x - y - z = 2$;

4) $x = 3 + u + v,\quad y = 2 - u + v,\quad z = 3u - 2v$ и $x = 5 - u,\ y = 3 + v,\ z = u + 2v$.

6.22. При каких a плоскости $x + ay + z - 1 = 0$ и $ax + 9y + \frac{a^3}{9} z + 3 = 0$:

1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?

6.23. Проверить, лежит ли данная прямая в плоскости $x - 3y + z + 1 = 0$, параллельна этой плоскости или пересекает ее в единственной точке; в последнем случае найти координаты точки пересечения. Прямая задана уравнениями:

1) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{7}$;

2) $x = 2 + 3t,\ y = 7 + t,\ z = 1 + t$;

3) $x - y + 2z = 0,\ x + y - 3z + 2 = 0$;

4) $3x - 2y - 1 = 0,\ 7y - 3z - 4 = 0$;

5) $x = 2,\ y = 5 + t,\ z = 4 + 3t$.

6.24. При каких a прямая $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z-2}{-1}$:

1) пересекает плоскость $3a^2x + ay + z - 4a = 0$;

2) параллельна этой плоскости;

3) лежит в этой плоскости?

6.25. Даны две прямые. Установить, пересекаются они, скрещиваются, параллельны или совпадают. Если прямые пересекаются или параллельны, составить уравнение плоскости, в которой они лежат. Если прямые пересекаются, найти также координаты точки их пересечения. Прямые заданы уравнениями:

1) $x + z - 1 = 0$, $3x + y - z + 13 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$, $y + 2z - 8 = 0$;

2) $x = 3 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 4$ и $x + y - z = 0$, $2x - y + 2z = 0$;

3) $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ и $x = 7 - 6t$, $y = 2 + 9t$, $z = 12t$;

4) $x = 9t$, $y = 5t$, $z = -3 + t$ и $2x - 3y - 3z - 9 = 0$, $x - 2y + z + 3 = 0$;

5) $x = 1 + 2t$, $y = 7 + t$, $z = 3 + 4t$ и $x = 6 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = -2 + t$.

6.26. При каких a прямые

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a} \text{ и } \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}:$$

1) пересекаются;
2) скрещиваются;
3) параллельны;
4) совпадают?

6.27. Исследовать взаимное расположение трех плоскостей; если существуют точки, одновременно принадлежащие трем плоскостям, найти координаты этих точек. Плоскости заданы уравнениями:

1) $2x + 3y - 4z - 1 = 0$, $-x + 5y - z - 3 = 0$, $3x - 10y + 7z = 0$;

2) $x + y - 2z + 1 = 0$, $-x - y + 2z + 1 = 0$, $2x + 2y - 4z = 0$;

3) $x + 2y - z - 1 = 0$, $-2x - 4y + 2z + 2 = 0$, $4 + 4z - 4x - 8y = 0$;

4) $5x - 2y + 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$, $8x - 2y + z + 7 = 0$;

5) $5x - 2y + 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$, $8x - 2y + z - 1 = 0$.

6.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (1, 3, 0) и параллельной прямым $x + y - z + 3 = 0$, $2x - y + 5z + 1 = 0$ и $-x + y = 1$, $5x + y - z + 2 = 0$.

6.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$ и параллельной прямой $\frac{x}{5}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}$.

6.30. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A $(-1, 1, 2)$ и прямую, заданную уравнениями:

1) $x=1+5t,\ y=-1+t,\ z=2t$;

2) $x+5y-7z+1=0,\ 3x-y+2z+3=0$.

6.31. Прямая проектируется на плоскость Oyz параллельно оси Ox. Составить уравнения проекции, если прямая задана уравнениями:

1) $x=1+2t,\ y=3t,\ z=1-t$;

2) $x+y+z-1=0,\ x+2y-3z+2=0$.

6.32. Прямая проектируется на плоскость $x+2y-3z+2=0$ параллельно вектору $\mathbf{l}$ $(2, 1, -1)$. Составить уравнения проекции, если прямая задана уравнениями:

1) $x=1+2t,\ y=3t,\ z=-6-t$;

2) $x+y+z-1=0,\ y-3z+4=0$.

6.33. Три грани параллелепипеда лежат в плоскостях $x-3z+18=0$, $2x-4y+5z-21=0$, $6x+y+z-30=0$, а одна из его вершин A имеет координаты $(-1, 3, 1)$. Составить уравнения остальных граней параллелепипеда и его диагонали, проходящей через вершину A.

6.34. Точки A $(1, 0, 3)$ и B $(-1, 2, 1)$ являются вершинами тетраэдра $ABCD$, точка K $(-1, 5, 2)$ — серединой ребра BC, а точка M $(0, 1, 4)$ — точкой пересечения медиан грани BCD. Составить уравнения плоскостей, в которых лежат грани тетраэдра.

6.35. Составить уравнения прямой, проходящей через точку O $(0, 0, 0)$ и пересекающей две данные прямые:

1) $x-y+z+2=0,\ x-2y+3z-8=0$ и $y-z+1=0,\ x+y-2z+4=0$;

2) $x=1+2t,\ y=2+3t,\ z=-t$ и $x=4t,\ y=5-5t,\ z=3+2t$.

6.36. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A $(-1, 1, -1)$ и пересекающей две данные прямые:

1) $x - y + z + 2 = 0,\ x - 2y + 3z - 8 = 0$ и $y - z = 0,\ x + y - 2z + 4 = 0$;

2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-1}$ и $\frac{x}{4} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z-3}{2}$.

6.37. Составить уравнения прямой, пересекающей две прямые $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$ и параллельной прямой $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.

6.38. Составить уравнения плоскостей, проходящих через прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{4}$ и равноудаленных от точек A (1, 2, 5) и B (3, 0, —1).

6.39. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку A (1, 0, 4) и равноудаленных от трех точек B (2, 1, 6), C (—2, 3, 2) и D (8, 1, 0).

6.40. Составить уравнения плоскостей, равноудаленных от четырех точек A (1, —1, 3), B (3, 3, 5), C (1, 7, 3) и D (5, 1, 5).

6.41. Плоскость $\mathfrak{m}$ содержит точки A, B, C, S и пересекает координатные оси Ox, Oy, Oz в точках P, Q, R, а координатные плоскости Oxy, Oxz, Oyz — по прямым $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$. В плоскости $\mathfrak{m}$ выбрана система координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Известно, что точка S в этой системе координат имеет координаты (3, 4), а точки A, B, C в исходной пространственной системе координат имеют соответственно координаты:

а) (1, 2, 1), (—1, 3, 2), (1, 4, 0);

б) (2, 1, 1), (2, 3, 0), (1, 1, 2);

в) (1, —1, 0), (1, 0, —1), (0, 1, 1).

1) Найти координаты точек P, Q, R, S и составить уравнения прямых $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ в исходной пространственной системе координат.

2) Найти координаты точек P, Q, R и составить уравнения прямых $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ в системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

6.42 (р). Через вершину C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая продолжения ребер AB, AD и AA_1 соответственно в точках B_0, D_0 и A_0 таких, что $\frac{|AB_0|}{|AB|} = \frac{|AD_0|}{|AD|} = 3\frac{|AA_0|}{|AA_1|}$. Найти отношение объема параллелепипеда к объему тетраэдра $AB_0D_0A_0$.

В задачах 6.43—6.87 система координат прямоугольная

6.43. Найти нормальный вектор плоскости:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$;

2) $x = x_0 + a_1u + a_2v, \quad y = y_0 + b_1u + b_2v,$
$z = z_0 + c_1u + c_2v$.

6.44. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A $(1, -1, 2)$ и перпендикулярной плоскости:

1) $x - 3y + 2z + 1 = 0$; 2) $x = 5$; 3) $y = 4$;

4) $z = 3$; 5) $x = 4 - u + v, \quad y = 2 + u + 2v,$
$z = -1 + 7u + 3v$.

6.45. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A $(1, 3, 1)$ и перпендикулярной прямой:

1) $x + y - z + 2 = 0, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0$;

2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{21}$; 3) $x = 2,\ y = 3$;

4) $x = 0,\ z = 0$; 5) $y = -1,\ z = 2$.

6.46. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A $(2, 1, -1)$ и перпендикулярной двум плоскостям $x - y + 5z + 1 = 0$ и $2x + y = 3$.

6.47. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $x + 3y - z + 2 = 0$ и проходящей через прямую:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$;

2) $2x - y + z = 0, \quad x + 2y + z - 3 = 0$.

6.48. В пучке, определяемом плоскостями $x + 2y - 3z + 5 = 0$ и $4x - y + 3z + 5 = 0$, найти две перпендикулярные друг другу плоскости, одна из которых проходит через точку M $(1, 3, 1)$.

6.49. Точка A лежит на прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$, причем A равноудалена от точек B $(3, 0, -2)$ и C $(-1, 1, 5)$. Найти координаты точки A.

6.50. Найти расстояние от точки A $(3, 1, -1)$ до плоскости:

1) $x - y - 5z + 2 = 0$; 2) $x - 2y + 2z - 2 = 0$;

3) $x - 2y + 2z + 7 = 0$; 4) $x - 2y + 2z = 0$;

5) $x - 2y + 2z + 1 = 0$; 6) $x = 1$; 7) $y = 5$;

8) $z = 0$.

6.51. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

1) $6x - 3y + 2z + 5 = 0$ и $6x - 3y + 2z - 9 = 0$;

2) $2x + 2y - z + 3 = 0$ и $2x + 2y - z + 18 = 0$;

3) $3x + 4z + 1 = 0$ и $6x + 8z - 1 = 0$.

6.52. 1) Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $6x - 3y + 2z + 5 = 0$ и отстоящих от нее на расстояние 3.

2) Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x + 3y - z + \sqrt{11} = 0$ и отстоящих от нее на расстояние 3.

3) Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x + 2y - z + 3 = 0$ и отстоящих от точки $A\,(1,\ 2,\ -1)$ на расстояние 3.

4) Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $3x + 4z + 1 = 0$ и отстоящих от начала координат на расстояние 3.

6.53. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$. Расстояние от точки A до плоскости $x + y + z + 3 = 0$ равно $\sqrt{3}$. Найти координаты точки A.

6.54. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$, причем A равноудалена от точки $B\,(0,\ 1,\ 1)$ и от плоскости $2x - y + 2z + 1 = 0$. Найти координаты точки A.

6.55. Точки $A\,(1,\ -1,\ 2)$ и $B\,(3,\ 0,\ 4)$ являются вершинами куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вектор $\overrightarrow{AD}$ перпендикулярен прямой $x = 0$, $y - z = 0$, а ориентация тройки векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ совпадает с ориентацией тройки базисных векторов системы координат, причем сумма координат вектора $\overrightarrow{AA_1}$ отрицательна. Составить уравнения граней куба.

6.56. Точки $A\,(-3,\ 0,\ 0)$ и $B\,(3,\ 0,\ 0)$ являются вершинами правильного тетраэдра $ABCD$, вершина C удалена от координатной плоскости Oxy на расстояние $3\sqrt{2}$, причем все координаты точки C неотрицательны. Ориентация тройки векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ совпадает с ориентацией тройки базисных векторов системы координат. Составить уравнения граней тетраэдра.

6.57. Дана точка $A\,(3,\ -1,\ 1)$. Найти:

1) координаты проекций точки A на координатные плоскости и координаты точек, симметричных с A относительно координатных плоскостей;

2) координаты проекции точки A на плоскость $x + 2y + 2z + 6 = 0$ и координаты точки, симметричной с A относительно этой плоскости;

3) координаты проекции точки A на плоскость $2x + 3y + 6z + 40 = 0$ и координаты точки, симметричной с A относительно этой плоскости.

6.58. Составить уравнения прямой, симметричной прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$ относительно плоскости $5x - y + z - 4 = 0$.

6.59. Составить уравнения проекций на плоскость $x + 5y - z - 25 = 0$ следующих прямых:

1) $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$;

2) $x - y + 2z - 1 = 0,\quad 3x - y + 2z + 2 = 0$;

3) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

6.60. Найти угол между плоскостями:

1) $x + 4y - z + 1 = 0$ и $x + y - z - 3 = 0$;

2) $x + 2y - z = 1$ и $x - y = 3$;

3) $x + 2y - 2z = 0$ и $z = 5$;

4) $x + 2y - z - 1 = 0$ и $3x - 5y - 7z = 0$;

5) $x + 3y - z + 1 = 0$ и $x = 1 - u$, $y = 2 - 3u - v$, $z = 7 + u + v$;

6) $x - 3y + 2z + 1 = 0$ и $6z - 9y + 3x + 5 = 0$.

6.61. Найти угол между прямыми:

1) $2x + y - z + 1 = 0,\quad x + 3y + z + 2 = 0$ и $x + 3y - z + 2 = 0,\quad x + y + z - 1 = 0$;

2) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$ и $\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-10}{6}$;

3) $x = 5 - 2t,\quad y = 6 + 4t,\quad z = 8t$ и $x = 1 + t,\quad y = -2t,\quad z = 3 - 4t$.

6.62. Найти угол между плоскостью $4x + 4y - 7z + 1 = 0$ и прямой:

1) $x + y + z + 1 = 0,\quad 2x + y + 3z + 2 = 0$;

2) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-6}$;

3) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-7}$; 4) $\frac{x-1}{11} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+3}{4}$.

6.63. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A\ (1, 3, 2)$ параллельно плоскости Oxy и образующей:

1) угол 45° с прямой $x = y$, $z = 0$;

2) угол $\arcsin\left(1/\sqrt{10}\right)$ с плоскостью $x - y = 1$.

6.64. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A\ (-1, 2, 1)$ параллельно прямой $\frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = -z$ и образующей угол 60° с прямой $x = y$, $z = 0$.

6.65. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x+5y+z=0$, $x-z+4=0$ и образующей угол 45° с плоскостью $x-4y-8z+1=0$.

6.66. Доказать, что две данные прямые пересекаются и составить уравнения биссектрис острого и тупого углов между ними:

1) $x=4-4t$, $y=1+4t$, $z=-5+7t$ и $x=-3+t$, $y=-1+2t$, $z=-4+2t$;

2) $x=4+t$, $y=1-t$, $z=5+4t$ и $x=-3-3t$, $y=8+3t$, $z=1$;

3) $x=1+2t$, $y=2+3t$, $z=11-6t$ и $x=1+t$, $y=3+t$, $z=7-t$.

6.67. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют общую вершину A (3, 4, 5), две другие вершины лежат на осях Ox и Oy, а плоскость треугольника параллельна оси Oz. Найти углы треугольника и составить уравнение его плоскости.

6.68. Даны точка A (2, —1, 0) и прямая l. Вычислить расстояние от точки A до прямой l; найти координаты проекции точки A на l и координаты точки B, симметричной с A относительно l; составить уравнения прямой, проходящей через точку A и пересекающей данную прямую под прямым углом («опустить перпендикуляр» из точки A на l). Прямая l задана уравнениями:

1) $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$;

2) $x=1+2t$, $y=2-2t$, $z=-3+t$;

3) $2x+y-z+1=0$, $x+y+z+2=0$.

6.69. Точка A лежит на прямой $x-y-3=0$, $2y+z=0$. Расстояние от точки A до прямой $x=y=z$ равно $\sqrt{6}$. Найти координаты точки A.

6.70. Найти расстояние между прямыми:

1) $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{6}=\dfrac{z-1}{-2}$ и $\dfrac{x-5}{-6}=\dfrac{y}{-12}=\dfrac{z}{4}$;

2) $x=3+2t$, $y=10-3t$, $z=3+4t$ и $x=1+3t$, $y=1-2t$, $z=1+3t$;

3) $x+y+z-1=0$, $x+3y-z+2=0$ и $x+3y+z+2=0$, $x+2y-z+1=0$.

6.71. Даны прямые l_1 и l_2. Составить уравнения их общего перпендикуляра (т. е. прямой, пересекающей l_1 и l_2 под прямым углом); найти точки пересечения общего перпендикуляра с данными прямыми; вычислить расстояние между l_1 и l_2. Прямые заданы уравнениями:

1) $x = 5 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 13 + t$
и $x = 6 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 10 - t$;

2) $2x + 7y - 13 = 0, \quad 3y - 2z - 1 = 0$
и $x + y - 8 = 0, \quad 2x + y - z = 0$;

3) $\frac{x-6}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-10}{-1}$ и $\frac{x+4}{-7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$.

6.72. Точки $A(-1, -3, 1)$, $B(5, 3, 8)$, $C(-1, -3, 5)$, $D(2, 1, -4)$ являются вершинами тетраэдра. Найти:

1) длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D на грань ABC;

2) длину высоты основания ABC, опущенной из вершины C на сторону AB;

3) расстояние между скрещивающимися ребрами AD и BC;

4) угол между скрещивающимися ребрами AD и BC;

5) угол между ребром AD и гранью ABC.

6.73. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найти:

1) расстояние от вершины A до плоскости B_1CD_1;

2) расстояние между диагональю куба AC_1 и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани CD_1;

3) отношения, в которых точки пересечения общего перпендикуляра к прямым AC_1 и CD_1 с этими прямыми делят отрезки AC_1 и CD_1.

6.74. Три грани $ABCD$, ABB_1A_1 и ADD_1A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат соответственно в плоскостях $2x + 3y + 4z + 8 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, $z + 5 = 0$; вершина C_1 имеет координаты 6, —5, 1. Найти:

1) расстояние от вершины A_1 до плоскости B_1BD;

2) расстояние от вершины D до прямой AB;

3) расстояние между прямыми AC и A_1C_1;

4) расстояние между прямыми AA_1 и BC;

5) угол между прямыми AC и C_1D_1;

6) угол между плоскостями BDD_1 и ACC_1;

7) угол между прямой CA_1 и плоскостью DCC_1.

6.75. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы тот из четырех двугранных углов, образованных двумя пересекающимися не перпендикулярными плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, который содержит точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, был:

1) острым; 2) тупым.

6.76 (р). Даны две плоскости $x + 2y + 2z = 0$ и $7x + 4y + 4z = 0$. Третья плоскость $\mathfrak{m}$ проходит через начало координат O так, что конец ее нормального вектора, отложенного из точки O, лежит в тупом двугранном угле, образованном данными плоскостями. Косинусы острых двугранных углов между m и данными плоскостями равны 2/15 и 4/45 соответственно. Составить уравнение плоскости m.

6.77. Рассматривается тот двугранный угол между плоскостями $x - 2y + z + 3 = 0$ и $x + y + 2z = 1$, внутри которого лежит точка A $(-1, 0, 0)$. Доказать, что множеством точек, лежащих внутри этого угла и удаленных от данных плоскостей соответственно на расстояния $\sqrt{6}$ и $2\sqrt{6}$, является прямая. Составить уравнения этой прямой.

6.78. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между плоскостями $x - z - 5 = 0$ и $3x + 5y + 4z = 0$, внутри которого лежит точка A $(1, 1, 1)$.

6.79. Составить уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла между плоскостями $x - z - 5 = 0$ и $3x + 5y + 4z = 0$.

6.80. Грани тетраэдра заданы уравнениями $x + 2y - 2z + 3 = 0$, $4x - 4y + 7z - 9 = 0$, $8x + 4y + z - 3 = 0$, $y - z = 0$. Составить уравнения:

1) биссекторной плоскости внутреннего двугранного угла между первыми двумя гранями;

2) прямой, лежащей во внутреннем трехгранном угле между первыми тремя гранями, все точки которой равноудалены от этих трех граней.

6.81. Вершинами тетраэдра являются точки A $(1, 2, 3)$, B $(-2, 8, 9)$, C $(5, 0, 7)$, D $(3, 4, 2)$. Найти радиусы и координаты центров вписанной и описанной сфер.

6.82. Найти радиус и координаты центра сферы, проходящей через точку A $(0, 1, 0)$ и касающейся плоскостей $x + y = 0$, $x - y = 0$, $x + y + 4z = 0$.

6.83. Вершинами треугольника являются точки A $(1, 2, 3)$, B $(1, 5, -1)$, C $(5, 3, -5)$. Найти радиусы и координаты центров вписанной и описанной окружностей.

6.84. Доказать, что три плоскости $x - 2y + 2z + 3 = 0$, $2x + 2y + z - 6 = 0$, $5x + 14y - 2z - 21 = 0$ не имеют общих точек, но три прямые, образованные при пересечении каждой пары из этих плоскостей, параллельны, т. е. плоскости образуют призму. Найти радиус и уравнения оси прямой круговой цилиндрической поверхности:

1) вписанной в эту призму; 2) описанной около нее.

6.85. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом $\angle A = 60°$. Длина стороны основания призмы равна a, длина бокового ребра равна $\sqrt{3}a$. Точка E является ортогональной проекцией вершины C_1 на плоскость AB_1D_1, а точка F — ортогональной проекцией точки E на плоскость AA_1D_1D. Найти объем пирамиды $ADEF$.

6.86. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра равна 3. Точка M — середина ребра AC, точка N лежит на ребре B_1C_1, а точка P принадлежит грани AA_1B_1B и удалена от плоскости ABC на расстояние 1. Известно, что угол в 30° образуют каждая из прямых PM и PN с плоскостью AA_1B_1B и прямая PN с плоскостью BB_1C_1C. Найти объем призмы.

6.87. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $2a$, длина бокового ребра равна a. Через вершину A проведена плоскость перпендикулярно прямой AB_1, через вершину B — плоскость перпендикулярно прямой BC_1 и через вершину C — плоскость перпендикулярно прямой CA_1. Найти объем многогранника, ограниченного этими тремя плоскостями и плоскостью $A_1B_1C_1$.

Замена системы координат (6.88—6.92)

6.88. Даны две системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты a_{10}, a_{20}, a_{30}, а базисные векторы второй системы имеют в базисе первой системы координаты (a_{11}, a_{21}, a_{31}), (a_{12}, a_{22}, a_{32}), (a_{13}, a_{23}, a_{33}) соответственно. В первой системе координат плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Составить уравнение этой плоскости во второй системе координат.

6.89. В пространстве даны четыре точки A (1, 2, 1), B (—1, 3, 0), C (2, 5, 3), D (—2, 3, 4) и плоскость $2x + y - 3z + 2 = 0$. Составить уравнение этой плоскости в новой системе координат A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

6.90. Плоскости $x - 2y + 3z - 6 = 0$, $2x + y - z = 0$, $4x + z - 5 = 0$ являются соответственно плоскостями $O'y'z'$, $O'z'x'$, $O'x'y'$ новой системы координат, а точка A (2, 0, 1) имеет в новой системе координаты 1, 1, 1.

1) Найти координаты точки в исходной системе координат, если известны ее координаты x', y', z' в новой системе.

2) Составить в новой системе координат канонические уравнения прямой, которая в исходной системе задается уравнениями $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

6.91. В прямоугольной системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ плоскость задана уравнением $3x+5y+\sqrt{2}z+\sqrt{2}=0$. Начало новой прямоугольной системы координат находится в точке O' (1, 1, —1), базисный вектор $\mathbf{e}_3'$ противоположен вектору $\mathbf{e}_3$, а базисные векторы $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ получаются из векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно поворотом в содержащей $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ плоскости на угол 45° в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

1) Найти координаты точки в исходной системе координат, если известны ее координаты x', y', z' в новой системе.

2) Составить уравнение данной плоскости в новой системе координат.

6.92. Три плоскости, заданные в прямоугольной системе координат уравнениями $x+2y-2z+3=0$, $2x+y+2z=0$, $2x-2y-z+3=0$ (проверить, что они попарно перпендикулярны), являются соответственно плоскостями $O'y'z'$, $O'z'x'$, $O'x'y'$ новой прямоугольной системы координат, а точка A (—1, 0, 0) имеет в новой системе положительные координаты.

1) Найти координаты точки в исходной системе координат, если известны ее координаты x', y', z' в новой системе.

2) Составить в новой системе координат канонические уравнения прямых, заданных в исходной системе уравнениями $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}$ и $x=y=z$. Вычислить в обеих системах координат угол и расстояние между этими прямыми; убедиться в совпадении результатов.

ГЛАВА III
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе используются следующие основные понятия: *алгебраическая кривая, кривая второго порядка, окружность, эллипс, гипербола, парабола, центр, вершина, ось, полуось, фокус, директриса, эксцентриситет, хорда, асимптота, касательная, нормаль, каноническое уравнение кривой второго порядка, центральная кривая второго порядка.*

Система координат, если не оговорено противное, прямоугольная.

Алгебраической кривой на плоскости называется множество всех точек плоскости, координаты (x, y) которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению $\Phi(x, y) = 0$, где $\Phi(x, y)$ — многочлен от переменных x, y. Степень многочлена $\Phi(x, y)$ (максимальная степень $k + l$ одночленов $a_{kl}x^k y^l$, входящих в $\Phi(x, y)$) называется *порядком* кривой. Порядок кривой не изменяется при замене системы координат.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \tag{1}$$

Выражение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ называется квадратичной частью, $2Dx + 2Ey$ — линейной частью, F — свободным членом уравнения (1).

Для всякой кривой второго порядка существует прямоугольная система координат, называемая *канонической*, в которой уравнение кривой имеет канонический вид (см. таблицу 1 на с. 58).

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{2}$$

Эллипс (рис. 1) имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

где $a \geqslant b > 0$; большая полуось эллипса равна a, малая полуось равна b. Вершинами эллипса называются точки $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. Фокусами эллипса называются точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

При $a = b$ эллипс есть окружность. Площадь части плоскости, ограниченной эллипсом, равна πab.

Гипербола (рис. 2) имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$

где $a > 0$, $b > 0$; действительная полуось равна a, мнимая полуось равна b. Вершинами гиперболы называются точки $(\pm a, 0)$. Фокусами

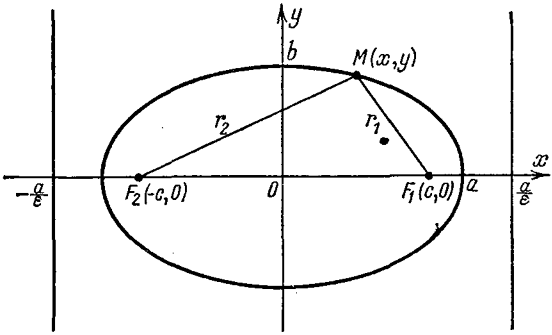

Рис. 1

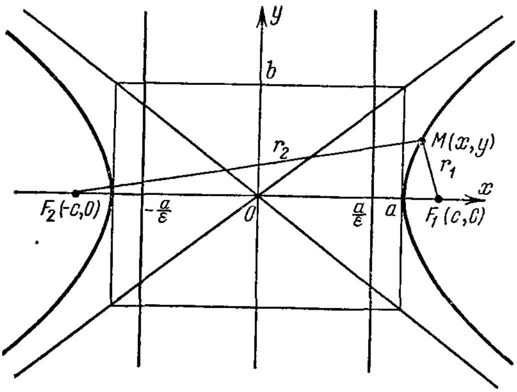

Рис. 2

гиперболы называются точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ называется *сопряженной* к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, она имеет те же асимптоты.

Парабола (рис. 3) имеет каноническое уравнение

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

где $p > 0$. Число p называют *параметром параболы*. Вершиной параболы является начало координат, фокусом — точка $F(p/2,\ 0)$.

Эксцентриситет эллипса или гиперболы равен $\varepsilon = c/a$; для эллипса $0 \leqslant \varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет параболы равен 1.

Расстояние от точки $M(x,\ y)$, принадлежащей кривой второго порядка, до фокуса кривой называется фокальным радиусом точки M. Для эллипса (3) и гиперболы (4)

$$|MF_1| = |a - \varepsilon x|,$$
$$|MF_2| = |a + \varepsilon x|.$$

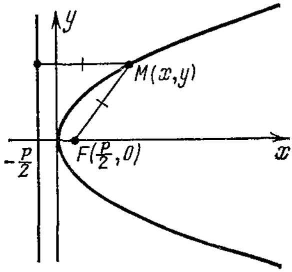

Рис. 3

Фокальный радиус точки $M(x,\ y)$, принадлежащей параболе (5), равен $x + \frac{p}{2}$. Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются директрисами эллипса (3) и гиперболы (4), — см. рис. 1 и 2. Директрисой параболы (5) называется прямая $x = -p/2$, — см. рис. 3. Хорды, проходящие через фокус кривой второго порядка, называются ее фокальными хордами.

Пусть точка $M(x_0,\ y_0)$ лежит на кривой второго порядка. Касательная к кривой в этой точке определяется уравнением

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{для эллипса} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{для гиперболы} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$yy_0 = p(x + x_0) \quad \text{для параболы} \quad y^2 = 2px$$

и уравнением

$$Axx_0 + B(xy_0 + x_0y) + Cyy_0 + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0$$

для кривой, заданной общим уравнением (1).

Центром кривой второго порядка называется ее центр симметрии. Кривая называется центральной, если она имеет единственный центр. Центральными являются кривые первых пяти типов из перечисленных в таблице 1. Для таких кривых центр служит началом канонической системы координат. Координаты (x_0, y_0) центра кривой, заданной в общей декартовой системе координат уравнением (1), находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В случае центральной кривой $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$.

Таблица 1

Название	Каноническое уравнение
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geqslant b>0$
«Мнимый эллипс» (пустое множество)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,\quad a\neq 0,\quad b\neq 0$
«Пара мнимых пересекающихся прямых» (точка)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Пара пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
Парабола	$y^2=2px,\quad p>0$
Пара параллельных прямых	$y^2=a^2,\quad a\neq 0$
«Пара мнимых параллельных прямых» (пустое множество)	$y^2=-a^2,\quad a\neq 0$
Пара совпавших прямых	$y^2=0$

Всего имеется девять типов канонических уравнений кривых второго порядка. В таблице 1 перечислены эти уравнения вместе с названиями соответствующих типов кривых.

Решение задачи приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду включает отыскание канонического уравнения кривой и канонической системы координат. Приведение к каноническому виду позволяет вычислить параметры кривой и определить ее расположение относительно исходной системы координат.

Приведение общего уравнения (1) кривой к каноническому виду осуществляется в несколько шагов. Опишем их.

1. Если исходная система координат не прямоугольная, перейдем к какой-нибудь прямоугольной системе координат. При этом общий вид уравнения (1) не изменится. Далее считаем систему координат прямоугольной.

2. Если в уравнении (1) коэффициент $B\neq 0$, то следует перейти к такой системе координат, чтобы в преобразованном уравнении коэф-

фициент при произведении $x'y'$ был равным нулю. Для этого систему координат надо повернуть вокруг начала координат на угол φ:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

Значение φ находится (при $A \neq C$) из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A-C}, \tag{8}$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{A-C}{B} \operatorname{tg}\varphi - 1 = 0. \tag{9}$$

Из нескольких возможных значений φ можно брать любое. При $A = C$ можно положить $\varphi = \pi/4$. Затем следует вычислить $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, подставить их в формулы (7) и выполнить в уравнении (1) замену координат.

3. Если в уравнении (1) уже нет члена с произведением переменных, следует, если возможно, добиться исчезновения линейных членов. Это достигается переносом начала координат. А именно: если в уравнении имеются квадрат какой-либо переменной и одноименный линейный член, то эта пара дополняется до полного квадрата и начало координат переносится вдоль оси координат так, чтобы в преобразованном уравнении линейного члена уже не было.

Пример:

$$Ax^2 + 2Dx = A\left(x^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{D^2}{A^2}\right) - \frac{D^2}{A} =$$
$$= A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 - \frac{D^2}{A} = Ax'^2 - \frac{D^2}{A}, \text{ где } x' = x + \frac{D}{A}.$$

4. Если уравнение (1) содержит лишь три члена: квадрат одной переменной, первую степень другой и свободный член, то с помощью переноса начала координат вдоль оси, соответствующей линейному члену, можно добиться исчезновения свободного члена.

Пример:

$$Ax^2 + 2Ey + F = Ax^2 + 2E\left(y + \frac{F}{2E}\right) = 0.$$

Замена $y + \frac{F}{2E} = y'$ дает $Ax^2 + 2Ey' = 0$.

После выполнения указанных в пп. 1—4 действий мы придем к уравнению, которое отличается от канонического разве что числовым множителем, порядком координат, переносом членов из одной части уравнения в другую или знаком коэффициента при линейном члене. Такое уравнение удобно называть «почти каноническим». Для приведения уравнения к окончательной канонической форме следует выполнить необходимые преобразования уравнения и замены системы координат.

Изменение порядка координат достигается сменой порядка базисных векторов и записывается в виде

$$x = y', \quad y = x'. \tag{10}$$

Чтобы сменить знак коэффициента при линейном члене уравнения, следует изменить направление соответствующего базисного вектора. Приведем, например, к каноническому виду почти каноническое уравнение $Ax^2 + 2Ey = 0$. Деление на A и перенос линейного члена в правую часть дают

$$x^2 = -\frac{2E}{A} y.$$

Замена координат (10) приводит к

$$y'^2 = -\frac{2E}{A} x'.$$

Если $\frac{2E}{A} > 0$, то необходима еще замена $x' = -x''$. После этого мы получим каноническое уравнение параболы

$$y'^2 = \frac{2E}{A} x'' \qquad \left(\frac{E}{A} = p > 0\right).$$

Для отыскания канонической системы координат выписываем каждую из формул перехода, подставляем их одна в другую и получаем окончательное выражение исходных координат через канонические

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_0, \qquad y = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_0.$$

Коэффициенты этих формул дают координаты начала канонической системы координат O^* (α_0, β_0) и ее базисных векторов $\mathbf{E}_1$ (α_1, β_1), $\mathbf{E}_2$ (α_2, β_2) относительно исходной системы координат.

Если система уравнений (6) совместна (в частности, если $\delta = AC - B^2 \neq 0$ — случай центральной кривой), то упрощение уравнения кривой удобно начинать с переноса начала координат в центр кривой: $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$. Тогда в преобразованном уравнении коэффициенты при x' и y' обращаются в нуль (см. задачи 9.18, 9.20). Затем следует выполнить шаг 2.

В первом приближении тип кривой второго порядка можно определить до упрощения ее уравнения по знаку δ.

Кривая относится к эллиптическому типу (эллипс, мнимый эллипс, пара мнимых пересекающихся прямых) при $\delta > 0$; к гиперболическому типу (гипербола, пара пересекающихся прямых) при $\delta < 0$; к параболическому типу (остальные типы в таблице) при $\delta = 0$.

§ 7. Геометрические свойства кривых второго порядка и их канонические уравнения

Окружность (7.1—7.10)

7.1. Найти радиус и координаты центра окружности:
1) $x^2+y^2+4y=0$; 2) $x^2+y^2+5x-5y+12=0$;
3) $2x^2+2y^2-12x+y+3=0$;
4) $7x^2+7y^2-2x-7y-1=0$.

7.2. При каком необходимом и достаточном условии уравнение $Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0$ задает окружность? Выразить радиус и координаты центра окружности через коэффициенты уравнения.

7.3. Составить уравнение окружности с центром в точке $M(2, 2)$, касающейся прямой $3x+y-18=0$.

7.4. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы прямая $Ax+By+C=0$:

1) не имела общих точек с окружностью $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;

2) имела с этой окружностью две общие точки;

3) касалась этой окружности.

7.5. 1) Составить уравнение касательной, проведенной к окружности $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ в точке $M(-3, 1)$.

2) Составить уравнения касательных к окружности $(x-1)^2+(y+1)^2=9$, проходящих через точку $M(1, 4)$.

7.6. Составить уравнения касательных к окружности $(x+3)^2+(y+1)^2=4$, параллельных прямой $5x-12y+1=0$.

7.7. Проверить, что две данные окружности касаются, и составить уравнение их общей касательной, проходящей через точку касания:

1) $(x-1)^2+(y-2)^2=18$, $(x-5)^2+(y-6)^2=2$;

2) $(x+1)^2+(y-1)^2=45$, $(x-1)^2+(y-5)^2=5$.

7.8. Составить уравнения общих касательных к окружностям $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ и $(x-4)^2+(y-3)^2=1$.

7.9. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены прямая, касающаяся окружности в точке B, и еще одна прямая, пересекающая окружность в точках C и D. Доказать, что $|AB|^2=|AD|\cdot|AC|$.

7.10. Две окружности касаются внешним образом. Через точку их касания проведена прямая, пересекающая первую окружность еще в одной точке A, а вторую окружность еще в одной точке B. Доказать, что касательные к окружностям в точках A и B параллельны.

Множества точек на плоскости, при изучении которых используются уравнения кривых второго порядка (7.11—7.20)

7.11. Доказать, что множеством точек M таких, что для двух фиксированных точек A и B отношение $|MA|/|MB|$ постоянно и равно $k>0$, является прямая линия при $k=1$ и окружность при $k \neq 1$. Выразить радиус этой окружности через k и длину отрезка AB.

7.12. Доказать, что множеством точек M таких, что для двух фиксированных точек A и B сумма $|MA|+|MB|$ постоянна и равна $2a$, является эллипс с фокусами A и B. Выразить длины полуосей этого эллипса через a и длину отрезка AB.

7.13. Доказать, что множеством точек M таких, что для двух фиксированных точек A и B модуль разности $|MA|-|MB|$ постоянен и равен $2a$, является гипербола с фокусами A и B. Выразить полуоси этой гиперболы через a и длину отрезка AB.

7.14. Доказать, что множеством точек, равноудаленных от фиксированной точки A и фиксированной прямой l, является парабола с фокусом A и директрисой l.

7.15. Изобразить множества точек, которые в прямоугольной системе координат задаются неравенствами:

1) $x^2+(y+2)^2 \leqslant 4$; 2) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2>25$;

3) $x^2+y^2+3x<0,\ y<0$;

4) $-1 \leqslant x^2+y^2-2x+2y \leqslant 7$;

5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1$; 6) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1$;

7) $1 \leqslant \frac{x^2}{9}+y^2 \leqslant 9$; 8) $4x^2-4x+9y^2+6y+1<0$;

9) $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}<6$;

10) $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}>4$;

11) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9} \leqslant 1$; 12) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9} \geqslant 1$;

13) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4} \geqslant 1$; 14) $\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}\right|<1$;

15) $|3x^2-9y^2|>1$;

16) $\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2$;

17) $y^2 \leqslant 4x$; 18) $y^2>6x$;

19) $x \leqslant y^2 \leqslant 3x$; 20) $-2x-x^2<y^2<-2x$.

7.16. Какие кривые на плоскости задаются следующими параметрическими уравнениями:

1) $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ 0 \leqslant t<2\pi$;

2) $x=1+2\cos t,\ y=2+2\sin t,\ 0 \leqslant t<2\pi$;

3) $x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$?

7.17. Доказать, что параметрические уравнения $x=x_0+a\cos t,\ y=y_0+b\sin t\ (a>0,\ b>0)$ задают эллипс с центром в точке $(x_0,\ y_0)$ и с полуосями a и b.

7.18. Доказать, что параметрические уравнения $x=x_0+a\operatorname{ch} t,\ y=y_0+b\operatorname{sh} t$, где $a>0,\ b>0$, задают одну ветвь гиперболы с центром в точке $(x_0,\ y_0)$ и с полуосями a и b. Как нужно изменить эти уравнения, чтобы задать обе ветви гиперболы?

7.19. Изобразить множество точек, которое в полярных координатах задается уравнением:

1) $r=1$; 2) $r=\dfrac{1}{1-2\cos\varphi}$;

3) $r=\dfrac{3}{2-\cos\varphi}$; 4) $r=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

7.20. На плоскости фиксированы точки A и B. Найти множество точек M таких, что угол при вершине A в треугольнике ABM вдвое больше угла при вершине M.

Эллипс (2.21—2.34)

7.21. Окружность можно рассматривать как эллипс с полуосями равной длины. Чему равен эксцентриситет этого эллипса? Имеются ли у него фокусы и директрисы?

7.22. Найти длины полуосей, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис эллипса:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad b>a>0$;

3) $9x^2+25y^2=225$; 4) $4x^2+y^2=1$.

7.23. Дан эллипс $25x^2+144y^2=1$. Определить, лежит ли точка A на эллипсе, внутри или вне его:

1) $A\ (1,\ 1/6)$; 2) $A\ (1/13,\ 1/13)$; 3) $A\ (1/6,\ -1/24)$.

7.24. Вычислить длину фокальной хорды эллипса $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, перпендикулярной большой оси.

7.25. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами, лежащими на большой оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10;

2) хорда, соединяющая две вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом $\arcsin\frac{3}{5}$;

3) фокусами эллипса являются точки $(\pm 1, 0)$, а точка $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$ принадлежит эллипсу;

4) фокусами эллипса являются точки $(\pm 2, 0)$, а директрисами являются прямые $x = \pm 18$;

5) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси Oy, равно 8;

6) треугольник с вершинами в фокусах и в конце малой оси правильный, а диаметр окружности, проходящей через центр и две вершины эллипса, равен 7;

7) отрезок оси Ox между фокусом F_1 и дальней вершиной A большой оси делится вторым фокусом F_2 пополам, а расстояние от F_2 до прямой, проходящей через A и вершину малой оси, равно $1/\sqrt{17}$;

8) директрисами эллипса являются прямые $x = \pm 4$, а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси — квадрат;

9) эксцентриситет эллипса равен $\sqrt{7}/4$, а четырехугольник, вершинами которого являются вершины эллипса, описан около окружности радиуса 4,8.

7.26. Вычислить эксцентриситет эллипса, если:

1) расстояние между фокусами равно среднему арифметическому длин осей;

2) отрезок между фокусом и дальней вершиной большой оси делится вторым фокусом в отношении 2 : 1;

3) расстояние от фокуса до дальней вершины большой оси в 1,5 раза больше расстояния до вершины малой оси;

4) отрезок между фокусами виден из конца малой оси под прямым углом;

5) большая ось видна из конца малой оси под углом 120°;

6) отрезок между фокусом и дальней вершиной большой оси виден из конца малой оси под прямым углом;

7) стороны квадрата, вписанного в эллипс, проходят через фокусы эллипса.

7.27. Составить уравнения сторон квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Какую часть площади, ограниченной эллипсом, составляет площадь этого квадрата?

7.28. Найти множество точек, являющихся серединами хорд эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, параллельных прямой $x+2y=1$.

7.29. Через точку A (7/2, 7/4) провести хорду эллипса $x^2+4y^2=25$, делящуюся в этой точке пополам.

7.30. Через точку M (0, 3) провести прямую, пересекающую эллипс $x^2+4y^2=20$ в двух точках A и B так, что $|MA|=2|MB|$.

7.31. На эллипсе $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ найти точки, из которых отрезок, соединяющий фокусы, виден:

1) под прямым углом;

2) под углом 120°; 3) под углом 150°.

7.32. Составить уравнения семейств эллипсов:

1) с общими фокусами $(\pm c, 0)$;

2) с общими директрисами $x=\pm d$ и общим центром в начале координат.

7.33. Составить уравнение эллипса, если:

1) точки F_1 (5, 1) и F_2 (—1, 1) являются фокусами, а прямая $x=31/3$ — одной из директрис;

2) точка F (—6, 2) является одним из фокусов, точка A (2, 2) — концом большой оси, эксцентриситет равен 2/3;

3) оси эллипса параллельны осям координат, точки A (4, 0) и B (0, 4) принадлежат эллипсу, а точка B находится на расстоянии $3\sqrt{2}$ от одного из фокусов и на расстоянии 6 от соответствующей директрисы.

7.34. Пусть O — центр эллипса, a, b — его полуоси, а A и B — такие точки эллипса, что прямые OA и OB взаимно перпендикулярны.

1) Доказать, что величина $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$ постоянна для всех возможных пар точек A и B.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения длины отрезка AB.

Гипербола (7.35—7.50)

7.35. Найти полуоси, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис и асимптот гиперболы:

1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$;

3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 4) $y^2-x^2=1$;

5) $xy=1$; 6) $xy=-2$.

7.36. Дана гипербола $100x^2-36y^2=1$. Определить, лежит ли точка A на гиперболе, внутри одной из ее ветвей или между ветвями:

1) $A\ (1/8,\ -1/8)$; 2) $A\ (1,\ 1)$;

3) $A\ (1,\ 7)$; 4) $A\ (-1/2, 0)$.

7.37. Вычислить длину фокальной хорды гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{49}=1$, перпендикулярной действительной оси.

7.38. В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12;

2) длина вещественной оси равна 1, а точка $(1,3)$ принадлежит гиперболе;

3) директрисами гиперболы являются прямые $x=\pm\sqrt{5/6}$, а точка $(-9,\ 4)$ принадлежит гиперболе;

4) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении $4:1$;

5) эксцентриситет гиперболы равен $7/5$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2;

6) точка $(7,\ -2\sqrt{3})$, принадлежащая гиперболе, удалена от левого фокуса на расстояние $4\sqrt{7}$;

7) угол между асимптотами, содержащий фокус, равен 60°, а расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно $\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})$;

8) точка $(-5/4, 3/2)$ принадлежит гиперболе, а асимптотами являются прямые $y=\pm 2x$;

9) точка $(-1,\ 3)$ принадлежит гиперболе, а асимптотами являются прямые $y=\pm 2x$.

7.39. Составить каноническое уравнение гиперболы, содержащей точку $(-1,\ 3)$ и имеющей асимптоты $y=\pm 2x$ (сравнить с задачей 7.38, 9)).

7.40. Вычислить эксцентриситет гиперболы, если:

1) ее полуоси равны (равносторонняя гипербола);

2) угол между асимптотами, содержащий фокус, равен 120°;

3) асимптотами гиперболы являются прямые $y=\pm 3x$.

7.41. Вычислить эксцентриситет гиперболы, имеющей в данной системе координат каноническое уравнение, если:

1) расстояния от точки $M(5, -4)$, принадлежащей гиперболе, до директрис относятся как $2:1$;

2) сумма расстояний от точки $N(-5, -4)$ до асимптот гиперболы равна $20/3$.

7.42. Выразить эксцентриситет гиперболы через эксцентриситет ε эллипса, имеющего с этой гиперболой общие фокальные хорды.

7.43. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокальные хорды с эллипсом $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$.

7.44. Найти множество точек, являющихся серединами хорд гиперболы $x^2-2y^2=1$, параллельных прямой $2x-y=0$.

7.45. Через точку $A(4, 4)$ провести хорду гиперболы $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$, делящуюся в этой точке пополам.

7.46. На гиперболе $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ найти точки, из которых отрезок, соединяющий фокусы, виден:

1) под прямым углом; 2) под углом $60°$.

7.47. Составить уравнения семейств гипербол:

1) с общими фокусами $(\pm c, 0)$;

2) с общими директрисами $x=\pm d$ и общим центром в начале координат;

3) с общими асимптотами $y=\pm kx$.

7.48. Составить уравнение гиперболы, если:

1) точки $F_1(3, -2)$ и $F_2(5, -2)$ являются фокусами, а прямая $x=7/2$ — одной из директрис;

2) точка $F(1, 3)$ является одним из фокусов, точка $A(-4, 3)$ — вершиной, а эксцентриситет равен $3/2$;

3) точка $F(0, 0)$ является одним из фокусов, а прямые $x\pm y+2=0$ — асимптотами.

7.49. Доказать, что для данной гиперболы следующие величины постоянны:

1) произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот;

2) площадь параллелограмма, одна из вершин которого лежит на гиперболе, а две стороны лежат на асимптотах. Выразить эти величины через длины полуосей a и b гиперболы.

7.50. Доказать, что вершины гиперболы и четыре точки пересечения ее директрис с асимптотами лежат на одной окружности. Выразить радиус этой окружности через длину действительной полуоси.

Парабола (7.51—7.64)

7.51. Найти координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы:

1) $y^2 = 2px$, $p > 0$; 2) $y^2 = -px$, $p > 0$;

3) $y^2 = 6x$; 4) $y^2 = -3x$; 5) $y = x^2$; 6) $y = -\sqrt{3}x^2$.

7.52. Как расположены по отношению к параболе $y^2 = 10x$ следующие точки: 1) $(5, -7)$; 2) $(8, 9)$; 3) $(5/2, -5)$?

7.53. Вычислить длину фокальной хорды параболы $y^2 = x/5$, перпендикулярной оси параболы.

7.54. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) точка $(5, -5)$ принадлежит параболе;

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

3) длина хорды, проходящей через фокус под углом 45° к оси параболы, равна 18.

7.55. Найти множество точек, являющихся серединами хорд параболы $y^2 = 3x$, параллельных прямой $2x + 3y - 5 = 0$.

7.56. Доказать, что середины хорд параболы, параллельных некоторой прямой, лежат на прямой, параллельной оси параболы.

7.57. Через точку $A(5, 3)$ провести хорду параболы $y^2 = 6x$, делящуюся в этой точке пополам.

7.58. На параболе $y^2 = 10x$ найти точку M такую, что:

1) прямая, проходящая через точку M и фокус параболы, образует с осью Ox угол 60°;

2) площадь треугольника с вершинами в искомой точке M, фокусе параболы и точке пересечения оси параболы с директрисой равна 5;

3) расстояние от точки M до вершины параболы равно расстоянию от M до фокуса;

4) расстояния от точки M до вершины параболы и до фокуса параболы относятся как 8 : 7.

7.59. Найти множество значений, которые может принимать отношение расстояния от точки параболы до ее вершины к расстоянию от той же точки до фокуса.

7.60. Составить уравнение параболы с параметром p, вершина которой имеет координаты (a, b), а направление оси совпадает:

1) с положительным направлением оси Ox;

2) с отрицательным направлением оси Ox;

3) с положительным направлением оси Oy;

4) с отрицательным направлением оси Oy.

7.61. Составить уравнения семейства парабол:

1) имеющих общий фокус $(0, 0)$ и симметричных относительно оси Ox;

2) имеющих общую директрису $x = 0$ и симметричных относительно оси Ox.

7.62. Составить уравнение параболы, если:

1) точка $F(7, 0)$ является фокусом, а прямая $x = 1$ — директрисой;

2) точка $F(7, 0)$ является фокусом, а прямая $x = 8$ — директрисой;

3) точка $F(0, 1)$ является фокусом, парабола симметрична относительно оси Oy и касается оси Ox;

4) ось параболы параллельна оси Oy, фокус лежит на оси Ox, парабола проходит через начало координат и высекает на оси Ox отрезок длины 6.

7.63. Найти радиус наибольшей окружности, лежащей внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающейся этой параболы в ее вершине.

7.64. Две параболы, оси которых взаимно перпендикулярны, имеют четыре точки пересечения. Доказать, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

§ 8. Касательные к кривым второго порядка

8.1. Составить уравнение касательной к кривой:

1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $(3, 1)$;

2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ в точке $(3, -3)$;

3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$ в точке $(-3, 0)$;

4) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$ в точке $(6, 1)$;

5) $xy = 8$ в точке $(4, 2)$;

6) $y^2 = 6x$ в точке $(3/2, 3)$.

8.2. Составить уравнение касательной к кривой:

1) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$;

2) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$;

3) $xy = k$; 4) $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$

в точке (x_0, y_0), принадлежащей данной кривой.

8.3. При каком необходимом и достаточном условии прямая $Ax + By + C = 0$ касается:

1) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

3) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$; 4) гиперболы $xy=k$;

5) параболы $y^2=2px$?

8.4. При каком необходимом и достаточном условии вектор $\mathbf{l}(\alpha, \beta)$ является направляющим вектором некоторой касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?

8.5. Проверить, что данная прямая касается данной кривой, и найти координаты точки касания:

1) $3x-2y-24=0$, $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$;

2) $3x-y-12=0$, $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{36}=1$;

3) $3x-16y+24=0$, $xy=-3$;

4) $x+y+1=0$, $y^2=4x$.

8.6. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$:

1) параллельных прямой $2x-y-1=0$;

2) перпендикулярных этой же прямой;

3) образующих угол $45°$ с прямой $x+3y+3=0$.

8.7. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$, параллельных прямой:

1) $4x=3y$; 2) $x=1$; 3) $x-2y+1=0$.

8.8. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=10x$, перпендикулярной прямой:

1) $2x+y-4=0$; 2) $y=3$; 3) $x=0$.

8.9. Какие точки на данной кривой второго порядка удалены на наименьшее расстояние от данной прямой? Найти это расстояние.

1) $\frac{27}{28}x^2+\frac{9}{7}y^2=1$, $3x+4y+5=0$;

2) $\frac{27}{28}x^2+\frac{9}{7}y^2=1$, $3x+4y=0$;

3) $6x^2-5y^2=19$, $12x+5y-6=0$;

4) $6x^2-5y^2=19$, $12x+5y=0$;

5) $y^2=64x$, $4x-3y-76=0$.

8.10. Дан эллипс $x^2+2y^2=1$. Найти расстояния:

1) от фокусов эллипса до касательной к нему в точке $A(1/3,\ 2/3)$;

2) между касательными к эллипсу, параллельными прямой $x+y=1$.

8.11. Составить уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, если он:

1) содержит точку $A(-3, 2)$ и касается прямой $4x - 6y - 25 = 0$;

2) касается прямых $x + y - 5 = 0$ и $x + 4y - 10 = 0$.

8.12. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, если она:

1) содержит точку $A(4, -2\sqrt{2})$ и касается прямой $3x + y + 8 = 0$;

2) касается прямых $x = 1$ и $5x - 2y + 3 = 0$.

8.13. Составить уравнение гиперболы с асимптотами $\sqrt{3}x \pm y = 0$, касающейся прямой $2x - y - 3 = 0$.

8.14. Составить уравнение параболы:

1) симметричной относительно оси Oy и касающейся прямых $y + 2x = 0$, $8x - 2y - 3 = 0$;

2) заданной каноническим уравнением и касающейся прямой $x + y + 1 = 0$.

8.15. Составить уравнения нормалей к эллипсу $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, образующих угол $45°$ с его большой осью.

8.16. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = -8x$, отрезок которой между точкой касания и директрисой делится осью Oy пополам.

8.17. Пусть O — вершина параболы, M — произвольная ее точка, l_1 и l_2 — касательные к параболе в точках O и M, N — точка пересечения прямых l_1 и l_2, P — проекция отрезка OM на l_1. Доказать, что точка N делит отрезок OP пополам. Указать вытекающий отсюда способ построения касательной к параболе.

8.18. Доказать, что:

1) отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам;

2) все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь; выразить эту площадь через полуоси гиперболы.

8.19. Доказать, что хорда, соединяющая точки касания эллипса (гиперболы) двумя параллельными прямыми, проходит через центр кривой.

8.20. Доказать, что середины хорд эллипса (гиперболы), параллельных некоторой прямой l_1, лежат на одной прямой l_2. При этом касательные к кривой в точках ее пересечения с прямой l_2 параллельны прямой l_1.

8.21. Составить уравнения сторон квадрата, описанного около эллипса $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

8.22. Составить уравнения сторон правильного треугольника, описанного около эллипса $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, если:

1) одна из вершин треугольника лежит на оси Ox;
2) одна из вершин треугольника лежит на оси Oy.

8.23. При каком необходимом и достаточном условии через точку $M_0(x_0, y_0)$ можно провести две касательные:

1) к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
2) к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
3) к параболе $y^2=2px$?

8.24. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$, проходящих через точку:

1) $(-6, 0)$; 2) $(2{,}7, \sqrt{7})$; 3) $\left(-4, -\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$;
4) $(1, 2)$.

8.25. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{4}-y^2=1$, проходящих через точку:

1) $(-2, 2)$; 2) $(1{,}6, 0)$; 3) $(4, \sqrt{3})$;
4) $(4, 1)$; 5) $(8, 4)$; 6) $(0, 0)$.

8.26. Составить уравнения касательных к параболе $y^2=16x$, проходящих через точку:

1) $(1, -2)$; 2) $(1, 4)$; 3) $(1, 5)$.

Если этих касательных две, то вычислить площадь треугольника, образованного касательными и директрисой.

8.27. Через точку $M_0(x_0, y_0)$ проведены две касательные к кривой второго порядка. Доказать, что прямая, проходящая через точки касания, задается уравнением:

1) $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;
2) $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ для гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;
3) $yy_0=p(x+x_0)$ для параболы $y^2=2px$.

8.28. Составить уравнения общих касательных к двум кривым второго порядка:

1) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ и $\frac{x^2}{80}+\frac{4y^2}{5}=1$;

2) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ и $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$;

3) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ и $y^2 = 2x$;

4) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ и $y^2 = 2x$;

5) $y^2 = 2x$ и $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = -1$;

6) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ и $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$;

7) $y^2 = \frac{8}{9} x$ и $y^2 = x - 1$.

8.29. Доказать, что:

1) нормаль к эллипсу в произвольной его точке делит пополам угол, образованный лучами, выходящими из этой точки и проходящими через фокусы эллипса;

2) касательная к гиперболе в произвольной ее точке делит пополам угол, образованный лучами, выходящими из этой точки и проходящими через фокусы гиперболы;

3) нормаль к параболе в произвольной ее точке делит пополам угол, образованный лучом, выходящим из этой точки и проходящим через фокус параболы, и лучом, выходящим из этой точки, лежащим внутри параболы и параллельным ее оси.

8.30. Доказать, что:

1) касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы, имеющих общие фокусы, взаимно перпендикулярны;

2) касательные в точках пересечения двух парабол с общим фокусом и противоположно направленными осями взаимно перпендикулярны.

8.31. Из произвольной точки директрисы кривой второго порядка проведены две касательные к этой кривой. Доказать, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через фокус, соответствующий этой директрисе.

8.32. Составить уравнения касательных к кривой $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$:

1) параллельных прямой $6x + 17y - 4 = 0$;

2) перпендикулярных прямой $41x - 24y + 3 = 0$;

3) параллельных прямой $y = 2$.

8.33. Составить уравнения касательных к кривой $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$, проходящих через точку:

1) $(3, 3)$; 2) $(0, -0{,}8)$; 3) $(0, 1)$.

§ 9. Общая теория кривых второго порядка

Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду (9.1—9.10)

9.1. Определить тип кривой второго порядка, составить ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $7x^2 + 7y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$;
2) $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$;
3) $9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$;
4) $12x^2 - 12x - 32y - 29 = 0$;
5) $9y^2 - 7y - 16 = 0$;
6) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$;
7) $2x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$;
8) $x^2 - 5x + 11 = 0$;
9) $25x^2 - 30x + 9 = 0$;
10) $45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0$.

9.2. При каком необходимом и достаточном условии уравнение $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ задает:

1) эллипс; 2) гиперболу?

9.3. Определить тип кривой второго порядка, составить ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $2x^2 + 6xy + 10y^2 - 121 = 0$;
2) $9xy + 4 = 0$;
3) $2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9 = 0$;
4) $18x^2 + 24xy + 11y^2 - 3 = 0$;
5) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0$;
6) $9x^2 - 6xy + y^2 - 10 = 0$;
7) $81x^2 - 36xy + 4y^2 = 0$;
8) $3x^2 - 4\sqrt{5}xy + 4y^2 = 0$.

9.4. Определить тип кривой второго порядка, составить ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат:

1) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;
2) (р) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$;
3) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;
4) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;
5) $xy + 2x + y = 0$;
6) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
7) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

8) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;
9) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$;
10) $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$;
11) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;
12) $225x^2 - 240xy + 64y^2 + 30x - 16y + 1 = 0$;
13) $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$;
14) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$;
15) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$;
16) $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0$;
17) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$.

9.5. Доказать, что кривая второго порядка, заданная уравнением $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 44x + 58y + 1 = 0$, является эллипсом. Найти длины полуосей и эксцентриситет этого эллипса, координаты центра и фокусов, составить уравнения осей и директрис.

9.6. Доказать, что кривая второго порядка, заданная уравнением $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 62x - 34y + 98 = 0$, является гиперболой. Найти длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты центра и фокусов, составить уравнения осей, директрис и асимптот.

9.7. Доказать, что кривая второго порядка, заданная уравнением $x^2 + 2xy + y^2 + x = 0$, является параболой. Найти параметр этой параболы, координаты вершины и фокуса, составить уравнения оси и директрисы.

9.8. Выражение

$$M(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

(многочлен второй степени) зависит от координат x, y точки в прямоугольной системе координат на плоскости. Если перейти к другой прямоугольной системе координат, то

$$M(x, y) = M'(x', y') = \\ = A'x'^2 + 2B'x'y' + C\,y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F'.$$

Доказать, что имеют место равенства:

1) $A' + C' = A + C$; 2) $\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$

(т. е. величины $S = A + C$, $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ являются ортогональными инвариантами многочлена

$M(x, y)$ — они не меняются при переходе к другой прямоугольной системе координат).

9.9. Кривая второго порядка задается уравнением $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Доказать, что:

1) корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ действительны и одновременно не обращаются в нуль (см. обозначения в задаче 9.8);

2) кривая является гиперболой тогда и только тогда, когда $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$; при этом характеристическое уравнение имеет корни разных знаков (через λ_1 обозначается тот из них, знак которого совпадает со знаком Δ), действительная полуось гиперболы равна $\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$, мнимая полуось равна $\sqrt{\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$;

3) кривая является эллипсом тогда и только тогда, когда $\delta > 0$, а числа S и Δ имеют разные знаки; при этом оба корня характеристического уравнения имеют тот же знак, что и число S, а полуоси эллипса равны $\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}$ и $\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$;

4) кривая является параболой тогда и только тогда, когда $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$; при этом параметр параболы равен $\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}$.

9.10. Применяя теорию ортогональных инвариантов, определить тип и составить каноническое уравнение кривой:

1) $x^2 + 3xy - 3y^2 + 5x - 7y + 1 = 0$;

2) $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x + 20y + 32 = 0$;

3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 13 = 0$.

Кривые второго порядка в общей декартовой системе координат (9.11—9.22)

9.11. Доказать, что:

1) кривая, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$, является эллипсом;

2) кривая, заданная уравнением $x^2 - y^2 = 1$, является гиперболой;

3) кривая, заданная уравнением $y^2 = x$, является параболой;

4) уравнение $x^2 - y^2 = 0$ задает пару пересекающихся прямых;

5) уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает одну точку;

6) уравнение $y^2 - 1 = 0$ задает пару параллельных прямых;

7) уравнение $y^2 = 0$ задает одну прямую (пару совпавших прямых);

8) кривая, заданная уравнением $xy = 1$, является гиперболой;

9) кривая, заданная уравнением $y = x + \frac{1}{x}$, является гиперболой.

9.12. Доказать, что кривая, заданная уравнением $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, является гиперболой тогда и только тогда, когда $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$, эллипсом тогда и только тогда, когда $\delta > 0$ и $S \cdot \Delta < 0$, параболой тогда и только тогда, когда $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$, где обозначения S, δ и Δ те же, что в задаче 9.8. (Заметим, что в задаче 9.9 эти утверждения сформулированы для прямоугольной системы координат.)

9.13. Определить тип кривой второго порядка, заданной уравнением:

1) $(3x - 4y)^2 - 5(x + 2y - 1)^2 = 1$;
2) $(12x - 17y - 6)^2 + (17y + 5x + 1)^2 = 1$;
3) $(x - y - 3)(x + y + 3) = 4$;
4) $(4x + 3y - 1)^2 + (4x + 3y + 2)^2 = 5$;
5) $17x^2 - 2xy + y^2 - 3x - y - 3 = 0$;
6) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - 3x - 15y + 2 = 0$;
7) $4x^2 - 12xy + 8y^2 - 15x + 25y + 14 = 0$;
8) $2x^2 + 2xy + 5y^2 - 2y + 4 = 0$;
9) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x + y + 4 = 0$;
10) $x^2 + 10xy + 25y^2 + 2x + 10y - 3 = 0$;
11) $5x^2 - 16xy + 13y^2 + 6x - 10y + 2 = 0$;
12 $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$;
13) $x^2 - 8xy + 16y^2 + 6x - 24y + 9 = 0$.

9.14. Составить уравнение и определить тип кривой второго порядка, проходящей через 5 точек, заданных своими координатами:

1) $(-1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$;
2) $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$;
3) $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$;

4) $(-3,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(2,\ 3)$;
5) $(-1,\ 1)$, $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(-2,\ -1)$, $(3,\ 4)$;
6) $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{9},\ \frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{9},\ \frac{4}{9}\right)$.

9.15. Исследовать зависимость типа кривой второго порядка от параметра:

1) $4x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 1$;
2) $\lambda(x^2 + y^2) - 10xy + x + y + 4 = 0$;
3) $x^2 - 2xy + y^2(\lambda - 1) + 2\lambda(x - y + 1) = 0$;
4) $\lambda x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$.

9.16. Какие типы кривых второго порядка могут быть заданы уравнением:

1) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 = A_2x + B_2y + C_2$;
2) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 + (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1$;
3) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 - (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1$;
4) $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 1$;
5) $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$?

9.17. Составить уравнения асимптот гиперболы $\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$:

1) $(A_1x + B_1y + C_1)^2 - (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1$;
2) $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 1$.

9.18. Не используя уравнений (6) из введения к настоящей главе, доказать, что начало координат является центром симметрии кривой второго порядка тогда и только тогда, когда уравнение кривой не содержит членов с первыми степенями переменных x и y. Опираясь на это утверждение, вывести уравнения (6) для координат центра кривой второго порядка.

9.19. Проверить, что данная кривая второго порядка является центральной. Найти координаты центра и избавиться в уравнении от членов первой степени при помощи переноса начала координат в центр:

1) $x^2 - 8xy + 17y^2 + 8x - 38y + 24 = 0$;
2) $5x^2 + xy - 4x - y - 1 = 0$;
3) $8x^2 - 24xy + 16y^2 + 3x - 7y - 2 = 0$.

9.20. Доказать, что кривая $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ имеет единственный центр симметрии тогда и только тогда, когда $\delta \neq 0$.

9.21. Доказать, что множество центров симметрии кривой второго порядка либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является прямой линией.

9.22. 1) Доказать, что множество центров симметрии алгебраической кривой либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является прямой линией.

2) Доказать, что множество центров симметрии произвольного множества точек на плоскости либо пусто, либо состоит из одной точки, либо бесконечно.

3) Привести пример непрерывной кривой, множество центров симметрии которой бесконечно, но не является прямой линией.

ГЛАВА IV
ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 10. Уравнения множеств в пространстве и элементарная теория поверхностей второго порядка

В этом параграфе использованы следующие основные понятия: *уравнение множества, однородный многочлен, алгебраическая поверхность, порядок алгебраической поверхности, параметрические уравнения поверхности, поверхность вращения, конус, круглый конус, цилиндр, прямой круговой цилиндр, однополостный* и *двуполостный гиперболоиды, эллиптический* и *гиперболический параболоиды, пересечение поверхностей, сечение поверхности плоскостью, прямолинейная образующая поверхности, проекция некоторого множества на плоскость, образующие* и *направляющие цилиндра* и *конуса, вершины эллипсоида, гиперболоида, параболоида* и *конуса, ось* и *полуось эллипсоида* и *гиперболоида, каноническое уравнение* и *тип поверхности второго порядка.*

Всюду предполагается, что система координат декартова прямоугольная, а проекции, если не оговорено противное, ортогональные.

Для каждой поверхности второго порядка существует декартова прямоугольная система координат, в которой эта поверхность имеет каноническое уравнение. Всего имеется 17 типов поверхностей второго порядка. Каждый тип поверхностей характеризуется своей формой канонического уравнения. Все типы поверхностей второго порядка и соответствующие канонические уравнения перечислены во введении к § 11. Здесь приведем канонические уравнения и изображения девяти основных типов:

эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(рис. 4);}$$

однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(рис. 5);} \qquad (1)$$

двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad \text{(рис. 6);}$$

конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad \text{(рис. 7);}$$

эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad \text{(рис. 8);}$$

гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad \text{(рис. 9);} \tag{2}$$

эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(рис. 10);}$$

гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{(рис. 11);}$$

параболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}=2z \qquad \text{(рис. 12).}$$

Приведем уравнения семейств прямолинейных образующих двух важных типов поверхностей второго порядка.

Два семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (1) могут быть описаны при помощи следующих систем уравнений:

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right),\end{cases}$$

где α, β — произвольные числа, такие, что $\alpha^2+\beta^2\neq 0$. Два семейства прямолинейных образующих гиперболического параболоида (2) описываются системами уравнений

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\beta z,\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\alpha\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\beta,\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\alpha z,\end{cases}$$

где α, β — произвольные параметры, такие, что $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Алгебраическое уравнение вида $\Phi(x, y)=0$ (не содержащее переменной z) определяет цилиндрическую поверхность. Прямолинейные образующие этого цилиндра параллельны оси Oz: они имеют уравнения $x=x_0$, $y=y_0$, где $\Phi(x_0, y_0)=0$.

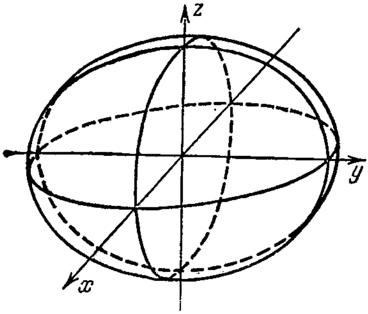

Рис. 4

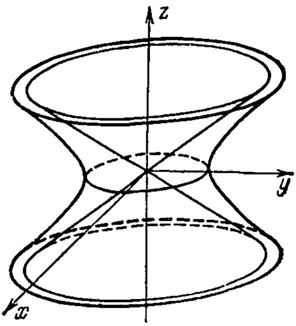

Рис. 5

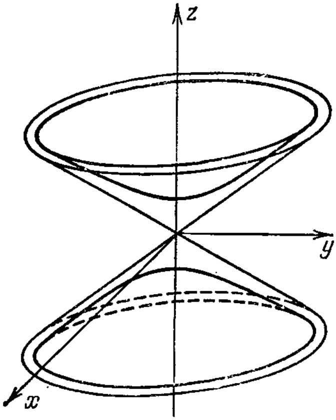

Рис 6.

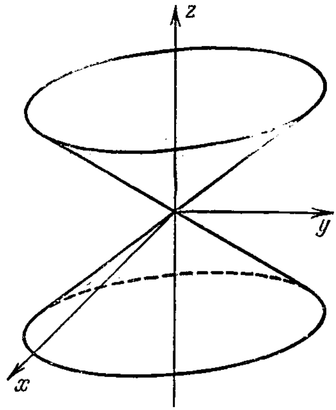

Рис. 7

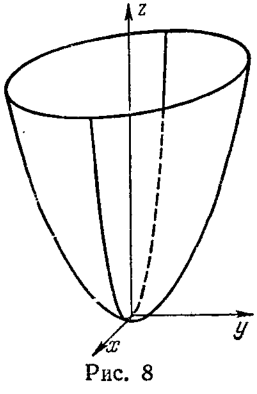

Рис. 8

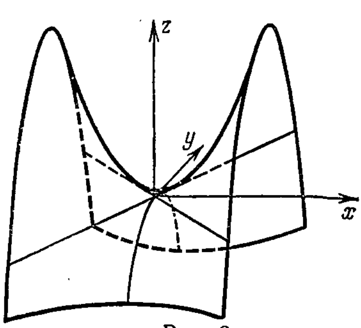

Рис. 9

Уравнение вида $\Phi(x^2+y^2, z)=0$ *) определяет поверхность вращения ($\mathscr{S}$). Сечение $\mathscr{L}$ этой поверхности плоскостью Oxz, имеющее на плоскости Oxz уравнение $\Phi(x^2, z)=0$, симметрично относительно оси Oz. Каждая «половинка» кривой $\mathscr{L}$, вращаясь вокруг оси Oz, образует поверхность $\mathscr{S}$.

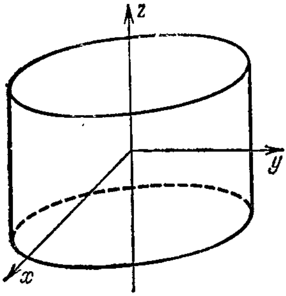

Рис. 10

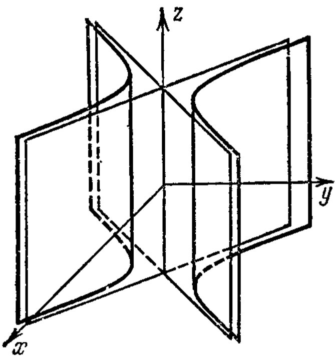

Рис. 11

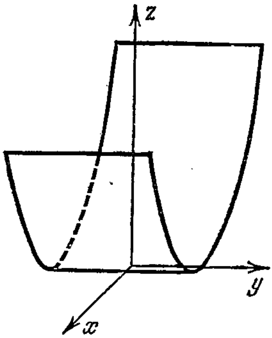

Рис. 12

Пусть две поверхности $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ определяются алгебраическими уравнениями $F(x, y, z)=0$ и $G(x, y, z)=0$ соответственно. Тогда множество $\mathscr{H}=\mathscr{F}\cap\mathscr{G}$ определяется системой уравнений

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y\ z)=0.$$

Уравнение, определяющее множество $\mathscr{M}$, следует из уравнения, определяющего множество $\mathscr{N}$, если $\mathscr{N}\subseteq\mathscr{M}$. Уравнение, определяющее поверхность $\mathscr{M}$, является следствием системы уравнений, определяющих поверхности $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}\cap\mathscr{G}\subseteq\mathscr{M}$.

---

*) Оно может быть получено из алгебраического уравнения $\Phi(u, v)=0$ заменой $u=x^2+y^2$, $v=z$. При этом, вообще говоря, можно не исключать случая, когда уравнение не имеет вещественных решений. В этом случае говорят о «мнимой» поверхности.

Изображение поверхности второго порядка.

Типы поверхностей второго порядка (10.1—10.17)

10.1. 1) Что представляет собой алгебраическая поверхность первого порядка? 2) Привести пример алгебраической поверхности третьего порядка и изобразить ее в декартовой прямоугольной системе координат.

10.2. Может ли алгебраическая поверхность второго порядка представлять собой прямую? Плоскость? Пустое множество? Привести примеры.

10.3. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением, содержащим произвольный параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; 2) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
3) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; 4) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$;
5) $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$; 6) $x^2 + \lambda (y^2 + z^2) = 1$;
7) $x^2 + \lambda (y^2 + z^2) = \lambda$; 8) $x^2 + y^2 = \lambda z$;
9) $\lambda x^2 + y^2 = z$; 10) $\lambda (x^2 + y^2) = z$;
11) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$; 12) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z + 1$;
13) $x^2 + y^2 = \lambda$; 14) $x^2 - y^2 = \lambda$.

10.4. 1) Указать такие типы поверхностей второго порядка, которые не содержат ни одной поверхности вращения.

2) Перечислить типы поверхностей второго порядка, которым принадлежат какие-нибудь поверхности вращения.

10.5. Написать уравнение сферы:

1) с центром в точке $C(1, 1, 1)$ и радиусом $\sqrt{3}$;
2) с центром в точке $C(1, 2, 3)$ и радиусом 1.

10.6. Найти координаты центра C и радиус R сферы:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$;
2) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 12z + 3 = 0$.

10.7. Найти координаты центра поверхности, ее полуоси и уравнения плоскостей симметрии, изобразить поверхность в исходной системе координат:

1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x + 4y + 6z = 0$;
2) $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 6x + 4y + 2z - 6 = 0$.

10.8. Найти координаты центра поверхности, ее вершин, уравнения оси симметрии и плоскостей симметрии, изобразить поверхность в исходной системе координат:

1) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6x + 4y + 6z = 0$;

2) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4x - 8z + 10 = 0$.

10.9. Определить тип поверхности:

1) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 4x - 4y = 0$;

2) $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 4x + 4y + 6 = 0$;

3) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 6z = 0$;

4) $2x^2 + y^2 + 2z + 1 = 0$;

5) $2x^2 - y^2 + 2z + 1 = 0$;

6) $2x^2 + z^2 + 2x + z = 0$.

10.10. Определить тип поверхности, изобразить поверхность в исходной системе координат:

1) $xy = 0$; 2) $xy = 1$; 3) $xy = -1$;

4) $2xy + z = 0$; 5) $2xy - z = 0$.

10.11. Найти ось вращения поверхности, изобразить поверхность $x^2 + z^2 + x = 0$.

10.12. Определить тип поверхности, найти ось вращения, координаты вершин, изобразить поверхность:

1) $x^2 + z^2 + 2y = 1$;

2) $z^2 = 2xy$.

10.13. Найти координаты центра поверхности, уравнения оси вращения и горловой окружности, определить радиус горловой окружности, изобразить поверхность $x^2 + 2yz = 1$.

10.14. Найти точки пересечения поверхности $x^2 + y^2 = z$ и прямой:

1) $x = y = t,\ z = 4t$; 2) $x = y = z + 1$;

3) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+6}{8}$.

10.15. Сколько общих точек могут иметь прямая и поверхность второго порядка? Привести примеры.

10.16. Определить, лежит ли точка M (1, 1, 1) внутри или вне эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

10.17. Ось Oz направлена вверх. Определить, лежит ли точка M (1, 1, 1) выше или ниже параболоида $x^2 + 2y^2 = 2z$.

Поверхности вращения, цилиндры и конусы (10.18—10.45)

10.18. Привести примеры поверхностей вращения, которые являются алгебраическими поверхностями порядка 2, 3, 4.

10.19. Назвать типы и выписать канонические уравнения цилиндрических поверхностей второго порядка.

10.20. Привести примеры цилиндрических поверхностей, которые являются алгебраическими поверхностями порядка 3, 4.

10.21. Привести пример цилиндрической поверхности, не являющейся алгебраической.

10.22. Привести примеры цилиндров и конусов, не являющихся поверхностями вращения.

10.23. Доказать, что всякое уравнение вида $F(x, y, z) = 0$, где F — однородный многочлен, определяет конус с вершиной в начале координат.

10.24. Привести пример конической поверхности, не являющейся алгебраической.

10.25. Можно ли рассматривать плоскость как частный случай конической поверхности? Как частный случай цилиндра? Как поверхность вращения?

10.26. Составить векторное уравнение прямого кругового цилиндра радиуса R, имеющего ось $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.

10.27. Составить векторное уравнение сферы с центром в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ и радиусом R.

10.28. Составить векторное уравнение прямого кругового конуса с вершиной в точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ и осью $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, зная, что угол между его образующей и осью равен α.

10.29. Составить векторное уравнение эллипсоида, получаемого вращением эллипса с фокусами в точках $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$ и большой полуосью a вокруг большой оси эллипса.

10.30. Найти уравнение поверхности, получаемой вращением параболы $z^2 = x$:

1) вокруг оси Oz; 2) вокруг оси Ox.

10.31. Найти уравнение и определить тип поверхности, получаемой вращением гиперболы $x^2 - y^2 = 2$:

1) вокруг оси Ox; 2) вокруг оси Oy.

10.32. Найти уравнение поверхности, получаемой вращением окружности $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ вокруг оси Oy.

10.33. Найти уравнения поверхностей, получаемых вращением гиперболы $xy = 1$ вокруг асимптот.

10.34. 1) Написать параметрические уравнения поверхности, образованной вращением кривой $z = f(x)$ $(x \geqslant 0)$ вокруг оси Oz.

2) Написать параметрические уравнения поверхности, образованной вращением кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ вокруг оси Oz.

10.35. Доказать, что цилиндрическая поверхность с направляющей, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, и с образующей, параллельной вектору $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, определяется уравнениями $x = \varphi(u) + a_1 v$, $y = \psi(u) + a_2 v$, $z = \chi(u) + a_3 v$.

10.36. Доказать, что конус с направляющей, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, и с вершиной в начале координат определяется уравнениями $x = u\varphi(v)$, $y = u\psi(v)$, $z = u\chi(v)$.

10.37. Найти уравнение прямого кругового цилиндра радиуса $\sqrt{2}$ с осью $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + t$.

10.38. Найти уравнение прямого кругового цилиндра, проходящего через точку $M(1, 1, 2)$ и имеющего ось $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 3 + t$.

10.39. Найти уравнение круглого конуса с вершиной в начале координат и направлением оси, определяемым вектором $\mathbf{a}(1, 1, 1)$, зная, что образующие конуса составляют с его осью угол $\arccos(1/\sqrt{3})$.

10.40. Найти уравнение и определить тип поверхности, образованной вращением прямой $x = 1 + t$, $y = z = 3 + t$ вокруг оси Oz.

10.41. Найти уравнение и определить тип поверхности, образованной вращением прямой $x = 0$, $y - z + 1 = 0$ вокруг оси Oz.

10.42. Найти уравнение и определить тип поверхности, образованной вращением прямой $x = -t$, $y = z = 2t$ вокруг прямой $x = y = z$.

10.43. Найти уравнение конуса с вершиной в точке $M(1, 1, 1)$, касающегося сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

10.44. Найти параметрические уравнения цилиндра с образующей, параллельной вектору $\mathbf{a}(1, 1, 1)$, и направляющей, заданной уравнениями $x = -1 + 2\cos t$, $y = -1 + 2\sin t$, $z = 3 - 2\cos t - 2\sin t$.

10.45. Исключив параметры, получить алгебраическое уравнение поверхности $x = u + \cos v$, $y = u + \sin v$, $z = u - \cos v - \sin v$. Что это за поверхность?

Сечения поверхностей второго порядка (10.46—10.76)

10.46. 1) Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ плоскостями $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектированы на плоскость Oyz. Изобразить проекции.

2) Сечения поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ плоскостями $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектированы на плоскость Oyz. Изобразить проекции.

3) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектированы на плоскость Oyz. Изобразить проекции.

4) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ спроектированы на плоскость Oxz. Изобразить проекции.

5) Сечения поверхности $2x^2 - y^2 = 2z$ плоскостями $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy. Изобразить проекции.

10.47. 1) Сечения поверхностей $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0$ плоскостью $x = 0$ спроектированы на плоскость Oyz. Изобразить проекции.

2) Сечения тех же поверхностей плоскостью $z = 1$ спроектированы на плоскость Oxy. Изобразить проекции.

10.48. 1) Является ли линия пересечения двух поверхностей второго порядка плоской кривой? Привести примеры.

2) Пусть линия пересечения двух поверхностей второго порядка плоская. Будет ли эта линия алгебраической? Если да, то какого порядка? Рассмотреть примеры.

10.49. Определить вид линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ и найти ее параметрические уравнения.

10.50. Доказать, что линия пересечения поверхности второго порядка с плоскостью есть алгебраическая линия не выше второго порядка. Привести примеры, когда это линия первого порядка.

10.51. Пусть $\mathscr{F}$ — поверхность, определяемая алгебраическим уравнением $F(x, y) = 0$, $\mathscr{L}$ — непустое множество точек, определяемое уравнениями $F(x, y) = 0$, $z = 0$. Доказать утверждения:

1) $\mathscr{F}$ — цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz, и направляющей $\mathscr{L}$;

2) $\mathscr{L}$ есть сечение $\mathscr{F}$ плоскостью Oxy;

3) $\mathscr{L}$ есть проекция $\mathscr{F}$ на плоскость Oxy;

4) $\mathscr{L}$ есть проекция любой направляющей цилиндра на плоскость Oxy;

5) $\mathscr{L}$ содержит проекцию на плоскость Oxy любой кривой, лежащей на цилиндре $\mathscr{F}$.

10.52. Найти уравнение проекции линии пересечения поверхностей $x^2 + 2y^2 = 2z$, $x + 2y + z = 1$ на плоскость Oxy. Что представляет собой эта линия?

10.53. Пусть $\mathcal{S}$ — сечение параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ плоскостью, которая пересекает положительную полуось Oz в единственной точке. Доказать, что проекция $\mathcal{S}$ на плоскость Oxy есть окружность.

10.54. Доказать, что линия пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y + z = 1$ есть эллипс и найти его параметрические уравнения.

10.55. По какой линии пересекаются параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ и плоскость $x + y + z = 1$?

10.56. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$, $2x + 2y + z + 1 = 0$.

10.57. Составить параметрические уравнения конуса с вершиной в начале координат и направляющей, определенной уравнениями $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y + z = 1$.

10.58. Найти уравнение цилиндра с образующей, параллельной оси Oz и направляющей — окружностью $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $z = 1$.

10.59. Образующая цилиндра параллельна оси Oz, его направляющая — окружность $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Найти уравнение цилиндра.

10.60. Образующие цилиндра параллельны оси Oz, его направляющая — эллипс $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y + z = 1$. Доказать, что это — прямой круговой цилиндр, написать его уравнение, найти ось и радиус.

10.61. Образующие цилиндра параллельны вектору $\mathbf{a}$ (1, 1, 1), его направляющая — окружность $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Написать уравнение цилиндра.

10.62. Найти уравнение конуса с вершиной в точке O (0, 0, 0) и направляющей — окружностью $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

10.63. Найти уравнение эллипсоида, плоскости симметрии которого совпадают с плоскостями координат, содержащего точку M (3, 1, 1) и окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - z = 0$.

10.64. Доказать, что центры плоских сечений эллиптического цилиндра лежат на его оси.

10.65. Найти центр сечения эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 10$ плоскостью:

1) $x + y + 2z = 5$; 2) $x + y + z = 7$.

10.66 (р). Найти центр сечения гиперболоида $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = -4$ плоскостью $x + y + 2z = 2$.

10.67. Пусть M_0 (5, 7, 20) — точка плоскости, а $\mathbf{p}(-3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11})$, $\mathbf{q}(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ — ортонормированный базис на ней. Написать уравнения линии пересечения этой плоскости и конуса $x^2 + 5y^2 - z^2 = 0$ во внутренней системе координат M_0, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$. Найти координаты центра линии пересечения и уравнения ее осей симметрии в исходной (пространственной) системе координат.

10.68 (р). Найти уравнение множества центров сечений эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ плоскостями, параллельными плоскости $x + y + z = 1$.

10.69. Найти уравнение множества центров сечений гиперболоида $x^2 + y^2 - 3z^2 = 2$ плоскостями, параллельными плоскости $x + y + z = 1$.

10.70. Найти уравнение множества центров сечений параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ плоскостями, параллельными плоскости $x + y + z = 1$.

10.71 (р). Найти уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ по эллипсу, центр которого находится в точке C (3, 2, 1).

10.72. Найти уравнения проекций линии пересечения эллипсоида $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 36$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

10.73. Найти уравнения проекций линии пересечения эллипсоидов $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$, $3x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 10$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия?

10.74. Написать уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2z$ на координатные плоскости. Что представляет собой эта линия? Найти ее параметрические уравнения.

10.75 (р). Найти уравнения проекций линии пересечения поверхностей $5x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 0$, $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ на координатные плоскости.

10.76. Доказать, что линия пересечения параболоида $x^2 + 2y^2 = 4z + 10$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ состоит из двух окружностей. Найти точки пересечения этих окружностей и их радиусы.

Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка (10.77—10.88)

10.77. Назвать типы поверхностей второго порядка, имеющих прямолинейные образующие.

10.78. Может ли число прямолинейных образующих, проходящих через одну точку поверхности второго порядка, равняться 0? 1? 2? 3? ... Может ли оно быть бесконечным? Привести примеры.

10.79. Найти уравнение семейства прямолинейных образующих цилиндра $x^2 - y^2 = 1$.

10.80. Найти уравнение семейства прямолинейных образующих конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

10.81. Найти прямолинейные образующие параболоида $4x^2 - y^2 = 16z$, пересекающиеся в точке $M(2, 0, 1)$.

10.82. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 0, 2)$ и пересекающей параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ по паре прямых.

10.83. Найти уравнение плоскости, пересекающей гиперболоид $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ по паре прямых, проходящих через точку $M(6, -3, 2)$.

10.84. Даны параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ и плоскость $x + y + z = 1$. Найти уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей параболоид по паре прямых. Найти уравнения этих прямых и угол между ними.

10.85. Две прямолинейные образующие гиперболоида вращения $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ пересекаются в точке, принадлежащей плоскости $z = h$. Найти угол между ними:

1) при $h = 0$; 2) при $h = 1$;
3) при произвольном h.

10.86. Найти множество точек поверхности $\mathcal{S}$, в которых пересекаются ее взаимно ортогональные прямолинейные образующие, если $\mathcal{S}$ определена уравнением:

1) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 2z$;
3) $x^2 - 4y^2 = 2z$.

10.87. Доказать, что проекции прямолинейных образующих параболоида $x^2 - y^2 = 2z$ на плоскость Oxz касаются параболы $x^2 = 2z$.

10.88. Доказать, что проекции прямолинейных образующих гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ на плоскость Oxy касаются окружности $x^2 + y^2 = 1$.

§ 11. Общая теория поверхностей второго порядка

В этом параграфе используются следующие определения: *малая* и *большая квадратичные формы поверхности второго порядка*, *тип поверхности второго порядка*, *инварианты* — *ранг* и *сигнатура малой* и *большой квадратичных форм поверхности*, *каноническое уравнение поверхности*, *канонический базис* и *каноническая система координат*.

Имеется 17 различных типов поверхностей второго порядка. Каждый тип характеризуется своим набором инвариантов и своей формой канонического уравнения — простейшей формой, к которой можно привести уравнение поверхности с помощью выбора декартовой прямоугольной системы координат. Соответствующие базис и система координат также называются каноническими.

Мы воспроизводим таблицу типов и канонических уравнений поверхностей второго порядка из [2]. Ранги и модули сигнатур большой и малой квадратичных форм поверхности обозначены соответственно через R, Σ, r, σ.

Изложим некоторые детали алгоритма приведения уравнения второго порядка к канонической форме. Этот алгоритм может быть использован для упрощения уравнений с любым числом переменных. Исходная система координат предполагается прямоугольной. При всех заменах координат также совершается переход к прямоугольным системам координат.

Главным моментом является «уничтожение», с помощью подходящей замены базиса, членов уравнения, содержащих произведения переменных. Остановимся на этом моменте. Уравнение поверхности

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + k = 0 \qquad (1)$$

можно записать в матричной форме

$$\xi^T A\xi + 2\boldsymbol{a}\xi + k = 0, \qquad (2)$$

где

$$\xi = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \| a_1 \quad a_2 \quad a_3 \|.$$

Формулы замены координат при заданной матрице перехода S также запишем в матричном виде:

$$\xi = S\xi'. \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получим уравнение

$$(\xi')^T A'\xi' + 2\boldsymbol{a}'\xi' + k = 0.$$

Константа k при замене координат (3) не меняется;

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}S, \qquad A' = S^T AS.$$

Таблица 2

Название	Каноническое уравнение	R	Σ	r	σ
«Мнимый эллипсоид» (пустое множество)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=-1$	4	4	3	3
Эллипсоид	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1$	4	2	3	3
Однополостный гиперболоид	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=1$	4	0	3	1
Двуполостный гиперболоид	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=-1$	4	2	3	1
«Мнимый конус» (точка)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$	3	3	3	3
Конус	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$	3	1	3	1
Эллиптический параболоид	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=2\zeta$	4	2	2	2
Гиперболический параболоид	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=2\zeta$	4	0	2	0
Эллиптический цилиндр	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=1$	3	1	2	2
«Мнимый эллиптический цилиндр» (пустое множество)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=-1$	3	3	2	2
Гиперболический цилиндр	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=1$	3	1	2	0
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}=0$	2	0	2	0
«Пара мнимых пересекающихся плоскостей» (прямая линия)	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}=0$	2	2	2	2
Параболический цилиндр	$\xi^2=2\alpha\eta$	3	1	1	1
Пара параллельных плоскостей	$\xi^2-\alpha^2=0$	2	0	1	1
«Пара мнимых параллельных плоскостей» (пустое множество)	$\xi^2+\alpha^2=0$	2	2	1	1
«Пара совпавших плоскостей» (плоскость)	$\xi^2=0$	1	1	1	1

Отыскиваем ортонормированный базис, в котором матрица A' диагональна. Для этого: 1) вычисляем корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$; 2) для каждого корня составляем систему уравнений $(A - \lambda E)\xi = o$ и находим ее фундаментальную систему решений; 3) применяя процесс ортогонализации и нормируя полученные векторы, находим искомый базис; 4) из базисных столбцов составляем матрицу перехода S. В новом базисе матрица A' диагональна, на ее главной диагонали расположены корни характеристического уравнения, взятые с их кратностями в том же порядке, что и соответствующие столбцы в матрице S. Коэффициенты при линейных членах преобразованного уравнения вычисляем по формуле $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}S$.

Если матрица A диагональна: $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, то уравнение поверхности не содержит произведений переменных и имеет вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + 2a_3 z + k = 0. \tag{4}$$

Полное упрощение уравнения (1) происходит в несколько этапов.

I. Если в уравнении есть члены, содержащие произведения переменных, то заменяем базис с помощью ортогональной матрицы перехода S так, как описано выше. Преобразованное уравнение примет вид (4).

II. Если в уравнении уже нет членов, содержащих произведения переменных, но имеются квадраты переменных и одноименные линейные члены, то дополняем эти пары членов «до полных квадратов» и переносим начало координат так, чтобы в преобразованном уравнении соответствующих линейных членов не было.

III. Если в уравнении имеется квадрат одной переменной и линейные члены, содержащие другие переменные, и уже нет никаких других членов с переменными величинами, то делаем замену координат в плоскости, соответствующей линейным членам, так, чтобы все линейные члены заменить на один, и так, чтобы в преобразованном уравнении не стало свободного члена. Поясним на примере, как выполняется эта замена координат. Упростим уравнение

$$\lambda x^2 + ay + bz + c = 0. \tag{5}$$

Положим

$$y' = \mu\,(ay + bz + c), \qquad z' = \mu\,(-by + az), \tag{6}$$

где $\mu = (a^2 + b^2)^{-1/2}$. Формулы (6) определяют замену прямоугольной системы координат. Уравнение (5) переходит в

$$\lambda x^2 + \mu y' = 0. \tag{7}$$

Замену координат (6) можно провести и в два шага: сначала выполнить ортогональную замену

$$y' = \mu(ay + bz), \quad z' = \mu(-by + az), \quad \mu = (a^2 + b^2)^{-1/2},$$

затем — перенос начала координат.

IV. Если уравнение упрощено так, что в нем имеются квадраты переменных и один линейный член (все — разных наименований), и, кроме того, имеется лишь свободный член, то переносим начало координат вдоль оси, соответствующей линейному члену, так, чтобы в преобразованном уравнении не было свободного члена. Например, в уравнении

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + az + k = 0$$

выполняем замену координат $z = z' - \dfrac{k}{a}$. Получаем уравнение

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + az' = 0. \tag{8}$$

Последовательно выполняя описанные выше действия, мы всегда придем к уравнению второй степени в почти канонической форме. «Почти каноническими» мы называем уравнения, отличающиеся от канонических (табличных), самое большее, числовым множителем, нумерацией координат, переносом членов из одной части равенства в другую, знаком коэффициента при линейном члене. Например, уравнения (7), (8) являются почти каноническими. Соответствующие базис и систему координат будем также называть почти каноническими. Почти каноническая система координат отличается от канонической разве что порядком и направлением базисных векторов. Начала канонической и почти канонической систем координат совпадают.

Отыскание канонической системы координат происходит одновременно с упрощением уравнения поверхности и также распадается на несколько этапов. При этом полезно помнить: а) при последовательных заменах координат соответствующие матрицы перехода S_1, S_2, ... перемножаются в том же порядке: $S = S_1 \cdot S_2 \ldots$; б) применяя алгоритм, изложенный выше, на каждом этапе мы получаем координаты нового начала не в исходной, а в промежуточной системе координат.

V. Если уравнение поверхности приведено к почти канонической форме, не совпадающей с канонической, то следует выполнить перечисленные выше простейшие преобразования уравнения и системы координат, которые приведут уравнение к окончательной канонической форме. Каноническая система координат считается определенной, если вычислены координаты ее начала и базисных векторов относительно первоначально заданной системы координат. Задача упрощения уравнения поверхности второго порядка считается полностью решенной, если найдены каноническое уравнение поверхности и каноническая система координат.

Добавим, что каноническое уравнение и каноническая система координат для данной поверхности определены, вообще говоря, не однозначно. Всегда не однозначно определены почти каноническая система координат и почти каноническое уравнение.

Существуют и другие способы приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. В некоторых из них перенос начала координат предшествует ортогональной замене координат, «уничтожающей» члены уравнения, содержащие произведения переменных. Краткое изложение одного из этих способов имеется в задаче 11.15. Приведены также решения задач 11.22, 16) и 17), где этот способ применен.

Инварианты. Общие свойства поверхностей второго порядка (11.1—11.18)

11.1. Перечислить поверхности второго порядка, для которых:

1) $R = 4$; 2) $R = 3$; 3) $R = 2$; 4) $R = 1$;

5) $r = 3$; 6) $r = 2$; 7) $r = 1$.

11.2. Охарактеризовать с помощью инвариантов «основную» группу вещественных поверхностей второго порядка: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды.

11.3. Охарактеризовать с помощью инвариантов следующие группы поверхностей второго порядка:

1) параболоиды и параболические цилиндры;

2) поверхности, состоящие из плоскостей;

3) «мнимые» поверхности: «мнимые эллипсоиды», «мнимые конусы», «мнимые эллиптические цилиндры», «пары мнимых пересекающихся плоскостей», «пары мнимых параллельных плоскостей».

11.4. 1) Какие из «мнимых» поверхностей второго порядка (см. задачу 11.3.3)) не имеют вещественных точек? Охарактеризовать с помощью инвариантов эту группу поверхностей.

2) Какие из «мнимых» поверхностей второго порядка имеют вещественные точки и как эти поверхности выглядят? Охарактеризовать с помощью инвариантов эту группу поверхностей.

11.5. Охарактеризовать с помощью инвариантов поверхности второго порядка, не вырождающиеся в точку, прямую, плоскость.

11.6. Охарактеризовать с помощью инвариантов вещественные поверхности, имеющие:

1) два семейства прямолинейных образующих;

2) одно семейство прямолинейных образующих.

11.7. Перечислить поверхности второго порядка, канонические уравнения которых содержат ненулевой свободный член. Охарактеризовать эти поверхности через инварианты.

11.8. Пусть уравнение второго порядка записано в матричной форме (2), а перенос начала координат — в форме: $\xi = \xi' + b$, где b — столбец из координат нового начала. Записать матричную форму преобразованного уравнения. Выразить строку новых коэффициентов при линейных членах через a, b, A.

11.9. Доказать, что существуют такие уравнения второй степени, в которых с помощью перехода к новой системе координат нельзя уничтожить все члены с первой степенью неизвестных. Перечислить все типы таких поверхностей и охарактеризовать эти поверхности через инварианты.

11.10. Проверить, что существуют такие уравнения второй степени, в которых с помощью перехода к другой декартовой системе координат можно уничтожить все члены ниже второй степени. Перечислить все типы таких поверхностей и охарактеризовать их через инварианты.

11.11. 1) Сколько центров симметрии может иметь поверхность второго порядка?

2) Перечислить поверхности второго порядка, не имеющие центра симметрии.

3) Перечислить поверхности второго порядка, имеющие единственный центр симметрии.

4) Перечислить поверхности второго порядка, имеющие бесконечно много центров симметрии.

11.12. 1) (р) Доказать, что если поверхность второго порядка имеет центр симметрии и он расположен в начале координат, то уравнение поверхности не содержит линейных членов.

2) Доказать, что если уравнение поверхности второго порядка не содержит линейных членов, то поверхность имеет центр симметрии в начале координат.

11.13. Пользуясь результатами задач 11.8, 11.12, получить в матричной форме уравнения центра симметрии поверхности второго порядка.

11.14. Доказать, что условие $\det A \neq 0$ необходимо и достаточно для существования единственного центра у поверхности второго порядка, заданной уравнением (2). Указание: использовать результат задачи 11.13.

11.15. Пусть уравнение второго порядка записано в матричной форме (2) и в нем выполнена замена координат $\xi = S\xi' + \boldsymbol{b}$. Запишем матричную форму преобразованного уравнения

$$\xi'^T A'\xi' + 2a'\xi' + k' = 0. \qquad (9)$$

1) Выразить матрицу A', строку a' и свободный член k' через A, a, k, b, S.

2) Пусть столбец $\boldsymbol{b}$ удовлетворяет уравнению

$$A\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{o}. \qquad (10)$$

Доказать, что тогда $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{o}$, $k' = \boldsymbol{ab} + k$ при всех S.

3) Пусть уравнение (10) не имеет решения. Доказать, что тогда не существует декартовой системы координат, в которой уравнение поверхности не содержало бы линейных членов.

4) Пусть исходный базис — ортонормированный и φ — преобразование арифметического пространства $\mathscr{E}_3$, присоединенное к квадратичной форме поверхности, иначе говоря, преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A. Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ — соответственно образ пространства и ядро преобразования φ. Доказать, что вектор $\boldsymbol{a}^T$ можно единственным способом разложить в сумму $\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, где $\boldsymbol{p} \in \mathscr{P}$, $\boldsymbol{q} \in \mathscr{Q}$. Доказать, что условие $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{a}^T \in \mathscr{P}$) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (10). Доказать, что если $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{o}$, то вектор $\boldsymbol{q}$ является собственным вектором преобразования φ и соответствует нулевому собственному значению.

5) Доказать, что при $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{o}$ система уравнений

$$A\boldsymbol{b} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{o}, \quad (\boldsymbol{q}^T + \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + k = 0 \qquad (11)$$

совместна.

6) Пусть $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b}$ — решение системы уравнений (11), матрица S ортогональная, а ее столбцы являются собственными векторами преобразования φ, принадлежащими собственным значениям λ_1, λ_2 и λ_3, причем $\lambda_3 = 0$ и третий столбец $\boldsymbol{f}_3$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{q}$. Доказать, что тогда уравнение (9), развернутое в координатной

форме, имеет почти канонический вид $\lambda_1\xi'^2 + \lambda_2\eta'^2 + 2af_3\zeta' = 0$.

11.16. 1) Уравнение поверхности второго порядка записано в развернутой форме и в матричной форме (2). Все коэффициенты развернутого уравнения умножены на число $\mu \neq 0$. Что произойдет с матрицей A? Как изменятся при этом корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$?

2) Уравнение поверхности второго порядка записано в прямоугольной системе координат, и в нем совершен переход к другой прямоугольной системе. Доказать, что при этом не изменится характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, а поэтому не изменятся его корни. Изменится ли $\det A$?

11.17. 1) Дано уравнение второго порядка в матричной форме (2). Выразить матрицу B большой квадратичной формы поверхности, заданной этим уравнением, через A, $\boldsymbol{a}$, k.

2) В уравнении поверхности совершена замена координат $\boldsymbol{\xi} = S\boldsymbol{\xi}' + \boldsymbol{b}$. Выписать матрицу T, с помощью которой преобразуется большая квадратичная форма поверхности, и доказать, что при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой $\det B$ не меняется.

3) Доказать, что при ортогональной замене координат, оставляющей начало координат на месте, не изменяется характеристическое уравнение $|B - \lambda E| = 0$, а потому не изменяются его коэффициенты и корни.

11.18. Пусть в некоторой общей декартовой системе координат уравнение поверхности второго порядка по форме совпадает с одним из канонических уравнений. Доказать, что существует декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой поверхности будет каноническим того же типа.

Определение вида и расположения поверхности, заданной общим уравнением второго порядка (11.19—11.23)

11.19. Пользуясь результатом задачи 11.18, определить тип поверхности, заданной в общей декартовой системе координат уравнением:

1) $(x + y + z)(x - y + 125z) = 1$;

2) $(x+y)(x+y+1)=1$;
3) $(x+y)(x+y+1)=x-y$;
4) $(x+y+z+1)(x-y+z)=x+z+1$;
5) $(x+y+z+1)(x-y+z)=x+2z+1$;
6) $(x+y)(x-y)=z$;
7) $(x+y+z)(x-y+z)=0$;
8) $(x+2y)(x+2y+1)=z$;
9) $(x+y)(x-75y)=z^2$;
10) $(x+y)^2=3x+z$;
11) $(x+2y+3z)(2x+3y+4z)+$
$+(3x+4y+75z)^2=1$;
12) $(x+2y+3z)(2x+3y+4z)-$
$-(3x+4y+75z)^2=1$;
13) $(x+y)z-x^2-x=0$;
14) $(x+y+z)^2+(x+2y+3z)^2+$
$+(2x-y+z)^2=0$;
15) $(x+y+z)^2+(x+2y+3z)^2+$
$+(2x+3y+4z)^2=0$;
16) $(x+y+z)^2+(x-2y+z)^2=0$;
17) $(x+y+z)^2+(x+y)^2+(y+z)^2=1987$;
18) $(x+y+z)^2+(x+y)^2=1987$;
19) $(x+y+z)^2+(x+y)^2+(2x+2y+z)^2=1$;
20) $(x+y)^2+z^2+1=0$.

11.20. В общей декартовой системе координат гиперболоид задан уравнением $(x+y+z)(x-y+z)-(2x-y+2z)^2=1$. Найти уравнение его асимптотического конуса.

11.21. Поверхность задана в общей декартовой системе координат уравнением, содержащим параметр k. Определить тип поверхности при всех значениях k.

1) $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3+2x_1+2x_2+$
$+5x_3+k=0$;
2) $2x_1^2+kx_2^2+8x_1x_2+4x_1x_3-4x_1-8x_2-4x_3=0$;
3) $3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+4x_1+4x_2+$
$+4x_3+k=0$;
4) $kx_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3-4x_1-$
$-4x_2+2x_3=0$;
5) $3x_2^2+x_3^2+6x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3+kx_2+x_3+1=0$;
6) (р) $x_1^2-2x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2-6x_1x_3-2x_1+4x_2+$
$+6x_3+k=0$.

11.22. Поверхность задана уравнением в декартовой прямоугольной системе координат. Найти каноническую систему координат и каноническое уравнение этой поверхности. Определить тип поверхности.

1) $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz - 1 = 0$;

2) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 2x + 2y + 2z = 0$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + 3x + 3y - 3z = 0$;

5) $x^2 - 3z^2 - 4yz - 4y + 2z + 5 = 0$;

6) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4x + 4y + 3 = 0$;

7) $y^2 + 2xz + 2x + 2z + 1 = 0$;

8) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0$;

9) $-x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8yz + 2x + 12y + 24z + 36 = 0$;

10) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$;

11) $4x^2 + 4y^2 - 4xy - 12x - 12y - 5z + 1 = 0$;

12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 12x + 4y + 6z - 3 = 0$;

13) $4x^2 + 9y^2 - 12xy + 2x + 10y + 1 = 0$;

14) $6xy - 8y^2 - z^2 + 60y + 2z + 89 = 0$;

15) $5x^2 + 8y^2 + 4xy + 2x + 44y - 36z + 65 = 0$;

16) (р) $-x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2x + 3y - 5z + 1 = 0$;

17) (р) $9y^2 + 16z^2 + 24yz + 5x + 10y + 5z + 11 = 0$;

18) $16x^2 + 9y^2 - z^2 - 24xy - 9x - 12y + 4z + 71 = 0$;

19) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 10xy + 20x - 8y + 29 = 0$;

20) $-x^2 + 7y^2 - 24yz + 2x + 120y = 0$;

21) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10yz + 2x + 2y + 2z + 3 = 0$;

22) $3x^2 + 4xy + 8x + 8y - 4z = 0$;

23) $-x^2 - 9y^2 + 6xy + 50x - 50y - 15z - 100 = 0$.

11.23. Поверхность задана в декартовой прямоугольной системе координат уравнением, содержащим параметр k. При данном значении k найти каноническую систему координат и каноническое уравнение поверхности. Определить тип поверхности при всевозможных k. Если поверхность представляет собой прямую, плоскость или пару плоскостей, найти линейные уравнения этих множеств в исходной системе координат.

1) $5x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}\,xz + 2\sqrt{2}\,yz + 26x + 34y + 10\sqrt{2}\,z + k = 0$; $k = 49$.

2) $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 2y - 4z + k = 0$; $k = -1$.

3) $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x - 2z + k = 0$; а) $k = -1$; б) $k = 5$; в) $k = 11$.

4) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 4x - 4y + k = 0$; $k = 4$.

5) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 8x + 8y + k = 0$; а) $k = 4$; б) $k = 8$.

6) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz - 12x + 12y - 24z + k = 0$; $k = 6$.

7) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 24y - 24z + k = 0$; $k = 12$.

8) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 5x + y - 2z + k = 0$; $k = 0$.

9) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 12z + k = 0$; а) $k = 15$; б) $k = 18$.

10) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 18z + k = 0$; $k = 18$.

11) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 6x - 6y + k = 0$; а) $k = 8$; б) $k = 9$.

12) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 18x - 6y + 6z + k = 0$; $k = -18$.

13) $3x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 8xy - 8yz - 8xz - 4x + 6y + 8z + k = 0$; а) $k = -12$; б) $k = -3$; в) $k = 6$.

14) $2y^2 - 3z^2 - 2\sqrt{3}xy - 4xz + 4\sqrt{3}yz + 50z + k = 0$; а) $k = -75$; б) $k = -70$; в) $k = -80$.

15) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 8xz - 8yz - 8x - 4y + 8z + k = 0$; а) $k = -4$; б) $k = 2$; в) $k = 8$.

16) $4x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 4xy - 8xz + 8yz + 12x - 12y + 24z + k = 0$; а) $k = -42$; б) $k = -36$; в) $k = -30$.

17) $8y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 4x + 8y + k = 0$; а) $k = 0$; б) $k = -9$.

18) $8y^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 8x + 6y + 4z + k = 0$; $k = 6$.

19) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 11x + 3y - z + k = 0$; $k = 1$.

20) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 6x - 2y - 6z + k = 0$; $k = 11$.

21) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 12xz - 6yz + 4x + 2y - 6z + k = 0$; а) $k = 1$; б) $k = -13$.

22) $-x^2 + 10y^2 - z^2 - 8xy + 6xz + 8yz + 24x - 8y - 16z + k = 0$; а) $k = -26$; б) $k = -14$; в) $k = -2$.

23) $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4yz + 10x - 2y - 2z + k = 0$; а) $k = 2$; б) $k = 5$; в) $k = 8$.

24) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 10xy + 4xz - 4yz + 13x + 11y + 2z + k = 0$ $k = 6$.

25) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 10xy + 4xz - 4yz + 24x - 12z + k = 0$; а) $k = -12$; б) $k = -6$.

ГЛАВА V
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ. ГРУППЫ

§ 12. Линейные и аффинные преобразования плоскости

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *отображение одного множества в другое, преобразование множества, образ элемента и множества, полный прообраз элемента и множества, вложение (инъективное отображение), взаимно однозначное (биективное) отображение, наложение (сюръективное отображение), произведение отображений, обратное отображение, линейное преобразование плоскости, аффинное преобразование, образ вектора при линейном преобразовании, линейное преобразование векторной плоскости, симметрия плоскости относительно прямой, симметрия плоскости относительно точки, гомотетия, параллельный перенос плоскости, сжатие к прямой с коэффициентом k, ортогональное преобразование, главные направления аффинного преобразования, собственные векторы линейного преобразования векторной плоскости.*

Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ множества $\mathscr{X}$ в множество $\mathscr{Y}$ — это правило, которое каждому элементу $x \in \mathscr{X}$ сопоставляет единственный элемент $y = f(x) \in \mathscr{Y}$, называемый *образом элемента* x при отображении f. Множество $\mathscr{X}$ называется *областью определения*, а множество $\mathscr{Y}$ — *областью значений отображения* f. Совокупность $f(\mathscr{X})$ образов всех элементов $x \in \mathscr{X}$ называется *множеством значений отображения* f (*образом множества* $\mathscr{X}$ при отображении f). Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ называется *преобразованием множества* $\mathscr{X}$. *Ограничением отображения* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ на подмножестве $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{X}$ называется отображение $f_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{M} \to \mathscr{Y}$, совпадающее с f на $\mathscr{M}$.

Приведем определения некоторых видов отображений $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$.

Название	Определение
1) *Вложение* (*инъективное отображение*)	Из $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathscr{X})$
2) *Наложение* (*сюръективное отображение*)	$f(\mathscr{X}) = \mathscr{Y}$
3) *Взаимно однозначное* (*биективное*) *отображение*, или *взаимно однозначное соответствие*	Отображение, одновременно являющееся вложением и наложением

Иногда используется также терминология: 1) взаимно однозначное отображение множества $\mathscr{X}$ *в* множество $\mathscr{Y}$; 2) отображение множества $\mathscr{X}$ *на* множество $\mathscr{Y}$; 3) взаимно однозначное отображение множества $\mathscr{X}$ *на* множество $\mathscr{Y}$.

Прямым произведением $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ множеств $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ называется множество упорядоченных пар $\{(x, y) \mid x \in \mathscr{X},\ y \in \mathscr{Y}\}$. Число элементов конечного множества (*порядок*) обозначается через $|\mathscr{X}|$.

Произведением отображений $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ называется отображение $h = gf\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, определяемое равенством $(gf)(x) = g(f(x))$ $(x \in \mathscr{X})$. Произведение gf определено, если множество значений отображения f входит в область определения отображения g.

Тождественное преобразование ι $\left(\text{или } \iota_{\mathscr{X}}\right)$ множества $\mathscr{X}$ определяется равенством $\iota(x) = x$ для любого элемента $x \in \mathscr{X}$.

Отображение $g\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ называется *обратным* к отображению $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и обозначается f^{-1}, если $f^{-1}f = \iota_{\mathscr{X}}$, $ff^{-1} = \iota_{\mathscr{Y}}$, т. е. для любых $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{Y}$ справедливы равенства $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$.

Прообразом элемента (в геометрии — точки) $y \in \mathscr{Y}$ при отображении $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ называется любой элемент $x \in \mathscr{X}$ такой, что $f(x) = y$. *Полным прообразом* $f^{-1}(\mathscr{S})$ множества $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{Y}$ называется совокупность всех прообразов всех элементов из $\mathscr{S}$.

Точка $x \in \mathscr{X}$ называется *неподвижной точкой преобразования* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, если $f(x) = x$. Множество $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{X}$ называется *неподвижным* относительно преобразования f, если все его точки неподвижны. Множество $\mathscr{M}$ называется *инвариантным* относительно преобразования f, если для любой точки $x \in \mathscr{M}$ также $f(x) \in \mathscr{M}$. Любое неподвижное множество инвариантно, обратное неверно.

Числовая прямая — это прямая, на которой задана система координат. Вещественная функция, определенная на всей числовой прямой, задает преобразование этой прямой. Линейная функция $x^* = ax + b$ задает *линейное преобразование прямой*.

Пусть f — преобразование плоскости, на которой задана декартова система координат. Координаты x^*, y^* образа произвольной точки плоскости выражаются через координаты x, y этой точки с помощью пары вещественных функций от двух переменных:

$$x^* = \varphi(x, y), \qquad y^* = \psi(x, y). \tag{1}$$

Формулы (1) называются *координатной записью* преобразования плоскости.

Линейное преобразование плоскости задается в любой декартовой системе координат формулами

$$\begin{aligned} x^* &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y^* &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Аффинным называется взаимно однозначное линейное преобразование плоскости. Линейное преобразование (2) аффинно тогда и только тогда, когда определитель этого преобразования $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Пусть A, B и C, D — такие точки плоскости, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Если f — линейное преобразование плоскости, то $\overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \overrightarrow{f(C)\,f(D)}$.

Образом вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ при линейном преобразовании f называется вектор $\mathbf{a}^* = \overrightarrow{f(A)\,f(B)}$. Таким образом, линейное преобразование f плоскости определяет преобразование множества векторов плоскости, и это последнее преобразование обозначается той же буквой f. Оно задается формулами

$$\alpha^* = a_1\alpha + b_1\beta, \qquad \beta^* = a_2\alpha + b_2\beta,$$

где α, β и α^*, β^* — координаты вектора и его образа.

Пусть O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — декартова система координат, в которой преобразование f задается формулами (2), $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^*$ $(i = 1, 2)$, $f(O) = O^*$. Тогда $\mathbf{e}_1^*$ (a_1, a_2), $\mathbf{e}_2^*$ (b_1, b_2), O^* (c_1, c_2).

Аффинное преобразование f называется преобразованием *первого рода*, если базисы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ ориентированы одинаково; *второго рода* — если противоположно. Для аффинного преобразования первого рода $\Delta > 0$, для преобразования второго рода $\Delta < 0$.

Если Φ — фигура на плоскости, имеющая площадь S, а S^* — площадь ее образа при аффинном преобразовании f, то $S^* / S = |\Delta|$.

Ортогональным называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между точками. Ортогональное преобразование аффинно и задается в прямоугольной системе координат формулами

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0, \\ y^* &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + y_0 \end{aligned} \tag{3}$$

для преобразования первого рода и

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + x_0, \\ y^* &= x\sin\varphi - y\cos\varphi + y_0 \end{aligned} \tag{4}$$

для преобразования второго рода.

Направления двух взаимно перпендикулярных векторов плоскости называются *главными направлениями* аффинного преобразования, если образы этих векторов также взаимно перпендикулярны.

Всякое аффинное преобразование f является произведением $f = h_2h_1g$, где g — ортогональное преобразование, а h_1 и h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым. Направления этих прямых являются главными направлениями аффинного преобразования.

Ненулевой вектор a называется *собственным вектором* линейного преобразования f векторной плоскости, если существует число λ такое, что $f(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$. Число λ, удовлетворяющее этому условию, называется собственным значением преобразования f. Собственные значения находят как вещественные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразованием подобия с коэффициентом $k > 0$ называется такое преобразование f плоскости, при котором $|\overrightarrow{f(A)f(B)}| = k|\overrightarrow{AB}|$ для любых точек A, B.

В задачах этого параграфа угол поворота плоскости при заданном базисе на плоскости отсчитывается в направлении кратчайшего поворота от первого базисного вектора ко второму.

Общие задачи об отображениях (12.1—12.24)

12.1. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — отображение. Доказать, что:

1) если $\mathscr{A}_1 \subseteq \mathscr{A}_2 \subseteq \mathscr{X}$, то $f(\mathscr{A}_1) \subseteq f(\mathscr{A}_2)$;

2) $f(\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2) = f(\mathscr{A}_1) \cup f(\mathscr{A}_2)$;

3) если $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2 \subseteq f(\mathscr{X}) \subseteq \mathscr{Y}$, то $f^{-1}(\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2) = f^{-1}(\mathscr{B}_1) \cap f^{-1}(\mathscr{B}_2)$;

4) $f(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2) \subseteq f(\mathscr{A}_1) \cap f(\mathscr{A}_2)$ (может ли включение быть строгим?).

12.2. Сколькими способами можно установить взаимно однозначное соответствие между двумя множествами, содержащими по n элементов?

12.3. 1) Сколько существует преобразований множества, состоящего из n элементов? Сколько среди них взаимно однозначных?

2) Сколько возможностей имеется для множеств значений преобразований множества из n элементов?

3) Сколько существует отображений множества из m элементов в множество из n элементов?

12.4. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $|\mathscr{X}| = m$, $|\mathscr{Y}| = n$. Может ли отображение f быть:

1) Наложением при $n < m$?

2) Вложением при $n > m$?

12.5. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, где $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — конечные множества, состоящие из одинакового числа элементов. Доказать равносильность следующих утверждений:

1) f — вложение;

2) f — наложение;

3) f взаимно однозначно.

12.6. Привести пример такого отображения $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ бесконечных множеств $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, что:

1) f является наложением, но не вложением;

2) f является вложением, но не взаимно однозначно.

12.7. Установить взаимно однозначные соответствия между множеством всех натуральных чисел и данным множеством:

1) множество всех целых чисел;

2) множество всех четных чисел;

3) множество всех рациональных чисел;

4) множество всех точек плоскости, координаты которых рациональны (рациональных точек);

5) множество всех интервалов на прямой с рациональными концами;

6) множество всех кругов на плоскости с центрами в рациональных точках и рациональными радиусами;

7) множество всех многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ с целочисленными коэффициентами a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

12.8. Доказать, что:

1) между множеством всех целых чисел и множеством всех последовательностей чисел 0 и 1 нельзя установить взаимно однозначного соответствия;

2) существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех последовательностей чисел 0 и 1.

12.9. Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — бесконечные множества, $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — взаимно однозначное отображение и $\mathscr{Y} \cap \mathscr{Z} = \varnothing$. Придумать взаимно однозначное отображение $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y} \cup \mathscr{Z}$, если:

1) $\mathscr{Z}$ конечно;

2) $\mathscr{Z}$ счетно.

12.10. Доказать, что у любого отображения $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ имеется не более одного обратного отображения.

12.11. Придумать взаимно однозначное отображение прямой:

1) на интервал $(-1, 1)$; 2) на отрезок $[-1, 1]$.

12.12. Придумать преобразование плоскости, которое взаимно однозначно отображает плоскость:

1) на открытый круг $x^2 + y^2 < 1$;

2) на замкнутый круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$;

3) на квадрат $|x| < 1$, $|y| < 1$ (система координат — прямоугольная).

12.13. Преобразование числовой прямой задано формулой: $f(x) = ax + b$ (a, b — действительные числа). Доказать, что:

1) f взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $a \neq 0$;

2) f сохраняет направление векторов на прямой при $a > 0$ и меняет на противоположное при $a < 0$;

3) при $a \neq 0$ образом интервала длины l является интервал длины $|a|\, l$.

12.14. Дано преобразование $f(x) = ax + b$ числовой прямой. Найти:

1) неподвижные точки преобразования f;

2) преобразование, обратное к преобразованию f ($a \neq 0$).

12.15. Написать формулу, задающую линейное отображение интервала (a, b) на интервал (c, d) числовой прямой.

12.16. Даны линейные преобразования f и g числовой прямой: $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$. Найти произведения fg и gf. В каком случае $fg = gf$?

12.17. Отображение f числовой прямой на плоскость задано формулами в прямоугольной системе координат: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($a > 0$, $b > 0$).

1) Найти образ $\mathcal{S}$ прямой при отображении f.

2) Является ли отображение f взаимно однозначным?

3) Указать какие-либо множества на прямой, которые взаимно однозначно отображаются на $\mathcal{S}$.

12.18. Отображение f числовой прямой на плоскость задано формулами в прямоугольной системе координат: $x = -\operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$.

1) Найти образ $\mathcal{S}$ прямой при отображении f.

2) Является ли отображение f вложением?

3) Найти прообраз t каждой точки из $\mathcal{S}$.

12.19. Преобразование f плоскости задано в прямоугольной системе координат формулами: $x^* = x^2 - y^2$, $y^* = 2xy$.

1) Является ли преобразование f: а) наложением, б) взаимно однозначным?

2) Найти полный прообраз произвольной точки (x^*, y^*) плоскости.

12.20. Преобразование f плоскости задано в прямоугольной системе координат формулами: $x^* = e^x \cos y$, $y^* = e^x \sin y$.

1) Является ли преобразование f взаимно однозначным?

2) Выделить на плоскости области, на которых f взаимно однозначно.

3) Пусть $\bar{f}$ — ограничение преобразования f на полосе $0 < y < \pi$. Найти формулы, задающие обратное к $\bar{f}$ отображение.

12.21. Даны отображения $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ и $h\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{U}$. Доказать ассоциативность умножения отображений, т. е. равенство $h(gf) = (hg)f$.

12.22. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — непустые множества, $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Отображение $\pi_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ (проектирование $\mathcal{Z}$ на $\mathcal{Y}$) определяется равенством $\pi_{\mathcal{Y}}((x, y)) = y$. Показать, что $\pi_{\mathcal{Y}}$ — наложение.

12.23. Показать, что для всякого множества $\mathcal{X}$ существует вложение $\delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

12.24. Графиком отображения $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется подмножество $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

1) Найти образ множества $\mathcal{X}$ при отображении $\varphi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, определяемом равенством $\varphi(x) = (x, f(x))$.

2) Доказать, что $f = \pi_{\mathcal{Y}}\varphi$ (определение $\pi_{\mathcal{Y}}$ см. 12.22).

3) Доказать, что отображение f является вложением тогда и только тогда, когда вложением является φ.

4) Доказать, что f является наложением тогда и только тогда, когда $\pi_{\mathcal{Y}}(\Gamma) = \mathcal{Y}$.

Геометрические свойства линейных и аффинных преобразований плоскости. (12.25—12.36)

12.25. Найти радиус-вектор образа произвольной точки M ($\mathbf{r}$) при данном преобразовании плоскости:

1) гомотетия с центром в точке M_0 ($\mathbf{r}_0$) и коэффициентом $k \neq 0$;

2) центральная симметрия относительно точки M_0 ($\mathbf{r}_0$);

3) параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}$;

4) ортогональное проектирование на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$;

5) симметрия относительно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$;

6) сжатие к прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ с коэффициентом $\lambda > 0$.

12.26. Аффинное преобразование переводит три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, соответственно в точки B, C, A. Найти неподвижные точки этого преобразования. При каком необходимом и достаточном условии преобразование будет ортогональным?

12.27. Аффинное преобразование переводит вершины треугольника ABC в середины K, L, M противолежащих им сторон. Найти образы точек K, L, M и точки O пересечения медиан треугольника ABC. Выяснить геометрический смысл этого преобразования.

12.28. Доказать, что:

1) если A и B — две различные неподвижные точки аффинного преобразования, то и все точки прямой AB неподвижны;

2) если аффинное преобразование f имеет единственную неподвижную точку, то все инвариантные прямые (если они существуют) проходят через эту точку;

3) точка пересечения двух инвариантных прямых аффинного преобразования неподвижна.

12.29. Доказать, что аффинное преобразование, имеющее пучок инвариантных прямых, пересекающихся в точке M, является гомотетией с центром в точке M.

12.30. Доказать, что линейное преобразование плоскости тогда и только тогда будет аффинным, когда образ каждого ненулевого вектора отличен от нуля.

12.31. Доказать, что две касательные к эллипсу (или гиперболе) параллельны тогда и только тогда, когда точки касания и центр кривой лежат на одной прямой.

12.32. Доказать, что если эллипс касается стороны описанного около него параллелограмма в ее середине, то он касается остальных сторон этого параллелограмма также в их серединах.

12.33. Около эллипса с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что сумма площадей треугольников OAB и OCD равна сумме площадей треугольников OBC и OAD.

12.34. Доказать, что вершины ромба, описанного около эллипса, лежат на осях симметрии этого эллипса.

12.35. Точки A, B, C, D лежат на эллипсе с центром O, причем площади секторов AOB и COD равны. Доказать, что площади треугольников AOB и COD также равны.

12.36. Точки A и B лежат на эллипсе с центром O, длины большой и малой полуосей которого равны a и b

соответственно. Найти площадь сектора AOB, если угол AOB равен φ, $0 < \varphi \leqslant \pi$, а точки A и B симметричны относительно большой оси эллипса.

Координатная запись линейных и аффинных преобразований плоскости (12.37—12.52; система координат — общая декартова)

12.37. Записать формулы, задающие данное преобразование плоскости:

1) гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом k;

2) гомотетия с центром в точке $M(x_0, y_0)$ и коэффициентом k;

3) центральная симметрия относительно точки $M(x_0, y_0)$;

4) параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$.

12.38. Аффинное преобразование плоскости задается формулами $x^* = 3x + 2y - 6$, $y^* = 4x - 3y + 1$. Найти образы:

1) точек $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$, $E(1, 1)$, $M(-1, 5)$;

2) прямых $y = 0$, $x = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$.

12.39. Аффинное преобразование плоскости задается формулами $x^* = 2x + 3y - 1$, $y^* = -3x - 4y + 2$. Найти прообразы:

1) точек $O(0, 0)$, $A(-1, 2)$, $B(4, -5)$;

2) прямых $y = 0$, $x = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

12.40. Записать формулы, задающие аффинное преобразование плоскости, переводящее точки A, B, C соответственно в A^*, B^*, C^*:

1) $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $A^*(-3, 5)$, $B^*(4, -3)$, $C^*(0, 0)$;

2) $A(3/7, 1)$, $B(1, 1/4)$, $C(2, -1)$, $A^*(-4, 2)$, $B^*(-1, 6)$, $C^*(4, 13)$;

3) $A(1, 0)$, $B(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $C(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, $A^* = B$, $B^* = C$, $C^* = A$;

4) $A(1, 2)$, $B(-7, 4)$, $C(3, -6)$; A^*, B^*, C^* — середины сторон треугольника ABC, противолежащие вершинам A, B, C соответственно.

12.41. Найти всевозможные линейные преобразования плоскости, переводящие точки A, B, C соответственно в A^*, B^*, C^*, если такие преобразования существуют:

1) $A(1, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(0, 3)$, $A^*(0, 0)$, $B^*(1, 0)$, $C^*(0, 4)$;

2) $A(-2, 0)$, $B(2, -1)$, $C(0, 4)$, $A^*(-2, 1)$, $B^*(2, 1)$, $C^*(0, 1)$;

3) $A(2, 0)$, $B(3, -1)$, $C(4, -2)$, $A^*(2, 1)$, $B^*(-2, -1)$, $C^*(-6, -3)$;

4) $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(1, -2)$, $A^*(-1, -1)$, $B^*(0, 0)$, $C^*(1, 1)$.

12.42. Найти все неподвижные точки аффинного преобразования, заданного формулами:

1) $x^* = 7x - 3y$, $y^* = x + y$;
2) $x^* = -5x + y$, $y^* = 6x$;
3) $x^* = -5x + y$, $y^* = 6x + 1$;
4) $x^* = 2x - y + 3$, $y^* = -2x + 2y - 6$;
5) $x^* = 4x + 3y - 1$, $y^* = -3x - 2y + 1$;
6) $x^* = x$, $y^* = y$.

12.43. Найти инвариантные прямые линейного преобразования, заданного формулами:

1) $x^* = 2x + 3y$, $y^* = -y$;
2) $x^* = -x + y$, $y^* = x - y$;
3) $x^* = y - 9$, $y^* = 9x + 1$;
4) $x^* = y$, $y^* = -x + 1$;
5) $x^* = 2x + y - 3$, $y^* = 2x + 3y - 6$;
6) $x^* = 5x + 3y + 1$, $y^* = -3x - y$;
7) $x^* = 3x - 2y + 5$, $y^* = 2x - y + 5$.

12.44. Доказать, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

линейного преобразования, заданного формулами

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1,\quad y^* = a_2x + b_2y + c_2,$$

не зависит от выбора системы координат.

12.45. Точки A, B, C имеют в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ координаты $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ соответственно, а в системе координат O^*, $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$ — координаты $(1, -1)$, $(-3, 2)$, $(0, 1)$ соответственно. Записать формулы, задающие в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ аффинное преобразование f такое, что $f(O) = O^*$, $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1^*$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2^*$.

12.46. Даны формулы перехода от системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ к системе O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Записать формулы, задающие в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ аффинное преобразование f такое, что $f(O) = O'$, $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1'$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2'$:

1) $x = x' + y' - 2$, $y = 2x' - y' + 3$;

2) $x = 3x' - 4y' - 5$, $y = 4x' + 3y' + 1$.

12.47. Записать формулы, задающие аффинное преобразование:

1) переводящее прямые $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ соответственно в прямые $3x + 2y - 3 = 0$, $2x + 3y + 1 = 0$, а точку $A(1, 1)$ — в точку $B(-1, -2)$;

2) переводящее прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно в ось ординат и ось абсцисс, а точку $A(x_0, y_0)$ — в точку $B(1, 1)$ (точка A не лежит на данных прямых).

12.48. Дано аффинное преобразование $x^* = 2x + 3y$, $y^* = 3x + 5y$. Составить уравнение образа кривой:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 1$; 3) $xy = 2$;

4) $y^2 = -6x$;

5) $(3x + 4y - 1)(4x - 3y + 1) = 0$;

6) $(x + y - 1)(x + y + 1) = 2$.

12.49. Дано аффинное преобразование $x^* = -x + 5y + 1$, $y^* = 3x - 2y - 1$. Составить уравнения прообраза кривой:

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$;

3) $(y + 1)^2 = 8(x - 1)$;

4) $(x + y - 1)(x - y - 1) = 1$;

5) $(x + 2y - 2)(x + 2y + 2) = 0$.

12.50. 1) Записать формулы аффинного преобразования первого рода, переводящего эллипс $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ в себя так, что точка $A\left(1, \sqrt{3}/2\right)$ переходит в точку $B(-2, 0)$.

2) Решить такую же задачу для аффинного преобразования второго рода.

12.51. Записать формулы аффинного преобразования, переводящего гиперболу $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в себя так, что точка $A(5, 4)$ переходит в точку $B\left(\sqrt{5}, 0\right)$.

12.52. Найти аффинное преобразование, если оно переводит параболу $x^2 = 4y$ в себя и:

1) точка $A_1(2, 1)$ переходит в точку $B_1(4, 4)$, а точка $A_2(1, 1/4)$ — в точку $B_2(3, 9/4)$;

2) определитель преобразования равен 1.

К о о р д и н а т н а я   з а п и с ь   а ф ф и н н ы х   п р е о б р а з о в а н и й
(12.53—12.62; система координат прямоугольная)

12.53. Написать формулы, задающие данные преобразования плоскости:

1) поворот на угол φ вокруг начала координат;

2) поворот на угол φ вокруг точки $M(x_0, y_0)$;

3) ортогональное проектирование на ось абсцисс;

4) ортогональное проектирование на прямую $x - 3y + 1 = 0$;

5) симметрия относительно оси ординат;

6) симметрия относительно прямой $3x + 4y - 1 = 0$;

7) сжатие к оси абсцисс с коэффициентом $\lambda > 0$;

8) сжатие к прямой $x + y - 2 = 0$ с коэффициентом $1/3$;

9) сжатие к прямой $2x - y + 5 = 0$ с коэффициентом 2.

12.54. Какие из преобразований задачи 12.53 являются:

1) аффинными; 2) ортогональными?

12.55. Охарактеризовать геометрически преобразования:

1) $x^* = x,\ y^* = 3y$; 2) $x^* = 2x,\ y^* = 2y$;

3) $x^* = x - 1,\ y^* = y + 1$;

4) $x^* = -x,\ y^* = y$; 5) $x^* = -x,\ y^* = -y$;

6) $x^* = -y,\ y^* = x$; 7) $x^* = y,\ y^* = x$;

8) $x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y),\quad y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$;

9) $x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y),\quad y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$;

10) $x^* = 3x - 6,\ y^* = 3y + 2$;

11) $x^* = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1,\quad y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1$;

12) $x^* = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1,\quad y^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3}$;

13) $x^* = -x - 2,\quad y^* = -y + 2$;

14) $x^* = \frac{1}{10}(21x + 12y),\ y^* = \frac{1}{10}(12x + 14y)$;

15) $x^* = \frac{1}{3}(2x + y - 2),\ y^* = \frac{1}{3}(x + 2y + 2)$;

16) из задачи 12.40, 3);

17) из задачи 12.41, 2).

В 16) и 17) система координат также прямоугольная.

12.56. При повороте плоскости на угол $3\pi/4$ вокруг точки $A(0, 1)$ найти:

1) образы точек $O(0, 0)$ и $B(1, 0)$;

2) прообразы точек O и B;

3) образы прямых $x = 0$ и $y = x$;

4) прообразы прямых $y = 0$ и $y = -x$.

12.57. На какой угол нужно повернуть прямую $3x - 4y + 25 = 0$ вокруг точки $M(-7, 1)$, чтобы ее образ:

1) был параллелен оси абсцисс;

2) касался окружности $x^2 + y^2 = 25/2$?

12.58. Центром квадрата является точка $P(-1, 2)$, а одна из сторон задана уравнением $x + 2y = 0$. Составить уравнения остальных сторон квадрата.

12.59. Центром правильного шестиугольника является точка $P\left(\sqrt{3}, 3/2\right)$, а одна из сторон задана уравнением $y = \sqrt{3}\,x$. Составить уравнения остальных сторон шестиугольника.

12.60. Вычислить:

1) площадь параллелограмма, стороны которого заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_1x + b_1y + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + d_2 = 0$.

2) (р) площадь треугольника, стороны которого заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$.

12.61. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-7, 13)$ и образующей с прямыми $2x + y + 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ треугольник площади 9.

12.62. Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$. Составить уравнение окружности:

1) симметричной данной окружности относительно прямой $x + y - 6 = 0$;

2) полученной из данной окружности поворотом на угол $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ относительно начала координат;

3) полученной из данной окружности в результате гомотетии с центром $A(6, 0)$ и коэффициентом 4.

Операции с линейными преобразованиями. Структура ортогональных и аффинных преобразований (12.63—12.88)

Система координат, если не оговорено, считается прямоугольной.

12.63. Записать формулы, задающие произведения fg и gf данных аффинных преобразований (система координат общая декартова):

1) f: $x^* = y$, $y^* = x$; g: $x^* = 3x + 4y + 1$, $y^* = -7x + 5y - 2$;

2) f: $x^* = 4x - 2y + 6$, $y^* = -3x + y$; g: $x^* = x - y$, $y^* = 4x + y + 1$.

12.64. Записать формулы, задающие произведение fg данных аффинных преобразований f и g, и охарактеризовать это произведение геометрически (система координат общая декартова):

1) f — параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}(-1, 1)$; g — гомотетия с центром в точке $M(1, 2)$ и коэффициентом 3;

2) f — гомотетия с центром в точке $M(2, -1)$ и коэффициентом $-1/2$; g — центральная симметрия относительно точки $N(3, 1)$.

12.65. Записать формулы, задающие преобразование, обратное к данному (система координат общая декартова), если такое преобразование существует:

1) $x^* = y + 3$, $y^* = -x + 3y - 1$;

2) $x^* = 3x + 4y + 8$, $y^* = 5x + 7y + 6$;

3) $x^* = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}$, $y^* = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5}$;

4) $x^* = 3x + 5y - 4$, $y^* = 5x + 9y + 6$;

5) $x^* = 3x - 24$, $y^* = -x + 4y + 12$;

6) $x^* = 2x - y$, $y^* = -4x + 2y$;

7) $x^* = 4x - 3y$, $y^* = 3x + 4y$;

8) $x^* = 4x + 3y$, $y^* = 3x - 4y$;

9) $x^* = r(x\cos\varphi - y\sin\varphi)$,
$y^* = r(x\sin\varphi + y\cos\varphi)$ $(r > 0)$;

10) $x^* = r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)$,
$y^* = r(x\sin\varphi - y\cos\varphi)$ $(r > 0)$.

12.66. Записать формулы, задающие n-ю степень данного преобразования (n — натуральное число):

1) $x^* = x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y^* = x\sin\alpha + y\cos\alpha$;

2) $x^* = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y^* = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$;

3) $x^* = x + y$, $y^* = y$; 4) $x^* = 3x$, $y^* = x + 2y$.

12.67. Записать формулы, задающие произведение fg данных аффинных преобразований f и g:

1) f — гомотетия с центром в точке $M(0, 1)$ и коэффициентом 5, g — симметрия относительно прямой $x - 2y - 3 = 0$;

2) f — сжатие с коэффициентом 3 к прямой $y = x$, g — сжатие с коэффициентом 1/3 к прямой $x + y + 1 = 0$;

3) f — гомотетия с центром в точке $M(2, -1)$ и коэффициентом 4, g — поворот вокруг точки $A(1, 1)$ на угол $\pi/6$;

4) f — сжатие с коэффициентом 1/2 к прямой $2x + 3y = 0$, g — гомотетия с центром в точке $M(1, 0)$ и коэффициентом $-3/2$.

12.68. Записать формулы и охарактеризовать геометрически преобразования, обратные к преобразованиям задачи 12.55, 1)—15).

12.69. Записать формулы, задающие произведения fg и gf ортогональных преобразований f и g:

1) f — поворот на угол $\pi/2$ вокруг точки $A(1, 1)$, g — параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}(-1, -1)$;

2) f — симметрия относительно прямой $x - 2y - 5 = 0$, g — параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}(2, 1)$;

3) f — поворот на угол $2\pi/3$ вокруг начала координат, g — симметрия относительно прямой $y = 2$;

4) f — симметрия относительно прямой $x - y - 1 = 0$, g — симметрия относительно прямой $x + y - 1 = 0$;

5) f — симметрия относительно прямой $3x - y - 1 = 0$, g — симметрия относительно прямой $3x - y + 1 = 0$;

6) f — поворот на угол $\arcsin\frac{4}{5}$ вокруг точки $A(1, 0)$, g — поворот на угол $\arccos\frac{4}{5}$ вокруг точки $B(-1, 0)$;

7) f — поворот на угол 30° вокруг точки $A(1, 0)$, g — поворот на угол 330° вокруг точки $B(0, 1)$.

12.70. 1) Доказать, что произведение поворота плоскости вокруг некоторой точки и параллельного переноса является поворотом вокруг некоторой другой точки.

2) Найти координаты неподвижной точки P преобразования, заданного формулами (3) из введения к § 12 при $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что преобразование является поворотом на угол φ вокруг точки P.

3) Охарактеризовать геометрически преобразования fg и gf задачи 12.69,1).

12.71. 1) Доказать, что преобразование, заданное формулами

$$x^* = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y^* = x\sin\varphi - y\cos\varphi,$$

является симметрией относительно некоторой прямой, проходящей через начало координат. Найти уравнение этой прямой.

2) При каком условии преобразование, заданное формулами (4) из введения к § 12, является симметрией относительно некоторой прямой? Найти уравнение этой прямой.

12.72. 1) Доказать формулы (3), (4) введения к § 12.

2) Доказать, что любое ортогональное преобразование первого рода является либо параллельным переносом на некоторый вектор, либо поворотом вокруг некоторой точки.

3) Доказать, что любое ортогональное преобразование второго рода является произведением двух перестановочных преобразований — симметрии относительно некоторой прямой и параллельного переноса на некоторый вектор *(вектор переноса)*, коллинеарный этой прямой *). Найти вектор переноса **a** для преобразования, определенного формулой (4) введения к § 12.

12.73. Охарактеризовать геометрически преобразование, заданное формулами:

1) $x^* = x + 1$, $y^* = -y$;

2) $x^* = x + 1$, $y^* = -y + 2$;

3) $x^* = x$, $y^* = -y + 2$.

12.74. Выяснить, какого рода ортогональными преобразованиями являются преобразования f, g, fg и gf задачи 12.69. Охарактеризовать геометрически (в смысле задачи 12.72) преобразования fg и gf задач 12.69, 3) и 6).

12.75. Записать формулы ортогонального преобразования первого рода, переводящего точку A (2, 0) в точку $A^*(1+\sqrt{2},\ 1)$, а точку B (2, 2) — в точку $B^*(1,\ 1+\sqrt{2})$. Доказать, что это преобразование является поворотом вокруг своей единственной неподвижной точки. Найти координаты этой точки и угол поворота.

12.76. Записать формулы ортогонального преобразования второго рода, переводящего точку A (2, 0) в точку $A^*(1+\sqrt{2},\ 1)$, а точку B (2, 2) — в точку $B^*(1,\ 1+\sqrt{2})$. Доказать, что это преобразование является произведением симметрии относительно некоторой прямой и параллельного переноса на вектор, коллинеар-

---

*) Если вектор переноса отличен от **0**, то преобразование называют *скользящей симметрией*.

ный этой прямой. Найти координаты вектора переноса и составить уравнение оси симметрии.

12.77. 1) Доказать, что произведение двух преобразований, каждое из которых — симметрия относительно некоторой прямой, является параллельным переносом, если эти прямые параллельны, и поворотом, если прямые не параллельны.

2) Охарактеризовать геометрически преобразования fg и gf задачи 12.69, 4).

2) Тот же вопрос для задачи 12.69, 5).

12.78. 1) Доказать, что произведение двух поворотов вокруг различных точек на углы, сумма которых равна 2π, является параллельным переносом.

2) Охарактеризовать геометрически преобразования fg и gf задачи 12.69, 7).

12.79. Доказать, что квадрат ортогонального преобразования второго рода является параллельным переносом.

12.80. Представить данное преобразование в виде произведения нескольких преобразований, каждое из которых является осевой симметрией:

1) поворот на угол φ вокруг точки M;

2) параллельный перенос на вектор **a**;

3) произвольное ортогональное преобразование второго рода.

12.81. Найти координаты векторов, задающих главные направления данного аффинного преобразования:

1) $x^* = 3x,\ y^* = 4y$; 2) $x^* = -3x,\ y^* = 4y$;

3) $x^* = 3x,\ y^* = -3y$;

4) $x^* = x - y,\ y^* = x + y$;

5) $x^* = x,\ y^* = -x + y$;

6) $x^* = 3y - 2,\ y^* = -4x$;

7) $x^* = 2x + 5y,\ y^* = -11x + 10y$;

8) $x^* = -4x + 7y,\ y^* = 8x + y$;

9) $x^* = -4x + 8y,\ y^* = -7x - 11y$;

10) $x^* = x + \sqrt{3}y + 2,\ y^* = -3\sqrt{3}\,x + 3y + \sqrt{3}$.

12.82. Представить каждое из аффинных преобразований задачи 12.81 в виде произведения $f = h_2h_1g$, где g — ортогональное преобразование, а h_1 и h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым.

12.83. Разложить в произведение hg, где g — ортогональное преобразование, а h — гомотетия, каждое из преобразований f и f^{-1} задачи:

1) 12.65, 7); 2) 12.65, 8); 3) 12.65, 9); 4) 12.65, 10).

12.84. Доказать, что преобразование подобия представляет собой произведение ортогонального преобразования и гомотетии.

12.85. Найти собственные значения и координаты отвечающих им собственных векторов линейного преобразования (система координат общая декартова), если:

1) $x^* = 7x,\ y^* = -x + 5y$;
2) $x^* = 2x + y,\ y^* = 2x + 3y$;
3) $x^* = 5x - 4y,\ y^* = 4x - 5y$;
4) $x^* = 8x + 17y,\ y^* = 17x + 8y$;
5) $x^* = 2x,\ y^* = 2y$;
6) $x^* = x - y,\ y^* = -x + y$;
7) $x^* = 11x - 5y,\ y^* = 12x - y$;
8) $x^* = 7x - 2y,\ y^* = 8x - y$.

12.86. Доказать, что аффинное преобразование, заданное формулами $x^* = ax + by$, $y^* = bx + cy$, имеет два взаимно перпендикулярных собственных вектора.

12.87. Аффинное преобразование f задается формулами $x^* = a_1x + b_1y$, $y^* = a_2x + b_2y$, а преобразование f_1 — формулами $x^* = a_1x + a_2y$, $y^* = b_1x + b_2y$. Доказать, что главные направления преобразования f совпадают с направлениями собственных векторов преобразования f_1f.

12.88. Каждая точка плоскости $M(x, y)$ отождествляется с комплексным числом $z = x + iy$. Доказать, что:

1) преобразование $z \mapsto \operatorname{Re} z = x$ является ортогональным проектированием на ось абсцисс;

2) преобразование $z \mapsto \bar{z} = x - iy$ является симметрией относительно оси абсцисс;

3) преобразование $z \mapsto z + z_0$, где $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированное комплексное число, является параллельным переносом на вектор a (x_0, y_0);

4) преобразование $z \mapsto az$, где a — действительное число, не равное нулю, является гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом a;

5) преобразование $z \mapsto (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, z = e^{i\varphi}z$ (φ — фиксированное действительное число) является поворотом на угол φ вокруг начала координат.

12.89. Выяснить геометрический смысл преобразования f комплексной плоскости (см. задачу 12.88):

1) $f(z) = az$, где $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$;

2) $f(z) = az + b$, где a, b — комплексные числа, $a \neq 0$.

13. Понятие о группах

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *бинарная алгебраическая операция, группа, единичный элемент, обратный элемент, абелева группа, циклическая группа, подгруппа, гомоморфизм, изоморфизм групп, нормальная подгруппа.*

Непустое множество $\mathcal{G}$ называется *группой*, если в $\mathcal{G}$ задана бинарная алгебраическая операция (чаще всего называемая *умножением*), т. е. для каждой упорядоченной пары (a, b) элементов из $\mathcal{G}$ определен единственный элемент $c = a \cdot b \in \mathcal{G}$ — их произведение в указанном порядке, причем выполнены следующие аксиомы:

1. Умножение *ассоциативно*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для любых a, b, $c \in \mathcal{G}$.

2. В $\mathcal{G}$ существует *единичный элемент* e такой, что $e \cdot a = a \cdot e = a$ для всех $a \in G$.

3. Для любого $a \in G$ существует *обратный элемент* $a^{-1} \in \mathcal{G}$ такой, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Группа $\mathcal{G}$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если $ab = ba$ для любых a, $b \in G$. В абелевой группе операцию иногда называют *сложенигм* и сумму обозначают $a + b$.

Число элементов группы $\mathcal{G}$ (если оно конечно) называется *порядком группы* $\mathcal{G}$ и обозначается $|\mathcal{G}|$. Если множество $\mathcal{G}$ бесконечно, то группа $\mathcal{G}$ называется *бесконечной*.

Целые степени элемента $a \in \mathcal{G}$ определяются рекуррентно: $a^0 = e$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ для натурального n, $a^n = (a^{-1})^{-n}$ для целого отрицательного n.

Наименьшее натуральное число n, для которого $a^n = e$ (если оно существует), называется *порядком* (*периодом*) *элемента* a. Если $a^n \neq e$ для любого n, то a считается элементом *бесконечного порядка*.

Группа $\mathcal{G}$ называется *циклической группой с образующим элементом* a, если все элементы группы $\mathcal{G}$ являются целыми степенями элемента a.

Подмножество $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$ называется *подгруппой* группы $\mathcal{G}$, если $\mathcal{H}$ является группой относительно операции, заданной в $\mathcal{G}$. Подгруппа $\mathcal{H}$ группы $\mathcal{G}$ называется *нормальной* в $\mathcal{G}$ (или *нормальным делителем* группы $\mathcal{G}$), если для любых элементов $h \in \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{G}$ элемент $g^{-1}hg$ также лежит в $\mathcal{H}$. Элемент группы вида $g^{-1}hg$ называется *сопряженным* с элементом h с помощью g.

Две группы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ (с операциями $\cdot$ и $*$ соответственно) называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества $\mathcal{G}_1$ на множество $\mathcal{G}_2$ такое, что для любых двух элементов a и b из $\mathcal{G}_1$ выполняется равенство

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b). \tag{1}$$

Произвольное отображение $f\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, удовлетворяющее условию (1), называется *гомоморфизмом* группы $\mathcal{G}_1$ в группу $\mathcal{G}_2$. *Ядром* гомоморфизма f (обозначается $\operatorname{Ker} f$) называется множество всех элементов $a \in G_1$ таких, что $f(a) = e$ — единичный элемент группы G_2.

Пусть $\mathcal{H}$ — подгруппа в $\mathcal{G}$. *Левым смежным классом элемента* $g \in \mathcal{G}$ *по подгруппе* $\mathcal{H}$ называется множество

$$g\mathcal{H} = \{gh \mid h \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{G}.$$

Аналогично определяется *правый смежный класс*

$$\mathcal{H}g = \{hg \mid h \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{G}.$$

В общем случае $g\mathcal{H} \neq \mathcal{H}g$. Если подгруппа $\mathcal{H}$ нормальна в $\mathcal{G}$, то $g\mathcal{H} = \mathcal{H}g$ для всех $g \in \mathcal{G}$. В этом случае множество $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ смежных классов группы $\mathcal{G}$ по подгруппе $\mathcal{H}$ является группой относительно операции умножения классов, определяемой равенством

$$(a\mathcal{H})\cdot(b\mathcal{H}) = (ab)\,\mathcal{H}$$

(см. задачу 13.26).

Эта группа называется *факторгруппой группы* $\mathcal{G}$ *по нормальной подгруппе* $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{S}_n$ — совокупность всех взаимно однозначных преобразований множества $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$. Каждое преобразование $\sigma \in \mathcal{S}_n$ определяет *перестановку* $(i_1, \ldots, i_n)$ чисел $(1, \ldots, n)$. Его удобно изображать двухрядным символом

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

который также называется *перестановкой* (или *подстановкой*) *степени* n (запись означает, что $\sigma(k) = i_k$, $k = 1, \ldots, n$). Для перестановок умножение определяется так же, как и для любых преобразований. Относительно операции умножения множество $\mathcal{S}_n$ образует группу — симметрическую группу степени n.

13.1. Образует ли группу относительно операции умножения данное множество преобразований плоскости:

1) множество всех параллельных переносов;

2) множество всех параллельных переносов на векторы, коллинеарные данному;

3) множество всех параллельных переносов на ненулевые векторы;

4) множество всех параллельных переносов на векторы с началом в фиксированной точке A, концы которых лежат на данной прямой l;

5) множество всех поворотов;

6) множество всех поворотов вокруг фиксированной точки;

7) множество всех ортогональных преобразований;

8) множество всех ортогональных преобразований первого рода;

9) множество всех ортогональных преобразований второго рода;

10) множество всех ортогональных преобразований, имеющих общую неподвижную точку A;

11) множество всех аффинных преобразований;

12) множество всех аффинных преобразований первого рода;

13) множество всех аффинных преобразований второго рода;

14) множество всех линейных преобразований;

15) множество всех сжатий к данной прямой;

16) множество, состоящее из двух преобразований — тождественного и симметрии относительно данной прямой;

17) множество поворотов плоскости вокруг центра правильного n-угольника, совмещающих этот n-угольник с самим собой (вращения правильного n-угольника);

18) множество всех инверсий плоскости с общим центром;

19) множество всех преобразований подобия?

13.2. Образует ли группу относительно операции умножения множество преобразований плоскости, заданных формулами:

1) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y$; 2) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y,\ \lambda \neq 0$;

3) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y,\ \lambda > 0$;

4) $x^* = \lambda x,\ y^* = \lambda y,\ \lambda < 0$;

5) $x^* = \lambda x,\ y^* = \frac{1}{\lambda} y,\ \lambda \neq 0$;

6) $x^* = \lambda y,\ y^* = \frac{1}{\lambda} x,\ \lambda \neq 0$;

7) $x^* = \lambda x,\ y^* = y,\ \lambda \neq 0$;

8) $x^* = x,\ y^* = \lambda x + y$;

9) $x^* = ax + by,\ y^* = cx + dy$;

10) $x^* = ax + by,\ y^* = cx + dy,\ ad - bc \neq 0$;

11) $x^* = ax + by,\ y^* = bx + cy,\ ac - b^2 \neq 0$;

12) $x^* = ax - by,\ y^* = bx + ay,\ a^2 + b^2 \neq 0$;

13) $x^* = r\,(x \cos\varphi - y \sin\varphi)$,
$y^* = r\,(x \sin\varphi + y \cos\varphi),\ r > 0$;

14) $x^* = a_1x + b_1x + c_1$, $y^* = a_2x + b_2y + c_2$, $a_1b_1 - a_2b_2 = 1$?

13.3. Образует ли группу относительно операции умножения:

1) множество всех действительных чисел;

2) множество всех ненулевых действительных чисел;

3) множество всех положительных действительных чисел;

4) множество всех отрицательных действительных чисел;

5) множество всех положительных рациональных чисел;

6) множество всех целых положительных чисел;

7) множество всех ненулевых комплексных чисел;

8) множество всех комплексных чисел;

9) множество всех комплексных чисел, по модулю равных 1;

10) множество всех ненулевых чисто мнимых комплексных чисел;

11) множество из двух чисел 1 и -1;

12) множество комплексных корней n-й степени из 1 (n — натуральное число)?

13.4. Образует ли группу относительно операции сложения:

1) множество всех действительных чисел;

2) множество всех положительных действительных чисел;

3) множество всех неотрицательных действительных чисел;

4) множество всех рациональных чисел;

5) множество всех целых чисел;

6) множество всех целых положительных чисел;

7) множество всех четных чисел;

8) множество всех нечетных чисел;

9) множество всех чисел, делящихся нацело на 3;

10) множество всех комплексных чисел;

11) множество всех чисто мнимых комплексных чисел;

12) множество из одного числа 0?

13.5. Образует ли группу множество:

1) всех векторов плоскости относительно операции сложения;

2) всех векторов пространства относительно операции сложения;

3) всех векторов пространства относительно операции векторного произведения;

4) всех ненулевых векторов пространства относительно операции векторного произведения;

13.6. Доказать, что в любой группе:

1) единичный элемент e единствен;

2) для любого элемента a обратный элемент a^{-1} единствен;

3) равенство $ax = b$ равносильно $x = a^{-1}b$, а равенство $xa = b$ равносильно $x = ba^{-1}$;

4) для любых элементов a и b выполняется равенство $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

13.7. Доказать, что если квадрат любого элемента группы равен единичному элементу, то группа абелева.

13.8. Доказать, что все аффинные преобразования плоскости, при которых данный треугольник переходит в себя, образуют неабелеву группу. Найти порядок этой группы.

13.9. Доказать, что две группы изоморфны:

1) группа действительных чисел относительно операции сложения и группа параллельных переносов на векторы, коллинеарные данному вектору, относительно операции умножения;

2) группа комплексных чисел, по модулю равных 1, относительно операции умножения и группа поворотов плоскости вокруг фиксированной точки относительно операции умножения;

3) группа комплексных чисел относительно операции сложения и группа параллельных переносов плоскости относительно операции умножения;

4) группа ненулевых действительных чисел относительно операции умножения и группа гомотетий с центром в данной точке относительно операции умножения (коэффициент гомотетии отличен от нуля);

5) группа ненулевых комплексных чисел относительно операции умножения и группа преобразований плоскости, заданных формулами $x^* = ax - by$, $y^* = bx + ay$, $a^2 + b^2 > 0$, относительно операции умножения;

6) группа действительных чисел относительно операции сложения и группа положительных действительных чисел относительно операции умножения;

7) группы целых чисел и четных чисел относительно операции сложения;

8) группа вращений правильного n-угольника относительно операции умножения и группа комплексных кор-

ней n-й степени из 1 относительно операции умножения;

9) любые две группы, содержащие два элемента;

10) любые две группы, содержащие три элемента.

13.10. Доказать, что существуют только две различные (с точностью до изомофизма) группы, содержащие четыре элемента. Привести примеры для обоих случаев.

13.11. Доказать, что данная группа является циклической и найти ее образующий элемент:

1) группа всех целых чисел относительно сложения;

2) группа $n\mathbb{Z}$ целых чисел, кратных данному натуральному числу n, относительно сложения;

3) группа комплексных корней n-й степени из 1 относительно умножения;

4) группа вращений правильного n-угольника.

13.12. Найти все подгруппы групп из задачи 13.11.

13.13. Доказать, что:

1) всякая подгруппа циклической группы сама циклическая;

2) гомоморфный образ циклической группы является циклической группой.

13.14. Доказать, что все конечные циклические группы одинакового порядка изоморфны друг другу.

13.15. Доказать, что всякая бесконечная циклическая группа изоморфна группе целых чисел.

13.16. Показать, что:

1) группа всех ортогональных преобразований, сохраняющих данный правильный n-угольник (называемая его группой симметрий), содержит $2n$ преобразований;

2) группа вращений правильного n-угольника является ее нормальной подгруппой.

13.17. Пусть $|\mathcal{G}| = 2n$ и $\mathcal{H}$ — подгруппа в $\mathcal{G}$ порядка n. Доказать, что $\mathcal{H}$ — нормальная подгруппа группы $\mathcal{G}$.

13.18. Пусть $\mathcal{H}$ — непустое подмножество группы $\mathcal{G}$. Доказать, что $\mathcal{H}$ является подгруппой в $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия: а) если $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$, то $h_1h_2 \in \mathcal{H}$; б) если $h \in \mathcal{H}$, то $h^{-1} \in \mathcal{H}$.

13.19. Пусть $\mathcal{H}$ — непустое подмножество группы $\mathcal{G}$, замкнутое относительно умножения (т. е. в $\mathcal{G}$ выполнено условие а) задачи 13.18). Доказать, что в каждом из следующих случаев $\mathcal{H}$ будет подгруппой в $\mathcal{G}$:

1) $\mathcal{H}$ — конечное множество;

2) все элементы из $\mathcal{H}$ имеют конечные порядки.

13.20. Пусть $\mathscr{H}$ — подгруппа группы $\mathscr{G}$. Доказать, что:

1) два элемента a, b группы $\mathscr{G}$ тогда и только тогда принадлежат одному левому смежному классу по подгруппе $\mathscr{H}$, когда $a^{-1}b \in \mathscr{H}$;

2) группа $\mathscr{G}$ является объединением попарно непересекающихся левых (правых) смежных классов по $\mathscr{H}$;

3) между любыми двумя смежными классами по $\mathscr{H}$ существует взаимно однозначное соответствие.

13.21. 1) Доказать теорему Лагранжа: порядок конечной группы делится на порядок любой ее подгруппы.

2) Доказать, что порядок конечной группы делится на порядок любого ее элемента.

3) Доказать, что группа простого порядка является циклической.

13.22. Пусть $\mathscr{G}$ — группа симметрий правильного треугольника (см. задачу 13.16), а $\mathscr{H}$ — ее подгруппа, состоящая из тождественного преобразования ι и симметрии относительно одной из высот треугольника. Проверить, что $\mathscr{H}$ не является нормальной подгруппой в $\mathscr{G}$, и найти разбиение группы $\mathscr{G}$ на левые и правые смежные классы по $\mathscr{H}$.

13.23. Пусть $f\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ — гомоморфизм группы $\mathscr{G}$ в группу $\mathscr{H}$. Доказать, что:

1) $f(\mathscr{G})$ является подгруппой в $\mathscr{H}$;

2) $\operatorname{Ker} f$ является нормальной подгруппой в $\mathscr{G}$;

3) отображение f является вложением тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

13.24. Доказать, что:

1) параллельные переносы образуют нормальную подгруппу группы ортогональных преобразований плоскости;

2) преобразования, имеющие неподвижную точку, образуют подгруппу группы ортогональных преобразований плоскости, но она не является нормальной.

13.25. Доказать, что:

1) если конечное множество аффинных преобразований плоскости образует группу, то все преобразования из этого множества имеют общую неподвижную точку;

2) всякая конечная группа ортогональных преобразований плоскости является группой симметрий или группой вращений некоторого правильного многоугольника.

13.26. Доказать утверждение:

1) Для того чтобы подгруппа $\mathscr{H}$ группы $\mathscr{G}$ была нормальной в $\mathscr{G}$, необходимо и достаточно, чтобы $g\mathscr{H} = \mathscr{H}g$ для любого элемента $g \in \mathscr{G}$.

2) Пусть $\mathscr{H}$ — нормальная подгруппа в $\mathscr{G}$. Тогда произведение левых смежных классов не зависит от выбора задающих их элементов, и множество $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ является группой.

13.27. Пусть f: $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ — гомоморфизм групп. Доказать, что группа $f(\mathscr{G})$ изоморфна факторгруппе $\mathscr{G}/\operatorname{Ker} f$.

13.28. Найти (с точностью до изоморфизма) факторгруппу $\mathscr{G}/\mathscr{H}$, если:

1) $\mathscr{G}$ — группа всех комплексных чисел, $\mathscr{H}$ — группа всех вещественных чисел. Операция в обеих группах — сложение.

2) $\mathscr{G}$ — группа ненулевых комплексных чисел, $\mathscr{H}$ — группа положительных комплексных вещественных чисел. Операция в обеих группах — умножение.

3) $\mathscr{G}$ — группа ненулевых комплексных чисел с операцией умножения, $\mathscr{H}$ — подгруппа чисел, по модулю равных 1.

4) $\mathscr{G}$ — группа всех вещественных чисел с операцией сложения, $\mathscr{H}$ — подгруппа целых чисел.

5) $\mathscr{G} = \mathbb{Z}$ — группа целых чисел, $\mathscr{H} = n\mathbb{Z}$ — подгруппа чисел, кратных данному натуральному числу n.

6) $\mathscr{G}$ — группа всех ортогональных преобразований плоскости первого рода, $\mathscr{H}$ — подгруппа параллельных переносов.

13.29. Пусть $\mathscr{C}_n$ — группа корней степени n из 1 (см. задачу 13.3, 12)). Определить, сколько существует гомоморфизмов групп:

1) $\mathscr{C}_2$ в $\mathscr{C}_4$; 2) $\mathscr{C}_6$ в $\mathscr{C}_3$; 3) $\mathscr{C}_5$ в $\mathscr{C}_5$;
4) $\mathscr{C}_3$ в $\mathscr{C}_5$.

13.30. 1) Доказать, что множество $\mathscr{S}_n$ всех перестановок степени n является группой относительно операции умножения преобразований. Найти порядок этой группы.

2) Доказать, что группы $\mathscr{S}_n$ некоммутативны при $n \geqslant 3$.

13.31. Вычислить:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

13.32. Найти:

1) все подгруппы в $\mathscr{S}_3$;

2) все нормальные подгруппы в $\mathscr{S}_4$.

13.33. Доказать, что все четные перестановки образуют нормальную подгруппу $\mathscr{A}_n$ в $\mathscr{S}_n$, и найти ее порядок.

13.34. Доказать, что группа четных перестановок степени 4 не имеет подгрупп порядка 6 (и таким образом, теорема, обратная теореме Лагранжа — см. задачу 13.21, 1), — неверна).

13.35. Пусть $\mathscr{V}$ — нециклическая подгруппа четвертого порядка в $\mathscr{S}_4$. Доказать, что:

1) $\mathscr{V} \subset \mathscr{A}_4$; 2) $\mathscr{V}$ нормальна в $\mathscr{S}_4$;

3) $\mathscr{S}_4/\mathscr{V} \cong \mathscr{S}_3$.

Г Л А В А VI

МАТРИЦЫ

§ 14. Определители

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *матрица, строка матрицы, столбец матрицы, перестановка, четная (нечетная) перестановка, определитель (детерминант) квадратной матрицы, минор матрицы, элементарные преобразования матрицы, транспонирование матрицы.* В задачах 14.33—14.44 используются и другие операции с матрицами и некоторые специальные виды матриц; соответствующие обозначения и определения даны во введении к § 15.

Квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

обозначается также через $\| a_{ij} \|$ или (a_{ij}). Элементы $a_{i1}, \dots, a_{in}$ образуют i-ю строку, элементы $a_{1j}, \dots, a_{nj}$ — j-й столбец матрицы A. Говорят, что элемент a_{ij} лежит на пересечении ее i-й строки и j-го столбца. Всюду в этой главе, кроме нескольких специально оговоренных случаев, предполагается, что элементы матриц — вещественные или комплексные числа. Определитель матрицы A обозначается через $\det A$, $|A|$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приведем основные формулы для вычисления определителей:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc; \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1. \tag{2}$$

Рекуррентные формулы:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \tag{3}$$

(*формула разложения определителя по i-й строке*),

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} \tag{4}$$

(*формула разложения определителя по j-му столбцу*). В формулах (3), (4) через M_{ik} обозначен дополнительный минор элемента a_{ik}, т. е. определитель матрицы порядка $n-1$, полученной из A вычеркиванием строки и столбца, в которых расположен элемент a_{ik}.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{N(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \tag{5}$$

— *формула полного разложения* (или *полного развертывания*) определителя, выражающая определитель матрицы n-го порядка через ее элементы. В слагаемых формулы (5) значения индексов $i_1, \dots, i_n$ образуют всевозможные перестановки чисел $1, 2, \dots, n$, а через $N(i_1, \dots, i_n)$ обозначено число нарушений порядка в перестановке $(i_1, \dots, i_n)$. Напомним, что перестановка $(i_1, \dots, i_n)$ называется четной, если число $N(i_1, \dots, i_n)$ четно, и нечетной в противном случае.

Приведем формулировку теоремы Лапласа. Минором порядка s $(s \leqslant n)$ матрицы A называется определитель матрицы, образующейся в пересечении каких-либо s строк и s столбцов матрицы A. Если эти строки имеют номера $i_1, \dots, i_s$, а столбцы — номера $j_1, \dots, j_s$, то соответствующий минор обозначается через $L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$:

$$L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_s j_1} & \dots & a_{i_s j_s} \end{vmatrix}.$$

Через $M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$ обозначаем минор, дополнительный к минору $L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$, т. е. определитель матрицы порядка $n-s$, полученной из A вычеркиванием выделенных строк и столбцов. Тогда для любого натурального числа s $(s \leqslant n)$ и любого фиксированного набора номеров строк $i_1, \dots, i_s$ таких, что $i_1 < i_2 < \dots < i_s$,

$$\det A = \sum_{(j_1, \dots, j_s)} (-1)^{i_1+j_1+\dots+i_s+j_s} L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s} M_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}, \tag{6}$$

где сумма берется по всевозможным наборам значений индексов $j_1, \dots$ $\dots, j_s$, таким, что $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_s \leqslant n$. Формулу (6) можно назвать формулой разложения определителя по данным s строкам. Аналогична формула разложения определителя по данным s столбцам:

$$\det A = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} (-1)^{i_1+j_1+\cdots+i_s+j_s} L^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_s} M^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_s}.$$

Здесь индексы $j_1, \ldots, j_s$ фиксированы, а сумма берется по всевозможным наборам значений индексов $i_1, \ldots, i_s$, таким, что $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s \leqslant n$.

Перестановки (14.1—14.3)

14.1. 1) Доказать, что, последовательно меняя местами пары соседних чисел, можно поменять местами любые два элемента перестановки, сохранив при этом расположение остальных.

2) Доказать, что четность перестановки изменится, если в ней поменять местами два элемента.

14.2. 1) Доказать, что конечное число (k) раз меняя местами пары соседних чисел, можно расположить элементы перестановки в порядке возрастания. Однозначно ли определено число k?

2) Пусть s — число нарушений порядка в перестановке. Доказать, что числа k и s имеют одинаковую четность.

3) Указать точно s последовательных перемен мест в парах соседних элементов, в результате которых все элементы перестановки будут расположены в порядке возрастания.

14.3. Последовательно меняя местами пары соседних чисел, расположить элементы следующих перестановок в порядке возрастания. Найти число нарушений порядка и определить четность перестановок.

1) $(5\ 4\ 3\ 2\ 1)$; 2) $(6\ 4\ 5\ 2\ 3\ 1)$;
3) $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 3)$; 4) $(1\ 2\ 4\ 3\ 5\ 9\ 8\ 7\ 6)$;
5) $(9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$; 6) $(4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 9\ 8\ 7\ 6)$;
7) $(n,\ n-1, \ldots, 1)$;
8) $(1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n)$;
9) $(2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1)$.

Вычисление определителей (14.4—14.32)

14.4. Вычислить определитель второго порядка:
1) $|A_5|$; 2) $|A_6|$; 3) $|A_7|$;
4) $|A_{81}|$; 5) $|A_{77}|$; 6) $|A_8|$.

14.5. Вычислить $|A_{78}|$ при $\varepsilon = e^{\pi i/3}$.

14.6. Пусть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Вычислить якобиан $\begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix}$.

14.7. Вычислить определитель третьего порядка:
1) $|A_{200}|$; 2) $|A_{201}|$; 3) $|A_{202}|$; 4) $|A_{203}|$;
5) $|A_{204}|$; 6) $|A_{205}|$; 7) $|A_{209}|$; 8) $|A_{210}|$;
9) $|A_{365}|$; 10) $|A_{364}|$; 11) $|A_{366}|$; 12) $|A_{368}|$.

14.8. Вычислить $|A_{363}|$ при $\omega = e^{2\pi i/3}$.

14.9. Пусть $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$. Вычислить якобиан $\begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\varphi & \partial x/\partial\psi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\varphi & \partial y/\partial\psi \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\varphi & \partial z/\partial\psi \end{vmatrix}$.

14.10. Решить относительно неизвестного λ уравнение:
1) $|A_{211} - \lambda E| = 0$; 2) $|A_{212} - \lambda E| = 0$;
3) $|A_{213} - \lambda E| = 0$.

14.11. Сколько слагаемых входит:

1) в формулу полного разложения определителя четвертого порядка?

2) в формулу полного разложения определителя пятого порядка?

14.12. 1) Имеются ли в формуле для вычисления определителя матрицы $\|a_{ij}\|$ пятого порядка слагаемые $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$, $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$?

2) С какими знаками входят в формулу для вычисления определителя матрицы пятого порядка слагаемые $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$, $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$?

14.13. Пусть в матрице A порядка n точно n элементов равны 1, а остальные — нули. Чему может быть равен определитель матрицы A?

14.14. Доказать, что определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

14.15. Доказать, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

14.16. 1) Как изменится определитель, если в матрице переставить две строки?

2) Как изменится определитель, если к одной строке матрицы прибавить другую?

3) Как изменится определитель, если одну строку в матрице умножить на число λ?

4) Как будет изменяться определитель, если со столбцами матрицы совершать такие же элементарные преобразования?

14.17. Изменится ли определитель, если матрицу транспонировать?

14.18. Как изменится определитель, если все элементы матрицы заменить комплексно сопряженными числами?

14.19. Сформулировать несколько различных условий, при которых определитель матрицы A равен 0. Сформулировать необходимое и достаточное условие.

14.20. Пусть $\det A \neq 0$. Доказать, что, применяя к строкам матрицы элементарные преобразования, сохраняющие определитель, можно получить: 1) треугольную матрицу; 2) диагональную матрицу.

14.21. Вычислить определитель четвертого порядка:
1) $|A_{430}|$; 2) $|A_{431}|$; 3) $|A_{432}|$; 4) $|A_{435}|$;
5) $|A_{436}|$; 6) $|A_{437}|$; 7) $|A_{438}|$; 8) $|A_{439}|$;
9) $|A_{440}|$; 10) $|A_{441}|$; 11) $|A_{434}|$; 12) $|A_{442}|$;
13) $|A_{443}|$; 14) $|A_{444}|$; 15) $|A_{445}|$.

14.22. Вычислить определитель пятого порядка:
1) $|A_{530}|$; 2) $|A_{532}|$; 4) $|A_{533}|$;
4) $|A_{541}|$; 5) $|A_{536}|$.

14.23. Вычислить определитель порядка n:
1) $|A_{600}|$; 2) $|A_{601}|$; 3) $|A_{610}|$; 4) $|A_{611}|$; 5) $|A_{618}|$;
6 $|A_{605}|$; 7) $|A_{614}|$; 8) $|A_{615}|$; 9) $|A_{622}|$; 10) $|A_{633}|$;
11) $|A_{625}|$; 12) $|A_{626}|$; 13) $|A_{624}|$; 14) $|A_{628}|$; 15) $|A_{641}|$;
16) $|A_{636}|$; 17) $|A_{639}|$; 18) $|A_{621}|$ ($n = 2k$).

14.24. Вычислить определитель порядка n (полезно получить рекуррентную формулу):

1) $|A_{623}|$; 2) $|A_{629}|$; 3) $|A_{631}|$;

4) $|A_{632}|$; 5) $|A_{634}|$; 6) $|A_{635}|$;

7) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = W(x_1, \dots, x_n)$$ («детерминант Вандермонда»);

8) $$\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \dots & \dfrac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \dots & \dfrac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix};$$

9) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & \dots & 1+x_2^n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1+x_n & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$;

10) (р) $\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\alpha \end{vmatrix}$;

11) $\begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 2\operatorname{ch}\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\operatorname{ch}\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{ch}\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\operatorname{ch}\varphi \end{vmatrix}$; 13) (р) $|A_{638}|$.

14.25. Показать, что определитель матрицы A порядка n равен 0, если в ней имеется нулевая подматрица размеров $k\times l$, и $k+l>n$.

14.26. Вычислить $\det A$, зная, что в матрице A сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами.

14.27. Как изменится определитель, если переставить столбцы матрицы, расположив их в обратном порядке?

14.28. Как изменится определитель, если матрицу транспонировать относительно второй диагонали?

14.29. Числа 1081, 1403, 2093 и 1541 делятся на 23. Объяснить без вычислений, почему число

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

также делится на 23.

14.30. Пусть M_{ij} — дополнительный минор элемента a_{ij} матрицы A. Доказать, что $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}M_{ij}(-1)^{i+j}=0$ при $k\neq i$ (n — порядок A).

14.31. 1) Пусть все элементы матрицы второго порядка являются дифференцируемыми функциями от одной переменной t. Доказать, что для производной от определителя, рассматриваемого как функция от t, имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}.$$

2) Составить и доказать формулу дифференцирования определителя порядка n.

14.32. Доказать, что $\det(A - \lambda E)$ — многочлен **от** λ, и вычислить его коэффициенты.

Задачи, в которых употребляются операции с матрицами и специальные виды матриц (14.33—14.44)

14.33. Справедливы ли тождества (n — порядок матрицы A):

1) $\det(A + B) = \det A + \det B$;

2) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$;

3) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; 4) $\det(A^k) = (\det A)^k$?

14.34. Пусть A — квадратная матрица порядка n; b_{ij} — дополнительный минор ее элемента a_{ij}, c_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}; из них образованы матрицы $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Доказать, что $\det B = \det C = (\det A)^{n-1}$.

14.35. Доказать, что определитель эрмитовой матрицы — вещественное число.

14.36. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.

14.37. Доказать, что если матрица A унитарна, то $|\det A| = 1$.

14.38. Доказать, что для любой вещественной матрицы A выполнено $\det AA^T \geqslant 0$.

14.39. Пусть $B_1, \ldots, B_k$ — квадратные матрицы, $H = \begin{Vmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{Vmatrix}$ — блочно диагональная матрица. Доказать, что $\det H^{\square} = \det B_1 \cdots \det B_k$.

14.40. Пусть A, D — квадратные матрицы, $H = \begin{Vmatrix} A & O \\ B & D \end{Vmatrix}$ — блочно треугольная матрица. Доказать, что $\det H^{\square} = \det A \cdot \det D$.

14.41. Пусть A — квадратная матрица порядка n, $\det A = a$, $H = \begin{Vmatrix} A & 2A \\ 3A & 4A \end{Vmatrix}$. Вычислить $\det H^{\square}$.

14.42. Пусть A — квадратная матрица, A^2, A^3, A^4 — ее степени, $H = \begin{Vmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{Vmatrix}$. Вычислить $\det H^{\square}$.

14.43. 1) Пусть A, B, C, E — квадратные матрицы порядка n, E — единичная матрица, $H = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & E \end{Vmatrix}$. Доказать, что $\det H^{\square} = \mathrm{de}\ (A - BC)$.

2) Всегда ли справедливо равенство $\det H^{\square} = \det (AD - BC)$ для блочной матрицы $H = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$?

14.44. Выразить определитель кронекеровского произведения $A \otimes B$ через определители матриц A, B.

§ 15. Операции с матрицами

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *матрица, размеры матрицы, подматрица (блок, клетка матрицы), элементарные преобразования матрицы, сумма матриц, произведение матрицы на число, произведение матриц, перестановочные (коммутирующие) матрицы, обратная матрица, след матрицы, многочлен от матрицы*. В некоторых задачах предполагается знакомство с алгоритмом Гаусса. Подробное изложение алгоритма Гаусса дано во введении к § 16.

Приведем некоторые обозначения и определения. Матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

содержит m строк и n столбцов, имеет размеры (размер) $m \times n$, ширину n и высоту m. Рассмотрим матрицы A, B, C с элементами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} соответственно.

Матрица B называется *произведением матрицы A на число α*, если для всех элементов этих матриц выполнены равенства $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ (размеры матриц A, B одинаковые). Обозначение: $B = \alpha A$.

Пусть A, B, C — матрицы одинаковых размеров. Матрица C называется *суммой* матриц A и B и обозначается $C = A + B$, если для всех значений индексов i, j выполнены равенства $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пусть число n столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Матрица C называется *произведением A на B* (справа), $C = AB$, если для всех значений индексов i, j выполнены равенства $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Если A имеет размеры $m \times n$, а B — размеры $n \times p$, то матрица $C = AB$ имеет размеры $m \times p$.

Следующие три типа преобразований называются *элементарными преобразованиями* матрицы: 1) умножение строки матрицы на число, отличное от 0; 2) прибавление к одной строке матрицы другой ее строки; 3) перестановка двух строк матрицы. Аналогично определяются три типа преобразований столбцов матрицы.

Матрица B называется *транспонированной* по отношению к матрице A и обозначается $B = A^T$, если строками матрицы B являются соответствующие столбцы матрицы A, т. е. для всех i, j выполнены равенства $b_{ij} = a_{ij}$. Операция перехода от A к A^T называется *транспонированием матрицы* A. Если A имеет размеры $m \times n$, то A^T имеет размеры $n \times m$.

Матрица B называется *комплексно сопряженной* по отношению к комплексной матрице A и обозначается $B = \overline{A}$, если для всех i, j выполнено равенство $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$. Матрица B называется *эрмитово сопряженной* по отношению к матрице A и обозначается $B = A^H$, если $B = \overline{A}^T$, т. е. для всех i, j выполнено $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$.

Матрица A называется *нулевой*, $A = O$, если все ее элементы равны 0. Матрица A называется *матричной единицей* с индексами i_0, j_0 и обозначается $A = E_{i_0 j_0}$, если все ее элементы, кроме $a_{i_0 j_0}$, нулевые, а $a_{i_0 j_0} = 1$.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют (*главную*) *диагональ квадратной матрицы* $A = \|a_{ij}\|$ порядка n и называются ее *диагональными элементами*. Сумма диагональных элементов называется *следом матрицы* A и обозначается $\operatorname{tr} A$. Таким образом, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее недиагональные элементы равны 0, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Диагональная матрица порядка n обозначается $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Диагональная матрица порядка n, у которой все диагональные элементы равны 1, называется *единичной* и обозначается E или E_n. Элементы единичной матрицы обозначаются δ_{ij}: $E = \|\delta_{ij}\|$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть A — квадратная матрица порядка n. Матрица B называется *обратной* к A и обозначается $B = A^{-1}$, если $AB = BA = E$. Элементы обратной матрицы можно вычислить по формуле

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji} — дополнительный минор элемента a_{ji} в матрице A. Матрица A *обратима*, если $\det A \neq 0$.

Пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ — многочлен. Матрица $B = a_0 E + a_1 A + \dots + a_k A^k$ называется *многочленом от матрицы* A и обозначается $B = p(A)$.

Перечислим некоторые специальные виды квадратных матриц $A = \| a_{ij} \|$ порядка n:

скалярная: $A = \operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$, где λ — некоторое число;

вырожденная (*особая*): $\det A = 0$;

невырожденная (*неособая*): $\det A \neq 0$;

унимодулярная: $\det A = 1$;

матрица перестановки: матрица A получена из единичной матрицы перестановкой строк;

элементарная матрица: матрица A, полученная из E элементарным преобразованием;

верхняя треугольная: $a_{ij} = 0$ при $i > j$;

нижняя треугольная: $a_{ij} = 0$ при $i < j$;

симметрическая (или *симметричная*): $A^T = A$;

кососимметрическая (или *кососимметричная*): $A^T = -A$;

эрмитова: $A^H = A$;

косоэрмитова: $A^H = -A$;

ортогональная: $A^T = A^{-1}$;

унитарная: $A^H = A^{-1}$;

неотрицательная: $a_{ij} \geqslant 0$ при всех i, j;

стохастическая (*марковская*): $a_{ij} \geqslant 0$ при всех i, j и $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$ при $i = 1, \dots, n$;

нильпотентная: $A^k = O$ при некотором натуральном k (наименьшее из таких k называется *показателем нильпотентности матрицы* A);

периодическая: $A^k = E$ при некотором натуральном k (k называется *периодом матрицы* A).

Матрица B называется *блочной* (*клеточной*), если ее элементами являются матрицы B_{ij} размеров $m_i \times n_j$. При этом все матрицы B_{ij}, принадлежащие одной строке B, имеют одинаковую высоту, а все матрицы B_{ij}, принадлежащие одному столбцу B, имеют одинаковую ширину. Операции с блочными матрицами определяются по тем же правилам, что и с обычными числовыми матрицами. Если числовая матрица A разбита горизонтальными и вертикальными прямыми на блоки B_{ij}, занумерованные естественным образом, и из этих блоков сформирована блочная матрица $B = \| B_{ij} \|$, то говорим, что матрица B получена из A *разбиением на блоки*. Пусть, наоборот, дана блочная матрица $B = \| B_{ij} \|$. Из элементов матриц B_{ij} можно естественным образом сформировать числовую матрицу A размеров $\sum\limits_i m_i \times \sum\limits_j n_j$. В этом случае мы говорим, что матрица A получена *объединением блоков* матрицы B и пишем $A = B^{\square}$. Когда для путаницы нет оснований, значок$^{\square}$ опускаем, и числовую матрицу обозначаем той же буквой, что и блочную.

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ и B — числовые матрицы, $C = \|C_{ij}\|$ — блочная матрица, определенная равенствами $C_{ij} = a_{ij}B$ при всех i, j. Числовая матрица, получаемая объединением блоков матрицы C, называется (*правым*) *кронекеровским произведением* (или *правым прямым произведением*) матриц A и B и обозначается $A \otimes B$.

Основные операции с матрицами: умножение на число, сложение и умножение матриц (15.1—15.24)

15.1. Сформулировать требования, которые надо предъявить к матрицам для того, чтобы их можно было сложить.

15.2. Вычислить линейную комбинацию матриц:

1) $3\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} - 4\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $2\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} - 3\begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{Vmatrix}$;

3) $2\begin{Vmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) $A_{18} + A_{40}$; 5) $A_{28} - A_{12}$; 6) $2A_{573} - A_{571}$;

7) $\frac{1}{2}(c_{51} + c_{52})$.

15.3. Описать условия, при которых верны следующие тождества, и доказать эти тождества (A, B, C — матрицы, α, β — числа):

1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$; 4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

5) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$.

15.4. 1) Можно ли умножить строку длины m на столбец высоты n?

2) Можно ли умножить столбец высоты n на строку длины m?

15.5. Вычислить произведение матриц:

1) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$; 4) $A_1 A_{12}$; 5) $A_4 A_{395}$; 6) $A_{442} c_{168}$;

7) $A_{110} A_{12}$; 8) $A_3 A_{205}$; 9) $A_{436} c_{166}$; 10) $A_{601} A_{602}$;

11) $A_{601} A_{605}$; 12) $A_{605} A_{601}$; 13) $(A_{206})^2$; 14) $(A_{200})^2$;

15) $(A_{617})^2$; 16) $(A_{645})^2$ при $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$.

15.6. Каким условиям должны удовлетворять матрицы A и B, чтобы:

1) существовало произведение AB;

2) существовало произведение BA;

3) существовали произведения AB и BA?

15.7. Выразить размеры матрицы AB через размеры A и B.

15.8. Матрицы A, C имеют размеры соответственно $m \times n$ и $p \times q$, и существует произведение ABC. Каковы размеры матриц B, ABC?

15.9. Проверить справедливость тождества (A, B, C — матрицы, α — число):

1) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$; 2) $(AB)C = A(BC)$;

3) $A(B + C) = AB + AC$;

4) $(A + B)C = AC + BC$;

5) $A(B + C + D) = AB + AC + AD$.

15.10. Проверить, существует ли произведение, и если да, то вычислить его:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & 4 \end{Vmatrix}$; 4) $A_2A_8c_8A_2$.

15.11. Вычислить:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}^n$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^n$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^3$;

4) $(A_5)^n$; 5) $(A_{13})^n$; 6) $(A_{14})^n$; 7) $(A_{601})^n$;

8) $(A_{614})^n$; 9) $(A_{613})^n$ (в задачах 7), 8), 9) порядок матрицы равен n).

15.12. Транспонировать матрицу:

1) $\begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix}$;

5) A_9; 6) A_{390}; 7) A_{544}; 8) A_{632}.

15.13. Проверить справедливость тождества:

1) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; 2) $(AB)^T = B^T A^T$;

3) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$; 4) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

15.14. Вычислить матрицу $P = E - (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_k)^T (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_k)$ (через $\boldsymbol{e}_i$ обозначена i-я строка единичной матрицы E).

15.15. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — столбцы одинаковой высоты и $H = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$. Доказать, что $H^2 = \lambda H$ для некоторого числа λ.

15.16. Всегда ли верно матричное равенство $AB = BA$? Привести примеры коммутирующих и некоммутирующих матриц.

15.17. Что можно сказать о размерах матриц A, B, если $AB \doteq BA$?

15.18. Вычислить матрицу $A \times B = AB - BA$ (*коммутатор* матриц A, B), если:

1) $A = A_{12}$, $B = A_5$; 2) $A = A_{20}$, $B = A_{16}$.

15.19. Проверить справедливость тождества (см. задачу 15.18):

1) $A \times B = -B \times A$; 2) $A \times A = O$; 3) $A \times E = E \times A = O$; 4) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

15.20. Вычислить матрицу $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ (*произведение Йордана* матриц A, B), если:

1) $A = A_{12}$, $B = A_5$; 2) $A = A_{20}$, $B = A_{16}$.

15.21. Проверить справедливость тождества (см. задачу 15.20):

1) $A * B = B * A$; 2) $A * A = A^2$; 3) $A * E = A$; 4) $A * (B + C) = A * B + A * C$.

15.22. Вычислить $f(A)$, если:

1) $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

2) $f(t) = t^2 - 2t + 1$, $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

3) $f(t) = t^2 - 3t + 2$, $A = A_{11}$;

4) $f(t) = (t - \varepsilon)^2$, $A = A_{78}$;

5) $f(t) = t^2 + t + 1$, $A = A_{206}$.

15.23. Разложив многочлен $f(t)$ на множители, вычислить $f(A)$, если:

1) $f(t) = t^2 - t$, $A = A_{230}$;

2) $f(t) = t^2 + 2t - 3$, $A = A_{214}$.

15.24. Проверить, справедливы ли матричные тождества:

1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

2) $(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B)$;

3) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;

4) $(A + E)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + E$.

Связь умножения матриц и элементарных преобразований (15.25—15.38)

15.25. Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец B.

15.26. Сформулировать и доказать предложение, аналогичное 15.25, для строк.

15.27. Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами из элементов k-го столбца матрицы B.

15.28. Сформулировать и доказать аналог предложения 15.27 для строк.

15.29. Доказать, что:

1) при перестановке двух строк матрицы A соответствующие строки в AB также переставляются;

2) если k-ю строку матрицы A умножить на число λ, то k-я строка AB также умножится на λ;

3) если к k-й строке матрицы A прибавить ее j-ю строку, то с матрицей AB произойдет то же элементарное преобразование.

15.30. Сформулировать и доказать аналоги предложений 15.29 для столбцов.

15.31. Доказать, что перестановка двух строк матрицы может быть осуществлена с помощью последовательного применения других элементарных преобразований ее строк, а именно: умножения строки на число, отличное от 0, и прибавления к одной строке матрицы другой ее строки.

15.32. Вычислить произведение $\boldsymbol{e}_i A \boldsymbol{e}_k^T$ для произвольной матрицы A (через $\boldsymbol{e}_i$ обозначена i-я строка единичной матрицы подходящего размера).

15.33. Для произвольной матрицы A и матричной единицы E_{ij} подходящего размера вычислить произведение: 1) $E_{ij}A$; 2) AE_{ij}.

15.34. Пусть матрицы A и B таковы, что для произвольных столбцов ξ и η подходящей высоты выполнено равенство $\xi^T A\eta = \xi^T B\eta$. Доказать, что $A = B$.

15.35. Пусть A — матрица размеров $m \times n$, E_m и E_n — единичные матрицы порядка m и n соответственно. Доказать, что $E_m A = AE_n = A$.

15.36. На какую матрицу следует умножить матрицу A, чтобы в результате получить:

1) первый столбец A; 2) первую строку A?

15.37. Подобрать элементарную матрицу K так, чтобы матрица KA получалась из A:

1) перестановкой двух первых строк A;

2) прибавлением первой строки ко второй;

3) умножением первой строки A на число $\lambda \neq 0$.

15.38. Подобрать элементарную матрицу K так, чтобы произведение AK получалось из A при помощи заданного элементарного преобразования столбцов.

Обратная матрица (15.39—15.65)

15.39. Привести примеры вырожденных и невырожденных матриц.

15.40. Пусть A — вырожденная матрица второго порядка, m — натуральное число. Доказать, что существует число λ такое, что $A^m = \lambda^{m-1}A$ для всех m.

15.41. Обратима ли прямоугольная матрица?

15.42. Доказать, что если матрица B, обратная к A, существует, то $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, $\det B = (\det A)^{-1}$.

15.43. 1) Доказать, что если A, B, C — квадратные матрицы, и $AB = E$, $AC = E$, то $B = C$.

2) Возможно ли равенство $AB = E$ для прямоугольных матриц? Справедливо ли утверждение 1) для прямоугольных матриц?

15.44. Дана квадратная матрица $A = \| a_{ij} \|$. Выписать систему уравнений, которой удовлетворяют элементы j-го столбца матрицы A^{-1}.

15.45. Вычислить:

1) $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}^{-1}$; 2) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}^{-1}$;

4) $(A_{34})^{-1}$; 5) $(A_{77})^{-1}$; 6) $(A_6)^{-1}$; 7) $(A_{207})^{-1}$;
8) $(A_{203})^{-1}$; 9) $(A_{202})^{-1}$; 10) $(A_{227})^{-1}$.

15.46. Доказать, что матрица, обратная к элементарной, есть элементарная матрица.

15.47. Вычислить обратную к данной элементарной матрице:

1) $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

8) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 9) A_{13}; 10) A_{43}; 11) A_{200}.

15.48. Проверить, справедливо ли тождество:

1) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; 2) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 4) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$;
5) $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$; 6) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

15.49. 1) Доказать, что квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно перевести в единичную тогда и только тогда, когда она невырождена.

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для элементарных преобразований столбцов матрицы.

15.50 (р). Доказать, что всякая невырожденная матрица есть произведение элементарных матриц.

15.51. Разложить данную матрицу в произведение элементарных матриц:

1) (р) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

15.52. 1) Пусть A, B — матрицы одного порядка и матрица A с помощью цепочки элементарных преобразований строк переведена в единичную матрицу E. В какую матрицу переведет та же цепочка элементарных преобразований матрицу E? Матрицу B?

2) Ответить на те же вопросы для цепочки элементарных преобразований столбцов матрицы A, переводящих A в E.

15.53. 1) Описать и обосновать способ вычисления матрицы A^{-1}, использующий элементарные преобразования строк матриц A, E.

2) Описать и обосновать способ вычисления матрицы A^{-1}, использующий элементарные преобразования столбцов матриц A, E.

15.54. Вычислить:

1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{-1}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}^{-1}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}^{-1}$;

4) $(A_{430})^{-1}$; 5) $(A_{432})^{-1}$; 6) $(A_{433})^{-1}$; 7) $(A_{434})^{-1}$; 8) $(A_{439})^{-1}$; 9) $(A_{601})^{-1}$; 10) $(A_{614})^{-1}$; 11) $(A_{609})^{-1}$; 12) $(A_{608})^{-1}$; 13) $(A_{618})^{-1}$.

15.55. Пусть $A^2 + A + E = O$. Доказать, что матрица A невырождена, и указать простейший способ вычисления A^{-1}.

15.56. Пусть $A^m = 0$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{m-1}$.

15.57. Матрица A коммутирует с B. Доказать, что тогда A^{-1} коммутирует с B^{-1} (предполагается, что матрицы обратимы).

15.58. Проверить формулу $(S^{-1}AS)^m = S^{-1}A^mS$.

15.59. Пусть $S^{-1}AS = B$ и $f(t)$ — многочлен. Доказать, что $f(B) = S^{-1}f(A)S$.

15.60. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — столбцы одинаковой высоты, $1/\mu = 1 + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a} \neq 0$, $B = E + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$. Проверить справедливость равенства $B^{-1} = E - \mu\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$.

15.61. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — столбцы высоты n, A — обратимая матрица порядка n, $1/\mu = 1 + \boldsymbol{b}^TA^{-1}\boldsymbol{a} \neq 0$ и $B = A + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$. Проверить справедливость равенства $B^{-1} = A^{-1} - \mu A^{-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^TA^{-1}$.

15.62. 1) Описать и обосновать способ вычисления произведения $A^{-1}B$, использующий элементарные преобразования строк матриц A, B.

2) Описать и обосновать способ вычисления произведения AB^{-1}, использующий элементарные преобразования столбцов матриц A, B.

15.63. Вычислить произведения матриц:

1) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$; 2) $A_{205}A_{203}^{-1}$; 3) $A_{203}^{-1}A_{205}$;

4) $A_{210}^{-1}A_{205}$; 5) $A_{450}^{-1}A_{431}$; 6) $A_{618}A_{617}^{-1}$.

15.64. Пусть матрицы A, C невырожденные. Решить матричное уравнение:

1) $AX = O$; 2) $AX = B$; 3) $XA = B$;

4) $AXC = B$; 5) $A(X + C) = B$.

15.65. Найти матрицу X из уравнения:

1) $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $X \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 10 \\ 17 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

5) $X \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$;

6) $X \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} X = X \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

8) $A_{12}X = A_5$; 9) $XA_{12} = A_{12}$; 10) $X^{-1}A_{12}X = A_{21}$;
11) $A_{111}X = A_{228}$; 12) $A_{229}X = A_{116}$; 13) $A_{203}X = c_{53}$;
14) $A_{126}X = A_{230}$; 15) $A_{113}X = A_{213}$; 16) $XA_{227} = A_{229}$.

Другие операции с матрицами и специальные виды матриц (15.66—15.141)

15.66. Пусть A, B — диагональные матрицы одного порядка, α — число. Доказать, что матрицы αA, $A+B$, AB, BA тоже диагональные и $AB = BA$.

15.67. Пусть $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Доказать, что:

1) столбцы матрицы BA получаются умножением столбцов матрицы B на числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$;

2) строки матрицы AB получаются умножением строк B на числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

15.68. Пусть A — диагональная матрица, $f(t)$ — многочлен. Доказать, что тогда матрица $f(A)$ также диагональна.

15.69. Пусть матрица A диагональна, все ее диагональные элементы различны, и $AB = BA$. Доказать, что тогда и матрица B диагональна.

15.70. Матрица A перестановочна с любой диагональной матрицей порядка n. Доказать, что A — диагональная матрица порядка n.

15.71. Матрица A перестановочна со всеми матричными единицами порядка n. Доказать, что A — скалярная матрица.

15.72. Матрица A перестановочна с любой матрицей порядка n. Доказать, что A — скалярная матрица.

15.73 (р). Найти все матрицы, перестановочные с каждой невырожденной матрицей порядка n.

15.74. Найти матрицу, эрмитово сопряженную к данной матрице:

1) A_{82}; 2) A_{86}; 3) A_{89}; 4) A_{81}.

15.75. Проверить справедливость тождества:

1) $(A+B)^H = A^H + B^H$; 2) $(\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H$;

3) $(A^H)^H = A$; 4) $(A \cdot B)^H = B^H A^H$; 5) $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$.

15.76. Определить, является ли указанная матрица второго порядка диагональной, скалярной, треугольной, симметрической, кососимметрической, эрмитовой, косоэрмитовой, унитарной, ортогональной или матрицей перестановки:

1) A_{82}; 2) A_{12}; 3) A_{87}; 4) A_{86}; 5) A_{77}; 6) A_{15};

7) A_{46}; 8) A_{23}; 9) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{88}$; 10) A_{22}; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{16}$.

15.77. Доказать, что:

1) все диагональные элементы кососимметрической матрицы равны 0;

2) диагональные элементы эрмитовой матрицы вещественны;

3) диагональные элементы косоэрмитовой матрицы мнимые.

15.78. Доказать, что:

1) если матрица A эрмитова, то матрица iA косоэрмитова;

2) если матрица A косоэрмитова, то iA эрмитова.

15.79. 1) Найти общий вид эрмитовых матриц второго порядка.

2) Найти общий вид косоэрмитовых матриц второго порядка.

3) Указать все матрицы перестановок второго порядка.

Доказать утверждения 15.80—15.86.

15.80. Если матрица A диагональна и все ее диагональные элементы отличны от 0, то A^{-1} существует и является диагональной.

15.81 (р). Если матрица A верхняя треугольная и все ее диагональные элементы отличны от 0, то A^{-1} существует и является верхней треугольной.

15.82. Если A — невырожденная симметрическая матрица, то A^{-1} — также симметрическая матрица.

15.83. Если A — невырожденная кососимметрическая матрица, то A^{-1} — также кососимметрическая матрица.

15.84. Если A — ортогональная матрица, то A^{-1} существует и ортогональна.

15.85. Если A — унитарная матрица, то A^{-1} существует и унитарна.

15.86. Если A — матрица перестановки, то A^{-1} существует и также является матрицей перестановки.

15.87. Доказать, что данная матрица ортогональна и найти обратную к ней:

1) A_{77}; 2) A_{313}; 3) A_{318}; 4) A_{322}; 6) A_{445}.

15.88. Доказать, что данная матрица унитарна и найти обратную к ней:

1) A_{103}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{488}$.

15.89. Пусть матрицы A и B — верхние треугольные. Выразить элементы матрицы AB через элементы матриц A и B.

15.90. Пусть матрицы A и B — верхние треугольные. Доказать, что матрицы $A+B$ и AB — также верхние треугольные.

15.91. Пусть матрицы A и B симметрические. Доказать, что:

1) $A+B$ — симметрическая матрица;

2) A^k — симметрическая матрица при любом натуральном k;

3) матрица AB является симметрической тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

15.92. Пусть матрицы A и B кососимметрические. Доказать, что:

1) $A+B$ — кососимметрическая матрица;

2) A^k — кососимметрическая матрица при нечетном k и симметрическая матрица при четном k;

3) матрица AB является симметрической тогда и только тогда, когда A и B перестановочны.

4) Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие кососимметричности произведения матриц A и B.

15.93. Пусть A — произвольная квадратная матрица. Доказать, что матрицы $A+A^T$ и AA^T симметрические, матрица $A-A^T$ кососимметрическая.

15.94. Доказать, что любую квадратную матрицу можно разложить в сумму симметрической и кососимметрической матриц. Единственно ли это разложение?

15.95. Разложить данную матрицу в сумму симметрической и кососимметрической матриц:

1) A_{49}; 2) A_{16}; 3) A_{234}.

15.96. Пусть S — невырожденная матрица и $S^TAS = B$. Доказать, что каждое из свойств: симметричность, кососимметричность — выполняется для матриц A и B одновременно (т. е. если оно выполнено для матрицы A, то выполнено и для B, и обратно).

15.97. Доказать утверждение: всякая эрмитова вещественная матрица является симметрической.

15.98. Пусть матрицы A и B эрмитовы. Доказать, что:

1) матрица $A+B$ эрмитова;

2) матрица AB является эрмитовой тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

15.99. Пусть A — эрмитова матрица и $A = B + iC$, причем B и C — вещественные матрицы. Доказать, что B — симметрическая матрица, а C — кососимметрическая.

15.100. Доказать, что любую квадратную матрицу можно разложить в сумму эрмитовой и косоэрмитовой. Единственно ли это разложение?

Доказать утверждения 15.101—15.104.

15.101. Вещественная унитарная матрица ортогональна.

15.102. Если матрицы A и B ортогональны, то AB ортогональна.

15.103. Если матрицы A и B унитарны, то AB унитарна.

15.104. Пусть A — ортогональная матрица. Тогда сумма квадратов элементов любой ее строки равна 1, а сумма попарных произведений соответствующих элементов двух различных строк равна 0. Являются ли эти свойства определяющими?

15.105. Сформулировать и доказать свойства столбцов ортогональной матрицы, аналогичные 15.104.

15.106. Сформулировать и доказать свойства унитарной матрицы, аналогичные свойствам 15.104, 15.105 ортогональной.

15.107. Доказать, что матрица перестановки ортогональна.

15.108. Доказать, что если A и B — матрицы перестановок, то AB — также матрица перестановки.

15.109. Известно, что матрица A диагональна и ортогональна. Что можно сказать о ее диагональных элементах λ_i?

15.110. Матрица A диагональна и унитарна. Что можно сказать о ее диагональных элементах λ_i?

15.111. Проверить, является ли данная матрица периодичной, нильпотентной или стохастической; найти период, показатель нильпотентности:

1) A_{22}; 2) A_{14}; 3) $\frac{1}{2}A_{12}$; 4) A_5; 5) A_{77};

6) A_{243}; 7) A_{235}; 8) A_{237}; 9) A_{236}; 10) A_{430};

11) A_{431}; 12) A_{457}; 13) $\frac{1}{7}A_{434}$; 14) A_{613}.

Проверить свойства квадратных матриц, сформулированные в задачах 15.112—15.121.

15.112. Нильпотентная матрица всегда вырождена, периодичная — невырождена.

15.113. Если A — нильпотентная матрица второго порядка, то $A^2 = O$.

15.114. Треугольная матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее диагональные элементы нулевые.

15.115. Если матрицы A, B нильпотентны и перестановочны, то $A+B$ и AB нильпотентны.

15.116. Если матрицы A и B периодические и перестановочные, то AB — периодическая матрица. Выразить какой-либо ее период через периоды матриц A, B.

15.117. Пусть $A^m + A^{m-1} + \cdots + E = O$. Доказать, что A — периодическая матрица.

15.118 (р). Всякая матрица перестановки периодична.

15.119. Пусть матрица A является одновременно унитарной и эрмитовой. Доказать, что A периодична.

15.120. Пусть S — невырожденная матрица и $S^{-1}AS = B$. Тогда каждое из свойств: периодичность, нильпотентность — выполняется для матриц A и B одновременно (т. е. если оно выполнено для матрицы A, то выполнено и для B, и обратно).

15.121. Пусть матрицы A и B неотрицательные. Тогда $A+B$, AB — также неотрицательные матрицы.

15.122. Пусть I — столбец из единиц, и матрица A неотрицательная. Доказать, что условие $AI = I$ — необходимое и достаточное условие стохастичности A.

15.123. Доказать, что если матрицы A и B стохастические, то матрица AB также стохастическая.

15.124. Пусть матрица A стохастическая. Существует ли A^{-1}? Будет ли A^{-1} стохастической, если она существует?

15.125. В каком случае стохастическая матрица является ортогональной?

15.126. Доказать справедливость тождества:

1) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$; 2) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

15.127. Пусть A — треугольная матрица, m — натуральное число. Вычислить след матрицы A^m.

15.128. Пусть A — произвольная матрица. Вычислить:

1) $\operatorname{tr}(A^T A)$; 2) $\operatorname{tr}(A^H A)$;

3) Доказать, что если $\operatorname{tr}(A^H A) = 0$, то $A = O$.

15.129. Доказать, что если A — нильпотентная матрица второго порядка, то $\operatorname{tr} A = 0$.

15.130. Доказать, что не существует матриц A и B таких, что $AB - BA = E$.

15.131. Пусть A и B — блочные матрицы второго порядка. Сформулировать условия, при которых эти матрицы можно перемножить. Доказать, что если существует произведение AB, то $(AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$.

15.132. Пусть A и B — верхние блочно треугольные матрицы второго порядка и произведение AB существует.

Получить формулу для вычисления матрицы $A^{\square}B^{\square}$.

15.133. Пусть A — блочная матрица второго порядка, B — блочная матрица — столбец из двух блоков.

1) Сформулировать условия, при которых определено произведение AB.

2) Доказать, что если AB существует, то $(AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$.

3) Получить формулу для вычисления $A^{\square}B^{\square}$.

15.134. Пусть A и B — блочно диагональные матрицы. Сформулировать условия, при которых:

1) определено произведение AB;

2) $(AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$;

3) определены произведения AB и BA;

4) $AB = BA$.

15.135. Проверить справедливость тождеств $(A + B)^{\square} = A^{\square} + B^{\square}$, $(AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$ для произвольных блочных матриц.

15.136. Разбивая данные матрицы на блоки, вычислить произведение:

1) $A_{430}A_{431}$; 2) $A_{432}A_{450}$; 3) $A_{450}A_{433}$;
4) $A_{451}A_{452}$; 5) $A_{436}A_{437}$; 6) $A_{530}A_{531}$.

15.137. Найти матрицу $(H^{\square})^{-1}$, если H — блочная матрица:

1) $H = \begin{Vmatrix} E & A \\ O & E \end{Vmatrix}$;

2) $H = \begin{Vmatrix} A & B \\ O & C \end{Vmatrix}$ (матрицы A и C обратимы).

15.138. Пусть E — единичная матрица порядка r; D — произвольная матрица размера $r \times s$; $\boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ — столбцы. Решить уравнение:

1) $\| E \ D \|^{\square}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$; 2) $\| E \ D \|^{\square}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

15.139. Вычислить кронекеровское произведение матриц:

1) $A_{17} \otimes \boldsymbol{c}_7$; 2) $\boldsymbol{c}_7 \otimes A_{17}$; 3) $A_{18} \otimes \boldsymbol{c}_8$; 4) $\boldsymbol{c}_8 \otimes A_{18}$;
5) $A_{17} \otimes A_{18}$; 6) $A_{18} \otimes A_{17}$; 7) $A_{13} \otimes A_{19}$.

15.140. Пусть $\boldsymbol{a} = \| a_1 \dots a_n \|$, $\boldsymbol{b} = \| b_1 \dots b_m \|^T$. Вычислить $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a}$ и сравнить с $\boldsymbol{ba}$.

15.141. Проверить справедливость тождества:

1) $(\alpha A) \otimes B = \alpha (A \otimes B)$;

2) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;

3) $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$;

4) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$;

5) $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$;

6) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

§ 16. Ранг матрицы

В этом параграфе используются понятия: *ранг матрицы*, *базисный минор матрицы*, *базисные столбцы* и *строки матрицы*. При решении задач полезны теоремы о связи этих понятий, а также основной факт, состоящий в том, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк и столбцов.

Дадим описание некоторых методов упрощения матрицы с помощью элементарных преобразований ее строк.

Мы говорим, что матрица A размеров $m\times n$ имеет *упрощенный вид*, если: 1) некоторые r ($r \geqslant 0$) ее столбцов являются первыми r столбцами единичной матрицы порядка m, 2) при $r < m$ последние $m - r$ ее строк нулевые. Ранг упрощенной матрицы равен r.

Метод приведения матрицы к упрощенной форме, называемый *методом Гаусса—Жордана*, сводится к последовательному выполнению шагов, каждый из которых превращает один из столбцов данной матрицы в столбец единичной матрицы.

Опишем сначала один шаг преобразования. Предварительно отметим, что, хотя после после каждого элементарного преобразования получается новая матрица, для простоты изложения мы сохраняем для всех таких матриц обозначение $A = \|a_{ij}\|$.

Пусть выбран некоторый ненулевой элемент a_{ij} матрицы A. Назовем его ведущим элементом данного шага. Строку и столбец с номерами i, j, в которых он расположен, будем называть ведущей строкой и ведущим столбцом. Один шаг состоит из следующих элементарных преобразований. 1) Ведущая строка переставляется на новое место. Новый номер ведущей строки равен номеру шага. 2) Ведущая строка умножается на число $(a_{ij})^{-1}$, в результате чего ведущий элемент становится равным единице. 3) К каждой строке, отличной от ведущей, прибавляется ведущая строка, умноженная на некоторое число λ. Числовые множители выбираются так, чтобы обратить в 0 все элементы ведущего столбца матрицы, кроме ведущего элемента: для k-й строки ($k\neq i$) полагаем $\lambda = -a_{kj}$.

В результате преобразований 1)—3) j-й столбец матрицы A превращается в s-й столбец единичной матрицы, где s — номер шага.

Теперь дадим общее описание одной из возможных последовательностей шагов.

Если все столбцы матрицы A нулевые, то A имеет упрощенный вид, $r = 0$. В противном случае, просматривая столбцы матрицы слева направо, находим первый ненулевой столбец. Пусть его номер равен j_1. В качестве ведущего элемента первого шага выбираем любой ненулевой элемент этого столбца и выполняем первый шаг преобразования. Теперь в матрице первые $j_1 - 1$ столбцов нулевые, а j-й столбец равен первому столбцу единичной матрицы. Если при этом $m = 1$ или в строках с номерами 2, ..., m нет ненулевых элементов, то $r = 1$, и приведение к упрощенному виду закончено. В противном случае выберем самый левый столбец с номером $j_2 > j_1$, у которого имеются отличные от 0 элементы ниже первой строки. Любой из этих элементов может быть взят в качестве ведущего элемента второго шага. Выполнив второй шаг процедуры упрощения матрицы, можно продолжить просмотр остальных столбцов и при необходимости перейти к третьему шагу. Шаг с номером r будет последним, если $r = m$ или если в строках с номерами $r + 1$, ..., m не останется ненулевых элементов. На этом процесс упрощения матрицы заканчивается.

Другим употребительным способом упрощения матрицы с помощью элементарных преобразований строк является *метод Гаусса*. Вычисления распадаются на два этапа. На первом этапе, называемом *прямым ходом* метода Гаусса, мы выполняем, как и в методе Гаусса—Жордана, r шагов. При выбранном ведущем элементе a_{ij} s-й шаг состоит из трех действий: 1) ведущую строку переносим на s-е место; 2) делим эту строку на a_{ij}; 3) из каждой строки с номером, большим чем s, вычитаем s-ю строку, умноженную на некоторое число λ. Множители λ выбираются так, чтобы обратить в 0 все элементы ведущего столбца, расположенные ниже ведущего элемента. Последовательный выбор ведущих столбцов и ведущих элементов совершаем точно так же, как и в методе Гаусса—Жордана. После последнего (r-го) шага матрица приобретает так называемый *ступенчатый вид*.

Ведущие столбцы ступенчатой матрицы образуют первые r столбцов верхней треугольной матрицы, у которой все диагональные элементы равны 1. Все строки ступенчатой матрицы с номерами, большими чем r, нулевые. Ранг ступенчатой матрицы равен r.

При отыскании ранга матрицы достаточно привести ее к ступенчатой форме.

Для того чтобы привести ступенчатую матрицу к упрощенному виду, можно использовать *обратный ход* метода Гаусса. Он состоит из $r - 1$ шагов. На s-м шаге ведущим столбцом является столбец с номером j_{r-s+1}, а ведущей строкой — строка с номером $r - s + 1$. При этом из каждой строки с номером, меньшим $r - s + 1$, вычитается ведущая строка с таким множителем λ, чтобы обратить в 0 все элементы ведущего столбца, расположенные выше ведущего элемента. После $r - 1$ шагов все ведущие столбцы превратятся в столбцы единичной матрицы, а данная матрица A приобретает упрощенный вид.

16.1. Дать описание всех матриц ранга 0.

16.2. Дать описание всех матриц ранга 1.

16.3. Возможно ли, чтобы в матрице не было базисного минора?

16.4. Указать какой-нибудь базисный минор и определить ранг матрицы:

1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

16.5. Указать базисные строки в матрицах 1)—7) задачи 16.4.

16.6. Указать базисные столбцы в матрицах 1)—7) задачи 16.4.

16.7. Указать базисный минор, базисные столбцы и базисные строки в квадратной матрице с определителем, отличным от 0. Чему равен ранг такой матрицы?

16.8. Доказать, что ранг диагональной матрицы равен числу ее отличных от 0 элементов.

16.9. Доказать, что если в матрице равны 0 все миноры порядка k, то равны 0 и все миноры порядка $k+1$.

16.10. Доказать, что ранг матрицы не меньше ранга любой ее подматрицы.

16.11. Доказать, что приписывание к матрице нулевого столбца не меняет ранга.

16.12. Доказать, что приписывание к матрице столбца, равного линейной комбинации ее столбцов, не меняет ранга.

16.13. Доказать, что если столбцы матрицы B являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, то $\operatorname{rg} B \leqslant \operatorname{rg} A$.

16.14. Оценить ранг матрицы $\| A \ B \|^{\square}$ через ранги матриц A и B.

16.15. Пусть матрицы A и B имеют одинаковую высоту. Доказать, что если ранг матрицы A не изменяется после приписывания к ней любого из столбцов матрицы B, то $\operatorname{rg} \| A \ B \|^{\square} = \operatorname{rg} A$.

16.16. 1) Доказать, что умножение какой-либо строки матрицы на число, отличное от 0, не меняет ранга.

2) Доказать, что перестановка строк в матрице не меняет ранга.

3) Доказать, что если к строке матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк, то ранг не изменится.

4) Доказать, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее столбцов.

16.17. Описать способ вычисления ранга матрицы с использованием элементарных преобразований ее строк и столбцов.

16.18. Вычислить ранг матрицы:

1) $\|1\ \ 0\|$; 2) $\|0\ \ 1\ \ 0\|$; 3) A_{21}; 4) A_{20}; 5) A_{13};
6) A_{12}; 7) A_{7}; 8) A_{81}; 9) A_{111}; 10) A_{202};
11) A_{205}; 12) A_{233}; 13) A_{214}; 14) A_{232}; 15) A_{368};
16) A_{396}; 17) A_{408}; 18) A_{452}; 19) A_{435}; 20) A_{453};
21) A_{444}; 22) A_{454}; 23) A_{443}; 24) A_{587}; 25) A_{533};
26) A_{544}; 27) A_{592}; 28) A_{632}; 29) A_{634}.

16.19. Вычислить ранг матрицы при всевозможных значениях параметра:

1) A_{78}; 2) A_{367}; 3) A_{365}; 4) A_{363};
5) A_{508}; 6) A_{629}; 7) A_{645}.

16.20. Вычислить ранг матрицы $A - \lambda E$ при всех значениях параметра λ, если:

1) $A = A_{47}$; 2) $A = A_{211}$; 3) $A = A_{431}$.

16.21. Доказать, что если $\det A = 0$, то строки матрицы A, так же как и ее столбцы, линейно зависимы.

16.22. Матрица A имеет порядок n и содержит нулевую подматрицу порядка $n - 1$. Оценить ранг A.

16.23. Матрица A имеет порядок n и содержит нулевую подматрицу порядка s. Оценить ранг A.

16.24. Матрица A имеет порядок n и содержит подматрицу порядка $n - 1$, имеющую ранг 1. Оценить ранг A.

16.25. 1) Оценить ранг произведения двух матриц через ранги сомножителей.

2) Привести примеры, когда выполнены соотношения: $\operatorname{rg} AB < \operatorname{rg} A$, $\operatorname{rg} AB < \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} AB < \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$, $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} A$, $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} B$.

16.26. 1) Пусть $\boldsymbol{a}$ — строка, $\boldsymbol{b}$ — столбец. Вычислить ранг матрицы $\boldsymbol{ba}$.

2) (р) Пусть $\operatorname{rg} A = 1$. Доказать, что матрица A равна произведению некоторого столбца на некоторую строку.

16.27 (р). Пусть A, B, C — матрицы, $\det A \neq 0$ и определены произведения AB, CA. Доказать, что $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} CA = \operatorname{rg} C$. Может ли быть выполнено какое-либо из этих равенств, если $\det A = 0$?

16.28. Доказать, что если $\operatorname{rg} A = r$, то минор, стоящий на пересечении r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов матрицы A, отличен от 0.

16.29. Пусть матрица A состоит из r линейно независимых столбцов, B — из r линейно независимых строк. Чему равен ранг AB?

16.30. Матрицы A и B имеют размеры соответственно $m\times r$ и $r\times n$, и $\operatorname{rg} AB = r$. Найти ранги матриц A и B.

16.31. Разложение матрицы A в произведение $A = BC$ называется *скелетным*, если $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} C$ и матрицы B и C имеют полный ранг (т. е. ранг, равный одному из размеров матрицы).

1) Доказать, что всякую матрицу A можно представить как произведение матрицы M, состоящей из базисных строк A, на некоторую матрицу K (скелетное разложение матрицы по строкам).

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для скелетного разложения матрицы по столбцам.

3) Как связаны между собой различные скелетные разложения одной матрицы?

16.32. Найти какие-нибудь скелетные разложения (см. задачу 16.31) по строкам и столбцам для следующих матриц:

1) A_{14}; 2) A_{231}; 3) A_{251}; 4) A_{403}; 5) A_{454}.

16.33. Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1.

16.34. Указать, какие из выписанных ниже соотношений возможны. Какие из них выполнены для произвольной пары матриц одинаковых размеров?

1) $\operatorname{rg}(A+B) = \operatorname{rg} A$;
2) $\operatorname{rg}(A+B) = \max(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$;
3) $\operatorname{rg}(A+B) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$;
4) $\operatorname{rg}(A+B) < \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$;
5) $\operatorname{rg}(A+B) < \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$;
6) $\operatorname{rg}(A+B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

16.35 (р). Пусть матрицы A и B имеют размеры соответственно $m\times n$ и $n\times p$, и пусть $AB = O$. Доказать, что $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leqslant n$.

16.36. Доказать, что

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} \sin(a_1+b_1) & \sin(a_1+b_2) & \ldots & \sin(a_1+b_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin(a_n+b_1) & \sin(a_n+b_2) & \ldots & \sin(a_n+b_n) \end{Vmatrix} \leqslant 2.$$

16.37. Доказать, что

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A & O \\ O & B \end{Vmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

16.38. Доказать, что

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} A & C \\ O & B \end{matrix}\right\|^{\square} \geqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

16.39. Пусть A — квадратная матрица. Доказать, что

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{matrix}\right\|^{\square} = \operatorname{rg} A.$$

16.40. Пусть E — единичная, A, B — произвольные квадратные матрицы порядка n. Доказать, что

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} E & B \\ A & AB \end{matrix}\right\|^{\square} = n.$$

16.41. Доказать, что

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} A & B \\ 3A & -B \end{matrix}\right\|^{\square} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

Г Л А В А VII

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе используются следующие понятия и термины: *однородная* и *неоднородная система линейных уравнений*, *основная матрица системы* (*матрица коэффициентов*), *определитель системы* n линейных уравнений с n неизвестными, *расширенная матрица системы*, *столбец свободных членов*, *совместная* и *несовместная* система уравнений, *эквивалентные* системы уравнений, *частное решение* и *общее решение* системы линейных уравнений, *фундаментальная система решений* и *фундаментальная матрица* однородной системы линейных уравнений, *базисные неизвестные* и *параметрические* (*свободные*) неизвестные, однородная система линейных уравнений, *сопряженная* данной.

Основные теоремы: теорема о существовании и единственности решения системы n линейных уравнений с n неизвестными (теорема Крамера), а также два критерия совместности системы m уравнений с n неизвестными: теорема Кронекера—Капелли и теорема Фредгольма.

Приведем некоторые формулы и обозначения.

Система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

может быть записана в матричном виде:

$$Ax = b,$$

где через x и b обозначены столбцы $\| x_1 \ldots x_n \|^T$ и $\| b_1 \ldots b_m \|^T$ соответственно. Матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \| A \mid b \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$$

называются *основной* и *расширенной* матрицами системы уравнений. *Решением* системы (1) называется упорядоченный набор чисел такой, что после подстановки i-го числа вместо неизвестной x для каждого i во все уравнения мы получим m истинных равенств. Эти числа называются *компонентами решения*. Решение системы уравнений записываем в виде столбца. Множество всех решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными задается формулой

$$X = h_1 X_1 + \ldots + h_{n-r} X_{n-r}. \tag{2}$$

Здесь: столбцы $X_1, \ldots, X_{n-r}$ — линейно независимые частные решения данной однородной системы, $h_1, \ldots, h_{n-r}$ — произвольные постоянные числа (параметры), $r = \operatorname{rg} A$ — ранг системы. Множество $\{X_1, \ldots, X_{n-r}\}$ называется *фундаментальной системой решений* однородной системы уравнений. Все решения однородной системы образуют линейное подпространство в пространстве столбцов высоты n; фундаментальная система решений есть базис в этом подпространстве. Правая часть формулы (2) называется *общим решением однородной системы.* Формуле (2) можно придать матричный вид

$$X = \Phi h. \tag{3}$$

Здесь Φ — матрица из столбцов $X_1, \ldots, X_{n-r}$, h — столбец высоты $n-r$ из произвольных постоянных $h_1, \ldots, h_{n-r}$. Матрица Φ называется *фундаментальной матрицей однородной системы уравнений.*

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений может быть записано в форме

$$X = h_1 X_1 + \ldots + h_{n-r} X_{n-r} + X_0, \tag{4}$$

или

$$X = \Phi h + X_0, \tag{5}$$

где X_0 — некоторое (произвольное) частное решение неоднородной системы уравнений, а $h_1 X_1 + \cdots + h_{n-r} X_{n-r} = \Phi h$ — общее решение соответствующей однородной системы.

Системы уравнений, имеющие одно и то же множество решений, называются *эквивалентными.* Это понятие относим лишь к совместным системам. Мы говорим также, что система уравнений (Б) *следует* из (А), если множество решений (Б) содержит множество решений (А). При решении некоторых задач полезны утверждения: подсистема есть следствие системы; присоединение к системе уравнений ее следствий заменяет данную систему на эквивалентную.

Основным аппаратом при исследовании совместности системы линейных уравнений и отыскании ее решений служат преобразования системы уравнений, соответствующие элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы. При этих преобразованиях несовместная система переходит в несовместную, а совместная — в совместную систему уравнений, эквивалентную данной.

С помощью элементарных преобразований строк расширенная (и одновременно основная) матрица системы может быть приведена к упрощенной форме. Система уравнений, соответствующая упрощенной расширенной матрице, называется *упрощенной.*

Для того чтобы решить систему уравнений, можно придерживаться следующей схемы.

1. Расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований строк приводим к упрощенной форме.

2. Проверяем совместность упрощенной системы, пользуясь теоремой Кронекера—Капелли.

3. Решаем упрощенную систему уравнений, если она оказалась совместной.

Допустим, что базисными являются первые r столбцов матрицы A совместной системы. Тогда упрощенная расширенная матрица имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n-r} & & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2,n-r} & & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{r,n-r} & & \beta_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \dots & 0 & & 0 \end{array} \right\|. \tag{6}$$

Ей соответствует упрощенная система уравнений

$$\begin{array}{c} x_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1,\,n-r}x_n = \beta_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{r,\,n-r}x_n = \beta_r. \end{array} \tag{7}$$

Неизвестные $x_1, \dots, x_r$, соответствующие базисным столбцам матрицы, называются *базисными*, остальные неизвестные — $x_{r+1}, \dots, x_n$ — *свободными*. Задав значения $h_1, \dots, h_{n-r}$ свободных неизвестных, находим базисные неизвестные из системы уравнений (7). Общее решение получим в форме

$$\begin{array}{l} x_1 = -\alpha_{11}h_1 - \dots - \alpha_{1,\,n-r}h_{n-r} + \beta_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = -\alpha_{r1}h_1 - \dots - \alpha_{r,\,n-r}h_{n-r} + \beta_r, \\ x_{r+1} = h_1, \dots, x_n = h_{n-r}, \end{array} \tag{8}$$

где $h_1, \dots, h_{n-r}$ — произвольные постоянные. Общее решение (8) можно записать в векторной (4) и матричной (5) форме, положив

$$X = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{array} \right\|, \quad X_0 = \left\| \begin{array}{c} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{array} \right\|, \quad \Phi = \left\| \begin{array}{ccc} -\alpha_{11} & \dots & -\alpha_{1,\,n-r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_{r1} & \dots & -\alpha_{r,\,n-r} \\ 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|. \tag{9}$$

Матрица Φ, определяемая формулой (9), называется *нормальной фундаментальной матрицей*. Ее столбцы образуют *нормальную фундаментальную систему решений* однородной системы уравнений

$$\begin{gathered} x_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,\,n-r}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,\,n-r}x_n = 0, \end{gathered} \qquad (10)$$

соответствующую базисным неизвестным $x_1, \ldots, x_r$. Нормальную фундаментальную матрицу можно выписать прямо по расширенной матрице (6). Если упрощенную расширенную матрицу кратко записать в виде $\left\| \begin{array}{cc|c} E_r & D & \beta \\ O & O & o \end{array} \right\|$, то нормальная фундаментальная матрица может быть записана как $\left\| \begin{array}{c} -D \\ E_{n-r} \end{array} \right\|$. Здесь E_r, E_{n-r} — единичные матрицы порядка r и $n-r$ соответственно, а β — столбец из чисел $\beta_1, \ldots, \beta_r$.

Общее решение системы уравнений в форме (4) и (5) можно получить из систем уравнений (7), (10) без обращения к формуле (8). Частное решение можно найти из системы (7), задав каким-нибудь образом свободные неизвестные (если мы приравняем их к 0, то получим частное решение, определяемое формулой (9)). Столбцы фундаментальной матрицы можно найти как решения системы (10), придавая параметрическим неизвестным значения, образующие в совокупности невырожденную матрицу. В частности, если приравнять значения $\| x_{r+1} \ \ldots \ x_n \|^T$ к столбцам единичной матрицы, то решения системы (10) образуют фундаментальную матрицу (9).

Замечание. Допустим, что данная система уравнений совместна, но базисными являются не первые r столбцов основной матрицы, а какие-то другие. В этом случае, чтобы решить упрощенную систему уравнений, можно действовать одним из двух способов.

Способ 1. Аналогично п. 3 составляем упрощенную систему уравнений, называем базисными неизвестные, соответствующие базисным столбцам матрицы системы, выражаем базисные неизвестные через остальные (свободные) и записываем общее решение в форме (4) или (5).

Способ 2. Неизвестные, соответствующие базисным столбцам матрицы системы, обозначаем через $y_1, \ldots, y_r$, остальные — через $y_{r+1}, \ldots, y_n$. После этой замены неизвестных получаем упрощенную систему уравнений вида (7), решаем ее и делаем обратную замену.

Таким образом, существует много путей получения общего решения системы линейных уравнений и много различных форм его записи.

Ниже рассмотрен пример неоднородной системы уравнений, имеющей бесконечное число решений. Общее решение получено в координатной форме (8), векторной (4) и матричной (5). Но сначала отметим сокращения, используемые при изложении материала данной главы. В упражнениях системы уравнений и ответы к ним лишь частично приведены полностью в развернутой форме (1) и (8). Некоторая часть систем уравнений задана с помощью расширенной матрицы. В ответах к этим упражнениям мы помещаем фундаментальную матрицу решений однородной системы уравнений и столбец какого-либо частного решения неоднородной системы. Как в условиях задач, так и в ответах матрицы и столбцы не выписаны непосредственно, а указаны их номера в банке.

Пример. Пусть система уравнений задана расширенной матрицей $\| A_{581} | c_{58} \|$ (задача 19.6, 42)). В банке находим

$$\| A_{581} | c_{58} \| = \left\| \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 20 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 65 \end{array} \right\|.$$

Эта расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 20, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 &= -5, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 &= 65. \end{aligned} \tag{11}$$

Применяя алгоритм Гаусса, приводим расширенную матрицу к упрощенному виду:

$$\left\| \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 19/5 & 2/5 & 33/5 & 5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 11/5 & 4/5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \tag{12}$$

Замечаем, что система совместна, так как в расширенной матрице (12) базисными являются два первых столбца. Расширенная матрица (12) соответствует системе уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{19}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{33}{5}x_5 &= 5, \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{11}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 &= 5, \end{aligned} \tag{13}$$

эквивалентной данной. Базисные неизвестные — x_1, x_2, свободные — x_3, x_4, x_5. Обозначим последние через h_1, h_2, h_3; получаем общее решение:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{19}{5}h_1 - \frac{2}{5}h_2 - \frac{33}{5}h_3 + 5, \\ x_2 &= -\frac{2}{5}h_1 - \frac{11}{5}h_2 - \frac{4}{5}h_3 + 5, \\ x_3 &= h_1, \quad x_4 = h_2, \quad x_5 = h_3. \end{aligned} \tag{14}$$

Общее решение системы уравнений (13) можно получить другим способом. Сначала, положив в (13) $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, находим ее частное решение:

$$X_0 = \left\| \begin{matrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим однородную систему

$$x_1 + \frac{19}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{33}{5}x_5 = 0,$$
$$x_2 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{11}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 = 0.$$

Положив $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$, находим $x_1 = -19/5$, $x_2 = -2/5$. Положив $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, находим $x_1 = -2/5$, $x_2 = -11/5$. Положив $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_1 = -33/5$, $x_2 = -4/5$. Таким образом, мы находим три линейно независимых частных решения однородной системы уравнений (фундаментальную систему решений):

$$\begin{Vmatrix} -19/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -2/5 \\ -11/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} -33/5 \\ -4/5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь можно записать общее решение данной системы уравнений (11):

$$X = h_1\begin{Vmatrix} -19/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + h_2\begin{Vmatrix} -2/5 \\ -11/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + h_3\begin{Vmatrix} -33/5 \\ -4/5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}. \qquad (16)$$

Очевидно, (16) есть другая запись формулы (14).

Наконец, исходя из сказанного в п. 3, можно получинить общее решение системы уравнений (13) сразу в матричной форме (5). Для этого используем частное решение (15), а фундаментальную матрицу Φ составляем по матрице (12), пользуясь правилом $\begin{Vmatrix} -D \\ E \end{Vmatrix}$. В данном случае получим

$$\Phi = \begin{Vmatrix} -19/5 & -2/5 & -33/5 \\ -2/5 & -11/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

и общее решение имеет вид

$$X = \begin{Vmatrix} -19/5 & -2/5 & -33/5 \\ -2/5 & -11/5 & -4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} h + \begin{Vmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad (17)$$

где h — столбец из произвольных постоянных h_1, h_2, h_3. Ясно, что (17) есть матричная запись (16).

Заменив произвольные постоянные h_1, h_2, h_3 на $\tilde{h}_1 = -5h_1$, $\tilde{h}_2 = -5h_2$, $\tilde{h}_3 = -5h_3$, общее решение данной системы уравнений можно записать и в такой форме:

$$X = \begin{Vmatrix} 19 & 2 & 33 \\ 2 & 11 & 4 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{Vmatrix} \tilde{h} + \begin{Vmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \text{где } \tilde{h} = \begin{Vmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \tilde{h}_3 \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

В ответе к данной задаче 19.6.42 указаны матрица A_{409} и столбец c_{231}. В банке находим

$$\Phi = A_{409} = \begin{Vmatrix} 19 & 2 & 33 \\ 2 & 11 & 4 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{Vmatrix}, \quad c_{231} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

что соответствует решению (18). Напомним, что и фундаментальная система решений, и частное решение определены не однозначно.

§ 17. Системы линейных уравнений с определителем, отличным от 0

17.1. Выписать расширенную матрицу данной системы уравнений. Решить систему.

1) $2x_1 + x_2 = 10,\quad x_1 + x_2 = 17;$ 2) $3x + 5y = 2,\quad 5x + 9y = 4;$

3) $2x_1 + x_2 - x_3 = 2,\quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3,\quad x_1 + x_3 = 3;$ 4) $y + 3z = -1,\quad 2x + 3y + 5z = 3,\quad 3x + 5y + 7z = 6;$

5) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16,$
$x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23,$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10,$
$4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1;$

6) $2x + 3y + 4z + 5t = 30,$
$3x + 3y + 4z + 5t = 34,$
$4x + 4y + 4z + 5t = 41,$
$x + y + z + t = 10;$

7) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$
$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = -3,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3,$
$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = -2;$

8)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3, \\ x_1 + x_3 &= 4, \\ x_1 + x_4 &= -2, \\ x_1 + x_5 &= -1, \\ x_1 + x_6 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= -1. \end{aligned}$$

17.2. Выписать систему линейных уравнений, соответствующую данной расширенной матрице. Решить систему, пользуясь правилом Крамера.

1) $\|A_{40} | c_7\|$; 2) $\|A_6 | c_9\|$; 3) $\|A_{202} | c_{54}\|$; 4) $\|A_{209} | c_{55}\|$;
5) $\|A_{204} | c_{56}\|$; 6) $\|A_{203} | c_{53}\|$; 7) $\|A_{203} | o\|$.

17.3. Доказать утверждение:

1) Если уравнения системы (Б) являются линейными комбинациями уравнений совместной линейной системы (А), то множество решений системы (Б) содержит множество решений (А).

2) Присоединение к совместной системе линейных уравнений линейных комбинаций из ее уравнений заменяет систему на эквивалентную.

3) При элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы совместная система линейных уравнений заменяется на эквивалентную.

17.4. Как изменяются решения системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях столбцов основной матрицы?

17.5. Какую систему уравнений простейшего вида можно получить, применяя алгоритм Гаусса к строкам расширенной матрицы данной системы n линейных уравнений с n неизвестными, если основная матрица невырождена?

17.6. Составить систему линейных уравнений по данной расширенной матрице. Решить систему. (Нижеследующие матрицы разбиты на 4 группы по порядку основной матрицы.)

$n = 2$:
1) $\|A_{18} | c_{10}\|$; 2) $\|A_8 | c_{12}\|$; 3) $\|A_{10} \| c_{12}\|$;

$n = 3$:
4) $\|A_{216} | c_{59}\|$; 5) $\|A_{217} | c_{60}\|$; 6) $\|A_{218} | c_{61}\|$;
7) $\|A_{219} | c_{98}\|$; 8) $\|A_{220} | c_{63}\|$;

$n = 4$:
9) $\|A_{446} | c_{154}\|$; 10) $\|A_{447} | c_{155}\|$; 11) $\|A_{448} | c_{185}\|$;
12) $\|A_{449} | c_{157}\|$; 13) $\|A_{442} | c_{158}\|$; 14) $\|A_{442} | c_{159}\|$;
15) $\|A_{439} | c_{160}\|$;

$n = 5$:

16) $\|A_{537} \mid c_{232}\|$; 17) $\|A_{538} \mid c_{238}\|$; 18) $\|A_{539} \mid c_{233}\|$;

19) $\|A_{540} \mid c_{234}\|$; 20) $\|A_{541} \mid c_{235}\|$; 21) $\|A_{542} \mid c_{236}\|$;

22) $\|A_{542} \mid c_{237}\|$; 23) $\|A_{543} \mid c_{268}\|$.

§ 18. Системы линейных однородных уравнений

18.1. Выписать матрицу коэффициентов данной системы линейных однородных уравнений. Решить систему.

1) $x - y = 0$; 2) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$;

3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$;

4) $\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0, \\ 2x + 4y + 3z &= 0; \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} 5x - 8y + 3z &= 0, \\ 2x - 3y + z &= 0; \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0, \\ 2x + 3y + 4z &= 0, \\ x + y + z &= 0; \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0; \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0; \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0; \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 &= 0; \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_5 &= 0, \\ x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 18x_5 &= 0; \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$

18.2. Доказать, что:

1) сумма двух решений однородной системы линейных уравнений есть решение той же системы;

2) произведение какого-либо решения однородной системы линейных уравнений на число есть решение той же системы.

18.3. Пусть k — максимальное число линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений. Выразить k через размеры и ранг матрицы системы. В каком случае $k = 0$?

18.4. Сколько линейно независимых решений имеет однородная система линейных уравнений, если ее матрица невырождена?

18.5. Может ли однородная система линейных уравнений оказаться несовместной?

18.6. Сформулировать условия (и проверить их необходимость и достаточность), при которых однородная система линейных уравнений имеет: 1) единственное решение; 2) бесконечно много решений.

18.7. Составить и решить однородную систему линейных уравнений, заданную своей матрицей коэффициентов:

1) $\| 1\ 2 \|$; 2) $\| 1\ 1\ 1 \|$; 3) $\| 1\ 3\ 0\ 1 \|$; 4) A_{391}; 5) A_{455}; 6) A_{500}; 7) A_{514}; 8) A_{519}; 9) A_{573}; 10) A_{582}; 11) A_{583}.

18.8. Составить однородную систему линейных уравнений по заданной матрице коэффициентов, содержащей параметр. Решить систему при всевозможных значениях параметра:

1) $A = A_{221} - \lambda E$; 2) $A = A_{212} - \lambda E$;

3) $A = A_{222} - \lambda E$; 4) $A = A_{365}$;

5) $A = A_{213} - \lambda E$; 6) $A = A_{363}$.

18.9. Решить однородную систему линейных уравнений, заданную своей матрицей коэффициентов. Составить и решить соответствующую сопряженную систему:

1) A_{114}; 2) A_{115}; 3) A_{118}; 4) A_{205}; 5) A_{209}; 6) A_{368}; 7) A_{408}; 8) A_{145}; 9) A_{146}; 10) A_{443}; 11) A_{587}; 12) A_{536}.

18.10. Могут ли данная однородная система линейных уравнений и ее сопряженная система иметь одинаковое число линейно независимых решений?

18.11. Могут ли совпадать множества решений данной однородной системы линейных уравнений и ее сопряженной?

18.12. Доказать, что однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда строки основной матрицы сопряженной системы линейно зависимы.

18.13. Зная одну фундаментальную матрицу Φ, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.

18.14. Данная матрица является фундаментальной матрицей некоторой однородной системы линейных уравнений. Найти хотя бы одну нормальную фундаментальную матрицу:

1) A_{117}; 2) A_{118}; 3) A_{397}.

18.15. Данная матрица является фундаментальной матрицей некоторой системы линейных уравнений. Найти все нормальные фундаментальные матрицы этой системы уравнений:

1) A_{119}; 2) $\boldsymbol{c}_{197}$; 3) A_{112}; 4) A_{398}.

18.16. В системе уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{x}$ — столбец), имеющей фундаментальную матрицу Φ, выполнена замена неизвестных $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{y}$ ($\det S \neq 0$). Какая система уравнений получится для $\boldsymbol{y}$? Укажите фундаментальную матрицу решений этой системы.

18.17. Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица является фундаментальной:

1) A_{110}; 2) A_{147}; 3) $\boldsymbol{c}_{197}$; 4) (р) A_{148}; 6) A_{411}.

§ 19. Системы линейных уравнений общего вида

Системы линейных неоднородных уравнений (19.1—19.12)

19.1. Решить систему линейных уравнений:

1) $2x - 3y = 4$; 2) $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$;

3) $2x + y + z = 4;$
$\quad 3x + z = 4;$

4) $(\sqrt{2} + 1)\,x + (\sqrt{2} - 1)\,y - \sqrt{2}z = 1 + \sqrt{2},$
$\quad x + (3 - 2\sqrt{2})\,y + (\sqrt{2} - 2)\,z = 1;$

5) $x + 2y + 3z = -4,$
$\quad 2x + 3y + 4z = 1,$
$\quad 3x + 4y + 5z = 6;$

6) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2,$
$\quad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1;$

7) $5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5,$
$\quad 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2,$
$\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3,$
$\quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4;$

8) $3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2,$
$\quad 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2,$
$\quad 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4,$
$\quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2;$

9) $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6,$
$\quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8;$

10) $6x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 2x_4 + x_5 = 2,$
$20x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 11x_5 = 20,$
$13x_1 + 4x_2 + 12x_3 + x_4 + 6x_5 = 11,$
$4x_1 + 7x_2 + 46x_3 - 12x_4 - 7x_5 = -12,$
$x_1 - 2x_2 - 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7.$

19.2. Доказать, что:

1) разность двух решений неоднородной системы линейных уравнений есть решение соответствующей однородной системы;

2) сумма любого решения неоднородной системы линейных уравнений и любого решения соответствующей однородной системы есть также решение данной неоднородной системы.

19.3. На сколько единиц ранг основной матрицы системы может отличаться от ранга расширенной?

19.4. Пусть система m линейных уравнений с n неизвестными несовместна, а ее основная матрица имеет ранг n. К какому простейшему виду можно привести эту систему уравнений, применяя к строкам расширенной матрицы алгоритм Гаусса?

19.5. Сформулировать необходимое и достаточное условие того, что система m линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение.

19.6. Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице. Решить систему или установить ее несовместность. (Нижеприведенные матрицы разбиты на 4 группы по числу столбцов основной матрицы. Внутри каждой группы матрицы упорядочены по числу строк.)

$n = 3$:

1) $\|A_{232} \mid c_{64}\|$; 2) $\|A_{232} \mid c_{65}\|$; 3) $\|A_{238} \mid c_{66}\|$;

4) $\|A_{239} \mid c_{67}\|$; 5) $\|A_{241} \mid c_{68}\|$; 6) $\|A_{233} \mid c_{70}\|$;

7) $\|A_{206} \mid c_{55}\|$; 8) $\|A_{206} \mid c_{51}\|$; 9) $\|A_{206}^T \mid c_{70}\|$;

10 $\|A_{400} \mid c_{162}\|$; 11) $\|A_{408} \mid c_{243}\|$; 12) $\|A_{585}^T \mid c_{240}\|$;

13) $\|A_{581}^T \mid c_{239}\|$.

$n = 4$:

14) $\|A_{145}^T \mid c_{14}\|$; 15) $\|A_{506} \mid c_{13}\|$; 16) $\|A_{149}^T \mid c_{15}\|$;

17) $\|A_{501} \mid c_{16}\|$; 18) $\|A_{502} \mid c_{17}\|$; 19) $\|A_{510} \mid c_{73}\|$;

20) $\|A_{511}|c_{74}\|$; 21) $\|A_{512}|c_{75}\|$; 22) $\|A_{513}|c_{62}\|$;

23) $\|A_{517}|c_{63}\|$; 24) $\|A_{399}^T|c_{50}\|$; 25) $\|A_{444}^T|c_{167}\|$;

26) $\|A_{520}|c_{244}\|$; 27) $\|A_{521}|c_{244}\|$; 28) $\|A_{523}|c_{241}\|$;

29) $\|A_{524}|c_{242}\|$; 30) $\|A_{587}^T|c_{245}\|$.

$n = 5$:

31) $\|A_{574}|c_{18}\|$; 32) $\|A_{575}|c_{46}\|$; 33) $\|A_{576}|c_{33}\|$;

34) $\|A_{581}|c_{77}\|$; 35) $\|A_{581}|c_{76}\|$; 36) $\|A_{422}^T|c_{72}\|$;

37) $\|A_{577}|c_{78}\|$; 38) $\|A_{584}|c_{79}\|$; 39) $\|A_{578}|c_{80}\|$;

40) $\|A_{579}|c_{81}\|$; 41) $\|A_{580}|c_{82}\|$; 42) $\|A_{581}|c_{58}\|$;

43) $\|A_{522}^T|c_{163}\|$; 44) $\|A_{523}^T|c_{164}\|$; 45) $\|A_{524}^T|c_{165}\|$;

46) $\|A_{588}|c_{166}\|$; 47) $\|A_{520}^T|c_{170}\|$; 48) $\|A_{544}|c_{246}\|$;

49) $\|A_{533}|c_{247}\|$.

$n = 6$:

50) $\|A_{591}|c_{271}\|$.

19.7. Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице, содержащей параметр. Найти все значения параметра, при которых система совместна, и решить ее.

1) $\|A_{223}|c_{85}\|$; 2) $\|A_{224}|c_{86}\|$; 3) $\|A_{225}|c_{87}\|$;
4) $\|A_{226}|c_{88}\|$.

19.8. Описать все линейные комбинации решений данной неоднородной системы линейных уравнений, которые являются решениями этой же системы.

19.9. Описать все такие линейные комбинации решений данной линейной неоднородной системы уравнений, которые являются решениями соответствующей однородной системы.

19.10. Пусть столбец из свободных членов линейной системы уравнений равен сумме столбцов ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

19.11. Пусть столбец из свободных членов линейной системы уравнений совпадает с последним столбцом ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

19.12. Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — столбцы решений систем уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ соответственно и α, β — некоторые числа. Какой системе уравнений удовлетворяет:

1) $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x}$; 2) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$; 3) $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$?

Условия совместности системы линейных уравнений (19.13—19.20)

19.13. Доказать, что если столбцы основной матрицы линейно независимы, то система линейных уравнений имеет не более одного решения.

19.14. Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

19.15. Доказать следующее утверждение: если система линейных уравнений совместна при любом столбце свободных членов, то строки ее основной матрицы линейно независимы.

19.16. Доказать, что всегда имеет место одна из двух возможностей: либо система линейных уравнений совместна при любом столбце свободных членов, либо ее сопряженная однородная система имеет ненулевое решение (*альтернатива Фредгольма*).

19.17. Сформулировать условия (и доказать их необходимость и достаточность), которым должна удовлетворять основная матрица для того, чтобы число решений системы линейных уравнений, в зависимости от столбца $\boldsymbol{b}$ свободных членов, равнялось:

1) 0 или 1; 2) 1 или ∞; 3) 0 или ∞; 4) 1 при всех $\boldsymbol{b}$.

19.18. Система линейных уравнений задана своей расширенной матрицей. Проверить совместность этой системы, пользуясь теоремой Фредгольма и результатом задачи 18.9 для соответствующей сопряженной системы уравнений:

1) $\|A_{114}\,|\,\boldsymbol{c}_{89}\|$; 2) $\|A_{118}\,|\,\boldsymbol{c}_{90}\|$; 3) $\|A_{587}\,|\,\boldsymbol{c}_{171}\|$.

19.19. Система уравнений задана своей расширенной матрицей, содержащей параметр. Применяя теорему Фредгольма, найти все значения параметра, при которых система совместна, и решить ее:

1) $\|A_{205}\,|\,\boldsymbol{c}_{91}\|$; 2) $\|A_{515}\,|\,\boldsymbol{c}_{91}\|$; 3) $\|A_{507}\,|\,\boldsymbol{c}_{91}\|$.

19.20. Система уравнений задана своей расширенной матрицей $\|A_{644}\,|\,\boldsymbol{c}_{282}\|$, зависящей от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, μ. Описать множество значений параметров, при которых система совместна, и решить ее.

Эквивалентные системы уравнений (19.21—19.29)

19.21. Доказать, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие однородные системы.

19.22. 1) Доказать, что нетривиальные уравнения *) $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ и $b_1x_1+\dots+b_nx_n=0$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{Vmatrix} = 1$.

2) Доказать, что нетривиальные *) уравнения $a_1x_1+\dots+a_nx_n=a$ и $b_1x_1+\dots+b_nx_n=b$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & \dots & a_n & a \\ b_1 & \dots & b_n & b \end{Vmatrix} = 1$.

3) Сформулировать признак попарной эквивалентности k линейных уравнений.

19.23. 1) Доказать, что системы линейных уравнений $A\boldsymbol{x}=o$, $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ ($\boldsymbol{x}$ — столбец) эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}^{\square} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B.$$

2) Доказать, что совместные системы линейных уравнений $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{x}$ — столбец) эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A & \boldsymbol{a} \\ B & \boldsymbol{b} \end{Vmatrix}^{\square} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B.$$

19.24. Проверить эквивалентность систем уравнений 18.1.11 и 18.1.12.

19.25. Проверить, эквивалентны ли системы уравнений, определяемые расширенными матрицами:

1) $(A_{502}\,|\,\boldsymbol{c}_{17})$ и $(A_{503}\,|\,\boldsymbol{c}_{12})$; 2) $(A_{239}\,|\,\boldsymbol{c}_{67})$ и $(A_{240}\,|\,\boldsymbol{c}_{147})$; 3) $(A_{581}\,|\,\boldsymbol{c}_{69})$ и $(A_{422}^T\,|\,\boldsymbol{c}_{72})$.

19.26. Проверить эквивалентность всех систем данной совокупности (каждая система уравнений задана расширенной матрицей): $(A_{501}\,|\,\boldsymbol{c}_{10})$, $(A_{509}\,|\,\boldsymbol{c}_{67})$ и $(A_{510}\,|\,\boldsymbol{c}_{73})$.

19.27. 1) Допустим, что добавление к данной однородной системе линейных уравнений еще некоторого числа линейных однородных уравнений не меняет множества

*) Линейное уравнение *нетривиально*, если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от 0.

ее решений. Доказать, что добавленные уравнения являются линейными комбинациями уравнений данной системы.

2) Доказать то же утверждение для совместной системы линейных неоднородных уравнений. Сравнить с задачей 17.3, 2).

19.28. 1) Допустим, что каждое решение однородной системы линейных уравнений (А) является также и решением однородной системы линейных уравнений (Б). Доказать, что тогда каждое уравнение системы (Б) является линейной комбинацией уравнений системы (А).

2) Доказать то же утверждение для совместных систем линейных неоднородных уравнений. Сравнить с задачей 17.3, 1).

19.29. 1) Доказать, что две однородные системы линейных уравнений эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнения каждой из них являются линейными комбинациями уравнений другой системы.

2) Доказать то же утверждение для совместных систем линейных неоднородных уравнений.

Приложения (19.30—19.49)

19.30 (р). Пусть $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ — произвольная система линейных уравнений ($\boldsymbol{x}$ — столбец). Доказать, что система уравнений $(A^TA)\,\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ совместна.

19.31 (р). Дана квадратная матрица $A = \|a_{ik}\|$. Доказать, что если при всех i выполнено неравенство $|a_{ii}| > \sum\limits_{k \neq i} |a_{ik}|$, то $\det A \neq 0$.

19.32. Доказать, что для любых попарно различных чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и любых чисел $b_1, \ldots, b_{n+1}$ существует единственный многочлен $f(t)$ степени не выше n такой, что $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_{n+1}) = b_{n+1}$.

19.33. Найти многочлен $f(t)$ третьей степени такой, что $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = 7$.

Приведенные ниже задачи 19.34—19.49 относятся к прямой, окружности, плоскости и сфере. Следует брать за определение алгебраическое уравнение соответствующего множества, а при решении задач применять теорию систем линейных уравнений, не пользуясь методами аналитической геометрии.

19.34. 1) (р). Сформулировать в терминах рангов и доказать условие на декартовы координаты (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) трех точек плоскости, необходимое и достаточное для того, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

2) Решить тот же вопрос для четырех точек плоскости.

19.35 (р). Доказать, что через две различные точки с декартовыми координатами (a_1, b_1), (a_2, b_2) проходит единственная прямая, и найти ее уравнение.

19.36. Показать, что через три точки с координатами (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность, и найти ее уравнение. Система координат декартова прямоугольная.

19.37. 1) Три прямые заданы на плоскости в общей декартовой системе координат уравнениями $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Сформулировать в терминах рангов и доказать условие на коэффициенты уравнений, необходимое и достаточное для того, чтобы эти прямые не проходили через одну точку.

2) Решить тот же вопрос для четырех прямых.

19.38. Используя результат задачи 19.37, определить, имеют ли данные прямые общую точку:

1) $2x + 3y + 1 = 0$, $7x + 11y + 4 = 0$, $3x + 4y + 1 = 0$;

2) $x + 8y + 1 = 0$, $7x - y + 1 = 0$, $11x - 26y - 1 = 0$, $8x + 7y + 2 = 0$.

19.39. 1) Четыре точки заданы своими декартовыми координатами (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Сформулировать в терминах рангов и доказать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы эти точки не лежали в одной плоскости.

2) Решить тот же вопрос для пяти точек.

19.40. Используя результат задачи 19.39, определить, лежат ли данные точки на одной плоскости:

1) $(7, -1, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(0, 10, 0)$, $(3, 4, 1)$, $(6, -2, 2)$;

2) $(6, 1, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 4, 1)$, $(6, 2, 2)$.

19.41. Показать, что через четыре точки с координатами (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3, 4$, не лежащие в одной плоскости, проходит единственная сфера, и найти ее уравнение. Система координат декартова прямоугольная.

19.42. Три точки заданы своими декартовыми координатами (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3$.

1) (р) Сформулировать в терминах рангов и доказать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

2) Решить тот же вопрос для m точек ($m \geqslant 4$).

19.43. Используя результат задачи 19.42, определить, лежат ли данные точки на одной прямой:

1) (2, 3, 1), (3, 4, 2), (0, 1, —1), (—2, —1, —3), (—6, —5,—7);

2) (2, 3, 1), (3, 4, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 3), (6, 5, 4).

19.44. Доказать, что через три точки с декартовыми координатами (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, 3$, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость, и найти ее уравнение.

19.45. Две плоскости заданы в общей декартовой системе координат уравнениями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$. Сформулировать в терминах рангов и доказать условия на коэффициенты уравнений, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости:

1) совпадали;

2) имели единственную общую прямую;

3) были параллельными, но не совпадали.

19.46. Три плоскости заданы в общей декартовой системе координат уравнениями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Сформулировать в терминах рангов и доказать условия на коэффициенты уравнений, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости:

1) совпадали;

2) имели единственную общую точку;

3) имели единственную общую прямую;

4) были параллельными, но не все совпадали;

5) образовывали призму.

19.47. Используя результат задачи 19.46, определить взаимное расположение плоскостей:

1) $3x + 2y + 5z - 1 = 0$, $2x + 3y + 3z + 1 = 0$, $9x + 16y + 13z + 1 = 0$;

2) $x - y - z + 1 = 0$, $5x - 21y - 17z + 1 = 0$, $6x - 26y - 21z + 1 = 0$.

19.48. Четыре плоскости заданы в общей декартовой системе координат уравнениями $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Известно, что пары, соответствующие $i = 1, 2$ и $i = 3, 4$, определяют прямые линии. Сформулировать в терминах рангов и доказать условия на коэффициенты уравнений, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые:

1) пересекались;
2) были параллельными, но не совпадали;
3) совпадали;
4) скрещивались.

19.49. Используя результат задачи 19.48, определить взаимное расположение прямых:

1) $$\begin{cases} 3x + 2y + 5z - 1 = 0, \\ -x + 2y + 3z - 1 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x - 6y + 7z + 2 = 0, \\ 5x + 3y - 8z - 3 = 0; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x + 3y + 3z - 2 = 0, \\ x - 9y - 6z - 5 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x - 14y - 9z - 9 = 0, \\ 4x + 2y + z - 7 = 0. \end{cases}$$

ГЛАВА VIII

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе используются следующие основные понятия и термины: *вещественное линейное пространство* (*линейное пространство над полем вещественных чисел*), *комплексное линейное пространство* (*линейное пространство над полем комплексных чисел*), *линейная комбинация векторов*, *линейно зависимая система векторов*, *базис в линейном пространстве*, *координаты вектора в базисе*, *координатный столбец вектора*, *конечномерное линейное пространство и его размерность*, *арифметическое пространство* (*вещественное и комплексное*), *бесконечномерное линейное пространство*, *матрица перехода от одного базиса к другому*, *линейное подпространство*, *нулевое подпространство*, *линейная оболочка системы векторов* (*линейное подпространство, натянутое на эту систему векторов*), *сумма* и *пересечение* двух (и любого конечного числа) *подпространств*, *прямая сумма* двух (и любого конечного числа) *подпространств*.

Перечислим основные примеры линейных пространств.

1) Арифметическое n-мерное линейное пространство $\mathcal{R}_n$ над полем вещественных чисел (вещественное арифметическое пространство) — пространство столбцов высоты n с вещественными элементами. Операции сложения столбцов и умножения столбца на число осуществляются покомпонентно. Базис этого пространства, состоящий из столбцов единичной матрицы, называется стандартным. Координатами столбца относительно стандартного базиса являются его элементы.

2) Арифметическое n-мерное линейное пространство $\mathcal{C}_n$ над полем комплексных чисел (комплексное арифметическое пространство) — пространство столбцов высоты n с комплексными элементами. Операции и стандартный базис определяются так же, как и в $\mathcal{R}_n$.

3) Пространство $\mathcal{R}_{m\times n}$ вещественных матриц размера $m\times n$ над полем вещественных чисел с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число. Размерность пространства $\mathcal{R}_{m\times n}$ равна mn. В пространстве $\mathcal{R}_{m\times n}$ стандартным называем базис, состоящий из матричных единиц E_{ij}, $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, n$ (см. введение к § 15). Базисные матрицы упорядочиваем следующим образом: $E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{m1}, E_{12}, \ldots, E_{m2}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{mn}$ *).

*) О другом способе упорядочивания см. введение к гл. XII.

4) Пространство $\mathcal{C}_{m\times n}$ комплексных матриц размера $m\times n$ над полем комплексных чисел. Операции, размерность, стандартный базис — такие же, как и в $\mathcal{R}_{m\times n}$.

5) Пространство $\mathcal{P}^{(n)}$ многочленов с вещественными коэффициентами от одной переменной t, имеющих степени, не превосходящие данного числа n. Операции — обычные операции сложения многочленов и умножения многочлена на число. Размерность пространства $\mathcal{P}^{(n)}$ равна $n+1$. Стандартным базисом называем базис из многочленов $1, t, t^2, \dots, t^n$.

Произвольное линейное пространство обозначаем буквой $\mathcal{L}$, его размерность — $\dim \mathcal{L}$. Если $\dim \mathcal{L} = n$, то пишем: $\mathcal{L}_n$. Элементы линейного пространства называем векторами, их координаты записываем в виде столбцов.

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ — координатный столбец вектора x в базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$. Тогда

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = e\xi, \tag{1}$$

где e понимается как строка из векторов $e_1, \dots, e_n$. Формула (1) называется формулой разложения вектора x по базису e.

Пусть векторы $e'_1, \dots, e'_n$ базиса e' заданы своими координатами относительно базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$:

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} e_k, \qquad i = 1, \dots n. \tag{2}$$

Матрица S, столбцами которой являются координатные столбцы новых базисных векторов $e'_1, \dots, e'_n$ относительно старого базиса e, называется *матрицей перехода от базиса e к базису e'*. Равенство (2) можно переписать так:

$$e' = eS. \tag{3}$$

Это равенство сохранится, если вместо строк из векторов e и e' рассматривать матрицы из координатных столбцов векторов $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ в некотором фиксированном базисе.

Если вектор x имеет координатный столбец ξ в базисе e и координатный столбец ξ' в базисе e', а S — матрица перехода от базиса e к базису e', то

$$\xi = S\xi'. \tag{4}$$

При фиксированном базисе пространства каждой линейной комбинации векторов взаимно однозначно соответствует такая же линейная комбинация их координатных столбцов.

Приведем схемы решения некоторых важных типичных задач.

1) Векторы $f_1, \ldots, f_n$ базиса f и вектор x даны своими координатными столбцами относительно базиса e. Найти координатный столбец ξ' вектора x относительно базиса f.

Решение. Столбец ξ' находится из матричного уравнения (4), где ξ — координатный столбец вектора x в базисе e, а S — матрица из координатных столбцов векторов $f_1, \ldots, f_n$ в базисе e. Для того чтобы вычислить столбец ξ', матрицу $\| S \mid \xi \|$ с помощью элементарных преобразований строк упрощаем так, чтобы на месте S оказалась единичная матрица. Тогда на месте столбца ξ окажется искомый столбец ξ'.

2) Векторы базисов $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $g = (g_1, \ldots, g_n)$ заданы своими координатными столбцами относительно третьего базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Найти матрицу перехода S от базиса f к базису g.

Решение. Пусть F и G — матрицы из координатных столбцов векторов $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$. Применяя в нашем случае матричное равенство (3), имеем: $G = FS$.

Матрицу $S = F^{-1}G$ можно вычислить с помощью элементарных преобразований строк матрицы $\| F \mid G \|$. Если после элементарных преобразований строк на месте матрицы F окажется единичная матрица, то на месте G будет искомая матрица S.

3) Векторы $a_1, \ldots, a_k$ заданы своими координатными столбцами в некотором базисе e. Проверить, образуют ли данные векторы базис в пространстве, выявить линейные зависимости между ними, найти базис в линейной оболочке системы $a_1, \ldots, a_k$.

Решение. Пусть A — матрица из координатных столбцов данных векторов. Элементарное преобразование строк A равносильно умножению A слева на невырожденную матрицу T. При этом все столбцы A также умножаются слева на T, и линейные зависимости между столбцами матрицы не меняются.

Данные векторы образуют базис в $\mathscr{L}_n$ тогда и только тогда, когда $k = n$ и $\det A \neq 0$. Обозначим линейную оболочку $a_1, \ldots, a_k$ через $\mathscr{P}$. Базис в $\mathscr{P}$ состоит из таких векторов a_i, координатные столбцы которых являются базисными столбцами матрицы A. Остальные векторы раскладываются по ним с теми же коэффициентами, с которыми соответствующие координатные столбцы раскладываются по базисным столбцам A. Для отыскания этих коэффициентов матрицу A следует привести к упрощенной форме с помощью элементарных преобразований строк.

Например, пусть векторы a_1, a_2, a_3 четырехмерного пространства имеют в некотором базисе e координатные столбцы

$$\left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\|.$$

Матрицу

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

с помощью преобразований строк приводим к виду

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, третий столбец матрицы $\widetilde{A}$ равен сумме двух первых. Поэтому третий столбец матрицы A также равен сумме двух первых, и $a_3 = a_1 + a_2$.

Множество решений системы линейных однородных уравнений с n неизвестными можно рассматривать как множество координатных столбцов векторов некоторого линейного подпространства в пространстве $\mathscr{L}_n$. В этом смысле каждая система линейных однородных уравнений с n неизвестными определяет линейное подпространство в $\mathscr{L}_n$. Базис этого подпространства есть совокупность векторов, координатные столбцы которых образуют фундаментальную систему решений данной однородной системы линейных уравнений.

4) Векторы $a_1, \ldots, a_k$ заданы своими координатными столбцами относительно базиса e пространства $\mathscr{L}_n$. Найти систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку $\mathscr{P}$ данных векторов.

Решение. Выпишем матрицу A из координатных столбцов векторов $a_1, \ldots, a_k$. Пусть $\operatorname{rg} A = r$. Для того чтобы вектор с координатным столбцом $\xi = (x_1, \ldots, x_n)^T$ принадлежал подпространству $\mathscr{P}$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\widetilde{A} = \| A \mid \xi \|$ также был равен r. Элементарными преобразованиями строк матрица A приводится к ступенчатому виду; при этом последние $n-r$ строк становятся нулевыми. Если такие же преобразования проделать с матрицей $\widetilde{A}$, то в последних $n-r$ строках на $(k+1)$-м месте появятся некоторые линейные комбинации чисел $x_1, \ldots, x_n$. Приравняв их нулю, получим искомую систему линейных уравнений.

Составим, например, систему уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов a_1, a_2, a_3 из предыдущего номера. Матрица

$$\widetilde{A}=\left\Vert\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right\Vert$$

приводится к ступенчатому виду

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + x_2 - 2x_4 \end{array}\right\|.$$

Ранг матрицы без четвертого столбца равен 2; для того чтобы ранг всей матрицы тоже был равен 2, необходимо и достаточно выполнение условий $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$. Это и есть искомая система линейных уравнений, определяющая линейную оболочку векторов a_1, a_2, a_3 в базисе $\boldsymbol{e}$.

Суммой конечного числа линейных подпространств $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$, ..., $\mathscr{P}$ называется линейная оболочка объединения множеств $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$, ..., $\mathscr{P}$ Сумма $\mathscr{M} + \mathscr{N} + \ldots + \mathscr{P}$ конечного числа линейных подпространств называется прямой суммой, если каждое из подпространств $\mathscr{M}, \mathscr{N}, \ldots$ ..., $\mathscr{P}$ имеет нулевое пересечение с суммой остальных подпространств. Прямая сумма обозначается так: $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \oplus \ldots \oplus \mathscr{P}$.

Если $\mathscr{L} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$, то проекцией вектора $x \in \mathscr{L}$ на линейное подпространство $\mathscr{M}$ параллельно линейному подпространству $\mathscr{N}$ называется слагаемое x_1 в разложении $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathscr{M}$, $x_2 \in \mathscr{N}$.

Остановимся на основных задачах, связанных с понятиями суммы и пересечения подпространств.

5) Линейные подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ заданы как линейные оболочки векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$ соответственно. Найти базис суммы $\mathscr{P} + \mathscr{Q}$.

Р е ш е н и е. Подпространство $\mathscr{P} + \mathscr{Q}$ является линейной оболочкой системы векторов $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l$. Поэтому задача сводится к задаче 3).

6) Линейные подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ заданы системами линейных однородных уравнений. Найти пересечение $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$.

Р е ш е н и е. Подпространство $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$ задается системой уравнений, составленной из уравнений обеих данных систем. Размерность подпространства $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$ можно вычислить по *формуле Грассмана*

$$\dim(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = \dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{Q} - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}).$$

§ 20. Примеры линейных пространств. Базис и размерность

20.1. Является ли линейным пространством:

1) пустое множество;

2) множество, состоящее из одного нулевого элемента?

20.2. Можно ли определить во множестве из двух элементов операции сложения и умножения на число так, чтобы это множество стало линейным пространством?

20.3. Доказать, что:

1) если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима;

2) если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима;

3) если векторы $a_1, \ldots, a_k$ линейно независимы, а векторы $a_0, a_1, \ldots, a_k$ линейно зависимы, то вектор a_0 является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_k$.

20.4. Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов в n-мерном пространстве, и если является, то найти его размерность:

1) множество векторов, все координаты которых равны между собой;

2) множество векторов, первая координата которых равна 0;

3) множество векторов, сумма координат которых равна 0;

4) множество векторов, сумма координат которых равна 1;

5) множество векторов плоскости, параллельных данной прямой;

6) множество векторов трехмерного пространства, перпендикулярных данной прямой;

7) множество векторов плоскости, по модулю не превосходящих 1;

8) множество векторов плоскости, образующих угол α с данной прямой ($0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$).

20.5. Доказать, что множество матриц размера $m \times n$ образует линейное пространство относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на число. Найти размерность и базис этого пространства $\mathcal{R}_{m\times n}$.

20.6. Выяснить, является ли данное множество квадратных матриц порядка n линейным подпространством в пространстве всех квадратных матриц порядка n, и если является, то найти его размерность:

1) множество матриц с нулевой первой строкой;

2) множество диагональных матриц;

3) множество верхних треугольных матриц;

4) множество симметрических матриц;

5) множество кососимметрических матриц;

6) множество вырожденных матриц.

20.7. Выяснить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a, b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

1) множество функций, непрерывных на $[a, b]$;

2) множество функций, дифференцируемых на $[a, b]$;

3) множество функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$;

4) множество функций, ограниченных на $[a, b]$;

5) множество функций таких, что $\sup\limits_{[a, b]} |f(x)| \leqslant 1$;

6) множество функций, неотрицательных на $[a, b]$;

7) множество функций таких, что $f(a) = 0$;

8) множество функций таких, что $f(a) = 1$;

9) множество функций таких, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$;

10) множество функций, монотонно возрастающих на $[a, b]$;

11) множество функций, монотонных на $[a, b]$.

20.8. Доказать, что при любом натуральном n данное множество функций образует конечномерное линейное пространство; найти размерность и указать базис этого пространства:

1) множество многочленов степени не выше n (обозначается $\mathscr{P}^{(n)}$);

2) множество четных многочленов степени не выше n;

3) множество нечетных многочленов степени не выше n;

4) множество тригонометрических многочленов порядка не выше n, т. е. множество функций вида $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$;

5) множество четных тригонометрических многочленов порядка не выше n;

6) множество нечетных тригонометрических многочленов порядка не выше n;

7) множество функций вида $f(t) = e^{\alpha t} (a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, где α — фиксированное действительное число.

20.9. Доказать, что данное множество функций образует бесконечномерное линейное пространство:

1) множество всех многочленов;

2) множество всех тригонометрических многочленов;

3) множество функций, непрерывных на некотором отрезке.

20.10. Найти линейную комбинацию столбцов:

1) $3c_1 - \frac{1}{3}c_2$; 2) $-c_{29} + c_{33} + 2c_{31}$;

3) $\frac{1}{2}c_{143} - \frac{1}{2}c_{138}$; 4) $c_{206} - 3c_{198} + 2c_{199}$.

20.11. Найти линейную комбинацию матриц

$$\frac{1}{3}A_{215} - \frac{1}{2}A_{252} + A_{253} - A_{254}.$$

20.12. Найти столбец x из уравнения:

1) $c_{28} + c_{29} - 2x = c_{32}$; 2) $\frac{c_{141} + x}{2} - \frac{c_{146} + x}{3} = c_{142}$;

3) $3(c_{197} + x) + 2(c_{202} - x) = 4(c_{204} - x)$.

20.13. Выявить линейные зависимости между данными столбцами:

1) c_{34}, c_{35}, c_{29}; 2) c_{84}, c_{83}, c_{120};

3) c_{166}, c_{198}, c_{199}, c_{201}; 4) c_{166}, c_{197}, c_{205}, c_{206}.

20.14. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы столбцов:

1) c_1, c_2; 2) c_{31}, c_{28}, c_{30}; 3) c_{31}, c_{30}, c_{32};

4) c_{121}, c_{124}, c_{118}; 5) c_{166}, c_{198}, c_{199}, c_{201};

6) c_{196}, c_{198}, c_{202}; 7) c_{166}, c_{196}, c_{197}, c_{198};

8) o; 9) c_{166}, c_{203}, c_{204}, c_{197}.

20.15. Найти размерность и базис линейной оболочки системы матриц A_{391}, A_{390}, A_{389}.

20.16. Найти размерность и базис линейной оболочки системы многочленов $(1 + t)^3$, t^3, 1, $t + t^2$.

20.17. Доказать, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в n-мерном арифметическом пространстве, и найти координатный столбец вектора x в этом базисе:

1) $n = 1$, $e_1 = c_1$, $x = c_2$;

2) $n = 2$, $e_1 = c_{28}$, $e_2 = c_{29}$, $x = c_{30}$;

3) $n = 3$, $e_1 = c_{116}$, $e_2 = c_{120}$, $e_3 = c_{122}$, $x = c_{49}$;

4) $n = 4$, $e_1 = c_{196}$, $e_2 = c_{197}$, $e_3 = c_{198}$, $e_4 = c_{199}$, $x = c_{200}$;

5) $n = 5$, $e_1 = c_{255}$, $e_2 = c_{263}$, $e_3 = c_{264}$, $e_4 = c_{265}$, $e_5 = c_{266}$, $x = c_{267}$.

20.18. Доказать, что матрицы A_5, A_{10}, A_{13}, A_6 образуют базис в пространстве квадратных матриц порядка 2, и найти координатный столбец матрицы A_{26} в этом базисе.

20.19. Доказать, что матрицы A_{200}, A_{202}, A_{205}, A_{204}, A_{203}, A_{242} образуют базис в пространстве симметрических матриц порядка 3, и найти координатный столбец матрицы A_{215} в этом базисе.

20.20. Доказать, что многочлены 1, $t-\alpha$, $(t-\alpha)^2, \ldots$ $\ldots, (t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n, и найти координатный столбец произвольного многочлена $p_n(t)$ степени не выше n в этом базисе.

20.21 (р). Доказать, что многочлены $2t+t^5$, t^3-t^5, $t+t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше 5, и найти координатный столбец многочлена $5t-t^3+2t^5$ в этом базисе.

20.22. Найти размерность и базис линейного пространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:

1) $A_{27}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$; 2) $A_{238}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$; 3) $A_{249}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$;

4) $A_{391}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$; 5) $A_{110}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$; 6) $A_{412}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$;

7) $A_{577}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

20.23. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:

1) $\boldsymbol{c}_{66}, \boldsymbol{c}_{83}$; 2) $\boldsymbol{c}_{31}, \boldsymbol{c}_{30}$; 3) $\boldsymbol{c}_{30}, \boldsymbol{c}_{29}$;

4) $\boldsymbol{c}_{166}, \boldsymbol{c}_{196}$; 5) $\boldsymbol{c}_{197}$; 6) $\boldsymbol{c}_{166}, \boldsymbol{c}_{198}, \boldsymbol{c}_{199}, \boldsymbol{c}_{201}$;

7) $\boldsymbol{c}_{166}, \boldsymbol{c}_{196}, \boldsymbol{c}_{197}, \boldsymbol{c}_{198}$; 8) $(0, 0, 0, 0)^T$.

20.24. Доказать, что каждая из двух систем векторов $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ и $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ является базисом в n-мерном арифметическом пространстве, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ во втором базисе.

1) $n=1$, $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{c}_1$;

2) $n=2$, $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{c}_{29}$, $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{c}_{33}$, $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{c}_{32}$, $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{c}_{28}$;

3) $n=3$, $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{c}_{116}$, $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{c}_{117}$, $\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{c}_{94}$, $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{c}_{119}$, $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{c}_{84}$, $\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{c}_{83}$;

4) $n=4$, $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{c}_{196}$, $\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{c}_{197}$, $\boldsymbol{f}_4=\boldsymbol{c}_{198}$, $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{c}_{199}$, $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{c}_{200}$, $\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{c}_{202}$, $\boldsymbol{g}_4=\boldsymbol{c}_{203}$.

20.25. Доказать, что каждая из двух систем матриц $A_{132}, A_{143}, A_{134}, A_{133}, A_{110}, A_{135}$ и $A_{136}, A_{137}, A_{112}, A_{138}, A_{139}, A_{113}$ является базисом в пространстве матриц размера 3×2, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты матрицы размера 3×2 в первом базисе, если известны ее координаты $\xi_1', \ldots, \xi_6'$ во втором базисе.

20.26 (р). Доказать, что каждая из двух систем матриц $A_{250}, A_{251}, A_{252}$ и $A_{253}, A_{254}, A_{255}$ является базисом в пространстве кососимметрических матриц порядка 3, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты кососимметрической матрицы порядка 3 в первом базисе, если известны ее координаты ξ_1', ξ_2', ξ_3' во втором базисе.

20.27. Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2$, t^3, $1+5t+t^3$, $(1+t)^3$ и $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t-t^2+t^3$, $1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти координаты многочлена степени не выше 3 в первом базисе, если известны его координаты ξ_1', ξ_2', ξ_3', ξ_4' во втором базисе.

20.28. Доказать, что каждая из двух систем функций $(1+t^2)^2$, $(1-t^2)^2$, 1 и $1+t^2+t^4$, $1-t^2+t^4$, t^4 является базисом в пространстве четных многочленов степени не выше 4, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты четного многочлена степени не выше 4 в первом базисе, если известны его координаты ξ_1', ξ_2', ξ_3' во втором базисе.

20.29. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

1) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;
2) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;
3) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

20.30. Матрица S_1 является матрицей перехода от первого базиса $e_1, \ldots, e_n$ в n-мерном линейном пространстве ко второму базису $f_1, \ldots, f_n$, а матрица S_2 — матрицей перехода от второго базиса к третьему базису $g_1, \ldots, g_n$. Найти матрицу перехода:

1) от первого базиса к третьему;
2) от второго базиса к первому.

20.31. Описать взаимное расположение двух базисов в трехмерном линейном пространстве, если матрица перехода от первого базиса ко второму:

1) диагональная;
2) верхняя треугольная;
3) нижняя треугольная.

§ 21. Сумма и пересечение подпространств

21.1. Доказать, что пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой подпространства симметрических матриц и подпространства кососимметрических матриц того же порядка.

21.2. Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

21.3. Доказать, что n-мерное линейное пространство является прямой суммой подпространства векторов, все координаты которых равны между собой, и подпространства векторов, сумма координат которых равна 0.

21.4. Доказать, что n-мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейных подпространств, натянутых на системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$:

1) $n=2$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{30}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{32}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{35}$;

2) $n=3$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{141}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{146}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{66}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{140}$;

3) $n=4$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{198}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{193}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{197}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{c}_{206}$;

4) $n=4$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{196}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{198}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{c}_{202}$, $\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{c}_{199}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{204}$.

21.5. Разложить данный вектор $\boldsymbol{x}$ из n-мерного арифметического пространства в сумму двух векторов, один из которых лежит в $\mathscr{P}$, а другой — в $\mathscr{Q}$, где $\mathscr{P}$ — линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, а $\mathscr{Q}$ — линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$. Проверить единственность разложения.

1) $n=2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{29}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{28}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{30}$;

2) $n=3$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{120}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{84}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{83}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{66}$;

3) $n=3$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{145}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{84}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{83}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{66}$;

4) $n=3$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{139}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{84}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{83}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{66}$;

5) $n=4$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{200}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{198}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{c}_{207}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{202}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{205}$.

21.6. Найти проекцию данного вектора $\boldsymbol{x}$ из n-мерного арифметического пространства на линейное подпространство $\mathscr{P}$ параллельно линейному подпространству $\mathscr{Q}$, где $\mathscr{P}$ — линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, а $\mathscr{Q}$ — линейная оболочка системы векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$:

1) $n=2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{32}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{30}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{34}$;

2) $n=2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{37}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{30}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{34}$;

3) $n=2$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{35}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{30}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{34}$;

4) $n=3$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{146}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{66}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{121}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{c}_{122}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{145}$;

5) $n=4$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{201}$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{199}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{197}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{198}$.

21.7. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств n-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$:

1) $n=2$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{34}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{37}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{c}_{35}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{30}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{36}$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{c}_{32}$;

2) $n=3$, $a_1=c_{116}$, $a_2=c_{121}$, $a_3=c_{119}$, $b_1=c_{122}$, $b_2=c_{125}$, $b_3=c_{138}$;

3) $n=3$, $a_1=c_{66}$, $a_2=c_{139}$, $a_3=c_{140}$, $b_1=c_{94}$, $b_2=c_{141}$, $b_3=c_{117}$;

4) (р) $n=3$, $a_1=c_{83}$, $a_2=c_{142}$, $a_3=c_{143}$, $b_1=c_{84}$, $b_2=c_{144}$, $b_3=c_{117}$;

5) $n=3$, $a_1=c_{66}$, $a_2=c_{116}$, $a_3=c_{145}$, $b_1=c_{122}$, $b_2=c_{146}$, $b_3=c_{147}$;

6) $n=3$, $a_1=c_{83}$, $a_2=c_{84}$, $a_3=c_{120}$, $b_1=c_{66}$, $b_2=c_{121}$, $b_3=c_{122}$;

7) $n=4$, $a_1=c_{196}$, $a_2=c_{200}$, $a_3=c_{217}$, $b_1=c_{211}$, $b_2=c_{218}$, $b_3=c_{219}$;

8) $n=4$, $a_1=c_{196}$, $a_2=c_{198}$, $a_3=c_{202}$, $b_1=c_{166}$, $b_2=c_{204}$, $b_3=c_{197}$;

9) $n=4$, $a_1=c_{166}$, $a_2=c_{196}$, $a_3=c_{197}$, $b_1=c_{203}$, $b_2=c_{205}$, $b_3=c_{206}$;

10) $n=4$, $a_1=c_{166}$, $a_2=c_{198}$, $a_3=c_{196}$, $a_4=c_{202}$, $b_1=c_{207}$, $b_2=c_{204}$, $b_3=c_{197}$, $b_4=c_{205}$.

21.8. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств пространства квадратных матриц порядка 3, натянутых на системы матриц A_{202}, A_{201}, A_{209}, A_{204} и A_{256}, A_{205}, A_{257}, A_{258}.

21.9. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств пространства многочленов степени не выше 3, натянутых на системы многочленов $1+2t+t^3$, $1+t+t^2$, $t-t^2+t^3$ и $1+t^2$, $1+3t+t^3$, $3t-t^2+t^3$.

21.10. Используя понятие суммы двух линейных подпространств, доказать неравенство $\operatorname{rg}(A+B)\leqslant\operatorname{rg}A+\operatorname{rg}B$, где A и B — две матрицы одного размера $m\times n$.

21.11. Доказать, что сумма $\mathscr{L}$ двух линейных подпространств $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $x\in\mathscr{L}$ однозначно представляется в виде $x=y+z$, где $y\in\mathscr{P}$, $z\in\mathscr{Q}$.

21.12. Пусть $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ — два линейных подпространства конечномерного линейного пространства. Доказать, что:

1) если сумма размерностей $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ больше размерности всего пространства, то пересечение $\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}$ содержит ненулевой вектор;

2) если размерность суммы $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ на единицу больше размерности их пересечения, то одно из этих подпространств содержится в другом.

21.13. Доказать, что для любого линейного подпространства $\mathscr{P}$ конечномерного линейного пространства существует другое подпространство $\mathscr{Q}$ такое, что все пространство является прямой суммой $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$.

21.14. Пусть $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — три линейных подпространства; $\mathscr{P} = (\mathscr{L} \cap \mathscr{N}) + (\mathscr{M} \cap \mathscr{N})$, $\mathscr{Q} = (\mathscr{L} + \mathscr{M}) \cap \mathscr{N}$.

1) Доказать, что $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{Q}$.

2) Возможен ли случай $\mathscr{P} \neq \mathscr{Q}$? Привести соответствующий пример.

21.15. Доказать, что сумма линейных подпространств $\mathscr{L}^{(1)}, \ldots, \mathscr{L}^{(k)}$ совпадает с множеством векторов, представимых в виде $x = x_1 + \ldots + x_k$, где $x_i \in \mathscr{L}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k$.

21.16. Пусть $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — три линейных подпространства. Доказать, что

$$\mathscr{L} + \mathscr{M} + \mathscr{N} = (\mathscr{L} + \mathscr{M}) + \mathscr{N} = \mathscr{L} + (\mathscr{M} + \mathscr{N}).$$

21.17. Доказать, что сумма $\mathscr{L}$ линейных подпространств $\mathscr{L}^{(1)}, \ldots, \mathscr{L}^{(k)}$ тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $x \in \mathscr{L}$ однозначно представляется в виде $x = x_1 + \ldots + x_k$, где $x_i \in \mathscr{L}^{(i)}$ (обобщение задачи 21.11).

§ 22. Комплексные линейные пространства

22.1. Найти линейную комбинацию столбцов:

1) $(1+i)\,c_4 - ic_5$; 2) $2ic_{42} + (3+i)\,c_{30} - c_{41}$;

3) $(1-2i)\,c_{148} + \frac{3}{2}c_{152}$.

22.2. Найти линейную комбинацию матриц

$$(2+i)\ A_{89} + iA_{10} + A_{27} - 2A_{91}.$$

22.3. Найти столбец x из уравнения:

1) $(1+i)(x - c_{44}) - (2+i)(x + c_{45}) = c_{43}$;

2) $2c_{153} - c_{149} + ix = c_{150}$.

22.4. Выявить линейные зависимости между данными столбцами:

1) c_{28}, c_{29}, c_{43}; 2) c_{26}, c_{30}, c_{40}; 3) $c_{131}, c_{132}, c_{133}$.

22.5. Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы столбцов:

1) c_5; 2) c_{27}, c_{39}; 3) c_{26}, c_{43}, c_{44};

4) $c_{134}, c_{151}, c_{152}$; 5) $c_{275}, c_{215}, c_{276}$;

6) $c_{166}, c_{215}, c_{196}, c_{193}, c_{216}$.

22.6. Доказать, что векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в комплексном n-мерном арифметическом пространстве, и найти координатный столбец вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе:

1) $n=1$, $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{c}_4$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_5$;

2) $n=2$, $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{c}_{31}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{c}_{35}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{39}$;

3) $n=2$, $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{c}_{26}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{c}_{40}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{41}$;

4) $n=2$, $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{c}_{26}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{c}_{27}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{38}$;

5) $n=3$, $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{c}_{126}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{c}_{127}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{c}_{128}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{273}$;

6) $n=4$, $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{c}_{207}$, $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{c}_{274}$, $\boldsymbol{e}_4=\boldsymbol{c}_{275}$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{276}$.

22.7. Найти размерность и базис линейного пространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:

1) $A_{90}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$; 2) $A_{91}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$; 3) $A_{369}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$;

4) $A_{371}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$; 5) $A_{525}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$.

22.8. Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:

1) $\boldsymbol{c}_{40}$, $\boldsymbol{c}_{42}$; 2) $\boldsymbol{c}_{26}$, $\boldsymbol{c}_{42}$; 3) $\boldsymbol{c}_{215}$; 4) $\boldsymbol{c}_{128}$, $\boldsymbol{c}_{273}$;

5) $\boldsymbol{c}_{275}$, $\boldsymbol{c}_{276}$, $\boldsymbol{c}_{214}$, $\boldsymbol{c}_{215}$.

22.9. Доказать, что каждая из двух систем векторов $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ и $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ является базисом в комплексном n-мерном арифметическом пространстве, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ во втором базисе.

1) $n=1$, $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{c}_4$, $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{c}_6$;

2) $n=2$, $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{c}_{31}$, $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{c}_{45}$, $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{c}_{44}$, $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{c}_{39}$;

3) $n=3$, $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{c}_{129}$, $\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{c}_{128}$, $\boldsymbol{f}_3=\boldsymbol{c}_{130}$, $\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{c}_{122}$, $\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{c}_{126}$, $\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{c}_{94}$.

22.10. Найти проекцию данного вектора $\boldsymbol{x}$ двумерного комплексного арифметического пространства на линейное подпространство $\mathscr{P}$ параллельно линейному подпространству $\mathscr{Q}$, где $\mathscr{P}$ натянуто на вектор $\boldsymbol{c}_{44}$, а $\mathscr{Q}$ натянуто на вектор $\boldsymbol{c}_{40}$:

1) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{26}$; 2) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{42}$; 3) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}_{45}$.

22.11. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств комплексного n-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_l$.

1) $n=3$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{83}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{134}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{c}_{148}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{132}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{149}$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{c}_{150}$;

2) $n=3$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{131}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{132}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{c}_{133}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{134}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{135}$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{c}_{136}$;

3) $n=4$, $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{c}_{220}$, $\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{c}_{216}$, $\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{c}_{215}$, $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{c}_{221}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{c}_{222}$, $\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{c}_{223}$, $\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{c}_{214}$.

22.12. 1) Доказать, что если в n-мерном комплексном линейном пространстве рассматривать умножение векторов лишь на вещественные числа, то получим $2n$-мерное вещественное линейное пространство.

2) В двумерном комплексном арифметическом пространстве рассматривается операция умножения векторов лишь на вещественные числа. Найти базис в полученном вещественном пространстве и координатный столбец вектора c_{27} в этом базисе.

22.13. Доказать, что множество многочленов степени не выше n с комплексными коэффициентами можно рассматривать и как комплексное линейное пространство, и как вещественное линейное пространство. В обоих случаях найти:

1) базис и размерность пространства;

2) координатный столбец многочлена $1 - 2i + (3 + i)\,t - 3t^2$ в найденном базисе (при $n = 2$).

ГЛАВА IX

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 23. Основные свойства линейных отображений и преобразований

Общие понятия, относящиеся к отображениям, введены в § 12. В настоящем параграфе используются также следующие понятия: *линейное отображение*, *линейное преобразование*, *ранг* и *ядро линейного отображения*, *изоморфизм*, *матрица линейного отображения в паре базисов*, *матрица линейного преобразования в данном базисе*, *сумма* и *произведение линейных отображений*, *произведение линейного отображения на число*, *подобные линейные преобразования* и *матрицы*.

Пусть $\mathscr{L}$, $\widetilde{\mathscr{L}}$ — линейные пространства над одним и тем же полем (оба вещественные или оба комплексные). Отображение φ: $\mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ называется *линейным*, если для любых векторов x, $y \in \mathscr{L}$ и любого числа α справедливы равенства

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x). \qquad (1)$$

Если пространства $\mathscr{L}$ и $\widetilde{\mathscr{L}}$ совпадают, условия (1) определяют линейное преобразование пространства $\mathscr{L}$. Нередко используют также термины *линейный оператор из $\mathscr{L}$ в $\widetilde{\mathscr{L}}$* и *линейный оператор в пространстве $\mathscr{L}$*, особенно для дифференциальных и интегральных операторов в пространствах функций.

Множество значений $\varphi(\mathscr{L}) = \operatorname{Im}\varphi$ линейного отображения φ: $\mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ является линейным подпространством в $\widetilde{\mathscr{L}}$. Его размерность называется *рангом* отображения φ и обозначается $\operatorname{rg}\varphi$. Ядром линейного отображения φ называется множество $\operatorname{Ker}\varphi \doteq \{x \in \mathscr{L} \mid \varphi(x) = o\}$. Отображение φ называется *вырожденным*, если $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{o\}$, в противном случае — *невырожденным*.

Взаимно однозначное линейное отображение пространства $\mathscr{L}$ на пространство $\widetilde{\mathscr{L}}$ называется *изоморфизмом* $\mathscr{L}$ на $\widetilde{\mathscr{L}}$. Если существует изоморфизм $\mathscr{L}$ на $\widetilde{\mathscr{L}}$, то пространства $\mathscr{L}$ и $\widetilde{\mathscr{L}}$ называются *изоморфными*.

Пусть φ: $\mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ — линейное отображение, $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства $\mathscr{L}$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис пространства $\widetilde{\mathscr{L}}$. *Матрицей линейного отображения* φ в паре базисов $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ называется матрица $A = A_\varphi$, столбцами которой являются координатные столбцы векторов $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ в базисе $\boldsymbol{f}$. *Матрицей линейного* *преобразования* φ в базисе e называется матрица линейного отображения φ: $\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ в паре базисов e, e.

Если ξ — координатный столбец вектора $x \in \mathscr{L}$ в базисе e, а η — координатный столбец его образа $\varphi(x) \in \tilde{\mathscr{L}}$ в базисе f, то

$$\eta = A\xi. \tag{2}$$

Пусть e и e' — два базиса в пространстве $\mathscr{L}$, f и f' — два базиса в пространстве $\tilde{\mathscr{L}}$, S и T — матрицы перехода от e к e' и от f к f' соответственно. Если A и A' — матрицы линейного отображения φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ в парах базисов e, f и e', f', то

$$A' = T^{-1}AS. \tag{3}$$

В частности, если A и A' — матрицы линейного преобразования в базисах e и e', а S — матрица перехода от e к e', то

$$A' = S^{-1}AS. \tag{4}$$

Матрицы A, A', связанные соотношением (4) для некоторой невырожденной матрицы S, называются *подобными* ($A' \sim A$).

Линейные преобразования φ, ψ линейного пространства $\mathscr{L}$ называются *подобными*, если существует такое обратимое линейное преобразование ω: $\mathscr{L} \to \mathscr{L}$, что

$$\psi = \omega^{-1}\varphi\omega. \tag{5}$$

Обозначение: $\psi \sim \varphi$.

Пусть линейное отображение φ имеет матрицу A в паре базисов e, f. Ядро отображения φ определяется в базисе e системой уравнений $A\xi = o$. Множество значений отображения φ является линейной оболочкой системы векторов, координатными столбцами которых в базисе f являются столбцы матрицы A. Ранг отображения φ равен рангу его матрицы.

Нулевое отображение θ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ определяется формулой $\theta(x) = o$ для всех $x \in \mathscr{L}$. Напомним, что *тождественное* преобразование линейного пространства $\mathscr{L}$ обозначается ι. *Естественное вложение* φ: $\mathscr{M} \to \mathscr{L}$ линейного подпространства $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{L}$ в $\mathscr{L}$ определяется равенством $\varphi(x) = x$ для $x \in \mathscr{M}$. *Гомотетия* (*растяжение*, *преобразование подобия*) пространства $\mathscr{L}$ с коэффициентом $\lambda \neq 0$ определяется формулой $\varphi(x) = \lambda x$ ($x \in \mathscr{L}$).

Пусть $\mathscr{L}$ является прямой суммой ненулевых линейных подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$, тогда любой вектор $x \in \mathscr{L}$ однозначно представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathscr{L}'$, $x_2 \in \mathscr{L}''$. *Проектированием* пространства $\mathscr{L}$ на подпространство $\mathscr{L}'$ параллельно подпространству $\mathscr{L}''$ называется преобразование π пространства $\mathscr{L}$, определяемое равенством $\pi(x_1 + x_2) = x_1$. Проектирование можно рассматривать и как отображение пространства $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$. *Отражением* пространства $\mathscr{L}$ в подпространстве $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$ (или *симметрией* пространства $\mathscr{L}$ относительно $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$) называется преобразование φ: $\mathscr{L} \to \mathscr{L}$, определяемое равенством $\varphi(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$.

Линейное пространство $\mathscr{E}$ векторов плоскости или трехмерного пространства с заданным в нем скалярным произведением в дальнейшем упоминается как геометрическое векторное пространство (двумерное или трехмерное). В нем можно рассматривать преобразования ортогонального проектирования и ортогонального отражения (ортогональной симметрии) в подпространстве (прямой или плоскости). Более подробно об ортогональном проектировании в геометрическом векторном пространстве см. введение к главе XII.

Суммой двух линейных отображений φ, ψ: $\mathscr{L} \to \widetilde{\mathscr{L}}$ называется отображение $\varphi + \psi$ такое, что для всех $x \in \mathscr{L}$

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Произведение отображения φ *на число* α определяется для всех $x \in \mathscr{L}$ равенством $(\alpha\varphi)x = \alpha\varphi(x)$.

Примеры линейных отображений и преобразований. Ядро, множество значений. Матрицы линейных отображений и преобразований (23.1—23.51)

23.1. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ — произвольный вектор n-мерного арифметического пространства. Исследовать линейность преобразования φ, если:

1) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_2, x_1 - x_2)^T$ $(n = 2)$;
2) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_2, x_1x_2)^T$ $(n = 2)$;
3) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_2, x_1 - 3, x_3)^T$ $(n = 3)$;
4) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (2x_3 + x_1, 2x_3x_1, x_1 - x_2)^T$ $(n = 3)$;
5) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (0, \ldots, 0)^T$;
6) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (0, x_1 + 3x_2, x_2^2)^T$ $(n = 3)$;
7) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (0, \ldots, 0, 1)^T$;
8) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)^T$ $(n = 3)$;
9) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)^T$;
10) $\varphi(\boldsymbol{x}) = (2x_1, 2|x_2|, 2x_3)^T$ $(n = 3)$.

23.2. Доказать линейность отображения, найти его матрицу, выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным, изоморфизмом:

1) нулевое отображение;
2) тождественное преобразование;
3) гомотетия.

23.3. Пусть φ — линейное отображение пространства $\mathscr{L}$ в $\widetilde{\mathscr{L}}$. Доказать, что:

1) $\varphi(o) = o$;

2) ядро φ есть линейное подпространство в $\tilde{\mathscr{L}}$;

3) образ $\varphi(\mathscr{M})$ линейного подпространства $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{L}$ есть подпространство в $\tilde{\mathscr{L}}$, причем $\dim \varphi(\mathscr{M}) \leqslant \dim \mathscr{M}$;

4) φ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = \{o\}$.

23.4. Пусть $\mathscr{M}$ — линейное подпространство линейного пространства $\mathscr{L}$. Показать, что естественное вложение $\mathscr{M}$ в $\mathscr{L}$ является инъективным линейным отображением. При каком условии на $\mathscr{M}$ отображение φ будет изоморфизмом?

23.5. Пусть $\mathscr{M}$ — подпространство линейного пространства $\mathscr{L}$. Отображение φ: $\mathscr{L} \to \mathscr{M}$ определено правилами: $\varphi(x) = x$ при $x \in \mathscr{M}$, $\varphi(x) = \boldsymbol{o}$ при $x \notin \mathscr{M}$. Линейно ли отображение φ?

23.6. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор, $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ — фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить линейность преобразования φ, заданного следующей формулой, и выяснить его геометрический смысл, если:

1) $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$; 2) $\varphi(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} \mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

3) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{n}) \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$;

4) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} \mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$; 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$.

23.7. Проверить линейность и выяснить геометрический смысл преобразования φ трехмерного геометрического векторного пространства, заданного формулой ($\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — фиксированные векторы):

1) $\varphi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ $(|\mathbf{a}| = 1)$;

2) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ $([\mathbf{u}, \mathbf{v}] \neq 0)$.

23.8. Пусть $\mathbf{r}$, $\mathbf{x}$ — произвольные, $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ — ненулевые векторы трехмерного геометрического векторного пространства. Выразить образ вектора $\mathbf{x}$, определить ядро, множество значений и ранг линейного преобразования φ, если φ есть:

1) ортогональное проектирование на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$;

2) ортогональное проектирование на прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$;

3) проектирование на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

4) проектирование на прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$ параллельно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

5) ортогональное отражение в плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$;

6) ортогональное отражение в прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$;

7) отражение в плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$;

8) отражение в прямой $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$ параллельно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ $((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$.

В задачах 23.9—23.14 линейные подпространства трехмерного геометрического векторного пространства $\mathscr{E}_3$ заданы своими уравнениями в некотором ортонормированном базисе.

23.9. Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства $\mathscr{E}_3$ на подпространство $\mathscr{L}$, если $\mathscr{L}$ есть:

1) прямая $x = z = 0$;

2) прямая $x = y = z$;

3) плоскость $x + y + z = 0$;

4) плоскость, натянутая на векторы $\mathbf{a}(-1, 1, -1)$ и $\mathbf{b}(1, -3, 2)$.

23.10. Вычислить матрицу проектирования пространства $\mathscr{E}_3$ на подпространство $\mathscr{L}$ параллельно подпространству $\mathscr{M}$, если:

1) $\mathscr{L}$ определено уравнением $x = 0$, $\mathscr{M}$ — уравнениями $2x = 2y = -z$;

2) $\mathscr{L}$ имеет уравнение $x = y$, $\mathscr{M}$ определяется системой уравнений $x + y + z = 0$, $2x + y + 4z = 0$;

3) $\mathscr{L}$ определено уравнениями $-20x = 15y = 12z$, $\mathscr{M}$ — уравнением $2x + 3y - z = 0$;

4) $\mathscr{L}$ определено системой уравнений $x - y + z = 0$, $2x - 3y + 4z = 0$, $\mathscr{M}$ — уравнением $2x + 3y - 4z = 0$.

23.11. Преобразования пространства $\mathscr{E}_3$ из задач 23.9 и 23.10 рассматриваются как линейные отображения пространства $\mathscr{E}_3$ на подпространство $\mathscr{L}$. Вычислить матрицу каждого из этих отображений.

23.12. Вычислить матрицу линейного преобразования φ, если φ — ортогональное отражение пространства $\mathscr{E}_3$:

1) в плоскости $x = 0$;

2) в прямой $x = 2y = z$;

3) в плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{a}(1, 0, -1)$ и $\mathbf{b}(1, 1, -2)$.

23.13. Вычислить матрицу отражения пространства $\mathscr{E}_3$:

1) в плоскости $x = 0$ параллельно прямой $2x = y = -z$;

2) в прямой $x = z$, $x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x + y = 0$.

23.14. В трехмерном геометрическом векторном пространстве $\mathscr{E}_3$ задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Вычислить матрицу поворота пространства:

1) на угол α вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;

2) на угол $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$;

3) на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, имеющей уравнения $x = y = z$.

23.15. Пусть линейное пространство $\mathscr{L}$ является прямой суммой ненулевых подпространств $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$.

1) Доказать, что преобразование φ проектирования $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$ линейно. Найти ядро и множество значений φ. Записать матрицу преобразования φ в базисе, составленном из базисов подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$.

2) Решить задачу, рассматривая φ как отображение пространства $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$.

23.16. Пусть линейное пространство $\mathscr{L}$ является прямой суммой ненулевых подпространств $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$. Доказать, что отражение φ пространства $\mathscr{L}$ в $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$ есть линейное преобразование пространства $\mathscr{L}$. Найти его ядро и множество значений. Является ли φ изоморфизмом? Записать матрицу φ в базисе, составленном из базисов подпространств $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$.

23.17. Пусть φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ — линейное отображение, $\mathscr{M} = \varphi(\mathscr{L})$. Рассмотрим φ как линейное отображение $\tilde{\varphi}$: $\mathscr{L} \to \mathscr{M}$. Доказать, что:

1) ядра отображений φ и $\tilde{\varphi}$ совпадают так же, как их ранги;

2) $\tilde{\varphi}$ сюръективно;

3) φ инъективно тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}$ инъективно.

4) если $\dim \mathscr{L} = \dim \tilde{\mathscr{L}}$, то φ и $\tilde{\varphi}$ одновременно являются изоморфизмами.

Выяснить связь между матрицами отображений φ и $\tilde{\varphi}$.

23.18. Доказать, что ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора пары базисов в линейных пространствах.

23.19. Доказать, что:

1) ранг матрицы линейного сюръективного отображения равен числу ее строк;

2) ранг матрицы линейного инъективного отображения равен числу ее столбцов.

23.20. Пусть φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ — линейное отображение, $\dim \mathscr{L} = n$, $\dim \tilde{\mathscr{L}} = m$, A — матрица φ в некоторой паре базисов, $\operatorname{rg} A = r$. Доказать, что:

1) $\operatorname{rg} \varphi = r$; 2) $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - r$.

23.21. Доказать, что:

1) отображение, обратное к изоморфизму, существует и также является изоморфизмом;

2) линейное отображение, не являющееся изоморфизмом, не имеет обратного.

23.22. 1) Чему равен ранг и каково ядро линейного отображения φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$, являющегося изоморфизмом?

2) Как связаны матрицы A, B линейного отображения и обратного к нему?

23.23. Пусть φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ — линейное отображение, и $\dim \mathscr{L} = \dim \tilde{\mathscr{L}}$. Доказать равносильность утверждений:

1) φ изоморфизм;

2) φ инъективно;

3) φ сюрьективно.

Показать, что при $\dim \mathscr{L} \neq \dim \tilde{\mathscr{L}}$ из 2) или 3) не следует 1).

23.24. Пусть φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ — линейное отображение, и $\dim \mathscr{L} = \dim \tilde{\mathscr{L}}$. Доказать утверждения:

1) Для того чтобы уравнение $\varphi(x) = y$ $(x \in \mathscr{L})$ было разрешимо при любом $y \in \tilde{\mathscr{L}}$, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $\varphi(x) = o$ имело только нулевое решение.

2) Если уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо при всех $y \in \tilde{\mathscr{L}}$, то оно имеет для каждого y единственное решение.

3) Пусть уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо не при всех $y \in \tilde{\mathscr{L}}$, но при некотором y разрешимо. Тогда его решение не единственно.

23.25. Пусть $\mathscr{L}$ — конечномерное линейное пространство. Доказать, что всякое линейное подпространство из $\mathscr{L}$:

1) служит ядром некоторого линейного преобразования пространства $\mathscr{L}$;

2) служит множеством значений некоторого линейного преобразования пространства $\mathscr{L}$.

23.26. Линейное преобразование трехмерного арифметического пространства задано в стандартном базисе матрицей A. Найти образы указанных векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и объяснить геометрический смысл преобразования (кроме 3)):

1) $A = A_{261}$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, 4, 3)^T$;

2) $A = A_{221}$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 2, 4)^T$;

3) $A = A_{241}$, $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 1, 0)^T$;

4) $A = A_{262}$, $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 2, 3+i)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 2, 3-i)^T$;

5) $A = A_{263}$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1+i, 1, -i)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1-i, 1, i)^T$.

23.27. Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано матрицей A. Вычислить образы указанных векторов.

1) $m = 3$, $n = 4$, $A = A_{507}$, $\boldsymbol{a} = (4, -1, -1, 3)^T$;

2) $m = 4$, $n = 4$, $A = A_{455}$, $\boldsymbol{a} = (-1, 1, 1, -1)^T$;

3) $m = 5$, $n = 4$, $A = A_{522}$, $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 3, -1)^T$;

4) $m = n$, $A = A_{625}$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, \ldots, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0)^T$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_n = (1, 0, \ldots, 0, -1)^T$.

23.28. Линейное преобразование n-мерного линейного пространства $\mathscr{L}$ задано матрицей A. Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное преобразование изоморфизмом, если:

1) $n = 2$, $A = A_{30}$; 2) $n = 3$, $A = A_{236}$;

3) $n = 3$, $A = A_{264}$; 4) $n = 4$, $A = A_{465}$;

5) $n = 4$, $A = A_{466}$; 6) $n = 5$, $A = A_{547}$.

23.29. Линейное отображение n-мерного линейного пространства в m-мерное задано матрицей A. Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное отображение сюръективным, инъективным, если:

1) $m = 3$, $n = 4$, $A = A_{516}$;

2) $m = 4$, $n = 3$, $A = A_{405}$;

3) $m = 4$, $n = 3$, $A = A_{406}$;

4) $m = 2$, $n = 5$, $A = A_{576}$;

5) $m = 5$, $n = 3$, $A = A_{420}$;

6) $m = 3$, $n = 5$, $A = A_{585}$.

23.30. Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей A. Вычислить полный прообраз вектора $\boldsymbol{a}$, если:

1) $n = 4$, $m = 3$, $A = A_{513}$, $\boldsymbol{a} = (-1, 0, 1)^T$;

2) $n = 5$, $m = 3$, $A = A_{581}$, $\boldsymbol{a} = (1, 2, 1)^T$;

3) $n=3$, $m=5$, $A=A_{421}$, $\boldsymbol{a}=(4,\ 2,\ 9,\ -20,\ -3)^T$;

4) $n=4$, $m=5$, $A=A_{522}$, $\boldsymbol{a}=(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ -1)^T$.

23.31. Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное арифметическое пространство задано матрицей A. Найти полный прообраз подпространства $\mathscr{M}\subset\mathscr{R}_m$, если:

1) $m=2$, $n=5$, $A=A_{576}$, $\mathscr{M}$ натянуто на вектор $(3,\ -1)^T$;

2) $m=3$, $n=4$, $A=A_{517}$, $\mathscr{M}$ задано в стандартном базисе системой уравнений $x_1+x_2=0$, $x_1-x_3=0$;

3) $m=n=6$, $A=A_{592}$, $\mathscr{M}$ определяется в стандартном базисе системой уравнений $2x_1-x_3=0$, $2x_2+x_3-2x_4=0$, $-x_2+2x_4-x_6=0$, $x_5=0$.

23.32. Доказать, что любое n-мерное линейное пространство изоморфно n-мерному арифметическому пространству над тем же полем и, следовательно, все линейные пространства одинаковой размерности (над одним и тем же полем) изоморфны.

23.33. Пусть $\boldsymbol{a}=(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)^T$. Показать, что отображение $f(\boldsymbol{a})=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$ устанавливает изоморфизм $(n+1)$-мерного арифметического пространства и линейного пространства многочленов степени, не превосходящей n.

23.34. Отображение двумерного вещественного арифметического пространства в линейное пространство вещественных квадратных матриц второго порядка задано формулой $\varphi\left(\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}\right)=\begin{Vmatrix} x & -y \\ y & x \end{Vmatrix}$. Доказать линейность и инъективность отображения φ. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

23.35. Отображение трехмерного вещественного арифметического пространства в пространство матриц второго порядка сопоставляет вектору $(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ матрицу $\begin{Vmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{Vmatrix}$. Доказать линейность и инъективность отображения. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

23.36. Пусть $\mathscr{M}_{2\times 2}$ — множество комплексных матриц второго порядка, рассматриваемое как вещественное линейное пространство со стандартным базисом E_{11}, iE_{11}, E_{21}, iE_{21}, E_{12}, iE_{12}, E_{22}, iE_{22} (см. задачу 22.12). Отображение $\varphi\colon \mathscr{R}_3\to\mathscr{M}_{2\times 2}$ сопоставляет вектору $(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ матрицу $\begin{Vmatrix} x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & -x_3 \end{Vmatrix}$. Доказать, что отображение φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

23.37. Отображение φ: $\mathcal{R}_4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ (см. задачу 23.36) задано формулой $\varphi(x) = \begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}$, где $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $a = x_1 + ix_2$, $\bar{a} = x_1 - ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Доказать, что φ линейно и инъективно, найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

23.38. Доказать, что данное множество квадратных матриц является вещественным линейным пространством, изоморфным арифметическому пространству $\mathcal{R}_3$:

1) множество всех вещественных матриц второго порядка с нулевым следом;

2) множество всех вещественных кососимметрических матриц третьего порядка;

3) множество всех комплексных матриц вида $\begin{Vmatrix} ix_3 & x_1 + ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -ix_3 \end{Vmatrix}$, где x_1, x_2, x_3 — вещественные числа.

23.39. Пусть $\mathrm{D} = \frac{d}{dt}$ — операция дифференцирования, сопоставляющая функции $f(t)$ ее производную $f'(t)$. Показать, что D является линейным преобразованием линейного пространства функций, бесконечно дифференцируемых на интервале (a, b).

23.40. Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше m.

1) Проверить, что дифференцирование (определенное в задаче 23.39) есть линейное преобразование D: $\mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m)}$, найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу преобразования D:

а) в стандартном базисе $1, t, \ldots, t^m$;

б) в базисе $1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^m$;

в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \ldots, \frac{t^m}{m!}$.

2) Найти матрицу дифференцирования как линейного отображения D: $\mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m-1)}$ в базисах $1, t, \ldots$ $\ldots, \frac{t^m}{m!}$ и $1, t, \ldots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$.

23.41. Показать, что дифференцирование (задача 23.39) определяет линейное отображение:

1) пространства четных многочленов степени не выше $2n$ в пространство $\mathcal{P}$ нечетных многочленов степени не выше $2n - 1$;

2) пространства нечетных многочленов степени не выше $2n+1$ в пространство Q четных многочленов степени не выше $2n$.

Найти ядро, множество значений и ранг отображения. Записать его матрицу A в стандартных базисах пространств.

23.42. Проверить, что функции $e^{\lambda t}p(t)$, где λ — фиксированное число, $p(t)$ — многочлен степени не выше n, образуют линейное пространство, а дифференцирование является его линейным преобразованием. Вычислить матрицу преобразования в базисе $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

23.43. 1) Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства тригонометрических многочленов $f(t)=a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+\ldots$ $\ldots+a_n\cos nt+b_n\sin nt$ порядка не выше n (см. задачу 20.8.4). Найти матрицу преобразования D в стандартном базисе $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$ этого пространства.

2) Доказать, что дифференцирование D устанавливает изоморфизм между линейными пространствами нечетных тригонометрических многочленов $b_1\sin t+b_2\sin 2t+\ldots$ $\ldots+b_n\sin nt$ и четных тригонометрических многочленов вида $a_1\cos t+a_2\cos 2t+\ldots+a_n\cos nt$ (n — фиксированное число). Вычислить матрицы отображения D и обратного отображения в базисах $\sin t, \ldots, \sin nt$ и $\cos t, \ldots, \cos nt$.

23.44. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция $(t\in\mathbb{R})$. Рассмотрим операцию интегрирования I: $f(t)\mapsto\int\limits_0^t f(\xi)\,d\xi$.

1) Проверить, что интегрирование определяет линейное отображение I: $\mathcal{P}^{(n-1)}\to\mathcal{P}^{(n)}$ $(n\geqslant 1)$, найти его ядро, множество значений и ранг. Записать матрицу отображения в стандартных базисах.

2) Интегрирование рассматривается как линейное преобразование пространства $\mathcal{P}$ всех вещественных многочленов. Найти его множество значений. Является ли это преобразование сюръективным, инъективным, изоморфизмом?

3) Пусть $\mathcal{M}$ — пространство многочленов с нулевым свободным членом, I: $\mathcal{P}\to\mathcal{M}$ — операция интегрирования и D: $\mathcal{M}\to\mathcal{P}$ — дифференцирование. Доказать, что эти линейные отображения взаимно обратны.

23.45. Пусть $\mathcal{F}$ — линейное пространство функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, $\tilde{\mathcal{F}}$ — линейное пространство непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций $f(t)$ таких, что $f(0) = 0$, $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ — подмножества четных и нечетных функций в $\mathscr{F}$ соответственно.

1) Интегрирование I из задачи 23.44 $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ рассматривается как линейное преобразование пространства $\mathscr{F}$. Является ли это преобразование инъективным, сюръективным? Обратимо ли оно?

2) Доказать, что интегрирование определяет изоморфизм $\mathrm{I}: \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$. Найти для него обратное отображение.

3) Показать, что интегрирование определяет линейные отображения $\mathrm{I}_1: \mathscr{E} \to \mathscr{H}$ и $\mathrm{I}_2: \mathscr{H} \to \mathscr{G}$. Ответить для этих отображений на вопросы п. 1).

23.46. Пусть линейное преобразование пространства всех многочленов от t переводит каждый многочлен t^k в t^{2k} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Убедиться в том, что это преобразование инъективно, но не сюръективно. Найти множество его значений.

23.47. Пусть $\mathscr{R}_{m\times n}$ — линейное пространство матриц размеров $m\times n$.

1) Доказать, что умножение матриц размеров $m\times n$ слева на фиксированную матрицу A размеров $k\times m$ есть линейное отображение $\varphi: \mathscr{R}_{m\times n} \to \mathscr{R}_{k\times n}$. Вычислить матрицу отображения φ в стандартных базисах, если $n = 2$, $A = A_{27}$. Найти ядро и множество значений этого отображения.

2) Доказать, что умножение матриц размеров $m\times n$ справа на фиксированную матрицу B размеров $n\times k$ есть линейное отображение $\varphi: \mathscr{R}_{m\times n} \to \mathscr{R}_{m\times k}$. Вычислить матрицу отображения φ в стандартных базисах, если $m = 2$, $B = A_{126}$. Найти ядро и множество значений отображения φ.

23.48. Пусть $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ — столбцы матрицы $X = \| \boldsymbol{X}_1 \ldots \boldsymbol{X}_n \|$ размеров $m\times n$, и $Y = \| \boldsymbol{X}_1 \ldots \boldsymbol{X}_{n-1} \|$. Отображение $\varphi: \mathscr{R}_{m\times n} \to \mathscr{R}_{m\times(n-1)}$ определим формулой $\varphi(X) = Y$.

1) Доказать, что отображение φ линейно, найти его ядро и множество значений.

2) Вычислить матрицу отображения φ в стандартных базисах пространств.

3) Показать, что φ является одним из отображений, определенных в задаче 23.47.

23.49. Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — фиксированные матрицы порядка m, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Отображение $\varphi: \mathscr{R}_n \to$

$\to \mathcal{R}_{m\times m}$ определим формулой $\varphi(\boldsymbol{x}) = x_1M_1 + \ldots + x_nM_n$. Доказать линейность отображения φ. Найти ядро, множество значений, ранг и вычислить матрицу A отображения φ в стандартных базисах, если $n = 4$, $M_1 = A_{12}$, $M_2 = A_{13}$, $M_3 = A_{16}$, $M_4 = A_{20}$.

23.50. В линейном пространстве вещественных многочленов $p(x, y)$ от двух переменных x, y преобразование φ определено формулой $\varphi(p(x, y)) = p(x + a, y + b)$ (a, b — фиксированные числа). Показать, что φ определяет линейное преобразование пространства многочленов не выше второй степени, и вычислить его матрицу в базисе 1, x, y, x^2, xy, y^2.

23.51. Показать, что однородные многочлены степени n вида $p(x, y) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k$ образуют линейное подпространство $\mathcal{H}^{(n)}$ пространства всех многочленов от двух переменных. Преобразование φ определено одной из следующих формул:

1) $\varphi(p) = x\dfrac{\partial p}{\partial y}$; 2) $\varphi(p) = y\dfrac{\partial p}{\partial x}$;

3) $\varphi(p) = x\dfrac{\partial p}{\partial x} - y\dfrac{\partial p}{\partial y}$.

Доказать, что φ — линейное преобразование пространства $\mathcal{H}^{(n)}$, и вычислить его матрицу в базисе x^n, $x^{n-1}y$, ..., xy^{n-1}, y^n. Найти ядро и множество значений преобразования φ.

Матрицы линейных отображений и преобразований в разных базисах. Подобные матрицы (23.52—23.77)

23.52. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $f_1, \ldots, f_n$ — произвольные векторы из линейного пространства $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что существует единственное линейное отображение $\varphi\colon \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(e_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

23.53. 1) Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — линейно независимые векторы линейного пространства $\mathcal{L}$, а $b_1, \ldots, b_k$ — некоторые векторы пространства $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что существует линейное отображение $\varphi\colon \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(a_i) = b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. В каком случае отображение φ единственно?

2) Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — векторы из $\mathscr{L}$, а $b_1, \ldots, b_k$ — векторы из $\tilde{\mathscr{L}}$. Сформулировать необходимые и достаточные условия, при которых: а) существует линейное отображение φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ такое, что $\varphi(a_i) = b_i$ $(i = 1, \ldots, k)$; б) это отображение единственно.

23.54. Пусть A — невырожденная матрица порядка n, B — матрица размеров $m \times n$. Доказать, что существует единственное линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное, при котором образами столбцов матрицы A являются соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу этого отображения:

1) в стандартных базисах пространств;

2) в базисе пространства $\mathscr{R}_n$ из столбцов матрицы A и стандартном базисе пространства $\mathscr{R}_m$;

3) в базисе пространства $\mathscr{R}_n$ из столбцов матрицы A и базисе пространства $\mathscr{R}_m$ из столбцов матрицы B (при условии, что $m = n$ и B невырождена).

23.55. Пусть A и B — невырожденные матрицы порядка n. Доказать, что существует единственное линейное преобразование n-мерного арифметического пространства, переводящее столбцы матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу этого преобразования:

1) в стандартном базисе;

2) в базисе из столбцов матрицы A;

3) в базисе из столбцов матрицы B.

23.56. Линейное преобразование φ двумерного арифметического пространства переводит вектор $\boldsymbol{a}_i$ в вектор $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$. Вычислить матрицу преобразования φ в стандартном базисе, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_1 = (2, 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (-3, 1)^T$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (4, -3)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_1 = (-2, -2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (4, 4)^T$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (-5, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-3, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_1 = (4, 15)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1)^T$;

4) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3)^T$, $\boldsymbol{b}_1 = (0, \sqrt{2})^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})^T$.

23.57. Матрицы A, B составлены из координатных столбцов векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ трехмерного линейного пространства $\mathscr{L}$. Для приведенных ниже случаев проверить, что существует единственное линейное преобразование φ пространства $\mathscr{L}$, переводящее векторы a_i в b_i $(i = 1, 2, 3)$. Вычислить матрицу преобразования φ: а) в базисе $\boldsymbol{e}$; б) в базисе a_1, a_2, a_3, если:

1) $A = A_{265}$, $B = A_{266}$; 2) $A = A_{268}$, $B = A_{269}$;
3) $A = A_{270}$, $B = A_{271}$; 4) $A = A_{229}$, $B = A_{272}$.

23.58. Показать, что существует и единственно линейное отображение φ: $\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_m$, переводящее столбцы данной матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу отображения φ:

1) в стандартных базисах пространств $\mathcal{R}_n$ и $\mathcal{R}_m$;

2) в базисе пространства $\mathcal{R}_n$, состоящем из столбцов матрицы A, и стандартном базисе пространства $\mathcal{R}_m$.

а) $n = 2$, $m = 3$, $A = A_{33}$, $B = A_{140}$;
б) $n = 3$, $m = 2$, $A = A_{276}$, $B = A_{394}$;
в) $n = 2$, $m = 5$, $A = A_{34}$, $B = A_{171}$;
г) $n = 4$, $m = 2$, $A = A_{467}$, $B = A_{505}$;
д) $n = 3$, $m = 4$, $A = A_{227}$, $B = A_{407}$;
е) $n = 4$, $m = 3$, $A = A_{484}$, $B = A_{518}$.

23.59. Выяснить, существует ли линейное преобразование φ, переводящее столбцы матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. В случае существования вычислить матрицу φ в стандартном базисе.

1) $A = A_5$, $B = A_{35}$; 2) $A = A_5$, $B = A_{12}$;
3) $A = A_{277}$, $B = A_{278}$; 4) $A = A_{213}$, $B = A_{279}$.

23.60. При линейном отображении φ: $\mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_m$ столбцы матрицы A переходят в соответствующие столбцы матрицы B. Выяснить, является ли отображение φ инъективным, сюръективным, найти размерность ядра и ранг отображения φ. Вычислить образ вектора $\boldsymbol{a}$, если:

1) $A = A_{123}$, $B = A_{24}$, $\boldsymbol{a} = (1,\ 7,\ 3)^T$;
2) $A = A_{392}$, $B = A_{250}$, $\boldsymbol{a} = (3,\ 1)^T$;
3) $A = A_{422}$, $B = A_{201}$, $\boldsymbol{a} = (4,\ -4,\ -3,\ 12,\ 2)^T$;
4) $A = A_{241}$, $B = A_{420}$, $\boldsymbol{a} = (16,\ 5,\ -6)^T$.

23.61. Показать, что существует единственное линейное преобразование комплексного арифметического пространства $\mathcal{C}_n$, переводящее столбцы данной матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. Вычислить матрицу этого преобразования в стандартном базисе, если:

1) $n = 2$, $A = A_{92}$, $B = A_{93}$;
2) $n = 2$, $A = A_{[illegible]1}$, $B = A_{95}$;
3) $n = 2$, $A = A_{96}$, $B = A_{97}$;
4) $n = 3$, $A = A_{373}$, $B = A_{374}$.

23.62. Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если:

1) $A = A_{36}$, $S = A_{33}$; 2) $A = A_{37}$, $S = A_{16}$;
3) $A = A_{38}$, $S = A_{39}$; 4) $A = A_{40}$, $S = A_{104}$;
5) $A = A_{280}$, $S = A_{203}$; 6) $A = A_{281}$, $S = A_{282}$;
7) $A = A_{283}$, $S = A_{284}$; 8) $A = A_{285}$, $S = A_{265}$;
9) $A = A_{469}$, $S = A_{470}$; 10) $A = A_{471}$, $S = A_{439}$.

23.63. Линейное преобразование комплексного арифметического пространства имеет в стандартном базисе матрицу A. Новый базис задан матрицей перехода S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе:

1) $A = A_{87}$, $S = A_{94}$;
2) $A = A_{79}$, $S = A_{80}$ $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$;
3) $A = A_{263}$, $S = A_{375}$;
4) $A = A_{259}$, $S = A_{363}$ $(\omega = e^{2\pi i/3})$;
5) $A = A_{472}$, $S = A_{473}$; 6) $A = A_{474}$, $S = A_{475}$.

23.64. Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано в стандартных базисах матрицей A, столбцы новых базисных векторов $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ и $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ составляют соответственно матрицы S и T. Вычислить матрицу отображения в базисах $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$.

1) $n = 3$, $m = 2$, $A = A_{392}$, $S = A_{286}$, $T = A_{42}$;
2) $n = 4$, $m = 2$, $A = A_{502}$, $S = A_{476}$, $T = A_{19}$;
3) $n = 2$, $m = 3$, $A = A_{117}$, $S = A_{9}$, $T = A_{227}$;
4) $n = 3$, $m = 4$, $A = A_{403}$, $S = A_{285}$, $T = A_{495}$.

23.65. Вычислить матрицу линейного преобразования φ множества векторов плоскости с заданным на ней базисом, если φ есть:

1) отражение плоскости в прямой $x + 2y = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$;

3) проектирование плоскости на прямую $x + y = 0$ параллельно прямой $4x + 5y = 0$;

3) сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к прямой $3x - 2y = 0$ параллельно прямой $x - y = 0$.

23.66. Вычислить матрицу линейного преобразования φ трехмерного геометрического векторного пространства (в котором задан ортонормированный базис), пользуясь надлежащей заменой базиса, если φ есть:

1) проектирование на плоскость $3x - y = 0$ параллельно прямой $x + z = 0$, $x + y + 2z = 0$;

2) отражение пространства в прямой $x = y = -2z$ параллельно плоскости $x + y + 3z = 0$;

3) сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к плоскости $x - 2z = 0$ параллельно прямой $x = y = z$;

4) поворот вокруг прямой $x = y = -z$ на угол $\pi/2$;

5) поворот вокруг прямой $x + y = 0$, $y - z = 0$ на такой угол, что первая из данных плоскостей переходит во вторую.

23.67. Пусть D — дифференцирование в пространстве многочленов степени не выше m. Вычислить матрицу преобразования D, если базис состоит из многочленов:

1) $1 + t$, $t + 2t^2$, $3t^2 - 1$ $(m = 2)$;

2) $t^3 + 1$, $1 - t$, $1 - t + t^2$, $1 - t + t^2 - t^3$ $(m = 3)$;

3) 1, $1 + t$, $1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}$, ..., $1 + \frac{t}{1!} + \ldots + \frac{t^m}{m!}$ $(m \geqslant 1)$;

4) 1, $1 + t$, $1 + t + t^2$, ..., $1 + t + \ldots + t^m$ $(m \geqslant 1)$;

5) 1, $t - 1$, $t^2 - t$, ..., $t^m - t^{m-1}$ $(m \geqslant 1)$.

23.68. Вычислить матрицу преобразования дифференцирования в пространстве тригонометрических многочленов порядка не выше n (см. задачу 23.43), если базис состоит из функций:

1) 1, $\cos t - \sin t$, $\cos t + \sin t$, ..., $\cos nt - \sin nt$, $\cos nt + \sin nt$ $(n \geqslant 1)$;

2) 1, $1 + \cos t$, ..., $1 + \cos t + \ldots + \cos nt$, $\sin t$, ..., $\sin t + \ldots + \sin nt$;

3) $2\cos^2 t$, $2\sin^2 t$, $\sin t + \cos t$, $\sin t - \cos t$, $(\sin t + \cos t)^2$ $(n = 2)$.

23.69. Как изменится матрица линейного отображения, заданная в паре базисов $e_1, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_m$, если:

1) поменять местами векторы e_i и e_j;

2) поменять местами векторы f_k и f_l;

3) вектор e_i умножить на число $\lambda \neq 0$, а f_k умножить на $\mu \neq 0$;

4) вектор e_i заменить на $e_i + e_j$, а вектор f_k — на $f_k - f_l$ $(i \neq j,\ k \neq l)$?

23.70. Как изменится матрица линейного преобразования, заданная в базисе $e_1, \ldots, e_n$, если:

1) поменять местами векторы e_i и e_j;

2) вектор e_i умножить на число $\lambda \neq 0$;

3) вектор e_i заменить на $e_i + e_j$;

4) перейти к базису $e_n, e_1, \ldots, e_{n-1}$;

5) перейти к базису $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1$?

23.71. 1) Пусть A и B — матрицы линейного отображения в двух парах базисов. Доказать, что B можно получить из A элементарными преобразованиями строк и столбцов.

2) Пусть A и B — матрицы линейного преобразования в двух базисах. Доказать, что B можно получить из A согласованными друг с другом элементарными преобразованиями строк и столбцов.

23.72. Пусть φ: $\mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ — линейное отображение. Доказать, что:

1) если базисный вектор линейного пространства $\mathscr{L}$ принадлежит ядру φ, то соответствующий столбец матрицы отображения нулевой;

2) если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства $\mathscr{L}$, причем векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ $(r \leqslant n)$ образуют базис ядра φ, то векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)$ образуют базис в $\varphi(\mathscr{L})$.

23.73. Доказать, что для всякого линейного отображения φ существует пара базисов, в которых матрица отображения имеет простейший вид

$$\begin{Vmatrix} E & O \\ O & O \end{Vmatrix}.$$

Чему равен порядок матрицы E?

23.74. В стандартных базисах арифметических пространств $\mathscr{R}_n$ и $\mathscr{R}_m$ линейное отображение φ имеет матрицу A. Найти пару базисов, в которой матрица отображения φ имеет простейший вид (см. задачу 23.73):

1) $A = A_{12}$; 2) $A = A_{32}$; 3) $A = A_{253}$;

4) $A = A_{288}$; 5) $A = A_{576}$; 6) $A = A_{420}$.

23.75. Пусть A — матрица линейного преобразования в некотором базисе. Доказать, что матрица, полученная из A центральной симметрией, является матрицей того же преобразования в другом базисе.

23.76. Доказать, что подобны матрицы:

1) A_{77} и обратная к ней; 2) A_{259} и A_{260}.

23.77. Найти все матрицы, каждая из которых подобна только самой себе.

Операции с линейными отображениями и преобразованиями (23.78—23.104)

23.78. Даны линейные отображения φ: $\mathscr{R}_n \to \mathscr{R}_m$, ψ: $\mathscr{R}_l \to \mathscr{R}_k$.

1) Указать условия на m, n, k, l, необходимые и достаточные для существования произведений $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$.

2) Пусть $\chi = \varphi\psi$. Показать, что χ — линейное отображение. Как связаны матрицы отображений φ, ψ, χ?

23.79. Пусть φ, ψ, χ — линейные отображения арифметических линейных пространств, α — число. При каких условиях на размерности пространств справедливо каждое из следующих равенств?

1) $\varphi(\psi\chi) = (\varphi\psi)\chi$;

2) $\varphi(\psi + \chi) = \varphi\psi + \varphi\chi$;

3) $(\varphi + \psi)\chi = \varphi\chi + \psi\chi$; 4) $\alpha(\varphi + \psi) = \alpha\varphi + \alpha\psi$.

Показать, что матрицы данных отображений удовлетворяют тем же равенствам.

23.80. Доказать, что всякое линейное отображение представимо в виде произведения сюръективного и инъективного линейных отображений.

23.81. Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$, где $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ — ненулевые подпространства линейного пространства $\mathscr{L}$. Показать, что тождественное преобразование представляется в виде суммы $\iota = \pi_1 + \pi_2$, где π_1 (π_2) — проектирование пространства $\mathscr{L}$ на подпространство $\mathscr{L}'$ $(\mathscr{L}'')$ параллельно подпространству $\mathscr{L}''$ $(\mathscr{L}')$.

23.82. Координатные столбцы векторов a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 образуют соответственно матрицы A_{289}, A_{229}, A_{285}. Линейное преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3 соответственно. Найти матрицу преобразования $\psi\varphi$:

1) в исходном базисе;

2) в базисе a_1, a_2, a_3;

3) в базисе b_1, b_2, b_3.

23.83. Пусть φ, ψ — линейные преобразования двумерного арифметического пространства, φ имеет матрицу A_{44} в стандартном базисе, а ψ — матрицу A_{107} в базисе из столбцов матрицы A_{45}. Вычислить матрицу преобразования:

1) $\varphi^2 - 6\varphi + 9\iota$; 2) $\psi^2 + 4\psi + 4\iota$;

3) $\varphi^2 - \psi^2$ в стандартном базисе;

4) $4\varphi\psi^{-1}$ в базисе из столбцов матрицы A_{45};

5) $(\varphi + \psi)^4$ в базисе, образованном столбцами $(1, 2)^T$, $(0, -1)^T$.

23.84. Пусть $\mathscr{P}^{(n)}$ — пространство многочленов степени не выше n $(n \geqslant 1)$ с вещественными коэффициентами. Отображения

$$\varphi\colon \mathscr{P}^{(n-1)} \to \mathscr{P}^{(n)}, \quad \psi\colon \mathscr{P}^{(n)} \to \mathscr{P}^{(n-1)}$$

определим формулами

$$\varphi(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}) = a_0 t + a_1 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^n,$$

$$\psi(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_1 + \cdots + a_n\ t^{n-1}.$$

Проверить линейность отображений и показать, что $\psi\varphi$ — тождественное преобразование, а $\varphi\psi$ — нет.

23.85. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство функций с базисом $\boldsymbol{e}$, D — дифференцирование. Найти матрицу преобразования D^k ($k = 1, 2, \ldots$), если:

1) $\mathscr{L}$ — пространство многочленов степени не выше n, $\boldsymbol{e} = (1,\ t,\ \ldots,\ t^n/n!)$;

2) $\mathscr{L}$ — пространство тригонометрических многочленов порядка не выше n (см. задачу 23.43), $\boldsymbol{e} = (1, \cos t, \sin t, \ldots$ $\ldots, \cos nt,\ \sin nt)$.

23.86. В пространстве всех многочленов от t рассматриваются линейные преобразования: τ — умножение на t и дифференцирование $\mathrm{D} = \dfrac{d}{dt}$. Найти преобразование:

1) $\tau\mathrm{D}$; 2) $\mathrm{D}\tau$; 3) коммутатор $[\mathrm{D}, \tau] = \mathrm{D}\tau - \tau\mathrm{D}$.

4) Доказать равенство $\mathrm{D}^m\tau - \tau\mathrm{D}^m = m\mathrm{D}^{m-1}$ ($m = 1, 2, \ldots;\ \mathrm{D}^0 = \iota$).

23.87. Доказать, что коммутатор $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ двух линейных преобразований конечномерного линейного пространства не может быть тождественным преобразованием (ср. задачу 15.130).

23.88. Доказать, что матрицы подобных линейных преобразований подобны.

23.89. Доказать, что отношение подобия между линейными преобразованиями является отношением эквивалентности (т. е. $\varphi \sim \varphi$; из $\varphi \sim \psi$ следует $\psi \sim \varphi$; из $\varphi \sim \psi$ и $\psi \sim \chi$ следует $\varphi \sim \chi$).

23.90. Пусть φ, ψ — линейные преобразования линейного пространства $\mathscr{L}$. Доказать, что:

1) если ψ подобно φ, то для любого базиса $\boldsymbol{e}$ пространства $\mathscr{L}$ существует такой базис $\boldsymbol{e}'$, что матрица преобразования ψ в базисе $\boldsymbol{e}'$ совпадает с матрицей φ в базисе $\boldsymbol{e}$;

2) если для преобразований φ и ψ в $\mathscr{L}$ существуют такие базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$, что матрица преобразования φ в базисе $\boldsymbol{e}$ совпадает с матрицей преобразования ψ в базисе $\boldsymbol{e}'$, то φ и ψ подобны.

23.91. Пусть линейные преобразования φ и ψ подобны. Показать, что подобны также преобразования:

1) $p(\varphi) = a_0\iota + a_1\varphi + \ldots + a_n\varphi^n$ и $p(\psi)$, где $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ — произвольный многочлен;

2) φ^{-1} и ψ^{-1}, если φ и ψ обратимы.

23.92. Пусть φ и ψ — линейные преобразования некоторого линейного пространства, хотя бы одно из которых невырождено.

1) Доказать, что преобразования $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ подобны.

2) Сформулировать и доказать матричный вариант этого утверждения.

23.93. Доказать, что линейное отображение ранга r представимо в виде суммы r линейных отображений ранга 1, но не представимо в виде суммы меньшего числа таких отображений (ср. задачу 16.33).

23.94. Пусть φ, ψ — линейные отображения пространства $\mathscr{L}$ в $\tilde{\mathscr{L}}$. Доказать, что $\operatorname{rg}(\varphi + \psi) \leqslant \operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi$ (ср. задачу 16.34, 6)).

23.95. Пусть $\varphi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{M}$, $\psi\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ — линейные отображения, $\dim \mathscr{M} = m$. Доказать:

1) $\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi - m \leqslant \operatorname{rg}(\psi\varphi) \leqslant \min(\operatorname{rg}\varphi, \operatorname{rg}\psi)$ (неравенства Сильвестра);

2) $\dim \operatorname{Ker}(\psi\varphi) \leqslant \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\psi$;

3) если $\psi\varphi = \theta$, то $\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi \leqslant m$ (напомним, что через θ обозначено нулевое отображение).

23.96. Пусть $\varphi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ — линейное преобразование. Доказать, что для любого k, удовлетворяющего условию $\operatorname{rg}\varphi \leqslant k \leqslant n = \dim \mathscr{L}$, существует линейное преобразование ψ такое, что $\psi\varphi = \theta$ и $\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi = k$.

23.97. Доказать, что для любых двух перестановочных линейных преобразований φ и ψ имеет место включение $\operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Ker}\psi \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi\psi)$.

23.98. Пусть φ — линейное преобразование n-мерного линейного пространства и $\varphi^2 = \iota$. Доказать, что:

1) $\operatorname{rg}(\varphi + \iota) + \operatorname{rg}(\varphi - \iota) = n$;

2) $\dim \operatorname{Ker}(\varphi + \iota) + \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \iota) = n$.

23.99. Пусть φ, ψ, χ — такие линейные отображения, что произведение $\varphi\psi\chi$ существует. Доказать, что

$$\operatorname{rg}(\varphi\psi) + \operatorname{rg}(\psi\chi) \leqslant \operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}(\varphi\psi\chi)$$

23.100. Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ — вещественные линейные пространства и $L(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ — множество всех линейных отображений $\varphi\colon \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$.

1) Доказать, что $L(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ — линейное пространство относительно операций сложения линейных отображений и умножения отображения на число.

2) Пусть $\dim \mathscr{P} = n$, $\dim \mathscr{Q} = m$. Построить базис пространства $L(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ и найти его размерность.

3) Показать, что в условиях п. 2) пространство $L(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ изоморфно пространству $\mathscr{R}_{m\times n}$ вещественных матриц размеров $m \times n$.

23.101. Выяснить, образует ли данное множество линейных отображений линейное подпространство в $L(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ (см. задачу 23.100):

1) множество всех отображений ранга $k \geqslant 1$;

2) множество всех отображений ранга, не превосходящего $k \geqslant 1$;

3) множество всех отображений, ядра которых содержат некоторое фиксированное подпространство из $\mathscr{P}$;

4) множество всех инъективных отображений;

5) множество всех сюръективных отображений;

6) множество всех отображений, множества значений которых содержатся в фиксированном подпространстве из $\mathscr{Q}$.

23.102. Пусть в линейном пространстве $\mathscr{L}$ задан базис $\boldsymbol{e}$. Доказать, что данное множество линейных преобразований пространства $\mathscr{L}$ является группой относительно операции умножения преобразований:

1) множество всех невырожденных преобразований;

2) множество всех преобразований с определителем, равным 1;

3) множество всех невырожденных преобразований, матрицы которых в базисе $\boldsymbol{e}$ верхние треугольные;

4) множество всех невырожденных преобразований, заданных в базисе $\boldsymbol{e}$ диагональными матрицами;

5) множество всех гомотетий $\lambda\iota$, где число λ отлично от 0;

6) множество всех преобразований, имеющих в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицы перестановок.

23.103. В линейном пространстве $\mathscr{L}$ дан базис $\boldsymbol{e}$. Является ли группой относительно умножения данное множество линейных преобразований пространства $\mathscr{L}$:

1) множество всех линейных преобразований;

2) множество всех преобразований, матрицы которых диагональны в базисе $\boldsymbol{e}$;

3) множество всех невырожденных преобразований, которые в базисе $\boldsymbol{e}$ задаются целочисленными матрицами, т. е. матрицами $\|a_{ij}\|$, где a_{ij} — целые числа;

4) множество всех преобразований, матрицы которых в базисе $\boldsymbol{e}$ целочисленны и имеют определители, равные 1 или -1;

5) множество всех преобразований с данным определителем d;

6) множество всех невырожденных преобразований, имеющих в базисе e матрицы, каждая строка и каждый столбец которых содержат ровно по одному ненулевому элементу?

23.104. В технике используется уголковый отражатель. Он представляет собой трехгранный угол, грани которого — взаимно перпендикулярные зеркала. Доказать, что луч света, выпущенный из точки внутри этого трехгранного угла, отразившись от всех его граней, сменит свое направление на противоположное.

§ 24. Инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения линейных преобразований

В этом параграфе используются понятия: *инвариантное подпространство, ограничение линейного преобразования на инвариантном подпространстве, собственное значение, собственный вектор* и *собственное подпространство линейного преобразования, характеристический многочлен* и *характеристическое число матрицы линейного преобразования, диагонализируемое линейное преобразование.*

Подпространство $\mathscr{M}$ линейного пространства $\mathscr{L}$ называется *инвариантным относительно линейного преобразования* φ (или *инвариантным подпространством преобразования* φ), если для любого $x \in \mathscr{M}$ выполнено $\varphi(x) \in \mathscr{M}$. *Ограничением* (*сужением*) преобразования φ на инвариантном подпространстве $\mathscr{M}$ называется преобразование $\varphi_{\mathscr{M}}$ пространства $\mathscr{M}$, определенное равенством $\varphi_{\mathscr{M}}(x) = \varphi(x)$ для $x \in \mathscr{M}$.

Ненулевой вектор $x \in \mathscr{L}$ называется *собственным вектором линейного преобразования* φ, *отвечающим* (или *принадлежащим*) *собственному значению* λ, если $\varphi(x) = \lambda x$. Линейная оболочка всех собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению λ, называется *собственным подпространством* линейного преобразования φ, отвечающим этому собственному значению, и обозначается $\mathscr{L}_\lambda$.

Укажем метод отыскания собственных значений и собственных векторов линейного преобразования, заданного матрицей. Пусть φ: $\mathscr{L} \to \mathscr{L}$ — линейное преобразование и в $\mathscr{L}$ выбран базис, в котором A — матрица преобразования φ, а ξ — координатный столбец собственного вектора, отвечающего собственному значению λ. Тогда ξ является решением системы линейных уравнений

$$(A - \lambda E)\,\xi = o. \qquad (1)$$

Для существования ненулевого решения системы (1) необходимо, чтобы

$$\det (A - \lambda E) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами матрицы* A. В комплексном линейном пространстве все характеристические числа матрицы линейного преобразования являются его собственными значениями, а в вещественном пространстве — только вещественные характеристические числа.

Левая часть уравнения (2) является многочленом от λ степени $n = \dim \mathscr{L}$:

$$\det (A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{tr} A \, (-\lambda)^{n-1} + \ldots + \det A \tag{3}$$

Этот многочлен называется *характеристическим многочленом матрицы* A. Характеристический многочлен матрицы A линейного преобразования не изменяется при замене базиса, следовательно, не изменяются его коэффициенты, в частности след и определитель матрицы A, а также характеристические числа. Это дает основание называть *характеристическим многочленом*, *характеристическими числами*, *определителем* и *следом линейного преобразования* соответствующие объекты для матрицы преобразования в некотором (любом) базисе.

Собственные векторы линейного преобразования, заданного геометрически или явной формулой, иногда можно находить непосредственно, не вычисляя его матрицы.

Решение *задачи на собственные значения и собственные векторы* линейного преобразования φ включает: а) вычисление корней его характеристического многочлена; б) в случае вещественного пространства — отбор вещественных корней, так как только они являются собственными значениями; в) отыскание максимальной линейно независимой системы собственных векторов преобразования φ, которая состоит из базисов собственных подпространств $\mathscr{L}_\lambda$ для каждого собственного значения λ.

Матрица линейного преобразования φ в некотором базисе диагональна тогда и только тогда, когда все базисные векторы — собственные для φ. При этом на диагонали матрицы находятся соответствующие собственные значения. Линейное преобразование пространства $\mathscr{L}$ называется *диагонализируемым* (или *преобразованием простой структуры*), если в $\mathscr{L}$ существует базис, в котором матрица преобразования диагональна. Матрица, подобная диагональной, называется диагонализируемой (матрицей простой структуры). Диагонализируемость зависит от поля, над которым определено пространство $\mathscr{L}$. Вещественная матрица, имеющая комплексные характеристические числа, не диагонализируема как матрица линейного преобразования в вещественном пространстве, но может быть диагонализируемой над полем комплексных чисел.

Привести линейное преобразование (или *его матрицу*) *к диагональному виду* — значит найти базис из собственных векторов преобразования и записать матрицу преобразования в этом базисе.

Жордановой клеткой порядка n с диагональным элементом λ называется матрица

$$J_n(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{Vmatrix} = A_{612}.$$

Собственные векторы и собственные значения (24.1—24.65)

24.1. Доказать, что множество всех собственных векторов линейного преобразования, отвечающих одному собственному значению, дополненное нулевым вектором, совпадает с собственным подпространством.

24.2. Доказать, что:

1) ядро линейного преобразования совпадает с собственным подпространством, отвечающим нулевому собственному значению;

2) если λ_0 — собственное значение преобразования φ, то $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_0\iota)$ есть собственное подпространство преобразования φ, отвечающее этому собственному значению.

24.3. Пусть A — матрица, а λ — собственное значение линейного преобразования n-мерного линейного пространства. Чему равна размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению λ, если ранг матрицы $A - \lambda E$ равен r?

24.4. Какой вид имеет матрица линейного преобразования, если первые k базисных векторов являются его собственными векторами?

24.5. Доказать, что размерность собственного подпространства, отвечающего данному корню характеристического многочлена, не превосходит кратности этого корня.

24.6. Пусть x, y — собственные векторы линейного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, а числа α, β отличны от нуля. Доказать, что вектор $\alpha x + \beta y$ не является собственным.

24.7. Доказать, что ненулевое линейное преобразование, для которого все ненулевые векторы собственные, является гомотетией.

24.8. Доказать, что система собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям линейного преобразования, линейно независима.

24.9. Доказать, что матрица линейного преобразования в некотором базисе тогда и только тогда диагональна, когда все векторы базиса собственные.

24.10. Доказать, что линейное преобразование n-мерного линейного пространства, имеющее n различных собственных значений, диагонализируемо.

24.11. Пусть φ — линейное преобразование конечномерного линейного пространства $\mathscr{L}$. Доказать, что следующие высказывания равносильны:

1) φ диагонализируемо;

2) в $\mathscr{L}$ существует базис из собственных векторов преобразования φ;

3) объединение базисов собственных подпространств является базисом в $\mathscr{L}$;

4) кратность каждого корня λ характеристического уравнения равна размерности собственного подпространства $\mathscr{L}_\lambda$;

5) $\mathscr{L}$ является прямой суммой собственных подпространств.

24.12. Доказать, что:

1) в комплексном линейном пространстве каждое характеристическое число матрицы линейного преобразования является собственным значением, так что произвольное линейное преобразование имеет хотя бы один собственный вектор;

2) в вещественном пространстве каждое вещественное характеристическое число является собственным значением.

24.13. Доказать, что линейное преобразование нечетномерного (например, трехмерного) вещественного линейного пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

24.14. 1) Доказать, что характеристический многочлен, определитель и след матрицы линейного преобразования не зависят от выбора базиса.

2) Найти выражение коэффициентов характеристического многочлена, в частности следа и определителя матрицы порядка n, через характеристические числа.

24.15. Найти собственные векторы и собственные значения каждого из следующих преобразований:

1) нулевого; 2) тождественного; 3) гомотетии.

24.16. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе n-мерного линейного пространства матрицей $A_{612} = J_n(\lambda)$.

24.17. Пусть матрица линейного преобразования в некотором базисе — верхняя или нижняя треугольная с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти все собственные значения этого преобразования.

24.18. Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$, где $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ — ненулевые подпространства. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного преобразования φ; доказать, что φ имеет базис из собственных векторов, и указать диагональный вид его матрицы, если φ есть:

1) проектирование на подпространство $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$;

2) отражение в подпространстве $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$.

24.19. Найти собственные значения и собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицы линейных преобразований, определенных в задаче 23.65.

24.20. Найти собственные значения, собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицу линейного преобразования, определенного в задаче:

1) 23.9.1; 2) 23.9.2; 3) 23.9.3; 4) 23.9.4; 5) 23.10.1; 6) 23.10.2; 7) 23.10.3; 8) 23.10.4; 9) 23.12.1; 10) 23.12.2; 11) 23.12.3; 12) 23.13.1; 13) 23.13.2.

24.21. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, определенного в задаче:

1) 23.14.1; 2) 23.14.2; 3) 23.14.3; 4) 23.66.1; 5) 23.66.2; 6) 23.66.3; 7) 23.66.4; 8) 23.66.5.

Можно ли из собственных векторов преобразования составить базис?

24.22. 1) Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ, заданного матрицей

$$A = (a_1, \ldots, a_n)^T (b_1, \ldots, b_n) \neq O.$$

2) Найти необходимое и достаточное условие диагонализируемости преобразования φ.

3) Выяснить, диагонализируемы ли преобразования, заданные матрицами: а) A_{213}; б) A_{222}.

24.23. Пусть k, m, n — натуральные числа, $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$. Привести пример линейного преобразования n-мерного линейного пространства, для которого данное число λ является корнем характеристического многочлена кратности m, а отвечающее ему собственное подпространство имеет размерность k.

24.24. Пусть линейное преобразование φ трехмерного комплексного линейного пространства в некотором базисе имеет вещественную матрицу и по крайней мере одно характеристическое число этой матрицы не является вещественным. Доказать, что φ диагонализируемо.

24.25. Пусть x — собственный вектор линейного преобразования φ, отвечающий собственному значению λ, а $p(t)$ — многочлен. Доказать, что вектор x является собственным для преобразования $p(\varphi)$ и принадлежит собственному значению $p(\lambda)$.

24.26. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические числа линейного преобразования φ в n-мерном линейном пространстве. Чему равны характеристические числа (с учетом кратностей) преобразования:

1) (р) φ^2; 2) (р) φ^m (m — натуральное число);

3) φ^{-1} (при условии, что φ обратимо);

4) $p(\varphi)$, где $p(t)$ — произвольный многочлен (при условии, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны)?

24.27. Пусть характеристические многочлены квадратных матриц A и B имеют простые корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ соответственно. Найти характеристические числа кронекеровского произведения $A \otimes B$ матриц A, B.

24.28. Пусть линейное преобразование φ линейного пространства $\mathscr{L}$ диагонализируемо. Доказать утверждения:

1) $\operatorname{Im} \varphi$ есть линейная оболочка множества всех собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям;

2) $\mathscr{L} = \operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Ker} \varphi$.

24.29. Привести пример линейного преобразования φ пространства $\mathscr{R}_n$, для которого $\mathscr{R}_n \neq \operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi$.

24.30. Линейное преобразование вещественного n-мерного линейного пространства задано своей матрицей. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система векторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования и выяснить геометрический смысл преобразования.

$n=2$:

1) A_{46}; 2) A_{14}; 3) A_{36}; 4) A_{47}; 5) A_{48};
6) A_{13}; 7) A_{12}; 8) A_5; 9) A_{30}; 10) A_{49};

$n=3$:

11) A_{261}; 12) A_{243}; 13) A_{290}; 14) A_{291}; 15) A_{292};
16) A_{293}; 17) A_{294}; 18) A_{295}; 19) A_{221}; 20) A_{267};
21) A_{296}; 22) A_{297}; 23) A_{298}; 24) A_{273}; 25) A_{235};
26) A_{230}; 27) A_{237}; 28) A_{299}; 29) A_{287}; 30) A_{283};

$n=4$:

31) A_{477}; 32) A_{479}; 33) A_{480}; 34) A_{481}; 35) A_{482};
36) A_{449}; 37) A_{483}; 38) A_{484}; 39) A_{485}; 40) A_{469}.

24.31. Линейное преобразование комплексного n-мерного линейного пространства задано своей матрицей. Найти базис из собственных векторов и записать матрицу преобразования в этом базисе.

$n=2$:

1) A_{20}; 2) A_{50}; 3) A_{82}; 4) A_{79} $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$;
5) A_{94}; 6) A_{77}; 7) A_{78} $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$; 8) A_{87};

$n=3$:

9) A_{239}; 10) A_{262}; 11) A_{263}; 12) A_{300}; 13) A_{301};
14) A_{260}; 15) A_{363} $(\omega = e^{2\pi i/3})$; 16) A_{376}; 17) A_{377};

$n=4$:

18) A_{432}; 19) A_{447}; 20) A_{486}; 21) A_{472}.

24.32. Найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов линейного преобразования, заданного своей матрицей. Объяснить, почему преобразование не диагонализируемо.

1) A_{51}; 2) A_{52}; 3) A_{286}; 4) A_{303}; 5) A_{289};
6) A_{236}; 7) A_{457}; 8) A_{487}; 9) A_{548}.

24.33. Найти характеристические числа линейного преобразования, заданного своей матрицей. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование: а) в вещественном пространстве, б) в комплексном пространстве. Если да, то найти базис из собственных векторов и записать в нем матрицу преобразования; в противном случае объяснить, почему преобразование не диагонализируемо.

1) A_{45}; 2) A_{77}; 3) A_{259}; 4) A_{44}; 5) A_{253};
6) A_{98}; 7) A_{436}; 8) A_{430}; 9) A_{478}; 10) A_{474}.

24.34. Решить задачу на собственные значения и собственные векторы и указать диагональный вид матрицы линейного преобразования, заданного в стандартном базисе вещественного n-мерного арифметического пространства:

1) A_{604}; 2) A_{621} $(n = 2m)$; 3) A_{625}; 4) A_{627};
5) A_{640}; 6) A_{639}; 7) A_{634}; 8) A_{620};
9) A_{606} $(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1,\ \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 2;$ $m = [(n+1)/2])$;
10) A_{606} $(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1,\ \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0;$ $m = [(n+1)/2])$;

комплексного n-мерного арифметического пространства:

11) A_{605} $(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1,\ \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = -1;$ $m = [(n+1)/2])$;
12) A_{614}; 13) A_{635}.

24.35. Найти характеристические числа матрицы:

1) A_{490}; 2) A_{491}; 3) A_{492}; 4) A_{549}; 5) A_{550};
6) A_{638}; 7) A_{643}; 8) A_{642}; 9) A_{645} (n нечетно).

24.36. Вычислить:

1) $2^{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\pi k}{n+1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\pi k}{n+1}$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k^2}$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, $n = 2m+1$;

4) $\prod\limits_{0\leqslant j<k\leqslant n-1}(\varepsilon^k - \varepsilon^j)$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, $n = 2m+1$.

24.37. 1) Одна из матриц A_{287}, A_{289} подобна матрице $D = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$. Какая именно? Ответ обосновать, не находя собственных векторов и характеристических чисел.

2) Матрица $D = \operatorname{diag}(1, 1, 0)$ подобна одной из матриц A_{230}, A_{264}. Выяснить, какой именно, не находя собственных значений и собственных векторов.

3) Из двух матриц A_{304}, A_{305} одна подобна матрице $D_1 = \operatorname{diag}(1, -1, 0)$, а другая — матрице $D_2 = \operatorname{diag}(1, 1, 0)$. Выяснить, какая именно, без вычисления собственных значений и собственных векторов.

24.38. 1) Матрица A_{283} подобна одной из матриц: $-E$, $J_3(-1)$, $\operatorname{diag}(-1, J_2(-1))$. Какой именно?

2) Одна из матриц A_{457}, A_{458}, A_{485} подобна матрице $J_4(0)$. Какая именно?

Задачи 24.39—24.41 решить как задачи на собственные векторы и собственные значения.

24.39. Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны (с коэффициентом подобия λ). Если длины сторон треугольника ABC равны a, b, c, то соответствующие стороны треугольника $A'B'C'$ имеют длины $3a + b + c$, $a + 3b + c$, $a + b + 3c$. Доказать, что треугольники правильные, и найти λ.

24.40. Сумма различных натуральных чисел n_1, n_2, n_3, n_4 равна 18. После того как их увеличили в одинаковое число λ раз, получились числа $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, $n_1 + n_2 - n_3 - n_4$, $n_1 - n_2 + n_3 - n_4$, $n_1 - 2n_2 - n_3 + 3n_4$. Найти n_1, n_2, n_3, n_4, λ.

24.41. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой: $x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + \frac{1}{3} x_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $x_0 = a$, $x_1 = b$. Доказать, что последовательность сходится, и найти ее предел.

24.42. Найти собственные значения и собственные векторы (собственные функции) дифференцирования D как линейного преобразования каждого из следующих линейных пространств вещественных функций (n — фиксированное натуральное число):

1) пространство всех многочленов степени не выше n;

2) пространство всех тригонометрических многочленов вида $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$;

3) линейная оболочка системы функций $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные числа.

4) пространство всех функций вида $e^{\lambda_0 t} p(t)$, где $p(t)$ — любой многочлен степени не выше n, λ_0 — фиксированное число ($\lambda_0 \neq 0$).

24.43. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования D^2 в пространствах функций задачи 24.42.

24.44. Проверить, что функции вида $y = e^t p(t)$, где $p(t)$ — многочлен не выше второй степени, образуют линейное пространство $\mathscr{L}$. Убедиться в том, что φ — линейное преобразование пространства $\mathscr{L}$, и решить для φ задачу на собственные значения и собственные векторы:

1) $\varphi(y) = y'' - 2y' + y$, т. е. $\varphi = \mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + \iota$;

2) $\varphi = \mathrm{D}^3 - 2\mathrm{D}^2$;

3) $\varphi = \mathrm{D}^3 - 3\mathrm{D}^2 + 3\mathrm{D} + \iota$.

24.45. Проверить, что функции вида $y = e^{-t}(a \cos t + b \sin t)$ образуют линейное пространство $\mathscr{M}$ и что преобразование $\varphi = p(\mathrm{D})$, где $p(t)$ — данный многочлен, D — дифференцирование, является линейным преобразованием пространства $\mathscr{M}$. Решить для φ задачу на собственные значения и собственные векторы, если:

1) $p(t)=(t+1)^2$; 2) $p(t)=t^2-1$.

24.46. В линейной оболочке функций $\cos 2t$, $\sin 2t$, $t\cos 2t$, $t\sin 2t$ задано линейное преобразование $\varphi = p(\mathrm{D})$, где $p(t)$ — многочлен, D — дифференцирование. Решить для φ задачу на собственные значения и собственные векторы, если:

1) $p(t)=t^2+4$; 2) $p(t)=t^4+8t^2$.

24.47. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ пространства вещественных многочленов $p(t)$ не выше второй степени, если:

1) $\varphi(p)=tp'$; 2) $\varphi(p)=(tp)'$;

3) $\varphi(p)=t^2p''-tp'+2p$.

24.48. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования дифференцирования в пространстве функций, бесконечно дифференцируемых на всей числовой прямой.

24.49. Пусть $\mathscr{L}$ — множество функций $y(t)$, бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0, \pi]$ и таких, что $y(0) = y(\pi) = 0$.

1) Проверить, что $\mathscr{L}$ — линейное пространство.

2) Найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования φ пространства $\mathscr{L}$, заданного формулой $\varphi(y)=y''$.

24.50. Пусть A, B — квадратные матрицы, и матрица $\begin{Vmatrix} A & C \\ O & B \end{Vmatrix}$ диагонализируема. Доказать, что матрицы A, B диагонализируемы. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

24.51. Зафиксируем вещественный многочлен $p_0(t)$ степени m $(m \geqslant 1)$. Любой многочлен $p(t)$ можно разделить на $p_0(t)$ с остатком, т. е. однозначно представить в виде

$$p(t)=q(t)\,p_0(t)+r(t) \tag{4}$$

(степень остатка $r(t)$ меньше степени $p_0(t)$). Преобразование φ пространства $\mathscr{P}$ всех вещественных многочленов определим формулой $\varphi(p(t))=r(t)$.

1) Показать, что преобразование φ линейно и $\varphi^2=\varphi$.

2) Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ.

3) Доказать, что формула (4) дает разложение пространства $\mathscr{P}$ в прямую сумму собственных подпространств.

24.52. Пусть φ — операция взятия остатка от деления на многочлен $p_0(t)$ (см. задачу 24.51) в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти базис из собственных векторов и записать матрицу преобразования φ в этом базисе, если:

1) $p_0(t) = t$; 2) $p_0(t) = t^2 + 1$; 3) $p_0(t) = (t-1)^3$.

24.53. В пространстве $\mathcal{R}_{n\times n}$ квадратных матриц порядка n рассматривается операция транспонирования τ: $A \mapsto A^T$. Проверить, что τ — линейное преобразование и $\tau^2 = \iota$. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования τ. Разложить пространство $\mathcal{R}_{n\times n}$ в прямую сумму собственных подпространств преобразования τ.

24.54. Множество комплексных матриц порядка n рассматривается как вещественное линейное пространство $\mathcal{M}$ размерности $2n^2$.

1) Проверить, что операция $\eta: A \to A^H = \overline{A}^T$ эрмитова сопряжения матрицы является вещественным линейным преобразованием пространства $\mathcal{M}$, причем $\eta^2 = \iota$.

2) Найти собственные значения и собственные векторы преобразования η. 3) Показать, что преобразование η не является линейным преобразованием комплексного пространства $\mathcal{C}_{n\times n}$.

24.55. Пусть A — матрица второго порядка. Формула $\varphi(X) = AX$ определяет линейное преобразование пространства матриц второго порядка (задача 23.47). Найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ. В случае, когда эта система является базисом, записать в нем матрицу преобразования φ.

1) $A = A_{46}$; 2) $A = A_{52}$;

3) $A = A_{50}$ (в пространстве комплексных матриц).

24.56. Решить задачу на собственные значения и собственные векторы для преобразования $\varphi(X) = XB$ пространства матриц второго порядка, если:

1) $B = A_{36}$; 2) $B = A_{51}$ (пространство вещественное);

3) $B = A_{45}$ (пространство комплексное).

24.57. Преобразование пространства матриц второго порядка определено формулой $\varphi(X) = AX - XA$, где A — фиксированная матрица.

1) Показать, что преобразование φ линейно, и найти его матрицу в стандартном базисе.

2) Решить для преобразования φ задачу на собственные значения и собственные векторы, если:

а) $A = A_{106}$; б) $A = A_{22}$ (пространство вещественное);

в) $A = A_{20}$ (пространство комплексное).

24.58. Пусть A — невырожденная матрица второго порядка. Показать, что формула $\varphi(X) = A^{-1}XA$ определяет линейное преобразование пространства матриц второго порядка. Решить для преобразования φ задачу на собственные значения и собственные векторы, если:

1) $A = A_{22}$; 2) $A = A_{13}$.

24.59. Найти собственные векторы и собственные значения преобразования сдвига в пространстве многочленов от двух переменных, определенного в задаче 23.50, если:

1) $a = 1$, $b = 0$; 2) $a = 1$, $b = -2$.

24.60. Решить задачу о собственных значениях и собственных векторах для линейных преобразований пространства однородных многочленов степени n от двух переменных, определенных в задаче 23.51.

24.61. Пусть A — матрица второго порядка, $(x^*, y^*) = (x, y)\,A$. Преобразование φ пространства многочленов $p(x, y)$ степени не выше n определим формулой $\varphi(p(x, y)) = p(x^*, y^*)$. Показать, что φ — линейное преобразование. Найти собственные векторы и собственные значения преобразования φ, если $n = 2$ и

1) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

24.62. Пусть $\mathscr{K}(x, y) = g_0(y) + xg_1(y) + x^2g_2(y)$, где $g_0(y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ — непрерывные функции на отрезке $[-1, 1]$. Показать, что преобразование φ, определяемое формулой

$$\varphi(p(x)) = \int_{-1}^{1} \mathscr{K}(x, y)\, p(y)\, dy, \qquad (5)$$

является линейным преобразованием пространства многочленов $p(x)$ степени не выше 2. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ, если:

1) $\mathscr{K}(x, y) = 3x^2y + 5xy^2$;

2) $\mathscr{K}(x, y) = y^2 + 2x(y - 1) + (1 - 3y^2)\,x^2$.

24.63. Показать, что формула

$$\varphi(f(x)) = \int_{0}^{\pi} \mathscr{K}(x, y)\, f(y)\, dy$$

определяет линейное преобразование φ пространства тригонометрических многочленов вида:

1) $a \cos x + b \sin x$, если $\mathscr{K}(x, y) = \sin(x + y)$;

2) $a + b\cos 2x + c\sin 2x$, если $\mathscr{K}(x, y) = \cos^2(x - y)$. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ.

24.64. Найти собственные значения и собственные векторы оператора Лапласа $\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в пространстве многочленов $p(x, y)$ с вещественными коэффициентами.

24.65. Пусть φ, ψ — подобные преобразования линейного пространства $\mathscr{L}$ (см. формулу (5) введения к § 23). Доказать, что:

1) характеристические многочлены преобразований φ и ψ совпадают:

2) если x — собственный вектор преобразования φ, то $\omega^{-1}(x)$ — собственный вектор преобразования ψ, отвечающий тому же собственному значению;

3) если в $\mathscr{L}$ существует базис, в котором матрица преобразования φ диагональна (треугольна), то аналогичный базис существует и для ψ.

4) Показать на примере, что совпадение характеристических многочленов двух линейных преобразований не влечет подобия этих преобразований.

Инвариантные подпространства. Перестановочные преобразования (24.66—24.112)

24.66. Доказать, что 1) ядро и 2) множество значений линейного преобразования являются инвариантными подпространствами.

24.67. Доказать, что собственное подпространство линейного преобразования инвариантно.

24.68. Пусть φ — линейное преобразование линейного пространства $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ — подпространство в $\mathscr{L}$, инвариантное относительно φ, и $p(t)$ — многочлен. Доказать, что данное подпространство в $\mathscr{L}$ инвариантно относительно φ:

1) $\varphi(\mathscr{M})$; 2) $\varphi^{-1}(\mathscr{M})$ (если φ обратимо); 3) $\varphi^m(\mathscr{M})$ $(m \geqslant 1)$;
4) $\operatorname{Ker} p(\varphi)$; 5) $p(\varphi)(\mathscr{M})$.

24.69. Доказать, что 1) сумма двух (и вообще любого конечного множества) и 2) пересечение двух (и вообще любого множества) инвариантных подпространств линейного преобразования — инвариантные подпространства.

24.70. Пусть φ — линейное преобразование линейного пространства. Доказать, что любое подпространство, содержащее $\operatorname{Im}\varphi$, инвариантно.

24.71. Доказать, что если линейное преобразование φ невырождено, то φ и φ^{-1} имеют одни и те же инвариантные подпространства.

24.72. Какой вид имеет матрица линейного преобразования n-мерного линейного пространства, если:

1) первые k базисных векторов;

2) последние $n-k$ базисных векторов

образуют базис инвариантного подпространства?

24.73. 1) Пусть линейное пространство является прямой суммой двух инвариантных подпространств линейного преобразования. Доказать, что тогда в некотором базисе матрица преобразования имеет вид $\begin{Vmatrix} A & O \\ O & B \end{Vmatrix}$, где A, B — квадратные матрицы.

2) Сформулировать и доказать обратное утверждение.

24.74. Доказать, что:

1) характеристический многочлен линейного преобразования делится на характеристический многочлен его ограничения на инвариантном подпространстве;

2) если все корни характеристического многочлена линейного преобразования φ линейного пространства $\mathscr{L}$ принадлежат полю, над которым определено $\mathscr{L}$, то всякое подпространство в $\mathscr{L}$, инвариантное относительно φ, содержит собственный вектор этого преобразования;

3) если линейное пространство является прямой суммой инвариантных подпространств линейного преобразования φ, то характеристический многочлен φ равен произведению характеристических многочленов ограничений φ на этих инвариантных подпространствах.

24.75. Найти все подпространства, инвариантные относительно гомотетии линейного пространства.

24.76. Найти подпространства, инвариантные относительно поворота плоскости вокруг начала координат на угол α.

24.77. Найти подпространства трехмерного геометрического векторного пространства, инвариантные относительно поворота на угол α вокруг прямой $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \neq 0)$.

24.78. Пусть линейное преобразование n-мерного линейного пространства имеет n попарно различных собственных значений. Найти все инвариантные подпространства и подсчитать их количество.

24.79. Пусть φ — диагонализируемое линейное преобразование n-мерного линейного пространства $\mathscr{L}$. Найти все подпространства в $\mathscr{L}$, инвариантные относительно преобразования φ.

24.80. Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства $\mathscr{L}$ линейное преобразование φ имеет матрицу:

1) $J_2(\lambda)$ $(n = 2)$; 2) $J_3(\lambda)$ $(n = 3)$; 3) $J_n(\lambda)$.

Найти все подпространства в $\mathscr{L}$, инвариантные относительно φ.

24.81. Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$. Найти инвариантные подпространства данного линейного преобразования пространства $\mathscr{L}$:

1) проектирования на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$;

2) отражения в $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$.

24.82. 1) Показать, что преобразование φ проектирования линейного пространства обладает свойством: $\varphi^2 = \varphi$.

2) Доказать, что ненулевое линейное преобразование $\varphi \neq \iota$, для которого $\varphi^2 = \varphi$, есть проектирование на $\operatorname{Im}\varphi$ параллельно $\operatorname{Ker}\varphi$.

24.83. 1) Показать, что преобразование φ отражения линейного пространства в подпространстве обладает свойством $\varphi^2 = \iota$.

2) Доказать, что линейное преобразование φ, отличное от $\pm\iota$, для которого $\varphi^2 = \iota$, есть отражение пространства в подпространстве неподвижных векторов параллельно некоторому дополнительному подпространству.

24.84. Пусть λ — собственное значение линейного преобразования φ линейного пространства $\mathscr{L}$. Доказать, что всякое линейное подпространство из $\mathscr{L}$, содержащее $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\iota)$, инвариантно относительно φ.

24.85. Доказать утверждения:

1) Если линейное преобразование n-мерного линейного пространства имеет собственный вектор, то для него существует и $(n - 1)$-мерное инвариантное подпространство.

2) Пусть A — матрица линейного преобразования φ в некотором базисе $\boldsymbol{e}$, λ — собственное значение и строка $\boldsymbol{a}$ определена уравнением $\boldsymbol{a}(A - \lambda E) = \boldsymbol{o}$. Тогда уравнение $\boldsymbol{a}\xi = 0$ в базисе $\boldsymbol{e}$ определяет $(n - 1)$-мерное подпространство, инвариантное относительно преобразования φ. Справедливо ли обратное утверждение?

3) Всякое k-мерное инвариантное подпространство линейного преобразования комплексного пространства содержит $(k - 1)$-мерное инвариантное подпространство.

24.86. Линейное преобразование φ арифметического пространства $\mathscr{R}_n$ в стандартном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ задано матрицей A. Найти подпространства, инвариантные относительно φ, если:

1) $A = A_{36}$; 2) $A = A_{51}$; 3) $A = A_{306}$; 4) $A = A_{287}$;
5) $A = A_{604}$; 6) $A = A_{621}$ ($n = 2m$); 7) $A = A_{625}$.

24.87. Найти $(n-1)$-мерные подпространства в $\mathcal{R}_n$, инвариантные относительно линейного преобразования, заданного своей матрицей A, если:

1) $A = A_{241}$; 2) $A = A_{222}$; 3) $A = A_{238}$; 4) $A = A_{262}$;
5) $A = A_{487}$; 6) $A = A_{447}$; 7) $A = A_{549}$; 8) $A = A_{640}$.

24.88. 1) Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) — характеристическое число вещественной матрицы A порядка n, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ — собственный вектор линейного преобразования пространства $\mathcal{C}_n$ с матрицей A ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — вещественные векторы). Доказать, что $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ образуют базис двумерного инвариантного подпространства линейного преобразования пространства $\mathcal{R}_n$, заданного матрицей A.

2) Найти двумерные инвариантные подпространства $\mathcal{L}$ для линейного преобразования пространства $\mathcal{R}_4$, заданного в стандартном базисе матрицей A_{474}.

24.89. 1) Пусть линейное преобразование φ n-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ обладает цепочкой вложенных друг в друга попарно различных инвариантных подпространств: $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$. Доказать, что в $\mathcal{L}$ существует базис, в котором матрица преобразования φ верхняя треугольная.

2) Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица линейного преобразования φ пространства $\mathcal{L}$ верхняя треугольная. Доказать, что подпространства $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_k\}$ ($k = 1, \ldots, n$) инвариантны относительно φ и $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_{k+1}$ ($k = 1, \ldots, n-1$).

24.90. Линейное преобразование пространства $\mathcal{R}_3$ задано матрицей A в стандартном базисе. Привести матрицу преобразования к треугольному виду, если:

1) $A = A_{241}$; 2) $A = A_{222}$;
3) $A = A_{283}$; 4) $A = A_{263}$.

24.91. 1) Пусть $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_r = \mathcal{L}$ — цепочка подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$, инвариантных относительно линейного преобразования φ, $\dim \mathcal{L}_i = n_i$ ($n_1 < n_2 < \ldots < n_r = n$). Допустим, что базис $e_1, \ldots, e_n$ выбран так, что векторы $e_1, \ldots, e_{n_i}$ принадлежат $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, \ldots, r$). Показать, что матрица A_φ — верхняя блочно треугольная с диагональными блоками размеров $k_i \times k_i$, где $k_i = n_i - n_{i-1}$ ($i = 2, \ldots, r$), $k_1 = n_1$.

2) Пусть в некотором базисе матрица линейного преобразования — верхняя блочно треугольная. Доказать, что преобразование обладает цепочкой инвариантных подпространств. Выразить их размерности через порядки диагональных блоков.

24.92. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, n — целое неотрицательное число, λ — фиксированное действительное число. Доказать, что данное множество функций образует подпространство в $\mathscr{L}$, инвариантное относительно дифференцирования D:

1) множество всех многочленов;

2) множество всех многочленов степени не выше n;

3) множество всех тригонометрических многочленов порядка не выше n;

4) множество всех линейных комбинаций функций $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$;

5) множество всех функций $f(t) = e^{\lambda t} p(t)$, где $p(t)$ — произвольный многочлен;

6) множество всех функций $f(t) = e^{\lambda t} T(t)$, где $T(t)$ — произвольный тригонометрический многочлен;

7) множество всех функций $p(t) \cos t$, $p(t) \sin t$, где $p(t)$ — произвольный многочлен.

24.93. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство функций задачи 24.92, $\varphi = \mathrm{D}^2$. Доказать, что данное множество функций является подпространством в $\mathscr{L}$, инвариантным относительно преобразования φ. Найти собственные значения и собственные векторы ограничения преобразования на этом подпространстве:

1) множество всех четных многочленов степени не выше $2n$;

2) множество всех нечетных многочленов степени не выше $2n + 1$;

3) множество всех четных тригонометрических многочленов $a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos nt$;

4) множество всех нечетных тригонометрических многочленов $b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin nt$.

24.94. Найти все подпространства линейного пространства всех многочленов, инвариантные относительно дифференцирования.

24.95. Показать, что линейное преобразование пространства всех многочленов, состоящее в умножении многочленов на t, не имеет ни собственных векторов, ни инвариантных подпространств (кроме нулевого подпространства и всего пространства).

24.96. Найти подпространства, инвариантные относительно операции взятия остатка (см. задачу 24.51) в пространстве всех многочленов.

24.97. Пусть φ — линейное преобразование пространства многочленов $p(x, y)$, определенное в задаче 24.61. Доказать, что подпространства однородных многочленов степени n ($n = 0, 1, \ldots$) инвариантны относительно преобразования φ.

24.98. Найти подпространства линейного пространства матриц порядка n, инвариантные относительно транспонирования.

24.99. В пространстве $\mathcal{R}_{n\times n}$ рассматривается преобразование $\varphi(X) = AX$, где A — фиксированная матрица. Доказать, что $\mathcal{R}_{n\times n}$ является прямой суммой n подпространств, инвариантных относительно φ.

24.100. В пространстве $\mathcal{R}_{n\times n}$ рассматривается преобразование $\varphi(X) = AX - XA$, где A — фиксированная матрица. Доказать, что данное множество образует инвариантное относительно φ подпространство:

1) множество всех матриц с нулевым следом;

2) множество всех верхних треугольных матриц (если матрица A верхняя треугольная);

3) множество всех кососимметрических матриц (если матрица A кососимметрическая);

4) множество всех диагональных матриц (если матрица A диагональная).

24.101. Линейное преобразование φ пространства $\mathcal{R}_{n\times n}$ вещественных матриц порядка n определено формулой $\varphi(X) = A^T X + XA$, где A — фиксированная матрица.

1) Доказать, что кососимметрические матрицы образуют подпространство в $\mathcal{R}_{n\times n}$, инвариантное относительно преобразования φ;

2) выразить характеристические числа ограничения φ на этом подпространстве через характеристические числа матрицы A.

24.102. Линейное преобразование пространства матриц порядка n определено формулой $\varphi(X) = A^{-1}XA$, где A — невырожденная матрица. Доказать, что данное множество матриц является подпространством, инвариантным относительно преобразования φ:

1) множество всех матриц с нулевым следом;

2) множество всех скалярных матриц;

3) множество всех верхних треугольных матриц (если матрица A верхняя треугольная);

4) а) множество всех симметрических матриц; б) множество всех кососимметрических матриц (если матрица A ортогональная).

5) а) множество всех эрмитовых матриц; б) множество всех косоэрмитовых матриц (если A — унитарная матрица и если эти множества рассматриваются как подпространства $2n^2$-мерного вещественного пространства комплексных матриц порядка n).

24.103. Линейное преобразование φ комплексного пространства матриц второго порядка задано формулой $\varphi(X) = A^{-1}XA$, где $A = A_{77}$, α — вещественное число. Найти собственные значения и собственные векторы ограничения преобразования φ на подпространстве:

1) симметрических матриц;

2) матриц с нулевым следом.

24.104. Пусть линейные преобразования φ, ψ перестановочны. Доказать, что:

1) ядро и множество значений одного из них инвариантны относительно другого;

2) собственные подпространства преобразования φ инвариантны относительно ψ.

24.105. Пусть λ_0 — собственное значение линейного преобразования φ.

1) Доказать, что подпространства $\mathscr{L}_k = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0\iota)^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ инвариантны относительно φ.

2) Показать, что $\mathscr{L}_k \subseteq \mathscr{L}_{k+1}$. Может ли включение быть строгим?

24.106. Доказать, что:

1) любые два перестановочных линейных преобразования комплексного пространства имеют общий собственный вектор;

2) то же утверждение верно для вещественного пространства, если все характеристические числа преобразований вещественны.

24.107. Пусть φ — вырожденное линейное преобразование конечномерного линейного пространства. Доказать, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ преобразование $\varphi + \varepsilon\iota$ невырождено.

24.108. Доказать, что для любых двух линейных преобразований φ, ψ одного и того же линейного пространства характеристические многочлены преобразований $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ совпадают.

24.109. Пусть φ, ψ — перестановочные линейные преобразования n-мерного пространства, причем φ имеет n различных собственных значений. Доказать, что все собственные векторы преобразования φ являются собственными и для ψ, так что матрицы φ и ψ диагональны в общем для них базисе.

24.110. Пусть линейное преобразование φ диагонализируемо и каждое его собственное подпространство инвариантно относительно линейного преобразования ψ. Доказать, что $\varphi\psi = \psi\varphi$.

24.111. Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$, где $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ — ненулевые линейные подпространства в $\mathscr{L}$.

1) Пусть φ — проектирование пространства $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$, а ψ — некоторое линейное преобразование в $\mathscr{L}$. Доказать, что $\varphi\psi = \psi\varphi$ тогда и только тогда, когда подпространства $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ инвариантны относительно ψ.

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для отражения пространства $\mathscr{L}$ в $\mathscr{L}'$ параллельно $\mathscr{L}''$.

24.112. Пусть φ, ψ — линейные преобразования n-мерного линейного пространства. Дано, что $\varphi^n = \theta$, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$ и $[\psi, \varphi] = \psi\varphi - \varphi\psi = \varphi$. Доказать, что ψ имеет n собственных значений вида λ, $\lambda - 1$, ..., $\lambda - (n - 1)$, где λ — некоторое число.

ГЛАВА X

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе используются следующие основные понятия: *операция евклидова скалярного умножения* в вещественном линейном пространстве, *операция унитарного скалярного умножения* в комплексном линейном пространстве, *скалярное произведение* двух векторов, *линейное пространство со скалярным произведением*, *евклидово пространство*, *унитарное пространство*, *стандартные скалярные произведения* в n-мерном вещественном (комплексном) арифметическом пространстве $\mathscr{R}_n$ ($\mathscr{C}_n$) и в вещественном (комплексном) линейном пространстве $\mathscr{R}_{m\times n}$ ($\mathscr{C}_{m\times n}$) вещественных (комплексных) матриц размеров $m \times n$, *матрица Грама системы векторов*, *матрица Грама базиса*, *длина* (*норма*) *вектора*, *нормирование вектора*, *угол между двумя векторами*, *ортогональность двух векторов*, *ортогональная система векторов*, *ортонормированная система векторов*, *ортонормированный базис*, *процесс ортогонализации*, *биортогональные* (или *взаимные*) *системы векторов*, *биортогональные базисы*, *ортогональность вектора линейному подпространству*, *ортогональное дополнение линейного подпространства*, *ортогональная проекция вектора на подпространство* и *ортогональная составляющая вектора относительно подпространства*, *ортогональность двух подпространств*, *ортогональная сумма подпространств*, *угол между вектором и подпространством*, *угол между двумя подпространствами*.

Операция евклидова скалярного умножения в вещественном линейном пространстве $\mathscr{L}$ ставит в соответствие всякой паре векторов x и y из $\mathscr{L}$ действительное число, обозначаемое (x, y), и это соответствие удовлетворяет следующим условиям: каковы бы ни были векторы x, y и z из $\mathscr{L}$ и действительные числа α и β,

1) $(x, y) = (y, x)$ (*симметричность*);

2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ (*линейность* по первому аргументу при фиксированном втором);

3) $(x, x) > 0$ для $x \neq o$ (*положительность*).

Операция унитарного скалярного умножения в комплексном линейном пространстве $\mathscr{L}$ ставит в соответствие произвольной паре векторов x и y из $\mathscr{L}$ комплексное число, обозначаемое (x, y) так, что выполняются следующие условия: каковы бы ни были векторы x, y и z из $\mathscr{L}$ и комплексные числа α и β,

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (*эрмитова симметричность*);

2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$;

3) $(x, x) > 0$ для $x \neq 0$.

Число (x, y) называется *евклидовым* или соответственно *унитарным скалярным произведением*, а в дальнейшем будет называться просто скалярным произведением двух векторов x и y.

Евклидовым (*унитарным*) *пространством* называется вещественное (соответственно комплексное) линейное пространство с введенной на нем описанным выше образом операцией скалярного умножения.

Говоря о *линейном пространстве со скалярным произведением*, мы всегда имеем в виду одно из этих пространств. Евклидовы и унитарные пространства обозначаем буквой $\mathscr{E}$.

В дальнейшем будут использоваться следующие «*стандартные*» *евклидовы* и *унитарные пространства*. В n-мерном вещественном или комплексном арифметическом пространстве $\mathscr{R}_n$ ($\mathscr{C}_n$) стандартным скалярным произведением векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)^T$ будем называть число

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

если пространство евклидово, и

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j,$$

если пространство унитарное.

В вещественном (комплексном) линейном пространстве $\mathscr{R}_{m\times n}$ ($\mathscr{C}_{m\times n}$) вещественных (комплексных) матриц размера $m \times n$ с обычными операциями сложения и умножения на число *стандартное скалярное произведение матриц* $X = \| x_{jk} \|$ и $Y = \| y_{jk} \|$ определяем формулой

$$(X, Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} y_{jk},$$

если пространство евклидово, и

$$(X, Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} \bar{y}_{jk},$$

если пространство унитарное.

В евклидовом пространстве скалярное произведение выражается через координаты векторов формулой

$$(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} g_{ij} \xi_i \eta_j = \xi^T \Gamma \eta,$$

а в унитарном — формулой

$$(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} g_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j = \xi^T \Gamma \bar{\eta}.$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$ — координатные столбцы векторов x и y в базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$, $\Gamma = \| g_{ij} \|$ — матрица Грама базиса e.

Длиной (или *нормой*) вектора x из линейного пространства со скалярным произведением называется число $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Вектор x называется *нормированным*, если $|x| = 1$. Для любых векторов x и y из $\mathscr{E}$ выполняется неравенство Коши — Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|.$$

Угол между двумя векторами x и y евклидова пространства определяется формулой

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}.$$

Два вектора x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. *Система векторов* $e_1, \ldots, e_m$ называется *ортогональной*, если $(e_i, e_j) = 0$ для любых $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, m$. Ортогональная система нормированных векторов называется *ортонормированной*.

Процесс ортогонализации позволяет построить из произвольной линейно независимой системы векторов $f_1, \ldots, f_m$ ортогональную систему ненулевых векторов $g_1, \ldots, g_m$ и представляет собой следующую процедуру. Вначале полагаем $g_1 = f_1$. Последующие векторы $g_2, \ldots, g_m$ находятся из рекуррентных формул

$$g_k = f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{kj} g_j.$$

Коэффициенты λ_{kj} однозначно определяются условием ортогональности вектора g_k векторам $g_1, \ldots, g_{k-1}$:

$$\lambda_{kj} = \frac{(f_k, g_j)}{(g_j, g_j)}.$$

Нормируя векторы $g_1, \ldots, g_m$, мы приходим к ортонормированному базису в линейной оболочке исходной системы векторов $f_1, \ldots, f_m$.

Две системы векторов $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_m$ в n-мерном евклидовом или унитарном пространстве (при $m \leqslant n$) называются *биортогональными* (или *взаимными*), если

$$\left(e_i, f^j\right) = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Вектор x называется *ортогональным линейному подпространству*, если он ортогонален всякому вектору этого подпространства. *Орто-*

гональным дополнением $\mathscr{L}^{\perp}$ линейного подпространства $\mathscr{L}$ евклидова (или унитарного) пространства $\mathscr{E}$ называется множество всех векторов из $\mathscr{E}$, ортогональных подпространству $\mathscr{L}$. Ортогональное дополнение $\mathscr{L}^{\perp}$ является линейным подпространством. Если вектор представлен в виде суммы $x = x' + x''$, где $x' \in \mathscr{L}$, $x'' \in \mathscr{L}^{\perp}$, то вектор x' называется *ортогональной проекцией* вектора x на $\mathscr{L}$, вектор x'' — *ортогональной составляющей* вектора x относительно $\mathscr{L}$.

Линейные подпространства $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ евклидова (или унитарного) пространства называются *ортогональными*, если каждый вектор из $\mathscr{L}_1$ ортогонален любому вектору из $\mathscr{L}_2$.

Сумма конечного числа попарно ортогональных подпространств $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_k$ называется *ортогональной суммой* и обозначается

$$\mathscr{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{L}_k.$$

Углом между ненулевым вектором x и ненулевым линейным подпространством $\mathscr{L}$ евклидова пространства называется точная нижняя грань значений угла, который образует вектор x с ненулевыми векторами из $\mathscr{L}$.

Угол между ненулевыми линейными подпространствами $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ евклидова пространства определяется следующим образом. Обозначим через $\mathscr{D}$ пересечение $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, через $\mathscr{L}_1^0$ и $\mathscr{L}_2^0$ ортогональные дополнения подпространства $\mathscr{D}$ в подпространствах $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно. Если $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$ или $\mathscr{L}_2 \subseteq \mathscr{L}_1$, то угол между $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ полагается равным 0. В противном случае оба подпространства $\mathscr{L}_1^0$ и $\mathscr{L}_2^0$ ненулевые, и углом между $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ называется точная нижняя грань значений угла между ненулевыми векторами x из $\mathscr{L}_1^0$ и y из $\mathscr{L}_2^0$.

§ 25. Скалярное произведение. Матрица Грама

25.1. 1) Из свойств евклидова скалярного умножения $(x, y) = (y, x)$ и $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$ вывести следующее его свойство:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha (x, y) + \beta (x, z)$$

для любых векторов x, y, z и любых действительных чисел α, β.

2) Из свойств унитарного скалярного умножения

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \text{ и } (\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$$

вывести следующее его свойство:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} (x, y) + \bar{\beta} (x, z).$$

для любых векторов x, y, z и любых комплексных чисел α, β.

3) Из свойства унитарного скалярного умножения $(x, y) = \overline{(y, x)}$ вывести, что скалярный квадрат любого вектора — действительное число.

4) Из свойств скалярного умножения

$$(x, x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \text{ и } (\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$$

(для любых векторов x, y, z и любых чисел α, β) вывести следующее его свойство: $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда вектор x нулевой.

25.2. Показать, что линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства, рассматриваемое с тем же скалярным произведением, является евклидовым (унитарным) пространством.

25.3. Пусть в линейном пространстве заданы две операции скалярного умножения $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$. Показать, что для любых чисел $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, одновременно не равных нулю, операцией скалярного умножения будет и $(x, y) = \lambda (x, y)_1 + \mu (x, y)_2$.

25.4. Обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ координаты векторов x и y в некотором базисе n-мерного вещественного линейного пространства. Определить, может ли заданная функция $F(x, y)$ служить скалярным произведением, а в случае, если не может — указать, какие из свойств евклидова скалярного умножения не выполняются:

1) $F(x, y) = x_2y_1$, $n = 2$;
2) $F(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 10x_2y_2$, $n = 2$;
3) $F(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$, $n = 2$;
4) $F(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$, а) $n = 2$, б) $n \geqslant 3$;
5) $F(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$, $n = 2$;
6) $F(x, y) = 7x_1y_1 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 9x_2y_2$, $n = 2$;
7) $F(x, y) = 9x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$, $n = 2$;
8) $F(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$, $n = 2$;
9) $F(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - {}$
$- 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 7x_3y_3$, $n = 3$;
10) $F(x, y) = 5x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + {}$
$+ 2x_3y_1 + 4x_3y_3$, $n = 3$;
11) $F(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - {}$
$- x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$, $n = 3$;
12) $F(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_2 + x_2y_3$, $n = 3$.

25.5. Доказать, что в двумерном вещественном линейном пространстве функция

$$F(x, y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

где x_1, x_2 и y_1, y_2 — координаты векторов x и y в некотором базисе, задает евклидово скалярное умножение тогда и только тогда, когда $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} > 0$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

25.6. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — координаты векторов x и y в некотором базисе комплексного линейного n-мерного пространства. Определить, может ли функция $F(x, y)$ задавать скалярное произведение, а если нет, то указать, какие из свойств унитарного скалярного умножения не выполняются:

1) $F(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$, $n = 2$;
2) $F(x, y) = x_1\bar{y}_2$, $n = 2$;
3) $F(x, y) = ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1$, $n = 2$;
4) $F(x, y) = ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1$, $n = 2$;
5) $F(x, y) = (3 + i)\, x_1\bar{y}_2 + (3 - i)\, x_2\bar{y}_1$, $n = 2$;
6) $F(x, y) = 3x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2$, а) $n = 2$; б) $n \geqslant 3$;
7) $F(x, y) = 5x_1\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
8) $F(x, y) = x_1\bar{y}_1 + (1+i)\, x_1\bar{y}_2 + (1 - i)\, x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
9) $F(x, y) = 5x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
10) $F(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (2 - i)\, x_1\bar{y}_2 + (2 + i)\, x_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
11) $F(x, y) = x_1\bar{y}_1 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$, $n = 2$;
12) $F(x, y) = x_1\bar{y}_1 + (1 - i)\, x_1\bar{y}_2 + (1 + i)\, x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_3 - ix_3\bar{y}_2 + 3x_3\bar{y}_3$, $n = 3$.

25.7. Обозначим через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов x и y в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Найти условия на комплексные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22}, необходимые и достаточные для того, чтобы функция

$$F(x, y) = a_{11}x_1\bar{y}_1 + a_{12}x_1\bar{y}_2 + a_{21}x_2\bar{y}_1 + a_{22}x_2\bar{y}_2$$

задавала унитарное скалярное произведение.

25.8. Проверить, что:

1) стандартное скалярное произведение в n-мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathscr{R}_n$,

2) стандартное скалярное произведение в линейном пространстве $\mathscr{R}_{m \times n}$ матриц размеров $m \times n$ действительно обладает всеми свойствами евклидова скалярного произведения.

25.9. Проверить, что стандартное скалярное произведение в n-мерном комплексном арифметическом пространстве $\mathscr{C}_n$ действительно обладает всеми свойствами унитарного скалярного произведения.

25.10. Во всяком ли конечномерном линейном пространстве можно ввести операцию скалярного умножения?

25.11. В линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n ($n \geqslant 2$) задана функция $F(X, Y)$. Определить, обладает ли $F(X, Y)$ всеми свойствами операции евклидова скалярного умножения, если:

1) $F(X, Y) = \operatorname{tr} XY$; 2) $F(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$;

3) $F(X, Y) = \operatorname{tr} X \cdot \operatorname{tr} Y$; 4) $F(X, Y) = \det XY$;

5) $F(X, Y) = \operatorname{tr} X^T D Y$ (D — диагональная матрица порядка n с положительными элементами на главной диагонали).

25.12. Показать, что для стандартного скалярного произведения (X, Y) в линейном пространстве $\mathscr{R}_{m \times n}$ вещественных матриц размеров $m \times n$ справедливы представления

$$(X, Y) = \operatorname{tr} X^T Y = \operatorname{tr} XY^T.$$

25.13. Какие из функций в комплексном линейном пространстве $\mathscr{C}_{m \times n}$ матриц размеров $m \times n$:

1) $F_1(X, Y) = \operatorname{tr} XY^T$; 2) $F_2(X, Y) = \operatorname{tr} X\overline{Y^T}$;

3) $F_3(X, Y) = \operatorname{tr} \overline{X} Y^T$

могут служить унитарным скалярным произведением?

25.14. Показать, что в линейном пространстве многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами скалярное произведение может быть задано формулой:

1) $(p, q) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$, где $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_0, \ldots, \beta_n$ — коэффициенты многочленов p и q;

2) $(p, q) = \sum\limits_{k=0}^{n} p^{(k)}(a)\, q^{(k)}(a)$, где $p^{(k)}(a)$ и $q^{(k)}(a)$ — производные k-го порядка, вычисленные в некоторой точке a вещественной оси.

25.15. В комплексном линейном пространстве многочленов степени не выше n ввести операцию унитарного скалярного умножения.

25.16. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — попарно различные вещественные числа. Доказать, что в линейном пространстве многочленов степени не выше n ($n < m$) с вещественными коэффициентами скалярное произведение можно задать формулой

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)\, g(t_k).$$

Является ли эта функция евклидовым скалярным произведением, если $m \leqslant n$?

25.17. Проверить, что:

1) в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с обычными операциями сложения и умножения на число скалярное произведение может быть задано формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt;$$

2) в комплексном линейном пространстве комплексных функций вещественной переменной, непрерывных на отрезке $[a, b]$, скалярное произведение может быть задано формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

25.18. В вещественном или комплексном арифметическом пространстве скалярное умножение задано как функция компонент $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из данных векторов $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$. Найти выражение скалярного произведения векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ через их компоненты в базисе $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$.

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$; а) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 2)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (2, 1)^T$; б) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, -1)^T$;

2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$; а) $\boldsymbol{f}_1 = (1, -1)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, 1)^T$; б) $\boldsymbol{f}_1 = (1, -1)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, 0)^T$;

3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$; а) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, -1)^T$; б) $\boldsymbol{f}_1 = (1/2, 1/2)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1/2, 1/2)^T$;

4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1\bar{y}_1 + (1 + i)\, x_1\bar{y}_2 + (1 - i)\, x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$; а) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, -1)^T$; б) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1, 1 + i)^T$;

5) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_3y_3$; а) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (1, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_3 = (0, 1, 1)^T$; б) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1, 2, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_3 = (-1, 2, 2)^T$;

6) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + (2 + i)\, x_2\bar{y}_3 + (2 - i)\, x_3\bar{y}_2 + 6x_3\bar{y}_3$; а) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_3 = (0, 0, 1)^T$; б) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (-i, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_3 = (1 + 2i, -2 + i, 1)^T$.

25.19. Вычислить матрицу Грама Γ базиса $1, t, \ldots, t^n$ в евклидовом пространстве многочленов степени не выше n со скалярным произведением:

1) задачи 25.14, 1);

2) задачи 25.14, 2) (отдельно рассмотреть случай $a = 0$);

3) задачи 25.16 ($m > n$).

25.20. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше n со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ вычислить матрицу Грама Γ базиса $1, t, t^2, \ldots, t^n$ и выписать выражение скалярного произведения (f, g) через координаты векторов f, g в этом базисе, если:

1) $a = 0$, $b = 1$; 2) $a = -1$, $b = 1$.

25.21. Пусть Γ и Γ' — матрицы Грама базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ евклидова (унитарного) пространства, связанных матрицей перехода S: $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$.

1) Доказать, что в евклидовом пространстве $\Gamma' = S^T\Gamma S$.

2) Доказать, что в унитарном пространстве $\Gamma' = S^T\Gamma\overline{S}$.

3) Как связаны между собой определители матриц Γ и Γ'?

25.22. 1) Доказать, что конечная система векторов линейного пространства со скалярным произведением линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы равен 0.

2) Доказать, что определитель матрицы Грама любой конечной линейно независимой системы векторов линейного пространства со скалярным произведением положителен.

25.23. Доказать положительность определителя матрицы $\|a_{ij}\|$ порядка n с элементами:

1) $a_{ij} = 2(i + j - 1)^{-1}$, если $(i + j)$ четно, и $a_{ij} = 0$, если $(i + j)$ нечетно;

2) $a_{ij} = (i + j - 1)^{-1}$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

25.24. Векторы x и y евклидова или унитарного пространства заданы в базисе $e_1, \ldots, e_n$ координатными столбцами ξ и η соответственно, и известна матрица Грама Γ_f базиса $f_1, \ldots, f_n$. Вычислить матрицу Грама Γ_e базиса $e_1, \ldots, e_n$ и скалярное произведение векторов x и y, если:

1) $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 - 2e_2$,

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix};$$

2) $f_1 = 2e_1 + e_2,\quad f_2 = e_1 + e_2,$

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix},\quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix},\quad \eta = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

3) $f_1 = e_1 - e_2,\ f_2 = e_1 + e_2,$

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix},\quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix},\quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix};$$

4) $f_1 = e_1 + ie_2,\ f_2 = -3ie_1 + 4e_2,$

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 3 & 11i \\ -11i & 41 \end{Vmatrix},\quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ i \end{Vmatrix},\quad \eta = \begin{Vmatrix} 1+i \\ 2 \end{Vmatrix};$$

5) $f_1 = e_1,\ f_2 = e_1 + e_2,\quad f_3 = e_2 + e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix},\quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix},\quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix};$$

6) $f_1 = e_1 + e_2,\ f_2 = e_1 + e_3,\quad f_3 = e_2 + e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{Vmatrix},\quad \xi = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix},\quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

7) $f_1 = e_1,\ f_2 = -ie_1 + 2e_2 + ie_3,\quad f_3 = -ie_2 + e_3,$

$$\Gamma_f = \begin{Vmatrix} 1 & 3i & -1 \\ -3i & 22 & 10i \\ -1 & -10i & 5 \end{Vmatrix},\quad \xi = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix},\quad \eta = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

25.25. Найти длину вектора $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства с заданным скалярным произведением:

1) $\boldsymbol{x} = (5, 4, 3)^T$, скалярное произведение стандартное;

2) $\boldsymbol{x} = (1, -2, 3, 4)^T$, скалярное произведение стандартное;

3) $\boldsymbol{x} = (1, 1)^T$, скалярное произведение задачи 25.18, 2);

4) $\boldsymbol{x} = (1, -1, 2)^T$, скалярное произведение задачи 25.18, 5);

5) $\boldsymbol{x} = (1, i)^T$, скалярное произведение задачи 25.18, 4);

6) $\boldsymbol{x} = (1 + i,\ 1 - i)^T$, скалярное произведение задачи 25.18, 6).

25.26. 1) Доказать неравенство Коши — Буняковского.

2) Доказать, что равенство $|(x, y)| = |x|\cdot|y|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

25.27. Доказать следующие свойства длины вектора: если x, y — векторы, α, β — числа, то:

1) $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$;

2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (неравенство треугольника);

3) равенство $|x + y| = |x| + |y|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y отличаются один от другого неотрицательным числовым множителем.

4) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$;

5) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$; дать геометрическое толкование этому равенству.

25.28. Доказать неравенства:

$$1)\ \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right),$$

$$2)\ \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2},$$

где $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ — произвольные действительные или комплексные числа. В каких случаях в этих неравенствах достигается знак равенства?

25.29. Сформулировать неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника для унитарного пространства, определенного в задаче 25.17, 2).

25.30. Показать, что для вектора x конечномерного евклидова (унитарного) пространства $\mathscr{E}$ имеет место равенство

$$|x| = \sup_{y \in \mathscr{E},\, y \neq 0} \frac{|(x, y)|}{|y|}.$$

25.31. Пусть в n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве последовательности векторов $\{f_k\}$ и $\{g_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) сходятся к векторам f и g, т. е. $|f_k - f| \to 0$ и $|g_k - g| \to 0$ при $k \to \infty$. Доказать, что

$$\lim_{k \to \infty} (f_k, g_k) = (f, g).$$

25.32. Пусть $F(x, y)$ — функция, отображающая множество всех пар векторов вещественного линейного пространства во множество действительных чисел и удовлетворяющая первым двум условиям в определении евклидова скалярного умножения (см. с. 236), а вместо третьего — лишь условию *неотрицательности*: $F(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathscr{L}$ (но из $F(x, x) = 0$, вообще говоря, не следует $x = o$). Доказать, что:

1) функция $F(x, y)$ удовлетворяет неравенству Коши — Буняковского

$$(F(x, y))^2 \leqslant F(x, x)\ F(y, y)$$

для любых $x, y \in \mathscr{L}$;

2) $F(x, x)$ является однородной функцией от x степени 2, т. е.

$$F(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 F(x, x)$$

для любого $x \in \mathscr{L}$;

3) выполняется неравенство треугольника

$$(F(x+y, x+y))^{1/2} \leqslant (F(x, x))^{1/2} + (F(y, y))^{1/2}$$

для любых $x, y \in \mathscr{L}$;

4) множество $\mathscr{N}(F)$ всех векторов x, для которых $F(x, x) = 0$, является линейным подпространством в $\mathscr{L}$;

5) на всяком линейном подпространстве $\mathscr{L}_1$ пространства $\mathscr{L}$, пересекающемся с $\mathscr{N}(F)$ лишь по нулевому элементу, $F(x, y)$ является евклидовым скалярным произведением.

25.33. Найти систему уравнений, определяющую подпространство $\mathscr{N}(F)$ (см. задачу 25.32) для функции F:

1) задачи 25.4, 4) б); 2) задачи 25.4, 7);
3) задачи 25.4, 11); 4) задачи 25.11, 3).

25.34. Найти угол между данными векторами:

1) в пространстве $\mathscr{R}_3$ со стандартным скалярным произведением: а) $(2, -3, 1)^T$, $(4, -6, 2)^T$; б) $(1, -1, 2)^T$, $(1, 0, 1)^T$; в) $(1, 0, -1)^T$, $(-1, 2, 2)^T$;

2) в пространстве $\mathscr{R}_4$ со стандартным скалярным произведением: а) $(1, -1, 1, -1)^T$, $(-1, 1, -1, 1)^T$; б) $(-1, 2, 3, -4)^T$, $(5, 0, -2, 1)^T$; в) $(1, 2, 2, 1)^T$, $(1, 1, 1, 2)^T$;

3) в пространстве $\mathscr{R}_2$ со скалярным произведением задачи 25.18, 2): а) $(1, 0)^T$, $(0, 1)^T$; б) $(1, 0)^T$, $(-1, 1)^T$;

4) в пространстве $\mathscr{R}_3$ со скалярным произведением задачи 25.18, 5): а) $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$; б) $(-1, 0, 0)^T$, $(-1, 2, 2)^T$.

25.35. Доказать, что в пространстве непрерывных функций, определенном в задаче 25.17 ($a = 0$, $b = 1$), угол между двумя соседними векторами $f_n = t^{n-1}$ и $f_{n+1} = t^n$ системы векторов $1, t, \ldots, t^n, \ldots$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

§ 26. Ортогональные системы векторов. Биортогональные системы. Ортогональные подпространства

26.1. Пусть $\mathscr{E}$ — евклидово или унитарное пространство. Доказать, что:

1) если вектор f принадлежит $\mathscr{E}$ и ортогонален ко всем векторам из $\mathscr{E}$, то $f = o$;

2) если векторы f и g принадлежат $\mathscr{E}$ и $(f, x) = (g, x)$ для любого вектора x из $\mathscr{E}$, то $f = g$.

26.2. Пусть вектор x евклидова или унитарного пространства ортогонален к каждому из векторов $f_1, \ldots, f_k$. Доказать, что x ортогонален и к любому вектору из линейной оболочки векторов $f_1, \ldots, f_k$.

26.3. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — система попарно ортогональных векторов. Доказать, что $|f_1 + \ldots + f_k|^2 = |f_1|^2 + \ldots + |f_k|^2$ (обобщение теоремы Пифагора).

26.4. 1) Для векторов евклидова пространства установить теорему, обратную теореме Пифагора: если $|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$, то векторы f_1 и f_2 ортогональны.

2) Показать, что для унитарного пространства такая теорема неверна. Найти условия на векторы f_1 и f_2, при которых $|f_1 + f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2$.

26.5. 1) Доказать, что в евклидовом пространстве равенство $|x + y| = |x - y|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y ортогональны. Дать геометрическое толкование этому утверждению.

2) Показать, что в унитарном пространстве равенство $|x + y| = |x - y|$, вообще говоря, не влечет ортогональности векторов x и y. Для каких векторов x и y равенство $|x + y| = |x - y|$ имеет место?

26.6. 1) Доказать, что конечная система попарно ортогональных ненулевых векторов и, в частности, всякая ортонормированная система линейно независима.

2) Можно ли утверждать линейную независимость произвольной системы попарно ортогональных векторов?

26.7. Доказать, что координаты ξ_i произвольного вектора x n-мерного евклидова (или унитарного) пространства в ортогональном базисе $e_1, \ldots, e_n$ можно вычислить по формуле

$$\xi_i = (x, e_i)/(e_i, e_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Вывести отсюда равенство $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|(x, e_i)|^2}{(e_i, e_i)}$.

26.8. 1) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — координаты векторов x и y в некотором базисе n-мерного евклидова пространства. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов x и y вычисляется по формуле $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$ в том и только в том случае, когда этот базис является ортонормированным.

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для унитарного пространства.

26.9. 1) Показать, что стандартный базис n-мерного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением является ортонормированным базисом.

2) Указать какой-либо ортонормированный базис евклидова (унитарного) пространства вещественных (комплексных) матриц размеров $m \times n$ со стандартным скалярным произведением.

26.10. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство и $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис в нем. Доказать, что в $\mathscr{L}$ можно таким образом ввести скалярное произведение, что базис $e_1, \ldots, e_n$ будет ортонормированным относительно этого скалярного произведения.

26.11. Найти какой-нибудь нормированный вектор, ортогональный к данной системе векторов арифметического пространства с заданным скалярным произведением:

1) $(2, 2, 1)^T$, $(-2, 2, 3)^T$, скалярное произведение стандартное;

2) $(1, 2, 1, 0)^T$, $(1, 1, 1, 1)^T$, скалярное произведение стандартное;

3) $(1, -1, 2)^T$, скалярное произведение стандартное;

4) $(1, 1)^T$, скалярное произведение задачи 25.18, 2);

5) $(1, 2, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$, скалярное произведение задачи 25.18, 5);

6) $(1 + i, 1 - i)^T$, скалярное произведение стандартное;

7) $(-1, 1 + i, 0)^T$, $(0, 1, i)^T$, скалярное произведение стандартное.

26.12. Доказать, что в n-мерном евклидовом (унитарном) пространстве существует ортонормированный базис.

26.13. Применить процесс ортогонализации и нормирования к линейно независимой системе векторов вещественного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1) $(1, -3, 1)^T$, $(4, -5, 3)^T$;

2) $(1, 0, -1, 2)^T$, $(2, 1, -1, 3)^T$;

3) $(2, 0, -1)^T$, $(5, -1, 0)^T$, $(1, 7, -3)^T$;

4) $(1, 2, 2)^T$, $(1, 1, 0)^T$, $(0, 1, -4)^T$;

5) $(2, 1, -2)^T$, $(4, 1, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$;

6) $(1, 1, -1, 0)^T$, $(1, 2, 0, -1)^T$, $(0, 0, 1, 0)^T$.

26.14. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — линейно зависимая система векторов такая, что подсистема $f_1, \ldots, f_{m-1}$ линейно независима. Доказать, что в результате формального применения процесса ортогонализации получится ортогональная система $g_1, \ldots, g_m$, у которой векторы $g_1, \ldots$ $\ldots, g_{m-1}$ ненулевые, а $g_m = 0$.

26.15. Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова или унитарного пространства координатными столбцами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов:

1) $(1, 2, 1)^T$, $(3, 4, 1)^T$, $(1, -3, -1)^T$;

2) $(1, 1, -1)^T$, $(-4, 0, 5)^T$, $(-8, 2, 0)^T$;

3) $(3, -1, -2)^T$, $(4, 0, -1)^T$, $(5, 1, 0)^T$;

4) $(1, 2, -1, 1)^T$, $(-5, -5, 4, -2)^T$, $(-3, 6, 2, 0)^T$;

5) $(1, 0, 1, -1)^T$, $(6, 0, 4, -5)^T$, $(3, 2, -5, 4)^T$;

6) $(1, -3, 2, 1)^T$, $(-1, 7, -3, -2)^T$, $(2, -2, 3, 1)^T$;

7) $(1, -1, 1, -1)^T$, $(4, -2, 4, -2)^T$, $(-2, 7, -4, 7)^T$, $(2, 7, -2, 5)^T$;

8) $(i, 1, -i)^T$, $(2, 0, -1)^T$, $(0, 2, -i)^T$;

9) $(1, -1, 1 + i)^T$, $(1, -i, -2 + i)^T$, $(1 + 2i, 4 - i, -1)^T$.

26.16. Исходя из системы векторов $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ арифметического пространства с заданным скалярным произведением, с помощью процесса ортогонализации и нормирования построить ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, если:

1) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}_3 = (0, 0, 1)^T$, а) скалярное произведение задачи 25.18, 5); б) скалярное произведение — функция F задачи 25.4, 9);

2) $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, -2)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1, -2)^T$, $\boldsymbol{f}_3 = (4, 0, 0)^T$, скалярное произведение задачи 25.18, 5);

3) $\boldsymbol{f}_1 = (0, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{f}_2 = (2, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{f}_3 = (-2, 4, 0)^T$, скалярное произведение — функция F задачи 25.4, 10).

26.17. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства пара векторов задана координатными столбцами. Дополнить эту систему векторов до ортогонального базиса.

1) $(1, 1, 1, 2)^T$, $(1, 0, 1, -1)^T$;

2) $(1, -1, 2, 0)^T$, $(-1, 1, 1, 3)^T$;

3) $(1,\ 2,\ 1,\ 2)^T$, $(1,\ 1,\ -1,\ -1)^T$.

26.18. Следующие системы векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением дополнить до ортонормированных базисов:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ -1,\ 0,\ 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ -1,\ 0)^T$;

2) $\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$, $\frac{1}{2}(1,\ -1,\ 1,\ -1)^T$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 0,\ 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(1,\ 1,\ 2,\ -1)^T$.

26.19. Подпространство $\mathscr{L}$ евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе системой линейных уравнений. Найти какой-либо ортонормированный базис в $\mathscr{L}$.

1) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$;

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

3) $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0,$
$x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0$;

4) $x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 14x_5 = 0,$
$3x_1 + x_2 - 3x_3 - 8x_4 - 7x_5 = 0$;

5) $x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0,$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_5 = 0$;

6) $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0,$
$x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0,$
$3x_1 - 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0.$

26.20. Найти какой-либо ортонормированный базис в подпространстве евклидова пространства, натянутом на систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами:

1) $(29,\ 11,\ 19,\ 1)^T$, $(101,\ 99,\ 51,\ 49)^T$, $(52,\ -48,\ 51,\ -49)^T$;

2) $(101,\ 101,\ -99,\ -99)^T$, $(-99,\ 101,\ 101,\ -99)^T$, $(101,\ -99,\ -99,\ 101)^T$;

3) $(51,\ 49,\ 51,\ 49,\ 50)^T$, $(51,\ -49,\ 51,\ -49,\ 1)^T$, $(1,\ 51,\ 1,\ 51,\ 26)^T$, $(103,\ 51,\ 103,\ 51,\ 77)^T$.

26.21. Указать какой-либо ортонормированный базис в евклидовом пространстве многочленов степени не выше n со скалярным произведением:

1) задачи 25.14, 1);

2) задачи 25.14, 2);

3) задачи 25.16 при $m = n + 1$.

26.22. Проверить, что тригонометрическая система функций $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$ ортогональна относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

Нормировать эту систему.

26.23. В пространстве многочленов степени не выше 3 со скалярным произведением

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t)\, dt$$

построить ортогональный базис, применив процесс ортогонализации к системе многочленов $1, t, t^2, t^3$.

26.24. В пространстве непрерывных на $[0, +\infty)$ функций, удовлетворяющих условию $f(t) = O(t^{-1})$ при $t \to +\infty$, введем евклидово скалярное умножение

$$(f, g) = \int_{0}^{+\infty} f(t) g(t)\, dt.$$

Применить процесс ортогонализации к системе функций e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}.

26.25. 1) (р). Доказать, что в евклидовом пространстве задачи 25.20, 2), многочлены Лежандра

$$p_0(t) = 1, \quad p_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

образуют ортогональный базис.

2) (р). Вычислить длину (евклидову норму) многочлена Лежандра.

26.26. Доказать, что, применив процесс ортогонализации к многочленам $1, t, \ldots, t^n$ в евклидовом пространстве задачи 25.20, 2), мы получим ортогональную систему многочленов $q_0(t), \ldots, q_n(t)$, которые отличаются от многочленов Лежандра (см. задачу 26.25) лишь числовыми множителями. Найти эти множители.

26.27. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ и $g_1, \ldots, g_m$ — две линейно независимые ортогональные системы векторов линейного пространства со скалярным произведением, обладающие тем свойством, что при любом $k = 1, \ldots, m$ линейная оболочка векторов $f_1, \ldots, f_k$ совпадает с линейной оболочкой векторов $g_1, \ldots, g_k$. Доказать, что $g_k = \gamma_k f_k$, где γ_k — некоторые отличные от 0 коэффициенты, $k = 1, \ldots, m$.

26.28. Установить, что функции

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, +1], \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

представляют собой многочлены степени n (многочлены Чебышева первого рода). Доказать, что многочлены $T_0(t)$, $T_1(t), \ldots, T_n(t), \ldots$ образуют ортогональную систему в евклидовом пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций со скалярным умножением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) (1 - t^2)^{-1/2} dt.$$

Нормировать систему многочленов $T_0(t), T_1(t), \ldots$ $\ldots, T_n(t), \ldots$

26.29. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — линейно независимая система векторов евклидова (унитарного) пространства, $g_1, \ldots$ $\ldots, g_m$ — система, полученная из нее процессом ортогонализации, $\Gamma(f_1, \ldots, f_m)$ и $\Gamma(g_1, \ldots, g_m)$ — матрицы Грама этих систем. Доказать, что

$$\det \Gamma(f_1, \ldots, f_m) = \det \Gamma(g_1, \ldots, g_m) = |g_1|^2 \ldots |g_m|^2.$$

26.30. Пользуясь результатами задач 25.20, 2), 26.26, 26.29, 26.25, вычислить определитель матрицы задачи 25.23, 1).

26.31. 1) Доказать, что в евклидовом (унитарном) пространстве $\mathscr{E}$ каждая из двух биортогональных систем векторов $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_m$ линейно независима.

2) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$— биортогональные базисы в $\mathscr{E}$, и $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Доказать, что $\xi_i = (x, f_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

3) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x в базисе $\boldsymbol{e}$, а $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — координаты вектора y в базисе $\boldsymbol{f}$ евклидова пространства. Доказать, что скалярное произведение произвольных векторов x и y выражается формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

тогда и только тогда, когда базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ биортогональны.

4) Сформулировать и доказать предложение, аналогичное предложению 3), для унитарного пространства.

26.32. Пусть $\mathscr{E}$ — n-мерное евклидово (унитарное) пространство. Доказать, что:

1) для всякого базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{E}$ существует, причем единственный, биортогональный базис $f_1, \ldots, f_n$;

2) для всякой линейно независимой системы векторов $e_1, \ldots, e_m$ пространства $\mathscr{E}$ при $m < n$ существует биортогональная система $f_1, \ldots, f_m$.

3) Как отличаются друг от друга системы векторов, каждая из которых образует с системой $e_1, \ldots, e_m$ биортогональную пару?

26.33. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ — два биортогональных базиса евклидова (унитарного) пространства, ξ_k и ξ'_k, $k = 1, \ldots, n$, — координаты вектора x в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ соответственно, g_{ik} и g'_{ik} — элементы матриц Грама этих базисов. Доказать, что:

1) $f_i = \sum\limits_{k=1}^{n} g'_{ik} e_k \quad (i = 1, \ldots, n)$;

2) $\xi'_i = \sum\limits_{k=1}^{n} g_{ki} \xi_k \quad (i = 1, \ldots, n)$;

3) матрицы $\|g_{ik}\|$ и $\|g'_{ik}\|$ являются взаимно обратными.

26.34. Для данного базиса арифметического пространства со стандартным скалярным произведением найти биортогональный базис:

1) $(1, 0)^T, (100, 1)^T$; 2) $(1, 0)^T, (0, 3)^T$; 3) $(1, 3)^T, (1, 5)^T$;

4) $(1, 0, 0)^T, (3, 1, 0)^T, (-2, -5, 1)^T$;

5) $(1, 1, 1)^T, (1, 2, 3)^T, (1, 4, 9)^T$;

6) $(1, 0, 1/10)^T, (1/10, 1, 0)^T, (0, 1/10, 1)^T$;

7) $(1, 0, i)^T, (1, i, 0)^T, (0, 1, 1+i)^T$;

8) $(1, 0, 0, 0)^T, (-1, 1, 0, 0)^T, (1, -1, 1, 0)^T, (-1, 1, -1, 1)^T$;

9) $(-2, 1, 1, 1)^T, (1, -2, 1, 1)^T, (1, 1, -2, 1)^T, (1, 1, 1, -2)^T$.

26.35. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением построить систему векторов, биортогональную данной системе векторов и принадлежащую их линейной оболочке:

1) $(1, -3, 2)^T, (1, -1, 0)^T$;

2) $(1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T$;

3) $(1, 1, 0, 1)^T, (1, 0, -1, 0)^T, (0, 0, -1, 1)^T$.

26.36. Пусть $\mathscr{E}$ — евклидово пространство многочленов задачи 25.20, 2) при $n = 3$.

1) Построить систему векторов, биортогональную системе $1, t, t^2$ и принадлежащую линейной оболочке этих векторов;

2) построить базис $\mathscr{E}$, биортогональный базису $1, t, t^2, t^3$.

26.37. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное подпространство n-мерного евклидова пространства $\mathscr{E}$, $\mathscr{L}^{\perp}$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathscr{L}$. Доказать, что:

1) $\mathscr{L}^{\perp}$ является линейным подпространством пространства $\mathscr{E}$;

2) если m $(0 < m < n)$ — размерность $\mathscr{L}$, то существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ в $\mathscr{E}$ такой, что система векторов $e_1, \ldots, e_m$ будет ортонормированным базисом в $\mathscr{L}$, а система $e_{m+1}, \ldots, e_n$ — ортонормированным базисом в $\mathscr{L}^{\perp}$;

3) сумма размерностей подпространств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^{\perp}$ равна размерности пространства $\mathscr{E}$, а само пространство $\mathscr{E}$ является прямой суммой подпространств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^{\perp}$;

4) $(\mathscr{L}^{\perp})^{\perp} = \mathscr{L}$, $\mathscr{E}^{\perp} = \mathscr{O}$, $\mathscr{O}^{\perp} = \mathscr{E}$, где $\mathscr{O}$ — подпространство, состоящее лишь из нулевого вектора.

26.38. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ — биортогональные базисы евклидова (унитарного) пространства, $\mathscr{L}_k$ — линейная оболочка системы векторов $e_1, \ldots, e_k$, $k < n$. Доказать, что $\mathscr{L}_k^{\perp}$ является линейной оболочкой системы $f_{k+1}, \ldots, f_n$.

26.39. Доказать, что операция перехода от линейного подпространства $\mathscr{L}$ к его ортогональному дополнению $\mathscr{L}^{\perp}$ в евклидовом (унитарном) пространстве $\mathscr{E}$ обладает следующими свойствами:

1) если $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$, то $\mathscr{L}_2^{\perp} \subseteq \mathscr{L}_1^{\perp}$;

2) $(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^{\perp} = \mathscr{L}_1^{\perp} \cap \mathscr{L}_2^{\perp}$;

3) $(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)^{\perp} = \mathscr{L}_1^{\perp} + \mathscr{L}_2^{\perp}$;

4) если $\mathscr{E}$ есть прямая сумма подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, то $\mathscr{E}$ является и прямой суммой подпространств $\mathscr{L}_1^{\perp}$ и $\mathscr{L}_2^{\perp}$.

26.40. Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_1$ — линейные подпространства евклидова (унитарного) пространства $\mathscr{E}$, причем $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}$. Обозначим через $\mathscr{L}_1^{\perp}$ ортогональное дополнение подпространства $\mathscr{L}_1$ в $\mathscr{E}$, через $\tilde{\mathscr{L}}_1^{\perp}$ — ортогональное дополнение $\mathscr{L}_1$ в $\mathscr{L}$. Показать, что $\tilde{\mathscr{L}}_1^{\perp} = \mathscr{L}_1^{\perp} \cap \mathscr{L}$.

26.41. Пусть $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — конечномерные линейные подпространства евклидова (или унитарного) пространства, и размерность $\mathscr{L}_1$ меньше размерности $\mathscr{L}_2$. Доказать, что в $\mathscr{L}_2$ найдется ненулевой вектор, ортогональный всем векторам из $\mathscr{L}_1$.

26.42. Найти базис в ортогональном дополнении линейной оболочки системы векторов евклидова пространства $\mathscr{E}$, заданных в некотором ортонормированном базисе $\mathscr{E}$ координатными столбцами:

1) $(10, 1, -7)^T$; 2) $(1, 1, 1)^T$, $(1, -4, -1)^T$;
3) $(1, -5, 2, -9)^T$; 4) $(1, 1, -5, 1)^T$, $(2, -7, 2, 1)^T$;
5) $(-1, 3, 0, 1)^T$, $(4, 2, 1, 1)^T$, $(3, 5, 1, 2)^T$;
6) $(1, 0, -5, 4, -1)^T$, $(1, 2, 1, 8, 1)^T$, $(1, -1, -8, 2, -2)^T$.

26.43. В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортонормированный базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

1) $(1, 2, 1)^T$; 2) $(1, -1, 1, -1)^T$;
3) $(1, 3, -1, 1)^T$, $(2, 5, -2, 3)^T$;
4) $(1, 2, -1, -3)^T$, $(2, 1, 1, -9)^T$, $(1, 4, -3, -1)^T$;
5) $(-1, 0, 1, 2, 1)^T$, $(2, -3, 1, -1, 4)^T$, $(1, 1, -2, -3, -3)^T$.

26.44. Найти базис ортогонального дополнения подпространства векторов, координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства удовлетворяют следующей системе линейных уравнений:

1) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0,\\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0,\\ 10x_1 + x_2 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0,\\ 10x_1 + 19x_2 - x_3 + 11x_4 &= 0; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 + 6x_5 &= 0,\\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 - 9x_4 - 5x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

26.45. Найти систему линейных уравнений, определяющую ортогональное дополнение линейного подпространства, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства системой уравнений:

1) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0; \end{aligned}$$

2) $x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 0$;

3) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_4 &= 0,\\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0; \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0,\\ x_1 - 3x_2 - 8x_4 &= 0,\\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

5) $$x_1 - x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0,$$
$$3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0;$$

6) $$x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0,$$
$$3x_1 + x_3 - 8x_5 = 0,$$
$$x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0,$$
$$7x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 28x_5 = 0.$$

26.46. Пусть $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ — вещественная система m линейных уравнений с n неизвестными, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — строки, $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n$ — столбцы матрицы A. Будем рассматривать решение $\boldsymbol{x}$ системы и столбцы $\boldsymbol{a}_1^T, \ldots, \boldsymbol{a}_m^T$ как векторы арифметического пространства $\mathcal{R}_n$, а столбец $\boldsymbol{b}$ и столбцы $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n$ как векторы арифметического пространства $\mathcal{R}_m$. В $\mathcal{R}_m$ и $\mathcal{R}_n$ введем стандартные скалярные произведения. Обозначим через $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ линейные оболочки соответственно векторов $\boldsymbol{a}_1^T, \ldots, \boldsymbol{a}_m^T$ и $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n$. Показать, что:

1) множество всех решений однородной системы уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ совпадает с $\mathcal{L}^{\perp}$;

2) множество всех решений сопряженной однородной системы уравнений $A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ есть $\mathcal{M}^{\perp}$;

3) система уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$;

4) опираясь на предложения 2), 3), доказать теорему Фредгольма: система уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ разрешима тогда и только тогда, когда столбец $\boldsymbol{b}$ ортогонален любому решению $\boldsymbol{y}$ однородной сопряженной системы.

26.47. Пусть $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$, $k \geqslant 2$, — попарно ортогональные подпространства n-мерного евклидова (унитарного) пространства $\mathcal{E}$. Доказать, что:

1) ортогональная сумма подпространств $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ является прямой;

2) если сумма размерностей подпространств $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ равна размерности $\mathcal{E}$, то $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_k$.

26.48. Пусть $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ — попарно ортогональные подпространства n-мерного евклидова (унитарного) пространства. Доказать, что:

1) $\mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} (\mathcal{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3) = (\mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_2) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3$;

2) $(\mathcal{L}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3) \cap (\mathcal{L}_2 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{L}_3) = \mathcal{L}_3$.

26.49. 1) Пусть n-мерное евклидово (унитарное) пространство $\mathcal{E}$ является прямой суммой линейных подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Доказать, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны тогда и только тогда, когда для любых векторов x и y из $\mathcal{E}$

выполнено равенство

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2),$$

где $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in \mathscr{L}_1$, $x_2, y_2 \in \mathscr{L}_2$.

2) Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное предыдущему, для любого конечного числа подпространств.

26.50. Пусть n-мерное линейное пространство $\mathscr{L}$ является прямой суммой подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, причем в $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ введены соответственно скалярные произведения: $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$. Разложим любые два вектора x и y из $\mathscr{L}$ по подпространствам $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$: $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in \mathscr{L}_1$, $x_2, y_2 \in \mathscr{L}_2$. Доказать, что выражение $(x, y) = (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2$ обладает всеми свойствами скалярного произведения на $\mathscr{L}$, и относительно такого скалярного произведения подпространства $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ ортогональны.

26.51. Подпространство $\mathscr{L}_1$ n-мерного евклидова пространства $\mathscr{E}$ является линейной оболочкой линейно независимой системы векторов $f_1, \ldots, f_l$, а подпространство $\mathscr{L}_2$ образовано всеми теми векторами x из $\mathscr{E}$, которые удовлетворяют системе уравнений $(x, g_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, где система векторов $g_1, \ldots, g_m$ также линейно независима. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $\mathscr{E}$ было прямой суммой подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$.

§ 27. Ортогональное проектирование. Угол между вектором и подпространством, угол между двумя подпространствами

27.1. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — ортогональный базис в линейном подпространстве $\mathscr{L}$ евклидова или унитарного пространства $\mathscr{E}$, x — произвольный вектор из $\mathscr{E}$, а x' — его ортогональная проекция на $\mathscr{L}$. Доказать, что:

1) $x' = \sum_{k=1}^{m} \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} e_k$;

2) $\sum_{k=1}^{m} \frac{|(x, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} \leqslant |x|^2$ (неравенство Бесселя);

3) равенство $\sum_{k=1}^{m} \frac{|(x, e_k)|^2}{(e_k, e_k)} = |x|^2$ справедливо для всех векторов из $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{L} = \mathscr{E}$.

27.2. Подпространство $\mathscr{L}$ евклидова пространства является линейной оболочкой векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. Найти ортогональную проекцию на $\mathscr{L}$ и ортогональную составляющую относительно $\mathscr{L}$ вектора x, заданного в том же базисе координатным столбцом ξ:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (10, -20, 10)^T$, $\xi = (0, 1, 0)^T$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (4, 0, 5)^T$, $\xi = (7, -3, -1)^T$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (4, 3, 2, 1)^T$, $\xi = (1, -1, 1, -1)^T$;

4) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, -1, 0, 1)^T$, $\xi = (1, 0, 2, -2)^T$;

5) $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 4, -1, 0)^T$, $\xi = (2, 1, 1, 0)^T$;

6) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (3, 3, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 6, 3, -5)^T$, $\xi = (1, 4, 0, 2)^T$;

7) $\boldsymbol{a}_1 = (2, 0, -1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\xi = (1, 2, 0, -1)^T$;

8) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (5, 1, 1, 3)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (3, -1, 1, 0)^T$, $\xi = (5, 4, -3, -2)^T$;

9) $\xi = \boldsymbol{c}_{230}$; а) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c}_{207}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{c}_{224}$; б) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{c}_{225}$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{c}_{226}$; в) $\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}_{166}$, $\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}_{227}$; г) $\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_{228}$, $\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}\boldsymbol{c}_{229}$.

27.3. Линейное подпространство $\mathscr{L}$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением образовано векторами, компоненты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений. Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ на $\mathscr{L}$ и ортогональную составляющую $\boldsymbol{z}$ относительно $\mathscr{L}$ вектора $\boldsymbol{x}$, если:

1) $\boldsymbol{x} = (1, -2, 3, -4)^T$, $\mathscr{L}$: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$;

2) $\boldsymbol{x} = (8, -2, 8, 3)^T$, $\mathscr{L}$:
$$\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0,\quad \xi_1 - \xi_2 + 4\xi_3 + \xi_4 = 0;$$

3) $\boldsymbol{x} = (2, 3, -1, -2)^T$, $\mathscr{L}$:
$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0,\quad 2\xi_1 + \xi_2 + 3\xi_3 = 0,\quad 4\xi_1 + 3\xi_2 + 5\xi_3 - 2\xi_4 = 0;$$

4) $\boldsymbol{x} = (0, 1, -2, 3)^T$, $\mathscr{L}$:
$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0,\quad 6\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0,\quad \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0.$$

27.4. Найти ортогональную проекцию многочлена $p(t)$ на линейное подпространство многочленов степени не выше m $(m \leqslant n)$ в евклидовом пространстве многочленов, определенном:

1) в задаче 25.14, 1);

2) в задаче 25.14, 2).

27.5. В евклидовом пространстве многочленов задачи 25.16 при $m = n + 1$ найти ортогональные проекции многочлена $p(t)$ на линейные подпространства $\mathscr{L}_k$ ($k = 1, \ldots, n$) многочленов $q(t)$, удовлетворяющих равенствам $q(t_{k+1}) = 0, \ldots, q(t_{n+1}) = 0$.

27.6. В пространстве $\mathscr{E}$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций скалярное произведение определено формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \rho(t)\, dt.$$

Конечномерное подпространство $\mathscr{L}$ пространства $\mathscr{E}$ задано своим базисом $\boldsymbol{e}$. Разложить по базису $\boldsymbol{e}$ ортогональную проекцию на $\mathscr{L}$ произвольного вектора $p(t)$ из $\mathscr{E}$ и выписать соответствующее неравенство Бесселя, если:

1) $a = -\pi$, $b = \pi$, $\rho(t) \equiv 1$, $\mathscr{L}$ — линейная оболочка тригонометрических многочленов задачи 26.22;

2) $a = -1$, $b = 1$, $\rho(t) \equiv 1$, $\mathscr{L}$—подпространство многочленов степени не выше n с базисом из полиномов Лежандра, определенным в задаче 26.25;

3) $a = -1$, $b = 1$, $\rho(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, $\mathscr{L}$ — подпространство многочленов степени не выше n с базисом из многочленов Чебышева, определенным в задаче 26.28.

27.7. Пусть подпространство $\mathscr{L}$ евклидова (или унитарного) пространства $\mathscr{E}$ является прямой суммой подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$. Доказать, что для любого $x \in \mathscr{E}$ ортогональная проекция вектора x на $\mathscr{L}$ равна сумме ортогональных проекций x на $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ тогда и только тогда, когда подпространства $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ ортогональны.

27.8. Пусть векторы $g_1, \ldots, g_m$ получены процессом ортогонализации линейно независимой системы векторов $f_1, \ldots, f_m$. Доказать, что при $k > 1$ вектор g_k есть ортогональная составляющая вектора f_k относительно линейной оболочки векторов $f_1, \ldots, f_{k-1}$.

27.9. Доказать следующие свойства определителя матрицы Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_m$ евклидова (или унитарного) пространства:

1) $\det \Gamma(f_1, \ldots, f_m) \leqslant |f_1|^2 \ldots |f_m|^2$;

2) равенство $\det \Gamma(f_1, \ldots, f_m) = |f_1|^2 \ldots |f_m|^2$ справедливо тогда и только тогда, когда либо векторы $f_1, \ldots$ $\ldots, f_m$ попарно ортогональны, либо хотя бы один из этих векторов нулевой.

27.10. Используя задачу 27.9, доказать для определителя комплексной матрицы $A=\|a_{ik}\|$ порядка n утверждения:

1) $|\det A|^2 \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)$ (неравенство Адамара);

2) равенство $|\det A|^2 = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)$ справедливо тогда и только тогда, когда либо $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{il} = 0$ при всех k, l таких, что $k \neq l$, либо один из столбцов матрицы A нулевой.

27.11. Пусть $\mathscr{L}$ — конечномерное подпространство линейного пространства $\mathscr{E}$ со скалярным произведением, $f_1, \ldots, f_m$ — базис в $\mathscr{L}$, x — произвольный вектор из $\mathscr{E}$, y — его ортогональная проекция на $\mathscr{L}$, а z — ортогональная составляющая относительно $\mathscr{L}$, и пусть $\Gamma = \Gamma(f_1, \ldots, f_m)$ — матрица Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_m$, а c — строка из скалярных произведений $(x, f_1), \ldots, (x, f_m)$. Доказать, что:

1) $|z|^2 = \det\Gamma(f_1, \ldots, f_m, x)/\det\Gamma$;

2) $|y|^2 = -\dfrac{1}{\det\Gamma}\cdot\det\begin{Vmatrix}\Gamma & c^T\\ c & 0\end{Vmatrix}$.

27.12. Пусть $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — конечномерные подпространства евклидова или унитарного пространства $\mathscr{E}$ такие, что $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$, и пусть y_1 и y_2 — ортогональные проекции вектора $x \in \mathscr{E}$ на $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, а z_1 и z_2 — ортогональные составляющие вектора x относительно $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно. Доказать, что $|y_1| \leqslant |y_2|$, $|z_1| \geqslant |z_2|$.

27.13. 1) Доказать следующее свойство определителя матрицы Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l$:

$$\det\Gamma(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) \leqslant \det\Gamma(f_1, \ldots, f_k)\det\Gamma(g_1, \ldots, g_l)$$

при любых положительных k, l.

2) Показать, что равенство

$$\det\Gamma(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l) = \det\Gamma(f_1, \ldots, f_k)\det\Gamma(g_1, \ldots, g_l)$$

справедливо тогда и только тогда, когда либо линейные оболочки систем векторов $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_l$ ортогональны, либо одна из этих систем линейно зависима.

27.14. Пусть $\mathscr{L}$ — конечномерное подпространство, а x — некоторый вектор линейного пространства со скалярным произведением. Доказать, что наименьшее значение величины $|x - y|$ среди всех векторов y из $\mathscr{L}$ достигается на единственном векторе, являющемся ортогональной проекцией вектора x на подпространство $\mathscr{L}$, и оно равно длине ортогональной составляющей x относительно $\mathscr{L}$.

27.15. Вектор x и система векторов $f_1, \ldots, f_m$ евклидова пространства заданы в некотором ортонормированном базисе пространства координатными столбцами ξ и $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ соответственно, $\mathscr{L}$ — линейная оболочка векторов $f_1, \ldots, f_m$. Найти величину $\delta = \inf\limits_{y \in \mathscr{L}} |x - y|$, если:

1) $\xi = (1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 1)^T$;
2) $\xi = (1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = (0, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 4, 1)^T$;
3) $\xi = (1, 1, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, -1, 1)^T$;
4) $\xi = (1, 1, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, -1, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, -1, -1)^T$;
5) $\xi = (1, -1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 0, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 1)^T$;
6) $\xi = (1, -1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_1 = (1, -1, 0, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (-1, 2, 1, 0)^T$.

27.16. Найти коэффициенты тригонометрического многочлена $T_n(t) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, доставляющего наименьшее значение интегралу $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (|t| - T_n(t))^2\, dt$. Вычислить это значение.

27.17. Найти наименьшее значение интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} (t^{n+1} - p_n(t))^2\, dt$$

на множестве всех многочленов $p_n(t)$ степени не выше n.

27.18. Может ли угол между вектором и линейным подпространством быть больше, чем $\pi/2$?

27.19. Пусть x — ненулевой вектор евклидова пространства, $\mathscr{L}$ — его конечномерное подпространство, φ — угол между x и $\mathscr{L}$, x' — ортогональная проекция вектора x на $\mathscr{L}$. Доказать, что:

1) если $x' = o$, то $\varphi = \pi/2$;
2) если $x' \neq o$, то угол φ равен углу между x и x';
3) если $x' \neq o$, то для всякого вектора $y \in \mathscr{L}$, образующего угол φ с вектором x, имеет место равенство $y = \alpha x'$, где $\alpha > 0$;
4) $\cos \varphi = |x'|/|x|$.

27.20. Линейное подпространство $\mathscr{L}$ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением натянуто на векторы $f_1, \ldots, f_m$. Найти угол между вектором x и подпространством $\mathscr{L}$, если:

1) $x = (0, 1, 1)^T$, $f_1 = (1, 0, 1)^T$, $f_2 = (0, 1, 0)^T$;
2) $x = (5, 1, -2)^T$, $f_1 = (1, -1, 2)^T$, $f_2 = (1, 1, 3)^T$;
3) $x = (1, -1, 0)^T$, $f_1 = (0, 2, 1)^T$, $f_2 = (1, 3, 0)^T$;
4) $x = (-1, 1, 2)^T$, $f_1 = (1, 2, 1)^T$, $f_2 = (2, 1, -1)^T$;
5) $x = (-2, 2, 1, 0)^T$, $f_1 = (1, 2, 3, 0)^T$, $f_2 = (1, 0, 1, -2)^T$;
6) $x = (1, 0, 2, 1)^T$, $f_1 = (3, 3, -1, -1)^T$, $f_2 = (2, 1, 0, -2)^T$;
7) $x = (1, 1, 0, 1)^T$, $f_1 = (1, -1, 1, -1)^T$, $f_2 = (1, 1, 3, 3)^T$, $f_3 = (3, -2, 4, -1)^T$;
8) $x = (1, 1, 1, 3)^T$, $f_1 = (1, -1, 1, -2)^T$, $f_2 = (1, 0, 1, -1)^T$, $f_3 = (3, 1, 2, -1)^T$;
9) $x = (1, 2, 3, -1)^T$, $f_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $f_2 = (1, -1, 5, -3)^T$, $f_3 = (0, 1, 2, -4)^T$.

27.21. Подпространство $\mathscr{L}$ евклидова пространства задано в некотором ортонормированном базисе пространства системой линейных уравнений. Найти угол между $\mathscr{L}$ и вектором x, заданным в том же базисе координатным столбцом ξ:

1) $\xi = (1, -2, 1)^T$, $\mathscr{L}: \eta_1 - 2\eta_2 + 5\eta_3 = 0$;
2) $\xi = (1, 3, 5)^T$, $\mathscr{L}: \eta_1 + 3\eta_2 + 5\eta_3 = 0$;
3) $\xi = (1, 0, 0, 0)^T$, $\mathscr{L}: \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4 = 0$;
4) $\xi = (1, 0, 1, 0, -1)^T$, $\mathscr{L}: \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + 2\eta_5 = 0$;
5) $\xi = (3, 1, -1, -1)^T$, $\mathscr{L}: 2\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3 = 0,\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_4 = 0$;
6) $\xi = (0, 2, 1, 1)^T$, $\mathscr{L}:$
$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 = 0,\quad 3\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 + \eta_4 = 0,\quad 5\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_4 = 0;$$
7) $\xi = (1, 1, 2, 1, 1)^T$, $\mathscr{L}:$
$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - \eta_5 = 0,\quad 2\eta_2 + 3\eta_3 + \eta_4 = 0,\quad \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 + 2\eta_4 - \eta_5 = 0.$$

27.22. Пусть x — ненулевой вектор конечномерного евклидова пространства, α и β — углы между x и подпространствами $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^{\perp}$. Доказать, что $\alpha + \beta = \pi/2$.

27.23. Линейное подпространство $\mathscr{L}$ конечномерного евклидова пространства является ортогональной суммой подпространств $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_m$. Обозначим через $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ углы между вектором x и подпространствами $\mathscr{L}, \mathscr{L}_1, \ldots$

..., $\mathscr{L}_m$ соответственно. Доказать, что $\cos^2\alpha = \cos^2\alpha_1 + \ldots + \cos^2\alpha_m$.

27.24. Пусть $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — линейные подпространства конечномерного евклидова пространства, $e_1, \ldots, e_k$ — ортонормированный базис в $\mathscr{L}_1$, $e'_1, \ldots, e'_k$ — ортогональные проекции векторов $e_1, \ldots, e_k$ на $\mathscr{L}_2$ и $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_k e_k$ — произвольный вектор из $\mathscr{L}_1$ такой, что $|x| = 1$. Показать, что косинус угла между x и $\mathscr{L}_2$ равен

$$\left(\sum_{i,\,j=1}^{k} (e'_i,\ e'_j)\,\xi_i\xi_j\right)^{1/2}.$$

27.25. Пусть $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — ненулевые линейные подпространства конечномерного евклидова пространства, $\mathscr{L}_1^0$ и $\mathscr{L}_2^0$ — ортогональные дополнения подпространства $\mathscr{D} = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ в $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ соответственно. Доказать, что:

1) найдутся ненулевые векторы $x_1 \in \mathscr{L}_1^0$ и $x_2 \in \mathscr{L}_2^0$, угол между которыми равен углу между подпространствами $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$;

2) угол между $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ равен $\pi/2$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}_1^0$ и $\mathscr{L}_2^0$ — взаимно ортогональные ненулевые подпространства;

3) угол между $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ равен 0 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из подпространств $\mathscr{L}_1^0$, $\mathscr{L}_2^0$ нулевое.

27.26. Подпространства $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ являются линейными оболочками систем векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства координатными столбцами $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ и $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_l$. Найти угол между подпространствами $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, если:

1) $\boldsymbol{b}_1 = (0,\ 3,\ -1,\ 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,\ -2,\ 1,\ 1)^T$, $\boldsymbol{d}_1 = (0,\ 0,\ 1,\ -3)^T$, $\boldsymbol{d}_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 1)^T$;

2) $\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 1,\ 2,\ 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,\ 0,\ -1,\ -1)^T$, $\boldsymbol{d}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ -2)^T$, $\boldsymbol{d}_2 = (1,\ 1,\ -3,\ 1)^T$;

3) $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{d}_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{d}_2 = (1, 1, 2, 0)^T$, $\boldsymbol{d}_3 = (1, 0, 1, -1)^T$;

4) $\boldsymbol{b}_1 = (1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1,\ 0,\ 1,\ 2)^T$, $\boldsymbol{b}_3 = (0, 1, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{d}_1 = (1, 1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{d}_2 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{d}_3 = (0, 1, 1, 0)^T$.

ГЛАВА XI

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе рассматриваются только конечномерные евклидовы и унитарные пространства, и в дальнейшем это предположение специально не оговаривается. Используются следующие основные понятия: *преобразования ортогонального проектирования на линейное подпространство и ортогонального отражения в линейном подпространстве, сопряженное преобразование, самосопряженное преобразование, ортогональное преобразование, унитарное преобразование.*

Пусть $\mathscr{L}$ — линейное подпространство евклидова или унитарного пространства $\mathscr{E}$. Преобразование проектирования на $\mathscr{L}$ параллельно его ортогональному дополнению $\mathscr{L}^{\perp}$ называется *ортогональным проектированием* на подпространство $\mathscr{L}$. Преобразование отражения в подпространстве $\mathscr{L}$ параллельно $\mathscr{L}^{\perp}$ называется *ортогональным отражением* в $\mathscr{L}$ (или симметрией относительно $\mathscr{L}$).

Пусть φ — линейное преобразование евклидова или унитарного пространства $\mathscr{E}$. Преобразованием, *сопряженным* преобразованию φ, называется такое преобразование φ^* пространства $\mathscr{E}$, что для любых векторов x и y из $\mathscr{E}$ выполняется равенство $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$. Сопряженное преобразование существует для любого линейного преобразования, однозначно определяется этим преобразованием и является линейным. Если A — матрица линейного преобразования φ в базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$, то матрица A^* сопряженного преобразования φ^* в том же базисе вычисляется по формуле

$$A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma \text{ в евклидовом пространстве,}$$

$$A^* = \overline{\Gamma^{-1}A^T\Gamma} \text{ в унитарном пространстве,}$$

где Γ — матрица Грама базиса e Если e — ортонормированный базис, то $A^* = A^T$ в евклидовом пространстве и $A^* = \overline{A}^T$ в унитарном пространстве.

Линейное преобразование φ евклидова или унитарного пространства называется *самосопряженным*, если $\varphi = \varphi^*$. Все корни характеристического уравнения самосопряженного преобразования вещественны, и оно имеет ортонормированный базис из собственных векторов.

Линейное преобразование φ евклидова пространства называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение, т. е. равенство $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ имеет место для любых векторов x и y из $\mathcal{E}$. Линейное преобразование унитарного пространства, сохраняющее скалярное произведение, называется *унитарным* преобразованием.

Два линейных преобразования φ и ψ евклидова (унитарного) пространства называются *ортогонально* (соответственно *унитарно*) *подобными*, если существует такое ортогональное (унитарное) преобразование ω, что $\psi = \omega^{-1}\varphi\omega$.

§ 28. Различные способы задания линейных преобразований в евклидовом и унитарном пространстве. Сопряженное преобразование

28.1. Линейное преобразование φ переводит ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в систему векторов $f_1, \ldots, f_n$. Доказать, что $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (x, e_j) f_i$ для любого вектора x.

28.2. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — ортонормированный базис подпространства $\mathcal{L}$. Выразить, используя скалярные произведения $(x, e_1), \ldots, (x, e_k)$, образ произвольного вектора x для преобразования:

1) ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L}$;

2) ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L}^{\perp}$;

3) ортогонального отражения в подпространстве $\mathcal{L}$;

4) ортогонального отражения в подпространстве $\mathcal{L}^{\perp}$.

28.3. Подпространство $\mathcal{L}$ задано системой уравнений $(x, n_1) = 0, \ldots, (x, n_k) = 0$, где $n_1, \ldots, n_k$ — некоторая ортонормированная система векторов. Выразить, используя скалярные произведения $(x, n_1), \ldots, (x, n_k)$, образ произвольного вектора x для преобразования:

1) ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L}$;

2) ортогонального отражения в подпространстве $\mathcal{L}^{\perp}$.

28.4. В базисе $\boldsymbol{e}$ найти матрицу ортогонального проектирования на линейное подпространство $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}$ натянуто на систему векторов, заданных в этом базисе координатными столбцами:

1) $(2, 3, -1, 1)^T$; 2) $(1, 2, 1, -2)^T$;

3) $(1, -1, 2, 0)^T$, $(-1, 1, 1, 3)^T$;

4) $(1, 1, 1, 1)^T$, $(0, 1, 1, 0)^T$;

5) $(1,\ 1,\ -1,\ 0)^T$, $(0,\ 1,\ 1,\ -1)^T$, $(-1,\ 1,\ 0,\ 1)^T$;

6) $(0,\ 1,\ 0,\ 1)^T$, $(1,\ 0,\ 3,\ 0)^T$, $(0,\ 1,\ -1,\ -1)^T$.

28.5. В базисе $\boldsymbol{e}$ найти матрицу ортогонального отражения в подпространстве $\mathscr{L}$ задачи 28.4.

28.6. Линейное подпространство $\mathscr{L}$ четырехмерного евклидова пространства $\mathscr{E}$ в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}$ задано системой линейных уравнений. Найти в том же базисе матрицу ортогонального проектирования на $\mathscr{L}$.

1) $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$; 2) $\xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4=0,\ 3\xi_2-2\xi_3+3\xi_4=0$;

3) $\xi_1+2\xi_2-\xi_3+\xi_4=0,$
$\xi_1+\xi_2+2\xi_3-\xi_4=0,$
$\xi_1+3\xi_2-4\xi_3+3\xi_4=0;$

4) $\xi_1+\xi_2+\xi_3-\xi_4=0,$
$\xi_1-\xi_2+\xi_3+\xi_4=0,$
$\xi_1+\xi_2-\xi_3-2\xi_4=0.$

28.7. Найти в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицу ортогонального отражения пространства $\mathscr{E}$ в подпространстве $\mathscr{L}$ задачи 28.6.

28.8. Пусть системы векторов $f_1, \ldots, f_m$ и $h_1, \ldots, h_m$ биортогональны с точностью до нормирования, т. е. $(f_j,\ h_k)=0$ при $j\neq k$, $(f_k,\ h_k)\neq 0$ $(j,\ k=1,\ \ldots,\ m)$, пусть $\mathscr{L}_1$ — линейная оболочка векторов $f_1, \ldots, f_m$, а подпространство $\mathscr{L}_2$ задано системой уравнений $(x,\ h_1)=0, \ldots, (x,\ h_m)=0$. Выразить через скалярные произведения векторов $x, f_1, \ldots, f_m, h_1, \ldots, h_m$ образ произвольного вектора x для преобразования:

1) проектирования на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$;

2) отражения в $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$.

28.9. Линейное преобразование φ задано формулой $\varphi(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}(x,\ f_j)\,g_j$, где $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ — некоторые векторы. Доказать, что:

1) ядро преобразования φ представляет собой ортогональное дополнение линейной оболочки векторов $\sum\limits_{j=1}^{m}(g_k,\ g_j)\,f_j$, $k=1,\ \ldots,\ m$;

2) множество значений преобразования φ является линейной оболочкой векторов $\sum\limits_{j=1}^{m}(f_k,\ f_j)\,g_j$, $k=1,\ \ldots,\ m$.

28.10. Что представляет собой преобразование φ^*, сопряженное линейному преобразованию φ:

1) одномерного евклидова пространства;

2) одномерного унитарного пространства?

28.11. Найти преобразование φ^*, сопряженное гомотетии φ:

1) евклидова пространства;

2) унитарного пространства.

28.12. Найти преобразование, сопряженное преобразованию φ евклидовой векторной плоскости, если:

1) φ — ортогональное проектирование на линейную оболочку вектора $a \neq o$;

2) φ — ортогональное отражение в подпространстве, натянутом на вектор $a \neq o$;

3) φ — поворот плоскости на угол α по часовой стрелке.

28.13. В трехмерном евклидовом пространстве $\mathscr{E}_3$ выбран ортонормированный базис e_1, e_2, e_3. Найти преобразование φ^*, сопряженное преобразованию φ пространства $\mathscr{E}_3$, если:

1) φ — поворот вокруг оси, определяемой вектором $f = e_1 + e_2 + e_3$, на угол $2\pi/3$;

2) φ — проектирование на линейную оболочку вектора a параллельно подпространству $\mathscr{L}$, натянутому на векторы e_1 и e_2 $(a \notin \mathscr{L})$;

3) преобразование φ задано формулой $\varphi(x) = [a, x]$, где a — фиксированный вектор из $\mathscr{E}_3$, $[a, x]$ — векторное произведение векторов a и x.

28.14. Линейное преобразование φ

1) n-мерного евклидова пространства,

2) n-мерного унитарного пространства

состоит в растяжении по n взаимно ортогональным направлениям с коэффициентом λ_j по j-му направлению (в случае унитарного пространства числа λ_j могут быть комплексными). Найти сопряженное преобразование φ^*.

28.15. Найти формулу преобразования, сопряженного преобразованию задачи 28.9.

28.16. Пространство $\mathscr{E}$ является прямой суммой подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$. Доказать, что:

1) преобразование, сопряженное проектированию пространства $\mathscr{E}$ на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$, является проектированием на $\mathscr{L}_2^\perp$ параллельно $\mathscr{L}_1^\perp$;

2) преобразование, сопряженное отражению пространства $\mathscr{E}$ в $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$, является отражением в $\mathscr{L}_2^\perp$ параллельно $\mathscr{L}_1^\perp$.

28.17. Преобразование φ n-мерного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением задано формулой $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, где A — матрица порядка n. Найти сопряженное преобразование, если пространство:

1) вещественное; 2) комплексное.

28.18. Найти преобразование, сопряженное преобразованию φ евклидова (унитарного) пространства матриц размера $m\times n$ со стандартным скалярным произведением, определенному формулой:

1) $\varphi(X) = AX$, где A — фиксированная матрица порядка m;

2) $\varphi(X) = XB$, где B — фиксированная матрица порядка n.

28.19. Пусть $\mathscr{P}^{(n)}[a, b]$ — евклидово пространство многочленов степени не выше n со скалярным произведением

$$(p, q) = \int_a^b p(t)\,q(t)\,dt,$$

а линейное преобразование φ задано формулой

$$\varphi(p) = \int_a^b K(t, s)\,p(s)\,ds,$$

где $K(t, s) = \sum_{j=0}^{n} t^j k_j(s)$.

1) Найти формулу сопряженного преобразования φ^* в том случае, когда все $k_j(s)$ представляют собой многочлены степени не выше n.

2) Доказать, что если функции $k_j(s)$ непрерывны на $[a, b]$, то сопряженное преобразование φ^* действует по формуле

$$\varphi^*(p) = \int_a^b K^*(t, s)\,p(s)\,ds,$$

где $K^*(t, s) = \sum_{j=0}^{n} s^j k_j^*(t)$, а $k_j^*(t)$ — ортогональные проекции функций $k_j(t)$ на $\mathscr{P}^{(n)}[a, b]$ (см. задачу 27.6).

28.20. Линейное преобразование φ евклидова пространства $\mathscr{P}^{(n)}[a, b]$ (см. задачу 28.19) ставит в соответствие многочлену $p(t)$ его производную $p'(t)$. Доказать, что сопряженное преобразование φ^* действует по формуле

$\varphi^*(p)(t) = -p'(t) + h(t)$, где $h(t)$ — многочлен степени не выше n, однозначно определяемый из соотношений

$$\int_a^b h(t)\,t^k\,dt = b^k p(b) - a^k p(a), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

28.21. 1) Пусть A — матрица линейного преобразования в базисе $\boldsymbol{e}$ евклидова пространства, A^* — матрица сопряженного преобразования в том же базисе. Доказать, что $A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$, где Γ — матрица Грама базиса $\boldsymbol{e}$. Как связаны матрицы A и A^*, если базис ортонормированный?

2) Найти связь матриц A и A^* в случае унитарного пространства.

28.22. Пусть A — матрица линейного преобразования евклидова пространства в некотором базисе, Γ — матрица Грама этого базиса. Найти матрицу A^* сопряженного преобразования в том же базисе, если:

1) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$;

2) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$;

3) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$;

4) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 9 \end{Vmatrix}$.

28.23. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в евклидовом или унитарном пространстве $\mathscr{E}$. Матрица A линейного преобразования φ пространства $\mathscr{E}$ задана в базисе $f_1, \ldots, f_n$. Найти матрицу A^* сопряженного преобразования φ^* в базисе $f_1, \ldots, f_n$, если:

1) $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $A = A_{65}$;

2) $f_1 = e_1$, $f_2 = 2e_1 + e_2$, $A = A_{66}$;

3) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - ie_2$, $A = A_{99}$;

4) $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_2 - e_3$, $A = A_{331}$;

5) $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_3 = e_3$, $A = A_{332}$;

6) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_3$, $A = A_{333}$;

7) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 - e_3$, $A = A_{334}$;

8) $f_1 = e_1$, $\quad f_2 = ie_1 + e_2$, $\quad f_3 = -ie_1 + ie_2 + e_3$, $A = A_{380}$.

28.24. Линейное преобразование евклидова или унитарного пространства с заданным в некотором базисе скалярным произведением имеет в этом базисе матрицу A; найти матрицу сопряженного преобразования в том же базисе, если:

1) скалярное произведение задачи 25.4, 5), $A = A_{67}$;

2) скалярное произведение задачи 25.18, 2), $A = A_{68}$;

3) скалярное произведение задачи 25.6, 8), $A = A_{103}$;

4) $(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, $A = A_{335}$;

5) $(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$, $A = A_{336}$;

6) $(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + 5x_3\bar{y}_3 + ix_1\bar{y}_2 - ix_2\bar{y}_1 + (1-i)\,x_2\bar{y}_3 + (1+i)\,x_3\bar{y}_2$, $A = A_{378}$.

28.25. Линейное преобразование двумерного евклидова пространства переводит векторы с координатными столбцами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ в векторы с координатными столбцами $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ соответственно; базис ортонормированный. Найти матрицу сопряженного преобразования в этом базисе, если:

1) $\boldsymbol{a}_1 = (0, 1)^T$, $\quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 3)^T$, $\quad \boldsymbol{b}_1 = (3, 1)^T$, $\quad \boldsymbol{b}_2 = (2, 3)^T$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1)^T$, $\quad \boldsymbol{a}_2 = (1, 4)^T$, $\quad \boldsymbol{b}_1 = (0, -2)^T$, $\quad \boldsymbol{b}_2 = (-3, 7)^T$.

28.26. Преобразование евклидова пространства многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)\,q(t)\,dt$ ставит в соответствие многочлену его производную. Найти матрицу сопряженного преобразования:

1) в базисе $1, t, t^2$;

2) в базисе $1, t, 3t^2 - 1$.

28.27. Евклидово пространство представляет собой линейное пространство многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением, определяемым формулой $(p, q) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$, где $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, $q(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$. Найти матрицу преобразования, сопряженного преобразованию дифференцирования:

1) в базисе $1, t, t^2$; 2) в базисе $1, t, 3t^2 - 1$.

28.28. В евклидовом пространстве тригонометрических многочленов степени не выше n со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} p(t) q(t)\, dt$ преобразование φ ставит в соответствие функции ее производную. Найти формулу сопряженного преобразования φ^* и его матрицу $\|a_{ij}\|$ в базисе

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \ \ldots, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt.$$

28.29. Доказать, что операция перехода к сопряженному преобразованию в евклидовом пространстве обладает свойствами:

1) $(\varphi^*)^* = \varphi$; 2) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

3) $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$ (α — вещественное число);

4) $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$;

5) $(p(\varphi))^* = p(\varphi^*)$ для любого многочлена $p(t)$ с вещественными коэффициентами.

Сформулировать и доказать аналоги свойств 1) —5) операции перехода к сопряженному преобразованию в унитарном пространстве.

28.30. Пусть линейное преобразование φ невырождено. Доказать, что и сопряженное преобразование φ^* невырождено, и $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

28.31. Как связаны между собой определители линейного преобразования φ и сопряженного преобразования φ^* в случае:

1) евклидова пространства;

2) унитарного пространства?

28.32. Доказать, что ранг сопряженного преобразования φ^* равен рангу преобразования φ.

28.33. Пусть A — матрица линейного преобразования φ в базисе $\boldsymbol{e}$ евклидова (унитарного) пространства, и базис $\boldsymbol{f}$ биортогонален базису $\boldsymbol{e}$. Доказать, что матрицей сопряженного преобразования φ^* в базисе $\boldsymbol{f}$ будет A^T (соответственно $\bar{A}^T$).

28.34. Доказать, что множество значений линейного преобразования φ совпадает с ортогональным дополнением ядра сопряженного преобразования φ^*.

28.35. Проверить свойство сопряженного преобразования, сформулированное в задаче 28.34, для преобразования:

1) задачи 28.13, 3);

2) задачи 28.26.

28.36. Используя результат задачи 28.34, доказать теорему Фредгольма для системы n линейных уравнений с n неизвестными в случае:

1) вещественной системы уравнений;

2) комплексной системы уравнений.

28.37. Доказать, что:

1) ядро преобразования $\varphi^*\varphi$ совпадает с ядром преобразования φ;

2) множество значений преобразования $\varphi\varphi^*$ совпадает с множеством значений преобразования φ;

3) уравнение $\varphi^*\varphi(x) = \varphi^*(b)$ имеет решение при любом векторе b;

4) если уравнение $\varphi(x) = b$ разрешимо, то множество его решений совпадает со множеством решений уравнения $\varphi^*\varphi(x) = \varphi^*(b)$.

28.38. Доказать, что:

1) характеристические многочлены преобразований φ и φ^* евклидова пространства совпадают;

2) коэффициенты характеристического многочлена преобразования φ унитарного пространства комплексно сопряжены соответствующим коэффициентам характеристического многочлена преобразования φ^*;

3) если λ — корень кратности k характеристического многочлена преобразования φ, то $\bar{\lambda}$ — корень той же кратности характеристического многочлена преобразования φ^*.

28.39. Как связаны между собой собственные значения линейных преобразований φ и φ^*:

1) евклидова пространства; 2) унитарного пространства?

28.40. Пусть e — собственный вектор линейного преобразования φ евклидова (унитарного) пространства, отвечающий собственному значению λ, f — собственный вектор преобразования φ^*, отвечающий собственному значению μ, и $\lambda \neq \mu$ ($\lambda \neq \bar{\mu}$ в случае унитарного пространства). Доказать, что e и f ортогональны.

28.41. Пусть для линейного преобразования φ существует базис $\boldsymbol{e}$ из собственных векторов. Доказать, что базис, биортогональный $\boldsymbol{e}$, является базисом из собственных векторов сопряженного преобразования φ^*.

28.42. Доказать, что максимальное число линейно независимых собственных векторов линейного преобразования φ евклидова (унитарного) пространства, отвечающих собственному значению λ, совпадает с максимальным числом линейно независимых собственных векторов сопряженного преобразования φ^*, принадлежащих тому же собственному значению λ ($\bar{\lambda}$ в случае унитарного пространства).

28.43. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное утверждению задачи 28.42, для максимального числа всех линейно независимых собственных векторов преобразований φ и φ^*.

28.44. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — максимальная линейно независимая система собственных векторов линейного преобразования φ. Всегда ли существует система $f_1, \ldots, f_m$ собственных векторов сопряженного преобразования φ^*, биортогональная $e_1, \ldots, e_m$?

28.45. Пусть $\mathscr{L}$ — инвариантное подпространство линейного преобразования φ.

1) Доказать, что ортогональное дополнение $\mathscr{L}^\perp$ подпространства $\mathscr{L}$ является инвариантным подпространством сопряженного преобразования φ^*.

2) Будет ли в общем случае $\mathscr{L}$ инвариантным подпространством сопряженного преобразования φ^*?

28.46. Найти линейное уравнение, определяющее двумерное инвариантное подпространство преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства матрицей:

1) A_{259}; 2) A_{337}; 3) A_{338}; 4) A_{339}; 5) A_{340}.

28.47. Пусть $\mathscr{L}$ — инвариантное подпространство линейного преобразования φ евклидова пространства. Обозначим через φ_1 ограничение преобразования φ на $\mathscr{L}$, через φ_2^* — ограничение преобразования φ^* на $\mathscr{L}^\perp$ (см. задачу 28.45), через $p(\lambda)$, $p_1(\lambda)$ и $p_2(\lambda)$ — характеристические многочлены преобразований φ, φ_1 и φ_2^*. Доказать, что $p(\lambda) = p_1(\lambda)\, p_2(\lambda)$.

28.48. Пусть $\mathscr{L}$ — инвариантное подпространство линейного преобразования φ, π — преобразование ортогонального проектирования $\mathscr{E}$ на $\mathscr{L}$, φ_1 — ограничение преобразования φ на $\mathscr{L}$, φ_1^* — преобразование, сопряженное преобразованию φ_1 в подпространстве $\mathscr{L}$.

1) Доказать, что $\varphi_1^*\pi = \pi\varphi^*$.

2) Привести пример преобразования φ, для которого $\varphi \neq \varphi^*$, но $\varphi_1 = \varphi_1^*$.

28.49. Доказать, что для всякого линейного преобразования n-мерного унитарного пространства $\mathscr{E}$ существует:

1) $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство;

2) последовательность $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_n = \mathscr{E}$ инвариантных подпространств таких, что $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{L}_n$, $\dim \mathscr{L}_k = k$ $(k = 1, \ldots, n)$;

3) базис, в котором матрица преобразования треугольная;

4) ортонормированный базис, в котором матрица преобразования треугольная.

28.50. Доказать справедливость утверждений 1), 2), 3) задачи 28.49 для произвольного линейного преобразования комплексного n-мерного линейного пространства.

28.51. Доказать, что линейное преобразование

1) n-мерного евклидова пространства,

2) n-мерного вещественного линейного пространства имеет $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда хотя бы одно из характеристических чисел этого преобразования вещественно.

28.52. Доказать справедливость утверждений 1), 2), 3), 4) задачи 28.49 для линейного преобразования φ n-мерного евклидова пространства, если все характеристические числа φ вещественны.

28.53. Доказать справедливость утверждений 1), 2), 3) задачи 28.49 для линейного преобразования φ вещественного n-мерного линейного пространства, если все характеристические числа φ вещественны.

28.54. Построить ортонормированный базис, в котором матрица линейного преобразования φ трехмерного евклидова пространства будет верхней треугольной, и найти эту матрицу, если φ задано в некотором ортонормированном базисе матрицей:

1) A_{337}; 2) A_{338}; 3) A_{259}; 4) A_{341}; 5) A_{342}.

28.55. Найти все те ортонормированные базисы, в каждом из которых матрица линейного преобразования задачи 28.54, 5) верхняя треугольная, и вычислить эти матрицы.

§ 29. Самосопряженные преобразования

29.1. Определить, является ли самосопряженным (либо найти условия, при которых является самосопряженным) линейное преобразование задачи:

1) 28.11, 1); 2) 28.11, 2); 3) 28.12, 1);
4) 28.12, 2); 5) 28.12, 3); 6) 28.13, 1);
7) 28.13, 2); 8) 28.13, 3); 9) 28.14, 1);
10) 28.14, 2); 11) 28.17, 1); 12) 28.17, 2);

13) 28.18, 1); 14) 28.18, 2); 15) 28.20, $n > 0$;
16) 28.27; 17) 28.28, $n > 0$.

29.2. Найти необходимые и достаточные условия самосопряженности преобразования φ евклидова пространства $\mathscr{E}$, определенного формулой $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j)\, g_j$, где $f_1, \ldots, f_m$ и $g_1, \ldots, g_m$ — фиксированные линейно независимые системы векторов.

29.3. Пусть A — матрица линейного преобразования φ в некотором базисе, Γ — матрица Грама этого базиса. Какому необходимому и достаточному условию должна удовлетворять матрица A для того, чтобы φ было самосопряженным преобразованием:

1) евклидова пространства;

2) унитарного пространства?

Рассмотреть отдельно случай, когда базис ортонормированный.

29.4. Будет ли самосопряженным линейное преобразование, заданное в ортонормированном базисе следующей матрицей:

1) A_{16}; 2) A_{15}; 3) A_{20}; 4) A_{19};
5) A_{17}; 6) A_{242}; 7) A_{209}; 8) A_{203}?

29.5. Будет ли самосопряженным линейное преобразование, заданное в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей:

1) A_{92}; 2) A_{94}; 3) A_{86}; 4) A_{98};
5) A_{87}; 6) A_{379}; 7) A_{377}?

29.6. Может ли матрица самосопряженного преобразования евклидова пространства в некотором базисе быть несимметричной?

29.7. Преобразование φ евклидова или унитарного пространства задано в некотором базисе матрицей A; Γ — матрица Грама этого базиса. Определить, является ли φ самосопряженным, если:

1) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$;

2) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$;

3) $A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$;

4) $A = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}$;

5) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

6) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$;

7) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$;

8) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2i & -1 & 0 \\ 2 & -3i & 2 \end{Vmatrix}$, $\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 1 \end{Vmatrix}$.

29.8. Доказать, что:

1) линейная комбинация с вещественными коэффициентами самосопряженных преобразований является самосопряженным преобразованием;

2) произведение ненулевого самосопряженного преобразования унитарного пространства на число α тогда и только тогда будет самосопряженным преобразованием, когда α вещественно.

29.9. Доказать, что преобразование, обратное к самосопряженному невырожденному преобразованию, является самосопряженным.

29.10. Пусть φ — линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства. Проверить самосопряженность преобразования:

1) $\varphi + \varphi^*$; 2) $i(\varphi - \varphi^*)$ (в унитарном пространстве); 3) $\varphi^*\varphi$; 4) $\varphi\varphi^*$.

29.11. Пусть φ и ψ — самосопряженные преобразования. Доказать, что:

1) $(\varphi\psi + \psi\varphi)$ — самосопряженное преобразование;

2) $i(\varphi\psi - \psi\varphi)$ — самосопряженное преобразование (в унитарном пространстве);

3) $\psi\varphi$ будет самосопряженным преобразованием тогда и только тогда, когда φ и ψ перестановочны.

29.12. Пусть евклидово (или унитарное) пространство $\mathscr{E}$ является прямой суммой линейных подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$. Доказать, что:

1) проектирование $\mathscr{E}$ на подпространство $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$ тогда и только тогда является самосопряженным преобразованием, когда $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ ортогональны;

2) отражение в подпространстве $\mathscr{L}_1$ параллельно подпространству $\mathscr{L}_2$ тогда и только тогда является самосо-

пряженным преобразованием, когда $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ ортогональны.

29.13. Пусть $\mathscr{E}$ — унитарное пространство, φ — линейное преобразование. Доказать, что:

1) если преобразование φ самосопряженное, то значение функции $(\varphi(x), x)$ вещественно для любого вектора x из $\mathscr{E}$;

2) если скалярное произведение $(\varphi(x), x)$ вещественно для любого вектора x из $\mathscr{E}$, то φ самосопряжено.

29.14. Доказать, что все собственные значения самосопряженного преобразования унитарного пространства вещественны.

29.15. Доказать, что все характеристические числа самосопряженного преобразования евклидова пространства вещественны.

29.16. Доказать, что собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие двум различным собственным значениям, ортогональны.

29.17. Доказать, что ортогональное дополнение инвариантного подпространства самосопряженного преобразования φ также является инвариантным подпространством φ.

29.18. Пусть A — симметрическая (или эрмитова) матрица порядка n, φ — линейное преобразование вещественного (комплексного) n-мерного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением, определяемое матрицей A в стандартном базисе пространства. Доказать, что:

1) все характеристические числа матрицы A вещественны;

2) существует ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ.

29.19. Доказать, что для всякого самосопряженного преобразования существует ортонормированный базис из собственных векторов, отвечающих действительным собственным значениям.

29.20. Может ли самосопряженное преобразование иметь неортогональный базис из собственных векторов?

29.21. Пусть линейное преобразование φ обладает ортонормированным базисом из собственных векторов, отвечающих вещественным собственным значениям. Будет ли φ самосопряженным?

29.22. Пусть линейное преобразование φ вещественного (или комплексного) линейного пространства $\mathscr{L}$ обладает базисом из собственных векторов, отвечающих вещественным собственным значениям. Показать, что в $\mathscr{L}$ можно ввести скалярное произведение, относительно которого φ будет самосопряженным преобразованием.

29.23. Пусть A — матрица самосопряженного преобразования φ n-мерного евклидова (или унитарного) пространства в некотором базисе, λ_0 — корень кратности k характеристического многочлена преобразования φ. Доказать, что ранг матрицы $A - \lambda_0 E$ равен $n - k$.

29.24. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования φ, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

1) $\begin{Vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 0 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{Vmatrix}$.

8) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$; 9) $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; 10) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$;

11) $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$; 12) $\begin{Vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$;

13) $\begin{Vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$; 14) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

15) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}$; 16) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{Vmatrix}$;

17) $\begin{Vmatrix} 1 & i & 2i \\ -i & 1 & -2i \\ -2i & 2i & 1 \end{Vmatrix}$; 18) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$;

19) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 20) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$; 21) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

29.25. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов преобразования, являющегося:

1) гомотетией с коэффициентом k;

2) ортогональным проектированием на подпространство $\mathscr{L}$;

3) ортогональным отражением в подпространстве $\mathscr{L}$.

29.26. 1) Пусть φ — самосопряженное преобразование, $f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированный базис из его собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$. Доказать, что $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j (x, f_j) f_j$ для любого вектора x.

2) Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — ортонормированный базис пространства $\mathscr{E}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — вещественные числа. Доказать, что формула п. 1) задает самосопряженное преобразование φ с собственными векторами $f_1, \ldots, f_n$, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

29.27. Преобразование φ линейного пространства $\mathscr{P}^{(n)}$ многочленов степени не выше n ($n \geqslant 1$) ставит в соответствие многочлену его производную. Показать, что каково бы ни было комплексное число $\alpha \neq 0$ и каким бы образом ни было введено в $\mathscr{P}^{(n)}$ скалярное произведение, преобразование $\alpha\varphi$ не является самосопряженным.

29.28. Доказать, что всякое линейное преобразование φ унитарного пространства можно однозначно представить в виде $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — самосопряженные преобразования. Выразить φ_1 и φ_2 через φ.

29.29. Доказать обратимость преобразования $\varphi +$ $+ (\alpha + i\beta)\,\iota$, где φ — самосопряженное, ι — тождественное преобразование унитарного пространства, α и β — вещественные числа, $\beta \neq 0$.

29.30. Доказать, что максимальная линейно независимая система собственных векторов самосопряженного преобразования, отвечающих ненулевым собственным значениям, является базисом во множестве значений этого преобразования.

29.31. Пусть φ — самосопряженное преобразование пространства $\mathscr{E}$. Доказать, что $\mathscr{E}$ является ортогональной суммой множества значений и ядра преобразования φ.

29.32. Доказать, что самосопряженные преобразования φ и ψ перестановочны тогда и только тогда, когда они имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

29.33. Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — собственные значения самосопряженного преобразования φ n-мерного пространства $\mathscr{E}$. Доказать, что:

1) $\lambda_1 (x, x) \leqslant (\varphi(x), x) \leqslant \lambda_n (x, x)$ для любого вектора x;

2) $\lambda_1 = \min\limits_{\substack{x \in \mathscr{E} \\ x \neq o}} \frac{(\varphi(x), x)}{(x, x)}$, $\lambda_n = \max\limits_{\substack{x \in \mathscr{E} \\ x \neq o}} \frac{(\varphi(x), x)}{(x, x)}$, причем наименьшее и наибольшее значения достигаются на собственных векторах преобразования φ, отвечающих собственным значениям λ_1 и λ_n соответственно;

3) если для некоторого ненулевого вектора g

$$\frac{(\varphi(g), g)}{(g, g)} = \lambda_1 \quad \text{или} \quad \frac{(\varphi(g), g)}{(g, g)} = \lambda_n,$$

то g является собственным вектором преобразования φ и $\varphi(g) = \lambda_1 g$ или $\varphi(g) = \lambda_n g$ соответственно.

29.34. Доказать утверждения:

1) если φ — самосопряженное преобразование, а равенство $(\varphi(x), x) = 0$ выполняется для всех векторов пространства, то φ — нулевое преобразование;

2) если φ и ψ — самосопряженные преобразования и для всех векторов пространства выполнено равенство $(\varphi(x), x) = (\psi(x), x)$, то $\varphi = \psi$.

29.35. 1) Пусть φ — линейное преобразование унитарного пространства $\mathscr{E}$ и для всех векторов x из $\mathscr{E}$ выполнено равенство $(\varphi(x), x) = 0$. Доказать, что φ — нулевое преобразование.

2) Справедливо ли подобное утверждение для евклидова пространства?

29.36. Доказать, что все характеристические числа матрицы Грама конечной системы векторов:

1) неотрицательны;

2) положительны тогда и только тогда, когда эта система векторов линейно независима.

29.37. Пусть Γ_1 — матрица Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_k$, Γ_2 — матрица Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_l$ $(k < l)$, $\lambda_{j\,\min}$ и $\lambda_{j\,\max}$ — наименьшее и наибольшее характеристические числа матрицы Γ_j, $j = 1, 2$. Доказать, что:

1) $\lambda_{2\,\min} \leqslant \lambda_{1\,\min}$;

2) $\lambda_{1\,\max} \leqslant \lambda_{2\,\max}$.

29.38. Пусть в некотором ортонормированном базисе матрица $A = \|a_{ij}\|$ самосопряженного преобразования φ n-мерного евклидова пространства имеет «диагональное преобладание»:

$$a_{jj} > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}|, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Доказать, что все собственные значения преобразования φ положительны и, в частности, что φ обратимо.

29.39. Пусть φ — самосопряженное преобразование и все собственные значения φ положительны. Доказать, что функция, сопоставляющая каждой паре векторов x, y число $(\varphi(x), y)$, может служить скалярным произведением.

29.40. Пусть φ и ψ — самосопряженные преобразования и все собственные значения ψ положительны. Доказать, что:

1) преобразование $\psi\varphi$ является самосопряженным относительно скалярного произведения $(x, y)_1 = (\psi^{-1}(x), y)$, все собственные значения преобразования $\psi\varphi$ вещественны и существует базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов этого преобразования, ортонормированный относительно скалярного произведения $(x, y)_1$;

2) преобразование $\varphi\psi$ является самосопряженным относительно скалярного произведения $(x, y)_2 = (\psi(x), y)$, собственные значения преобразования $\varphi\psi$ совпадают с собственными значениями $\psi\varphi$, базисом из собственных векторов этого преобразования является базис $\psi^{-1}(e_1), \ldots$ $\ldots, \psi^{-1}(e_n)$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис п. 1).

29.41. Пусть φ и ψ — самосопряженные преобразования, все собственные значения преобразования ψ положительны, а все собственные значения преобразования φ неотрицательны. Доказать, что:

1) все собственные значения преобразования $\psi\varphi$ неотрицательны;

2) если $\lambda_{\min}(\varphi)$, $\lambda_{\min}(\psi)$ — наименьшие, а $\lambda_{\max}(\varphi)$, $\lambda_{\max}(\psi)$ — наибольшие собственные значения преобразований φ и ψ соответственно, то для любого собственного значения $\lambda(\psi\varphi)$ преобразования $\psi\varphi$ справедлива оценка

$$\lambda_{\min}(\varphi) \cdot \lambda_{\min}(\psi) \leqslant \lambda(\psi\varphi) \leqslant \lambda_{\max}(\varphi) \cdot \lambda_{\max}(\psi).$$

29.42. Пусть $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ — два подпространства евклидова пространства, пересекающиеся лишь по нулевому элементу, $f_1, \ldots, f_k$ — ортонормированный базис в $\mathscr{L}_1$ и $f_1', \ldots, f_k'$ — ортогональные проекции векторов $f_1, \ldots, f_k$ на подпространство $\mathscr{L}_2$. Доказать, что косинус угла между подпространствами $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ равен квадратному корню из максимального собственного значения матрицы Грама системы векторов $f_1', \ldots, f_k'$.

§ 30. Ортогональные и унитарные преобразования

30.1. Пусть линейное преобразование φ пространства $\mathscr{E}$ сохраняет длины векторов, т. е. для всех векторов x из $\mathscr{E}$ выполнено равенство $|\varphi(x)| = |x|$. Доказать, что тогда преобразование φ сохраняет и скалярное произведение, т. е. для всех векторов x, y из $\mathscr{E}$ выполнено $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$.

30.2. Определить, является ли (либо найти условия, при которых является) ортогональным или унитарным преобразование φ задачи:

1) 28.11, 1); 2) 28.11, 2); 3) 28.12, 1);
4) 28.12, 2); 5) 28.12, 3); 6) 28.13, 1);
7) 28.13, 2); 8) 28.13, 3); 9) 28.14, 1);
10) 28.14, 2); 11) 28.17, 1); 12) 28.17, 2);
13) 28.18, 1); 14) 28.18, 2); 15) 28.20.

30.3. Пусть $\mathscr{L}$ — ненулевое линейное подпространство евклидова (унитарного) пространства. Является ли ортогональным (унитарным) преобразованием:

1) ортогональное проектирование на $\mathscr{L}$?

2) ортогональное отражение в подпространстве $\mathscr{L}$?

30.4. Доказать, что:

1) ортогональное (унитарное) преобразование переводит всякий ортонормированный базис в ортонормированный базис;

2) всякое линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства, переводящее некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис, является ортогональным (унитарным).

30.5. Линейное преобразование φ евклидова (унитарного) пространства переводит некоторый базис $f_1, \ldots, f_n$ в систему векторов $g_1, \ldots, g_n$ ($g_i = \varphi(f_i)$, $i = 1, \ldots, n$). Показать, что φ тогда и только тогда является ортогональным (унитарным) преобразованием, когда матрицы Грама систем $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$ совпадают.

30.6. Определить, является ли ортогональным линейное преобразование φ n-мерного евклидова пространства, действующее на векторы ортонормированного базиса $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$ по формулам:

$n = 2$:

1) $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = e_2$;

2) $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$;

3) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$;

4) $\varphi(e_1) = \frac{1}{13}(5e_1 - 12e_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{13}(12e_1 + 5e_2)$;

5) $\varphi(e_1) = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{5}(4e_1 + 3e_2)$.

$n = 3$:

6) $\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = 2e_1 + e_2 - 2e_3$, $\varphi(e_3) = 2e_1 - 2e_2 + e_3$;

7) $\varphi(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-e_1 + 4e_2 + e_3)$;

8) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{2}(e_2 + \sqrt{3}e_3)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_3)$;

9) $\varphi(e_1) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(5e_1 + 4e_2 - 3e_3)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(5e_1 - 4e_2 + 3e_3)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{5}(3e_2 + 4e_3)$.

$n = 4$:

10) $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4)$, $\varphi(e_4) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$.

30.7. Определить, является ли унитарным линейное преобразование φ n-мерного унитарного пространства, действующее на векторы ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ по формулам:

$n = 2$:

1) $\varphi(e_1) = e_1 + ie_2$, $\varphi(e_2) = ie_1$;

2) $\varphi(e_1) = e_1 + ie_2$, $\varphi(e_2) = ie_1 + e_2$;

3) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + ie_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(ie_1 + 2e_2)$;

4) $\varphi(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + (1 + 2i)e_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{3\sqrt{5}}(5e_1 - 2(1 + 2i)e_2)$;

5) $\varphi(e_1) = \frac{1}{3}(2e_1 + (1+2i)e_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}((1+2i)e_1 - 2e_2)$.

$n = 3$:

6) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{2}(ie_1 + e_2 - i\sqrt{2}e_3)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 - ie_2 + \sqrt{2}e_3)$;

7) $\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}(2ie_1 + e_2 - 2ie_3)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{3}(e_1 - 2ie_2 + 2e_3)$.

30.8. Линейное преобразование φ евклидова пространства переводит систему векторов, заданных в некотором ортонормированном базисе координатными столбцами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, в систему векторов, заданных в том же базисе координатными столбцами $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ соответственно. Проверить, является ли преобразование φ ортогональным.

1) $\boldsymbol{a}_1 = (3, 4)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 3)^T$, $\boldsymbol{b}_1 = (5, 0)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (3, 1)^T$;

2) $\boldsymbol{a}_1 = (2, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (-1, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (1, 1)^T$;

3) $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 2)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (0, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{b}_1 = (2, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{b}_3 = (-1, 1, 0)^T$.

30.9. Линейное преобразование φ арифметического унитарного пространства со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. Проверить, является ли преобразование φ унитарным.

1) $A = A_{71}$, $B = A_{72}$; 2) $A = A_{71}$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}}A_{73}$;

3) $A = A_{100}$, $B = \frac{1}{\sqrt{10}}A_{101}$; 4) $A = A_{343}$, $B = \frac{1}{3}A_{344}$;

5) $A = A_{345}$, $B = A_{346}$; 6) $A = A_{381}$, $B = A_{382}$.

30.10. Пусть φ — линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства, φ^* — сопряженное преобразование. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

1) преобразование φ ортогонально (унитарно);

2) $\varphi^*\varphi$ является тождественным преобразованием;

3) преобразование φ невырождено и обратное преобразование φ^{-1} совпадает с φ^*;

4) преобразование φ^* ортогонально (унитарно);

5) преобразование $\varphi\varphi^*$ является тождественным.

30.11. Пусть A — матрица линейного преобразования φ в некотором базисе, Γ — матрица Грама этого базиса. Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять матрица A для того, чтобы φ было:

1) ортогональным преобразованием евклидова пространства;

2) унитарным преобразованием унитарного пространства?

Отдельно рассмотреть случай, когда базис ортонормированный.

30.12. Пусть A — матрица линейного преобразования φ n-мерного евклидова (унитарного) пространства в ортонормированном базисе, $\mathcal{R}_n$ ($\mathcal{C}_n$) — вещественное (комплексное) арифметическое пространство со стандартным скалярным произведением. Показать, что каждое из условий необходимо и достаточно для ортогональности (унитарности) φ:

1) столбцы матрицы A, рассматриваемые как векторы $\mathcal{R}_n$ ($\mathcal{C}_n$), образуют ортонормированный базис;

2) строки матрицы A, рассматриваемые как векторы $\mathcal{R}_n$ ($\mathcal{C}_n$), образуют ортонормированный базис.

30.13. Проверить, является ли ортогональным линейное преобразование, заданное в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей:

1) A_{16}; 2) A_{63}; 3) A_{61}; 4) A_{62}; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{253}$;

6) $\frac{1}{3}A_{202}$; 7) $\frac{1}{3}A_{203}$; 8) A_{320}; 9) A_{207}.

30.14. Проверить, является ли унитарным линейное преобразование, заданное в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей:

1) A_{82}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{88}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}A_{102}$;

4) A_{378}; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}A_{486}$; 6) $\frac{1}{2}A_{472}$.

30.15. Может ли матрица ортогонального (унитарного) преобразования в некотором базисе быть неортогональной (неунитарной)?

30.16. Линейное преобразование φ евклидова пространства $\mathcal{E}$ задано в базисе $f_1, \ldots, f_n$ матрицей A; $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}$. Определить, является ли преобразование φ ортогональным, если:

1) $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_2$, $A = \frac{1}{5}A_{74}$;

2) $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $A = A_{61}$;

3) $f_1 = 3e_1 + e_2$, $f_2 = 2e_1 + e_2$, $A = \frac{1}{\sqrt{10}} A_{75}$;

4) $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$, $A = \frac{1}{3} A_{347}$;

5) $f_1 = e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$, $A = A_{348}$;

6) $f_1 = e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$, $f_2 = e_2 + \sqrt{2} e_3$, $f_3 = e_3$, $A = A_{349}$.

30.17. Доказать, что квадратная матрица $U = R + iQ$ порядка n, где R и Q — вещественные матрицы, унитарна тогда и только тогда, когда ортогональна вещественная квадратная матрица $D = \left\| \begin{matrix} R & -Q \\ Q & R \end{matrix} \right\|^{\square}$.

30.18. Доказать, что модуль определителя ортогонального (унитарного) преобразования равен 1.

30.19. Доказать, что множество всех ортогональных (унитарных) преобразований евклидова (унитарного) пространства образует группу с операцией умножения преобразований.

30.20. Образует ли подгруппу в группе всех ортогональных преобразований евклидова пространства:

1) подмножество преобразований с определителем, равным 1;

2) подмножество преобразований с определителем, равным -1?

30.21. Пусть $\mathscr{E}$ — евклидово (унитарное) пространство, $\mathscr{L}$ — некоторое его подпространство. Образует ли подгруппу в группе ортогональных (унитарных) преобразований пространства подмножество преобразований, для которых $\mathscr{L}$ является инвариантным подпространством?

30.22. 1) Показать, что сумма двух ортогональных (унитарных) преобразований в общем случае не является ортогональным (унитарным) преобразованием.

2) Привести пример, когда сумма двух ортогональных преобразований все же будет ортогональным преобразованием.

30.23. Пусть φ — ортогональное (унитарное) преобразование, α — действительное (комплексное) число. Доказать, что $\alpha\varphi$ ортогонально (унитарно) тогда и только тогда, когда $|\alpha| = 1$.

30.24. Линейное преобразование φ евклидова (унитарного) пространства переводит всякую пару ортогональных векторов в пару ортогональных же векторов. Доказать, что $\varphi = \alpha\psi$, где $\alpha \geqslant 0$, ψ — ортогональное (унитарное) преобразование.

30.25. 1) Доказать, что всякое преобразование евклидова (унитарного) пространства, сохраняющее скалярное произведение, линейно.

2) Показать, что преобразование евклидова (унитарного) пространства, сохраняющее лишь длины векторов, не обязательно является линейным.

30.26. Доказать, что:

1) собственные значения ортогонального преобразования могут быть равны только либо 1, либо —1;

2) собственные значения унитарного преобразования, а потому и его характеристические числа по модулю равны 1;

3) все характеристические числа ортогонального преобразования по модулю равны 1.

30.27. Доказать, что собственные векторы ортогонального (унитарного) преобразования, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

30.28. Может ли ортогональное преобразование:

1) не иметь собственных векторов;

2) обладать базисом из собственных векторов;

3) иметь по крайней мере один собственный вектор, но не иметь базиса из собственных векторов?

Привести соответствующие примеры.

30.29. Найти собственные значения и какую-либо максимальную ортонормированную систему собственных векторов ортогонального преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей:

1) A_{61}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{69}$; 3) A_{62}; 4) A_{70}; 5) A_{77};

6) A_{76}; 7) A_{259}; 8) $\frac{1}{3} A_{350}$; 9) $\frac{1}{3} A_{347}$;

10) $\frac{1}{4} A_{351}$; 11) $\frac{1}{2} A_{352}$; 12) A_{493}; 13) $\frac{1}{2} A_{468}$.

30.30. Доказать, что ортогональное дополнение $\mathscr{L}^{\perp}$ инвариантного подпространства $\mathscr{L}$ ортогонального (унитарного) преобразования φ также является инвариантным подпространством φ.

30.31. Доказать, что для любого унитарного преобразования существует ортонормированный базис из собственных векторов.

30.32. Найти собственные значения и какой-либо ортонормированный базис из собственных векторов унитарного преобразования, заданного в ортонормированном базисе унитарного пространства матрицей:

1) A_{61}; 2) A_{62}; 3) A_{77}; 4) A_{259};

5) $\frac{1}{3} A_{347}$; 6) $\frac{1}{4} A_{351}$; 7) $\frac{1}{2} A_{352}$; 8) A_{493};

9) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{Vmatrix}$; 10) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2+i & 2i \\ -2 & 1+2i \end{Vmatrix}$;

11) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -i & -1-i \\ i & 1 & -1+i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{Vmatrix}$.

30.33. Пусть линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства обладает ортонормированным базисом из собственных векторов, отвечающих собственным значениям, по модулю равным 1. Доказать, что преобразование является ортогональным (унитарным).

30.34. Линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства является одновременно ортогональным (унитарным) и самосопряженным. Выяснить его геометрический смысл.

30.35. Доказать, что преобразование φ, заданное в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{69}$; 2) A_{70}; 3) A_{76}; 4) $\frac{1}{3} A_{350}$; 5) A_{493}

представляет собой ортогональное отражение в некотором подпространстве $\mathscr{L}$. Найти это подпространство.

30.36. Доказать, что матрица ортогонального преобразования двумерного евклидова пространства в ортонормированном базисе имеет вид A_{77} или A_{76}. Пользуясь этим, выяснить геометрический смысл произвольного ортогонального преобразования двумерного евклидова пространства.

30.37. Доказать, что если линейное преобразование φ евклидова (унитарного) пространства обладает любыми двумя из следующих трех свойств:

а) φ — самосопряженное преобразование;

б) φ — унитарное преобразование;

в) φ^2 является тождественным преобразованием,

то оно обладает и третьим свойством. Выяснить геометрический смысл такого преобразования.

30.38. Пусть в некотором ортонормированном базисе матрица унитарного преобразования φ вещественна, и пусть f — собственный вектор φ, отвечающий комплексному собственному значению $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Представим f в виде: $f = u + iv$, где векторы u и v имеют в том же базисе вещественные координаты. Доказать, что:

1) вектор $g = u - iv$ является собственным вектором преобразования φ, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$;

2) векторы u и v ортогональны, $|u| = |v| = |f|/\sqrt{2}$, $\varphi(u) = \alpha u - \beta v$, $\varphi(v) = \beta u + \alpha v$.

30.39. 1) Пусть φ — ортогональное преобразование, $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) — комплексный корень его характеристического уравнения. Доказать, что найдутся ненулевые векторы u, v такие, что $(u, v) = 0$, $\varphi(u) = \alpha u - \beta v$, $\varphi(v) = \beta u + \alpha v$.

2) Доказать, что всякое ортогональное преобразование обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

3) Доказать, что для любого ортогонального преобразования φ евклидова пространства существует канонический базис, имеющий следующие свойства: этот базис ортонормирован, и матрица преобразования φ в нем блочно-диагональная с клетками первого порядка вида $\|\pm 1\|$ и клетками второго порядка вида $\begin{Vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix}$ ($\gamma \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) по главной диагонали (клетки одного из этих видов могут отсутствовать).

30.40. Ортогональное преобразование φ в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства задано матрицей:

1) A_{61}; 2) A_{70}; 3) A_{77}; 4) A_{259};

5) $\frac{1}{3} A_{347}$; 6) $\frac{1}{4} A_{351}$; 7) $\frac{1}{2} A_{352}$; 8) A_{493}.

Найти канонический базис и матрицу преобразования φ в этом базисе (см. задачу 30.39).

30.41. Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве:

1) всякое ортогональное преобразование с определителем, равным 1, представляет собой поворот на некоторый угол относительно некоторой оси;

2) всякое ортогональное преобразование с определителем, равным -1, представляет собой произведение двух преобразований: поворота на некоторый угол относитель-

ной некоторой оси и ортогонального отражения в двумерном подпространстве, ортогональном этой оси.

30.42. Доказать (через ι обозначено тождественное преобразование):

1) если φ — самосопряженное преобразование унитарного пространства, то преобразование $\varphi - i\iota$ обратимо, преобразование $\psi = (\varphi + i\iota)(\varphi - i\iota)^{-1}$ унитарно, все собственные значения ψ отличны от 1 и $\varphi = i(\psi + \iota)(\psi - \iota)^{-1}$;

2) если ψ — унитарное преобразование с собственными значениями, отличными от 1, то преобразование $\varphi = i(\psi + \iota)(\psi - \iota)^{-1}$ самосопряженное и $\psi = (\varphi + i\iota)(\varphi - i\iota)^{-1}$.

30.43. Доказать, что:

1) ортогональное (унитарное) подобие линейных преобразований есть отношение эквивалентности (т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно);

2) если линейные преобразования φ и ψ ортогонально (унитарно) подобны, то и сопряженные преобразования φ^* и ψ^* ортогонально (унитарно) подобны;

3) если преобразования φ и ψ ортогонально (унитарно) подобны и φ—самосопряженное, то и ψ — также самосопряженное преобразование.

30.44. Пусть φ и ψ — линейные преобразования евклидова (унитарного) пространства. Доказать, что:

1) если φ и ψ ортогонально (унитарно) подобны, то для любого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}$ существует ортонормированный базис $\boldsymbol{f}$ такой, что матрица преобразования ψ в базисе $\boldsymbol{f}$ равна матрице преобразования φ в базисе $\boldsymbol{e}$;

2) если существуют ортонормированные базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ такие, что матрица преобразования ψ в базисе $\boldsymbol{f}$ совпадает с матрицей преобразования φ в базисе $\boldsymbol{e}$, то преобразования φ и ψ ортогонально (унитарно) подобны.

30.45. Доказать, что:

1) два самосопряженных преобразования ортогонально (унитарно) подобны,

2) два унитарных преобразования унитарно подобны,

3) два ортогональных преобразования ортогонально подобны

тогда и только тогда, когда характеристические многочлены этих преобразований совпадают.

30.46. Пусть φ — линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства. Доказать, что преобразования $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ ортогонально (унитарно) подобны.

ГЛАВА XII

ФУНКЦИИ НА ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 31. Линейные функции

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *линейная функция на линейном пространстве*, *строка коэффициентов* (*координатная строка*) *линейной функции*, *операции сложения* и *умножения на число* для линейных функций и свойства этих операций, *сопряженное пространство*, *биортогональный базис*.

Обозначения: $\mathscr{L}_n$ — линейное n-мерное пространство, $\mathscr{R}_n$ — арифметическое n-мерное пространство, $\mathscr{R}_{n\times n}$ — линейное пространство квадратных матриц порядка n, $\mathscr{P}^{(n)}$ — линейное пространство многочленов степени не выше n. Через $\mathscr{L}_n^*$, $\mathscr{R}_n^*$, $\mathscr{R}_{n\times n}^*$, $\mathscr{P}^{(n)*}$ обозначаются соответствующие сопряженные пространства.

Стандартный базис в пространстве $\mathscr{R}_{n\times n}$ состоит из матричных единиц E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ (см. введение к § 15). В этом базисе коэффициенты линейной функции f, заданной на $\mathscr{R}_{n\times n}$, естественным образом располагаются в матрицу: на пересечении ее i-й строки и j-го столбца стоит коэффициент $c_{ij} = \mathrm{f}(E_{ij})$. Матрицу $C = \|c_{ij}\|$ мы будем называть *координатной матрицей линейной функции*.

В некоторых задачах, относящихся к линейным функциям на линейном пространстве векторов — направленных отрезков (на геометрическом векторном пространстве, обозначаемом через $\mathscr{E}_2$ или $\mathscr{E}_3$ в соответствии с размерностью) используется понятие ортогональной проекции вектора. Напомним его.

Векторной ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую или плоскость называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 — ортогональные проекции точек A и B. *Скалярной проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на прямую или плоскость* называется длина его векторной проекции — число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$. *Скалярной проекцией вектор* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* (т. е. прямую, на которой задано направление при помощи ненулевого вектора $\mathbf{a}$) называется число $\pm|\overrightarrow{A_1B_1}|$, где знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от того, одинаково или противоположно направлены векторы $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Определение линейной функции. Примеры линейных функций (31.1—31.32)

31.1. Какие условия выделяют линейные функции из остальных линейных отображений?

31.2. Как преобразуется строка коэффициентов линейной функции при изменении базиса?

31.3. Как преобразуется биортогональный базис, если данный базис преобразуется матрицей перехода S?

31.4. Выпишите строку коэффициентов нулевой линейной функции.

31.5. Может ли для линейной функции f, заданной на $\mathscr{L}_n$, при всех $x \in \mathscr{L}_n$ выполняться:

1) неравенство $f(x) > 0$; 2) неравенство $f(x) \geqslant 0$; 3) равенство $f(x) = \alpha$?

31.6. Даны линейная функция f на $\mathscr{L}_n$ и число α. Всегда ли найдется такой вектор x из $\mathscr{L}_n$, что $f(x) = \alpha$?

31.7. Определить множество значений произвольной линейной функции на вещественном линейном пространстве.

31.8. Пусть $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ — координатный столбец вектора $x \in \mathscr{L}_n$ в некотором базисе. Будет ли линейной функция f на $\mathscr{L}_n$, определенная равенством:

1) $f(x) = \xi_1 + \xi_2$; 3) $f(x) = \xi_1 + 1$;

2) $f(x) = \xi_1 - (\xi_2)^2$; 4) $f(x) = \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3$?

31.9. Выписать строку коэффициентов функции f в случаях 1), 4) задачи 31.8.

31.10. В некотором базисе пространства $\mathscr{L}_3$ функции f и g имеют координатные строки соответственно (1, 2, 3) и (3, 2, 1). Найти координатные строки функций:

1) $f + g$; 2) $2f$; 3) $3g$; 4) $f - g$.

31.11. 1) Пусть **a** — вектор из пространства $\mathscr{E}_3$. Сопоставим каждому вектору **x** из $\mathscr{E}_3$ его скалярную ортогональную проекцию на ось, определяемую вектором **a**. Доказать, что этим определяется линейная функция на $\mathscr{E}_3$. Найти координатную строку этой функции в каком-нибудь ортонормированном базисе пространства $\mathscr{E}_3$.

2) Пусть $\mathfrak{m}$ — какая-нибудь плоскость в пространстве $\mathscr{E}_3$. Сопоставим каждому вектору из $\mathscr{E}_3$ его скалярную ортогональную проекцию на $\mathfrak{m}$. Будет ли полученная числовая функция линейной?

31.12. 1) Пусть **a** — фиксированный вектор на плоскости $\mathscr{E}_2$. Сопоставим каждому вектору **x** из $\mathscr{E}_2$ число, равное площади ориентированного параллелограмма, построенного на векторах **a** и **x**. Доказать, что этим определена линейная функция на $\mathscr{E}_2$, и вычислить ее координатную строку в каком-нибудь ортонормированном базисе.

2) Пусть **a** — фиксированный вектор на плоскости $\mathscr{E}_2$. Сопоставим каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathscr{E}_2$ число, равное площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **x**. Будет ли построенная функция линейной?

31.13. 1) Пусть **a** и **b** —фиксированные векторы в пространстве $\mathscr{E}_3$. Сопоставим произвольному вектору $\mathbf{x} \in \in \mathscr{E}_3$ число, равное объему ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **x**, или нулю, если **a**, **b** и **x** компланарны. Доказать, что этим определена линейная функция, и вычислить ее координатную строку в каком-либо ортонормированном базисе.

2) Пусть **a** и **b** — фиксированные векторы в пространстве $\mathscr{E}_3$. Сопоставим произвольному вектору $\mathbf{x} \in \mathscr{E}_3$ число, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **x** или нулю, если **a**, **b** и **x** компланарны. Будет ли построенная функция линейной?

31.14. 1) Сопоставим каждому столбцу высоты n отношение первых двух его элементов. Будет ли этим определена функция на $\mathscr{R}_n$?

2) Сопоставим каждому столбцу высоты n сумму квадратов всех его элементов. Будет ли этим определена линейная функция на $\mathscr{R}_n$?

3) Сопоставим каждому столбцу высоты n его i-й элемент. Доказать, что этим определена линейная функция на $\mathscr{R}_n$, и найти ее координатную строку в стандартном базисе пространства $\mathscr{R}_n$.

4) Сопоставим каждому столбцу высоты n сумму его элементов. Доказать, что этим определена линейная функция на $\mathscr{R}_n$, и найти ее координатную строку в стандартном базисе пространства $\mathscr{R}_n$.

31.15. Функция $\operatorname{tr} X$ сопоставляет каждой квадратной матрице X порядка n ее след. Проверить, что эта функция является линейной, и найти ее координатную строку (координатную матрицу) в стандартном базисе пространства матриц.

31.16. Пусть C — квадратная матрица порядка n. Сопоставим каждой квадратной матрице X порядка n число $\operatorname{tr}(CX)$. Показать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathscr{R}_{n\times n}$, и найти ее координатную строку (координатную матрицу).

31.17. Пусть f — какая-нибудь линейная функция, определенная на пространстве $\mathscr{R}_{n\times n}$. Доказать, что существует такая квадратная матрица C, что для произвольной матрицы $X \in \mathscr{R}_{n\times n}$ выполнено равенство $\mathrm{f}(X) = \mathrm{tr}(CX)$.

31.18. Пусть линейная функция f на пространстве $\mathscr{R}_{n\times n}$ для любых двух квадратных матриц A и B порядка n удовлетворяет условию $\mathrm{f}(AB) = \mathrm{f}(BA)$. Доказать, что f определяется равенством $\mathrm{f}(X) = \alpha\,\mathrm{tr}\,X$.

31.19. 1) Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant 3$ число

$$\mathrm{f}(p) = \int_{-1}^{1} (1 + t^2)\, p(t)\, dt.$$

Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве многочленов $\mathscr{P}^{(3)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе из многочленов $1,\ t,\ t^2,\ t^3$.

2) Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant 3$ число

$$\mathrm{f}(p) = \int_{0}^{1} p(t^2)\, dt.$$

Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве многочленов $\mathscr{P}^{(3)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе из многочленов $1,\ t,\ t^2,\ t^3$.

31.20. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ его значение при $t = 0$. Доказать, что этим определена линейная функция на $\mathscr{P}^{(n)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе $1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^n$.

31.21. Пусть t_0 — фиксированное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ его значение при $t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция φ на пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$. Вычислить координатную строку функции φ в базисах $1,\ t,\ \ldots,\ t^n$ и $1,\ t - t_0,\ \ldots,\ (t - t_0)^n$.

31.22. Пусть $t_1, \ldots, t_{n+1}$ — попарно различные точки числовой оси, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ — соответствующие этим точкам линейные функции на пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$, определенные в задаче 31.21.

1) Доказать, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ линейно независимы.

2) Доказать, что произвольная линейная функция на пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$ может быть разложена в линейную комбинацию функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$.

31.23. Линейная функция δ сопоставляет каждому многочлену $p(t)$ степени n $(n \leqslant 2)$ его свободный член. Разложить эту функцию в линейную комбинацию функций φ_1, φ_2, φ_3, сопоставляющих каждому многочлену его значение соответственно при $t = 1$, $t = 2$ и $t = 3$.

31.24. Пусть t_0 — какое-нибудь, а $t_1, \ldots, t_{n+1}$ — попарно различные вещественные числа. Доказать, что найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, что для любого многочлена $p(t) \in \mathscr{P}^{(n)}$ будет выполнено равенство $p(t_0) = \lambda_1 p(t_1) + \ldots + \lambda_{n+1} p(t_{n+1})$.

31.25. Пусть k — натуральное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ значение его k-й производной при $t = 0$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

31.26. Пусть k — натуральное число, $k \leqslant n$, t_0 — вещественное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени не выше n значение его k-й производной при $t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$. Вычислить ее координатную строку в базисах:

1) $1, t, \ldots, t^n$; 2) $1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n$.

31.27. Линейные функции $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ определены на пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$ равенствами

$$\delta_k(p) = \left.\frac{d^k(p)}{dt^k}\right|_{t=t_0} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Доказать, что функции $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ линейно независимы.

31.28. Функции $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ определены так же, как в задаче 3.27. Доказать, что произвольная линейная функция, заданная на пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$, может быть разложена в линейную комбинацию функций δ_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

31.29. Пусть в базисе e_1, e_2, e_3 линейная функция f выражается через координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 вектора x формулой $\mathrm{f}(x) = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$. Какой формулой выражается $\mathrm{f}(x)$ через координаты x в базисе $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3 + e_1$?

31.30. Доказать, что всякую ненулевую линейную функцию $\mathfrak{f}$ на $\mathscr{L}_n$ подходящим выбором базиса в $\mathscr{L}_n$ можно привести к виду $\mathfrak{f}(x) = \xi_1$, где ξ_1 — первая координата вектора x.

31.31. В базисе $\boldsymbol{e}$ линейная функция $\mathfrak{f}$ имеет строку коэффициентов $\varkappa$. Найти ее строку коэффициентов $\varkappa'$ в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, если:

1) $\varkappa = c_{52}^T$, $S = A_{201}$; 2) $\varkappa = c_{64}^T$, $S = A_{202}$;

3) $\varkappa = c_{66}^T$, $S = A_{203}$; 4) $\varkappa = c_{51}^T$, $S = A_{205}$.

31.32. Функции φ_1, φ_2, φ_3, определенные в задаче 31.23, а также функции δ_0, δ_1, δ_2, определенные с помощью формул

$$\delta_k(p) = \left.\frac{d^k(p)}{dt^k}\right|_{t=2}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

образуют пару базисов в пространстве $\mathscr{P}^{(2)*}$. Выписать формулы перехода от первого базиса ко второму.

Биортогональный базис (31.33—31.42)

31.33. Многочлены $1, t, \ldots, t^n$ образуют базис в пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$. Найти соответствующий биортогональный базис.

31.34. Многочлены $1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n$ образуют базис в пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$. Найти соответствующий биортогональный базис.

31.35. Пусть базису e_1, e_2, e_3 пространства $\mathscr{L}_3$ биортогонален базис $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$ пространства $\mathscr{L}_3^*$. Найти базис, биортогональный базису $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3$.

31.36. Построить базис пространства $\mathscr{P}^{(2)}$, биортогональный базису из функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, определенных в задаче 31.23.

31.37. Найти базис пространства $\mathscr{P}^{(n)}$, биортогональный базису из функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, построенному в задачах 31.21, 31.22. Вычислить координаты произвольного многочлена в найденном базисе.

31.38. Построить базис пространства $\mathscr{P}^{(2)}$, биортогональный базису из функций $\delta_0, \delta_1, \delta_2$, определенных в задаче 31.32.

31.39. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве $\mathscr{L}_n$, а $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$ — биортогональный ему базис в $\mathscr{L}_n^*$. Доказать, что для всех $x \in \mathscr{L}_n$ выполнено равенство

$$x = \mathfrak{f}_1(x)\, e_1 + \cdots + \mathfrak{f}_n(x)\, e_n, \qquad (1)$$

а для всех $\mathfrak{y} \in \mathscr{L}_n^*$ — равенство

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(e_1)\, \mathfrak{f}_1 + \cdots + \mathfrak{y}(e_n)\, \mathfrak{f}_n.$$

Применить формулу (1) к базисам, рассмотренным в задаче 31.34.

31.40. Используя результат задачи 31.34, доказать, что многочлены $p_0, \ldots, p_k$ степени не выше k линейно независимы тогда и только тогда, когда для некоторого t_0 $\det \| p_i^{(j)}(t_0) \| \neq 0$.

31.41. Найти базис, биортогональный стандартному базису пространства $\mathscr{R}_{n \times n}$. Вычислить матрицы C, соответствующие функциям этого базиса (в смысле задачи 31.17).

31.42. Матрицы Паули

$$\sigma_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

образуют базис в пространстве комплексных квадратных матриц порядка 2. Найти базис, биортогональный базису $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, и вычислить матрицы C, соответствующие функциям этого базиса в смысле задачи 31.17.

Обращение линейной функции в нуль (31.43—31.49)

31.43. Доказать, что произведение двух линейных функций на $\mathscr{L}_n$ тождественно равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы одна из функций нулевая.

31.44. Пусть $\mathfrak{f}$ — линейная функция на $\mathscr{L}_n$. Доказать, что множество $\mathscr{N}$ векторов, для которых $\mathfrak{f}(x) = 0$, является линейным подпространством в $\mathscr{L}_n$. Какова размерность $\mathscr{N}$? Возможно ли совпадение $\mathscr{N}$ и $\mathscr{L}_n$?

31.45. Пусть $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ — линейные функции на $\mathscr{L}_n$ и $\mathfrak{f}(x) = 0$ для всех тех x, для которых $\mathfrak{g}(x) = 0$. Доказать, что тогда найдется такое число α, что $\mathfrak{f} = \alpha\mathfrak{g}$.

31.46. В пространстве $\mathscr{L}_4$ выбран базис и даны линейные функции с координатными строками (5, 24, —7, —1) и (—1, —2, 7, 3). Найти множество векторов, на которых эти функции одновременно обращаются в 0.

31.47. Пусть $\mathcal{N}$ — линейное подпространство в $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{K}$ — множество всех линейных функций, обращающихся в 0 на $\mathcal{N}$. Доказать, что $\mathcal{K}$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}_n^*$, и вычислить его размерность.

31.48. Подпространство $\mathcal{N}$ в $\mathcal{L}_5$ задано в некотором базисе как линейная оболочка векторов с координатными столбцами $(0, 0, 1, 1, 1)^T$ и $(0, 1, 0, 0, 1)^T$. Найти в том же базисе координатные строки всех линейных функций, обращающихся в 0 на $\mathcal{N}$.

31.49. Подпространство $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}^{(6)}$ задано как множество всех многочленов вида $(t-1)(t-2)^2 p(t)$, где $p(t) \in \mathcal{P}^{(3)}$. Найти множество линейных функций, определенных на $\mathcal{P}^{(6)}$ и обращающихся в 0 на $\mathcal{N}$.

§ 32. Билинейные и квадратичные функции

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *билинейная* и *квадратичная функции*, *симметричная* (*симметрическая*) *билинейная функция*, *матрица билинейной* или *квадратичной функции* (*билинейной* или *квадратичной формы*), *диагональная* и *каноническая формы билинейной* (*квадратичной*) *функции*, *положительно* и *отрицательно определенные квадратичные функции*, *главные* (угловые) *миноры симметрической матрицы*, *ранг* и *индекс квадратичной функции* (формы), *присоединенное преобразование билинейной функции* в евклидовом пространстве; *эрмитова билинейная* (полуторалинейная) *функция* (форма) в комплексном пространстве, *эрмитова симметричная* (эрмитова) *функция*, *квадратичная эрмитова функция* (форма).

Пусть $\mathcal{L}$ — вещественное или комплексное линейное пространство. Функция двух переменных $\mathrm{b}(x, y)$ со значениями в поле, над которым определено пространство $\mathcal{L}$, называется *билинейной функцией* в пространстве $\mathcal{L}$, если

$$\mathrm{b}(x+y, z) = \mathrm{b}(x, z) + \mathrm{b}(y, z),$$
$$\mathrm{b}(x, y+z) = \mathrm{b}(x, y) + \mathrm{b}(x, z),$$
$$\mathrm{b}(\alpha x, \beta y) = \alpha\beta\mathrm{b}(x, y)$$

для любых векторов x, y, z из $\mathcal{L}$ и чисел α, β.

Функция $\mathrm{k}(x) = \mathrm{b}(x, x)$ называется *квадратичной функцией* в $\mathcal{L}$, *порожденной билинейной функцией* $\mathrm{b}(x, y)$. По данной квадратичной функции $\mathrm{k}(x)$ порождающая ее симметричная билинейная функция определяется однозначно.

Пусть $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в $\mathcal{L}$. Числа $b_{ij} = \mathrm{b}(e_i, e_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ называются *коэффициентами*, а матрица $B = \|b_{ij}\|$ — *матрицей билинейной функции* $\mathrm{b}(x, y)$ в базисе $\boldsymbol{e}$. *Матрицей квадратич-*

ной функции $\mathrm{k}(x)$ называется матрица такой симметричной билинейной функции $\mathrm{b}(x, y)$, что $\mathrm{k}(x) = \mathrm{b}(x, x)$. Функции $\mathrm{b}(x, y)$ и $\mathrm{k}(x)$ выражаются через координатные столбцы ξ, η векторов x и y по формулам

$$\mathrm{b}(x, y) = \xi^T B\eta = \sum_{i, j=}^{n} b_{ij}\xi_i\eta_j, \tag{1}$$

$$\mathrm{k}(x) = \xi^T B\xi = \sum_{i, j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{2}$$

Формой степени m от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется однородный многочлен степени m от $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Ввиду этого выражения (1) и (2) билинейной и квадратичной функций в координатах называются соответственно *билинейной* и *квадратичной формами*. Матрица из коэффициентов $B = \|b_{ij}\|$ называется также матрицей билинейной (квадратичной) формы.

Пусть S — матрица перехода от базиса e к базису e', а B и B' — матрицы билинейной функции в этих базисах. Тогда

$$B' = S^T BS. \tag{3}$$

Билинейная форма

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\xi_i\eta_i$$

и квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\xi_i^2$$

называются *диагональными*. Если коэффициенты $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, диагональной формы равны ± 1 или 0, то она называется *канонической*.

Для каждой симметричной билинейной (квадратичной) функции в вещественном n-мерном линейном пространстве существует базис, в котором соответствующая билинейная (квадратичная) форма является канонической. Общее число ненулевых коэффициентов в канонической квадратичной форме равно рангу r, а число q коэффициентов, равных -1, — отрицательному индексу квадратичной функции (закон инерции квадратичных форм). Канонический вид однозначно определяется также положительным p и отрицательным q индексами или рангом r и сигнатурой $p-q$.

Привести билинейную (квадратичную) функцию к диагональному или каноническому виду — значит, найти такую форму и соответствующий ей базис (или формулы замены координат). Употребительно также выражение «привести билинейную (квадратичную) форму к диагональному или к каноническому виду».

Для практического приведения квадратичной формы к каноническому виду применяется метод выделения квадратов (метод Лагранжа). Можно использовать также элементарные преобразования матрицы квадратичной формы. При этом после каждого элементарного преобразования строк матрицы необходимо выполнить тоже преобразование столбцов.

Квадратичная функция $\mathrm{k}(x)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если $\mathrm{k}(x) > 0$ (соответственно $\mathrm{k}(x) < 0$) для всех x из $\mathscr{L}$, отличных от o. Если $\mathrm{k}(x) \geqslant 0$ ($\mathrm{k}(x) \leqslant 0$) для всех $x \in \mathscr{L}$, то функция $\mathrm{k}(x)$ называется *полуопределенной* — *неотрицательной* (соответственно, *неположительной*). Такие же термины применяются для квадратичной формы, служащей координатной записью квадратичной функции. Для положительной определенности квадратичной функции (формы) с матрицей $B = \|b_{ij}\|$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры Δ_k матрицы B были положительными:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0, \qquad k = 1, \dots, n \tag{4}$$

(критерий Сильвестра).

Пусть $\mathrm{b}(x, y)$ — симметричная билинейная функция в евклидовом пространстве $\mathscr{E}$. Линейное преобразование φ пространства $\mathscr{E}$ называется *присоединенным* к функции $\mathrm{b}(x, y)$, если для всех $x, y \in \mathscr{E}$: $\mathrm{b}(x, y) = (x, \varphi(y))$. Присоединенное преобразование является самосопряженным. Преобразование, присоединенное к билинейной функции, называется также присоединенным к квадратичной функции $\mathrm{k}(x) = \mathrm{b}(x, x)$.

Для любой симметричной билинейной функции $\mathrm{b}(x, y)$ (и квадратичной функции $\mathrm{k}(x)$) в евклидовом пространстве $\mathscr{E}_n$ существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид:

$$\mathrm{b}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \eta_i \qquad \left(\mathrm{k}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2\right).$$

Векторы такого базиса являются собственными векторами присоединенного преобразования, а коэффициенты λ_i — его собственными значениями.

С помощью ортогональной матрицы перехода можно привести к диагональному виду билинейную и квадратичную функцию в произвольном конечномерном линейном пространстве $\mathscr{L}$. Для этого в $\mathscr{L}$ следует ввести скалярное произведение, относительно которого исходный базис $\boldsymbol{e}$ является ортонормированным, и найти ортонормированный базис $\boldsymbol{e}'$ из собственных векторов присоединенного преобразования.

Тогда матрица перехода S от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{e}'$ будет ортогональной, а матрица $B' = S^T BS = S^{-1}BS$ — диагональной.

Диагональный вид билинейной (квадратичной) функции можно использовать как промежуточный этап в ее приведении к каноническому виду: надо только умножить на подходящие числа векторы базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.

Пусть $\mathrm{f}(x)$ и $\mathrm{g}(x)$ — квадратичные функции (формы) в n-мерном вещественном линейном пространстве $\mathscr{L}$, причем функция $\mathrm{g}(x)$ положительно или отрицательно определена. Тогда в $\mathscr{L}$ существует базис, в котором обе формы диагональны, и, более того, $\mathrm{g}(x)$ имеет канонический вид. Если $\mathrm{F}(x, y)$ и $\mathrm{G}(x, y)$ — симметрические билинейные функции, порождающие квадратичные формы $\mathrm{f}(x)$ и $\mathrm{g}(x)$, то искомый базис — ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования, присоединенного к $\mathrm{F}(x, y)$, относительно скалярного произведения, определяемого функцией $\mathrm{G}(x, y)$.

Пусть F и G — матрицы форм f и g в некотором базисе $\boldsymbol{e}$. Диагональные коэффициенты формы f в подходящем базисе являются корнями уравнения

$$\det (F - \lambda G) = 0, \tag{5}$$

а соответствующие базисные векторы находятся из системы уравнений

$$(F - \lambda G)\, \xi = 0 \tag{6}$$

для каждого корня λ уравнения (5).

На практике пару квадратичных форм f, g приводят к диагональному виду в два этапа: 1) находят базис $\boldsymbol{e}'$, в котором форма g является канонической (например, методом Лагранжа), и преобразуют форму f к базису $\boldsymbol{e}'$; 2) находят базис $\boldsymbol{e}''$, матрица перехода к которому от базиса $\boldsymbol{e}'$ ортогональна и в котором форма f имеет диагональный вид: в этом базисе форма g остается канонической. Если S — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к промежуточному базису $\boldsymbol{e}'$, а T — матрица перехода от $\boldsymbol{e}'$ к базису $\boldsymbol{e}''$, то матрица перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{e}''$ равна ST.

Функция $\mathrm{h}(x, y)$ в комплексном линейном пространстве $\mathscr{L}$ называется *эрмитовой билинейной* (*полуторалинейной*), если

$$\mathrm{h}(x + y, z) = \mathrm{h}(x, z) + \mathrm{h}(y, z),$$
$$\mathrm{h}(x, y + z) = \mathrm{h}(x, y) + \mathrm{h}(x, z),$$
$$\mathrm{h}(\alpha x, \beta y) = \alpha\bar{\beta}\mathrm{h}(x, y)$$

для всех $x, y, z \in \mathscr{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Эрмитова билинейная функция называется *симметричной* (*эрмитовой*), если $\mathrm{h}(x, y) = \overline{\mathrm{h}(y, x)}$ для всех $x, y \in \mathscr{L}$. Такая функция порождает *квадратичную эрмитову функцию* $\mathrm{k}(x) = \mathrm{h}(x, x)$.

Пусть B, B' — матрицы эрмитовой билинейной функции $\mathrm{h}(x, y)$ в базисах $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ комплексного линейного пространства, S — матрица перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{e}'$, а ξ, η — столбцы координат векторов x, y в базисе $\boldsymbol{e}$. Тогда

$$\mathrm{h}(x, y) = \xi^T B\bar{\eta}, \quad \mathrm{k}(x) = \xi^T B\bar{\xi};$$
$$B' = S^T B\bar{S}.$$

Многочлен, служащий координатной записью билинейной (квадратичной) эрмитовой функции, называется соответственно *билинейной* (*квадратичной*) *эрмитовой формой.*

Квадратичная форма в n-мерном комплексном пространстве приводится к каноническому виду $\sum\limits_{j=1}^{r} \xi_j^2$, где r — ранг формы. Квадратичная эрмитова форма приводится к каноническому виду $\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j |\xi_j|^2$, где ε_j равны 1, —1 или 0. Закон инерции и критерий положительной определенности (критерий Сильвестра) квадратичной эрмитовой формы формулируются точно так же, как для вещественной квадратичной формы. Для квадратичной эрмитовой формы $\mathrm{k}(x)$ в унитарном пространстве существует ортонормированный базис, в котором она диагональна: $\mathrm{k}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j|^2$. Если B — матрица формы в ортонормированном базисе, то коэффициенты λ_j являются характеристическими числами матрицы B.

Билинейные и квадратичные функции в вещественном линейном пространстве (32.1—32.26)

32.1. Составить матрицу данной билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в n-мерном линейном пространстве:

1) x_1y_1 $(n = 1)$; 2) x_1y_1 $(n = 2)$;

3) $2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2$ $(n = 2)$;

4) $x_1y_2 - 3x_1y_3 + 7x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + 7x_3y_2 + x_3y_3$ $(n = 3)$;

5) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$; 6) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_{n-i+1}$; 7) $\sum\limits_{|i-j|\leqslant 1} x_iy_j$.

32.2. Восстановить симметричную билинейную форму в n-мерном линейном пространстве по данной квадратичной форме и составить ее матрицу:

1) $-3x_1^2$ $(n = 1)$;

2) $-18x_1x_2 + 9x_2^2$ $(n = 2)$;

3) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$ $(n = 3)$;

4) $2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$ $(n = 3)$;

5) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$.

32.3. Записать квадратичную форму, имеющую данную матрицу:

1) A_{47}; 2) A_{37}; 3) A_{307}; 4) A_{280};
5) A_{484}; 6) A_{471}; 7) A_{593}; 8) A_{634}.

32.4. Восстановить симметричную билинейную функцию $\mathrm{b}(x, y)$ по квадратичной функции $\mathrm{k}(x) = \mathrm{b}(x, x)$.

32.5. Как изменится матрица билинейной (квадратичной) функции, если изменить базис $e_1, \ldots, e_n$ следующим образом:

1) поменять местами i-й и j-й векторы базиса;
2) умножить i-й базисный вектор на число $\lambda \neq 0$;
3) вектор e_i заменить на $e_i + \lambda e_j$ $(i \neq j)$;
4) векторы базиса расположить в обратном порядке?

32.6. Квадратичная функция и линейное преобразование имеют в некотором базисе одинаковые матрицы. Какой должна быть матрица перехода от этого базиса к другому базису для того, чтобы в другом базисе матрицы квадратичной функции и линейного преобразования также совпадали?

32.7. Квадратичная функция дана в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Записать эту квадратичную функцию в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$:

1) $25x_1^2 - 14x_1x_2 + 2x_2^2$, $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = -e_1 + e_2$;

2) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 9x_2^2$, $e'_1 = 2e_1 - e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$;

3) $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2$, $e'_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{6}e_2$, $e'_2 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{6}e_2$;

4) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$, $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$;

5) $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$, $e'_1 = 2e_1 - e_3$, $e'_2 = -e_1 + 2e_2 - e_3$, $e'_3 = -e_2 + e_3$;

6) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$, $e'_1 = e_1 + e_2 - 2\sqrt{2}e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 + e_3$;

7) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$, $e'_i = e_i + e_{i+1} + \cdots + e_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

32.8. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований ее матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы.

1) $4x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$;
2) $x_1^2-x_1x_2-x_2^2$;
3) $-x_1x_2$;
4) $25x_1^2+30x_1x_2+9x_2^2$;
5) $2x_1x_2-x_1^2-2x_2^2$;
6) $24x_1x_2-16x_1^2-9x_2^2$;
7) $x_1^2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$;
8) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$;
9) $2x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+9x_2^2+19x_3^2$;
10) $9x_1^2-12x_1x_2-6x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$;
11) $8x_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;
12) (р) $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$;
13) $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+3x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$;
14) $x_1^2-2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_4+x_3^2-2x_3x_5+$
$+x_4^2-2x_4x_6+x_5^2+x_6^2$;
15) $x_1x_2+2x_2x_3-3x_3x_4$;
16) $x_1x_2+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

32.9. Выяснить, какие квадратичные формы из задачи 32.8 являются положительно определенными, отрицательно определенными, полуопределенными.

32.10. Привести к каноническому виду данную билинейную форму:

1) $x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$;
2) $x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$;
3) $13x_1y_1-5x_1y_2-5x_2y_1+2x_2y_2$;
4) $-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$;
5) $x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2$;
6) $x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+$
$+x_3y_1+2x_2y_3+2x_3y_2$;
7) $x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3$.

32.11. Доказать, что несимметричную билинейную функцию нельзя привести к диагональному виду.

32.12. Привести квадратичную форму, зависящую от действительного параметра λ, к каноническому виду при всевозможных значениях λ:

1) $3x_1^2-2x_1x_2+\lambda x_2^2$;
2) $8x_1^2+\lambda x_1x_2+2x_2^2$;

3) $2x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+6x_2^2+\lambda x_3^2$;

4) $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+\lambda x_4^2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+$ $+2x_2x_4+5x_3x_4$;

5) $3x_2^2+6x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3+\lambda x_2x_4+x_3^2+$ $+x_3x_4+x_4^2$.

32.13. Привести к каноническому виду данную квадратичную форму в n-мерном пространстве:

1) $x_1^2+2\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$;

2) $x_1^2+2\sum\limits_{i=1}^{n-1} (-1)^i x_ix_{i+1}$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 1} x_ix_j$; 4) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

5) $-\sum\limits_{i=1}^{n} ix_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} ix_ix_j$;

6) $\sum\limits_{i=1}^{n} ((i-1)^2+1)x_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} ix_ix_j$.

32.14. Доказать, что для положительной определенности квадратичной функции $\mathrm{k}(x)$ необходимо и достаточно любое из условий:

1) $\mathrm{k}(e_i)>0$ $(i=1, \ldots, n)$ для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$;

2) $\mathrm{k}(x)$ приводится к диагональному виду с положительными коэффициентами;

3) $\mathrm{k}(x)$ приводится к каноническому виду $\xi_1^2+\cdots$ $\cdots+\xi_n^2$.

32.15. Доказать, что для положительной определенности квадратичной функции необходима, но не достаточна положительность всех диагональных элементов ее матрицы в некотором базисе.

32.16. Доказать, что квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки главных миноров ее матрицы чередуются следующим образом:

$$\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0,\ \ldots,\ \operatorname{sign}\Delta_n=(-1)^n.$$

32.17. Пусть ранг квадратичной функции $\mathrm{k}(x)$ в n-мерном линейном пространстве $\mathscr{L}$ равен r. Доказать утверждения:

1) В $\mathscr{L}$ существует базис, в котором главные миноры Δ_k матрицы функции $\mathrm{k}(x)$ отличны от нуля при $k=1, \ldots, r$ и равны нулю при $k=r+1, \ldots, n$.

2) Пусть в некотором базисе главные миноры Δ_k ($k = 1, \ldots, r$) матрицы функции $\mathrm{k}(x)$ отличны от нуля. Тогда $k(x)$ приводится к диагональной форме $\sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \xi_k^2$ ($\Delta_0 = 1$) и к канонической форме $\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \xi_k^2$, где $\varepsilon_k = \operatorname{sign} \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ ($k = 1, \ldots, r$).

32.18. При каких значениях параметра λ данная квадратичная форма положительно, отрицательно определена или полуопределена:

1) $\lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3) x_2^2$;
2) $-9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$;
3) $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
4) $x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2x_3$;
5) $(4 - \lambda) x_1^2 + (4 - \lambda) x_2^2 - (2 + \lambda) x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$?

32.19. Пусть $\mathrm{k}(x)$ — квадратичная функция в линейном пространстве $\mathscr{L}$. Является ли линейным подпространством в $\mathscr{L}$ множество всех векторов x из $\mathscr{L}$, для которых $\mathrm{k}(x) \geqslant 0$ ($\mathrm{k}(x) \leqslant 0$)? Рассмотреть пример $\mathrm{k}(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ ($n = 3$).

32.20. Доказать, что в линейном пространстве вещественных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \operatorname{tr}(XX^T)$ является положительно определенной квадратичной функцией.

32.21. Доказать, что в линейном пространстве вещественных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \operatorname{tr}(X^2)$ является квадратичной функцией. Определить ее ранг и сигнатуру.

32.22. Показать, что функция

$$I(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$$

является симметричной билинейной функцией в пространстве многочленов степени не выше n. Привести ее к каноническому виду при $n = 3$.

32.23. Доказать, что ранг билинейной функции равен 1 тогда и только тогда, когда она является произведением двух ненулевых линейных функций.

32.24. Доказать, что для представимости квадратичной функции в виде произведения двух линейных вещественных функций необходимо и достаточно, чтобы либо ранг этой квадратичной функции не превосходил 1, либо ранг был равен 2, а сигнатура равна нулю.

32.25. При каком необходимом и достаточном условии квадратичные функции $\mathrm{k}(x)$ и $-\mathrm{k}(x)$ могут быть приведены к одному и тому же каноническому виду?

32.26. 1) Пусть $\mathrm{b}(x, y)$ — билинейная функция в линейном пространстве $\mathscr{L}$. Назовем функцию $\mathrm{b}(x, y)$ инвариантной относительно линейного преобразования φ пространства $\mathscr{L}$, если $\mathrm{b}(\varphi(x), \varphi(y)) = \mathrm{b}(x, y)$ для всех $x, y \in \mathscr{L}$. Доказать, что все невырожденные линейные преобразования, относительно которых $\mathrm{b}(x, y)$ инвариантна, образуют группу относительно умножения преобразований.

2) Найти все линейные преобразования двумерного линейного пространства, относительно которых инвариантна билинейная форма $x_1y_1 + x_2y_2$.

Квадратичные функции в евклидовом пространстве. Пары форм (32.27—32.39)

32.27. Квадратичная (билинейная) функция записана в ортонормированном базисе n-мерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид.

$n = 2$:

1) $-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$;

2) $\frac{4}{3}x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2$;

3) $7x_1^2 + 4\sqrt{3}\,x_1x_2 + 3x_2^2$;

4) $-x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 9x_2y_2$;

5) $-x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - x_2y_2$.

$n = 3$:

6) $-x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$;

7) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;

8) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$;

9) $2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 4x_2y_2 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2 - 3x_3y_3$;

10) (р) $2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$;

11) $3x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$;

12) $3x_1^2+8x_1x_2-8x_1x_3-7x_2^2-8x_2x_3+3x_3^2$;

13) $x_1^2-x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_3^2$;

14) $4x_1^2+4x_1x_2-12x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+9x_3^2$;

15) $x_1y_2+x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1-x_1y_1-x_2y_2+$ $+2x_2y_3+2x_3y_2-4x_3y_3$;

16) $x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_2-x_3y_3$.

$n=4$:

17) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+x_2^2-2x_2x_3-2x_2x_4+$ $+x_3^2-2x_3x_4+x_4^2$;

18) $x_1^2-2x_1x_2+6x_1x_3+8x_1x_4+4x_2^2-$ $-2x_2x_4-6x_3x_4+x_4^2$;

19) $2x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2^2-6x_2x_3+2x_2x_4+$ $+6x_3^2+2x_3x_4+4x_4^2$;

20) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-x_2^2-x_3^2-x_4^2$;

21) $\frac{1}{2}x_1y_2+\frac{1}{2}x_2y_1+\frac{1}{2}x_3y_4+\frac{1}{2}x_4y_3$;

22) $3x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2-x_3^2+4x_3x_4-4x_4^2$.

23) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

24) $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}(-1)^{i+j}x_iy_j$; 25) $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}x_ix_{2n-i}$;

26) $\sum\limits_{i=1}^{2n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{2n}x_ix_{2n-i+1}$; 27) $\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

32.28. Найти канонический вид, ранг и сигнатуру каждой из квадратичных и билинейных форм задачи 32.27.

32.29. Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все характеристические числа ее матрицы положительны, и отрицательно определенной тогда и только тогда, когда отрицательны.

32.30. Пусть все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A принадлежат отрезку $[a, b]$. Доказать, что квадратичная форма с матрицей $A-\lambda E$ положительно определена при $\lambda<a$ и отрицательно определена при $\lambda>b$.

32.31. Доказать, что квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все коэффициенты характеристического многочлена ее матрицы отличны от нуля, и знаки этих коэффициентов чередуются, причем свободный член положителен.

32.32. 1) Доказать, что линейное преобразование φ евклидова пространства, присоединенное к заданной в нем симметричной билинейной функции $\mathrm{b}(x, y)$, является самосопряженным.

2) Пусть в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ билинейная функция $\mathrm{b}(x, y)$ имеет симметричную матрицу B, а матрица Грама базиса $\boldsymbol{e}$ равна Γ. Найти матрицу преобразования, присоединенного к функции $\mathrm{b}(x, y)$.

32.33. В базисе $\boldsymbol{e}$ евклидова пространства задана квадратичная форма. Найти в том же базисе матрицу присоединенного к ней преобразования, если матрица Грама базиса $\boldsymbol{e}$ равна Γ:

1) $4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2, \quad \Gamma = A_{56}$;

2) $4x_1^2-6x_1x_2-5x_2^2, \quad \Gamma = A_{55}$;

3) $2x_1x_2-x_2^2, \quad \Gamma = A_9$;

4) $2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2, \quad \Gamma = A_{207}$;

5) $5x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3, \quad \Gamma = A_{208}$;

6) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-2x_2x_3-$ $-2x_2x_4-2x_3x_4, \quad \Gamma = A_{471}$.

32.34. Пусть в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ n-мерного евклидова пространства с матрицей Грама Γ квадратичная функция $\mathrm{k}(x)$ имеет матрицу B. Доказать, что ортонормированный базис, в котором $\mathrm{k}(x)$ диагональна, и ее диагональные коэффициенты в этом базисе находятся как решения обобщенной задачи на собственные значения и собственные векторы: $B\xi = \lambda\Gamma\xi$ $(\xi \in \mathscr{R}_n)$.

32.35. Пусть $\mathscr{M}$ — r-мерное линейное подпространство n-мерного евклидова пространства. Функция $\mathrm{k}(x)$ равна квадрату длины ортогональной проекции вектора x на подпространство $\mathscr{M}$. Доказать, что функция $\mathrm{k}(x)$ является квадратичной. Найти диагональный вид, который имеет эта функция в некотором ортонормированном базисе.

32.36. Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду, и записать этот диагональный вид обеих форм.

1) $\mathrm{f} = x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2, \quad \mathrm{g} = 4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2$;

2) $\mathrm{f} = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2, \quad \mathrm{g} = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$;

3) $\mathrm{f} = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2, \quad \mathrm{g} = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$;

4) $\mathrm{f} = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2, \quad \mathrm{g} = 2x_1x_2 - x_2^2$;

5) $\mathrm{f} = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2, \quad \mathrm{g} = 17x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$;

6) $\mathrm{f} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2, \quad \mathrm{g} = 2x_1x_2 - \frac{7}{2}x_1^2 - x_2^2$;

7) $\mathrm{f} = (1 + 4\sqrt{6})x_1^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2, \quad \mathrm{g} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$;

8) $\mathrm{f} = \left(1 + 2m\sqrt{a^2 + a}\right)x_1^2 + 2\sqrt{a^2 + a}\,x_1x_2, \quad \mathrm{g} = (1+m^2)x_1^2 + 2mx_1x_2 + x_2^2$, где m и a — вещественные параметры, $a^2 + a \geqslant 0$;

9) $\mathrm{f} = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2, \ \mathrm{g} = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2$;

10) $\mathrm{f} = 15x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 + 22x_2x_3, \quad \mathrm{g} = x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

11) (р) $\mathrm{f} = 6x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 6x_3^2, \quad \mathrm{g} = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$;

12) $\mathrm{f} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2, \ \mathrm{g} = 9x_1^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 16x_3^2$;

13) $\mathrm{f} = x_1^2 + 7x_2^2 + 16x_3^2 + 19x_4^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 10x_1x_4 - 26x_2x_3 + 8x_2x_4 - 2x_3x_4, \ \mathrm{g} = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2 + 6x_3x_4 - 10x_4^2$;

14) $\mathrm{f} = x_1^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + 4x_4^2, \ \mathrm{g} = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2$.

32.37. Доказать, что если среди линейных комбинаций двух квадратичных функций имеется положительно определенная, то эти две функции одновременно приводятся к диагональной форме. Показать на примере, что это условие не является необходимым.

32.38. В некотором базисе $\boldsymbol{e}$ n-мерного линейного пространства квадратичные функции f и g имеют соответственно матрицы F и G. Пусть в базисе $\boldsymbol{e}'$, заданном матрицей перехода S от базиса $\boldsymbol{e}$, функция g имеет каноническую форму $\sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2$, а функция f — диагональную форму $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2$. Доказать, что:

1) $\det(F - \lambda G) = (\det S)^2 (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$;

2) векторы базиса e' находятся из системы уравнений $(F - \lambda G)\,\xi = o$ для каждого корня λ уравнения $\det(F - \lambda G) = 0$.

32.39. Не находя замены координат, приводящей положительно определенную квадратичную форму g к каноническому виду, а квадратичную форму f к диагональному виду, найти этот диагональный вид формы f.

1) $\mathrm{f} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $\mathrm{g} = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2$;

2) $\mathrm{f} = 89x_1^2 - 42x_1x_2 + 5x_2^2$, $\mathrm{g} = 41x_1^2 - 18x_1x_2 + 2x_2^2$;

3) $\mathrm{f} = 7x_1x_2 + 31x_2^2$, $\mathrm{g} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$;

4) $\mathrm{f} = 8x_1^2 - 5x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$, $\mathrm{g} = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

Билинейные и квадратичные функции в комплексном пространстве (32.40—32.47)

32.40. Показать, что:

1) если $\mathrm{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — билинейная функция в n-мерном комплексном арифметическом пространстве, то функция $\mathrm{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{b}(\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{y}})$ является эрмитовой билинейной;

2) если $\mathrm{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — эрмитова билинейная функция в пространстве $\mathcal{C}_n$, то $\mathrm{b}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{h}(\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{y}})$ — билинейная функция.

32.41. Привести следующие квадратичные формы к каноническому виду:

1) $4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 9x_2^2$;

2) $9x_1^2 + 24(i+1)x_1x_2 + 16x_2^2$; 3) x_1x_2;

4) $\varepsilon^2x_1^2 - \varepsilon x_1x_2 + x_2^2$, $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$;

5) $(1+i)x_1^2 + (2+2i)x_1x_3 + ix_2^2 + 3x_3^2$;

6) $x_1^2 + (2-2i)x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ix_2^2 + (2+2i)x_2x_3 + (1+i)x_3^2$;

7) $-x_1^2 - 4ix_1x_2 - (2-2i)x_1x_3 + 4x_2^2 - (4+4i)x_2x_3 + 2ix_3^2$.

32.42. Составить матрицы данных эрмитовых билинейных форм в n-мерном пространстве:

1) $-ix_1\bar{y}_1$ $(n = 1)$; 2) $-ix_1\bar{y}_1$ $(n = 2)$;

3) $3x_1\bar{y}_1 + 4ix_1\bar{y}_2 - 5x_2\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2$ $(n = 2)$;

4) $-3ix_1\bar{y}_1 + 2x_1\bar{y}_2 + 2x_2\bar{y}_1 + (1-i)x_2\bar{y}_2$ $(n = 2)$;

5) $(1+i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 - 5x_2\bar{y}_2$ $(n = 2)$;

6) $(1+i)x_1\bar{y}_2 + (1-i)x_2\bar{y}_1 - 5x_2\bar{y}_2$ $(n = 2)$;

7) $x_1\bar{y}_1 - 3x_2\bar{y}_2 + (2+i)\,x_3\bar{y}_3 - ix_1\bar{y}_2 + (4+i)\,x_3\bar{y}_1$ $(n=3)$;

8) $2x_1\bar{y}_1 - 6x_2\bar{y}_2 + \left(1 + 3\sqrt{2}\right) x_3\bar{y}_3 + 3x_1\bar{y}_2 + 3x_2\bar{y}_1 + (2-5i)\,x_1\bar{y}_3 + (2+5i)\,x_3\bar{y}_1 + 4ix_2\bar{y}_3 - 4ix_3\bar{y}_2$ $(n=3)$;

9) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i$.

32.43. Какие из эрмитовых билинейных форм в задаче 32.42 симметричны? Записать соответствующие им эрмитовы квадратичные формы.

32.44. Записать эрмитову квадратичную форму, имеющую данную матрицу:

1) A_{47}; 2) A_{79} $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$; 3) A_{280}; 4) A_{492}.

32.45. Эрмитова квадратичная форма записана в ортонормированном базисе n-мерного унитарного пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная эрмитова квадратичная форма имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид.

1) $2|x_1|^2 + ix_1\bar{x}_2 - ix_2\bar{x}_1 + 2|x_2|^2$ $(n=2)$;

2) $|x_1|^2 + (3-4i)\,x_1\bar{x}_2 + (3+4i)\,x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2$ $(n=2)$;

3) $|x_1|^2 + \varepsilon x_1\bar{x}_2 + \bar{\varepsilon} x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2$ $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$ $(n=2)$;

4) $3|x_1|^2 + 3|x_2|^2 - 5|x_3|^2 - ix_1\bar{x}_2 + ix_2\bar{x}_1$ $(n=3)$;

5) $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 + ix_1\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_1 + ix_2\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_2$ $(n=3)$;

6) $12|x_1|^2 - (1+i)\,x_1\bar{x}_2 - (1-i)\,x_2\bar{x}_1 + 2x_1\bar{x}_3 + 2x_3\bar{x}_1 + (3+3i)\,x_1\bar{x}_4 + (3-3i)\,x_4\bar{x}_1 + 12|x_2|^2 + (1-i)\,x_2\bar{x}_3 + (1+i)\,x_3\bar{x}_2 - 2x_2\bar{x}_4 - 2x_4\bar{x}_2 + 8|x_3|^2 - (1+i)\,x_3\bar{x}_4 - (1-i)\,x_4\bar{x}_3 + 8|x_4|^2$ $(n=4)$.

32.46. Восстановить симметричную эрмитову билинейную функцию $\mathrm{h}(x, y)$ по эрмитовой квадратичной функции $\mathrm{k}(x) = \mathrm{h}(x, x)$.

32.47. Доказать, что в линейном пространстве комплексных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \mathrm{tr}\left(X \cdot \overline{X}^T\right)$ является положительно определенной эрмитовой квадратичной функцией.

ГЛАВА XIII

АФФИННЫЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 33. Аффинные пространства

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *вещественное n-мерное аффинное пространство и его пространство векторов, декартова система координат, декартовы координаты и координатный столбец точки, независимая система точек, плоскость в аффинном пространстве, прямая линия, гиперплоскость, направляющее подпространство плоскости, проекции точки и вектора на плоскость параллельно другой плоскости, отрезок, выпуклое множество, выпуклая оболочка множества, симплекс, треугольник, тетраэдр, грани и ребра симплекса, параллелепипед, параллелограмм, граница, грани, ребра, вершины, диагонали параллелепипеда.*

Единственную точку B аффинного пространства такую, что $\overrightarrow{AB} = x$, обозначаем $P(A, x)$.

Система точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ аффинного пространства называется *независимой* (или *системой в общем положении*), если система векторов $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ является линейно независимой.

Рассмотрим плоскость $\mathfrak{m}$ в аффинном пространстве $\mathscr{A}$. Пусть A_0 — фиксированная точка, принадлежащая плоскости, $b_1, \ldots, b_k$ — базис направляющего подпространства плоскости, а O — фиксированная точка аффинного пространства. *Радиус-вектором точки A* относительно точки O называется вектор $\overrightarrow{OA}$. Если x_0 — радиус-вектор точки A_0, то плоскость состоит из тех и только тех точек A, радиус-вектор которых x удовлетворяет уравнению

$$x = x_0 + t_1b_1 + \cdots + t_kb_k. \tag{1}$$

Параметры $t_1, \ldots, t_k$ принимают произвольные значения и однозначно определяются точкой A.

Если ввести декартову систему координат с началом в точке O, то все векторы в уравнении (1) могут быть заменены их координатными столбцами в этой системе координат O, $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + t_k\boldsymbol{b}_k.$$

Наконец, записывая уравнение (1) покоординатно в базисе $\boldsymbol{e}$, мы получим *параметрические уравнения плоскости* $\mathfrak{m}$ в системе координат O, $\boldsymbol{e}$:

$$x_i = x_{i0} + t_1 b_{i1} + \cdots + t_k b_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Пусть $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ — две плоскости в аффинном пространстве $\mathscr{A}$ с пространством векторов $\mathscr{L}$, а $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ — направляющие подпространства этих плоскостей. Если $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}'$ или $\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}$, то плоскости $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ называются *параллельными*. Если $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ не имеют общих точек и не параллельны, то эти плоскости называются *скрещивающимися*. Различают два случая: если при этом $\mathscr{M} \cap \mathscr{M}' = \{o\}$, то плоскости называются *абсолютно скрещивающимися*; если же $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ скрещиваются, а пересечение $\mathscr{M} \cap \mathscr{M}'$ содержит ненулевой вектор, но не совпадает ни с одним из подпространств $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$, то плоскости называются *скрещивающимися параллельно подпространству* $\mathscr{M} \cap \mathscr{M}'$.

Если прямая сумма направляющих подпространств $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ плоскостей $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ совпадает с пространством векторов $\mathscr{L}$, то плоскости $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ имеют единственную общую точку. В этом случае определено понятие проекции точки $A \in \mathscr{A}$ на одну из этих плоскостей параллельно другой. А именно, *проекцией точки A на плоскость $\mathfrak{m}'$ параллельно плоскости $\mathfrak{m}$* (или параллельно $\mathscr{M}$) называется точка пересечения плоскости $\mathfrak{m}'$ с плоскостью, имеющей направляющее подпространство $\mathscr{M}$ и содержащей точку A.

Отрезком AB, соединяющим точки A и B аффинного пространства, называется множество всех точек вида $P(A, t\overrightarrow{AB})$, $t \in [0, 1]$. Хотя в аффинном пространстве расстояние между точками не определено, тем не менее можно ввести понятие деления отрезка в заданном отношении. Если p и q — некоторые числа, $p + q \neq 0$, то говорят, что точка C делит отрезок AB в отношении $p : q$, если $q\,\overrightarrow{AC} = p\,\overrightarrow{CB}$. Если отношение $p : q$ отрицательно, то точка C лежит вне отрезка AB.

Серединой отрезка называется точка, делящая этот отрезок в отношении $1 : 1$.

Множество Q точек аффинного пространства называется *выпуклым*, если для любых двух точек из Q весь отрезок, их соединяющий, целиком содержится в Q.

Выпуклой оболочкой некоторого множества $\mathscr{M}$ аффинного пространства называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих $\mathscr{M}$.

Выпуклая оболочка независимой системы точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ называется *k-мерным симплексом* с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Нульмерным симплексом является точка, одномерным — отрезок; двумерный симплекс с вершинами A_0, A_1, A_2 называется *треугольником*, трехмерный симплекс с вершинами A_0, A_1, A_2, A_3 называется *тетраэдром*. Всякий p-мерный симплекс, вершинами которого являются некоторые точки $B_0, B_1, \ldots, B_p$ из множества вершин данного k-мерного симплекса, называется *p-мерной гранью* данного k-мерного симплекса ($0 \leqslant k < p$). Одномерные грани симплекса называются *ребрами.*

Пусть заданы точка A_0 аффинного пространства $\mathscr{A}$ с пространством векторов $\mathscr{L}$ и система $f_1, \ldots, f_k$ линейно независимых векторов $\mathscr{L}$. Множество всех точек вида

$$P(A_0, t_1 f_1 + \cdots + t_k f_k), \quad 0 \leqslant t_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

называется *k-мерным параллелепипедом* $\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ с вершиной A_0, построенным на векторах $f_1, \ldots, f_k$. Нульмерным параллелепипедом является точка, одномерным параллелепипедом — отрезок; двумерный параллелепипед называется *параллелограммом. Границей* параллелепипеда $\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ называется подмножество тех его точек, для которых значения по крайней мере одного из параметров t_j в (2) равны либо 0, либо 1. Множество точек границы параллелепипеда, для которых какие-нибудь фиксированные p параметров принимают произвольные значения, а значения остальных $k-p$ параметров постоянны и равны либо 0, либо 1, называется *p-мерной гранью* параллелепипеда ($k = 0, 1, \ldots, p-1$). *Вершиной* параллелепипеда называется любая его нульмерная грань (т. е. точка границы, для которой каждый из параметров t_j принимает значение либо 0, либо 1). Одномерные грани параллелепипеда называются его *ребрами.* Отрезок, соединяющий какие-либо две вершины параллелепипеда и не лежащий ни в одной из его граней, называется *диагональю* параллелепипеда.

33.1. Проверить, что n-мерное линейное пространство $\mathscr{L}$ является аффинным пространством с пространством векторов, совпадающим с $\mathscr{L}$, если точками этого аффинного пространства считать векторы из $\mathscr{L}$, и всякой упорядоченной паре векторов a, b ставить в соответствие вектор $x = b - a$.

33.2. Доказать, что в аффинном пространстве $\mathscr{A}$:

1) $\overrightarrow{AA} = o$ для любой точки A из $\mathscr{A}$;

2) $P(A, o) = A$ для любой точки A из $\mathscr{A}$;

3) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ для любых точек A и B из $\mathscr{A}$;

4) равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$.

33.3. Доказать, что система точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ аффинного пространства независима тогда и только тогда, когда не существует плоскости размерности, меньшей k, содержащей эту систему точек.

33.4. Доказать, что система точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ аффинного пространства независима тогда и только тогда, когда для произвольной точки O из равенств

$$\lambda_0\overrightarrow{OA}_0+\lambda_1\overrightarrow{OA}_1+\cdots+\lambda_k\overrightarrow{OA}_k=o,$$
$$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_k=0$$

следует, что $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_k=0$.

33.5. Показать, что понятие независимости системы точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ равноправно относительно всех точек этой системы. А именно, если система векторов $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ линейно независима, то линейно независима и любая система $\overrightarrow{A_jA_0}, \ldots, \overrightarrow{A_jA_{j-1}}, \overrightarrow{A_jA_{j+1}}, \ldots$ $\ldots, \overrightarrow{A_jA_k}$, $j=1, 2, \ldots, k$.

33.6. Пусть $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ — плоскости с направляющими подпространствами $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$. Доказать, что:

1) если $\mathscr{M}\subset\mathscr{M}'$, то либо $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ не имеют общих точек, либо $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}'$;

2) если $\mathscr{M}=\mathscr{M}'$, то $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ либо не имеют общих точек, либо совпадают.

33.7. Доказать, что если прямая имеет две различные общие точки с плоскостью, то она принадлежит этой плоскости.

33.8. Доказать, что если k-мерная плоскость $\mathfrak{m}_1$ содержит независимую систему точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$, общих с плоскостью $\mathfrak{m}_2$, то $\mathfrak{m}_1\subset\mathfrak{m}_2$.

33.9. Доказать, что существует ровно одна k-мерная плоскость, содержащая независимую систему точек A_0, $A_1, \ldots, A_k$.

33.10. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — независимая система точек в k-мерной плоскости $\mathfrak{m}$, а O — фиксированная точка аффинного пространства. Доказать, что $\mathfrak{m}$ состоит из тех и только тех точек A, для которых

$$\overrightarrow{OA}=\lambda_0\overrightarrow{OA}_0+\lambda_1\overrightarrow{OA}_1+\cdots+\lambda_k\overrightarrow{OA}_k,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — числа, удовлетворяющие равенству $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$.

33.11. Пусть $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4$ — прямые в аффинном пространстве, причем $\mathfrak{l}_1$ параллельна $\mathfrak{l}_2$, а $\mathfrak{l}_3$ параллельна $\mathfrak{l}_4$. Пусть, далее, $\mathfrak{l}_3$ пересекает $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$ в точках A_1 и B_1 соответственно, а $\mathfrak{l}_4$ пересекает $\mathfrak{l}_1$ в точке A_2. Доказать, что $\mathfrak{l}_4$ пересекает и $\mathfrak{l}_2$ в точке B_2 такой, что $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=$ $=\overrightarrow{A_2B_2}$.

33.12. Доказать, что любые две прямые n-мерного аффинного пространства ($n \geqslant 3$) целиком содержатся в некоторой трехмерной плоскости.

33.13. При каком необходимом и достаточном условии две прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$ содержатся в одной двумерной плоскости?

33.14. Составить уравнения:

1) прямой, проходящей через точки A $(-1, 0, 3, -2)$ и B $(2, 1, 4, 5)$;

2) двумерной плоскости, проходящей через точки A $(-2, 1, 1, 1)$, B $(1, 3, -5, 2)$ и C $(0, 1, 1, 4)$;

3) трехмерной плоскости (гиперплоскости), проходящей через точки A $(1, 1, 0, -1)$, B $(2, -1, 3, 3)$, C $(1, -1, 1, 5)$ и D $(0, 0, 3, -1)$.

33.15. Пусть A $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ и B $(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ — две различные точки, p и q — некоторые числа. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $p : q$.

33.16. Пусть точки A, B, C в n-мерном пространстве не лежат на одной прямой. Доказать, что медианы треугольника ABC проходят через одну точку и делятся в в этой точке в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

33.17. Точка M принадлежит гиперплоскости, заданной уравнением $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_0 = 0$, а вектор $\overrightarrow{MM_1}$ имеет координатный столбец $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$. Доказать, что координаты точки M_1 удовлетворяют неравенству $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_0 > 0$.

33.18. Составить параметрические уравнения плоскости, заданной системой линейных уравнений:

1) $A_{27}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{46}$; 2) $A_{10}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{29}$; 3) $A_{138}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{123}$;
4) $A_{249}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{124}$; 5) $A_{267}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{66}$; 6) $A_{517}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{125}$;
7) $A_{403}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{208}$; 8) $A_{586}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{123}$.

33.19. Составить систему уравнений, определяющую данную плоскость:

1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{28} + t\boldsymbol{c}_{33}$; 2) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{83} + t_1\boldsymbol{c}_{84} + t_2\boldsymbol{c}_{66}$;
3) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{147} + t\boldsymbol{c}_{146}$; 4) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{168} + t\boldsymbol{c}_{207}$;
5) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{199} + t_1\boldsymbol{c}_{166} + t_2\boldsymbol{c}_{200}$.

33.20. Составить уравнение гиперплоскости в четырехмерном пространстве, проходящей через точку M $(-1, 2, 3, 5)$ параллельно гиперплоскости $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5 = 0$.

33.21. Составить уравнение прямой в четырехмерном пространстве, проходящей через точку M $(-1, 3, 4, 0)$

параллельно прямой $x_1 = 2 + 3t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 7t$, $x_4 = 2 - t$.

33.22. Составить уравнения трехмерной плоскости в пятимерном пространстве, проходящей:

1) через точку $M(0, 1, -1, 3, 4)$ параллельно трехмерной плоскости $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_4$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_5$;

2) через точки $M_1(1, 3, 1, 0, 1)$ и $M_2(0, 0, 1, 1, -1)$ параллельно двумерной плоскости $x_1 + x_2 - 1 = 0$, $x_1 - x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_3 - x_5 + 1 = 0$;

3) через точки $M_1(-1, 2, 0, 0, 4)$, $M_2(1, 1, 1, 1, 1)$, $M_3(0, 1, 3, -1, 1)$ параллельно прямой $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = 4$, $x_4 = 1 + t$, $x_5 = -t$.

33.23. Пусть $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ — две плоскости в аффинном пространстве с направляющими подпространствами $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ соответственно, проходящие: $\mathfrak{l}$ — через точку A, $\mathfrak{m}$ — через точку B. Доказать, что:

1) пересечение $\mathfrak{l}$ с $\mathfrak{m}$ непусто тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AB}$ принадлежит подпространству $\mathscr{L} + \mathscr{M}$;

2) если плоскости $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ пересекаются, то пересечение $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m}$ представляет собой плоскость с направляющим подпространством $\mathscr{L} \cap \mathscr{M}$.

33.24. Пусть две плоскости размерностей k_1 и k_2 в n-мерном аффинном пространстве имеют общую точку, и $k_1 + k_2 > n$. Доказать, что размерность пересечения данных плоскостей не меньше, чем $k_1 + k_2 - n$. Дать формулировки этого утверждения для всех возможных случаев при $n = 3$ и $n = 4$.

33.25. Пусть плоскость $\mathfrak{l}$ с направляющим подпространством $\mathscr{L}$ проходит через точку A, плоскость $\mathfrak{m}$ с направляющим подпространством $\mathscr{M}$ проходит через точку B, не совпадающую с A. Доказать, что существует и единственна плоскость наименьшей размерности, содержащая как $\mathfrak{l}$, так и $\mathfrak{m}$; при этом направляющим подпространством искомой плоскости является сумма $\mathscr{L} + \mathscr{M} + \mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — подпространство, натянутое на вектор $\overrightarrow{AB}$.

33.26. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное утверждению в задаче 33.25, для трех плоскостей.

33.27. Составить уравнения заданной плоскости в четырехмерном пространстве:

1) двумерной плоскости, содержащей точку $A(-1, 0, 2, 3)$ и прямую $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 3t$;

2) двумерной плоскости, содержащей параллельные прямые $x_1 = -1 + 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $x_4 = -5 - t$ и $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = -4 + t$, $x_3 = 1$, $x_4 = -t$;

3) трехмерной плоскости, содержащей точку $A(-3, 0, 1, 0)$ и двумерную плоскость $x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 + x_4 = 0$.

33.28. Составить уравнения плоскости наименьшей размерности, содержащей две данные плоскости пятимерного пространства:

1) прямые $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 2 + 3t$, $x_3 = 4t$, $x_4 = -t$, $x_5 = 3$ и $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = -1 + 2t$, $x_5 = 3 - t$;

2) прямую $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = 1 + 2t$, $x_5 = -3t$ и двумерную плоскость $x_1 = t_1 + 3t_2$, $x_2 = -1 + 4t_1 - t_2$, $x_3 = -3 + t_1 + t_2$, $x_4 = 4 - t_1 + t_2$, $x_5 = -2 + t_2$;

3) двумерные плоскости $x_1 - x_3 + x_4 - 1 = 0$, $x_1 + 2x_4 - x_5 - 2 = 0$, $x_2 + x_3 - 2 = 0$ и $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

33.29. 1) Доказать, что если две плоскости в n-мерном пространстве абсолютно скрещиваются, то сумма их размерностей не превосходит $n - 1$.

2) Доказать, что если две плоскости в n-мерном пространстве скрещиваются параллельно r-мерной плоскости, то сумма их размерностей не превосходит $n + r - 1$.

33.30. Исследовать взаимное расположение прямой и двумерной плоскости в четырехмерном пространстве, если двумерная плоскость задается уравнениями $x_1 - 2x_3 + 1 = 0$, $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2 = 0$, а прямая задана параметрически:

1) $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2 + t$, $x_4 = t$;

2) $x_1 = -2 + 3t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = -1 + 2t$, $x_4 = -4 + 4t$;

3) $x_1 = 6 + t$, $x_2 = 5 - t$, $x_3 = 1 + 2t$, $x_4 = 1 + 3t$;

4) $x_1 = -1 + 2t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = t$, $x_4 = 1 - t$.

33.31. Исследовать взаимное расположение двух двумерных плоскостей в пятимерном пространстве, если первая плоскость задается уравнениями $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 + x_4 = x_5$, а вторая—параметрическими уравнениями:

1) $x_1 = 2 + t_1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3 + 2t_2$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5 + t_1 + t_2$;

2) $x_1 = -t_1$, $x_2 = 3 + 2t_1$, $x_3 = 2 + t_1$, $x_4 = 1 + t_1 - t_2$, $x_5 = 2 + t_2$;

3) $x_1 = 2 + t_1 + t_2$, $x_2 = 3 + t_1 + t_2$, $x_3 = 3 + 2t_1 + t_2$, $x_4 = 4 + t_1$, $x_5 = 5 - 2t_2$;

4) $x_1 = t_1 - t_2$, $x_2 = 1$, $x_3 = t_1$, $x_4 = 1 - t_2$, $x_5 = 3 - t_1 + t_2$;

5) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1 + t_1 + t_2$, $x_4 = 2 + 2t_1 - 2t_2$, $x_5 = -5 + 3t_1 - t_2$;

6) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2 + 2t_1 + t_2$, $x_4 = -3 + t_1 - 3t_2$, $x_5 = -1 + 3t_1 - 2t_2$.

33.32. Доказать, что две прямые в четырехмерном пространстве, заданные уравнениями $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{209} + t\boldsymbol{c}_{197}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{210} + t\boldsymbol{c}_{201}$, имеют единственную общую точку. Найти координаты этой точки и составить уравнения двумерной плоскости, содержащей данные прямые.

33.33. Точками аффинного пространства являются многочлены степени не выше 4, векторами являются те же многочлены: $\overrightarrow{p_1(t)\, p_2(t)} = p_2(t) - p_1(t)$. Первая прямая содержит точки $2t^4 - 2t$ и $t^4 + t^3 - t$, вторая прямая содержит точки $5 + 10t^2 + 2t^3$ и $-1 - 2t^2 + 2t^3$. Доказать, что эти прямые имеют единственную общую точку, и найти эту точку (многочлен).

33.34. Составить параметрические уравнения прямой в четырехмерном пространстве, содержащей точку с координатным столбцом $\boldsymbol{c}_{211}$ и пересекающей прямые $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{212} + t\boldsymbol{c}_{202}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{213} + t\boldsymbol{c}_{210}$; найти координаты точек пересечения.

33.35. Система точек $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_j$ независима. Доказать, что существуют непересекающиеся плоскости $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ размерностей $k - 1$ и $j - 1$ соответственно, такие, что плоскость $\mathfrak{l}$ содержит точки $A_1, \ldots, A_k$, а плоскость $\mathfrak{m}$ содержит точки $B_1, \ldots, B_j$.

33.36. Пусть $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ — плоскости аффинного пространства такие, что пространство векторов аффинного пространства является прямой суммой направляющих подпространств $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ этих плоскостей. Доказать, что:

1) проекция любой точки аффинного пространства на плоскость $\mathfrak{l}$ параллельно плоскости $\mathfrak{m}$ определена однозначно;

2) проекция любого вектора $\overrightarrow{AB}$ на плоскость $\mathfrak{l}$ параллельно плоскости $\mathfrak{m}$ является проекцией этого вектора на подпространство $\mathscr{L}$ параллельно подпространству $\mathscr{M}$.

33.37. Найти координаты проекции точки $M(5, 0, -3, 4)$ четырехмерного пространства:

1) на гиперплоскость $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$ параллельно прямой $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 3 + 4t$, $x_3 = 3t$, $x_4 = 1 + t$;

2) на двумерную плоскость $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$, $x_1 + x_2 = x_4$ параллельно двумерной плоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - 2x_4 - 3 = 0$.

33.38. Является ли выпуклым множество точек в n-мерном аффинном пространстве ($n = 1, 2, \ldots$), координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых в декартовой системе координат удовлетворяют условию:

1) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$;
2) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 \geqslant 0$;
3) $\lambda_1x_1^2 + \ldots + \lambda_nx_n^2 \leqslant 1$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$;
4) $\lambda_1x_1^2 + \ldots + \lambda_nx_n^2 \geqslant 1$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$;
5) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$; 6) $x_1x_2 \ldots x_n \geqslant 0$?

33.39. Доказать выпуклость k-мерного параллелепипеда.

33.40. Доказать, что пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

33.41. Найти проекцию четырехмерного симплекса, ограниченного гиперплоскостями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, на гиперплоскость $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ параллельно прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

33.42. Доказать, что все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, называемой центром параллелепипеда.

33.43. Для k-мерного параллелепипеда найти число:

1) различных p-мерных граней;
2) различных диагоналей.

33.44. Определить форму и вершины сечений четырехмерного параллелепипеда $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

§ 34. Точечные евклидовы пространства

В этом параграфе используются следующие основные понятия: *точечное евклидово пространство, расстояние между точками, декартова прямоугольная система координат, ортогональные проекции точки и вектора на плоскость, правильный симплекс, прямоугольный параллелепипед, k-мерный куб, объем k-мерного параллелепипеда, сфера, центр и радиус сферы, расстояние между двумя множествами, угол между вектором и плоскостью, между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями.*

Декартова система координат O, $\boldsymbol{e}$ называется *декартовой прямоугольной системой координат*, если базис $\boldsymbol{e}$ ортонормированный.

Ортогональной проекцией точки A на плоскость $\mathfrak{m}$ с направляющим подпространством $\mathscr{M}$ называется проекция точки A на $\mathfrak{m}$ параллельно

$\mathscr{M}^{\perp}$. Аналогично определяется ортогональная проекция $\overrightarrow{A_1B_1}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на плоскость m.

Правильным симплексом в точечном евклидовом пространстве называется симплекс, у которого длины всех ребер равны между собой. *Параллелепипед* $\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ называется *прямоугольным*, если система векторов $f_1, \ldots, f_k$ ортогональная; k-мерный прямоугольный параллелепипед называется *k-мерным кубом*, если длины всех его ребер равны между собой.

Объем $V(\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k))$ k-мерного параллелепипеда $\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)$ определяется формулой

$$V(\Pi(A_0; f_1, \ldots, f_k)) = \sqrt{\det \Gamma(f_1, \ldots, f_k)},$$

где $\det \Gamma(f_1, \ldots, f_k)$ — определитель матрицы Грама системы векторов $f_1, \ldots, f_k$, на которой построен параллелепипед.

Сферой с центром в точке A_0 и радиусом $R > 0$ точечного евклидова пространства называется множество точек $\{A : |\overrightarrow{A_0A}| = R\}$.

Расстоянием между двумя множествами $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ точечного евклидова пространства называется величина

$$\inf_{A \in \mathscr{M},\, B \in \mathscr{N}} |\overrightarrow{AB}|.$$

Углом между ненулевым вектором и плоскостью m называется угол между этим вектором и направляющим подпространством плоскости m. *Углом между прямой* l *и плоскостью* m называется угол между направляющим вектором прямой l и направляющим подпространством плоскости m.

Углом между двумя плоскостями называется угол между направляющими подпространствами этих плоскостей.

В задачах § 34 координаты векторов задаются в ортонормированном базисе, а координаты точек — в декартовой прямоугольной системе координат.

34.1. Проверить, что расстояние $\rho(A, B)$ между точками A и B в точечном евклидовом пространстве обладает следующими свойствами:

1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ для любых точек A и B;

2) $\rho(A, B) \leqslant \rho(A, C) + \rho(B, C)$ для любых точек A, B, C;

3) для любой точки C такой, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, выполняется равенство $\rho(A, C) = |\lambda|\rho(A, B)$.

34.2. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC, заданного координатами вершин:

1) $A(-1, 0, -1, 2)$, $B(0, 2, 0, 3)$, $C(2, 1, 1, 2)$;

2) $A(1, 2, 2, -1)$, $B(3, 0, 3, -1)$, $C(2, 1, 1, 0)$;

3) $A(0, 1, -1, 2, -1)$, $B(4, 1, 1, 2, 3)$, $C(3, 4, 2, 5, -1)$.

34.3. Выяснить, могут ли в четырехмерном точечном евклидовом пространстве стороны треугольника быть образованы векторами с координатными столбцами a, b, c; если могут, то найти внутренние углы такого треугольника:

1) $\boldsymbol{a} = (3, 1, -2, 2)^T$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{c} = (-2, 0, 3, -1)^T$;

2) $\boldsymbol{a} = (2, -1, 1, -3)^T$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, -1, -2)^T$, $\boldsymbol{c} = (-1, 4, 3, 1)^T$;

3) $\boldsymbol{a} = (0, 1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{b} = (1, -2, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{c} = (-1, 3, 1, -2)^T$;

4) $\boldsymbol{a} = (0, 1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{c} = (1, 3, -1, 2)^T$.

34.4. В точечном евклидовом пространстве многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением $(p, q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)\, q(t)\, dt$ определить внутренние углы треугольника, стороны которого образованы векторами $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$, $p_3(t) = 1 - t$.

34.5. Доказать, что в точечном евклидовом пространстве сумма внутренних углов произвольного треугольника равна $180°$.

34.6. Сформулировать и доказать теорему косинусов для треугольника в точечном евклидовом пространстве.

34.7. Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

34.8. Найти длину диагонали k-мерного прямоугольного параллелепипеда, непараллельные ребра которого имеют длины $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

34.9. Найти угол между диагональю и ребром n-мерного куба.

34.10. Доказать, что множеством точек, равноудаленных от двух заданных различных точек A и B, является гиперплоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку.

34.11. Найти центр и радиус сферы, описанной около четырехмерного симплекса, заданного координатами вершин:

1) $A_0(4, -2, -1, -1)$, $A_1(1, 1, 2, 2)$, $A_2(3, 1, 0, 0)$, $A_3(0, 2, 3, -1)$, $A_4(1, -5, -4, 2)$;

2) $A_0(3, 3, 1, -1)$, $A_1(1, 3, 3, 1)$, $A_2(0, 3, 4, -1)$, $A_3(2, 1, 2, 3)$, $A_4(2, 3, 0, 1)$.

34.12. Гиперплоскость $\mathfrak{m}$ в четырехмерном точечном евклидовом пространстве содержит тетраэдр, заданный координатами своих вершин: $A_1(4, 4, -1, 1)$, $A_2(-2, -8, -5, 1)$, $A_3(3, 3, 1, 3)$, $A_4(1, -2, 4, 1)$. Гиперплоскость $\mathfrak{m}$ рассматривается как трехмерное точечное евклидово пространство. Найти в этом пространстве центр и радиус сферы, описанной около данного тетраэдра.

34.13. Найти объем k-мерного параллелепипеда в четырехмерном пространстве, построенного на системе векторов, заданных координатными столбцами $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$.

1) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (3, 2, -2, 0)^T$;

2) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 2, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (3, 1, 2, 1)^T$;

3) $\boldsymbol{e}_1 = (2, 0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 0, 0, 1)^T$;

4) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 0, 0, 3)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (3, 0, 2, 1)^T$;

5) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 1, -3, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_4 = (1, 0, 0, 2)^T$;

6) $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 2, 0, -3)^T$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 1, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{e}_4 = (1, 1, 1, 1)^T$.

34.14. Пользуясь рекуррентным соотношением, состоящим в том, что объем k-мерного симплекса равен объему его $(k-1)$-мерной грани, умноженному на $1/k$ часть длины высоты, опущенной из вершины, противоположной этой грани, на плоскость грани, доказать, что объем K-мерного симплекса с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_K$ равен $\frac{1}{K!}$ объема параллелепипеда $\Pi(A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_K})$.

34.15. Найти объем симплекса:

1) задачи 34.11, 1);

2) задачи 34.11, 2);

3) задачи 34.12.

34.16. Вычислить объем правильного n-мерного симплекса с длиной ребра, равной a.

34.17. Доказать, что расстояние от точки A до k-мерной плоскости $\mathfrak{m}$ равно:

1) расстоянию между точкой A и ее ортогональной проекцией на $\mathfrak{m}$;

2) длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ (B — произвольная точка из $\mathfrak{m}$) относительно направляющего подпространства плоскости $\mathfrak{m}$.

34.18. Пусть $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ — плоскости с направляющими подпространствами $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ соответственно, проходящие:

$\mathfrak{l}$ — через точку A и $\mathfrak{m}$ — через точку B. Доказать, что расстояние между плоскостями $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ относительно подпространства $\mathscr{L} + \mathscr{M}$.

34.19. Гиперплоскость $\mathfrak{m}$ задана уравнением $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$. Доказать, что:

1) вектор с координатным столбцом $(a_1, \ldots, a_n)^T$ ортогонален $\mathfrak{m}$;

2) расстояние от точки A $(y_1, \ldots, y_n)$ до $\mathfrak{m}$ равно

$$|a_1y_1 + \cdots + a_ny_n + a_0|/\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

34.20. Точка A задана координатами, гиперплоскость $\mathfrak{m}$ — уравнением. Найти расстояние от A до $\mathfrak{m}$, если:

1) A $(9, 2, -3, 1)$, $\mathfrak{m}$: $3x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 3 = 0$;

2) A $(1, -3, 0, -2, 4)$, $\mathfrak{m}$: $2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 - 7 = 0$.

34.21. Составить уравнение гиперплоскости, параллельной гиперплоскости $\mathfrak{m}$ и расположенной от $\mathfrak{m}$ на заданном расстоянии d, если:

1) $\mathfrak{m}$: $5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 3$, $d = 2$;

2) $\mathfrak{m}$: $x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$, $d = 5$;

3) $\mathfrak{m}$: $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -5$, $d = 3$;

34.22. Найти ортогональную проекцию точки A на гиперплоскость $\mathfrak{m}$:

1) A $(7, -1, 6, 1)$, $\mathfrak{m}$: $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$;

2) A $(1, 2, 8, -2)$, $\mathfrak{m}$: $2x_1 - 2x_3 + x_4 = 11$;

3) A $(3, 0, -1, 2, 6)$, $\mathfrak{m}$: $5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -16$.

34.23. Точки A и B заданы своими координатами. Найти ортогональную проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на гиперплоскость $\mathfrak{m}$, если:

1) A $(-3, 0, 1, 3)$, B $(5, 2, 2, 3)$, $\mathfrak{m}$: $2x_1 + x_2 - x_4 = 3$;

2) A $(3, 3, -8, -3, 4)$, B $(3, 2, -1, -2, 2)$, $\mathfrak{m}$: $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 5$.

34.24. Найти отношение длины ортогональной проекции произвольного ребра n-мерного куба на его диагональ к длине диагонали.

34.25. Найти точку, ортогонально симметричную точке A относительно гиперплоскости $\mathfrak{m}$:

1) A $(5, 5, 3, 3)$, $\mathfrak{m}$: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2 = 0$;

2) A $(3, 5, -3, 5)$, $\mathfrak{m}$: $x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 2 = 0$;

3) A $(3, 6, 3, 8, 1)$, $\mathfrak{m}$: $x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3 = 0$.

34.26. Найти ортогональную проекцию точки A на прямую l:

1) $A\ (1,\ -5,\ 2,\ 0)$; l: $x_1 = 4 + t,\ x_2 = 3 + 2t,\ x_3 = -3 - t,\ x_4 = 7 + 3t$;

2) $A\ (-2,\ 1,\ 4,\ 2)$; l: $x_1 = -3 + 2t,\ x_2 = 3 - t,\ x_3 = -1 + t,\ x_4 = -3 + t$;

3) $A\ (2,\ 4,\ 3,\ -1,\ 1)$; l: $x_1 = 2 - 2t,\ x_2 = -1 + 3t,\ x_3 = -1 + 2t,\ x_4 = 2 + t,\ x_5 = -t$.

34.27. Точка A не принадлежит плоскости m. Доказать, что существует единственная прямая, проходящая через точку A, пересекающая m и перпендикулярная к m.

34.28. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l:

1) $A\ (1,\ -3,\ -2,\ 4)$; l: $x_1 = 4 + 3t,\ x_2 = 2 + t,\ x_3 = 3 + t,\ x_4 = -1 - t$;

2) $A\ (1,\ -3,\ -1,\ 3)$; l: $x_1 = 2 + t,\ x_2 = 1 - 2t,\ x_3 = -1 + 2t,\ x_4 = t$;

3) $A\ (4,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$; l: $x_1 = t,\ x_2 = 3 - 2t,\ x_3 = -2 + t,\ x_4 = -3 + 2t,\ x_5 = t$.

34.29. Найти точку, ортогонально симметричную точке A относительно прямой l:

1) $A\ (4,\ 1,\ -1,\ -1)$, l — прямая задачи 34.26, 1);

2) $A\ (2,\ 5,\ -3,\ -2)$, l — прямая задачи 34.26, 2).

34.30. Найти угол между вектором, заданным координатным столбцом $\boldsymbol{a}$, и гиперплоскостью m, если:

1) $\boldsymbol{a} = (0,\ 1,\ 0,\ 1)^T$, m: $3x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2$;

2) $\boldsymbol{a} = (1,\ -1,\ 1,\ 1)^T$, m: $3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5$;

3) $\boldsymbol{a} = (1,\ -3,\ 2,\ -1,\ -1)^T$, m: $x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 1$.

34.31. Найти угол между прямыми l_1 и l_2, если:

1) l_1: $x_1 = 4 + t,\ x_2 = -2t,\ x_3 = 1 - t,\ x_4 = 2$; l_2: $x_1 = 3,\ x_2 = t,\ x_3 = 5 + t,\ x_4 = -1$;

2) l_1: $x_1 = 1 + t,\ x_2 = 2 + t,\ x_3 = 3 + t,\ x_4 = 2t,\ x_5 = 1 - t$; l_2: $x_1 = t,\ x_2 = 5,\ x_3 = -1 + t,\ x_4 = 3 - 2t,\ x_5 = 2t$.

34.32. Найти расстояние от точки A до прямой l:

1) $A\ (0,\ 3,\ 2,\ -5)$; l: $x_1 = 1 + t,\ x_2 = -t,\ x_3 = 2 + 2t,\ x_4 = -2 + 2t$;

2) $A\ (2,\ -2,\ 1,\ 5)$; l: $x_1 = 3 + t,\ x_2 = -1 + t,\ x_3 = 2 + t,\ x_4 = -t$;

3) $A\ (3,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0)$; l: $x_1 = 2 + 3t,\ x_2 = 1 + 2t,\ x_3 = -t,\ x_4 = 1 + t,\ x_5 = -1 - t$;

4) $A\ (1,\ -1,\ -1,\ 1)$; l: $x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0,\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0$.

34.33. Прямая l_1 с направляющим вектором a_1 проходит через точку A_1, прямая l_2 с направляющим вектором a_2 проходит через точку A_2. Доказать, что:

1) если a_1 и a_2 не коллинеарны, то квадрат расстояния между l_1 и l_2 равен $\det \Gamma(\overrightarrow{A_1A_2},\ a_1,\ a_2)/\det \Gamma(a_1,\ a_2)$;

2) если a_1 и a_2 коллинеарны, то квадрат расстояния между l_1 и l_2 равен $\det \Gamma(\overrightarrow{A_1A_2},\ a_1)/|a_1|^2$.

34.34. Найти расстояние между прямыми l_1 и l_2:

1) l_1: $x_1 = 1 + t,\ x_2 = -1,\ x_3 = -t,\ x_4 = -2 + t$; l_2: $x_1 = 4 + t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = 1 + t,\ x_4 = t$;

2) l_1: $x_1 = 2 + t,\ x_2 = -1 - 2t,\ x_3 = 2 + 2t,\ x_4 = 1 - t$; l_2: $x_1 = 3 - t,\ x_2 = 1 + 2t,\ x_3 = -1 - 2t,\ x_4 = 2 + t$;

3) l_1: $x_1 = 3 + t,\ x_2 = 2,\ x_3 = t,\ x_4 = 3 + t,\ x_5 = -t$; l_2: $x_1 = 1 + 2t,\ x_2 = 2t,\ x_3 = 1 - t,\ x_4 = t,\ x_5 = 2$;

4) l_1: $x_1 = 1 + t,\ x_2 = -2t,\ x_3 = 1 - t,\ x_4 = -1 + t,\ x_5 = t$; l_2: $x_1 = 3 + t,\ x_2 = -2t,\ x_3 = -1 - t,\ x_4 = 1 + t,\ x_5 = 2 + t$;

5) l_1: $x_1 = 1 - 2t,\ x_2 = 0,\ x_3 = t,\ x_4 = 1 + t,\ x_5 = 2$; l_2: $x_1 = -1 + t,\ x_2 = -1 + t,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = -2 - t$.

34.35. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость m, если:

1) $A\,(3,\ 7,\ -2,\ 1)$; m: $x_1 = 2 + t_1,\ x_2 = 2 + t_2,\ x_3 = t_1 + t_2,\ x_4 = -t_2$;

2) $A\,(-3,\ -1,\ 4,\ 7,\ -3)$; m: $x_1 = t_1 + t_3,\ x_2 = 2 + t_2 + t_3,\ x_3 = 2 + t_1,\ x_4 = 1 + t_2 + t_3,\ x_5 = 1 + t_2$.

34.36. Найти ортогональную проекцию точки A на плоскость m, если:

1) $A\,(-3,\ 2,\ 2,\ -2)$; m: $x_1 = 2 + t_1 + t_2,\ x_2 = 4 + 2t_1,\ x_3 = t_1,\ x_4 = -t_2$;

2) $A\,(3,\ 2,\ 1,\ 4,\ -1)$; m: $x_1 = 1 + t_1,\ x_2 = -1 + t_2,\ x_3 = 2 + t_1 + t_2,\ x_4 = -2 - t_1,\ x_5 = t_2$;

3) $A\,(0,\ -1,\ 5,\ 1,\ -2)$; m: $x_1 = 1 + t_1,\ x_2 = t_3,\ x_3 = 1 + t_1 + t_2,\ x_4 = -2 + t_3,\ x_5 = -1 + t_2$.

34.37. Найти точку, ортогонально симметричную точке A относительно плоскости m, если:

1) $A\,(5,\ 3,\ -1,\ -1)$; m: $x_1 = 1 + t_1,\ x_2 = t_2,\ x_3 = -2 + t_2,\ x_4 = -1 + t_1$;

2) $A\,(3,\ 5,\ 0,\ 2,\ 2)$; m: $x_1 = t_1,\ x_2 = 2 + t_2,\ x_3 = -3 + t_1,\ x_4 = 3 - t_1 - t_2,\ x_5 = 1$.

34.38. Пусть m — плоскость с направляющим подпространством $\mathscr{M}$, проходящая через точку A_0, а $f_1,\ \ldots$

..., f_k — базис в $\mathscr{M}$. Доказать, что квадрат расстояния от точки A_1 до плоскости $\mathfrak{m}$ равен

$$\det \Gamma(\overrightarrow{A_0A_1}, f_1, \ldots, f_k)/\det \Gamma(f_1, \ldots, f_k).$$

34.39. Найти расстояние от точки A до плоскости $\mathfrak{m}$:
1) в задаче 34.35, 1);
2) в задаче 34.35, 2).

34.40. Найти расстояние от точки A до плоскости $\mathfrak{m}$, заданной параметрически, если:
1) $A(1, 2, 1, 1)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 = -2t_1 + 4t_2$, $x_2 = -1 + t_1 - t_2$, $x_3 = -t_3$, $x_4 = t_1 - t_2$;
2) $A(3, 1, 1, 0)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 = -2 + t_1$, $x_2 = -t_1 + 2t_2$, $x_3 = t_1 - t_2$, $x_4 = 1 - t_1 - t_2$;
3) $A(1, 2, 1, 3, 0)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 = 1 + t_1$, $x_2 = -t_1 + t_2$, $x_3 = 1 + t_2$, $x_4 = -1 - t_2$, $x_5 = t_1$.

34.41. Найти расстояние от точки A до плоскости $\mathfrak{m}$, заданной системой линейных уравнений, если:
1) $A(1, 0, 0, 1)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 7$, $x_1 - 2x_3 + 2x_4 = -6$;
2) $A(1, 2, 0, 0)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1$, $2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2$, $2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0$.

34.42. Точки A и B заданы своими координатами. Найти угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и плоскостью $\mathfrak{m}$, если:
1) $A(1, 2, 2, 3)$, $B(4, 0, 0, 2)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 = 1 + t_1$, $x_2 = 2 + t_2$, $x_3 = -t_1 + t_2$, $x_4 = 3$;
2) $A(0, 1, -1, 0, 1)$, $B(3, 1, 0, 1, 2)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 = t_1 + t_2$, $x_2 = 5$, $x_3 = -t_2$, $x_4 = -t_1 + t_2$, $x_5 = 2 + t_1$;
3) $A(-1, -1, 1, 0, 1)$, $B(2, 1, 1, 1, 0)$; $\mathfrak{m}$: $x_1 = t_1 + t_3$, $x_2 = 2 + t_2$, $x_3 = 1 - t_2$, $x_4 = -t_1 + t_3$, $x_5 = -2t_3$.

34.43. Плоскости $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ из n-мерного точечного евклидова пространства с направляющими подпространствами $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ соответственно проходят: $\mathfrak{l}$ — через точку A, $\mathfrak{m}$ — через точку B. Пусть $g_1, \ldots, g_k$ — базис в подпространстве $\mathscr{L} + \mathscr{M}$. Доказать, что квадрат расстояния между плоскостями $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$ равен

$$\det \Gamma(\overrightarrow{AB}, g_1, \ldots, g_k)/\det \Gamma(g_1, \ldots, g_k).$$

34.44. Найти расстояние между плоскостями $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{m}$:
1) $\mathfrak{l}$: $x_1 = 2 - 2t$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 0$; $\mathfrak{m}$: $x_1 = 1 - 2t_1$, $x_2 = 1 + 2t_1 + 3t_2$, $x_3 = 1 + t_1$, $x_4 = 1 + 2t_1 + 2t_2$;

2) l: $x_1 = 3 + t_1 + 2t_2$, $x_2 = -t_1$, $x_3 = 1 + t_1 - t_2$, $x_4 = -t_1 - t_2$; m: $x_1 = 2t_1 + t_2$, $x_2 = 1 - 3t_1 + t_2$, $x_3 = -8 - t_2$, $x_4 = 1 + t_1 - t_2$;

3) l: $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = 1$, $x_4 = t$, $x_5 = 0$; m: $x_1 = 0$, $x_2 = 1 + t_1 + t_2$, $x_3 = 3 + 2t_2$, $x_4 = 2t_1$, $x_5 = 1 + t_1 - t_2$;

4) l: $x_1 = 1 + t_2$, $x_2 = t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_1$, $x_5 = 2t_1$; m: $x_1 = t_2 + 2t_3$, $x_2 = 2 + t_1 + 2t_3$, $x_3 = x_4 = 1 + t_1 - t_2 + t_3$, $x_5 = 2 + t_1 - t_2 + 2t_3$;

5) l: $2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$, $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 8$; m: $x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2$, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$;

6) l: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$, $2x_1 + x_2 - x_4 = 4$; m: $x_1 + x_2 + x_3 = -1$, $x_1 + x_3 + x_4 = 1$, $2x_1 - x_2 - x_4 = 0$.

34.45. В n-мерном аффинном пространстве плоскости m_1 и m_2 размерностей k_1 и k_2 соответственно абсолютно скрещиваются. Доказать, что:

1) существует единственная плоскость размерности $n - k_1 - k_2$, ортогональная к m_1 и к m_2 и пересекающая каждую из этих плоскостей;

2) существует единственная прямая, ортогональная к m_1 и к m_2 и пересекающая каждую из этих плоскостей.

34.46. Найти уравнения плоскости максимальной размерности, ортогональной к заданным плоскостям m_1 и m_2 и пересекающей каждую из этих плоскостей, а также уравнения общего перпендикуляра к m_1 и m_2, если:

1) m_1 и m_2 — прямые в задаче 34.34, 1);

2) m_1 и m_2 — прямые в задаче 34.34, 3);

3) m_1 и m_2 — плоскости в задаче 34.44, 3).

34.47. Найти угол между плоскостями m_1: $x_1 = 2 + t_1 + t_2$, $x_2 = x_3 = t_1$, $x_4 = -1 + t_1 - t_2$ и m_2: $x_1 = t_1 + 2t_2$, $x_2 = 3 + t_2$, $x_3 = 2 - t_1 - 2t_2$, $x_4 = -t_2$.

34.48. В правильном пятимерном симплексе $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ найти угол:

1) между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4$;

2) между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4A_5$;

3) между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_1A_2A_3A_4A_5$.

ГЛАВА XIV

ТЕНЗОРЫ

В § 35 используются следующие основные понятия: *инвариант*, *тензор типа* (p, q) (*p раз контравариантный, q раз ковариантный, $(p+q)$-валентный тензор*), *ковектор*, *компоненты тензора*, *матрица из компонент тензора*, *закон преобразования компонент тензора при замене базиса*.

Линейное n-мерное пространство обозначается через $\mathscr{L}_n$. Всюду в этой главе предполагается, что пространство $\mathscr{L}_n$ вещественное. Тензор обозначается одной буквой, его компоненты — той же буквой с индексами. Например, компоненты тензора a типа (2, 1) обозначаются через a_k^{ij} (предполагается, что индексы i, j, k принимают всевозможные натуральные значения от 1 до n, где n — размерность пространства). Через a_k^{ij} можно обозначать и сам тензор.

Нижние и верхние индексы называются также *ковариантными* и *контравариантными* соответственно.

Для элементов матрицы S перехода от одного базиса к другому принято стандартное обозначение σ_j^i (i — номер строки, j — номер столбца). Через τ_j^i обозначаются элементы матрицы T, обратной к S. Компоненты тензора типа (2, 1) при переходе к новому базису изменяются по формуле

$$a_l'^{rs} = a_k^{ij}\tau_i^r\tau_j^s\sigma_l^k.$$

В правой части равенства предполагается суммирование по индексам i, j, k. Все индексы пробегают натуральные значения от 1 до n. Аналогичный вид имеет закон преобразования компонент произвольного тензора. Говорят, что *нижние индексы преобразуются с помощью элементов матрицы перехода S, а верхние — с помощью элементов обратной матрицы.*

Тензоры, все компоненты которых равны 0, называются *нулевыми*. В некоторых задачах употребляется тензор типа (1, 1), называемый *символом Кронекера*. Его компоненты во всех базисах определяются формулой

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

В тех случаях, когда нужно выписать все компоненты какого-либо тензора, мы пользуемся матричной записью. Скажем о ней подробнее.

Предварительно все индексы тензора упорядочим следующим образом: сначала все верхние индексы слева направо, затем все нижние индексы слева направо*). Упорядочив индексы, мы можем совокупность компонент двухвалентного тензора записать в виде квадратной матрицы порядка n; при этом первый индекс компоненты полагаем равным номеру строки, второй — номеру столбца.

Аналогично, совокупность компонент трехвалентного тензора можно расположить в виде *трехмерной матрицы* n-го порядка. Чтобы записать трехмерную матрицу, поступаем следующим образом. Зафиксировав какое-либо значение k третьего индекса, мы получаем *двумерный слой* или *двумерное сечение* трехмерной матрицы —квадратную матрицу A_k порядка n. В матрице A_k компоненты данного тензора расположены так, что значение первого индекса компоненты равно номеру строки, второго — номеру столбца, а третий индекс равен k. Теперь все компоненты данного тензора можно записать в виде (плоской) прямоугольной матрицы $A = \| A_1 A_2 \ \ldots \ A_n \|^{\square}$**) размеров $n \times n^2$, образованной из элементов блоков A_k. Матрицу A также условно называем трехмерной матрицей. Например, при $n = 2$ компоненты тензора a^i_{jk} образуют «трехмерную матрицу второго порядка»

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} a^1_{11} & a^1_{21} & a^1_{12} & a^1_{22} \\ a^2_{11} & a^2_{21} & a^2_{12} & a^2_{22} \end{array} \right\|,$$

содержащую два двумерных слоя.

Компоненты четырехвалентного тензора в $\mathscr{L}_n$ образуют *четырехмерную матрицу* порядка n. Зафиксировав какие-либо значения k, l двух последних индексов, мы получаем квадратную матрицу A_{kl} порядка n — *двумерное сечение четырехмерной матрицы*. В матрице A_{kl} компоненты данного тензора расположены так, что значение первого индекса компоненты совпадает с номером строки, значение второго — с номером столбца, а третий и четвертый индексы равны соответственно k и l. Теперь все компоненты данного тензора можно записать в виде плоской квадратной матрицы $A = \| A_{kl} \|^{\square}$ порядка n^2, образованной из элементов блоков A_{kl}. Матрица A также может быть названа условно

---

*) Для некоторых тензоров в евклидовом пространстве употребляется другой способ упорядочивания индексов. О нем сказано ниже, в комментарии к § 37. Описание матричной записи компонент тензора относится к любым тензорам, у которых все индексы как-то упорядочены.

**) Значок$^{\square}$ показывает, что элементы матрицы — числа, а не матрицы, — см. введение к гл. VI.

четырехмерной матрицей. Например, при $n = 2$ тензору a_{ijkl} соответствует «четырехмерная матрица второго порядка»

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} a_{1111} & a_{1211} & a_{1112} & a_{1212} \\ a_{2111} & a_{2211} & a_{2112} & a_{2212} \\ \hline a_{1121} & a_{1221} & a_{1122} & a_{1222} \\ a_{2121} & a_{2221} & a_{2122} & a_{2222} \end{array} \right\|,$$

содержащая четыре двумерных слоя.

В § 36 рассматриваются следующие *тензорные операции: сложение тензоров, умножение на число, умножение тензоров, свертывание по одному верхнему и одному нижнему индексу, свертывание двух тензоров, транспонирование, симметрирование и альтернирование тензора по некоторому множеству нижних или верхних индексов.*

Вообще говоря, тензор, полученный в результате некоторой алгебраической операции, обозначается новой буквой. Так, тензор, полученный транспонированием тензора a_{ij}, можно обозначить b_{ij}; при этом для всех компонент выполнено равенство $b_{ij} = a_{ji}$. Операция симметрирования обозначается заключением в круглые скобки тех индексов тензора, по которым производится симметрирование. Если внутри скобок оказались индексы, по которым симметрирования нет, эти индексы выделяются прямыми чертами. Например, тензор $b_{ijkl} = a_{(i|j|k)l}$ получается из a_{ijkl} симметрированием по индексам i, k. Аналогичное замечание можно сделать об операции альтернирования, обозначаемой с помощью заключения в квадратные скобки индексов, по которым производится альтернирование. Умножение тензоров обозначается значком $\otimes$ или точкой. Умножение тензоров не коммутативно. Так, если a_{ij} и b_{kl} — компоненты тензоров a и b, то можно записать $a \otimes b = c$, $b \otimes a = d$; при этом $c_{ijkl} = a_{ij} \cdot b_{kl}$, $d_{ijkl} = b_{ij} \cdot a_{kl}$. Тензоры c, d получаются один из другого транспонированием.

В § 37 рассматриваются тензоры в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{E}_n$. В $\mathscr{E}_n$ определен *метрический тензор* g. Его компоненты в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ определяются через скалярные произведения базисных векторов формулой $g_{ij} = (e_i, e_j)$. Тензор g — симметричный типа (0, 2); его компоненты образуют в каждом базисе матрицу Грама Γ этого базиса. Матрица Γ^{-1} определяет симметричный тензор g^* типа (2, 0) — *контравариантный метрический тензор* пространства $\mathscr{E}_n$. Его компоненты обозначаются через g^{ij}. Имеют место формулы: $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$, $g_{ik} g^{kj} = \delta^j_i$. В ортонормированном базисе компоненты тензоров g_{ik} и g^{ik} образуют единичные матрицы.

В евклидовом пространстве определены *операции поднятия и опускания индекса.* Для того чтобы у тензора можно было опустить индекс, необходимо, чтобы данный тензор имел хотя бы один верхний индекс. В результате опускания индекса из тензора a получается новый тензор, у которого число нижних индексов увеличено на 1, а число верхних индексов уменьшено на 1 по сравнению с a. Новый тензор во всех ортонормированных базисах имеет те же компоненты, что и старый. Перечисленные требования однозначно определяют операцию опускания индекса. В неортонормированном базисе компоненты старого и нового тензоров уже не совпадают. Аналогично определяется операция поднятия индекса.

Тензор, полученный из данного тензора в результате поднятия или опускания индекса, обозначается той же буквой, но с иным расположением индексов. Если некоторый верхний индекс появился взамен нижнего, то на месте исчезнувшего индекса оставляется пропуск или ставится точка, а вновь появившийся верхний индекс ставится над ней. Порядок перечисления индексов в преобразованном тензоре должен остаться тем же, что и в исходном, т. е. при упорядочивании индексов вновь появившийся верхний индекс занимает место исчезнувшего нижнего. При этом обычное правило порядка (все верхние индексы раньше всех нижних) может быть нарушено. Точки отмечают места нарушения.

Для того чтобы опустить индекс у тензора a, заданного своими компонентами в произвольном базисе, можно вычислить свертку произведения $a \otimes g$ или $g \otimes a$ и, при необходимости, изменить порядок индексов в полученном тензоре (транспонировать его матрицу). Аналогично, с помощью тензорных произведений $a \otimes g^*$ и $g^* \otimes a$ осуществляется подъем индекса.

Поясним сказанное примерами.

1. Опускание индекса у тензора a^i_j. В результате опускания индекса должен получиться тензор типа (0, 2). Обычный порядок индексов у тензоров a^i_j и a_{ij} совпадает, поэтому опускание индекса у тензора a^i_j приводит к тензору $a_{ij} = g_{ik}a^k_j$.

2. Подъем первого индекса у тензора a_{ij} аналогичен:

$$a^i_j = g^{ik}a_{kj} = a_{kj}g^{ki}.$$

3. Поднимем второй индекс у тензора a_{ij}, т. е. вычислим тензор $a_i^{\cdot j}$. Вычисляя компоненты свертки $a_{ik}g^{jk} = b^j_i$ по обычным правилам, индекс j считаем первым, i — вторым. В тензоре $a_i^{\cdot j}$ индекс i — первый, j — второй (при тех же значениях компонент). Матрица тензора $a_i^{\cdot j}$ транспонирована по отношению к матрице тензора b^j_i.

4. Аналогично, тензор $a^{i\cdot k}_{\ j}$ может быть вычислен как свертка $a^{ilk}g_{lj}$, но при записи его матрицы порядок индексов должен быть таким: i, j, k.

В некоторых задачах используются понятие *ориентации n-мерного евклидова* пространства и *дискриминантный тензор*. Приведем их определения. Все базисы пространства $\mathscr{E}_n$ могут быть разделены на два класса так, что детерминант матрицы перехода от любого базиса из одного класса к базису из другого класса отрицателен, а детерминант матрицы перехода, связывающей два базиса из одного класса, *положителен*. В пространстве $\mathscr{E}_n$ *задана ориентация*, если выбран один из двух классов базисов. По аналогии с трехмерным случаем базисы этого класса можно называть правыми, а базисы другого класса — левыми. Ориентацию пространства можно задать, например, выбрав один какой-нибудь базис в качестве представителя правых базисов. Если ориентация выбрана, пространство называется ориентированным.

Дискриминантный тензор в ориентированном евклидовом пространстве определяется как тензор типа $(0, n)$, имеющий в некотором правом ортонормированном базисе координаты

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & \text{если среди значений индексов есть равные,} \\ (-1)^{N(i_1 \dots i_n)}, & \text{если значения индексов попарно различны.} \end{cases}$$

Через $N(i_1 \dots i_n)$ обозначено число нарушений порядка в перестановке $(i_1, \dots, i_n)$. Пользуясь законом преобразования компонент, мы можем найти компоненты дискриминантного тензора в любом базисе. В частности, его компоненты в любом правом ортонормированном базисе те же, что и в исходном.

В § 38 используются следующие понятия: *поливектор* (*p-вектор*), *внешняя форма степени q* (*q-форма*), *простой* (*разложимый*) *поливектор*, *разложимая внешняя форма*. Теоремы и определения, касающиеся поливекторов, совершенно аналогичны теоремам и определениям, касающимся внешних форм. Поэтому задачи, сформулированные для поливекторов, могут быть поставлены и для внешних форм, и наоборот.

Под *внешним произведением* поливекторов (и внешних форм) понимается их альтернированное по всем индексам тензорное произведение. Оно обозначается $u \wedge v$. Разложимый p-вектор представим в виде $u = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$, где $x_1, \dots, x_p$ — векторы.

Внешнее произведение линейно по каждому сомножителю. В силу этого для данного p-вектора u множество таких векторов x, для которых $u \wedge x = o$, является линейным пространством $\mathscr{L}$. Говорят, что подпространство $\mathscr{L}$ определяется (или порождается) p-вектором u.

В задачах этого параграфа мы, если не оговорено противное, задаем поливекторы (и внешние формы) с помощью их существенных компонент — тех компонент $u^{i_1 \dots i_p}$, для которых значения индексов удовлетворяют условию $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ (остальные компоненты поливектора u определяются по существенным с помощью условий антисимметрии). Существенные компоненты мы будем располагать в столбец или строку в лексикографическом порядке: компонента $u^{i_1 \dots i_p}$ располагается перед $u^{j_1 \dots j_p}$, если для некоторого $s \geqslant 1$ выполнено $i_1 = j_1, \dots, i_{s-1} = j_{s-1}, i_s < j_s$. Например, бивектору (2-вектору) в $\mathscr{L}_4$

соответствует столбец существенных компонент $(u^{12}, u^{13}, u^{14}, u^{23}, u^{24}, u^{34})^T$, а 3-форме в $\mathscr{L}_4$ соответствует строка $(f_{123}, f_{124}, f_{134}, f_{234})$.

Под *значением q-формы* $\mathfrak{f}$ *на системе q векторов* $x_1, \ldots, x_q$ понимается свертка произведения $\mathfrak{f} \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_q$. В частности, 2-форма определяет билинейную функцию, матрица которой в любом базисе кососимметрична:

$$\varphi_{ij}\xi_1^i\xi_2^j = \xi_1^T F \xi_2, \qquad F^T = -F.$$

Матрица F называется матрицей 2-формы в рассматриваемом базисе.

§ 35. Определение тензора, инварианта. Тензорные обозначения, пространственные матрицы

35.1. Пусть ξ^1, ξ^2 и η^1, η^2 — координаты векторов x и y в произвольном базисе двумерного линейного пространства. Сопоставим этому базису числа:

1) $\xi^1 + \xi^2$; 2) $\xi^1 + \eta^1$; 3) $\begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix}$.

Как изменяются эти числа при замене базиса? Проверьте, является ли каждая из данных величин тензором, инвариантом.

35.2. Сопоставим каждому базису в линейном пространстве $\mathscr{L}_n$:

1) число 1; 2) упорядоченный набор чисел $1, \ldots, n$. Будет ли данное соответствие тензором? Инвариантом?

35.3. Пусть φ — линейное преобразование линейного пространства $\mathscr{L}_3$. Обозначим через $A = \|a_{ij}\|$ его матрицу в произвольном базисе и сопоставим этому базису число:

1) $\det A$; 2) $\cos \det A$; 3) $\operatorname{rg} A$;

4) $\det A^TA$; 5) $a_{11} + a_{22}$; 6) $a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

Как изменяется каждая из этих величин при замене базиса? В каких случаях она определяет тензор? Инвариант?

35.4. Пусть $\mathfrak{b}$ — билинейная функция, $B = \|b_{ij}\|$ — ее матрица в произвольном базисе пространства $\mathscr{L}_n$. Сопоставим этому базису число:

1) $\det B$; 2) $b_{11} + \ldots + b_{nn}$; 3) b_{11};

4) $\det B^TB$; 5) $\operatorname{rg} B$; 6) $\operatorname{sign} \det B$.

Как изменяется каждая из этих величин при замене базиса? В каких случаях она определяет тензор? Ивариант?

35.5. Пусть $\mathfrak{f}$ — линейная функция на линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ и $(a_1, \ldots, a_n)$ — строка ее коэффициентов в произвольном базисе. Сопоставим этому базису:

1) число $a_1 + \ldots + a_n$;

2) упорядоченный набор чисел $a_1, \dots, a_n$.

Как изменяются данные величины при замене базиса? Какие из них являются тензорами? Инвариантами?

35.6. 1) Какого типа тензор в $\mathscr{L}_n$ определяет билинейная функция? Как найти компоненты этого тензора?

2) Какого типа тензор в $\mathscr{L}_n$ определяет квадратичная функция? Как найти компоненты этого тензора?

35.7. Линейные функции f, g имеют в базисе $\boldsymbol{e}$ пространства $\mathscr{L}_n$ коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$, соответственно. Показать, что функции:

1) f^2; 2) fg

определяют тензоры в $\mathscr{L}_n$, указать их типы и выписать для каждого компоненты в базисе $\boldsymbol{e}$.

35.8. Линейные функции f, g имеют в базисе $\boldsymbol{e}$ пространства $\mathscr{L}_n$ коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ соответственно. Сопоставим каждой паре векторов x, y из $\mathscr{L}_n$ число:

1) $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(y)$; 2) $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y)$.

Показать, что каждая из полученных функций определяет тензор в $\mathscr{L}_n$, указать его тип и выписать компоненты в базисе $\boldsymbol{e}$.

35.9. Каждой паре векторов x, y линейного пространства $\mathscr{L}_n$ $(n \geqslant 3)$ сопоставлено число $\mathrm{f}(x, y)$, определяемое через компоненты $\xi^1, \dots, \xi^n$ и $\eta^1, \dots, \eta^n$ этих векторов, заданные в базисе $\boldsymbol{e}$, одной из следующих формул:

1) $\mathrm{f}(x, y) = \xi^1\eta^3$; 2) $\mathrm{f}(x, y) = \sum\limits_{1}^{n} \xi^i\eta^i$.

Указать тип соответствующего тензора и выписать его компоненты в базисе $\boldsymbol{e}$.

35.10. Функция $\mathrm{f}\colon \mathscr{L}_n \to \mathbb{R}$ $(n \geqslant 2)$ определяется через компоненты $\xi^1, \dots, \xi^n$ вектора x, заданные в базисе $\boldsymbol{e}$, одной из формул:

1) $f(x) = \xi^1 + \xi^2$; 2) $f(x) = (\xi^1)^2 + 2\xi^1\xi^2$;

3) $f(x) = (\xi^1 + \dots + \xi^n)^2$; 4) $f(x) = \sum\limits_{1}^{n} (\xi^i)^2$.

Указать тип соответствующего тензора и выписать его компоненты в базисе $\boldsymbol{e}$.

35.11. Пусть $\mathscr{L}_n^*$ — пространство всех линейных функций, определенных на линейном пространстве $\mathscr{L}_n$, а $\varphi\colon \mathscr{L}_n^* \to \mathbb{R}$ — линейная функция на $\mathscr{L}_n^*$. Показать, что φ определяет тензор типа (1, 0) на $\mathscr{L}_n$.

35.12. Даны тензоры a_{ij}, a^i_j, ξ^i, η^i, b_i. Величины c, d, g, h определены в каждом базисе формулами:

1) $c = a_{ij}\xi^i\eta^j$; 2) $d = a_{ij}\xi^i\xi^j$;

3) $g = a^i_j b_i \xi^j$; 4) $h = b_i\xi^i$.

Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать непосредственно, что эти величины являются инвариантами.

35.13. Даны тензоры a^i_j, ξ^i, b_i. Величины c^i, d_i определены в каждом базисе формулами $c^i = a^i_j\xi^j$ и $d_i = a^j_i b_j$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензоров, показать, что c^i есть вектор, а d_i — ковектор.

35.14. Тензор типа (1, 1) имеет в некотором базисе компоненты

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Изменяются ли его компоненты при переходе к другому базису? Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

35.15. Тензор типа (0, 2) имеет в некотором базисе компоненты

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Как изменятся его компоненты при переходе к другому базису? Какая билинейная функция соответствует этому тензору?

35.16. Тензор типа (1, 0) имеет в некотором базисе компоненты

$$\theta^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_0; \\ 0, & \text{если } i \neq i_0 \end{cases}$$

(i_0 — фиксированное целое число, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$). Найти компоненты данного тензора в базисе $e' = eS$.

35.17. Тензор типа (0, 1) имеет в некотором базисе компоненты

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_0; \\ 0, & \text{если } i \neq i_0 \end{cases}$$

(i_0 — фиксированное целое число, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$). Найти компоненты этого тензора в базисе $e' = eS$.

35.18. Каждому базису пространства $\mathscr{L}_n$ $(n > 2)$ сопоставлены числа

$$\delta_{kl}^{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k \neq j = l; \\ -1, \text{ если } i = l \neq j = k; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Будет ли такое соответствие тензором? Сколько нулевых компонент у этого тензора при $n = 3$?

35.19. Тензор θ типа (0, 2) имеет в некотором базисе $\boldsymbol{e}$ линейного пространства $\mathscr{L}_n$ $(n > 2)$ компоненты $\theta_{kl} = \delta_{kl}^{i_0 j_0}$ (i_0, j_0 — фиксированные целые числа, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, $1 \leqslant j_0 \leqslant n$, символ $\delta_{kl}^{i_0 j_0}$ определен в задаче 35.18).

1) Выписать явно все компоненты тензора θ в базисе $\boldsymbol{e}$ при $n = 3$.

2) Найти компоненты тензора θ в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$.

35.20. Каждому базису пространства $\mathscr{L}_n$ $(n > k \geqslant 1)$ сопоставлены числа:

$$\delta_{j_1 \ldots j_k}^{i_1 \ldots i_k} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i_1, \ldots, i_k) \text{ — четная перестановка попарно различных чисел } j_1, \ldots, j_k; \\ -1, \text{ если } (i_1, \ldots, i_k) \text{ — нечетная перестановка попарно различных чисел } j_1, \ldots, j_k; \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Будет ли такое соответствие тензором?

35.21. 1) Тензор типа $(0, n)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} (-1)^{N(i_1 \ldots i_n)}, & \text{если все числа } i_1, \ldots, i_n \text{ различны;} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

($N(i_1 \ldots i_n)$ — число нарушений порядка в перестановке $(i_1, \ldots, i_n)$). Вычислить компоненты данного тензора в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$.

2) Каждому базису пространства $\mathscr{L}_n$ сопоставлены числа $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$. Будет ли это соответствие тензором типа $(0, n)$?

35.22. В четырехмерном пространстве дан трехвалентный тензор. Сколько компонент он имеет? Сколько слагаемых входит в выражение новой компоненты через старую при записи закона преобразования компонент? Сколько сомножителей будет в каждом слагаемом?

35.23. В пространстве $\mathscr{L}_2$ дан тензор типа:

1) (1, 1); 2) (2, 0); 3) (1,2).

В развернутой форме, не используя сокращенных обозначений суммирования, написать закон преобразования его компонент.

35.24. В двумерном пространстве задан тензор типа (p, q). Упорядочим его компоненты так, чтобы они составили столбец $\boldsymbol{a}$ высоты 2^{p+q}. Записать закон преобразования компонент тензора в виде $\boldsymbol{a}' = V\boldsymbol{a}$, где V — квадратная матрица порядка 2^{p+q} и:

1) $p = 1$, $q = 1$; 2) $p = 2$, $q = 0$;
3) $p = 1$, $q = 2$.

35.25. Записать в матричной форме закон преобразования компонент тензоров типа:

1) (0, 2); 2) (1, 1); 3) (2, 0).

35.26. Компоненты двухвалентного тензора типа (p, q) образуют в произвольном базисе $\boldsymbol{e}$ линейного пространства $\mathscr{L}_n$ матрицу A_e. Сопоставим базису $\boldsymbol{e}$ матрицу A_e^{-1}. Доказать, что это соответствие определяет тензор, и указать его тип, если:

1) $p = 0$, $q = 2$;

2) $p = 1$, $q = 1$ (объяснить геометрический смысл полученного тензора);

3) $p = 2$, $q = 0$.

35.27. Тензоры каких типов имеют двумерные матрицы компонент? Трехмерные? Четырехмерные? k-мерные матрицы компонент?

35.28. Трехмерная матрица $\|a_{ijk}\|$ второго порядка имеет сечение $k = 1$, состоящее из единиц, а сечение $k = 2$ — из нулей. Выписать a_{ijk} для всевозможных индексов.

35.29. Трехмерная матрица $\|a_{ijk}\|$ третьего порядка имеет сечения $k = 1$ и $k = 2$, состоящие из единиц, а сечение $k = 3$ — из нулей. Выписать двумерные сечения данной матрицы, соответствующие $i = 1$, $i = 2$, $i = 3$.

35.30. 1) Сколько различных двумерных сечений имеет трехмерная матрица третьего порядка? Какой порядок имеет каждое сечение?

2) Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица второго порядка?

3) Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица третьего порядка?

35.31. Числа δ_{kl}^{ij} образуют четырехмерную матрицу второго порядка.

1) Выписать все ее двумерные сечения, соответствующие фиксированным нижним индексам.

2) Найти связь между сечениями матрицы $\|\delta_{kl}^{ij}\|$ и матрицей $\|\theta_{kl}\|$ (символы δ_{kl}^{ij}, θ_{kl} определены в задачах 35.18, 35.19 соответственно).

35.32. 1) Даны базис $\boldsymbol{e}$ и $(p+q)$-мерная матрица A. Доказать, что существует тензор типа (p, q), имеющий в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицу A.

2) Доказать, что существует тензор любого наперед заданного типа.

35.33. Пусть f — вещественная функция от трех аргументов $x \in \mathscr{L}_n$, $y \in \mathscr{L}_n$, $z \in \mathscr{L}_n$, линейная по каждому из этих аргументов при фиксированных остальных.

1) Выразить значение данной функции через компоненты векторов x, y, z.

2) Показать, что совокупность коэффициентов полученной формы представляет собой тензор типа (0, 3).

3) Выразить компоненты этого тензора через значения f на базисных векторах.

35.34. Линейные функции f, g, h на $\mathscr{L}_3$ имеют в базисе $\boldsymbol{e}$ коэффициенты α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3 соответственно. Сопоставим тройке векторов x, y, z из $\mathscr{L}_3$ число:

1) $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{h}(z)$; 2) $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(z)$;

3) $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(z) + \mathrm{g}(x)\,\mathrm{g}(y)\,\mathrm{g}(z) + \mathrm{h}(x)\,\mathrm{h}(y)\,\mathrm{h}(z)$.

Показать, что каждая из построенных функций определяет тензор в $\mathscr{L}_3$, указать его тип и выписать матрицу в базисе $\boldsymbol{e}$.

35.35. Каждой тройке векторов пространства $\mathscr{L}_3$ сопоставлено число $\mathrm{f}(x, y, z)$, определяемое через компоненты этих векторов в некотором базисе — ξ^1, ξ^2, ξ^3; η^1, η^2, η^3; ζ^1, ζ^2, ζ^3 — одной из следующих формул:

1) $\mathrm{f}(x, y, z) = \xi^1\eta^2\zeta^3 + \xi^3\eta^2\zeta^1$;

2) $\mathrm{f}(x, y, z) = \sum\limits_{i=1}^{3} \xi^i\eta^i\zeta^i$.

Указать тип соответствующего тензора и выписать его матрицу.

35.36. Пусть $\mathscr{B}$ — линейное пространство билинейных функций на $\mathscr{L}_n$, а $\varphi\colon \mathscr{L}_n \to \mathscr{B}$ — линейное отображение. Показать, что φ определяет тензор типа (0, 3) в пространстве $\mathscr{L}_n$.

35.37. Тензор типа (p, q) в базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathscr{L}_3$ задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе e'_1, e'_2, e'_3, если:

1) $p = 2,\ q = 1,\ A = A_{726},\ e'_1 = e_1,\ e'_2 = e_3,\ e'_3 = e_2$;

2) $p = 2,\ q = 1,\ A = A_{727},\ e'_1 = -e_1,\ e'_2 = -e_2,\ e'_3 = -e_3$;

3) $p = 0,\ q = 3,\ A = A_{723},\ e'_1 = 2e_1,\ e'_2 = -e_2,\ e'_3 = 3e_3$.

35.38. Определить, как изменяются компоненты тензора типа (1, 2), заданного в пространстве $\mathscr{L}_n$, при произвольной перестановке базисных векторов.

35.39. Тензор типа (p, q) в базисе $\boldsymbol{e}$ пространства $\mathscr{L}_2$ задан матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, если:

1) $p = 1,\ q = 2,\ A = A_{652},\ S = A_{24}$,
2) $p = 0,\ q = 3,\ A = A_{654},\ S = A_{19}$,
3) $p = 0,\ q = 3,\ A = A_{654},\ S = A_{24}$,
4) $p = 2,\ q = 1,\ A = A_{654},\ S = A_{24}$.

§ 36. Алгебраические операции с тензорами

Линейные операции, умножение тензоров (36.1—36.20)

36.1. Проверить закон преобразования компонент суммы тензоров a^i_{jk} и b^i_{jk}, исходя из закона преобразования компонент слагаемых.

36.2. Как связана сумма линейных преобразований с суммой соответствующих тензоров?

36.3. Пусть A_e — матрица линейного преобразования φ. B_e — матрица билинейной функции $\mathfrak{b}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Определена ли сумма $A_e + B_e$? Будет ли тензором соответствие, сопоставляющее каждому базису $\boldsymbol{e}$ сумму матриц $A_e + B_e$?

36.4. Тензоры a и b типа (2, 1) имеют в базисе $\boldsymbol{e}$ матрицы компонент A и B. Найти компоненты тензоров: а) $a + b$; б) $2a + 3b$; в) $b - 2a$ в том же базисе, если:

1) $A = A_{650},\ B = A_{651}$; 2) $A = A_{651},\ B = A_{652}$;
3) $A = A_{652},\ B = A_{653}$; 4) $A = A_{693},\ B = A_{697}$.

36.5. Заданы матрицы A, B, C, D из компонент четырех тензоров. Определить, являются ли тензоры линейно зависимыми, если:

1) $A = A_{662},\ B = A_{665},\ C = A_{663},\ D = A_{652}$;

2) $A = A_{650}$, $B = A_{651}$, $C = A_{652}$, $D = A_{653}$;

3) $A = A_{666}$, $B = A_{663}$, $C = A_{650}$, $D = A_{652}$.

36.6. 1) Какова размерность линейного пространства $\mathscr{L}$ тензоров типа (p, q)?

2) Указать какой-нибудь базис в $\mathscr{L}$.

3) Указать еще один базис в $\mathscr{L}$.

36.7. Базису $\boldsymbol{e}$ двумерного линейного пространства соответствует базис $\boldsymbol{e}^*$ в пространстве тензоров типа:

1) (0, 1); 2) (1,1); 3) (р) (0, 2); 4) (1, 2).

Базис $\boldsymbol{e}^*$ состоит из тензоров, имеющих в базисе $\boldsymbol{e}$ одну компоненту, равную 1, а остальные, равные 0. Как преобразуется базис $\boldsymbol{e}^*$, если базис $\boldsymbol{e}$ преобразуется матрицей перехода S?

36. 8. Проверить закон преобразования компонент тензора $a \otimes b$, исходя из законов преобразования компонент сомножителей a^i_{jk}, b^i_{jk}.

36.9. Найти тип и матрицу тензора $a \otimes b$, если:

	тип a	матрица a	тип b	матрица b
1)	(1, 0),	c_{12},	(1, 0),	c_{31};
2)	(1, 0),	c_{12},	(0, 1),	c_{31}^T;
3)	(0, 1),	c_{12}^T,	(1, 0),	c_{31};
4)	(0, 1),	c_{12}^T,	(0, 1),	c_{31}^T;
5)	(0, 2),	A_{17},	(0, 1),	c_7^T;
6)	(0, 1),	c_7^T,	(0, 2),	A_{17};
7)	(2, 0),	A_{18},	(1, 0),	c_8;
8)	(1, 1),	A_{18},	(1, 0),	c_8;
9)	(1, 0),	c_8,	(2, 0),	A_{18};
10)	(1, 0),	c_8,	(1, 1),	A_{18};
11)	(0, 3),	A_{650},	(0, 1),	c_8^T;
12)	(0, 1),	c_{25}^T,	(0, 3),	A_{650};
13)	(1, 2),	A_{651},	(0, 1),	c_8^T;
14)	(0, 1),	c_8^T,	(1, 2),	A_{651};
15)	(0, 2),	A_{17},	(0, 2),	A_{18};
16)	(0, 2),	A_{18},	(0, 2),	A_{17};
17)	(1, 1),	A_{13},	(1, 1),	A_{19};
18)	(2, 0),	A_{13},	(1, 1),	A_{19}.

36.10. Записать матрицу из компонент тензора:

1) $a^i b^j$; 2) $a_i b_j$; 3) $a^i b_j$; 4) $a_i b^j$

как кронекеровское произведение матриц из компонент этих тензоров.

36.11. Пусть a, b — двухвалентные тензоры с матрицами A, B. Какого типа должны быть эти тензоры, чтобы матрица их тензорного произведения была (правым) кронекеровским произведением:

1) $A \otimes B$; 2) $B \otimes A$?

36.12. Линейные функции f и g заданы в базисе $\boldsymbol{e}$ координатными строками $\varkappa$ и μ. Найти матрицу тензора:

1) $\mathrm{f} \otimes \mathrm{g}$; 2) $\mathrm{g} \otimes \mathrm{f}$.

Какой геометрический смысл имеют эти тензоры?

36.13. Линейная функция f задана в базисе $\boldsymbol{e}$ координатной строкой $\varkappa$, вектор y — столбцом η. Найти матрицу тензора $f \otimes y$. Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

36.14. 1) Пусть x — вектор, f — ковектор. Доказать, что $\mathrm{f} \otimes x = x \otimes \mathrm{f}$.

2) Привести пример тензоров a и b, для которых $a \otimes b \neq b \otimes a$.

36.15. Пусть x_1, x_2, x_3 — векторы, а f_1, f_2, f_3 — ковекторы. Какие из приведенных ниже выражений имеют смысл? Если данное выражение есть тензор, указать его тип:

1) $x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_3$; 2) $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + x_2 \otimes x_3$;
3) $x_1 \otimes \mathrm{f}_1 - 2\mathrm{f}_1 \otimes x_1$; 4) $x_1 \otimes \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \otimes \mathrm{f}_2$;
5) $x_1 \otimes \mathrm{f}_2 + x_2 \otimes \mathrm{f}_1$; 6) $\mathrm{f}_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_3 \otimes \mathrm{f}_2$;
7) $x_1 \otimes x_2 + x_3 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_1$;
8) $\mathrm{f}_1 \otimes \mathrm{f}_2 - 3(\mathrm{f}_2 \otimes \mathrm{f}_3)$.

36.16. Найти компоненты тензоров 1), 3), 5), 7), 8) задачи 36.15, если векторы x_1, x_2, x_3 и ковекторы f_1, f_2, f_3 заданы с помощью столбцов и строк соответственно: $\boldsymbol{c}_{20}$, $\boldsymbol{c}_{12}$, $\boldsymbol{c}_{25}$, $\boldsymbol{c}_8^T$, $\boldsymbol{c}_{10}^T$, $\boldsymbol{c}_{22}^T$.

36.17. 1) Пусть $a = x \otimes y$, а векторы x и y имеют в базисе $\boldsymbol{e}$ компоненты 1, 0, 0 и 0, 1, 0 соответственно. Найти компоненты тензора a в базисе $\boldsymbol{e}$ и в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, где $S = A_{207}$.

2) Пусть $a = \mathrm{f} \otimes \mathrm{g}$, а ковекторы f и g имеют в базисе $\boldsymbol{e}$ координатные строки (1, 0, 0) и (0, 1, 0) соответственно. Найти компоненты тензора a в базисе $\boldsymbol{e}$ и в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, где $S = A_{207}$.

3) Пусть $a = x \otimes \mathrm{f}$, а вектор x и ковектор f имеют в базисе $\boldsymbol{e}$ компоненты 1, 0, 0 и 0, 1, 0 соответственно. Найти компоненты тензора a в базисе $\boldsymbol{e}$ и в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$, где $S = A_{207}$.

Сравнить результаты задач 1), 2), 3).

36.18. Разложить тензор в произведение одновалентных тензоров, если он имеет:

1) тип (2, 0) и матрицу A_5;

2) тип (2, 1) и матрицу A_{673}.

36.19. 1) Пусть a — тензор типа (1, 1) и матрица его компонент имеет ранг r. Доказать, что найдутся r линейно независимых векторов $a_1, \ldots, a_r$ и r линейно независимых ковекторов $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$ таких, что $a = \sum\limits_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \otimes \mathrm{f}^\alpha$.

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для тензоров типа (2, 0).

36.20. 1) Пусть тензор a типа (0, 2) имеет в некотором базисе матрицу ранга r. Доказать, что существуют r линейно независимых ковекторов $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$ и r линейно независимых ковекторов $\mathrm{g}_1, \ldots, \mathrm{g}_r$ таких, что $a = \sum\limits_{\alpha=1}^{r} \mathrm{f}_\alpha \otimes \mathrm{g}_\alpha$.

2) Представить билинейную функцию $3\xi^1\eta^1 + 2\xi^1\eta^2 + 3\xi^2\eta^1 + 2\xi^2\eta^2$ как произведение линейных. Единственно ли такое представление?

3) Билинейная функция f в некотором базисе линейного пространства задана матрицей A_{454}. Представить ее как сумму двух произведений пар линейных функций: $\mathrm{f}(x, y) = f_1(x)\, g_1(y) + \mathrm{f}_2(x)\, g_2(y)$. Единственно ли это представление?

Свертывание (36.21—36.29)

36.21. Исходя из законов преобразования тензоров a^i_{jk}, a^i_j, b^i_j, a_i, b^{ij}, a^{ij}_{klm}, ξ^k, проверить закон преобразования компонент сверток:

1) a^i_{ji}; 2) $a^i_j b^j_k$; 3) $a_i b^{ij}$; 4) $a^{ij}_{klm}\xi^k$.

36.22. Исходя из геометрического смысла тензоров a_i, ξ^i, a^i_j, b_{ij}, объяснить геометрический смысл сверток:

1) $a_i\xi^i$; 2) $a^i_j\xi^j$; 3) $b_{ij}\xi^i\xi^j$.

36.23. Можно ли свернуть:

1) вектор и ковектор? 2) вектор и вектор?

3) пару ковекторов?

36.24. Как связаны произведение линейных преобразований и соответствующие тензоры?

36.25. Тензоры a^i_j, ξ^i, $\varkappa_i$ заданы матрицами: A_{544}, c_{104}, c^T_{97}. Вычислить свертки:

1) $a^i_j\xi^j$; 2) $a^i_j\varkappa_i$; 3) $a^i_j\xi^j\varkappa_i$.

36.26. Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свертывания из данного тензора типа (2, 2)?

36.27. Тензор a_k^{ij} задан матрицей:

1) A_{651}; 2) A_{655}.

Найти матрицы сверток: а) a_i^{ij}; б) a_j^{ij}.

36.28. Тензор a_{kl}^{ij} задан матрицей:

1) A_{649}; 2) A_{693}; 3) A_{694}.

Вычислить свертки: а) a_{il}^{ij}; б) a_{kj}^{ij}; в) a_{ki}^{ij}; г) a_{jl}^{ij}; д) a_{ij}^{ij}; е) a_{ji}^{ij}.

36.29. 1) Каждому базису пространства $\mathscr{L}_n$ сопоставлен упорядоченный набор чисел a_{klm}^{ij} (все индексы пробегают значения от 1 до n). Известно, что для произвольного вектора ξ^k числа $a_{klm}^{ij}\xi^k$ являются компонентами тензора типа (2, 2). Доказать, что a_{klm}^{ij} — тензор типа (2,3).

2) Каждому базису пространства $\mathscr{L}_n$ сопоставлен упорядоченный набор чисел a_{klm}^{ij} (все индексы пробегают значения от 1 до n). Известно, что для произвольного тензора u_{il}^{k} типа (1, 2) числа $a_{klm}^{ij}\, u_{ij}^{k}$ являются компонентами тензора типа (0, 2). Доказать, что a_{klm}^{ij} — тензор типа (2, 3).

Транспонирование, симметрирование, альтернирование. Симметричные и антисимметричные тензоры (36.30—36.57).

36.30. Можно ли транспонировать тензор:

1) типа (1, 1); 2) типа (2, 0)?

36.31. Один тензор типа (0, 2) получается из другого транспонированием. Как связаны соответствующие билинейные функции?

36.32. Тензоры

1) a_{ij}; 2) a^{ij}; 3) a_k^{ij}; 4) a_{jk}^{i}

заданы соответственно матрицами A_{16}, A_{16}, A_{670}, A_{670}. Найти матрицы транспонированных тензоров.

36.33. 1) Сколько различных тензоров можно получить с помощью операции транспонирования из данного тензора $a_{i_1 \ldots i_k}$?

2) Тензор типа (0, 3) задан матрицей A_{670}. Выписать матрицы всех тензоров, получаемых из него транспониро-

ванием. Изменится ли ответ, если данный тензор имеет тип (3, 0)?

3) Тензор a с компонентами a_{ijk} задан матрицей A_{727}. Выписать матрицы транспонированных тензоров b и c, если $b_{ijk} = a_{jki}$, $c_{ijk} = a_{ikj}$.

4) Тензор a с компонентами a_{ijkl} задан матрицей A_{717}. Выписать матрицы транспонированных тензоров b и c, если $b_{ijkl} = a_{kjli}$; $c_{ijkl} = a_{lkji}$.

36.34. Пусть a, b — тензоры типа (1, 1). Выразить тензор $c = b \otimes a$ через $d = a \otimes b$.

36.35. Не используя сокращенных обозначений, выпишите все компоненты тензоров, заданных в пространстве $\mathscr{L}_2$:

1) $x^i y^k$; 2) $x^{(i} y^{k)}$; 3) $x^{[i} y^{k]}$; 4) $x^i a_{jk}$;
5) $x^i a_{ik}$; 6) $x^k a^i_i$; 7) $x^{(k} a^{i)}_i$; 8) $x^{[k} a^{i]}_i$;
9) $a^i_l a^k_k$; 10) $a^i_{[l} a^k_{k]}$; 11) $a^i_{(l} a^k_{k)}$; 12) $\delta^i_j a^k_i$;
13) $\delta^i_j a^j_k$; 14) $\delta^i_j a^j_i$; 15) $\delta^i_j a^k_l$; 16) $a^k_l \delta^i_j$.

36.36. Тензор a^{ij} задан матрицей:

1) A_{10}; 2) A_{77}; 3) A_{24}; 4) A_{232}.

Найти компоненты тензоров: а) $a^{(ij)}$; б) $a^{[ij]}$.

36.37. Тензор a_{ijk} задан матрицей:

1) A_{650}; 2) A_{651}; 3) A_{720}.

Найти компоненты тензоров: а) $a_{(ij)k}$; б) $a_{i(jk)}$; в) $a_{(i|j|k)}$.

36.38. Тензор a^{ij}_{kl} задан матрицей:

1) A_{694}; 2) A_{684}.

Найти компоненты тензоров: а) $a^{(ij)}_{kl}$; б) $a^{ij}_{(kl)}$; в) $a^{(ij)}_{(kl)}$.

36.39. Тензор a_{ijk} задан матрицей:

1) A_{650}; 2) A_{651}; 3) A_{720}.

Найти компоненты тензоров: а) $a_{[ij]k}$; б) $a_{i[jk]}$; в) $a_{[i|j|k]}$.

36.40. Тензор a^{ij}_{kl} задан матрицей:

1) A_{694}; 2) A_{684}.

Найти компоненты тензоров: а) $a^{[ij]}_{kl}$; б) $a^{ij}_{[kl]}$; в) $a^{[ij]}_{[kl]}$.

36.41. Тензор a_{ijk} задан матрицей:

1) A_{726}; 2) A_{721}.

Найти компоненты тензоров: а) $a_{[ijk]}$;б) $a_{(ijk)}$.

36.42. Тензор типа (0,3) задан матрицей:

1) A_{723}; 2) A_{725}; 3) A_{720}; 4) A_{650}; 5) A_{722}.

Выяснить, является ли тензор симметричным (антисимметричным) и если да, то по каким индексам.

36.43. Тензор a^i_j задан матрицей A:

1) A_{58}; 2) A_{207}.

Вычислить инварианты: а) a_i^i; б) $a_{[i}^i a_{k]}^k$; в) $a_{[i}^i a_j^j a_{k]}^k$. Сравнить найденные инварианты с коэффициентами характеристического многочлена матрицы A.

36.44. 1) Доказать, что тензор $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ (см. задачу 35.21) кососимметричен по любой паре индексов.

2) Доказать, что тензор $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ кососимметричен по любому подмножеству множества индексов.

3) Доказать, что тензор $\delta_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k}$ (см. задачу 35.20) кососимметричен по любой паре верхних индексов.

4) Доказать, что тензор $\delta_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k}$ кососимметричен по любому подмножеству множества верхних индексов.

5) Доказать утверждение 4) для нижних индексов.

36.45. Пусть a_{ij} и b^{kl} — компоненты соответственно симметричного и антисимметричного тензоров. Вычислить свертку $a_{ij}b^{ij}$.

36.46. Для тензора $\delta_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k}$, определенного в задаче 35.20, и произвольных тензоров $a^{j_1\ldots j_k}$ и $b_{i_1\ldots i_k}$ доказать, что:

1) $\delta_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k} a^{j_1\ldots j_k} = a^{[i_1\ldots i_k]}$;

2) $\delta_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k} b_{i_1\ldots i_k} = b_{[j_1\ldots j_k]}$.

36.47. Пусть $a_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k = 0$ для любого вектора ξ^i. Доказать, что $a_{[ijk]} = 0$.

36.48. Доказать, что $a_j^{(i}a_l^{k)} = a_{(j}^i a_{l)}^k$.

36.49. Вычислить:

1) $\delta_j^i\delta_l^j\delta_k^l\delta_i^k$; 2) $\delta_j^i\delta_k^j\,\delta_l^k\delta_m^l$; 3) $\delta_{[i}^i\delta_j^j\delta_{k]}^k$;

4) $\delta_{(i}^i\delta_j^j\delta_{k)}^k$; 5) $\delta_j^i\delta_i^j\delta_l^k a_k^l$.

36.50. 1) Пусть тензор симметричен по некоторой паре индексов. Доказать, что операция симметрирования по этим индексам тензора не меняет, а операция альтернирования дает нулевой тензор.

2) Пусть тензор антисимметричен по некоторой паре индексов. Доказать, что операция симметрирования по этим индексам дает нулевой тензор, а операция альтернирования тензора не меняет.

36.51. 1) Доказать, что для симметричного по двум первым индексам тензора имеет место тождество

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}).$$

2) Доказать, что для антисимметричного по двум первым индексам тензора имеет место тождество

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3}(a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}).$$

36.52. 1) Тензор типа (0, 3) симметричен по двум первым и симметричен по двум последним индексам. Доказать, что он симметричен также и по первому и третьему индексам.

2) Тензор типа (0, 3) антисимметричен по двум первым и антисимметричен по двум последним индексам. Доказать, что он антисимметричен также и по первому и третьему индексам.

3) Пусть тензор типа (0, 3) симметричен по двум первым индексам и антисимметричен по двум последним индексам. Доказать, что он нулевой.

36.53. 1) Привести пример тензора типа (0, 3), для которого $a_{[ijk]} = 0$, но не симметричного по трем индексам.

2) Привести пример тензора типа (0, 3), для которого $a_{(ijk)} = 0$, но не антисимметричного по трем индексам.

36.54. Доказать, что любой тензор типа (0, 2) или (2, 0) можно разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.

36.55. Разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров тензор типа (0, 2), заданный матрицей:

1) A_{49}; 2) A_{16}; 3) A_{234}.

36.56. Из символа Кронекера с помощью тензорных операций получить тензоры:

1) δ^{ij}_{kl}; 2) $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ (см. задачи 35.18, 35.20).

36.57. 1) Пусть симметричный тензор a типа (0, 2) имеет в некотором базисе матрицу ранга r. Доказать, что существуют r линейно независимых ковекторов $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$, таких, что $a = \sum_{\alpha=1}^{r} \mathrm{f}_\alpha \otimes \mathrm{f}_\alpha$.

2) Сформулировать и доказать обратное утверждение.

3) Квадратичная функция φ в $\mathscr{L}_2$ задана матрицей A_{56}. Представить ее как сумму квадратов двух линейных функций. Единственно ли это представление?

§ 37. Тензоры в евклидовом пространстве

37.1. Векторы e_1', e_2' заданы своими координатами (1, 0) и ($\cos\alpha$, $\sin\alpha$) относительно некоторого ортонормированного базиса e_1, e_2 двумерного евклидова пространства. Выписать матрицы: а) метрического, б) контравариантного метрического, в) дискриминантного тензоров в базисах:

1) e_1, e_2; 2) e_1', e_2'.

37.2. Доказать, что в произвольном базисе евклидова пространства дискриминантный тензор имеет следующие компоненты: $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = 0$, если среди значений индексов есть равные, и $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = (-1)^{N(i_1\ldots i_n)}\,\sigma\sqrt{\det\Gamma}$, если индексы попарно различны. Здесь Γ — матрица метрического тензора, $N(i_1\ \ldots\ i_n)$ — число нарушений порядка в перестановке $(i_1, \ldots, i_n)$; $\sigma = 1$ для правых базисов, $\sigma = -1$ для левых.

37.3. Доказать, что во всех правых ортонормированных базисах дискриминантный тензор имеет следующие компоненты: $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = 0$, если среди индексов есть равные, и $\varepsilon_{i_1\ldots i_n} = (-1)^{N(i_1\ldots i_n)}$, если $i_1 \ldots i_n$ попарно различны. Здесь $N(i_1 \ldots i_n)$ — число нарушений порядка в перестановке $(i_1, \ldots, i_n)$.

37.4. Какой тензор получается, если у метрического тензора поднять один индекс? Оба индекса?

37.5. Какой тензор получается, если у символа Кронекера опустить индекс? Поднять индекс?

37.6. Привести примеры свертывания с метрическим тензором, встречавшиеся в курсе линейной алгебры.

37.7. 1) Тензор a_j^i определяет линейное преобразование в евклидовом пространстве $\mathscr{E}_n$. Найти тензор, определяющий сопряженное преобразование.

2) Сформулировать условие, при котором тензор a_j^i определяет самосопряженное преобразование.

37.8. Метрический тензор и тензор a_{ij} заданы соответственно матрицами:

1) A_{55}, A_9; 2) A_{57}, A_{18}; 3) A_{245}, A_{210}.

Найти матрицы тензоров: а) $a^{i}_{\cdot j}$; б) $a_{i\cdot}^{\cdot j}$; в) a^{ij}.

37.9. Верно ли утверждение: если матрица тензора a_{ij} симметрична, то симметричны и матрицы тензоров:

1) $a_{i\cdot}^{\cdot j}$; 2) a^{ij}?

37.10. Метрический тензор и тензор a_j^i заданы соответственно матрицами:

1) A_{58}, A_{40}; 2) A_{207}, A_{202}.

Найти матрицы тензоров: а) a_{ij}; б) $a_i^{\cdot j}$.

37.11. Метрический тензор и тензор a_{jk}^i заданы соответственно матрицами:

1) A_{55}, A_{650}; 2) A_{55}, A_{651}; 3) A_{207}, A_{722}.

Найти матрицу тензора: а) a_{ijk}; б) $a^{ij}_{\cdot\cdot k}$; в) $a^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot}$; г) a^{ijk}.

37.12. Метрический тензор и тензор a_{kl}^{ij} заданы соответственно матрицами:

1) A_{57}, A_{697}; 2) A_{19}, A_{694}.

Найти матрицы тензоров: а) a_{ijkl}; б) a^{ijkl}.

37.13. Упростить выражения:

1) $(a_{ij}g^{jk} + \delta_i^j a_{lj} g^{lk}) g_{ks}$;

2) $\delta_j^i \delta_k^j g^{kl} a_{ij}$; 3) $a_{ij} g^{jk} g_{kl} g^{ls}$.

37.14. Известно, что $a_k^{ij} = g^{il} g^{jm} a_{lmk}$. Выразить a_{lmk} через a_k^{ij}.

37.15 (р). Пусть φ — линейное преобразование евклидова пространства, φ^* — сопряженное преобразование. У тензора, соответствующего произведению преобразований $\varphi\varphi^*$, опускают индекс. Показать, что полученный тензор имеет тип (0, 2) и симметричен.

37.16. В двумерном евклидовом пространстве $\mathscr{E}_2$ вектору ξ^k сопоставляется вектор $g^{ij}\varepsilon_{jk}\xi^k$. Доказать, что этим определено линейное преобразование пространства $\mathscr{E}_2$, и выяснить его геометрический смысл.

37.17. В трехмерном евклидовом пространстве паре векторов ξ^i, η^j сопоставляется вектор $\zeta^k = g^{kl}\varepsilon_{lij}\xi^i\eta^j$. Доказать, что вектор ζ^k есть векторное произведение векторов ξ^i и η^j.

37.18. В четырехмерном евклидовом пространстве векторам x, y, z с компонентами ξ^i, η^j, ζ^k сопоставляется линейная функция f с коэффициентами $\varkappa_l = \varepsilon_{ijkl}\xi^i\eta^j\zeta^k$. Доказать, что f $(x) =$ f $(y) =$ f $(z) = o$.

37.19. В четырехмерном евклидовом пространстве векторам x, y, z с компонентами ξ^i, η^j, ζ^k сопоставляется вектор u с компонентами $g^{ml}\varepsilon_{lijk}\xi^i\eta^j\zeta^k$.

1) Доказать, что вектор u ортогонален к векторам x, y, z.

2) Доказать, что вектор u, соответствующий тройке x, y, z, отличается множителем -1 от вектора u, соответствующего тройке y, x, z.

§ 38. Поливекторы и внешние формы

38.1. Функция f_a от двух векторов на трехмерном векторном пространстве сопоставляет любым векторам x и y смешанное произведение (a, x, y). Доказать, что f_a — 2-форма. Выразить ее матрицу в ортонормированном базисе через координаты вектора a.

38.2. Найти связь между векторным произведением двух векторов и их внешним произведением.

38.3. Написать матрицу 2-формы ω в базисе $\boldsymbol{e}$ пространства $\mathscr{L}_4$, если дано ее выражение через 1-формы, составляющие базис, биортогональный $\boldsymbol{e}$:

1) $\omega = 2(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^2)$; 2) $\omega = 2(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^3) + 2(\mathrm{f}^2 \wedge \mathrm{f}^4)$;

3) $\omega = 2(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^2) + 2(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^3) + 2(\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^4) + 2(\mathrm{f}^2 \wedge \mathrm{f}^3) + 2(\mathrm{f}^3 \wedge \mathrm{f}^4)$.

38.4. Найти внешнее произведение двух 1-форм, заданных координатными строками:

1) $\boldsymbol{c}_{79}^T$, $\boldsymbol{c}_{75}^T$; 2) $\boldsymbol{c}_{95}^T$, $\boldsymbol{c}_{93}^T$;

3) $\boldsymbol{c}_{174}^T$, $\boldsymbol{c}_{203}^T$; 4) $\boldsymbol{c}_{156}^T$, $\boldsymbol{c}_{193}^T$.

38.5. Найти внешнее произведение трех 1-форм, заданных координатными строками:

1) $\boldsymbol{c}_{12}^T$, $\boldsymbol{c}_{13}^T$, $\boldsymbol{c}_{14}^T$; 2) $\boldsymbol{c}_{99}^T$, $\boldsymbol{c}_{52}^T$, $\boldsymbol{c}_{51}^T$; 3) $\boldsymbol{c}_{83}^T$, $\boldsymbol{c}_{124}^T$, $\boldsymbol{c}_{118}^T$;

4) $\boldsymbol{c}_{172}^T$, $\boldsymbol{c}_{154}^T$, $\boldsymbol{c}_{218}^T$; 5) $\boldsymbol{c}_{197}^T$, $\boldsymbol{c}_{198}^T$, $\boldsymbol{c}_{207}^T$; 6) $\boldsymbol{c}_{255}^T$, $\boldsymbol{c}_{256}^T$, $\boldsymbol{c}_{257}^T$.

38.6. 2-форма задана матрицей, 1-форма задана координатной строкой. Найти их внешнее произведение.

1) A_{254}, $\boldsymbol{c}_{81}^T$; 2) A_{254}, $\boldsymbol{c}_{66}^T$; 3) A_{252}, $\boldsymbol{c}_{93}^T$;

4) A_{499}, $\boldsymbol{c}_{162}^T$; 5) A_{432}, $\boldsymbol{c}_{204}^T$.

38.7. Пусть u, u_1, v и w — внешние формы степеней соответственно p, p, q и r. Доказать, что:

1) $(\lambda u) \wedge v = \lambda (u \wedge v)$;

2) $(u + u_1) \wedge v = u \wedge v + u_1 \wedge v$;

3) $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$;

4) $u \wedge v = (-1)^{pq}\, v \wedge u$.

38.8. Доказать, что значение q-формы на системе векторов $x_1, \ldots, x_q$ фактически зависит только от q-вектора $x_1 \wedge \ldots \wedge x_q$.

38.9. Пусть $\mathrm{f}^1, \ldots, \mathrm{f}^p$ — 1-формы. Найти значение p-формы $\mathrm{f}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{f}^p$ на системе векторов $x_1, \ldots, x_p$.

38.10. 2-форма в $\mathscr{L}_4$ задана строкой ее существенных компонент φ, а векторы x и y — координатными столбцами ξ, η. Найти значение 2-формы на паре x, y:

1) $\varphi = c_{279}$, $\xi = c_{174}$, $\eta = c_{186}$;

2) $\varphi = c_{269}$, $\xi = c_{171}$, $\eta = c_{177}$.

38.11. Доказать, что для линейной зависимости векторов $a_1, \ldots, a_p$ необходимо и достаточно, чтобы $a_1 \wedge \wedge \ldots \wedge a_p = 0$.

38.12. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathscr{L}_n$. Доказать, что:

1) бивекторы $e_i \wedge e_j$ для всех пар i, j таких, что $i < j$, образуют базис в пространстве бивекторов пространства $\mathscr{L}_n$.

2) p-векторы $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ для всех сочетаний индексов $i_1, \ldots, i_p$ $(i_1 < \ldots < i_p)$ образуют базис в пространстве p-векторов пространства $\mathscr{L}_n$.

38.13. Базису $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ пространства $\mathscr{L}_4$ сопоставим базис $\boldsymbol{\varepsilon} = (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$ соответствующего пространства бивекторов, а базису $\boldsymbol{e}'$ — аналогично построенный базис $\boldsymbol{\varepsilon}'$. Найти матрицу перехода от $\boldsymbol{\varepsilon}$ к $\boldsymbol{\varepsilon}'$, если матрица перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{e}'$ есть S.

38.14. Внешнее произведение $u^{i_1 \ldots i_{n-1}}$ векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$ из $\mathscr{L}_n$ имеет n существенных компонент. Доказать, что при замене базиса в $\mathscr{L}_n$ с матрицей перехода S строка $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n)$ из существенных компонент $a^i = u^{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n}$ преобразуется по формуле $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}S (\det S)^{-1}$.

38.15. Используя результат задачи 38.8, доказать, что линейное пространство p-форм может быть отождествлено с сопряженным к линейному пространству p-векторов.

38.16. Доказать, что в $\mathscr{L}_3$ каждый бивектор разложим.

38.17. Доказать, что для разложимости бивектора u^{ij} в $\mathscr{L}_4$ необходимо и достаточно выполнение равенства $u^{12}u^{34} - u^{13}u^{24} + u^{14}u^{23} = 0$.

38.18. Пусть a_1, a_2, a_3 и a_4 — линейно независимые векторы. Разложимы ли бивекторы:

1) $a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4$;

2) $a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4 + a_1 \wedge a_2$;

3) $a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4$?

38.19. Разложим ли бивектор в $\mathscr{L}_4$, задаваемый в некотором базисе столбцом существенных компонент $\boldsymbol{a}$:

1) $\boldsymbol{a} = c_{279}$; 2) $\boldsymbol{a} = c_{269}$, 3) $\boldsymbol{a} = c_{278}$; 4) $\boldsymbol{a} = c_{281}$?

38.20. Доказать, что подпространство, порождаемое p-вектором, имеет размерность $r \leqslant p$, причем равенство достигается для разложимых p-векторов и только для них.

38.21. 1) Пусть разложимый бивектор в базисе $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$ имеет компоненты u^{ij}. Доказать, что векторы $l^i = u^{ij} e_j$ лежат в пространстве, порождаемом этим бивектором.

2) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для разложимых p-векторов.

38.22. Может ли размерность подпространства, порождаемого бивектором в пространстве $\mathscr{L}_4$, равняться 1? 3?

38.23. В некотором базисе пространства $\mathscr{L}_4$ бивектор u определен столбцом существенных компонент $\boldsymbol{a}$. Найти линейное подпространство, порождаемое этим бивектором:

1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{279}$; 2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{269}$; 3) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{278}$; 4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}_{280}$.

38.24. Доказать, что разложимый p-вектор, определяющий подпространство $\mathscr{L}_p$, может быть найден по этому подпространству с точностью до числового множителя.

38.25. Подпространство $\mathscr{L}_2$ в пространстве $\mathscr{L}_4$ задано системой линейных уравнений с матрицей A. Найти компоненты бивектора, определяющего $\mathscr{L}_2$:

1) $A = A_{502}$; 2) $A = A_{503}$; 3) $A = A_{506}$.

38.26. Подпространства $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ в пространстве $\mathscr{L}_4$ порождены соответственно вектором x и бивектором u. Вектор задан координатным столбцом ξ, а бивектор — столбцом существенных компонент $\boldsymbol{a}$. Проверить, что $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$, и найти такой вектор y, что $u = x \wedge y$:

1) $\xi = (-2, 6, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a} = (10, 1, 3, 2, -4, -1)^T$;

2) $\xi = (1, 2, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3, 2, 4, -1)^T$.

38.27. Подпространства $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ в пространстве $\mathscr{L}_4$ порождены соответственно вектором x и бивектором u. Вектор задан координатным столбцом ξ, а бивектор — столбцом существенных компонент $\boldsymbol{a}$. Проверить, что $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{o\}$, и найти 3-вектор, порождающий $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$. Найти уравнение подпространства $\mathscr{L}$:

1) $\xi = (2, 2, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a} = (2, 1, 3, 2, 4, -1)^T$;

2) $\xi = (1, 0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a} = (9, 5, 1, 4, -1, -1)^T$.

38.28. Пусть 1-формы $\mathrm{f}^1, \ldots, \mathrm{f}^k$ линейно независимы, и для 1-форм $\mathrm{g}^1, \ldots, \mathrm{g}^k$ выполнено равенство $\mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{g}^1 +$

$+\dots+f^k\wedge g^k=0$. Доказать, что $g^i=\sum_{j=1}^{k}a^{ij}f^j$ для всех $i=1, \dots, k$, причем $a^{ij}=a^{ji}$ (лемма Картана).

38.29. 1-формы f^1, f^2 и g^1 заданы координатными строками φ^1, φ^2, ψ^1. Существует ли такая 1-форма g^2, что $f^1\wedge g^1+f^2\wedge g^2=0$? Найти все такие формы, если они существуют:

1) $\varphi^1=c_{172}^T$, $\varphi^2=c_{173}^T$, $\psi^1=c_{166}^T$;
2) $\varphi^1=c_{197}^T$, $\varphi^2=c_{185}^T$, $\psi^1=c_{166}^T$;
3) $\varphi^1=c_{166}^T$, $\varphi^2=c_{228}^T$, $\psi^1=c_{227}^T$;
4) $\varphi^1=c_{171}^T$, $\varphi^2=c_{186}^T$, $\psi^1=c_{193}^T$.

38.30. Доказать, что для каждой 2-формы ω в L_n существует базис $f^1, \dots, f^n$ в пространстве 1-форм такой, что форма ω имеет канонический вид $\omega=f^1\wedge f^2+f^3\wedge f^4+\dots+f^{2p-1}\wedge f^{2p}$ $(2p\leqslant n)$.

38.31. 2-форма задана своей матрицей в некотором базисе. Привести ее к каноническому виду, описанному в задаче 38.30:

1) A_{250}; 2) A_{439}; 3) A_{490}; 4) A_{499}.

РЕШЕНИЯ

1.39. Введем на плоскости базис $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Имеем: $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} = \mathbf{b} - \frac{3}{5}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL} = \mathbf{a} - \frac{5}{8}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DM} = \lambda\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BL}$. Найдем неизвестные λ и μ. Так как

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \mathbf{a} + \lambda\left(\mathbf{b} - \frac{3}{5}\mathbf{a}\right) = \left(1 - \frac{3}{5}\lambda\right)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \mathbf{b} + \mu\left(\mathbf{a} - \frac{5}{8}\mathbf{b}\right) = \mu\mathbf{a} + \left(1 - \frac{5}{8}\mu\right)\mathbf{b},$$

то, приравнивая коэффициенты при $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеем $1 - \frac{3}{5}\lambda = \mu$, $\lambda = 1 - \frac{5}{8}\mu$, откуда $\lambda = \frac{3}{5}$, $\mu = \frac{16}{25}$. Окончательно,

$$|DM| : |MK| = 3 : 2, \qquad |BM| : |ML| = 16 : 9.$$

2.19. Параллелограмм строится на векторах $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$. Длины диагоналей параллелограмма — это длины векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Имеем: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$; $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{e}_1|^2 + 36|\mathbf{e}_2|^2 + 12(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 9|\mathbf{e}_1|^2 + 4|\mathbf{e}_2|^2 - 12(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Поэтому $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 50$, так как $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$; $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 10$. Итак, длины диагоналей параллелограмма равны $5\sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$.

Один из углов параллелограмма — это угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; $\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$. Имеем: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -2|\mathbf{e}_1|^2 + 8|\mathbf{e}_2|^2 + 6(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 10$, $|\mathbf{a}|^2 = 4|\mathbf{e}_1|^2 + 4|\mathbf{e}_2|^2 + 8(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 20$, $|\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{e}_1|^2 + 16|\mathbf{e}_2|^2 - 8(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 10$; $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$. Итак, острый угол параллелограмма равен $45°$.

2.24. По определению $\mathbf{b} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, где вектор $\mathbf{x}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, а вектор $\mathbf{y}$ ортогонален вектору $\mathbf{a}$. Иначе говоря, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{y}$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = 0$. Умножая обе части векторного равенства скалярно на $\mathbf{a}$, имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda|\mathbf{a}|^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \lambda|\mathbf{a}|^2,$$

откуда $\lambda = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}$. Итак, $\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$.

2.33. Пусть вектор $\mathbf{c}$ имеет координаты x, y, z. Из условия ортогональности векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеем: $x - y + z = 0$, $5x + y + z = 0$. Выражая из первого уравнения $z = y - x$ и подставляя во второе, имеем: $2y + 4x = 0$, откуда $y = -2x$, $z = -3x$. Условию ортогональности векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ удовлетворяет бесконечно много векторов $\mathbf{c}$ с координатами $(x, -2x, -3x)$. Из условия $|\mathbf{c}| = 1$ имеем $|x| = 1/\sqrt{14}$, откуда $x = \pm 1/\sqrt{14}$. Задача имеет два решения: $(1/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14})$ и $(-1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14})$.

3.9. Площадь параллелограмма равна $S = |[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}]|$ (если плоскость рассматривать в пространстве). Имеем $\overrightarrow{BA} = 3\mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{BC} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $|[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]| = 3$, $[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}] = 6[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1] = 6[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] + 6[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 6[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Искомая площадь равна $S = 6|[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]| = 18$.

3.28. 1) Если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ компланарны, то, например, $\mathbf{a}_3 = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2$. Так как $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2) = 0$, то и $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_3) = 0$, что противоречит равенству $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_3) = 1$. Пусть теперь векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ некомпланарны. Докажем, что в этом случае взаимная тройка существует. Так как $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_1) = (\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_2) = 0$, то $\mathbf{b}_3 = \lambda[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Скаляр λ находим из условия $(\mathbf{b}_3, \mathbf{a}_3) = 1$. Имеем: $\lambda([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_3) = 1$, откуда $\lambda = 1/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, а $\mathbf{b}_3 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Аналогично находим

$$\mathbf{b}_1 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{b}_2 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1]/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3).$$

2) Формулы выписаны выше.

3) По формуле задачи 3.26, 4), $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 1/(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Поэтому знаки чисел $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ совпадают. Значит, векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ образуют базис той же ориентации, что и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

4.11. Имеем: $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Поэтому базисные векторы второй системы координат выражаются через базисные векторы первой системы так: $\mathbf{e}_1' = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2' = -\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2$. Далее, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$; поэтому начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Теперь остается записать: $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$.

5.19. Если бы три точки A, B, C лежали по одну сторону от искомой прямой, то они принадлежали бы одной прямой, параллельной искомой. Но точки A, B, C не лежат на одной прямой; значит, две из них лежат по одну сторону от искомой прямой, третья — по другую.

Если A и B лежат по одну сторону от прямой, C — по другую, то искомая прямая проходит через точки L (2, 3) и M (—1, 2) — середины отрезков BC и AC соответственно; ее уравнение $\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-3}{2-3}$, т. е. $x-3y+7=0$.

Аналогично разбираются два других случая расположения точек A, B, C относительно прямой.

Задача имеет три решения: $x-3y+7=0$, $3x+4y-18=0$, $2x+7y-12=0$.

5.32. Проведем через точку A (1, 2) прямую, перпендикулярную прямой $3x-y+9=0$. Ее параметрические уравнения $x=1+3t$, $y=2-t$ (так как направляющий вектор имеет координаты (3, —1)). Пусть A_1 — искомая проекция. Обозначим через t_0 значение параметра t на прямой $x=1+3t$, $y=2-t$, соответствующее точке пересечения с прямой $3x-y+9=0$ (т. е. точке A_1). Найдем это значение t_0 из уравнения $3(1+3t_0)-(2-t_0)+9=0$, откуда $t_0=-1$. Тогда искомая проекция имеет координаты (—2, 3). Далее, так как вектор $\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AA_1}$ имеет координаты (—3, 1), то точка B имеет координаты (—5, 4).

5.44. Точки, равноудаленные от двух данных прямых, имеют координаты, удовлетворяющие уравнению $\frac{|x-7y-1|}{5\sqrt{2}}=\frac{|x+y+7|}{\sqrt{2}}$. Множество таких точек — пара прямых (биссектрисы двух углов между данными прямыми). Угол, содержащий точку A (1, 1), определяется неравенствами $x-7y-1<0$, $x+y+7>0$. Поэтому уравнение искомой биссектрисы $\frac{-x+7y+1}{5\sqrt{2}}=\frac{x+y+7}{\sqrt{2}}$, т. е. $3x-y+{}$ ${}+17=0$.

6.42. Введем систему координат с началом в точке A и базисными векторами $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{AA_1}$, $\mathbf{e}_2=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_3=\overrightarrow{AD}$. По условию задачи A_0 ($\lambda/3$, 0, 0) B_0 (0, λ, 0), D_0 (0, 0, λ), где $\lambda>0$. Уравнение плоскости $A_0B_0D_0$ во введенной системе: $3x+y+z=\lambda$. Точка C_1 имеет координаты (1, 1, 1) и принадлежит плоскости $A_0B_0D_0$; значит, $\lambda=5$.

Объем параллелепипеда $V=|(\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})|$. Объем тетраэдра $V'=\frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AA_0},\ \overrightarrow{AB_0},\ \overrightarrow{AD_0})|=\frac{1}{6}\left|\left(\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AA_1},\ \lambda\overrightarrow{AB},\lambda\overrightarrow{AD}\right)\right|=$ $=\frac{\lambda^3}{18}V=\frac{125}{18}V$.

6.76. Уравнение плоскости с нормальным вектором $\mathbf{n}$ (A, B, C), проходящей через начало координат: $Ax+By+Cz=0$. Из условия задачи имеем:

$$\frac{|A+2B+2C|}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{2}{15}; \qquad (1)$$

$$\frac{|7A+4B+4C|}{9\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{4}{45}. \qquad (2)$$

Разделим (1) на (2):

$$2|A+2B+2C|=|7A+4B+4C|. \qquad (3)$$

Конец нормального вектора искомой плоскости, отложенного из начала координат, имеет координаты $\lambda A, \lambda B, \lambda C$, где $\lambda \neq 0$. Условие принадлежности этого конца тупому двугранному углу между данными плоскостями имеет вид

$$(1\cdot 7+2\cdot 4+2\cdot 4)(\lambda A+2\lambda B+2\lambda C)(7\lambda A+4\lambda B+4\lambda C)>0$$

(см. задачу 6.75), т. е. $(A+2B+2C)(7A+4B+4C)>0$. Значит, (3) раскрывается как $2(A+2B+2C)=7A+4B+4C$, т. е. $A=0$. Тогда из (1) имеем: $5|B+C|=\sqrt{B^2+C^2}$, что равносильно $12B^2+25BC+12C^2=0$. Отношение B/C отсюда принимает два значения: $-3/4$ и $-4/3$. Нормальный вектор искомой плоскости можно взять равным $\mathbf{n}(0, 3, -4)$ или $\mathbf{n}(0, 4, -3)$. Задача имеет два решения: $3y=4z$; $4y=3z$.

10.66. Найдем уравнения проекции сечения на плоскость Oxy, исключив z из данных уравнений. Получим $x^2+2y^2-(2-x-y)^2=-4$, или $y^2-2xy+4x+4y=0$. Теперь найдем центр полученной линии второго порядка, используя уравнения (6) из введения к гл. III или задачу 9.18. Уравнения (6) имеют вид $-2y+4=0$, $2y-2x+4=0$. Находим $x_0=4$, $y_0=2$. Так как искомая точка лежит на данной плоскости, то $x_0+y_0+2z_0=2$, откуда $z_0=-2$. Ответ: $C(4, 2, -2)$.

10.68. Изложим один из способов решения задачи. Сначала составляем уравнения проекции на плоскость Oyz сечения данного эллипсоида плоскостью $x+y+z=h$ и находим центр полученной линии второго порядка. Искомый центр сечения имеет те же координаты y_0, z_0, что и центр проекции; при найденных y_0, z_0 координату x_0 центра сечения легко определить из уравнения плоскости. Принимая h за параметр, таким образом находим искомое множество точек.

Выполним намеченную программу. Уравнение проекции на плоскость Oyz получим, исключая x из уравнений $x^2+2y^2+3z^2=4$ и $x+y+z=h$. Получаем

$$3y^2+4z^2+2yz-2hy-2hz+h^2-4=0.$$

Составляем уравнения для определения центра этой кривой (см. задачу 9.18)

$$6y+2z-2h=0, \quad 8z+2y-2h=0.$$

Отсюда $y_0 = 3h/11$, $z_0 = 2h/11$. Подставляя эти числа в уравнение плоскости $x + y + z = h$, получим $x_0 = 6h/11$. Итак, $x_0 = 6h/11$, $y_0 = 3h/11$, $z_0 = 2h/11$. Обозначив $h = 11t$, получим $x = 6t$, $y = 3t$, $z = 2t$ — уравнения линии центров. Однако искомому множеству принадлежат не все точки прямой, а лишь лежащие внутри эллипсоида. Вычисляя значения параметра $t = \pm\sqrt{2/33}$, соответствующие точкам пересечения прямой и эллипсоида, находим ограничение на t. Ответ: $x = 6t$, $y = 3t$, $z = 2t$, $|t| \leqslant \sqrt{2/33}$.

10.71. Укажем один из способов решения задачи. Запишем уравнение плоскости в параметрическом виде:

$$x = 3 + a_1u + b_1v, \quad y = 2 + a_2u + b_2v, \quad z = 1 + a_3u + b_3v.$$

Подставив эти уравнения в уравнение эллипсоида, получим уравнение сечения во внутренних координатах плоскости:

$$(3 + a_1u + b_1v)^2 + 2(2 + a_2u + b_2v)^2 + 4(1 + a_3u + b_3v)^2 = 9. \quad (9)$$

Так как по условию центр этого эллипса лежит в точке с координатами $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, то в уравнении (9) отсутствуют линейные члены. Приравнивая нулю коэффициенты при этих членах, получим условия на координаты направляющих векторов плоскости: $6a_1 + 8a_2 + 8a_3 = 0$, $6b_1 + 8b_2 + 8b_3 = 0$. Они показывают, что за нормальный вектор искомой плоскости можно взять вектор $\mathbf{n}$ (6, 8, 8). Но наша плоскость по условию проходит через точку C (3, 2, 1). Поэтому ее уравнение имеет вид $6(x - 3) + 8(y - 2) + 8(z - 1) = 0$, или $3x + 4y + 4z - 21 = 0$.

10.75. Найдем проекцию сечения на плоскость Oxy. Для этого исключим из данных уравнений z. Получим $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Следовательно, искомая проекция содержится в окружности. Однако для точек данного гиперболоида $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ всегда $x^2 - y^2 + 1 \leqslant 0$. Поэтому искомая проекция состоит из двух дуг окружности, заключенных внутри ветвей гиперболы $x^2 - y^2 + 1 = 0$. Найдя точки пересечения гиперболы и окружности, получаем ответ: $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $|y| \geqslant \sqrt{5/2}$ (или $|x| \leqslant \sqrt{3/2}$). Остальные проекции находятся аналогично.

11.12. 1) Допустим, что данная поверхность — эллипсоид. В канонической системе координат уравнение эллипсоида линейных членов не содержит. Любая другая система координат с началом в центре симметрии эллипсоида отличается от канонической лишь базисом. Формулы замены базиса однородные, и при такой замене совокупность членов второй степени переходит в совокупность членов второй степени; линейные члены не могут «возникнуть» или «исчезнуть». Для остальных типов поверхностей доказательство аналогичное. Отметим, что если у поверхности бесконечно много центров симметрии, то каждый из них можно принять за начало канонической системы координат.

11.21. б) Для решения задачи можно привести уравнение поверхности к канонической форме путем перехода к какой-нибудь декартовой (не обязательно прямоугольной) системе координат. После этого определить тип поверхности можно по таблице типов, воспользовавшись результатом задачи 11.88 *или* непосредственно вычисляя ранги и сигнатуры большой и малой квадратичных форм поверхностей.

Упрощение данного уравнения выполним двумя способами.

Способ 1. Выделяя полные квадраты, содержащие последовательно неизвестные x_1, x_2, x_3, данное уравнение запишем в виде

$$(x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 1)^2 - 6(x_2 + x_3)^2 - 6x_3^2 + k - 1 = 0.$$

Положим

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 1 = u_1, \quad x_2 + x_3 = u_2, \quad x_3 = u_3.$$

Эта замена неизвестных, очевидно, обратима. Уравнение поверхности в новых координатах

$$u_1^2 - 6u_2^2 - 6u_3^2 + k - 1 = 0$$

является почти каноническим. Легко убедиться, что при $k = 1$ это уравнение приводится к канонической форме

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{\zeta^2}{6} = 0,$$

соответствующей конусу, при $k > 1$ — к канонической форме

$$\frac{\xi^2}{k-1} + \frac{\eta^2}{k-1} - \frac{\zeta^2}{6(k-1)} = 1,$$

соответствующей однополостному гиперболоиду, при $k < 1$ — к канонической форме, соответствующей двуполостному гиперболоиду.

Способ 2. Выписываем матрицу большой квадратичной формы поверхности и приводим ее к диагональному виду, применяя элементарные преобразования к строкам (по методу Гаусса) и такие же преобразования к столбцам. Если при этом последний столбец и последняя строка не прибавляются с какими-либо множителями к остальным и не умножаются на числа, отличные от единицы, то элементарные преобразования соответствуют матрице перехода T задачи 11.17, 2). Попутно эти преобразования упрощают и матрицу малой квадратичной формы поверхности, не меняя рангов и сигнатур. В данном случае

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & k \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{Vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{Vmatrix}.$$

При $k > 1$: $R = 4$, $r = 3$, $\Sigma = 0$, $\sigma = 1$. Поверхность — однополостный гиперболоид. При $k = 1$: $R = r = 3$, $\Sigma = \sigma = 1$; поверхность — конус. При $k < 1$: $R = 4$, $r = 3$, $\Sigma = 2$, $\sigma = 1$; поверхность представляет собой двуполостный гиперболоид.

11.22. 16). Мы дадим два способа решения задачи.

Способ 1. Решение с применением алгоритма, изложенного во введении к § 11. Мы последовательно выполним рекомендованные действия. Сначала с помощью ортогональной замены координат упростим квадратичную форму поверхности. В данном случае достаточно «уничтожить» лишь член с произведением переменных y и z, т. е., мы можем ограничиться заменой этих переменных. Мы выписываем матрицу из коэффициентов квадратичной формы от y и z, входящих в данное уравнение, и строку из коэффициентов при линейных членах y, z:

$$\tilde{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad \tilde{a} = \frac{1}{2}(3, -5).$$

Составляем характеристическое уравнение $|\tilde{A} - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Находим его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

Составляем уравнение для определения ортонормированного базиса из собственных векторов: $(\tilde{A} - \lambda E)\,\xi = o$. В данном случае (при $\lambda = 0$)

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| = o,$$

$$\xi = h\,(1, 1)^T, \tag{4}$$

и (при $\lambda = 2$) $$\left\| \begin{matrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| = o,$$

$$\xi = h\,(-1, 1)^T. \tag{5}$$

Различным собственным значениям $\lambda = 0$ и $\lambda = 2$ принадлежат взаимно ортогональные собственные векторы; поэтому для отыскания ортонормированного базиса из собственных векторов достаточно нормировать столбцы (4) и (5). Получим столбцы $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$. Искомая замена координат $\left\| \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\| = \tilde{S} \left\| \begin{matrix} y' \\ z' \end{matrix} \right\|$ имеет матрицу перехода $\tilde{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$, составленную из этих столбцов. При такой замене координат члены данного уравнения $y^2 + z^2 - 2yz$ переходят в $2z'^2$. Чтобы найти коэффициенты при линейных членах преобразованного уравнения, используем формулу $\tilde{a}' = \tilde{a}\tilde{S}$. Получим $a' = (-1/\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. Остальные члены уравнения при нашей замене координат не меняются. Мы можем выписать преобразованное уравнение

$$-x^2 + 2z'^2 + 2x - \sqrt{2}\,y' - 4\sqrt{2}\,z' + 1 = 0.$$

Теперь необходимо перенести начало координат (в пространстве). Для этого группируем одноименные неизвестные и дополняем их до полного квадрата; наше уравнение приобретает вид

$$-(x-1)^2 + (z'\sqrt{2} - 2)^2 - \sqrt{2}\,y' - 2 = 0,$$

или

$$-(x-1)^2 + 2(z' - \sqrt{2})^2 - \sqrt{2}\,(y' + \sqrt{2}) = 0.$$

Делаем замену координат $x = \xi + 1$, $y' = \eta - \sqrt{2}$, $z' = \zeta + \sqrt{2}$ (перенос начала координат в точку O с координатами $1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ относительно повернутой системы). Получаем почти каноническое уравнение

$$-\xi^2 + 2\zeta^2 - \sqrt{2}\,\eta = 0. \tag{6}$$

Ясно, что данное уравнение описывает гиперболический параболоид.

Сделаем некоторые дополнительные замечания к решению задачи. Прежде всего вычислим исходные координаты точки O. Отметим, что при замене только переменных y и z первая координата любой точки остается неизменной. Поэтому первая координата точки O равна 1 и в повернутой, и в исходной системе координат. Остальные координаты можно вычислить, пользуясь формулой перехода:

$$\left\| \begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right\| = \tilde{S} \left\| \begin{matrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{matrix} \right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \right) \cdot \left(\sqrt{2} \left\| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \right) = \left\| \begin{matrix} -2 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, старые координаты точки O суть $1, -2, 0$.

Поясним, как выписать формулу перехода от координат x, y, z к ξ, η, ζ. Она имеет матричный вид

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = S \left\| \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

где матрица перехода S содержит $\tilde{S}$ в качестве подматрицы:

$$S = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{matrix} \right\|.$$

Раскрывая матричную формулу (7), получим итоговую замену координат в развернутой форме

$$x = \xi + 1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta - 2, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta. \qquad (8)$$

Наконец, остановимся на переходе от почти канонического уравнения к каноническому. Можно, например, умножить обе части равенства (6) на 1/2, перенести линейный член в правую часть и сделать замену координат

$$\xi = \eta', \quad \eta = \zeta', \quad \zeta = \xi'. \qquad (9)$$

После этого уравнение (6) превратится в каноническое уравнение

$$\xi'^2 - \frac{1}{2}\eta'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'.$$

Замена координат (9) имеет матрицу $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ и соответствует перестановке базисных векторов. Переход от исходных координат к каноническим в силу (8) и (9) определяется формулами

$$x = \eta' + 1, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi' + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta' - 2, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi' + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta'.$$

С п о с о б 2. Это решение основано на результатах задачи 11.15. Вначале, как обычно, выписываем матрицу квадратичной формы поверхности и строку коэффициентов при линейных членах:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad a = (1,\ 3/2,\ -5/2)$$

(здесь мы не останавливаемся на упрощениях, связанных со спецификой коэффициентов данного уравнения, как это делали при изложении первого способа решения задачи). Находим собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов, выписываем матрицу перехода S к этому базису:

$$\lambda = -1, 2, 0; \qquad S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Затем находим проекции p и q вектора a^T на подпространства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. В данном случае подпространство $\mathcal{Q}$ одномерно, оно натянуто на вектор $e_3 = (0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})^T$. Поэтому $q = (a^T,\ e_3)\, e_3 =$

$= (0, -1/2, -1/2)^T$, $p = a^T - q = (1, 2, -2)^T$. Значение $(a^T, e_3) = -1/\sqrt{2}$ определяет коэффициент при линейном члене почти канонического уравнения (собственные значения $-1, 2, 0$ будут коэффициентами при квадратах переменных в этом уравнении). Поэтому почти каноническое уравнение может быть выписано уже на этом этапе:

$$-\xi^2 + 2\eta^2 - \sqrt{2}\,\zeta = 0.$$

Координаты начала почти канонической системы координат находим из системы уравнений (11) § 11, предварительно вычислив вектор $a^T + q = (1, 1, -3)^T$:

$$-x + 2 = 0, \quad y - z + 4 = 0, \quad -y + z - 4 = 0,$$
$$x + y - 3z + 1 = 0.$$

Система совместна, имеет единственное решение — координаты точки O: $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$. Этот способ имеет перед изложенным выше то небольшое преимущество, что позволяет непосредственно определить координаты начала канонической системы координат.

11.22. 17) Дадим решение, опирающееся на результаты задачи 11.15. Сначала выписываем матрицу квадратичной формы поверхности и строку коэффициентов при линейных членах:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & 12 & 16 \end{Vmatrix}, \qquad a = (5/2, 5, 5/2).$$

Находим характеристические числа матрицы A: $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, затем находим нормированный собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 25$; он равен $e_1 = (0, 3/5, 4/5)^T$. Не вычисляя остальных собственных векторов, раскладываем вектор a^T в сумму $p + q$. В данном случае подпространство $\mathscr{P}$ одномерно и натянуто на вектор e_1 (ср. с решением задачи 11.22.16). Поэтому $p = (a, e_1)\, e_1 = (0, 3, 4)^T$. Вектор q находим как разность $a^T - p = (5/2, 2, -3/2)^T$. Найденный вектор q является одним из собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$. Нормируем вектор q: $e_3 = \dfrac{q}{|q|} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(5, 4, -3)^T$. Остается найти еще один вектор — второй базисный вектор почти канонического базиса. Хотя это, конечно, — один из собственных векторов, соответствующих нулевому собственному значению, с точки зрения экономии выкладок выгоднее его искать просто как вектор, ортогональный к уже найденным векторам e_1 и e_3, т. е. из системы уравнений

$$3y + 4z = 0, \quad 5x + 4y - 3z = 0.$$

Ее нормированное решение есть, например, $e_3 = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}(5, -4, 3)^T$.

Теперь из векторов e_1, e_2, e_3 можно составить ортогональную матрицу

$$S = \left\| \begin{matrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/5 & -4/(5\sqrt{2}) & 4/(5\sqrt{2}) \\ 4/5 & 3/(5\sqrt{2}) & -3/(5\sqrt{2}) \end{matrix} \right\|$$

— матрицу перехода к почти канонической системе координат. Найденные характеристические числа 25, 0, 0 и значение $2\,(a^T, e_3) = 2\,|q|$ являются коэффициентами почти канонического уравнения данной поверхности:

$$25\xi^2 + 5\sqrt{2}\,\zeta = 0.$$

Следовательно, данная поверхность есть параболический цилиндр. Осталось найти координаты начала O почти канонической системы координат. Они определяются системой уравнений (11) § 11. Вычислив вектор $q + a^T = (5, 7, 1)^T$, составляем эту систему:

$$9y + 12z + 3 = 0, \quad 12y + 16z + 4 = 0, \quad 5x + 7y + z + 11 = 0. \tag{10}$$

Система уравнений (10) имеет бесконечно много решений. Годится любое решение. Можно взять, например, $O\,(-26/15, -1/3, 0)$.

12.60. 2) Обозначим искомую площадь через S. Преобразование

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1, \quad y^* = a_2x + b_2y + c_2 \tag{11}$$

переводит первые две прямые в оси Oy и Ox. Найдем образ 1^* третьей прямой, подставив решения системы (11):

$$x = \frac{1}{\delta_3}\begin{vmatrix} x^* - c_1 & b_1 \\ y^* - c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{\delta_3}\begin{vmatrix} a_1 & x^* - c_1 \\ a_2 & y^* - c_2 \end{vmatrix} \quad \left(\delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

в уравнение прямой $a_3x + b_3y + c_3 = 0$. Получим

$$a_3\begin{vmatrix} x^* - c_1 & b_1 \\ y^* - c_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & x^* - c_1 \\ a_2 & y^* - c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x^* - c_1 \\ a_2 & b_2 & y^* - c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x^* \\ a_2 & b_2 & y^* \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Подставим $y^* = 0$ и $x^* = 0$ в уравнение прямой 1^* и найдем, что 1^* отсекает на осях Ox и Oy отрезки длины $|\Delta/\delta_1|$ и $|\Delta/\delta_2|$, где

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, l^* образует с осями координат треугольник площади $S^* = \frac{\Delta^2}{2|\delta_1\delta_2|}$. Так как $S^*/S = |\delta_3|$, то $S = \frac{\Delta^2}{2|\delta_1\delta_2\delta_3|}$.

14.24. 10) Обозначим искомый определитель через Δ_n. Раскладывая его по первой строке, получим рекуррентное соотношение $\Delta_n = 2\alpha\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. Пусть q таково, что $2\alpha = q + \frac{1}{q}$ (решив квадратное уравнение, находим, например, что $q = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1}$, $\frac{1}{q} = \alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$). Из равенства $\Delta_n = \left(q + \frac{1}{q}\right)\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ следуют два рекуррентных соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_n - q\Delta_{n-1} &= \frac{1}{q}(\Delta_{n-1} - q\Delta_{n-2}), \\ \Delta_n - \frac{1}{q}\Delta_{n-1} &= q\left(\Delta_{n-1} - \frac{1}{q}\Delta_{n-2}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда заключаем, что величины

$$r_n = \Delta_n - q\Delta_{n-1} \text{ и } s_n = \Delta_n - \frac{1}{q}\Delta_{n-1} \tag{13}$$

образуют геометрические прогрессии со знаменателями $\frac{1}{q}$ и q соответственно. Вычислим

$$r_2 = \Delta_2 - q\Delta_1 = 4\alpha^2 - 1 - 2q\alpha = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 - 1 - q\left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q^2};$$

аналогично получим $s_2 = q^2$, откуда следует $r_n = \frac{1}{q^n}$ и $s_n = q^n$ $(n > 1)$. Из формул (13) следует, что $s_n - r_n = \left(q - \frac{1}{q}\right)\Delta_{n-1}$. Поэтому при $q \neq \pm 1$ $\Delta_{n-1} = \left(q^n - \frac{1}{q^n}\right) \Big/ \left(q - \frac{1}{q}\right)$. Заменив q его выражением через α и раскрыв степени по биному Ньютона, получим

$$\Delta_{n-1} = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})^n - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})^n}{2^{n-1}\sqrt{\alpha^2-1}} = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2k+1}\alpha^{n-2k-1}(\alpha^2-1)^k.$$

Заменяя $n-1$ на n, получим ответ задачи.

Рассмотрим случай $q = \pm 1$ ($\alpha = \pm 1$). При $q = 1$ обе формулы (12) совпадают и показывают, что Δ_n образуют арифметическую прогрессию со знаменателем, равным 1. Так как при этом $\Delta_1 = 2$, то $\Delta_n = n + 1$. Аналогично убеждаемся, что при $q = -1$ ($\alpha = -1$) $\Delta_n = (-1)^n (n + 1)$. Эти частные случаи также содержатся в формуле, указанной в ответе задачи.

14.24. 13) Пусть $b \neq 0$. Вынося из каждой строки определителя множитель b и обозначая $a/b = x$, получим

$$\Delta = b^n \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Следовательно, задача сводится к 14.24, 10), что дает после соответствующих замен обозначений первую из приведенных в ответе формул. Эта формула остается справедливой и в пропущенном нами тривиальном случае $b = 0$.

Чтобы получить ответ в другой форме, будем считать x переменной величиной. Тогда Δ можно рассматривать как многочлен от x степени n со старшим коэффициентом, равным b^n. По теореме Безу

$$\Delta = \Delta(x) = b^n \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k),$$

где α_k — корни уравнения $\Delta(x) = 0$. Из ответа к задаче 14.24, 11), следует, что $\Delta_n = 0$ при $\varphi = \frac{\pi k}{n+1}$ ($k = 1, \dots, n$). Сравнивая Δ_n и Δ, убеждаемся, что многочлен $\Delta(x)$ имеет n различных корней $\alpha_k = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}$, откуда и получаем

$$\Delta = b^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a}{b} - 2 \cos \frac{\pi k}{n+1} \right) = \prod_{k=1}^{n} \left(a - 2b \cos \frac{\pi k}{n+1} \right).$$

Очевидно, эта формула верна и в пропущенном тривиальном случае $b = 0$.

15.50. Каждое элементарное преобразование строк матрицы A эквивалентно умножению ее слева на элементарную матрицу, которая получается из единичной матрицы с помощью того же элементарного преобразования. Невырожденную матрицу с помощью элементарных преобразований можно перевести в единичную. Значит, в этом случае получаем $S_k \dots S_1 A = E$, откуда $S_k \dots S_1 = A^{-1}$, $A = S_1^{-1} \dots S_k^{-1}$. Матрицы $S_1^{-1}, \dots, S_k^{-1}$, так же как и $S_1, \dots, S_k$, элементарные; они получаются из единичной матрицы «обратными» элементарными преобразованиями строк.

15.51. 1) Общие соображения: в силу решения задачи 15.50, $A = S_1^{-1} \ldots S_k^{-1}$, где матрицы $S_1, \ldots, S_k$ соответствуют элементарным преобразованиям строк матрицы A, переводящим ее в единичную матрицу. Подобрав $S_1, \ldots, S_k$, затем находим $S_1^{-1}, \ldots, S_k^{-1}$. На данном примере ниже показано, что процесс можно сократить на один шаг. Упрощаем матрицу $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$. Умножим вторую строку на $-1/2$. Это равносильно умножению A слева на матрицу $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{Vmatrix}$. Получим

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = B. \qquad (14)$$

Матрица B элементарная. Вычисляем $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} = S$. Умножая обе части равенства (14) на S слева, получим искомое разложение $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} = SB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

15.73. Диагональная матрица diag $(1, 2, \ldots, n)$ невырождена. Используя эту матрицу, мы можем применить результат задачи 15.69, откуда следует диагональность данной матрицы A. Остается доказать равенство всех диагональных элементов A. Если A — матрица второго порядка: $A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}$, то умножим ее слева и справа на матрицу $S = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. Приравнивая AS и SA, убедимся, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Аналогичным образом подбирая S для диагональной матрицы A произвольного порядка, проверим равенство любых двух диагональных элементов A.

15.81. Обратную матрицу ищем методом Гаусса, исходя из матрицы $\| A \mid E \|$ (см. задачу 15.53). Процесс упрощения начинаем с нижней строки. При этом элементы матриц A и E, расположенные ниже главной диагонали, не меняются. В итоге из единичной матрицы должна получиться верхняя треугольная.

15.118. Пусть A — данная матрица перестановки. Рассмотрим всевозможные матрицы A^k. Это — матрицы перестановок (см. задачу 15.108). Число различных матриц перестановок одного порядка конечно. Поэтому существуют натуральные числа p, q такие, что $q > p$ и $A^q = A^p$; отсюда $A^{q-p} = E$.

16.26. 2) Пусть $\boldsymbol{b}$ — отличный от $\boldsymbol{o}$ столбец матрицы A. Все столбцы A пропорциональны $\boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a}$ — строка из коэффициентов пропорциональности, то $A = \boldsymbol{ba}$.

16.27. $B = A^{-1}(AB)$, $C = (CA)A^{-1}$. Применяя теорему об оценке ранга произведения матриц (задача 16.25, 1)), получим неравенства

$\operatorname{rg} B \leqslant \operatorname{rg} AB \leqslant \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} C \leqslant \operatorname{rg} CA \leqslant \operatorname{rg} C$, откуда и следуют утверждения.

16.35. Уравнение $AB = O$ эквивалентно уравнению $(SAT)(T^{-1}B) = O$, где S, T — любые невырожденные матрицы подходящего порядка. Подберем S, T так, чтобы $A' = SAT = \begin{Vmatrix} E_r & O \\ O & O \end{Vmatrix}$, где E_r — единичная матрица порядка $r = \operatorname{rg} A$. Обозначим $B' = T^{-1}B$. Легко проверить, что первые r строк произведения $A'B'$ совпадают с первыми r строками матрицы B'. Поэтому равенство $A'B' = O$ возможно, лишь если первые r строк матрицы B нулевые. Следовательно, $\operatorname{rg} B' \leqslant n - r$. Но $\operatorname{rg} B' = \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A = r$, поэтому $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A' + \operatorname{rg} B' \leqslant n$. Другое решение задачи получим, если будем интерпретировать столбцы B как решения системы уравнений $AX = \boldsymbol{o}$. Тогда данная задача сводится к оценке максимального числа линейно независимых решений этой системы.

18.17. 4) Общие соображения. Во введении к гл. VII описана связь между упрощенной матрицей A системы уравнений и ее фундаментальной матрицей Φ: если $A = \begin{Vmatrix} E_r & D \\ O & O \end{Vmatrix}$, то $\Phi = \begin{Vmatrix} -D \\ E \end{Vmatrix}$. Это позволяет восстановить систему уравнений по нормальной фундаментальной матрице. Таким образом, задача сведена к отысканию по данной фундаментальной матрице системы ее нормальной фундаментальной матрицы. Для того чтобы найти нормальную фундаментальную матрицу по данной фундаментальной матрице, заметим, что все фундаментальные матрицы одной системы уравнений получаются друг из друга с помощью элементарных преобразований столбцов *). В задаче дана фундаментальная матрица A_{148}. Преобразуем ее столбцы:

$$A_{148} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \Phi.$$

Преобразования очевидные, на их описании не останавливаемся. Нормальной фундаментальной матрице Φ соответствует система уравнений с матрицей

$$A = \left\Vert \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & \multicolumn{2}{c}{O} \end{array} \right\Vert.$$

---

*) Во введении к гл. VIII указан другой способ решения этой задачи (на языке линейных пространств).

Отбросив нулевые строки, преобразуем (упрощая) остальные строки A (элементарные преобразования строк матрицы заменяют однородную систему уравнений на эквивалентную):

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Последней матрице соответствует система уравнений, указанная в ответе: $x-z=0$, $x-2y+t=0$.

19.30. Проверим для системы уравнений $(A^TA)\,\boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{b}$ условия теоремы Фредгольма. Пусть $\boldsymbol{y}_0$ — решение сопряженной однородной системы $\boldsymbol{y}(A^TA)=\boldsymbol{o}$. Тогда $\boldsymbol{y}_0(A^TA)\,\boldsymbol{y}_0^T=0$, откуда $(\boldsymbol{y}_0A^T)(\boldsymbol{y}_0A^T)^T=0$, что возможно, только если $\boldsymbol{y}_0A^T=\boldsymbol{o}$. Умножая последнее равенство на $\boldsymbol{b}$, получим при любом столбце $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{y}_0(A^T\boldsymbol{b})=0$, т. е. действительно условия теоремы Фредгольма выполнены. Отсюда следует совместность системы уравнений $(A^TA)\,\boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{b}$.

19.31. Допустим противное. Тогда система уравнений $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}x_k=0$ $(j=1, \ldots, n)$ имеет нетривиальное решение $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Если x_j^0 — максимальная по модулю компонента этого решения, то $x_j^0\neq 0$, и j-е уравнение системы дает $a_{jj}+\sum\limits_{k\neq j} a_{jk}\,(x_k^0/x_j^0)=0$, откуда ввиду $|x_k^0/x_j^0|\leqslant 1$ получаем $|a_{jj}|\leqslant\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|$, что противоречит условию

19.34. Будем искать прямую $Ax+By+C=0$, содержащую три данные точки. Рассматриваем равенства

$$Aa_1+Bb_1+C=0,$$
$$Aa_2+Bb_2+C=0,$$
$$Aa_3+Bb_3+C=0$$

как систему уравнений относительно неизвестных A, B, C с матрицей коэффициентов

$$M=\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Любое нетривиальное решение системы удовлетворяет условию $A^2+B^2\neq 0$, так как последний коэффициент в каждом уравнении равен единице. Поэтому нетривиальные решения системы и только они соответствуют прямым, содержащим три данные точки. Условие $\operatorname{rg} M=3$ необходимо и достаточно для того, чтобы система уравнений нетривиальных решений не имела, т. е. оно необходимо и достаточно для того, чтобы три данные точки не лежали на одной прямой.

19.35. 1) Будем искать уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки в виде $Ax+By+C=0$. Рассмотрим систему уравнений для определения A, B, C:

$$Aa_1+Bb_1+C=0,$$
$$Aa_2+Bb_2+C=0.$$

Ее матрица есть $\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{matrix}\right\| = M$. Каждое нетривиальное решение системы удовлетворяет условию $A^2+B^2\neq 0$, так как последний коэффициент в каждом уравнении равен единице. Поэтому нетривиальные решения системы и только они соответствуют прямым, содержащим две данные точки. Если точк (a_1, b_1) и (a_2, b_2) различны, то $\operatorname{rg} M = 2$, и система уравнений имеет одно нетривиальное линейно независимое решение, т. е. существует единственная прямая, содержащая данные точки.

2) Для того чтобы три точки с координатами (x, y), (a_1, b_1), (a_2, b_2) лежали на одной прямой, необходимо и достаточно (см. решение задачи 19.34) условие

$$\left|\begin{matrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{matrix}\right| = 0.$$

Это и есть искомое уравнение. Заметим, что если данные точки различны, то хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от 0, т. е. полученное уравнение действительно определяет прямую

19.42. 1) Будем искать всевозможные плоскости, содержащие три данные точки. Эта задача приводит к системе уравнений

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=0,$$
$$Aa_2+Bb_2+Cc_2+D=0,$$
$$Aa_3+Bb_3+Cc_3+D=0$$

относительно неизвестных A, B, C, D. Так как последний коэффициент в каждом уравнении равен единице, то каждое нетривиальное решение системы уравнений удовлетворяет условию $A^2+B^2+C^2\neq 0$ и действительно дает плоскость, содержащую три данные точки. Нас интересует случай, когда фундаментальная система решений содержит единственное решение — в этом случае существует единственная плоскость, содержащая данные точки. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{matrix}\right\| = 3.$$

20.21. Пространство нечетных многочленов степени не выше 5 имеет размерность 3; представим данные многочлены их координатными столбцами в базисе t, t^3, t^5. Приведем соответствующую расширенную матрицу к треугольному виду:

$$\left\|\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\|.$$

Теперь ясно, что многочлены $2t+t^5$, t^3-t^5, $t+t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше 5. Продолжаем элементарные преобразования расширенной матрицы:

$$\left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right\|.$$

Многочлен $5t-t^3+2t^5$ имеет в базисе $2t+t^5$, t^3-t^5, $t+t^3$ координатный столбец $(4, 2, -3)^T$.

20.26. Пространство кососимметрических матриц порядка 3 имеет размерность 3; базис образуют матрицы

$$\left\|\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right\|.$$

Матрица $\left\|\begin{array}{rrr} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{array}\right\|$ имеет в этом базисе координатный столбец $(a, b, c)^T$. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$, то вторая система является базисом. То, что первая система является базисом, можно специально не проверять — этот факт обнаружится в ходе дальнейших вычислений. Матрица перехода S ищется из уравнения $G = FS$, т. е.

$$\left\|\begin{array}{rrr} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right\| S.$$

Для решения этого матричного уравнения составим матрицу $\| F \mid G \|$. Элементарными преобразованиями строк приведем «левую половину» к единичному виду (этим будет автоматически проверено, что первая система является базисом); при этом «правая половина» преобразуется в искомую матрицу S. Имеем

$$\left\|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 9 & 40 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 37 & 8 \end{array}\right\|.$$

Искомая связь координат имеет вид: $\xi_1 = 9\xi_1' + 40\xi_2' + 9\xi_3'$, $\xi_2 = -3\xi_1' - 11\xi_3' - 2\xi_3'$, $\xi_3 = 8\xi_1' + 37\xi_2' + 8\xi_3'$.

21.7. 4) Составим системы уравнений, определяющие данные подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$. Имеем (см. введение к гл. VIII):

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & 2 & x_3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 - x_1 \end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 5 & x_1 \\ 3 & 1 & 3 & x_2 \\ 1 & 0 & 2 & x_3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & -3 & x_2 - 3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - x_3 \end{array}\right\|;$$

первое подпространство задается одним уравнением $x_3 - x_2 - x_1 = 0$, второе — одним уравнением $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. При этом мы замечаем также, что $\dim \mathscr{P} = \dim \mathscr{Q} = 2$. Базис в $\mathscr{P}$ образуют, например, векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$; базис в $\mathscr{Q}$ образуют, например, векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$.

Найдем размерность и базис суммы $\mathscr{P} + \mathscr{Q}$. Имеем

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right\|;$$

$\dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = 3$, т. е. сумма $\mathscr{P} + \mathscr{Q}$ совпадает со всем трехмерным пространством; базис суммы образуют, например, векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$.

Пересечение $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$ задается системой уравнений

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Матрица этой системы элементарными преобразованиями строк приводится к виду

$$\left\|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right\|.$$

Ранг матрицы равен 2, значит, $\dim(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = 3 - 2 = 1$, что, впрочем, можно было определить и раньше по формуле

$$\dim(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = \dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{Q} - \dim(\mathscr{P} + \mathscr{Q}).$$

Базисный вектор пересечения имеет координатный столбец, удовлетворяющий условиям $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 = 0$; можно взять столбец $(1, 0, 1)^T$.

24.26. Пусть A — матрица преобразования φ в некотором базисе и

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda).$$

1) Заменив λ на $-\lambda$, имеем также

$$\det(A + \lambda E) = (\lambda_1 + \lambda) \ldots (\lambda_n + \lambda).$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\det(A^2 - \lambda^2 E) = (\lambda_1^2 - \lambda^2) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda^2),$$

или

$$\det(A^2 - tE) = (\lambda_1^2 - t) \ldots (\lambda_n^2 - t),$$

где $t = \lambda^2$.

2) В разложении характеристического многочлена заменим λ на $\lambda\varepsilon^k$ $(k=0, \dots, m-1)$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/m}$ $(\varepsilon^m = 1)$:

$$\det(A-\lambda E) = (\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda),$$
$$\det(A-\lambda\varepsilon E) = (\lambda_1-\lambda\varepsilon)\dots(\lambda_n-\lambda\varepsilon),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\det\left(A-\lambda\varepsilon^{m-1}E\right) = \left(\lambda_1-\lambda\varepsilon^{m-1}\right)\dots\left(\lambda_n-\lambda\varepsilon^{m-1}\right).$$

Поскольку матрицы $A-\lambda\varepsilon^kE$ $(k=0, \dots, m-1)$ перестановочные перемножив равенства почленно, получим

$$\det\left(A^m-\lambda^mE\right) = \left(\lambda_1^m-\lambda^m\right)\dots\left(\lambda_n^m-\lambda^m\right),$$

или, положив $\lambda^m = t$, требуемое

$$\det\left(A^m-tE\right) = \left(\lambda_1^m-t\right)\dots\left(\lambda_n^m-t\right).$$

Здесь использовано разложение $a^m-\lambda^m = (a-\lambda)(a-\lambda\varepsilon)\dots$ $\dots\left(a-\lambda\varepsilon^{m-1}\right)$. Чтобы получить его, достаточно заметить, что многочлен $a^m-\lambda^m$ имеет корни $a, a\varepsilon, \dots, a\varepsilon^{m-1}$.

26.25. 1) Многочлен $p_j(t) = \dfrac{d^j}{dt^j}(t^2-1)^k$ при $j<k$ обращается в нуль в точках $t=1$ и $t=-1$. Интегрируя по частям k раз и принимая во внимание, что при $j<k$ $p_j^{(k)}(t)\equiv 0$, получим при $j<k$

$$2^kk!\int_{-1}^{1}p_j(t)\,p_k(t)\,dt = (-1)^k\int_{-1}^{1}p_j^{(k)}(t)\,(t^2-1)^k\,dt = 0.$$

2) Используя предыдущую формулу, имеем

$$\int_{-1}^{1}(p_k(t))^2\,dt = \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k\right)(t^2-1)^k\,dt =$$
$$= \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^k\,dt.$$

Последний интеграл можно вычислить, интегрируя по частям k раз:

$$\int_{-1}^{1}(1+t)^k(1-t)^k\,dt = \frac{k}{k+1}\int_{-1}^{1}(1+t)^{k+1}(1-t)^{k-1}\,dt = \dots$$
$$\dots = \frac{(k!)}{(k+1)\dots(2k)}\int_{-1}^{1}(1+t)^{2k}\,dt = \frac{(k!)^2\,2^{2k+1}}{(2k)!\,(2k+1)}.$$

32.8. 12) Сделаем замену координат

$$x_1 = x_1' + x_2', \quad x_2 = x_1' - x_2', \quad x_3 = x_3'. \tag{15}$$

В новых координатах форма примет вид

$$x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_1'x_3' = (x_1' + x_3')^2 - x_2'^2 - x_3'^2.$$

После второй замены координат

$$x_1'' = x_1' + x_2', \qquad x_2'' = x_2', \qquad x_3'' = x_3' \tag{16}$$

данная квадратичная форма примет канонический вид

$$x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2.$$

Положительный индекс инерции данной формы равен 1, отрицательный равен 2. Ранг формы равен $1 + 2 = 3$, сигнатура равна $1 - 2 = -1$.

Можно записать замену координат, приводящую данную форму к каноническому виду, как суперпозицию замен (15) и (16):

$$x_1 = x_1'' + x_2'' - x_3'', \qquad x_2 = x_1'' - x_2'' - x_3'', \qquad x_3 = x_3''.$$

32.27. 10) Матрица данной квадратичной формы $B = A_{203}$ имеет характеристические числа 3 (кратности 2) и -3 (кратности 1). Инвариантное подпространство, соответствующее собственному значению 3, задается однородной системой линейных уравнений с матрицей $B - 3E$; находим два линейно независимых собственных вектора a_1, a_2 с координатными столбцами $(1, 0, -1)^T$ и $(2, 1, 0)^T$ соответственно. Собственное подпространство, соответствующее собственному значению -3, задается однородной системой линейных уравнений с матрицей $B + 3E$; находим один линейно независимый собственный вектор a_3 с координатным столбцом $(1, -2, 1)^T$. Векторы a_1, a_2, a_3 образуют собственный базис присоединенного преобразования данной квадратичной формы, но нас интересует ортонормированный собственный базис. Так как собственные векторы самосопряженных линейных преобразований евклидова пространства, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, то автоматически $(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 0$. Остается провести ортогонализацию системы векторов a_1, a_2. Положим $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - \alpha a_1$; α выбираем так, чтобы $(b_1, b_2) = 0$, т. е. $\alpha = \dfrac{(a_1, a_2)}{(a_1, a_1)} = 1$, откуда получаем, что вектор b_2 имеет координатный столбец $(-1, -1, -1)^T$. Векторы b_1, b_2, a_3 образуют ортогональный собственный базис присоединенного преобразования; пронормировав эти векторы, получим искомый ортонормированный собственный базис. Для удобства мы изменим знаки всех координат вектора b_2. Координатные столбцы полученных векторов образуют матрицу перехода от данного ортонормированного базиса к базису b_1, $-b_2$, a_3 — матрицу $S = A_{322}$. В найденном базисе квадратичная форма имеет диагональный вид $3x_1'^2 + 3x_2'^2 - 3x_3'^2$. Можно, пользуясь матрицей S, записать замену координат, приводящую данную квадратичную форму к диагональному виду:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}} x_3',$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' - \frac{2}{\sqrt{6}} x_3',$$

$$x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}} x_3'.$$

32.36. 11) Укажем два способа решения задачи.

Способ 1. Обе формы будем рассматривать в трехмерном арифметическом пространстве столбцов. Выпишем матрицы данных форм в исходном базисе:

$$F = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{Vmatrix}, \quad G = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Все главные миноры матрицы G

$$2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

положительны, следовательно, по критерию Сильвестра форма $\mathfrak{g}$ положительно определена. Соответствующую ей билинейную функцию

$$\boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y} = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$$

примем за скалярное произведение и теперь считаем пространство евклидовым. С помощью метода, изложенного во введении к § 32, найдем ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного линейного преобразования φ, присоединенного к форме $\mathfrak{f}$. Собственные значения и собственные векторы вычисляем по формулам (6) и (7) § 32:

$$\det(F - \lambda G) = \begin{vmatrix} 6-2\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -3+\lambda \\ 3-\lambda & -3+\lambda & 6-2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -3+\lambda \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(3-\lambda)^2(3+\lambda); \qquad \lambda = \pm 3.$$

$$F + 3G = \begin{Vmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{Vmatrix}, \quad F - 3G = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Фундаментальное решение системы уравнений $(F + 3G)\,\xi = \boldsymbol{o}$ равно $\boldsymbol{x} = (-1, 3, 2)^T$. Значение функции $\mathfrak{g}(\boldsymbol{x})$ на векторе $(-1, 3, 2)^T$ есть квадрат его длины. Вычисляя это значение, находим нормированный собственный вектор, соответствующий $\lambda = -3$: $e_1' = (-1/\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 2/\sqrt{3})^T$. Из системы уравнений $(F - 3G)\xi = o$ находим, что собственному значению $\lambda = 3$ соответствует собственная плоскость $x_2 = 0$. Найдем в ней два ортогональных собственных вектора. В качестве первого вектора можно взять любое ненулевое решение уравнения $x_2 = 0$, например, $b = (1, 0, 0)^T$. Для нахождения второго собственного вектора $c = (x_1, x_2, x_3)^T$ к уравнению $x_2 = 0$ присоединяем условие ортогональности векторов b и c: $b^T Gc = 2x_1 + x_3 = 0$. Из двух уравнений $x_2 = 0$ и $2x_1 + x_3 = 0$ находим, что $c = (1, 0, -2)^T$ с точностью до числового множителя. Теперь найденные векторы b и c нормируем, вычисляя квадраты их длин $g(b) = 2$ и $g(c) = 6$. Заметим, что векторы b и c ортогональны к a, так как соответствующие собственные значения различны, а преобразование φ самосопряженное. Мы получили ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ: $e_1' = (-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2/\sqrt{3})^T$, $e_2' = (1/\sqrt{2}, 0, 0)^T$, $e_3' = (1/\sqrt{6}, 0, -2/\sqrt{6})^T$. В этом базисе матрица F' формы $\mathfrak{f}$ диагональна, а значит, $\mathfrak{f}$ имеет диагональный вид:

$$F' = \mathrm{diag}(-3, 3, 3); \qquad \mathfrak{f}(x) = -3x_1'^2 + 3x_2'^2 + 3x_3'^2.$$

Так как базис e_1', e_2', e_3' ортонормирован относительно введенного скалярного произведения, то в нем скалярный квадрат вектора (значение функции g на векторе) выражается канонической формой

$$g(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Осталось составить из столбцов e_1', e_2', e_3' матрицу перехода

$$S = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{Vmatrix},$$

а по ней — формулы замены координат

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3'; \qquad x_2 = \sqrt{3}\,x_1';$$

$$x_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{6}}x_3'.$$

Обратим внимание читателя на очевидную уже из хода решения неединственность искомого базиса (ср. ответ).

Способ 2. Дадим лишь его краткое описание. Прежде всего убеждаемся, что форма g положительно определена, и с ее помощью вводим скалярное произведение. Затем находим какой-нибудь базис, в котором форма g имеет канонический вид. Это можно сделать методом выделения квадратов или с помощью элементарных преобразований. Новый базис e' является ортонормированным относительно введенного скалярного произведения. Пусть S_1 — матрица перехода к базису $\boldsymbol{e}'$. Вычислим матрицу F' формы $\mathfrak{f}$ в базисе $\boldsymbol{e}'$. Так как базис $\boldsymbol{e}'$ ортонормирован, то присоединенное к $\mathfrak{f}$ преобразование φ имеет в этом базисе ту же матрицу F'. Найдем собственные значения и ортонормированный базис $\boldsymbol{e}''$ из собственных векторов преобразования φ по его матрице F' обычным способом, используя уравнения (1) и (2) § 24. Обозначим через S_2 ортогональную матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}'$ к базису $\boldsymbol{e}''$ (она состоит из координатных столбцов векторов e_1'', e_2'' и e_3'' относительно базиса $\boldsymbol{e}'$). В базисе $\boldsymbol{e}''$ матрица преобразования φ равна матрице формы $\mathfrak{f}$ и диагональна с собственными значениями на диагонали, а форма $\mathfrak{g}$ по-прежнему выражает скалярный квадрат вектора в ортонормированном базисе и, значит, равна сумме квадратов координат вектора. Матрица S перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}''$ определяется формулой $S = S_1S_2$. Действительно, из $\boldsymbol{e}'' = \boldsymbol{e}'S_2$ и $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S_1$ следует $\boldsymbol{e}'' = \boldsymbol{e}S_1S_2$. В столбцах матрицы S стоят координаты векторов e_1'', e_2'' и e_3'' относительно исходного базиса $\boldsymbol{e}$.

36.7. Напишем выражение старых компонент тензора через новые. С этой целью умножим обе части равенства $a'_{ij} = \sigma_i^k\sigma_j^l a_{kl}$ на $\tau_p^i\tau_q^j$ и просуммируем по i и j. Тогда

$$\tau_p^i\tau_q^j a'_{ij} = \tau_p^i\tau_q^j\sigma_i^k\sigma_j^l a_{kl} = \delta_p^k\delta_q^l a_{kl} = a_{pq}.$$

Следовательно, $a_{pq} = \tau_p^i\tau_q^j a'_{ij}$. Эти равенства можно написать в матричном виде:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tau_1^1\tau_1^1 & \tau_1^1\tau_1^2 & \tau_1^2\tau_1^1 & \tau_1^2\tau_1^2 \\ \tau_1^1\tau_2^1 & \tau_1^1\tau_2^2 & \tau_1^2\tau_2^1 & \tau_1^2\tau_2^2 \\ \tau_2^1\tau_1^1 & \tau_2^1\tau_1^2 & \tau_2^2\tau_1^1 & \tau_2^2\tau_1^2 \\ \tau_2^1\tau_2^1 & \tau_2^1\tau_2^2 & \tau_2^2\tau_2^1 & \tau_2^2\tau_2^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \\ a'_{21} \\ a'_{22} \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Вспомним теперь, что в произвольном линейном пространстве (а значит, и в пространстве тензоров типа (0, 2)) старые компоненты вектора выражаются через новые формулой $\xi = S\xi'$. Это означает, что матрица из произведений $\tau_p^i\tau_q^j$ в формуле (17) и есть искомая матрица перехода. Нетрудно проверить, что она равна $T^T \otimes T^T$.

37.15. Используя результат задачи 37.7, 1), находим компоненты тензора, соответствующего произведению $\varphi\varphi^*$:

$$c_{sk} = g_{ms}a_l^m g^{lj} g_{ik} a_j^i = a_{s\cdot}^{\cdot j} a_{kj}^{\cdot}.$$

Если ввести обозначение $b_{kj} = g_{ik}a_j^i = a_{kj}^{\cdot}$, то

$$c_{sk} = g^{lj} b_{sl} b_{kj}, \qquad c_{ks} = g^{lj} b_{kl} b_{sj}.$$

Используя симметрию тензора g^{lj}, можно проверить, что выражения c_{ks} и c_{sk} отличаются только обозначением индексов суммирования и порядком числовых сомножителей.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1.4. (—12, —2), (0, 0). **1.5.** $\alpha = 2/7$, $\beta = 13/7$. **1.6.** $\mathbf{c}$ (1/16, 11/16), $\mathbf{d}$ (0, 2). **1.7.** (0, 0, 0), (1, —7, —3). **1.8.** $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$. **1.9.** $\mathbf{l}$ (1, 1, 1), $\mathbf{m}$ (0, 2, 0), $\mathbf{n}$ (0, 1, 1). **1.10.** 1) да; $\mathbf{l} + \mathbf{m} + \mathbf{n} = 0$; 2) нет; 3) да; $2\mathbf{l} + \mathbf{m} - \mathbf{n} = 0$. **1.11.** $\beta : \alpha$. **1.12.** $\overrightarrow{BD}$ (—1, 1), $\overrightarrow{CO}$ (—1/2, —1/2), $\overrightarrow{KD}$ (—1, 1/2). **1.13.** $\overrightarrow{AM}$ (1/2, 0), $\overrightarrow{AO}$ (1/3, 1/3), $\overrightarrow{MO}$ (—1/6, 1/3). **1.14.** $\overrightarrow{AB}$ (3/5, —2/5), $\overrightarrow{BC}$ (2/5, 2/5), $\overrightarrow{CD}$ (—2/5, 3/5), $\overrightarrow{DA}$ (—3/5, —3/5). **1.16.** $\overrightarrow{BC}$ (1, 1), $\overrightarrow{CD}$ (0, 1), $\overrightarrow{DE}$ (—1, 0), $\overrightarrow{EF}$ (—1, —1), $\overrightarrow{BD}$ (1, 2), $\overrightarrow{CF}$ (—2, 0), $\overrightarrow{CE}$ (—1, 1). **1.17.** 1) $\overrightarrow{AB}$ (—1, 1, 0), $\overrightarrow{BC}$ (0, —1, 1), $\overrightarrow{AC}$ (—1, 0, 1); 2) $\overrightarrow{KL}$ (—1/2, 1/2, 0), $\overrightarrow{PQ}$ (—1/2, 1/2, 0), $\overrightarrow{NC}$ (1/2, 1/2, —1), $\overrightarrow{MP}$ (1/2, 0, 0), $\overrightarrow{KQ}$ (—1/2, 1/2, 1/2); 3) $\overrightarrow{OS}$ (1/3, 1/3, 1/3), $\overrightarrow{KS}$ (—1/6, 1/3, 1/3). **1.18.** 1) $\overrightarrow{OM}\left(\dfrac{n}{m+n}, \dfrac{m}{m+n}\right)$; 2) $\overrightarrow{ON}\left(\dfrac{n}{n-m}, \dfrac{m}{m-n}\right)$.

1.19. $\left(\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}, \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}\right)$. **1.20.** A (0, 0), B (2/3, —1/3), C (1, 0), D (2/3, 2/3), E (0, 1), F (—1/3, 2/3), O (1/3, 1/3); O — центр шестиугольника. **1.21.** A (0, 0), B (0, 1), C (1/4, 1), D (1, 0), M (1/5, 4/5), S (0, 4/3). **1.22.** C (1, 1, 0), B_1 (1, 0, 1), C_1 (1, 1, 1), K (1/2, 0, 1), L (1, 1, 1/2), M (1/2, 1/2, 1), N (1/2, 0, 1/2), O (1/2, 1/2, 1/2). **1.23.** $D\,(x_1 - x_2 + x_3,\ y_1 - y_2 + y_3)$. **1.24.** 1) $M\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}, \dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$; 2) $N\left(\dfrac{nx_1-mx_2}{n-m}, \dfrac{ny_1-my_2}{n-m}, \dfrac{nz_1-mz_2}{n-m}\right)$. Указание: использовать задачу 1.18. **1.25.** 1) (—3, 16); 2) (9, —20).

1.26. $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}, \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$. **1.27.** $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{B_1} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{D_1} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{C_1} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1$. **1.28.** $\mathbf{r}_D = \mathbf{r}_1 + \dfrac{m}{n}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}_M = \dfrac{n}{m+n}\mathbf{r}_1 + \dfrac{m}{m+n}\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_S = \dfrac{n}{n-m}\mathbf{r}_1 + \dfrac{m}{m-n}\mathbf{r}_2$. **1.30.** $\dfrac{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\,\mathbf{r}_3 + |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|\,\mathbf{r}_1 + |\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|\,\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|}$.

1.31. Точка пересечения медиан треугольника; вне плоскости треугольника таких точек нет. **1.32.** $\dfrac{m_1\mathbf{r}_1+\cdots+m_n\mathbf{r}_n}{m_1+\cdots+m_n}$. **1.33.** $\left(\dfrac{a^2}{2(a+b)},\ \dfrac{b^2}{2(a+b)}\right)$. **1.34.** $\left(\dfrac{22}{9},\ \dfrac{23}{9}\right)$. **1.37.** $|BO|:|ON|=\dfrac{(m_2+n_2)\,n_1}{m_1n_2}$, $|CO|:|OM|=\dfrac{(m_1+n_1)\,n_2}{n_1m_2}$. **1.39.** $|DM|:|MK|=3:2$, $|BM|:|ML|=16:9$. **1.40.** $\dfrac{m+n}{2}$. **1.41.** Указание: использовать задачу 1.15. **1.42.** $\dfrac{(n-2)^2}{n^2-n+1}S$. **1.45.** 1 : 3. **1.46.** 2 : 3. **2.1.** 1) $3/\sqrt{2}$; 2) -21; 3) 0; 4) 5; 5) -6. **2.2.** 1) 6; 2) 38. **2.3.** 1) 3; 2) -1; 3) 0. **2.4.** 1) 0; 2) $\arccos(4/5)$; 3) 90°; 4) $\arccos(-3/\sqrt{10})$; 5) 180°. **2.5.** 1) 10; 2) 5; 3) 0. **2.6.** 1) 22; 2) -1; 3) 0. **2.7.** 1) $\arccos(5/9)$; 2) 180°; 3) 0; 4) 90°; 5) $\arccos(-1/3)$. **2.8.** 1) $5\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 3. **2.9.** 1) $(-28, -14)$; 2) -13; 3) 77. **2.10.** 1) $(-25, -20, 5)$; 2) 11; 3) -28. **2.12.** Нет. **2.13.** $-3/2$. **2.14.** 1) 0; 2) -4; 3) 2. **2.15.** 1) $\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b},\mathbf{c})}$; 2) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2(\mathbf{b},\mathbf{c})}$; 3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{b}|^2|\mathbf{c}|^2-(\mathbf{b},\mathbf{c})^2}$. **2.16.** $\left(\dfrac{|\mathbf{c}|^2-(\mathbf{b},\mathbf{c})}{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b},\mathbf{c})},\ \dfrac{|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{b},\mathbf{c})}{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b},\mathbf{c})}\right)$. **2.18.** 1) $|AB|=|\mathbf{b}|$, $|BC|=\sqrt{|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2(\mathbf{b},\mathbf{c})}$, $|AD|=3|BC|$, $|CD|=\sqrt{9|\mathbf{b}|^2+4|\mathbf{c}|^2-12(\mathbf{b},\mathbf{c})}$, $\cos\angle A=\dfrac{(\mathbf{b},\mathbf{c})-|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|\cdot|BC|}$, $\angle B=180^\circ-\angle A$, $\cos\angle D=\dfrac{2|\mathbf{c}|^2+3|\mathbf{b}|^2-5(\mathbf{b},\mathbf{c})}{|BC|\cdot|CD|}$, $\angle C=180^\circ-\angle D$; 2) $|SM|=\dfrac{3}{4}\sqrt{4|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-4(\mathbf{b},\mathbf{c})}$.

2.19. Длины диагоналей $5\sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$, острый угол 45°. **2.20.** $|AB|=6$, $|AC|=4\sqrt{3}$, $|BC|=2\sqrt{3}$, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=60^\circ$. **2.21.** Длины сторон 3 и 5, острый угол $\arccos(4/5)$. **2.22.** $\sqrt{94}$. **2.23.** $\dfrac{1}{15}(10, -11, -2)$. **2.24.** $\dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. **2.25.** $\dfrac{3}{2}\mathbf{a}$. **2.26.** 1) $(-1, -1)$ и $(2, -2)$; 2) $(0, 0)$ и $(1, -1)$; 3) $(3, 3)$ и $(0, 0)$; 4) $(-2, -2)$ и $(0, 0)$. **2.27.** 1) $(2, -2, 4)$ и $(0, 0, 0)$; 2) $\dfrac{2}{3}(1, -1, 2)$ и $\dfrac{1}{3}(1, 5, 2)$; 3) $(0, 0, 0)$ и $(4, 0, -2)$. **2.28.** $(5, 2)$. **2.29.** $(1, -1, 3)$. **2.30.** $\mathbf{x}=\dfrac{p}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. Указание: вектор $\mathbf{x}$ искать в виде $\lambda\mathbf{a}$. **2.31.** 1) Множество концов векторов, удовлетворяющих уравнению $(\mathbf{x},\mathbf{a})=p$, является прямой линией (все векторы отложены из некоторой точки O). Нормальным вектором этой прямой является вектор $\mathbf{a}$. Проекцией точки O на прямую является конец вектора $\mathbf{x}_0=\dfrac{p}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 2) Множество концов векторов, удовлетворяющих уравнению $(\mathbf{x},\mathbf{a})=p$, является плоскостью (все векторы отложены из некоторой точки O). Нормальным вектором этой плоскости является вектор $\mathbf{a}$. Проекцией точки O на плоскость является конец вектора $\mathbf{x}_0 = \frac{p}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 2.32. 1) Радиус-вектор точки пересечения двух прямых (см. задачу 2.31). 2) Радиус-вектор общей точки трех плоскостей (см. задачу 2.31). 2.33. Два решения: $\pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, -3)$. 2.34. Два решения: $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ и $\frac{1}{7\sqrt{2}}(5, -3, -8)$. 2.35. Угол при вершине $\arccos\frac{4}{5}$. 2.36. Острый угол $\arccos\frac{m^2-n^2}{\sqrt{m^4+n^4-2m^2n^2\cos 2\alpha}}$. 2.37. 90°. 2.38. 1) $\sqrt{m}:\sqrt{n}$; 2) $\sqrt{m}:\sqrt{n}$; 3) $\arccos\left(1-\frac{n}{m}\right)$. 2.40. $|AC_1|^2 = a^2+b^2+c^2+$ $+2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha+2ac\cos\beta$. 2.42. $\arccos(1/18)$. 2.43. $\frac{\sqrt{29}}{8}a$. 2.44. $|EM|:|MF| = |CN|:|ND| = 3:1$. 2.45. $6\sqrt{3}$. 3.1. 1) (11, 19, —7); 2) (0, 0, 0); 3) (0, 0, —15). 3.2. 1) $2[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$; 2) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+4[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+\frac{9}{2}[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$. 3.4. $\lambda = \pm\sqrt{3}$. 3.5. 1) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2$; 2) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = -\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = -\mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = -\mathbf{e}_2$; 3) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \frac{|\mathbf{e}_1|\cdot|\mathbf{e}_2|}{|\mathbf{e}_3|}\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \frac{|\mathbf{e}_2|\cdot|\mathbf{e}_3|}{|\mathbf{e}_1|}\mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \frac{|\mathbf{e}_3|\cdot|\mathbf{e}_1|}{|\mathbf{e}_2|}\mathbf{e}_2$. 3.6. Либо все векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ нулевые, либо они образуют ортонормированный базис (тройка векторов базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ правая). 3.7. Задача 2.33: единственное решение $\frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 2, 3)$; задача 2.34: единственное решение $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$. 3.8. 1) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{\frac{3}{14}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, 5\sqrt{\frac{3}{14}}$. 3.9. 18. 3.14. $\cos\theta = \frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, где θ — двугранный угол, образованный плоскими углами β, γ. Остальные углы выражаются аналогичными формулами. Указание: при вычислениях использовать формулу задачи 3.13, 3). 3.15. $\mathbf{x} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$. Указание: вектор $\mathbf{x}$ искать в виде $\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. 3.16. Множество концов векторов, удовлетворяющих уравнению $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, является прямой линией (все векторы отложены из некоторой точки O). Направляющим вектором этой прямой является вектор $\mathbf{a}$. Проекцией точки O на прямую является конец вектора $\mathbf{x}_0 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]/|\mathbf{a}|^2$. 3.17. $\mathbf{d} = \pm\mathbf{f}/|\mathbf{f}|$, $\mathbf{f} = |\mathbf{a}|[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+$ $+|\mathbf{b}|[\mathbf{c}, \mathbf{a}]+|\mathbf{c}|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; 1) знак $+$ соответствует правой тройке $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, знак — соответствует левой тройке; 2) знак $+$ соответствует левой тройке $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, знак — соответствует правой тройке. 3.18. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$. 3.19. 1) 0; 2) —23; 3) 0; 4) 6. 3.20. 1) Да; 2) нет. 3.21. $\lambda = 3$, $\lambda =$ $= -4$. 3.22. 1) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|/2$; 2) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|/6$. 3.23. 1) 1/3; 2) $1/\sqrt{30}$.

3.24. $10\sqrt{2}$. 3.25. Множество концов векторов, удовлетворяющих уравнению $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$, является плоскостью (все векторы отложены из некоторой точки O). Эта плоскость параллельна векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Проекцией точки O на плоскость является конец вектора $\mathbf{x}_0 = \dfrac{p}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; этот вектор является частным решением данного уравнения. Указание: использовать результат задачи 2.30. 3.26. Указания: 2) использовать формулу двойного векторного произведения (задача 3.13, 2)); 3) и 4) — использовать формулу задачи 3.26, 2); 5) положить в формуле задачи 3.26, 3), $\mathbf{d} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, при вычислении смешанных произведений использовать формулу задачи 3.13, 3). 3.28. 2) $\mathbf{b}_1 = \dfrac{[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$, $\mathbf{b}_2 = \dfrac{[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$. $\mathbf{b}_3 = \dfrac{[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$. 3.29. $\mathbf{b}_1\left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$, $\mathbf{b}_2\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b}_3\left(\dfrac{1}{12}, \dfrac{7}{12}, -\dfrac{1}{4}\right)$. 3.30. $\mathbf{x} = \dfrac{p[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + q[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + s[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$.
3.31. $\dfrac{3}{\sqrt{43}}a$. 3.33. 2 : 1 или 1 : 2 (два решения). 3.34. h^2. 3.35. $\dfrac{2}{15}S$ или $\dfrac{1}{15}S$. 3.36. $2\sqrt{2}a$. 3.38. $\sqrt{2\left[S_1 + S_2 + d^2 + \left(\dfrac{S_1 - S_2}{2d}\right)^2\right]}$.
4.1. 1) $\alpha_1 = -\alpha_1' + 2\alpha_2'$, $\alpha_2 = 3\alpha_1' - 7\alpha_2'$; 2) $\alpha_1' = -7\alpha_1 - 2\alpha_2$, $\alpha_2' = -3\alpha_1 - \alpha_2$; 3) $\mathbf{e}_1(-7, -3)$, $\mathbf{e}_2(-2, -1)$. 4.2. 1) $\alpha_1 = \alpha_1' - \alpha_2' + \alpha_3'$, $\alpha_2 = \alpha_1' - 2\alpha_2' + 3\alpha_3'$, $\alpha_3 = \alpha_1' - 3\alpha_2' + 6\alpha_3'$; 2) $\alpha_1' = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_2' = 3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\alpha_3' = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$; 3) $\mathbf{e}_1(3, 3, 1)$, $\mathbf{e}_2(-3, -5, -2)$, $\mathbf{e}_3(1, 2, 1)$. 4.3. 1) $x = 2x' + y' - 1$, $y = 3x' + y' + 3$; 2) $x' = -x + y - 4$, $y' = 3x - 2y + 9$; 3) $O(-4, 9)$, $\mathbf{e}_1(-1, 3)$, $\mathbf{e}_2(1, -2)$. 4.4. 1) $x = 4x' + 5y' + 3z' + 1$, $y = 2x' + 3y' + 2z' + 1$, $z = x' + 2y' + z' + 2$; 2) $x' = x - y - z + 2$, $y' = -y + 2z - 3$, $z' = -x + 3y - 2z + 2$; 3) $O(2, -3, 2)$, $\mathbf{e}_1(1, 0, -1)$, $\mathbf{e}_2(-1, -1, 3)$, $\mathbf{e}_3(-1, 2, -2)$. 4.5. 1) $x' = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{1}{5}y - \dfrac{7}{5}$, $y' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{2}{5}y + \dfrac{11}{5}$; 2) $O\left(-\dfrac{7}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$, $\mathbf{e}_1\left(\dfrac{1}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$, $\mathbf{e}_2\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$; 3) $O'(5, 2)$, $\mathbf{e}_1'(2, 3)$, $\mathbf{e}_2'(-1, 1)$. 4.6. 1) $x' = x - y + z + 6$, $y' = -x + y - 2z - 8$, $z' = x + z + 3$; 2) $O(6, -8, 3)$, $\mathbf{e}_1(1, -1, 1)$, $\mathbf{e}_2(-1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3(1, -2, 1)$; 3) $O'(-1, 3, -2)$, $\mathbf{e}_1'(1, -1, -1)$, $\mathbf{e}_2'(1, 0, -1)$, $\mathbf{e}_3'(1, 1, 0)$. 4.7. $\alpha_1 = -7\alpha_1' - 17\alpha_2'$, $\alpha_2 = 5\alpha_1' + 12\alpha_2'$. 4.8. $\alpha_1 = -\dfrac{3}{2}\alpha_1' + \dfrac{1}{2}\alpha_2' + 4\alpha_3'$, $\alpha_2 = \dfrac{19}{2}\alpha_1' - \dfrac{1}{2}\alpha_2' - 18\alpha_3'$, $\alpha_3 = 5\alpha_1' - 9\alpha_3'$. 4.9. $x = \dfrac{1}{3}x' + 2y' + \dfrac{7}{9}$, $y = -\dfrac{2}{3}x' - 2y' - \dfrac{2}{9}$. 4.10. $x = 4x' + 3y' +$

$+ 6z'$, $y = -8x' - 3y' - 13z' - 1$, $z = 13x' + 4y' + 23z' + 1$
4.11. $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$. **4.12.** $x = \frac{1}{3}x' - y' + 1$, $y = \frac{2}{7}x' + y'$. **4.13.** $x = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x' + y' + \frac{1}{3}$. **4.14.** $x = x' + \frac{3}{5}y'$, $y = -3x' - \frac{13}{5}y' + 3$. **4.15.** $x = -x' - y' + 2$, $y = -x' + y' + 1$. **4.16.** $x = -\frac{3}{5}x' + \frac{2}{5}y' + \frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{5}x' - \frac{2}{5}y' + \frac{2}{5}$. **4.17.** $x = -x' - 2y' + 2$, $y = -2x' - y' + 2$. **4.18.** $x = -2x' - 2y' - z' + 2$, $y = y' + z'$, $z = z'$. **4.19.** $x = 2x' + y' + \frac{1}{3}z' - 1$, $y = y' + \frac{1}{3}z'$, $z = -x' - y' + 1$. **4.20.** $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}$. **4.21.** $x = 2x' + 2y' + z'$, $y = x' + 2y' + z'$, $z = -x' - y' - z' + 1$.
4.22. $x = -z' + 1$, $y = y' + 2z' - 1$, $z = -x' - y' - 3z' + 2$.
4.23. $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. **4.24.** 1) $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$, $a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0$, $a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0$, $a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$. **4.25.** 1) $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + x_0$, $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + y_0$; 2) $x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi$, $y' = (y - y_0)\cos\varphi - (x - x_0)\sin\varphi$; 3) $O(-x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi,\ x_0\sin\varphi - y_0\cos\varphi)$. **4.26.** 1) $x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' + 3$; 2) $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 3$; 3) $x = -y' + 1$, $y = x' + 3$; 4) $x = -x' + 1$, $y = -y' + 3$. **4.27.** 1) $x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + x_0$, $y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + y_0$; 2) $x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi$, $y' = (x - x_0)\sin\varphi - (y - y_0)\cos\varphi$; 3) $O(-x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi,\ -x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi)$. **4.28.** $x = -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{48}{25}$, $y = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + \frac{36}{25}$. **4.29.** $x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{2}z' - 1$, $y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{2}z' + 3$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 5$. **4.30.** $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3}$, $z = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' + \frac{2}{3}$.

5.1. 1) a_1 и a_2 не коллинеарны; 2) a_1 и a_2 коллинеарны, a_1 и $r_2 - r_1$ не коллинеарны; 3) $a_1, a_2, r_2 - r_1$ коллинеарны. 5.2. 1) $\arccos \frac{|(a_1, a_2)|}{|a_1|\cdot|a_2|}$; 2) $\arccos \frac{|(n_1, n_2)|}{|n_1|\cdot|n_2|}$. 5.3. $r_0 + \frac{D-(r_0, n)}{(a, n)} a$. 5.4. 1) $r_0 + \frac{D-(r_0, n)}{|n|^2} n$; 2) $r_0 + 2\frac{D-(r_0, n)}{|n|^2} n$. 5.5. 1) $\frac{|(r_0, n) - D|}{|n|}$; 2) $\frac{|[r_0 - r_1, a]|}{|a|}$. 5.6. 1) $(1, k)$; 2) $(-B, A)$. 5.7. 1) $2x - 3y + 5 = 0$; 2) $x = 4t$, $y = 1 + 3t$, т. е. $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$. 5.8. 1) $x - 2y + 11 = 0$; 2) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3}$; 3) $x = -3$; 4) $y = 4$; 5) $x = -3 + t$, $y = 4 - 7t$. 5.9. 1) $x - 4y + 7 = 0$; 2) $2x - y + 2 = 0$; 3) $x = 2$; 4) $y = -3$. 5.10. 1) Пересекаются в точке $(5/7, -3/7)$; 2) совпадают; 3) параллельны; 4) пересекаются в точке $(5, -1)$. 5.11. 1) $a \neq \pm 2$; 2) $a = -2$; 3) $a = 2$. 5.12. $a = 1$, $a = -1$, $a = -2$. 5.14. $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2} + 1$, $y = -1$, $y = 5$. 5.15. $(-4, 3)$; $5x + 2y - 13 = 0$; $x - 5y + 19 = 0$; $4x + 7y - 5 = 0$. 5.16. $43x + 12y - 67 = 0$. Указание: искомая прямая — вторая диагональ параллелограмма со сторонами на данных прямых и с центром в точке A. 5.17. $10x + 11y - 21 = 0$; $4x + 5y - 9 = 0$; $2x + y - 15 = 0$. 5.18. 2 прямые: $4x - y + 9 = 0$, $2x + 3y - 13 = 0$. 5.19. 3 прямые: $x - 3y + 7 = 0$, $3x + 4y - 18 = 0$, $2x + 7y - 12 = 0$. 5.20. $5 : 18$. 5.21. 1) $(-k, 1)$; 2) (A, B). 5.22. 1) $2x + y + 2 = 0$; 2) $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-4}{2}$; 3) $y = 4$; 4) $x = -3$; 5) $x = -3 + 7t, y = 4 + t$. 5.23. $5x - y - 17 = 0$, $5x - y + 9 = 0$, $x + 5y - 19 = 0$, $x + 5y + 7 = 0$. 5.24. $x - y\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1 = 0$, $x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 0$, $x + y\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 1 = 0$, $x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = 0$. 5.25. $(3, 11)$. 5.26. 1) $\sqrt{13}$; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 6; 6) 11. 5.27. $|C_2 - C_1|/\sqrt{A^2 + B^2}$. 5.28. $2x - y - 14 = 0$, $2x - y + 6 = 0$. 5.29. $(7, 6)$ или $(-3, -2/3)$. 5.30. $(3, 5)$ или $(-37, 45)$. 5.31. Пара прямых: $A_1x + B_1y + C_1 = \pm\lambda(A_2x + B_2y + C_2)$, где $\lambda = k\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)/(A_2^2 + B_2^2)}$. 5.32. 1) $(-2, 3)$; 2) $(-5, 4)$. 5.33. $x - 3y + 7 = 0$. 5.34. $5x - 10y - 11 = 0$. 5.35. $x = 5$. 5.36. $(7, -5)$; $2x - 3y + 11 = 0$; $2x + y - 9 = 0$; $x + y - 2 = 0$. 5.37. $3x + 4y - 11 = 0$, $3x + 4y + 1 = 0$, $63x + 59y - 205 = 0$. 5.38. $x + y - 4 = 0$, $x + y = 0$, $y = 5$, $x = 3$. 5.39. 1) $\arccos(1/\sqrt{10})$; 2) $\arccos(2/\sqrt{5})$; 3) $90°$; 4) 0; 5) $\arccos(4/\sqrt{65})$. 5.40. 2 прямые: $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$. 5.41. $x = 2 + y(2 + \sqrt{3})$, $x = 2 + y(2 - \sqrt{3})$. 5.42. $2x - 11y + 16 = 0$ или $2x - 11y + 6 = 0$. 5.43. $(3, 12)$. 5.44. $3x - y + 17 = 0$. 5.45. $x + 3y + 9 = 0$. 5.46. $77x + 21y - 50 = 0$, $7x - 56y + 25 = 0$, $y = x$.

5.47. Радиус вписанной окружности равен 4, радиус описанной окружности равен 325/16. Центр вписанной окружности имеет координаты $(-8, -1)$, центр описанной окружности имеет координаты $(-3/16, 51/4)$. 5.48. $6x+y-11=0$, $x+6y+4=0$, $146x+99y-641=0$. 5.49. $(-3, 5)$. 5.50. $11x-15y+11=0$. 5.51. Два решения: 1) радиус равен $2\sqrt{2}$, центр имеет координаты $(-3, 1)$; 2) радиус равен $\sqrt{2}$, центр имеет координаты $(-2, 4)$. 5.52. $x=3$, $y=-1$ или $3x+4y-5=0$, $4x-3y-15=0$. 5.53. $(Aa_{11}+Ba_{21})x'+(Aa_{12}+Ba_{22})y'+Aa_{10}+Ba_{20}+C=0$. 5.54. $3x'-y'+3=0$.

5.55. 1) $x=-\frac{12}{11}x'-\frac{10}{11}y'+1$, $y=-\frac{4}{11}x'+\frac{15}{11}y'+1$; 2) $2x'+5y'-4=0$. 5.56. $5x'+\sqrt{3}y'-4\sqrt{3}=0$. 5.57. 1) $x=-\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'+1$, $y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'+3$; 2) $6x'-7y'-6\sqrt{5}=0$.

6.1. 1) $(\mathbf{r}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])=(\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})$; 2) $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]=[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$; 3) $\mathbf{r}=\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}+\mathbf{a}t$; 4) $[\mathbf{r}, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]]=D_2\mathbf{n}_1-D_1\mathbf{n}_2$; 5) $\mathbf{r}=\frac{[\mathbf{a}, D_2\mathbf{n}_1-D_1\mathbf{n}_2]}{|\mathbf{a}|^2}+\mathbf{a}t$, $\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. 6.2. 1) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]\neq 0$; 2) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]=0$; если $\mathbf{n}_1=\lambda\mathbf{n}_2$, то $D_1\neq\lambda D_2$; 3) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]=0$; если $\mathbf{n}_1=\lambda\mathbf{n}_2$, то $D_1=\lambda D_2$. 6.3. 1) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\neq 0$, $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)=0$; 2) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]\neq 0$, $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\neq 0$; 3) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]=0$, $[\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1]\neq 0$; 4) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]=0$, $[\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1]=0$. 6.4. 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{n})\neq 0$; 2) $(\mathbf{a}, \mathbf{n})=0$, $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\neq D$; 3) $(\mathbf{a}, \mathbf{n})=0$, $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})=D$. 6.5. 1) $\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$; 2) $\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}+\frac{D|\mathbf{a}|^2-(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})}{|\mathbf{a}|^2(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$.
6.6. 1) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{n}t$; 2) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$. 6.7. $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$.
6.8. 1) $\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$; 2) $\mathbf{r}_0+2\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. 6.9. 1) $\mathbf{r}_1+\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$; 2) $2\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0+2\frac{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 6.10. 1) $(\mathbf{r}, \mathbf{n})=D$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n})=0$; 2) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})=0$; 3) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1)=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}_2)=0$; 4) $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])=0$. 6.11. 1) $\frac{|(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})-D|}{|\mathbf{n}|}$; 2) $\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}$; 3) $\frac{|D_1-D_2|}{|\mathbf{n}|}$; 4) $\frac{|[\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$; 5) $\frac{|[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]-\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$; 6) $\frac{|[\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$; 7) $\frac{|\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2|}{|\mathbf{a}|}$; 8) $\frac{|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}$; 9) $\frac{|(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)+(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}$. 6.12. Два решения: $\mathbf{r}_0+\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\pm\rho|\mathbf{n}|}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$.
6.14. 1) $4x-y+3z+1=0$; 2) $x=u$, $y=v$, $z=-1-2u+3v$.
6.16. 1) $x+3y-11=0$, $y+z-4=0$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{1}$; 2) $x=7+3t$, $y=11+5t$, $z=t$; $\frac{x-7}{3}=\frac{y-11}{5}=\frac{z}{1}$.

6.17. 1) $x-3y+2z-8=0$; 2) $x=1$; 3) $y=-1$; 4) $z=2$; 5) $x=1-u+v,\ y=-1+u+2v,\ z=2+7u+3v$. **6.18.** 1) $x+y-z-3=0,\ 2x+3y+z-12=0$; 2) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{21}$; 3) $x=1,\ y=3$; 4) $x=1,\ z=1$; 5) $y=3,\ z=1$. **6.19.** 1) $x+3y-10=0,\ 2y+z-5=0$; 2) $x+y-5=0,\ z=5$; 3) $y=1,\ z=2$. **6.20.** 1) $2y-z+1=0$; 2) $6x+y-10z+25=0$; 3) $4x-12y+3z-12=0$; 4) $x=2$; 5) три данные точки лежат на одной прямой и не определяют плоскость. **6.21.** 1) Пересекаются по прямой $\frac{x}{1}=\frac{y+\frac{3}{4}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{4}}{1}$; 2) *совпадают*; 3) *параллельны*; 4) пересекаются по прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **6.22.** 1) $a\neq\pm3$; 2) $a=3$; 3) $a=-3$. **6.23.** 1) Прямая лежит в плоскости; 2) пересечение в точке (53, 24, 18); 3) пересечение в точке (— 3/4, 1/4, 1/2); 4) прямая лежит в плоскости; 5) прямая параллельна плоскости. **6.24.** 1) $a\neq\pm 1/2$; 2) $a=-1/2$; 3) $a=1/2$. **6.25.** 1) Пересекаются в точке (— 3, 0, 4) и лежат в плоскости $2x-y+6z-18=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $5x-22y+19z+9=0$; 4) совпадают; 5) пересекаются в точке (— 3, 5, — 5) и лежат в плоскости $9x+10y-7z-58=0$. **6.26.** 1) $a=3$; 2) $a\neq\pm1,\ a\neq3$; 3) $a=-1$; 4) $a=1$. **6.27.** 1) Плоскости имеют единственную общую точку (1, 1, 1); 2) плоскости не имеют общих точек — попарно параллельны; 3) плоскости совпадают (множество общих точек — вся плоскость $x+2y-z-1=0$); 4) плоскости образуют призму (каждая пара пересекается по прямой, три прямые пересечения попарно параллельны); точек, одновременно принадлежащих трем плоскостям, не существует; 5) плоскости пересекаются по общей прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-5}{-6}$.
6.28. $39x+27y-11z-120=0$. **6.29.** $4x+y-8z+6=0$. **6.30.** 1) $x+7y-6z+6=0$; 2) $10x+2y-z+10=0$. **6.31.** 1) $x=0,\ y=3t,\ z=1-t$; 2) $x=0,\ y-4z+3=0$. Указание: исключая x из уравнений данной прямой, получим уравнение проектирующей плоскости. **6.32.** 1) $x=-5-4t,\ y=-3+5t,\ z=-3+2t$. Указание: составить параметрические уравнения проектирующей плоскости. 2) $2x+y+5z-6=0,\ x+2y-3z+2=0$. **6.33.** $x-3z+4=0,\ 2x-4y+5z+9=0,\ 6x+y+z+2=0$; $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{3}$. **6.34.** $4x+y-3z+5=0,\ 10x+y-3z+11=0,\ 20x+5y+3z-29=0,\ x-2y-3z+8=0$. **6.35.** 1) $5x-6y+7z=0,\ x-3y+2z=0$; 2) $2x-y+z=0,\ 25x+12y-20z=0$. **6.36.** 1) $13x-12y+11z+36=0,\ x-2y+z+4=0$; 2) $x-y-z+1=0,\ 8x+14y+19z+13=0$.

6.37. $2x-3y+5z+21=0$, $x-y-z-17=0$. **6.38.** 2 плоскости: $11x-13y+8z+18=0$, $20x-8y-5z-22=0$. **6.39.** 4 плоскости: $x+4y+z-5=0$, $x-10y-6z+23=0$, $2x+y+2z-10=0$, $2x+y+9z-38=0$. **6.40.** 7 плоскостей: $5x+y-7z+13=0$, $3x-y-5z+15=0$, $z-4=0$, $x+y+z-7=0$, $x-z+1=0$, $x+y-3z+5=0$, $x-2z+6=0$. **6.41.** 1) а) $P(11/3, 0, 0)$, $Q(0, 11/2, 0)$, $R(0, 0, 11/4)$, $S(-5, 13, 0)$; l_1: $3x+2y+4z-11=0$, $z=0$; l_2: $3x+2y+4z-11=0$, $y=0$; l_3: $3x+2y+4z-11=0$, $x=0$; б) $P(7/2, 0, 0)$, $Q(0, 7, 0)$, $R(0, 0, 7/2)$, $S(-2, 7, 2)$; l_1: $2x+y+2z-7=0$, $z=0$; l_2: $2x+y+2z-7=0$, $y=0$; l_3: $2x+y+2z-7=0$, $x=0$; в) $P(2/3, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 2)$, $S(-3, 10, 1)$; l_1: $3x+y+z-2=0$, $z=0$; l_2: $3x+y+z-2=0$, $y=0$; l_3: $3x+y+z-2=0$, $x=0$; 2) а) $P(-4/3, -1/3)$, $Q(1/2, 3/2)$, $R(1/2, -5/4)$, l_1: $u-v+1=0$, l_2: $u+2v+2=0$, l_3: $u=1/2$; б) $P(-1/2, -3/2)$, $Q(3, 2)$, $R(-1/2, 2)$, l_1: $u-v-1=0$, l_2: $u=-1/2$, l_3: $v=2$; в) $P(1/3, 1/3)$, $Q(1, 1)$, $R(-1, 1)$, l_1: $u-v=0$, l_2: $u+2v-1=0$, l_3: $v=1$. **6.42.** 18 : 125. **6.43.** 1) (A, B, C); 2) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, где $\mathbf{n}_i(a_i, b_i, c_i)$, $i=1, 2, 3$. **6.44.** 1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{2}$; 2) $y=-1$, $z=2$; 3) $x=1$, $z=2$; 4) $x=1$, $y=-1$; 5) $\frac{x-1}{11}=\frac{y+1}{-10}=\frac{z-2}{3}$. **6.45.** 1) $4x-3y+z+4=0$; 2) $3x+4y+21z-36=0$; 3) $z=1$; 4) $y=3$; 5) $x=1$. **6.46.** $5x-10y-3z-3=0$. **6.47.** 1) $5x-2y-z-2=0$; 2) $7x-y+4z-3=0$. **6.48.** $x-y+2z=0$, $39x+15y-12z+90=0$. **6.49.** $(1, -3, 2)$. **6.50.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) 2; 4) 1/3; 5) 0; 6) 2; 7) 4; 8) 1. **6.51.** 1) 2; 2) 5; 3) 3/10. **6.52.** 1) $6x-3y+2z+26=0$ и $6x-3y+2z-16=0$; 2) $x+3y-z+4\sqrt{11}=0$ и $x+3y-z-2\sqrt{11}=0$; 3) $2x+2y-z+2=0$ и $2x+2y-z-16=0$; 4) $3x+4z\pm 15=0$. **6.53.** $(1, 0, -1)$ или $(-1, -3, -2)$. **6.54.** $(0, 0, 1)$ или $(-6/97, -18/97, 127/97)$. **6.55.** $2x-2y-z-2=0$, $x+2y-2z+5=0$, $2x+y+2z-5=0$, $2x-2y-z-11=0$, $x+2y-2z+14=0$, $2x+y+2z-14=0$. **6.56.** $x\sqrt{2}+z-3\sqrt{2}=0$, $x\sqrt{2}-z+3\sqrt{2}=0$, $y\sqrt{2}\pm z=0$. **6.57.** 1) $(3, -1, 0)$, $(3, -1, -1)$; $(3, 0, 1)$, $(3, 1, 1)$; $(0, -1, 1)$, $(-3, -1, 1)$; 2) $(2, -3, -1)$, $(1, -5, -3)$; 3) $(1, -4, -5)$, $(-1, -7, -11)$. **6.58.** $\frac{x+5}{-11}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-4}{8}$. **6.59.** 1) $x+5y-z-25=0$, $17x-7y-18z+35=0$; 2) $x+5y-z-25=0$, $7x-y+2z+8=0$; 3) единственная точка $(0, 5, 0)$. **6.60.** 1) $\arccos(\sqrt{6}/3)$; 2) $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 3) $\arccos\frac{2}{3}$; 4) 90°; 5) 90°; 6) 0. **6.61.** 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{5}$; 2) 90°; 3) 0. **6.62.** 1) $\arcsin(1/\sqrt{6})$; 2) $\arcsin(62/63)$; 3) 90°; 4) 0. **6.63.** 1) $y=3$, $z=2$ или $x=1$, $z=2$; 2) $2x-y+1=0$,

$z=2$ или $x-2y+5=0$, $z=2$. **6.64.** $2x+y+z-1=0$ или $14x+13y-11z-1=0$. **6.65.** $x-z+4=0$ или $x+20y+7z-12=0$. **6.66.** 1) $\frac{x}{7}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-10}=\frac{z-2}{-13}$; 2) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$; 3) $\frac{x-3}{7-2\sqrt{3}}=\frac{y-5}{7-3\sqrt{3}}=\frac{z-5}{-7+6\sqrt{3}}$, $\frac{x-3}{7+2\sqrt{3}}=\frac{y-5}{7+3\sqrt{3}}=\frac{z-5}{-7-6\sqrt{3}}$. **6.67.** $90°$, $45°$, $45°$; $4x+3y-24=0$. **6.68.** 1) 3, $(4, -3, 1)$, $(6, -5, 2)$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$; 2) $\frac{5}{3}\sqrt{2}$, $\left(\frac{31}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right)$, $\left(\frac{44}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{32}{9}\right)$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-16}$; 3) $3\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\left(\frac{3}{7}, -\frac{15}{7}, -\frac{2}{7}\right)$, $\left(-\frac{8}{7}, -\frac{23}{7}, -\frac{4}{7}\right)$, $\frac{x-2}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z}{2}$. **6.69.** $(3, 0, 0)$ или $(2, -1, 2)$. **6.70.** 1) $\sqrt{26}/7$; 2) $\sqrt{62}$; 3) $1/\sqrt{59}$. **6.71.** 1) $5x+4y-z-24=0$, $4x-y+2z-43=0$; $(5, 3, 13)$ и $(6, 1, 10)$; $\sqrt{14}$; 2) $2x-5y+8z-9=0$, $x-z+8=0$; $(-4, 3, 4)$ и $(-1, 9, 7)$; $3\sqrt{6}$; 3) $3x-2y-z-6=0$, $5x+34y-11z-38=0$; $(7, 3, 9)$ и $(3, 1, 1)$; $2\sqrt{21}$. **6.72.** 1) $1/\sqrt{2}$; 2) $\frac{24}{11}\sqrt{2}$; 3) $\frac{8}{3\sqrt{41}}$; 4) $\arccos(3\sqrt{2}/10)$; 5) $\arcsin(1/10)$. **6.73.** 1) $2/\sqrt{3}$; 2) $1/\sqrt{6}$; 3) отрезок AC_1 делится в отношении $2:1$, отрезок CD_1 делится в отношении $1:1$. **6.74.** 1) $\frac{30}{\sqrt{65}}$; 2) $\frac{15}{13}\sqrt{29}$; 3) $\frac{9}{11}\sqrt{65}$; 4) 6; 5) $\arccos\frac{118}{143}$; 6) $\arccos\frac{3}{13}$; 7) $\arcsin\frac{15}{19\sqrt{10}}$. **6.75.** 1) Выражение $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)\cdot(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)\cdot(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)$ отрицательно; 2) то же выражение положительно. **6.76.** $3y-4z=0$ или $4y-3z=0$. **6.77.** $x+y+2z+5=0$, $x-2y+z-9=0$. **6.78.** $8x+5y-z-25=0$. **6.79.** $2x-5y-9z-25=0$. **6.80.** 1) $x-10y+13z-18=0$; 2) $x-10y+13z-18=0$, $3x+2z-3=0$. **6.81.** Радиус вписанной сферы равен 1, радиус описанной сферы равен $\frac{3}{2}\sqrt{14}$. Центр вписанной сферы имеет координаты $(2, 3, 4)$, центр описанной сферы имеет координаты $(5/2, 5, 15/2)$. **6.82.** Два решения: 1) радиус равен $\sqrt{2}$, центр имеет координаты $(0, 2, 1)$; 2) радиус равен $\sqrt{2}/3$, центр имеет координаты $(0, 2/3, 1/3)$. **6.83.** Радиус вписанной окружности равен $\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен $\frac{27}{8}\sqrt{2}$. Центр вписанной окружности имеет координаты $(2, 18/5, -4/5)$, центр описанной окружности имеет координаты $(31/8, 6/5, -29/40)$. **6.84.** Радиус вписанного цилиндра

равен 1/3, радиус описанного цилиндра равен $\frac{5}{36}\sqrt{13}$. Ось вписанного цилиндра задается уравнениями $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$, ось описанного цилиндра задается уравнениями $\frac{x-17/36}{-2}=\frac{y-16/9}{1}=$ $=\frac{z}{2}$. 6.85. $\frac{9}{50}a^3$. 6.86. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 6.87. $\frac{27\sqrt{3}}{4}a^3$. 6.88. $(Aa_{11}+$ $+Ba_{21}+Ca_{31})x'+(Aa_{12}+Ba_{22}+Ca_{32})y'+(Aa_{13}+Ba_{23}+Ca_{33})z'+$ $+Aa_{10}+Ba_{20}+Ca_{30}+D=0$. 6.89. $y'+14z'-3=0$. 6.90. 1) $x=$ $=-x'+6y'-4z'+1$, $y=6x'-33y'+28z'-1$, $z=4x'-24y'+$ $+20z'+1$; 2) $\frac{x'+1}{72}=\frac{y'+2/9}{4}=\frac{z'}{-9}$. 6.91. 1) $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+1$, $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+1$, $z=-z'-1$; 2) $4x'+y'-z'+4\sqrt{2}=0$.
6.92. 1) $x=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'-1$, $y=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'$, $z=-\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'+1$; 2) $\frac{x'}{2}=\frac{y'+3}{-7}=\frac{z'}{1}$ и $\frac{x'-1}{1}=$ $=\frac{y'}{-5}=\frac{z'-1}{-1}$; $\arccos(2\sqrt{2}/3)$; $\sqrt{2}$.

7.1. 1) 2; (0, —2); 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (—2,5, 2,5); 3) 11/4; (3, —1/4); 4) 9/14; (1/7, 1/2). 7.2. $A=B\neq0$, $C^2+D^2>AE$. Радиус равен $\sqrt{C^2+D^2-AE}/|A|$, координаты центра $(-C/A,\ -D/A)$. 7.3. $(x-2)^2+(y-2)^2=10$. 7.4. 1) $|Aa+Bb+C|>R\sqrt{A^2+B^2}$; 2) $|Aa+Bb+C|<R\sqrt{A^2+B^2}$; 3) $|Aa+Bb+C|=R\sqrt{A^2+B^2}$. 7.5. 1) $4x-3y+15=0$; 2) $4x+3y-16=0$, $4x-3y+8=0$. 7.6. $5x-12y+29=0$, $5x-12y-23=0$. 7.7. 1) $x+y-9=0$; 2) $x+2y-16=0$. 7.8. $x-5=0$, $y-2=0$, $3x-4y+5=0$, $4x+3y-20=0$. 7.11. $\frac{k}{|1-k^2|}\cdot|AB|$. 7.12. a, $\sqrt{a^2-\frac{1}{4}|AB|^2}$.
7.13. a, $\sqrt{\frac{1}{4}|AB|^2-a^2}$. 7.15. 1) Внутренность круга радиуса 2 с центром в точке (0, —2) (вместе с точками окружности); 2) внешность круга радиуса 5 с центром в точке (—1/2, 3/2) (без точек окружности); 3) часть внутренности круга радиуса 3/2 с центром в точке (— 3/2, 0), лежащая в нижней полуплоскости (без точек границы); 4) часть плоскости, заключенная между окружностями радиусов и 1 и 3 с общим центром в точке (1, —1) (вместе с точками этих окружностей); 5) внутренность эллипса с полуосями 4 и 3, центром которого является точка (0, 0), а фокусы лежат на оси Ox (вместе с точками границы); 6) внешность эллипса с полуосями 3 и 2, центром которого является точка (0, 0), а фокусы лежат на оси Oy (без точек гра-

ницы); 7) часть плоскости, заключенная между двумя эллипсами с центрами в точке (0, 0) и фокусами на оси Ox; один из эллипсов имеет полуоси 9 и 3, другой — полуоси 3 и 1 (вместе с точками границы); 8) внутренность эллипса с полуосями 1/2 и 1/3, центром которого является точка (1/2, — 1/3), а большая ось параллельна оси Ox (без точек границы); этот эллипс вписан в IV координатный угол; 9) внутренность эллипса с фокусами в точках (1, 0) и (— 1, 0) и большой полуосью, равной 3 (без точек границы); малая полуось равна $2\sqrt{2}$; 10) внешность эллипса с фокусами в точках (0, 1) и (0, — 1) на оси Oy и большой полуосью, равной 2 (без точек границы); малая полуось равна $\sqrt{3}$; 11) часть плоскости, заключенная между двумя ветвями гиперболы с центром в точке (0, 0) и фокусами на оси Ox (вместе с точками границы); действительная полуось гиперболы равна 4, мнимая равна 3; 12) части плоскости, находящиеся правее правой ветви и левее левой ветви гиперболы с центром в точке (0, 0) и фокусами на оси Ox (вместе с точками границы); действительная полуось гиперболы равна 2, мнимая равна 3; 13) части плоскости, находящиеся выше верхней ветви и ниже нижней ветви гиперболы с центром в точке (0, 0) и фокусами на оси Oy (вместе с точками границы); действительная полуось гиперболы равна 3, мнимая равна 2; 14) часть плоскости, заключенная между четырьмя ветвями двух гипербол с общим центром в точке (0, 0) (без точек границы); фокусы первой гиперболы находятся на оси Ox, действительная полуось равна 2, мнимая равна 6; фокусы второй гиперболы находятся на оси Oy, действительная полуось равна 6, мнимая равна 2; 15) внешность области, заключенной между четырьмя ветвями двух гипербол с общим центром в точке (0, 0) (без точек границы); фокусы первой гиперболы находятся на оси Ox, действительная полуось равна $1/\sqrt{3}$, мнимая равна 1/3; фокусы второй гиперболы находятся на оси Oy, действительная полуось равна 1/3, мнимая равна $1/\sqrt{3}$; 16) часть плоскости, находящаяся правее левой ветви гиперболы с фокусами в точках (2, 0) и (—2, 0) и действительной полуосью, равной 1 (без точек границы), мнимая полуось равна $\sqrt{3}$; 17) внутренность параболы, вершина которой находится в точке (0, 0), а фокус — в точке (1, 0) (вместе с точками границы); 18) внешность параболы, вершина которой находится в точке (0, 0), а фокус — в точке (1, 5, 0) (без точек границы); 19) часть плоскости, заключенная между двумя параболами с общей вершиной в точке (0, 0) (вместе с точками границы); фокус одной из парабол находится в точке (1/4, 0), другой — в точке (3/4, 0); 20) часть плоскости, заключенная между параболой с вершиной в точке (0, 0) и фокусом в точке (— 1/2, 0) и окружностью радиуса 1 с центром в точке (1, 0) (без точек границы). **7.16.** 1) Окружность радиуса 3 с центром в точке (0, 0); 2) окружность радиуса 2 с центром в точке (1, 2); 3) верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в точке (0, 0). **7.18.** Другая ветвь гиперболы задается параметрическими уравнениями $x = x_0 - a\operatorname{ch} t$, $y = y_0 + b\operatorname{sh} t$; обе ветви сразу — уравнениями $x = x_0 \pm a\operatorname{ch} t$, $y = y_0 + b\operatorname{sh} t$. **7.19.** 1) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат; 2) ветвь гиперболы, фокус которой находится в начале координат, вершина — в точке $(-1/3, 0)$, центр — в точке $(-2/3, 0)$, действительная полуось равна $1/3$, мнимая равна $1/\sqrt{3}$; 3) эллипс, левый фокус которого находится в начале координат, центр — в точке $(1, 0)$, большая полуось равна 2, малая равна $\sqrt{3}$; 4) парабола, фокус которой находится в начале координат, а вершина — в точке $(-1, 0)$. **7.20.** Ветвь гиперболы, фокус которой находится в точке A, действительной полуосью является прямая AB, длина действительной полуоси равна $a/3$, мнимой — $a/\sqrt{3}$ (здесь a — длина отрезка AB). **7.21.** Эксцентриситет равен нулю, оба фокуса совпадают с центром окружности, директрис нет («удалены в бесконечность»). **7.22.** 1) a и b; $\sqrt{1-(b/a)^2}$; $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ и $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$; $x = \pm a^2/\sqrt{a^2-b^2}$; 2) b и a; $\sqrt{1-(a/b)^2}$; $(0, \sqrt{b^2-a^2})$ и $(0, -\sqrt{b^2-a^2})$; $y = \pm b^2/\sqrt{b^2-a^2}$; 3) 5 и 3; 4/5; $(4, 0)$ и $(-4, 0)$; $x = \pm 25/4$; 4) 1 и 1/2; $\sqrt{3}/2$; $(0, \sqrt{3}/2)$ и $(0, -\sqrt{3}/2)$; $y = \pm 2/\sqrt{3}$. **7.23.** 1) Вне эллипса; 2) принадлежит эллипсу; 3) внутри эллипса. **7.24.** 8/3. **7.25.** 1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; 4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; 6) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{21}=1$; 7) $\frac{x^2}{9/32}+\frac{y^2}{1/4}=1$; 8) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$; 9) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. **7.26.** 1) 4/5; 2) 1/2; 3) 1/2; 4) $1/\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2/3}$; 6) $(\sqrt{5}-1)/2$; 7) $(\sqrt{5}-1)/2$. **7.27.** $x = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{4ab}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}$. **7.28.** Часть прямой $18x - 25y = 0$, лежащая внутри эллипса. **7.29.** $x + 2y - 7 = 0$. **7.30.** 2 решения: $y = 3 \pm \frac{x}{2}$. **7.31.** 1) 4 точки $(\pm\sqrt{8/3}, \pm 1/\sqrt{3})$; 2) точки $(0, \pm 1)$; 3) таких точек нет. **7.32.** 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, где $a > |c|$; 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{d^2y^2}{a^2(d^2-a^2)}=1$, где $0 < a < |d|$. **7.33** 1) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$; 2) $\frac{(5x+14)^2}{576}+\frac{5(y-2)^2}{64}=1$ или $\frac{(x+22)^2}{576}+\frac{(y-2)^2}{320}=1$; 3) 4 решения: $\frac{x^2}{18}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$, $\frac{(x-12)^2}{162}+\frac{(y-7)^2}{81}=1$, $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{18}=1$, $\frac{(x+3)^2}{81}+\frac{(y+8)^2}{162}=1$. **7.34** 1) $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$; 2) $\max AB = \sqrt{a^2+b^2}$, $\min AB = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **7.35.** 1) a и b; $\sqrt{1+(b/a)^2}$; $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ и $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$; $x = \pm a^2/\sqrt{a^2+b^2}$;

$bx \pm ay = 0$; 2) b и a; $\sqrt{1 + (a/b)^2}$; $(0, \sqrt{a^2+b^2})$ и $(0, -\sqrt{a^2+b^2})$; $y = \pm b^2/\sqrt{a^2+b^2}$; $bx \pm ay = 0$; 3) 4 и 3; 5/4; (5, 0) и (—5, 0); $x = \pm 16/5$; $3x \pm 4y = 0$; 4) 1 и 1; $\sqrt{2}$; $(0, \sqrt{2})$ и $(0, -\sqrt{2})$; $y = \pm 1/\sqrt{2}$; $y \pm x = 0$; 5) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $x + y \pm \sqrt{2} = 0$; $x = 0$ и $y = 0$; 6) 2 и 2; $\sqrt{2}$; (—2, 2) и (2, —2); $y - x \pm 2 = 0$; $x = 0$ и $y = 0$. **7.36.** 1) Принадлежит гиперболе; 2) внутри (правее) правой ветви; 3) между двумя ветвями; 4) внутри (левее) левой ветви. **7.37.** 24,5. **7.38.** 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$; 2) $\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{3} = 1$; 3) $x^2 - \frac{y^2}{1/5} = 1$ или $\frac{x^2}{485/6} - \frac{y^2}{7760} = 1$; 4) $\frac{x^2}{9/64} - \frac{y^2}{1/4} = 1$; 5) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$; 6) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$; 7) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$; 8) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$; 9) нет решений. **7.39.** $\frac{X^2}{5} - \frac{Y^2}{5/4} = 1$. **7.40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) $\sqrt{10}$ или $\sqrt{10}/3$. **7.41.** 1) $3/\sqrt{5}$ или $\sqrt{41/5}$; 2) $3/\sqrt{5}$ или 6/5. **7.42.** $1/\varepsilon$. **7.43.** $\frac{5x^2}{4} - \frac{5y^2}{6} = 1$. **7.44.** Два луча прямой $x - 4y = 0$, лежащие правее правой ветви и левее левой ветви гиперболы. **7.45.** $4x - 3y - 4 = 0$. **7.46.** 1) 4 точки $(\pm 3/\sqrt{5}, \pm 4/\sqrt{5})$; 2) 4 точки $(\pm\sqrt{17/5}, \pm 4\sqrt{3/5})$. **7.47.** 1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, где $0 < a < |c|$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{d^2y^2}{a^2(a^2 - d^2)} = 1$, где $a > |d|$; 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{k^2a^2} = \pm 1$. **7.48.** 1) $2(x-4)^2 - 2(y+2)^2 = 1$; 2) $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$ или $\frac{(x+14)^2}{100} - \frac{(y-3)^2}{125} = 1$; 3) $\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$. **7.49.** 1) $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$; 2) $\frac{ab}{2}$. **7.50.** a. **7.51.** 1) $(p/2, 0)$, $x = -p/2$; 2) $(-p/4, 0)$, $x = p/4$; 3) (3/2, 0), $x = -3/2$; 4) (—3/4, 0), $x = 3/4$; 5) (0, 1/4), $y = -1/4$; 6) $(0, -\sqrt{3}/4)$, $y = \sqrt{3}/4$. **7.52.** 1) Внутри параболы; 2) вне параболы; 3) принадлежит параболе. **7.53.** 1/5. **7.54.** 1) $y^2 = 5x$; 2) $y^2 = 24x$; 3) $y^2 = 9x$. **7.55.** Луч прямой $y = -9/4$, лежащий внутри параболы. **7.57.** $x - y - 2 = 0$. **7.58.** 1) $(15/2, 5\sqrt{3})$ и $(15/2, -5\sqrt{3})$; 2) (2/5, 2) и (2/5, —2); 3) $(5/4, 5/\sqrt{2})$ и $(5/4, -5/\sqrt{2})$; 4) $(8, 4\sqrt{5})$, $(8, -4\sqrt{5})$, $(10/3, 10/\sqrt{3})$ и $(10/3, -10/\sqrt{3})$. **7.59.** На отрезке $[0, 2/\sqrt{3}]$. **7.60.** 1) $(y-b)^2 = 2p(x-a)$; 2) $(y-b)^2 = 2p(a-x)$; 3) $(x-a)^2 = 2p(y-b)$; 4) $(x-a)^2 = 2p(b-y)$. **7.61.** 1) $y^2 = p^2 + 2px$, $p \neq 0$; 2) $y^2 = -p^2 + 2px$, $p \neq 0$. **7.62.** 1) $y^2 = 12x - 48$; 2) $y^2 = 15 - 2x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) 4 параболы $\pm 6y = x(x \pm 6)$. **7.63.** p. **8.1.** 1) $x + y = 4$; 2) $x - 3y - 12 = 0$; 3) $x = -3$; 4) $3x - 2y - 16 = 0$; 5) $x + 2y - 8 = 0$; 6) $2x - 2y + 3 = 0$. **8.2.** 1) $\frac{(x-\alpha)(x_0-\alpha)}{a^2} +$

$+\frac{(y-\beta)(y_0-\beta)}{b^2}=1$; 2) $\frac{(x-\alpha)(x_0-\alpha)}{a^2}-\frac{(y-\beta)(y_0-\beta)}{b^2}=1$; 3) $xy_0+yx_0=2k$; 4) $(y-\beta)(y_0-\beta)=p(x+x_0-2\alpha)$. **8.3.** 1) $a^2A^2+b^2B^2=C^2$; 2) $a^2A^2-b^2B^2=C^2$, $C\neq 0$; 3) $a^2A^2-b^2B^2=-C^2$, $C\neq 0$; 4) $4ABk=C^2$, $C\neq 0$; 5) $pB^2=2AC$. **8.4.** $a|\beta|>b|\alpha|$. **8.5.** 1) $(6,-3)$; 2) $(5,3)$; 3) $(-4, 3/4)$; 4) $(1,-2)$. **8.6.** 1) $2x-y\pm 12=0$; 2) $x+2y\pm 3\sqrt{14}=0$; 3) $2x+y\pm 12=0$; $x-2y\pm 3\sqrt{14}=0$. **8.7.** 1) $4x-3y\pm 16=0$; 2) $x=\pm 5$; 3) нет решений. **8.8.** 1) $x-2y+10=0$; 2) $x=0$; 3) нет решений. **8.9.** 1) $(-2/3, -2/3)$, $1/15$; 2) $\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 0; 3) $(2,-1)$, 1; 4) $(2,-1)$ и $(-2,1)$, $19/13$; 5) $(9, 24)$, 8. Указание: рассмотреть касательные, параллельные данной прямой. **8.10.** 1) $\frac{3\sqrt{2}\pm 1}{\sqrt{34}}$; 2) $\sqrt{3}$. **8.11.** 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{4y^2}{25}=1$ или $\frac{16x^2}{225}+\frac{9y^2}{100}=1$; 2) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. **8.12.** 1) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ или $\frac{9x^2}{128}-\frac{y^2}{64}=1$; 2) $x^2-\frac{y^2}{4}=1$. **8.13.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$. **8.14.** 1) $y=2x^2+\frac{1}{2}$; 2) $y^2=4x$. **8.15.** 4 прямые $x\pm y\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=0$. **8.16.** $x+y-2=0$ или $x-y-2=0$. **8.18.** 2) ab. **8.21.** $x\pm y\pm 3=0$. **8.22.** 1) $x=-3$, $x\pm\sqrt{3}y-2\sqrt{3}=0$ или $x=3$, $x\pm\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$; 2) $y=-1$, $\pm x\sqrt{3}+y-2\sqrt{7}=0$ или $y=1$, $\pm x\sqrt{3}+y+2\sqrt{7}=0$. **8.23.** 1) $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$ (точка лежит вне эллипса); 2) $0\neq\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$ (точка лежит между ветвями гиперболы, но не на асимптотах); 3) $y_0^2>2px_0$ (точка лежит вне параболы). **8.24.** 1) $2x\pm 3y+12=0$; 2) $10x+3\sqrt{7}y-48=0$ и $10x+51\sqrt{7}y-384=0$; 3) $8x+3\sqrt{2}y+36=0$ (точка лежит на эллипсе); 4) точка лежит внутри эллипса, решений нет. **8.25.** 1) $x+2=0$ и $5x+8y-6=0$; 2) $5x\pm 6y-8=0$; 3) $x-\sqrt{3}y-1=0$ (точка лежит на гиперболе); 4) точка лежит правее ветви гиперболы, решений нет; 5) $17x-30y-16=0$ (точка лежит на асимптоте); 6) точка совпадает с центром гиперболы, решений нет. **8.26.** 1) точка лежит внутри параболы, решений нет; 2) $2x-y+2=0$ (точка лежит на параболе); 3) $x-y+4=0$ и $4x-y+1=0$; площадь треугольника равна 37,5. **8.28.** 1) 4 касательные $x\pm 4y\pm 10=0$; 2) 4 касательные $x\pm y\pm 1=0$; 3) 2 касательные $x\pm\sqrt{6}y+3=0$; 4) 2 касательные $x\pm\sqrt{2}y+1=0$; 5) 4 касательные $x\pm\sqrt{2}y+1=0$, $x\pm\sqrt{6}y+3=0$; 6) 4 касательные $x\pm y\pm 3=0$; 7) 2 касательные $x\pm 6y+8=0$. **8.32.** 1) $6x+17y-10=0$ и $6x+17y-$

$-46=0$; 2) $24x+41y-22=0$ и $24x+41y-94=0$; 3) решений нет (данная кривая является гиперболой, а данная прямая — ее асимптотой). **8.33.** 1) $x+3y-12=0$ и $3x+y-12=0$; 2) $13x+15y+12=0$ (точка лежит на кривой); 3) решений нет (данная кривая является эллипсом, а данная точка лежит внутри этого эллипса). **9.1.** 1) Эллипс $\left(\text{окружность радиуса } \frac{7}{4\sqrt{5}}\right)$ $\frac{X^2}{49/80}+\frac{Y^2}{49/80}=1$; $O'\left(-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$; 2) гипербола $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1$; $O'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$; 3) эллипс $X^2+\frac{Y^2}{4/9}=1$; $O'\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $E_1(0, 1)$, $E_2(-1, 0)$; 4) парабола $Y^2=\frac{8}{3}X$; $O'\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $E_1(0, 1)$, $E_2(-1, 0)$; 5) пара параллельных прямых $y=16/9$, $y=-1$; $Y^2=(25/18)^2$; $O'(0, 7/18)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$; 6) пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке $O'(-1, 3)$; 7) мнимый эллипс; 8) пара мнимых параллельных прямых; 9) пара совпавших прямых $x=3/5$; $Y^2=0$; $O'(3/5, 0)$, $E_1(0, 1)$, $E_2(-1, 0)$; 10) пара пересекающихся прямых $3\sqrt{5}(x-1)=\pm 2(3y+1)$; $\frac{X^2}{1/5}-\frac{Y^2}{1/4}=0$; $O'(1, -1/3)$, $E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$. **9.2.** Обозначим $K=\frac{C^2}{A}+\frac{D^2}{B}-E$. 1) Кривая является эллипсом тогда и только тогда, когда A, B, K не равны нулю и все одного знака; центр в точке $(-C/A, -D/B)$. При $A=B$ окружность радиуса $\sqrt{K/A}$, оба фокуса совпадают с центром. При $|A|<|B|$ большая полуось равна $\sqrt{K/A}$, малая равна $\sqrt{K/B}$; фокусы в точках $\left(-\frac{C}{A}\pm\sqrt{\frac{K}{A}-\frac{K}{B}}, -\frac{D}{B}\right)$. При $|A|>|B|$ большая полуось равна $\sqrt{K/B}$, малая равна $\sqrt{K/A}$; фокусы в точках $\left(-\frac{C}{A}, -\frac{D}{B}\pm\sqrt{\frac{K}{B}-\frac{K}{A}}\right)$. 2) Кривая является гиперболой тогда и только тогда, когда A, B, K не равны нулю и $AB<0$; центр в точке $(-C/A, -D/B)$. При $AK>0$ действительная полуось равна $\sqrt{K/A}$, мнимая равна $\sqrt{-K/B}$; фокусы в точках $\left(-\frac{C}{A}\pm\sqrt{\frac{K}{A}-\frac{K}{B}}, -\frac{D}{B}\right)$. При $BK>0$ действительная полуось равна $\sqrt{K/B}$, мнимая равна $\sqrt{-K/A}$; фокусы в точках $\left(-\frac{C}{A}, -\frac{D}{B}\pm\sqrt{\frac{K}{B}-\frac{K}{A}}\right)$. **9.3.** Начало канонической системы координат везде совпадает с началом исходной системы. 1) Эллипс $\frac{X^2}{121}+\frac{Y^2}{11}=1$; $E_1\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $E_2\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

2) гипербола $\frac{X^2}{9/8}-\frac{Y^2}{9/8}=1$; $E_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 3) гипербола $\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{3}=1$; $E_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 4) эллипс $\frac{X^2}{3/2}+\frac{Y^2}{1/9}=1$; $E_1\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $E_2\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$; 5) парабола $Y^2=\sqrt{2}X$; $E_1(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $E_2(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$; 6) пара параллельных прямых $3x-y\pm\sqrt{10}=0$; $Y^2=1$; $E_1(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$, $E_2(-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$; 7) пара совпавших прямых $9x-2y=0$; $Y^2=0$; $E_1(2/\sqrt{85}, 9/\sqrt{85})$, $E_2(-9/\sqrt{85}, 2/\sqrt{85})$; 8) пара пересекающихся прямых $(\sqrt{5}\pm\sqrt{2})x-2y=0$; $X^2-\frac{Y^2}{1/8}=0$; $E_1(\sqrt{5}/3, 2/3)$, $E_2(-2/3, \sqrt{5}/3)$. **9.4.** 1) Эллипс $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{1/3}=1$; $O'(-3, -1)$, $E_1(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $E_2(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$; 2) гипербола $\frac{X^2}{1/4}-Y^2=1$; $O'(-1, 1)$, $E_1(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $E_2(-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$; 3) парабола $Y^2=X/5$; $O'(6/25, -8/25)$, $E_1(-4/5, -3/5)$, $E_2(3/5, -4/5)$; 4) эллипс $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{2/3}=1$; $O'(-1, -1)$, $E_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 5) гипербола $\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{4}=1$; $O'(-1, -2)$, $E_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 6) парабола $Y^2=4\sqrt{2}X$; $O'(2, 1)$, $E_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 7) эллипс $\frac{X^2}{14}+Y^2=1$; $O'(3, -2)$, $E_1\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $E_2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; 8) гипербола $\frac{X^2}{1/9}-\frac{Y^2}{1/25}=1$; $O'(1, -1)$, $E_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 9) парабола $Y^2=\frac{6}{\sqrt{34}}X$; $O'\left(-\frac{11}{17}, \frac{10}{17}\right)$, $E_1\left(-\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$, $E_2\left(\frac{5}{\sqrt{34}}, -\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$; 10) пара пересекающихся прямых $x=-1/2$, $4x+3y+1=0$; $\frac{X^2}{1/9}-Y^2=0$; $O'(-1/2, 1/3)$, $E_1(3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$, $E_2(-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$; 11) пара параллельных прямых $2x+3y-5=0$, $2x+3y+1=0$; $Y^2=9/13$; $O'(4/13, 6/13)$, $E_1(-3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$, $E_2(-2/\sqrt{13}, -3/\sqrt{13})$; 12) пара совпавших прямых $15x-8y+1=0$; $Y^2=0$; $O'(-15/289, 8/289)$, $E_1(8/17, 15/17)$, $E_2(-15/17, 8/17)$; 13) пара параллельных прямых $x+y-4=0$, $x+y-1=0$; $Y^2=9/8$; $O'(5/4, 5/4)$, $E_1(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $E_2(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$; 14) пара мнимых пря-

мых, пересекающихся в действительной точке O' (1, 2); 15) пара мнимых параллельных прямых; 16) мнимый эллипс; 17) пара пересекающихся прямых $3x-5y-13=0$, $5x+3y+1=0$; $X^2-Y^2=0$; O' (1, -2), $E_1(1/\sqrt{17},\ 4/\sqrt{17})$, $E_2(-4/\sqrt{17},\ 1/\sqrt{17})$. **9.5.** Длины полуосей равны $\sqrt{2}$ и 1, эксцентриситет равен $1/\sqrt{2}$, центром является точка $(1, -1)$, уравнение большой оси $3x+4y+1=0$, уравнение малой оси $4x-3y-7=0$. Фокусу F_1 $(1/5, -2/5)$ соответствует директриса $4x-3y+3=0$, фокусу F_2 $(9/5, -8/5)$ соответствует директриса $4x-3y-17=0$. **9.6.** Длины обеих полуосей равны $\sqrt{2}$, эксцентриситет равен $\sqrt{2}$, центром является точка (1, 1), уравнение действительной оси $4x+3y-7=0$, уравнение мнимой оси $3x-4y+1=0$. Фокусу F_1 $(-1/5, 13/5)$ соответствует директриса $3x-4y+6=0$, фокусу F_2 $(11/5, -3/5)$ соответствует директриса $3x-4y-4=0$. Уравнения асимптот $x+7-8=0$ и $7x-y-6=0$. **9.7.** Параметр параболы равен $\sqrt{2}/8$, вершиной является точка $(-1/16, -13/16)$, фокусом — точка F $(-1/8, -1/8)$. Осью параболы является прямая $4x+4y+1=0$, директрисой — прямая $4x-4y-1=0$. **9.10.** 1) Гипербола $\dfrac{X^2}{200/147}-\dfrac{Y^2}{200/63}=1$; 2) эллипс $\dfrac{X^2}{1/3}+\dfrac{Y^2}{2/9}=1$; 3) парабола $Y^2=0{,}16\cdot\sqrt{5}X$. **9.13.** 1) Гипербола; 2) эллипс; 3) гипербола; 4) пара параллельных прямых $4x+3y=0$, $4x+3y+1=0$; 5) эллипс; 6) парабола; 7) гипербола; 8) мнимый эллипс; 9) пара пересекающихся прямых $x-3y+4=0$, $2x+y+1=0$; 10) пара параллельных прямых $x+5y-1=0$, $x+5y+3=0$; 11) пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке (1, 1); 12) пара мнимых параллельных прямых; 13) пара совпавших прямых $x-4y+3=0$. **9.14.** 1) $11x^2-20xy+11y^2-3x-3y-8=0$ (эллипс); 2) $x^2-4xy+y^2+3x+3y-4=0$ (гипербола); 3) $x^2-2xy+y^2-1=0$ (пара параллельных прямых $x-y+1=0$, $x-y-1=0$); 4) $3x^2-10xy+3y^2+6x+6y-9=0$ (пара пересекающихся прямых $3x-y-3=0$, $3y-x-3=0$); 5) четыре точки из пяти лежат на одной прямой $x-y+1=0$, и данные 5 точек не определяют однозначно кривую второго порядка; 6) $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$ (парабола). **9.15.** 1) Эллипс при $|\lambda|<2$, гипербола при $|\lambda|>2$, пара параллельных прямых при $\lambda=\pm 2$; 2) мнимый эллипс при $\lambda<41/8$, эллипс при $5<\lambda<41/8$ и при $\lambda<-5$, пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке, при $\lambda=41/8$, парабола при $\lambda=5$, гипербола при $-5<\lambda<5$, пара параллельных прямых при $\lambda=-5$; 3) эллипс при $\lambda>2$, гипербола при $\lambda<2$, $\lambda\neq 0$, пара совпавших прямых при $\lambda=2$; пара пересекающихся прямых при $\lambda=0$; 4) эллипс при $\lambda>1/2$; гипербола при $\lambda<1/2$, $\lambda\neq 1/3$; парабола при $\lambda=1/2$; пара пересекающихся прямых при $\lambda = 1/3$. **9.16.** Если $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то данные уравнения задают: 1) параболу; 2) эллипс; 3) гиперболу; 4) гиперболу; 5) пару пересекающихся прямых. Если $\Delta = 0$, то уравнения 1)—4) могут задавать пару параллельных прямых, пару мнимых параллельных прямых; уравнение 5) может задавать пару параллельных прямых, пару совпавших прямых. В случае $\Delta = 0$ при некоторых значениях коэффициентов уравнения 1)—5) могут вообще не задавать кривую второго порядка. **9.17.** 1) $A_1x + B_1y + C_1 = \pm (A_2x + B_2y + C_2)$; 2) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. **9.19.** 1) (8,3), $x'^2 - 8x'y' + 17y'^2 - 1 = 0$; 2) $(1, -6)$, $5x'^2 + x'y' = 0$; 3) $(-9/8, -5/8)$, $8x'^2 - 24x'y' + 16y'^2 - 1{,}5 = 0$. **9.22.** 2) Указание: если A и B — два центра симметрии, то точка, симметричная A относительно B, также является центром симметрии. 3) $y - \sin x = 0$.

10.3. 1) При $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ точка, при $\lambda < 0$ пустое множество; 2) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид; 3) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ прямая, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид; 4) при $\lambda > 0$ однополостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ конус, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид; 5) При $\lambda > 0$ двуполостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ конус, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид; 6) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид; 7) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ плоскость, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид; 8) при $\lambda \neq 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ прямая; 9) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид; 10) при $\lambda \neq 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ плоскость; 11) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ плоскость, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид; 12) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид; 13) при $\lambda > 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda = 0$ прямая, при $\lambda < 0$ пустое множество; 14) при $\lambda \neq 0$ гиперболический цилиндр, при $\lambda = 0$ пара пересекающихся плоскостей. **10.5.** 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$. **10.6.** 1) $C(2, 2, 2)$, $R = 2\sqrt{3}$; 2) $C(-1, -2, -3)$, $R = 5/\sqrt{2}$. **10.7.** 1) Эллипсоид; центр $C(-1, -1, -1)$, полуоси $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, плоскости симметрии $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$; 2) эллипсоид; центр $C(-1, -1, -1)$, полуоси 2, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$, плоскости симметрии $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$. Эллипсоиды подобны. **10.8.** 1) Двуполостный гиперболоид; центр симметрии $C(-3, 1, 1)$, вершины $A(-5, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, ось симметрии $y = z = 1$, плоскости симметрии $x = -3$, $y = 1$, $z = 1$; 2) двуполостный гиперболоид; центр симметрии $C(-1, 0, -1)$, вершины $A(-1, 0, -1-\sqrt{3})$,

$B(-1,\ 0,\ -1+\sqrt{3})$, ось симметрии $x=-1$, $y=0$, плоскости симметрии $x=-1$, $y=0$, $z=-1$. **10.9.** 1) Однополостный гиперболоид; 2) конус; 3) двуполостный гиперболоид; 4) эллиптический параболоид; 5) гиперболический параболоид; 6) эллиптический цилиндр. **10.10.** 1) Координатные плоскости Oxz и Oyz; 2), 3) гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz и направляющей — данной гиперболой на плоскости Oxy; 4) гиперболический параболоид; плоскости симметрии $x=\pm y$. **10.11.** Цилиндр радиуса 1/2 с осью $x=-1/2$, $z=0$. **10.12.** 1) Параболоид вращения вокруг отрицательной части оси Oy, вершина $C(0,\ 1/2,\ 0)$; 2) конус с вершиной в начале координат, ось вращения — прямая $x=y$, $z=0$. **10.13.** Однополостный гиперболоид. Центр — начало координат. Ось вращения $x=0$, $y+z=0$. Плоскость горловой окружности $y=z$; ее уравнение $x^2+2yz-1=0$, $y=z$; радиус 1. **10.14.** 1) $(0,\ 0,\ 0)$ и $(2,\ 2{,}8)$; 2) точек пересечения нет; 3) $(3,\ 1,\ 10)$. **10.16.** Вне. **10.17.** Ниже. **10.26.** $|[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]| = R\,|\mathbf{a}|$. **10.27.** $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| = R$. **10.28.** $|(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a})| = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{a}|\,|\cos\alpha|$. **10.2.** $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| = 2a$. **10.30.** 1) $x^2+y^2-z^4=0$; 2) $x=y^2+z^2$. **10.31.** 1) Двуполостный гиперболоид $x^2-y^2-z^2=2$; 2) однополостный гиперболоид $x^2-y^2+z^2=2$. **10.32.** Тор $(x^2+y^2+z^2+3)^2=16(x^2+z^2)$. **10.33.** $x^2(y^2+z^2)=1$ и $y^2(x^2+z^2)=1$. **10.34.** 1) $x=t\cos\theta$, $y=t\sin\theta$, $z=f(t)$ $(t\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta<2\pi)$; 2) $x=\varphi(t)\cos\theta$, $y=\psi(t)\sin\theta$, $z=\chi(t)$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$. **10.37.** $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz+3x-3z=0$. **10.38.** $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz+3x-3z+2=0$. **10.39.** $xy+xz+yz=0$. **10.40.** Однополостный гиперболоид $x^2+y^2-2z^2+4z-4=0$. Указание: см. задачу 10.34, 2). **10.41.** Конус $x^2+y^2-(z-1)^2=0$. Указание: прямая пересекает ось Oz. **10.42.** Конус $xy+xz+yz=0$. Указание: см. задачу 10.28. **10.43.** $xy+xz+yz-2x-2y-2z+3=0$.

10.44. $x=u+2\cos v,\ y=u+2\sin v,\ z=4+u-2\cos v-2\sin v$. Указание: см. задачу 10.35. **10.45.** Цилиндр $(2x-y-z)^2+(2y-x-z)^2=9$. **10.49.** Окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2$. **10.52.** Эллипс $x^2+2y^2+2x+4y-2=0$. **10.54.** $x=-1+2\cos t,\ y=-1+2\sin t,\ z=3-2\cos t-2\sin t$. Указание: исключив z из данных уравнений, получим уравнение проекции эллипса на плоскость Oxy — уравнение окружности $(x+1)^2+(y+1)^2=4$. За параметр принимаем угловой параметр окружности. **10.55.** По гиперболе. Указание: найти уравнение проекции линии пересечения на плоскость Oxy. **10.56.** Центр $C(10/3,\ -14/3,\ 5/3)$, радиус $R=3$. **10.57.** $x=u(-1+2\cos v)$, $y=u(-1+2\sin v)$, $z=u(3-2\cos v-2\sin v)$. Указание: использовать задачу 10.54. **10.58.** $x^2+y^2=2$. **10.59.** $x^2+y^2=4$. **10.60.** $x^2+y^2+2x+2y-2=0$. Ось $x=y=-1$, $R=2$. Указание: см. задачу 10.54. **10.61.** $(x-z+2)^2+(y-z+2)^2=4$. **10.62.** $xy+yz+$

$xz = 0$. **10.63.** $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 36$. **10.65.** 1) $(2, 1, 1)$; 2) $(4, 2, 1)$. **10.66.** $(4, 2, -2)$. **10.67.** $\frac{u^2}{110} + \frac{v^2}{390} = 1$; $(5, 7, 20)$; $x = 5 + t$, $y = 7 + t$, $z = 20 + 2t$; $x = 5 - 3t$, $y = 7 + t$, $z = 20 + t$. **10.68.** Диаметр $x = 6t$, $y = 3t$, $z = 2t$ $\left(|t| \leqslant \sqrt{\frac{2}{33}}\right)$. **10.69.** Диаметр $x = 3t$, $y = 3t$, $z = -t$. **10.70.** Диаметр $x = y = -1$, $z \geqslant 1$. **10.71.** $3x + 4y + 4z - 21 = 0$. **10.72.** $x^2 - z^2 = 0$ $(|x| \leqslant 3/\sqrt{2})$; $y^2 + 2z^2 = 9$; $2x^2 + y^2 = 9$. Сечение представляет собой пару окружностей, лежащих в плоскостях $x = \pm z$. **10.73.** $x^2 + y^2 = 2$; $y^2 + 3z^2 = 2$; $3z^2 - x^2 = 0$ $(|x| \leqslant \sqrt{2})$. Сечение представляет собой пару эллипсов, лежащих в плоскостях $x = \pm\sqrt{3}z$. **10.74.** $x \pm y \pm \sqrt{2} = 0$; $z \pm x\sqrt{2} + 1 = 0$; $z \pm y\sqrt{2} - 1 = 0$. Сечение состоит из четырех прямых: $x = t$, $y = \pm(t + \sqrt{2})$, $z = -1 - t\sqrt{2}$ и $x = t$, $y = \pm(t - \sqrt{2})$, $z = -1 + t\sqrt{2}$. **10.75.** $2x^2 + z^2 = 3$; $2y^2 - z^2 = 5$, $|y| \leqslant 2$ $(|z| \leqslant \sqrt{3})$ (две дуги гиперболы); $x^2 + y^2 = 4$, $|y| \geqslant \sqrt{5/2}$ $(|x| \leqslant \sqrt{3/2})$ (две дуги окружности). **10.76.** Точки пересечения: $M_1(\sqrt{2}, 0, -2)$, $M_2(-\sqrt{2}, 0, -2)$; радиусы $R = 2$. **10.79.** $\alpha(x - y) = \beta$, $\beta(x + y) = \alpha$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$. **10.80.** $\alpha(z - y) = \beta x$, $\beta(z + y) = \alpha x$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$. **10.81.** $x = t$, $y = 2t - 4$, $z = t - 1$; $x = t$, $y = 4 - 2t$, $z = t - 1$. **10.82.** $3x + y - 2z - 2 = 0$. **10.83.** $x - 2y - 3z - 6 = 0$. **10.84.** Плоскость $x + y + z = 0$, прямые $x = t - 2$, $y = t$, $z = 2 - 2t$ и $x = t$, $y = -t$, $z = 0$. Угол $\pi/2$. **10.85.** 1) $\pi/2$; 2) $\pi/3$; 3) $\arccos\frac{h^2}{h^2 + 1}$. **10.86.** 1) Окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. 2) пара прямых $y \pm x = 0$, $z = 0$. 3) гипербола $4x^2 - 16y^2 + 3 = 0$, $z = -3/8$.

Указание к задачам 11.1—11.11: при вычислениях и доказательствах использовать таблицу, приведенную в начале § 11. **11.1.** 1) Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды; 2) конусы и цилиндры; 3) пары не совпавших плоскостей; 4) пары совпавших плоскостей; 5) эллипсоиды, гиперболоиды, конусы; 6) параболоиды, цилиндры (кроме параболического), пары пересекающихся плоскостей; 7) параболические цилиндры, пары плоскостей (кроме пересекающихся). **11.2.** $R = 4 > \Sigma$. **11.3.** 1) $R = r + 2$; 2) $R \leqslant 2$; 3) $R = \Sigma > 1$. **11.4.** 1) «Мнимые эллипсоиды», «мнимые эллиптические цилиндры», «пары мнимых параллельных плоскостей», $R = \Sigma > r$; 2) «мнимые конусы» (точки), «пары мнимых пересекающихся плоскостей» (прямые), $R = \Sigma = r > 1$. **11.5.** $R \geqslant 3$, $R - \Sigma \geqslant 2$. **11.6.** 1) $R = 4$, $\Sigma = 0$; 2) $R = 3$, $\Sigma = 1$. **11.7.** Эллипсоиды, гиперболоиды, цилиндры, пары параллельных плоскостей, $R = r + 1$. **11.8.** $\xi'^T A\xi' + 2(b^T A + a)\xi' + (b^T Ab + 2ab + k) = 0$, $a' = b^T A + a$. **11.9.** Параболоиды и параболические цилиндры, $R = r + 2$. **11.10.** Конусы, пары пересекающихся и пары совпавших плоскостей, $R = r$. **11.11.** 1) 0, 1 или бесконечно много; 2) параболоиды и параболические цилиндры; 3) эллипсоиды, гиперболоиды, конусы; 4) цилиндры (кроме параболического) и пары плоскостей. **11.13.** $Ab + a^T = o$, где b — столбец из координат центра симметрии. **11.15.** 1) $A' = S^T A S$, $a' = (b^T A + a) S$, $k' = b^T A b + 2ab + k$. 5) Указание: проверить условия теоремы Кронекера — Капелли. 6) Указание: использовать ответ задачи 1). **11.16.** 1) Матрица A и все корни характеристического уравнения умножатся на μ; 2) $\det A$ не изменится. **11.17.** 1) $B = \begin{Vmatrix} A & a^T \\ a & k \end{Vmatrix}^{\square}$; 2) $T = \begin{Vmatrix} S & b \\ o & 1 \end{Vmatrix}^{\square}$. **11.18.** Указание: вычислить инварианты R, r. **11.19.** 1) Гиперболический цилиндр; 2) пара параллельных плоскостей; 3) параболический цилиндр; 4) гиперболический цилиндр; 5), 6) гиперболический параболоид; 7) пара пересекающихся плоскостей; 8) параболический цилиндр; 9) конус; 10) параболический цилиндр; 11) однополостный гиперболоид; 2) двуполостный гиперболоид; 13) однополостный гиперболоид; 14) «мнимый конус»; 15), 16) «пара мнимых пересекающихся плоскостей»; 17) эллипсоид; 18), 19) эллиптический цилиндр; 20) «мнимый эллиптический цилиндр». **11.20.** $(x + y + z)(x - y + z) = (2x - y + 2z)^2$. **11.21.** 1) При $k > 7/4$ двуполостный гиперболоид, при $k = 7/4$ конус, при $k < 7/4$ однополостный гиперболоид; 2) при $k < 0$ двуполостный гиперболоид, при $k = 0$ гиперболический цилиндр, при $k > 0$ однополостный гиперболоид; 3) при $k > 6$ «мнимый эллипсоид», при $k = 6$ «мнимый конус», при $k < 6$ эллипсоид; 4) при $k > 8$ эллипсоид; при $k = 8$ эллиптический цилиндр; при $k < 8$ однополостный гиперболоид; 5) при $k \neq 3$ гиперболический параболоид, при $k = 3$ гиперболический цилиндр; 6) при $k > 1$ однополостный гиперболоид, при $k = 1$ конус, при $k < 1$ двуполостный гиперболоид. **11.22** *В ответах к задачам этого номера перечисляются: матрица из координатных столбцов базисных векторов почти канонического базиса (в тех случаях, когда имеет смысл делать замену базиса лишь в какой-нибудь из координатных плоскостей, в ответе приведена соответствующая матрица второго порядка), координаты начала O канонической системы координат, почти каноническое уравнение данной поверхности, записанное в координатах* ξ, η, ζ, *тип данной поверхности. Для полного решения задачи, т. е. нахождения канонической системы координат и канонического уравнения поверхности, в некоторых случаях необходимо выполнить еще одно или несколько несложных преобразований уравнения и системы координат. Подробно о переходе от почти канонического уравнения к каноническому сказано во введении к настоящему параграфу. См. также решения задач* 16) *и* 17). 1) A_{313}; $O(0, 0, 0)$; $\xi^2 + 2\eta^2 + 10\zeta^2 = 1$; эллипсоид; 2) A_{314}; $O(0, 0, 0)$; $\xi^2 + 6\eta^2 - 6\zeta^2 = 0$; конус; 3) A_{315}; $O(0, 0, 0)$; $\sqrt{3}\,\xi^2 = \zeta$; параболический цилиндр; 4) A_{316}; $O(0, 0, 0)$; $\xi^2 + \eta^2 + 2\sqrt{3}\,\zeta = 0$; эллиптический параболоид; 5) A_{60}; $O(0, 2, -1)$; $\xi^2 - 4\eta^2 + \zeta^2 = 0$; конус; 6) A_{61}; $O(1, -1, 0)$; $2\eta^2 +$

$+\zeta^2=1$; эллиптический цилиндр; 7) A_{61}; $O(-1, 0, -1)$; $\xi^2+\eta^2-\zeta^2=1$; однополостный гиперболоид; 8) A_{60}; $O(0, -5, 0)$; $\xi^2+6\eta^2+\zeta^2=60$; эллипсоид; 9) A_{61}; $O(1, 2, -4)$; $\xi^2-9\eta^2-\zeta^2=1$; двуполостный гиперболоид; 10) A_{61}; $(-1, -1, -1)$; $\xi^2+4\eta^2+\zeta^2=4$; эллипсоид; 11) A_{61}; $O(3, 3, -7)$; $2\xi^2+6\eta^2=5\zeta$; эллиптический параболоид; 12) A_{61}; $O(0, 2, -3)$; $2\xi^2+\zeta^2=-8\eta\sqrt{2}$; эллиптический параболоид; 13) A_{63}; $O(2/13, -3/13, 0)$; $\sqrt{13}\,\eta^2=2\xi$; параболический цилиндр; 14) A_{64}; $O(-10, 0, 1)$; $\xi^2-9\eta^2-\zeta^2=-90$; однополостный гиперболоид; 15) A_{60}; $O(1, -3, 0)$; $9\xi^2+4\eta^2=36\zeta$; эллиптический параболоид; 16) A_{61}; $O(1, -2, 0)$; $-\xi^2+2\zeta^2=\sqrt{2}\,\eta$; гиперболический параболоид; 17) A_{317}; $O(-26/15, -1/3, 0)$; $5\xi^2=-\sqrt{2}\,\zeta$; параболический цилиндр; 18) A_{62}; $O(3, 4, 2)$; $25\xi^2-\zeta^2=15\eta$; гиперболический параболоид; 19) A_{61}; $O(0, 2, 0)$; $3\xi^2-7\eta^2-\zeta^2=21$; двуполостный гиперболоид; 20) A_{62}; $O(1, 0, 5)$; $\xi^2-16\eta^2+9\zeta^2=1$; однополостный гиперболоид; 21) A_{61}; $O(-1, -1, -1)$; $\xi^2+\eta^2-9\zeta^2=0$; конус; 22) A_{60}; $O(1, -2, -1)$; $4\xi^2-\eta^2=4\zeta$; гиперболический параболоид; 23) A_{325}; $O(1, -3, 0)$; $2\eta^2=7\zeta$; параболический цилиндр. **11.23.** *Ответы к задачам этого номера содержат: матрицу из координатных столбцов базисных векторов почти канонической системы координат, координаты начала O канонической системы координат, почти канонические уравнения поверхностей при заданных значениях параметра k, описание вида данных поверхностей при всевозможных значениях параметра. См. также замечание к ответам задачи* 11.22. 1) A_{318}; $O(-2, -3, 0)$; $2\xi^2+4\eta^2+7\zeta^2=28$; при $k<77$ эллипсоид, при $k=77$ точка O, при $k>77$ пустое множество; 2) A_{313}; $O(-2, -1, 2)$; $\xi^2+2\eta^2+10\zeta^2=10$; при $k<9$ эллипсоид, при $k=9$ точка O, при $k>9$ пустое множество; 3) A_{314}; $O(-2, 0, 1)$; а) $\xi^2+6\eta^2-6\zeta^2=6$; б) $\xi^2+6\eta^2-6\zeta^2=0$; в) $\xi^2+6\eta^2-6\zeta^2=-6$; при $k<5$ однополостный гиперболоид, при $k=5$ конус, при $k>5$ двуполостный гиперболоид; 4) A_{319}; $O(-2, 2, 0)$; $\xi^2+\eta^2+4\zeta^2=4$; при $k<8$ эллипсоид, при $k=8$ точка O, при $k>8$ пустое множество; 5) A_{319}; $O(1, -1, 0)$; а) $4\xi^2+4\eta^2+\zeta^2=4$; б) $\xi=\eta=\zeta=0$; при $k<8$ эллипсоид, при $k=8$ точка O, при $k>8$ пустое множество; 6) A_{320}; $O(1, -1, 2)$; $\zeta^2=5$; при $k<36$ пара параллельных плоскостей $x-y+2z-6\pm\sqrt{36-k}=0$, при $k=36$ плоскость $x-y+2z-6=0$, при $k>36$ пустое множество; 7) A_{320}; $O(2, 0, 2)$; $\zeta^2=-2\sqrt{2}\xi$; при всех k параболический цилиндр; 8) A_{321}; $O(0, 0, 0)$; $\sqrt{6}\,\xi^2=-\sqrt{5}\,\eta$; при всех k параболический цилиндр; 9) A_{316}; $O(1, 1, 2)$; а) $\xi^2+\eta^2=1$; б) $\xi=\eta=0$; при $k<18$ прямой круговой цилиндр, при $k=18$ прямая $x=y=3-z$, при $k>18$ пустое множество; 10) A_{316}; $O(-1, -1, 2)$; $\xi^2+\eta^2=2\sqrt{3}\,\zeta$; при всех k параболоид вращения; 11) A_{322}; $O(-2, 1, 1)$; а) $\xi^2+3\zeta^2=1$; б) $\xi=\zeta=0$; при $k<9$ эллиптический цилиндр, при $k=9$ прямая $y=z=x+3$, при $k>9$ пустое множество; 12) A_{322}; $O(-1, 5, 5)$; $\xi^2 + 3\zeta^2 = -6\sqrt{3}\eta$; при всех k эллиптический параболоид; 13) A_{323}; $O(10/9, 5/9, 8/9)$; а) $\xi^2 + 9\eta^2 - 9\zeta^2 = -9$; б) $\xi^2 + 9\eta^2 - 9\zeta^2 = 0$; в) $\xi^2 + 9\eta^2 - 9\zeta^2 = 9$; при $k < -3$ двуполостный гиперболоид, при $k = -3$ конус, при $k > -3$ однополостный гиперболоид; 14) A_{324}; $O(2, -2\sqrt{3}, 3)$; а) $5\xi^2 + \eta^2 - 5\zeta^2 = 0$; б) $5\xi^2 + \eta^2 - 5\zeta^2 = 5$; в) $5\xi^2 + \eta^2 - 5\zeta^2 = -5$; при $k > -75$ однополостный гиперболоид, при $k = -75$ конус, при $k < -75$ двуполостный гиперболоид. 15) A_{329}; $O(0, 1, 0)$; а) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; б) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$; в) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1$; при $k < 2$ однополостный гиперболоид, при $k = 2$ конус, при $k > 2$ двуполостный гиперболоид; 16) A_{320}; $O(1, -1, 2)$; а) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; б) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$; в) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1$; при $k < -36$ однополостный гиперболоид, при $k = -36$ конус, при $k > -36$ двуполостный гиперболоид. 17) A_{326}; $O(8/9, -4/9, -10/9)$; а) $9\xi^2 - \eta^2 = 0$; б) $9\xi^2 - \eta^2 = 9$; при $k \neq 0$ гиперболический цилиндр, при $k = 0$ пара пересекающихся плоскостей $x + 2y = 0$ и $2y + z + 2 = 0$. 18) A_{326}; $O(2/9, -1/9, -16/9)$; $\eta^2 - 9\xi^2 = 6\zeta$; при всех k гиперболический параболоид. 19) A_{327}; $O(-1/7, -1/14, 3/14)$; $14\xi^2 = 5\sqrt{3}\eta$; при всех k параболический цилиндр. 20) A_{328}; $O(-8/7, 27/14, 3/14)$; $14\xi^2 = 2\sqrt{5}\eta$; при всех k параболический цилиндр. 21) A_{328}; $O(-1/7, -1/14, 3/14)$; а) $\xi^2 = 0$; б) $\xi^2 = 1$; при $k < 1$ пара параллельных плоскостей $2x + y - 3z + 1 \pm \sqrt{1-k} = 0$; при $k = 1$ плоскость $2x + y - 3z + 1 = 0$; при $k > 1$ пустое множество. 22) A_{323}; $O(1/6, 4/3, -13/6)$; а) $\xi^2 + 6\eta^2 - 3\zeta^2 = 6$; б) $\xi^2 + 6\eta^2 - 3\zeta^2 = 0$; в) $\xi^2 + 6\eta^2 - 3\zeta^2 = -6$; при $k < -14$ однополостный гиперболоид, при $k = -14$ конус, при $k > -14$ двуполостный гиперболоид. 23) A_{322}; $O(-1, -1, 1)$; а) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; б) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 0$; в) $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1$; при $k < 5$ однополостный гиперболоид, при $k = 5$ конус, при $k > 5$ двуполостный гиперболоид. 24) A_{320}; $O(0, -2, 2)$; $\sqrt{6}\xi^2 - \sqrt{6}\eta^2 = \zeta$; при всех k гиперболический параболоид. 25) A_{320}; $O(0, -2, -1)$; а) $\xi^2 - \eta^2 = 1$; б) $\xi^2 - \eta^2 = 0$; при $k \neq -6$ гиперболический цилиндр, при $k = -6$ пара пересекающихся плоскостей $(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})\, x + (\sqrt{3} \mp \sqrt{2})\, y \mp \sqrt{2} z + 2\sqrt{3} \mp 3\sqrt{2} = 0$.

12.2. $n!$. **12.3.** 1) n^n, $n!$; 2) 2^n; 3) m^n. **12.4.** 1) Нет; 2) Нет. **12.6.** 1) $\mathscr{X}$ — множество целых чисел, $\mathscr{Y}$ — множество целых неотрицательных чисел, $f(x) = x^2$; 2) $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$ — множество целых чисел, $f(x) = 2x$. **12.9.** 2) Указание. Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ счетны, $\mathscr{X} = \{x_n\}$, $\mathscr{Y} = \{y_n\}$, $\mathscr{Z} = \{z_n\}$, $f(x_n) = y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим $\varphi(x_{2k-1}) = y_k$, $\varphi(x_{2k}) = z_k$. Тогда $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \cup \mathscr{Z}$ есть искомое отображение. В общем случае пусть $\{y_n\}$ — последовательность различных точек из $\mathscr{Y}$ такая, что $f(x_n) = y_n$. Полагаем $\varphi(x_{2n-1}) = y_n$, $\varphi(x_{2n}) = z_n$ и $\varphi(x) = f(x)$, если $x \neq x_n$. **12.11.** Указание: использовать задачу 12.9. **12.14.** 1) Неподвижных точек нет при $a = 1$ и $b \neq 0$. При $a = 1$, $b = 0$ все точки прямой неподвижны. Если $a \neq 1$, $b \neq 0$, то неподвижная точка единственна: $x = b/(1-a)$. 2) $f^{-1}(y) =$

$=\frac{y-b}{a}$. 12.15. $f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$. 12.16. $(fg)(x)=acx+ad+b$, $(gf)(x)=acx+bc+d$; $fg=gf$ при $d(a-1)=b(c-1)$.

12.17. 1) Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 2) нет; 3) $[2\pi n, 2\pi(n+1))$, $n\in Z$.

12.18. 1) Левая ветвь гиперболы $x^2-y^2=1$; 2) да; 3) $t=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$ $(y\in R, x^2-y^2=1)$. 12.19. 1) а) Да; б) нет; 2) точка $O(0, 0)$ имеет один прообраз — $O(0, 0)$; точка $M^*(x^*, y^*)\neq 0$ имеет два прообраза $M(x, y)$, где $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^*+\sqrt{x^{*2}+y^{*2}}}$, $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sgn} y^*\sqrt{-x^*+\sqrt{x^{*2}+y^{*2}}}$ (берутся оба верхних или оба нижних знака). 12.20. 1) Нет; 2) например, полосы $a<y<b$, где $0<b-a\leqslant 2\pi$, и их произвольные подмножества; 3) $x=\frac{1}{2}\ln(x^{*2}+y^{*2})$, $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y^*/x^*) & \text{при } x^*>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}(y^*/x^*) & \text{при } x^*<0,\\ \pi/2 & \text{при } x^*=0.\end{cases}$ 12.23. $\delta(x)=(x; x)$. 12.24. 1) Г. 12.25. 1) $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}_0+k(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$; 2) $\mathbf{r}^*=-\mathbf{r}+2\mathbf{r}_0$; 3) $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}+\mathbf{a}$; 4) $\mathbf{r}^*=\mathbf{r}_0+\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$; 5) $\mathbf{r}^*=2\mathbf{r}_0-\mathbf{r}+2\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$; 6) $\mathbf{r}^*=\lambda\mathbf{r}+(1-\lambda)\mathbf{r}_0+(1-\lambda)\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. 12.26. Неподвижна точка пересечения медиан треугольника ABC. Преобразование ортогонально тогда и только тогда, когда треугольник ABC правильный. 12.27. Гомотетия с центром в точке O и с коэффициентом $-1/2$. Точки K, L, M переходят в середины соответствующих медиан, точка O неподвижна. 12.36. $ab\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$, если $0<\varphi<\pi$; $\pi ab/2$, если $\varphi=\pi$. 12.37. 1) $x^*=kx$, $y^*=ky$; 2) $x^*=x_0+k(x-x_0)$, $y^*=y_0+k(y-y_0)$; 3) $x^*=-x+2x_0$, $y^*=-y+2y_0$; 4) $x^*=x+\alpha$, $y^*=y+\beta$. 12.38. 1) $(-6, 1)$, $(-3, 5)$, $(-4, -2)$, $(-1, 2)$, $(1, -18)$; 2) $4x-3y+27=0$, $3x+2y+16=0$, $x-5y-6=0$, $x-5y+28=0$, $18x-5y-6=0$. 12.39. 1) $(2, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$; 2) $3x+4y-2=0$, $2x+3y-1=0$, $x+y=0$, $5x+7y-4=0$, $5x+7y-2=0$. 12.40. 1) $x^*=-4x+3y+1$, $y^*=3x-5y+2$; 2) $x^*=-4y$, $y^*=7x-1$; 3) $x^*=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y^*=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y$; 4) $x^*=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$, $y^*=-\frac{1}{2}y$. 12.41. 1) Задача не имеет решений (точки A, B, C лежат на одной прямой, точки A^*, B^*, C^* не лежат на одной прямой); 2) $x^*=x$, $y^*=1$ (линейное, но не аффинное преобразование); 3) задача имеет бесконечно много решений: $x^*=px+(p+4)y+2-2p$, $y^*=qx+(q+2)y+1-2q$, где p и q — параметры, принимающие всевозможные действительные значения; 4) задача не имеет решений (точки A, B, C лежат на одной прямой, причем A — середина отрезка BC, точки A^*, B^*, C^* лежат на одной прямой, но B^* — середина отрезка A^*C^*). **12.42.** 1) $(0, 0)$; 2) неподвижная прямая $y = 6x$; 3) нет неподвижных точек; 4) $(-3, 0)$; 5) неподвижная прямая $3x + 3y - 1 = 0$; 6) все точки неподвижны. **12.43.** 1) $x + y = 0$, $y = 0$; 2) $x + y = 0$, $x - y = 0$; 3) $3x + y - 13 = 0$, $3x - y + 7 = 0$; 4) нет решений; 5) $x + y - 3 = 0$, $2x - y + C = 0$; 6) $x + y - 1 = 0$; 7) $x - y + C = 0$. **12.45.** $x^* = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{4}{5}$, $y^* = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$. **12.46.** 1) $x^* = x + y - 2$, $y^* = 2x - y + 3$; 2) $x^* = 3x - 4y - 5$, $y^* = 4x + 3y + 1$. **12.47.** 1) $x^* = -\frac{16}{5}x + \frac{44}{5}y - \frac{33}{5}$, $y^* = -\frac{1}{5}x - \frac{41}{5}y + \frac{32}{5}$; 2) $x^* = (A_1x + B_1y + C_1)/(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)$, $y^* = (A_2x + B_2y + C_2)/(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)$. **12.48.** 1) $34x^2 - 42xy + 13y^2 = 1$; 2) $16x^2 - 18xy + 5y^2 = 1$; 3) $15x^2 - 19xy + 6y^2 + 2 = 0$; 4) $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 30x - 18y = 0$; 5) $(3x - y - 1)(29x - 18y + 1) = 0$; 6) $(2x - y - 1)(2x - y + 1) = 2$. **12.49.** 1) $10x^2 - 22xy + 29y^2 - 8x + 14y - 2 = 0$; 2) $35x^2 - 38xy - 9y^2 - 22x + 6y + 7 = 0$; 3) $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 8x - 40y = 0$; 4) $(2x + 3y - 1)(7y - 4x + 1) = 1$; 5) $(5x + y - 3)(5x + y + 1) = 0$. **12.50.** 1) $x^* = -\frac{1}{2}x - \sqrt{3}y$, $y^* = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{2}y$; 2) $x^* = -\frac{1}{2}x - \sqrt{3}y$, $y^* = -\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}y$. **12.51.** $x^* = \sqrt{5}(x - y)$, $y^* = \pm\sqrt{5}\left(\frac{4}{5}x - y\right)$. **12.52.** 1) $x^* = x + 2$, $y^* = x + y + 1$; 2) $x^* = x + C$, $y^* = \frac{C}{2}x + y + \frac{C^2}{4}$. **12.53.** 1) $x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi$; 2) $x^* = x_0 + (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi$, $y^* = y_0 + (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi$; 3) $x^* = x$, $y^* = 0$; 4) $x^* = (9x + 3y - 1)/10$, $y^* = (3x + y + 3)/10$; 5) $x^* = -x$, $y^* = y$; 6) $x^* = (7x - 24y + 6)/25$, $y^* = (-24x - 7y + 8)/25$; 7) $x^* = x$, $y^* = \lambda y$; 8) $x^* = (2x - y + 2)/3$, $y^* = (-x + 2y + 2)/3$; 9) $x^* = (9x - 2y + 10)/5$, $y^* = (-2x + 6y - 5)/5$. Указание: использовать задачу 12.25. **12.54.** 1): 1), 2), 5), 6), 7), 8), 9); 2): 1), 2), 5), 6). **12.55.** 1) Сжатие к оси абсцисс с коэффициентом 3; 2) гомотетия относительно начала координат с коэффициентом 2; 3) параллельный перенос на вектор a $(-1, 1)$; 4) симметрия относительно оси абсцисс; 5) симметрия относительно точки O; 6) поворот на угол $\pi/2$ вокруг точки O; 7) симметрия относительно прямой $y = x$; 8) поворот относительно точки O на угол $\pi/4$; 9) симметрия относительно прямой $y = (\sqrt{2} - 1)x$; гомотетия относительно точки $P(3, -1)$ с коэффициентом 3; 11) поворот на угол

$\pi/3$ вокруг точки $M\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$; 12) симметрия относительно прямой $x-\sqrt{3}\,y+2=0$; 13) симметрия относительно точки $K(-1, 1)$; 14) сжатие к прямой $3x-4y=0$ с коэффициентом $1/2$; 15) сжатие к прямой $x-y+2=0$ с коэффициентом $1/3$; 16) поворот на угол $2\pi/3$ вокруг начала координат; 17) ортогональное проектирование на прямую $y=1$. Указания: 9) найти образы базисных векторов; 10)—13) перенести начало координат в неподвижную точку. **12.56.** 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $(0, 1+\sqrt{2})$; 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $(-\sqrt{2}, 1)$; 3) $y=x+1$ и $y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $y=x+1+\sqrt{2}$ и $y=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$. **12.57.** 1) $\operatorname{tg}\varphi=-3/4$; 2) $-5\pi/12$, $-\pi/12$, $7\pi/12$, $11\pi/12$, ... **12.58.** $x+2y-6=0$, $2x-y+1=0$, $2x-y+7=0$. Указание: использовать поворот вокруг точки P. **12.59.** $\sqrt{3}\,x+y-3=0$, $y=3/4$, $\sqrt{3}x-y-3=0$, $\sqrt{3}x+y-6=0$, $y=9/4$. Указание: использовать поворот вокруг точки P. **12.60.** 1) $|(d_1-c_1)(d_2-c_2)(a_1b_2-a_2b_1)^{-1}|$; 2) $\frac{\Delta^2}{2|\delta_1\delta_2\delta_3|}$, где $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\delta_2=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\delta_3=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$. **12.61.** $y=13$ и $15x+7y+14=0$. **12.62.** 1) $x^2+y^2-20x-6y+84=0$; 2) $x^2+y^2-10x=0$; 3) $x^2+y^2+12x+32y-108=0$. **12.63.** 1) fg: $x^*=-7x+5y-2$, $y^*=3x+4y+1$; gf: $x^*=4x+3y+1$, $y^*=5x-7y-2$; 2) fg: $x^*=-4x-6y+4$, $y^*=x+4y+1$; gf: $x^*=7x-3y+6$, $y^*=13x-7y+25$. **12.64.** 1) $x^*=3x-3$, $y^*=3y-3$ (гомотетия с центром $A(3/2, 3/2)$ и коэффициентом 3); 2) $x^*=\frac{1}{2}x$, $y^*=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$ (гомотетия с центром $B(0, -5)$ и коэффициентом $1/2$). **12.65.** 1) $x^*=3x-y-10$, $y^*=x-3$; 2) $x^*=7x-4y-32$, $y^*=-5x+3y+22$; 3) $x^*=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{2}{25}$, $y^*=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{11}{25}$; 4) $x^*=\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}y+33$, $y^*=-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y-19$; 5) $x^*=\frac{1}{3}x+8$, $y^*=\frac{1}{12}x+\frac{1}{4}y-1$; 6) обратное преобразование не существует; 7) $x^*=\frac{1}{25}(4x+3y)$, $y^*=\frac{1}{25}(-3x+4y)$; 8) $x^*=\frac{1}{25}(4x+3y)$, $y^*=\frac{1}{25}(3x-4y)$; 9) $x^*=r^{-1}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)$, $y^*=r^{-1}(-x\sin\varphi+y\cos\varphi)$; 10) $x^*=r^{-1}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)$, $y^*=r^{-1}(x\sin\varphi-y\cos\varphi)$ **12.66.** 1) $x^*=$

$= x\cos n\alpha - y\sin n\alpha$, $y^* = x\sin n\alpha + y\cos n\alpha$; 2) $x^* = x\cos\frac{\pi n}{3} + y\sin\frac{\pi n}{3}$, $y^* = -x\sin\frac{\pi n}{3} + y\cos\frac{\pi n}{3}$; 3) $x^* = x + ny$, $y^* = y$; 4) $x^* = 3^n x$, $y^* = (3^n - 2^n)x + 2^n y$. **12.67.** 1) $x^* = 3x + 4y + 6$, $y^* = 4x - 3y - 16$; 2) $x^* = (5x - 4y - 1)/3$, $y^* = (-4x + 5y - 1)/3$; 3) $x^* = 2\sqrt{3}x - 2y - 2\sqrt{3}$, $y^* = 2x + 2\sqrt{3}y + 5 - 2\sqrt{3}$; 4) $x^* = (-33x + 9y + 55)/26$, $y^* = (18x - 51y - 30)/52$. **12.68.** В задачах 4), 5), 7), 9), 12), 13), $f^{-1} = f$; 1) $x^* = x$, $y^* = y/3$, сжатие к оси абсцисс с коэффициентом 1/3; 2) $x^* = x/2$, $y = y/2$, гомотетия относительно начала координат с коэффициентом 1/2; 3) $x^* = x + 1$; $y^* = y - 1$, параллельный перенос на вектор **a** (1, —1); 6) $x^* = y$, $y^* = -x$, поворот на угол $-\pi/2$ вокруг начала координат; 8) $x^* = (x + y)/\sqrt{2}$; $y^* = (-x + y)/\sqrt{2}$, поворот на угол $-\pi/4$ вокруг начала координат; 10) $x^* = (x + 6/3$, $y^* = (y - 2)/3$, гомотетия относительно точки M (3, —1) с коэффициентом 1/3; 11) $x^* = (x + \sqrt{3}y + 1 - \sqrt{3})/2$, $y^* = (-\sqrt{3}x + y - 1 - \sqrt{\ })/2$, поворот на угол $-\pi/3$ вокруг точки $M\left(-(1 + \sqrt{3})/2,\ (1 - \sqrt{3})/2\right)$; 14) $x^* = (14x - 12y)/15$, $y^* = (-12x + 21y)/15$, сжатие к прямой $3x - 4y = 0$ с коэффициентом 2; 15) $x^* = 2x - y + 2$, $y^* = -x + 2y - 2$, сжатие к прямой $x - y + 2 = 0$ с коэффициентом 3. **12.69.** 1) fg: $x^* = -y + 3$, $y^* = x - 1$; gf : $x^* = -y + 1$, $y^* = x - 1$; 2) $fg = gf$: $x^* = \frac{1}{5}(3x + 4y) + 4$, $y^* = \frac{1}{5}(4x - 3y) - 3$; 3) fg: $x^* = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) - 2\sqrt{3}$, $y^* = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) - 2$, gf: $x^* = \frac{1}{2}\times(-x - \sqrt{3}y)$, $y^* = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y) + 4$; 4) $fg = gf$: $x^* = 2 - x$, $y^* = y$; 5) fg: $x^* = x + 1{,}2$, $y^* = y - 0{,}4$, gf: $x^* = x - 1{,}2$, $y^* = y + 0{,}4$; 6) fg: $x^* = -y - 0{,}2$, $y^* = x - 0{,}6$, gf: $x^* = -y + 0{,}6$, $y^* = x + 0{,}2$; 7) fg: $x^* = x + (1 - \sqrt{3})/2$, $y^* = y + (\sqrt{3} - 3)/2$, gf: $x^* = x + (\sqrt{3} - 3)/2$, $y^* = y + (1 - \sqrt{3})/2$. **12.70.** 2) $\frac{1}{2}\left(x_0 - y_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(y_0 + x_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)$; 3) fg — поворот вокруг точки P (2, 1) на угол $\pi/2$; gf — поворот вокруг точки Q (1, 0) на угол $\pi/2$. **12.71.** 1) $x\sin\varphi/2 - y\cos\varphi/2 = 0$; 2) $x_0\cos(\varphi/2) + y_0\sin(\varphi/2) = 0$, $(2x - x_0)\sin(\varphi/2) - (2y - y_0)\cos(\varphi/2) = 0$. **12.72.** 3) **a** $(\lambda\cos(\varphi/2), \lambda\sin(\varphi/2))$, где $\lambda = x_0\cos(\varphi/2) + y_0\sin(\varphi/2)$. **12.73.** 1) Скользящая симметрия относительно оси Ox, вектор переноса **a**(1, 0); 2) скользящая симметрия относительно оси $y = 1$, вектор переноса **a** (1, 0); 3) симметрия относительно оси $y = 1$. **12.74.** 1) Все преобразования первого рода; 2) преобразование g первого рода, остальные — второго; 3) преобразование f первого рода, остальные — второго; fg — скользящая симметрия относительно прямой $x\sqrt{3} - y + 2 = 0$, вектор переноса

$(-\sqrt{3}, -3)$; gf — скользящая симметрия относительно прямой $x\sqrt{3}+ + y - 2 = 0$, вектор переноса $(-\sqrt{3}, 3)$; 4), 5) f, g второго рода, fg и gf — первого; 6) все преобразования первого рода; fg — поворот на угол $\pi/2$ вокруг точки $P\,(1/5, -2/5)$; gf — поворот на угол $\pi/2$ вокруг точки $Q\,(1/5, 2/5)$; 7) все преобразования первого рода. **12.75.** $x^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)+1$, $y^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)+1-\sqrt{2}$ — поворот на угол $\pi/4$ вокруг точки $M\,(1, 1)$. **12.76.** $x^* = 1+2\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $y^* = 1+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$; вектор переноса $\mathbf{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, ось симметрии $x+y\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}+1$. **12.77.** 2) $fg = gf$, центральная симметрия относительно точки $A\,(1, 0)$; 3) fg — параллельный перенос на вектор $\mathbf{a}\,(6/5, -2/5)$, gf — параллельный перенос на вектор $-\mathbf{a}$. **12.78.** 2) fg — параллельный перенос на вектор $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-3}{2}\right)$, gf — параллельный перенос на вектор $\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$. **12.80.** 1) Произведение симметрий относительно двух осей, угол между которыми равен $\varphi/2$, проходящих через точку M; 2) произведение симметрий относительно двух прямых, расстояние между которыми равно $|\mathbf{a}|/2$, перпендикулярных вектору $\mathbf{a}$. 3) Указание: $f = hg$, где g — осевая симметрия, h — параллельный перенос (см. задачу 12.72,3)), h разлагаем согласно 12.80, 2). Оси симметрии могут быть выбраны не единственным образом. См. также задачу 12.77,1). **12.81.** 1) (1, 0), (0, 1); 2) (1, 0), (0, 1); 3), 4) любая пара ненулевых взаимно ортогональных векторов; 5) $(2, 1+\sqrt{5})$, $(2, 1-\sqrt{5})$; 6) (1, 0), (0, 1); 7) (1, 1), (—1, 1); 8) (1, 2), (—2, 1); 9) (1, 3), (—3, 1); 10) $(1, \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 1)$. **12.82.** 1) g — тождественное преобразование, h_1 — сжатие к оси абсцисс с коэффициентом 3, h_2 — сжатие к оси ординат с коэффициентом 4; 2) g — симметрия относительно оси абсцисс, h_1 — сжатие к оси абсцисс с коэффициентом 3, h_2 — сжатие к оси ординат с коэффициентом 4; 3) g — симметрия относительно оси ординат, h_1 и h_2 — сжатия к двум произвольным взаимно перпендикулярным прямым с коэффициентом 3; 4) g — поворот на угол $\pi/4$ вокруг начала координат, h_1 и h_2 — сжатия к двум произвольным взаимно перпендикулярным прямым с коэффициентом $\sqrt{2}$; 5) g — поворот на угол $-\arccos\left(2/\sqrt{5}\right)$ вокруг начала координат, h_1 — сжатие к прямой $\left(1-\sqrt{5}\right)x+2y = 0$ с коэффициентом $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$, h_2 — сжатие к прямой $\left(1+\sqrt{5}\right)x+2y = 0$ с коэффициентом $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$; 6) g — поворот на угол $-\pi/2$ вокруг точки $M\,(-2/13, 8/13)$, h_1 — сжатие к прямой $y = 8/13$ с коэффициентом 3; h_2 — сжатие к прямой $x = -2/13$ с коэффициентом 4; 7) g — поворот на угол $-\arccos(3/5)$ вокруг начала координат, h_1 — сжатие к прямой $x+7y=0$ с коэффициентом 15, h_2 — сжатие к прямой $7x-y=0$ с коэффициентом 5; 8) $g=g_1g_2$, где g_2 — поворот на угол $-\arccos(3/\sqrt{10})$ вокруг начала координат, g_1 — симметрия относительно прямой $y=x$; h_1 — сжатие к прямой $y=x$ с коэффициентом $3\sqrt{10}$, h_2 — сжатие к прямой $y=-x$ с коэффициентом $2\sqrt{10}$; 9) g — поворот на угол $-3\pi/4$ вокруг начала координат, h_1 — сжатие к прямой $2x+y=0$ с коэффициентом $5\sqrt{2}$, h_2 — сжатие к прямой $x-2y+5=0$ с коэффициентом $10\sqrt{2}$; 10) g — поворот вокруг точки $M(-1/9, -2/\sqrt{3})$ на угол $-\pi/3$, h_1 —сжатие к прямой $y=-2/\sqrt{3}$ с коэффициентом 6, h_2 — сжатие к прямой $x=-1/9$ с коэффициентом 2. **12.83.** h — гомотетия относительно начала координат с коэффициентом k; 1) $k=5$, g — поворот вокруг начала координат на угол $\arcsin(3/5)$; 2) $k=5$, g — симметрия относительно прямой $x=3y$; 3) $k=r$, g — поворот вокруг начала координат на угол φ; 4) $k=r$, g — симметрия относительно прямой $x\sin(\varphi/2)=y\cos(\varphi/2)$. **12.85.** Всюду α — произвольное ненулевое число: 1) $\lambda_1=7$, $\alpha(2,-1)$; $\lambda_2=5$, $\alpha(0,1)$; 2) $\lambda_1=1$, $\alpha(1,-1)$; $\lambda_2=4$, $\alpha(1,2)$; 3) $\lambda_1=3$, $\alpha(2,1)$; $\lambda_2=-3$, $\alpha(1,2)$; 5) все ненулевые векторы — собственные, $\lambda=2$; 6) $\lambda_1=1$, $\alpha(-1,1)$; $\lambda_2=0$, $\alpha(1,1)$; 7) собственных векторов нет; 8) $\lambda=3$, $\alpha(1,2)$. **12.89.** 1) Произведение поворота на угол φ вокруг начала координат и гомотетии с центром $(0,0)$ и коэффициентом r; 2) произведение поворота на угол φ, гомотетии с коэффициентом r, если $a=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, и параллельного переноса на вектор, изображаемый радиус-вектором точки b, или произведение параллельного переноса на вектор, изображаемый радиус-вектором точки ba^{-1}, гомотетии с коэффициентом r и поворота на угол φ. **13.1.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) да, если $A\in 1$; нет, если $A\notin 1$; 5) нет; 6) да; 7) да; 8) да; 9) нет; 10) да; 11) да; 12) да; 13) нет; 14) нет; 15) да; 16) да; 17) да; 18) нет; 19) да. **13.2.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) да; 8) да; 9) нет; 10) да; 11) нет; 12) да; 13) да; 14) да. **13.3.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) да; 6) нет; 7) да; 8) нет; 9) да; 10) нет; 11) да; 12) да. **13.4.** 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) да; 6) нет; 7) да; 8) нет; 9) да; 10) да; 11) да; 12) да. **13.5.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **13.10.** Группа поворотов плоскости вокруг центра квадрата, совмещающих этот квадрат с самим собой (или изоморфная ей группа комплексных корней 4-й степени из 1 относительно операции умножения); группа преобразований плоскости, состоящая из 4-х элементов: тождественное преобразование, центральная симметрия относительно начала координат, симметрия относительно оси абсцисс и симметрия относительно оси ординат. **13.11.** 1) ± 1; 2) $\pm n$; 3) $e^{2\pi ik/n}$, где $1\leqslant k\leqslant n-1$, k взаимно просто с n; 4) повороты на $\frac{2\pi}{n}k$, где k взаимно просто с n. **13.12.** 1) nZ, где n — целое число; 2) mZ, где

m кратно n; 3) корни степени m из 1, где m — делитель числа n; 4) повороты на $2\pi k/m$, где m — делитель числа n. **13.13.** 1) Указание: пусть a — образующий элемент в $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ — подгруппа в $\mathcal{G}$ и m — наименьшее натуральное число такое, что $b = a^m \in \mathcal{H}$, тогда b — образующий элемент в $\mathcal{H}$. **13.16.** Указание: показать, что если a — поворот, b — осевая симметрия, то $b^{-1}ab$ — также поворот. **13.19.** Указание: найти обратный к a элемент среди положительных степеней элемента a. **13.20.** Указания: 1) $b \in a\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $a\mathcal{H} = b\mathcal{H}$; 2) если $c \in a\mathcal{H} \cap b\mathcal{H}$, то $a\mathcal{H} = c\mathcal{H} = b\mathcal{H}$; каждый элемент $a \in G$ принадлежит классу aH, далее применить п.1); 3) отображение f: $b\mathcal{H} \to a\mathcal{H}$, определенное формулой $f(bh) = ah$, взаимно однозначно. **13.21.** 1) Указание: воспользоваться утверждениями задачи 13.20. **13.22.** Пусть a — поворот треугольника на $2\pi/3$ вокруг его центра, b — симметрия относительно одной из высот. Тогда $G = \{\iota, a, a^2 = a^{-1}, b, ab, a^{-1}b\}$, $H = \{\iota, b\}$, $b^{-1}ab = a^{-1}$. Левые смежные классы по H: H, $aH = \{a, ab\}$, $a^{-1}H = \{a^{-1}, a^{-1}b\}$. Правые смежные классы по H: H, $Ha = \{a, ba = a^{-1}b\}$, $Ha^{-1} = \{a^{-1}, ab\}$. **13.24.** 1) Указание: доказать, что если a — параллельный перенос, b — ортогональное преобразование с единственной неподвижной точкой, то $b^{-1}ab$ — параллельный перенос. **13.26.** 2) Указание: доказать, что из условий $a\mathcal{H} = a'\mathcal{H}$ и $b\mathcal{H} = b'\mathcal{H}$ следует $(ab)\mathcal{H} = (a'b')\mathcal{H}$. **13.28.** 1) Группа всех вещественных чисел с операцией сложения. 2), 4), 6) Группа комплексных чисел, по модулю равных 1, с операцией умножения. 3) Группа положительных вещественных чисел с операцией умножения. 5) Циклическая группа порядка n. **13.29.** 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) 1. **13.30.** 1) $n!$. **13.31.** 1) ι; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$; 3) ι; 4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$. **13.32.** 1) ι; три группы второго порядка с образующими элементами $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$; группа третьего порядка с образующим элементом $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$; ; вся группа $\mathcal{S}_3$. 2) Помимо ι и всей группы $\mathcal{S}_4$, подгруппа четных перестановок (порядка 12), и нециклическая подгруппа $\mathcal{V}$, состоящая из четырех элементов: ι, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$. **13.33.** $n!/2$.

14.3. 1) 10, четная; 2) 13, нечетная; 3) 3, нечетная; 4) 7, нечетная; 5) 36, четная; 6) 12, четная; 7), 8) $n(n-1)/2$, перестановка четная, если $n = 4k$ или $n = 4k + 1$, и нечетная в остальных случаях; 9) $n(n+1)/2$, перестановка четная, если $n = 4k$ или $n = 4k + 3$ и нечетная в остальных случаях. **14.4.** 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 0; 5) 1;

6) $-1\,487\,600$. **14.5.** е. **14.6.** г. **14.7.** 1) -1; 2) -2; 3) -27; 4) -27; 5) -7; 6) 0; 7) -1; 8) 4; 9) 0; 10) $-2(x^3+y^3)$; 11) $(a-c)(b-c)\times\times(b-a)$; 12) 0. **14.8.** $-3i\sqrt{3}$. **14.9.** $r^2\cos\psi$. **14.10.** 1) 3, 3, 2; 2) 3, 3, -2; 3) 0, 0, 6. **14.11.** 1) 24; 2) 120. **14.13.** 1, 0 или -1. **14.21.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 0; 5) -1; 6) 1; 7) -18; 8) 1; 9) 1; 10) -5; 11) -7; 12) -1; 13) 0; 14) 0; 15) 1. **14.22.** 1) -2; 2) -10; 3) 0; 4) 48; 5) 0. **14.23.** 1) $n!$; 2) $\lambda_1\ldots\lambda_n$; 3) 1; 4) 3^n; 5) 1; 6) $(-1)^{n(n-1)/2}\lambda_1\ldots\ldots\lambda_n$; 7) $(-1)^{n+1}$; 8) $(-1)^{n+1}$; 9) $1-n$; 10) $n!$; 11) $(-1)^n(1-2n)$; 12) $(-2)^{n-1}(5n-2)$; 13) $(-1)^{n-1}$; 14) $(-2)^{n-2}(1-n)$; 15) $(-1)^{n(n-1)/2}\ n^{n-1}(n+1)/2$; 16) $n+1$; 17) 0, если n нечетно, $(-1)^{n/2}[(n-1)!!]^2$, если n четно; 18) $(-3)^k$. **14.24.** В этой задаче через Δ_n обозначается определитель порядка n. 1) $[1-(-1)^n]/2$. Указание: $\Delta_n=1-\Delta_{n-1}$. 2) $(-1)^n[\lambda^n-\lambda^{n-1}n(n+1)/2]$. Указание: $\Delta_n=n(-\lambda)^{n-1}-\lambda\Delta_{n-1}$. 3) $n!\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}\right)$. Указание: $\Delta_n=n\Delta_{n-1}+(n-1)!$ 4) $[1+(-1)^n]/2$. Указание: $\Delta_n=1-\Delta_{n-1}$. 5) 0, если n нечетно, и $(-1)^{n/2}$, если четно. Указание: $\Delta_n=-\Delta_{n-2}$. 6) $[1+(-1)^n]/2$. Указание: $\Delta_n=\Delta_{n-2}$. 7) $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$.

Указание: обозначим $\Delta_n=\begin{vmatrix}1&\ldots&1\\x_1&\ldots&x_n\\\ldots&\ldots&\ldots\\x_1^{n-1}&\ldots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$, $p(x)=$

$$=\begin{vmatrix}1&\ldots&1&1\\x_1&\ldots&x_{n-1}&x\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\x_1^{n-1}&\ldots&x_{n-1}^{n-1}&x^{n-1}\end{vmatrix}.$$ Так как $p(x_i)=0$, $i=1,2,\ldots,n-1$,

то $p(x)=C(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$. Коэффициент C при старшем члене многочлена $p(x)$ равен Δ_{n-1}, откуда $\Delta_n=\Delta_{n-1}(x_n-x_1)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})$. 8) $\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$. Указание: выполнив деление, представить определитель как произведение двух определителей Вандермонда. 9) $[2x_1x_2\ldots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\ldots\ldots(x_n-1)]\prod\limits_{n\geqslant i>k\geqslant 1}(x_i-x_k)$. Указание: дополнить матрицу сверху строкой из нулей, а затем слева — столбцом из единиц. 10) $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}C_{n+1}^{2k+1}\alpha^{n-2k}(\alpha^2-1)^k$. 11) $\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ при $\varphi\neq k\pi$; $n+1$ при $\varphi==2k\pi$; $(-1)^n(n+1)$ при $\varphi=(2k+1)\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

Указание: решение аналогично решению 10) при $q = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Если $q \neq \pm 1$, то Δ_{n-1} вычисляем, используя формулу $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. 12) $\dfrac{\operatorname{sh} n\varphi}{\operatorname{sh}\varphi}$ при $\varphi \neq 0$; $n+1$ при $\varphi = 0$. 13) $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} C_{n+1}^{2k+1}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{n-2k}(a^2-4b^2)^k = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(a - 2b\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. **14.26.** 0. **14.27.** Умножится на $(-1)^{n(n+1)/2}$.

14.28. Не изменится. Указание: использовать задачу 14.27. **14.29.** Указание: умножить первый столбец матрицы на 1000, второй — на 100, третий — на 10, и сумму полученных столбцов прибавить к последнему столбцу. **14.30.** Указание: данное выражение есть разложение по i-й строке определителя матрицы, полученной из A повторением k-й строки на i-м месте. **14.31.** 2) $\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}' =$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Указание: при доказательстве формулы применить индукцию по порядку матрицы. **14.32.** Если обозначить $\det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + a_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(-\lambda) + a_n$, то a_s есть сумма всех диагональных миноров порядка s в матрице A; в частности, a_1 есть след A, a_n — определитель A. Указание: если обозначить $p(t) = \det(A + tE)$, то $a_{n-k} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k p(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$. При вычислении производных от функции $p(t)$ использовать результат задачи 14.31. **14.33.** 1), 2), вообще говоря, неверны, 3), 4) верны. **14.34.** Указание: согласно задаче 14.30 и формуле разложения определителя по строке: $AC^T = \operatorname{diag}(\det A, \dots, \det A)$, откуда получаем $\det C$ при $\det A \neq 0$. Матрица B получается из C умножением i-й строки на $(-1)^i$ и j-го столбца на $(-1)^j$ (для всех i, j). **14.35.** Указание: использовать формулу $\det \overline{A} = \overline{\det A}$. **14.41.** $(-2)^n a^2$. Указание: из $(n+k)$-го столбца матрицы $H^\square$ вычесть удвоенный k-й столбец ($k = 1, \dots, n$) и применить результат задачи 14.40. **14.42** 0. Указание: строки матрицы $\|A^3 \quad A^4\|^\square$ являются линейными комбинациями строк $\|A \quad A^2\|^\square$ (с коэффициентами из строк матрицы A^2). **14.43.** 1) Указание: строки матрицы $\|BC \quad B\|^\square$ являются линейными комбинациями строк $\begin{Vmatrix} C & E \end{Vmatrix}^{\square}$. Поэтому $\det\begin{Vmatrix} A & B \\ C & E \end{Vmatrix}^{\square} = \det\begin{Vmatrix} A-BC & O \\ C & E \end{Vmatrix}^{\square}$. Далее применить результат задачи 14.40. 2) Не всегда. **14.44.** $\det A\cdot(\det B)^n$. **15.1.** Матрицы должны иметь одинаковые размеры. **15.2.** 1) 0; 2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ -11 \\ -16 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -3 & -8 & 21 & -29 \\ 3 & -8 & -19 & 19 \end{Vmatrix}$; 4) 5E; 5) $2A_{22}$; 6) A_{572}; 7) c_{57}. **15.3.** 1), 2), 4) справедливы, если матрицы имеют одинаковые размеры; 3, 5) верны всегда. **15.4.** 1) Если $m=n$; 2) да. **15.5.** 1) $\begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 8 & 14 \\ 8 & 14 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$; 6) c_{172}; 7) A_{115}; 8) $\begin{Vmatrix} 6 & 9 & 12 \end{Vmatrix}$; 9) c_{173}; 10) E; 11) A_{606}; 12) A_{607}; 13) A_{246}; 14) E; 15) A_{618}; 16) nA_{616}. **15.6.** 1) Ширина A равна высоте B; 2) высота A равна ширине B; 3) ширина A равна высоте B, высота A равна ширине B. **15.7.** Ширина AB равна ширине B, высота AB равна высоте A. **15.8.** B имеет размеры $n\times p$, ABC имеет размеры $m\times q$. **15.9.** Тождества справедливы, если выполнимы употребляемые в них операции. **15.10.** 1) Не существует; 2) $\begin{Vmatrix} 8 \\ 16 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 8 & 16 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} -1200 & 1300 \end{Vmatrix}$.

15.11. 1) $2^{n-1}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 4) O при $n>1$; 5) A_{43}; 6) A_{14}; 7) A_{603}; 8) E; 9) O. **15.12.** 1) $\begin{Vmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_n \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_1 & & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$; 5) A_9; 6) A_{142}; 7) A_{546}; 8) $-A_{632}$. **15.13.** Тождества 2) — 4) справедливы, если выполнимы употребляемые в них операции; 1) справедливо всегда. **15.14.** P получается из E перестановкой i-й и k-й строк. **15.17.** A, B — квадратные матрицы одного порядка. **15.18.** 1) $2A_5$; 2) O. **15.20.** 1) A_5; 2) $-A_{16}^T$. **15.22.** 1) E; 2) O; 3) O; 4) $-E$; 5) A_{247}. **15.23.** 1) O; 2) A_{248}. **15.24.** Тождества 1) — 3) справедливы, если матрицы A и B перестановочны. **15.26.** k-я строка AB равна произведению k-й строки A на матрицу B. **15.28.** k-я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами из k-й строки A. **15.29.** Указание: задача 15.26. **15.30.** 1) При перестановке двух столбцов матрицы B соответствующие столбцы AB также переставляются; 2) если k-й столбец матрицы B умножить на число λ, то k-й столбец AB также умножится на λ; 3) если к i-му столбцу B прибавить j-й столбец, то с матрицей AB произойдет такое же элементарное преобразование. **15.31.** Указание: для столбца из двух элементов преобразования следующие: $\left\|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} a+b \\ b \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} a+b \\ b-(a+b) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a+b \\ -a \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} b \\ -a \end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right\|$. **15.32.** a_{ik}, если $A = \|a_{ik}\|$. **15.33.** 1) Матрица, у которой все строки нулевые, кроме i-й, на месте которой располагается j-я строка A; 2) матрица, у которой все столбцы нулевые, кроме j-го, на месте которого располагается i-й столбец A. **15.34.** Указание: в качестве ξ, η взять всевозможные столбцы единичной матрицы. **15.36.** 1) Умножить A справа на столбец $\|1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0\|^T$; 2) умножить A слева на строку $\|1 \ \ 0 \ \ \dots \ \ 0\|$. **15.37, 15.38.** Матрица K получается из E таким же элементарным преобразованием. **15.40.** Указание: если $A = \left\|\begin{matrix} a & b \\ ta & tb \end{matrix}\right\|$, то $A^m = (a+tb)^{m-1} A$. **15.43.** Утверждение 1) для прямоугольных матриц, вообще говоря, не верно. Пример: $A_{893} \cdot A_{128} = E$ (a, b — произвольные числа).

15.44.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

или, в матричной форме, $AX = e_j$, где e_j — j-й столбец E.

15.45 1) $\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{matrix}\right\|$; 2) $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right\|$; 3) $\left\|\begin{matrix} 0 & & \lambda_n^{-1} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_1^{-1} & & 0 \end{matrix}\right\|$; 4) A_{24}; 5) A_{77}^T; 6) A_{25}; 7) A_{245}; 8) $\frac{1}{9}A_{203}$; 9) $\frac{1}{9}A_{202}$; 10) A_{229}.

15.47. 1) $\left\|\begin{matrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 2) $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|$; 3) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix}\right\|$; 4) $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$;

5) $\left\|\begin{matrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 6) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 7) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 8) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|$;

9) $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 10) $\left\|\begin{matrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$; 11) A_{200}. **15.48.** Утверждение 6), вообще говоря, неверно. **15.51.** Приведен один из возможных

ответов. 1) $\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$.

15.52. 1) $E\sim A^{-1}$; $B\sim A^{-1}B$; 2) $E\sim A^{-1}$; $B\sim BA^{-1}$. **15.53.** 1) Совершаем со строками матрицы $\|A\ \ E\|^{\square}$ (т. е. со строками A и E) элементарные преобразования, переводящие A в E. После преобразований на месте матрицы A окажется E, а на месте E — матрица A^{-1}. 2) Со столбцами матрицы $\begin{Vmatrix}A\\ E\end{Vmatrix}^{\square}$ совершаем элементарные преобразования, переводящие A в E. В результате на месте E окажется матрица A^{-1}. **15.54.** 1) $\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{Vmatrix}$; 2) $\dfrac{1}{6}\begin{Vmatrix}2 & -3 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 6 & 3 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix}1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{Vmatrix}$; 4) $-A_{430}$; 5) $-A_{432}$; 6) A_{450}; 7) $\dfrac{1}{7}A_{456}$;

8) A_{440}; 9) A_{602}; 10) A^T_{614}; 11) A_{617}; 12) A_{619}; 13) A_{637}. **15.55.** $A^{-1}=-(A+E)$. **15.62.** 1) Совершаем со строками матрицы $\|A\ \ B\|^{\square}$ элементарные преобразования, переводящие матрицу A в E. После этих преобразований на месте матрицы A окажется E, а на месте B — матрица $A^{-1}B$. 2) Совершаем со столбцами матрицы $\begin{Vmatrix}A\\ B\end{Vmatrix}^{\square}$ элементарные преобразования, переводящие B в E. В результате на месте A окажется матрица AB^{-1}. **15.63.** 1) A_{66}; 2), 3) $\dfrac{1}{3}A_{205}$; 4) $\dfrac{1}{4}A_{208}$; 5) A_{437}; 6) A_{617}. **15.64.** 1) O; 2) $A^{-1}B$; 3) BA^{-1}; 4) $A^{-1}BC^{-1}$; 5) $A^{-1}B-C$. **15.65.** 1) $\begin{Vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix}-7\\ 24\end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix}21 & -14 & -10\\ -10 & 7 & 5\\ -4 & 3 & 2\end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{Vmatrix}$; 6) решений нет.

В ответах к задачам 7) — 11) числа a, b, c произвольны:

7) $\begin{Vmatrix}a & b\\ 0 & a\end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix}a & b\\ 1-a & -1-b\end{Vmatrix}$; 9) $\begin{Vmatrix}a & 1-a\\ b & 1-b\end{Vmatrix}$; 10) $\begin{Vmatrix}a & b\\ -a & b\end{Vmatrix}$;

11) $\begin{Vmatrix}a & b & c\\ 1-a & 2-b & 4-c\end{Vmatrix}$; 12) A_{127}; 13) $\dfrac{1}{9}c_{92}$; 14) A_{392};

15) решений нет; 16) A_{244}. **15.70.** Указание: положить $B=E_{kk}$, вычислить AB и BA и применить результат задачи 15.67.

15.71. Указание: использовать задачу 15.70. **15.72.** См. задачу 15.71. **15.73.** Скалярные матрицы. **15.74.** 1) $-A_{82}$; 2) A_{86}; 3) A_{83}; 4) A_{84}. **15.76.** 1) Косоэрмитова; 2), 9) симметричны, 3, 4) эрмитовы; 5), 10), 11) ортогональные; 6) диагональная; 7) треугольная; 8) кососимметричная; 9) унитарная; 10) матрица перестановки. **15.79.** 1) $\begin{Vmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & id \end{Vmatrix}$ (a, b, c, d — произвольные вещественные числа); 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. **15.87.** Обратная матрица транспонирована к данной. **15.88.** Обратная матрица эрмитово сопряжена к данной: 1) A_{103}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} A_{489}$. **15.89.** Пусть $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, $C = AB = \|c_{ij}\|$. Тогда на главной диагонали C: $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$; на побочной диагонали: $c_{i,\,i+1} = a_{ii}b_{i,\,i+1} + a_{i,\,i+1}b_{i+1,\,i+1}$, на m-й побочной диагонали: $c_{i,\,i+m} = a_{ii}b_{i,\,i+m} + a_{i,\,i+1}b_{i+1,\,i+m} + \ldots + a_{i,\,i+m}b_{i+m,\,i+m}$. Ниже главной диагонали — нули. **15.92.** $AB = -BA$. **15.94.** Разложение единственно: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$. **15.95.** 1) $A_{59} + A_{20}$; 2) $E + A_{20}$; 3) $A_{242} + A_{253}$. **15.100.** Разложение единственно: $A = \frac{1}{2}(A + \overline{A}^T) + \frac{1}{2}(A - \overline{A}^T)$. **15.104.** Эти свойства обеспечивают ортогональность матрицы. **15.107.** Указание: проверить свойства ортогональных матриц, сформулированные в задаче 15.104. **15.108.** Указание: умножение на матрицу перестановки слева равносильно перестановке строк умножаемой матрицы. **15.109.** Диагональные элементы равны или 1, или -1. **15.110.** Для всех i: $|\lambda_i| = 1$. **15.111.** 1), 2), 3), 6), 13) стохастичны; 4), 7), 8), 9), 12), 14) нильпотентны с показателями нильпотентности, соответственно равными 2, 3, 2, 2, 3, n; 1), 6), 10), 11) периодичны с периодами, соответственно равными 2, 2, 4, 4; 5) периодична при $\alpha = 2\pi p/q$, ее период равен q при $p \neq 0$ (p — целое, q — натуральное число, дробь несократима) и период 1 при $\alpha = 0$. **15.113.** Указание: использовать задачи 15.112, 15.40. **15.115.** Указание: если $A^k = O$, $B^l = O$, то $(AB)^{kl} = O$ и $(A + B)^{k+l} = O$. **15.116.** AB имеет период $k = lm$, где l, m — периоды A, B. **15.117.** Указание: умножить обе части равенства на $E - A$. **15.123.** Указание: использовать результаты задач 15.121, 15.122. **15.124.** Не всегда. Примеры: A_{14} не обратима, $\left(\frac{1}{4} A_{28}\right)^{-1}$ не стохастична, но матрицы перестановок стохастичны вместе со своими обратными. **15.125.** Если матрица является матрицей перестановки. **15.127.** $\sum_{1}^{n} a_{ii}^{m}$, если $A = \|a_{ij}\|$ ($i, j = 1, \ldots, n$). Указание: за-

дача 15.89. **15.128.** 1) $\sum\limits_{i,\,k} a_{ik}^2$; 2) $\sum\limits_{i,\,k} |a_{ik}|^2$, если $A = \|a_{ik}\|$. **15.131.** Если $A = \|A_{ij}\|$, $B = \|B_{ij}\|$ $(i = 1,\ 2)$, то для существования AB, помимо условий, вытекающих из определения блочной матрицы, требуется, чтобы ширина A_{11} равнялась высоте B_{11}, ширина A_{12} равнялась высоте B_{21}. **15.132.** $\left\|\begin{matrix} M & N \\ O & P \end{matrix}\right\|^{\square} \cdot \left\|\begin{matrix} D & F \\ O & G \end{matrix}\right\|^{\square} = \left\|\begin{matrix} MD & MF + NG \\ O & PG \end{matrix}\right\|^{\square}$.
15.133. 1) Если $A = \left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}\right\|$, $B = \left\|\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix}\right\|$, то, помимо условий, вытекающих из определения блочной матрицы, требуется, чтобы ширина матрицы A_{11} равнялась высоте B_1, а ширина A_{12} равнялась высоте B_2. 3) $A^{\square}B^{\square} = \left\|\begin{matrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{matrix}\right\|^{\square}$. **15.134.** 1)—3) Количества блоков на диагоналях матриц A, B совпадают, и совпадают порядки диагональных блоков, имеющих одинаковые номера. 4) Для того чтобы $AB = BA$, необходимы и достаточны условия 1) и перестановочность диагональных блоков, имеющих одинаковые номера. **15.136.** 1) $-A_{432}$; 2) A_{460}; 3) E; 4) A_{459}; 5) A_{461}; 6) A_{545}. **15.137.** 1) $\left\|\begin{matrix} E & -A \\ O & E \end{matrix}\right\|^{\square}$; 2) $\left\|\begin{matrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{matrix}\right\|^{\square}$. **15.138.** 1) $\left\|\begin{matrix} -D \\ E \end{matrix}\right\|^{\square} \cdot h$; 2) $\left\|\begin{matrix} -D \\ E \end{matrix}\right\|^{\square} \cdot h + \left\|\begin{matrix} b \\ o \end{matrix}\right\|^{\square}$ (E — единичная матрица порядка s, o — нулевой столбец высоты s, h — произвольный столбец высоты s). **15.139.** 1) A_{160}; 2) A_{161}; 3) A_{162}; 4) A_{163}; 5) A_{462}; 6) A_{463}; 7) A_{464}. **15.140.** $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$. **16.3.** Да, если матрица нулевая. **16.4.** 1) Базисного минора нет; 2) базисным является любой элемент матрицы; 3)—5) базисные миноры равны соответственно $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, 1, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$; 6), 7) базисным будет, например, минор $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. Ранги: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) 2; 6) 2; 7) 2. **16.5.** 1) Не существует; 2) любая строка; 3) все строки; 4) первая строка; 5) вторая и третья строки; 6) любые две строки; 7) любая пара разных строк, например 1-я и 2-я (но не 1-я и 4-я). **16.6.** 1) Не существует; 2) любой столбец; 3) все столбцы; 4) второй столбец; 5) первый и второй столбцы; 6) любые два столбца; 7) любая пара столбцов, один из которых имеет номер, больший чем 3, например первый и четвертый столбцы (но не первый и второй). **16.7.** Базисный минор равен определителю матрицы. Все строки, а также все столбцы матрицы базисные. Ранг равен порядку матрицы. **16.14.** $\operatorname{rg} \|A \quad B\|^{\square} \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. **16.18.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) 2; 6) 1; 7) 1; 8) 1; 9) 1; 10) 3; 11) 2; 12) 1; 13) 3; 14) 2; 15) 2; 16) 2; 17) 2; 18) 2; 19) 3; 20) 4; 21) 3; 22) 2; 23) 3; 24) 4; 25) 4; 26) 4; 27) 3; 28), 29) n, если n четно, и $n - 1$, если n нечетно. **16.19.** 1) 1 при $\varepsilon = \pm i$; 2 при других ε; 2) 2 при всех λ; 3) 1 при

$\alpha = 1$, 2 при других α; 4) 1 при $\omega = 1$, 2 при $\omega = 0$ и $\omega = -2$, 3 при остальных ω; 5) 2 при $\lambda = 3$, 3 при других λ; 6) 1 при $\lambda = 0$, $n - 1$ при $\lambda = \frac{1}{2} n (n + 1)$, n при остальных λ; 7) 2 при $\varepsilon = 0$; k, если ε — первообразный корень k-й степени из 1 и $k < n$; n при остальных ε. **16.20.** 1) 1 при $\lambda = 4$ и $\lambda = 9$, 2 при остальных λ; 2) 1 при $\lambda = 3$; 2 при $\lambda = 2$, 3 при остальных λ; 3) 2 при $\lambda = \pm i$, 4 при остальных λ. **16.22.** $0 \leqslant \operatorname{rg} A \leqslant 2$; оценки точные при $n \geqslant 2$. **16.23.** $0 \leqslant \operatorname{rg} A \leqslant 2(n - s)$; оценки точные при $n \leqslant 2s$. **16.24.** $1 \leqslant \operatorname{rg} A \leqslant 3$; оценки точные при $n \geqslant 3$. **16.25.** 1) $\operatorname{rg} AB \leqslant \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$. **16.26.** 1) 1, если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$; 0 в других случаях. **16.27.** Оба равенства выполнены, например, при $A = B = C = O$. **16.28.** Указание: упростить матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов, приняв за базисные — выбранные строки и столбцы. Ранг матрицы, стоящей на их пересечении, не будет меняться, а сама эта матрица превратится в единичную. **16.29.** r. Указание: в данном случае базисный минор AB есть произведение базисных миноров матриц A и B. **16.30.** $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$. **16.31.** 1) Указание: строка матрицы K состоит из коэффициентов разложения строк матрицы A по строкам M. 2) Всякую матрицу A можно представить как произведение матрицы M, состоящей из базисных столбцов A, на некоторую матрицу K: $A = MK$. При этом столбцы K состоят из коэффициентов разложения столбцов A по столбцам M. 3) Для любых двух скелетных разложений $A = KM = K'M'$ выполнены равенства $K' = KS^{-1}$, $M' = SM$, где S — невырожденная матрица порядка $r = \operatorname{rg} A$.

16.32. 1) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -3/2 & 0 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

4) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

16.33. Указание: представить соответствующую упрощенную матрицу как сумму r матриц ранга 1. **16.34.** 1)—5) верны не всегда, примеры обеспечиваются суммами $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} +$

$+\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 6) верно всегда. **16.36.** Указание: представить данную матрицу как произведение матрицы из двух строк на матрицу из двух столбцов. **16.38.** Пример строгого неравенства: $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} > 0$. **16.40** Указание: строки матрицы $\| A \quad B \|^{\square}$ являются линейными комбинациями строк $\| E \quad B \|^{\square}$. **16.41.** Указание: с помощью элементарных преобразований задачу свести к задаче 16.37.

17.1. 1) $x_1 = -7$, $x_2 = 24$; 2) $x = -1$, $y = 1$; 3) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; 4) $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$; 5) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; 6) $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$, $t = 1$; 7) $x_1 = -5$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$; 8) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -3$, $x_5 = -2$, $x_6 = -1$. **17.2.** 1) c_{20}; 2) c_{21}; 3) c_{93}; 4) c_{94}; 5) c_{66}; 6) $\frac{1}{9}\ c_{92}$; 7) o. **17.4.** С компонентами решений происходят те же элементарные преобразования. Указание: использовать матричную запись системы уравнений и выражение элементарных преобразований через умножение матриц. **17.5.** Основная матрица системы приводится к единичной, в правой части оказывается решение. **17.6.** 1) c_{22}; 2) $\frac{1}{100}\ c_8$; 3) c_{24}; 4) c_{93}; 5) c_{51}; 6) c_{63}; 7) $-\frac{1}{2} c_{96}$; 8) $-c_{52}$; 9) c_{174}; 10) c_{171}; 11) $\frac{1}{6}\ c_{164}$; 12) c_{195}; 13) c_{175}; 14) c_{176}; 15) c_{177}; 16) c_{248}; 17) c_{236}; 18) c_{249}; 19) c_{250}; 20) c_{251}; 21) c_{237}; 22) c_{236}; 23) c_{270}. **18.1.** В ответах через $h, h_1, h_2, \ldots$ обозначены произвольные постоянные (параметры). 1) $x = h$, $y = h$; 2) $x_1 = h_1 - 2h_2$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$; 3) $x_1 = -h_1 - h_2 - h_3 - h_4$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$, $x_4 = h_3$, $x_5 = h_4$; 4) $x = y = h$, $z = -2h$; 5) $x = y = z = h$; 6) $x = z = h$, $y = -2h$; 7) $x_1 = h_1 + 10h_2$, $x_2 = h_1 + 7h_2$, $x_3 = h_1$, $x_4 = 2h_2$; 8) $x_1 = 0$, $x_2 = x_4 = h$, $x_3 = -h$; 9) $x_1 = -2h_1 - 3h_2$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$, $x_4 = 0$; 10) $x_1 = h_1$, $x_2 = h_2$, $x_3 = h_3$, $x_4 = h_1 + h_2 + h_3$, $x_5 = 3h_1 + 2h_2 + h_3$; 11), 12) $x_1 = h_1$, $x_2 = h_1 + h_2$, $x_3 = h_2$, $x_4 = -2h_1$, $x_5 = -h_2$. **18.3.** $k = n - r$, где n — число столбцов матрицы, r — ее ранг; $k = 0$, если столбцы матрицы линейно независимы. **18.4.** 0. **18.5.** Однородная система уравнений всегда совместна. **18.6.** 1) Столбцы матрицы системы линейно независимы. 2) Столбцы матрицы системы линейно зависимы. **18.7.** 1) c_{24}; 2) A_{120}; 3) A_{401}; 4) c_{97}; 5) A_{150}; 6) A_{151}; 7) A_{156}; 8) c_{180}; 9) A_{410}; 10) A_{413}; 11) A_{164}. **18.8.** В ответах указана фундаментальная матрица, а при ее отсутствии — нулевой столбец. 1) c_{98} при $\lambda = 2$; A_{121} при $\lambda = 3$; o при остальных λ; 2) c_{98} при $\lambda = -2$; A_{122} при $\lambda = 3$; o при остальных λ; 3) A_{120} при $\lambda = 0$; o при $\lambda \neq 0$; 4) A_{120} при $\alpha = 1$; c_{77} при $\alpha \neq 1$; 5) c_{83} при $\lambda = 6$; A_{120} при $\lambda = 0$; o при остальных λ. 6) c_{77} при $\omega = 0$; A_{120} при $\omega = 1$; c_{277} при $\omega = -2$; o при остальных ω. **18.9.** В ответах указаны фундаментальные матрицы данной и сопряженной систем уравнений, а при их отсутствии — нулевые столбцы. 1) o, c_{100}; 2) c_8,

A_{124}; 3) o, c_{52}; 4) c_{101}, c_{101}; 5) o, o; 6) c_{102}, c_{103}; 7) c_{104}, A_{414}; 8) o, A_{154}; 9) o, A_{152}; 10) c_{178}, c_{179}; 11) A_{165}, c_{181}; 12) c_{259}, c_{252}. **18.10.** Да, если основная матрица системы квадратная. **18.11.** Да, если, например, матрица системы симметрическая. **18.13.** ΦC, где $\det C \neq 0$. **18.14.** 1) A_{125}; 2) A_{129}; 3) A_{404}. Указание: все фундаментальные матрицы получаются из одной с помощью элементарных преобразований столбцов. **18.15.** 1) A_{120} и все матрицы, которые получаются из нее перестановками строк и столбцов; 2) c_{197} и $\frac{1}{2}c_{197}$; 3) A_{130} и A_{131}; 4) A_{398} и все матрицы, которые получаются из нее перестановками строк и столбцов. **18.16.** $A'y = o$, где $A' = AS$, с фундаментальной матрицей $\Phi' = S^{-1}\Phi$. **18.17.** 1) $x_1 - x_2 - x_3 = 0$; 2) $x_1 - x_2 - x_3 = 0, 5x_1 - x_2 + x_4 = 0$; 3) $x_1 - x_2 = 0$, $2x_1 - x_3 = 0$, $2x_1 - x_4 = 0$; 4) $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$; 5) $2x_1 - x_2 + 13x_4 + x_5 = 0$, $x_3 - 5x_4 + x_5 = 0$. **19.1.** В ответах через h, h_1, h_2, ... обозначены произвольные постоянные (параметры). 1) $x = 2 + 3h$, $y = 2h$; 2) $x_1 = 1 - h_1 - 2h_2 - 3h_3$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$, $x_4 = h_3$; 3) $x = y = h$, $z = 4 - 3h$; 4) $x = h_1 + h_2$, $y = -1 - h_1 + h_2$, $z = -2 + h_1\sqrt{2} + 2h_2$; 5) $x = 14 + h$, $y = -9 - 2h$, $z = h$; 6) $x_1 = 1 - h_1$, $x_2 = -h_2$, $x_3 = 1 + h_1 + 2h_2$, $x_4 = -1 + 2h_1 + 3h_2$; 7) $x_1 = -2 - h$, $x_2 = h$, $x_3 = 2 + h$, $x_4 = 1$; 8) $x_1 = -1 - 5h$, $x_2 = 6h$, $x_3 = -1 - 5h$, $x_4 = 1 + 7h$; 9) $x_1 = 6 - h_1 - h_2 - h_3$, $x_2 = 8 - h_1 - h_2 - h_3$, $x_3 = h_1$, $x_4 = h_2$, $x_5 = h_3$; 10) $x_1 = 2 + 4h_1 - 11h_2 - 14h_3$, $x_2 = 1 - 22h_1 + 32h_2 + 23h_3$, $x_3 = -1 + 3h_1$, $x_4 = -1 + 15h_2$, $x_5 = -1 + 15h_3$. **19.3.** Не более чем на 1. **19.4.** $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0, 0 = 1$. **19.5.** Ранги основной и расширенной матриц равны. **19.6.** В ответах указаны частное решение и фундаментальная матрица, а если решение единственно — решение. 1) c_{105}, c_{101}; 2) c_{106}, c_{101}; 3) решений нет; 4) c_{89}, c_{109}; 5) $\frac{1}{5}c_{68}$, c_{142}; 6) c_{77}, A_{123}; 7) решений нет; 8) $-c_{51}$, c_{107}; 9) $-3c_{141}$, c_{108}; 10) c_{90}; 11) $-c_{107}$, c_{104}; 12) c_{110}; 13) c_{96}, c_{111}; 14) $-c_{178}$, A_{154}; 15) c_{193}, A_{144}; 16) c_{182}, A_{155}; 17) c_{183}, A_{157}; 18) c_{185}, A_{158}; 19) c_{183}, A_{157}; 20) c_{184}, A_{151}; 21) c_{185}, A_{158}; 22) c_{186}, A_{173}; 23) решений нет; 24) c_{187}, c_{188}; 25) c_{171}, c_{189}; 26) c_{178}; 27) решений нет; 28) c_{191}, A_{159}; 29) c_{167}, A_{159}; 30) c_{167}, c_{181}; 31) c_{253}, A_{411}; 32) c_{270}, A_{412}; 33) $\frac{1}{2}c_{255}$, A_{415}; 34) $-\frac{1}{11}c_{266}$, A_{409}; 35) решений нет; 36) $-c_{246}$, A_{166}; 37) c_{253}, A_{411}; 38) c_{256}, A_{412}; 39) c_{258}, A_{167}; 40) c_{257}, A_{168}; 41) c_{258}, A_{170}; 42) c_{231}, A_{409}; 43) $-\frac{1}{2}c_{261}$, A_{169}; 44) $-\frac{1}{3}c_{258}$, A_{417}; 45) $\frac{1}{3}c_{246}$, A_{418}; 46) $-\frac{1}{4}c_{236}$, A_{412}; 47) c_{259}, c_{260}; 48) c_{261}, c_{258}; 49) c_{272}, c_{262}; 50) $-c_{269}$, A_{419}. **19.7.** В ответах указаны: значение параметра, при котором система совместна, частное решение и фундаментальное решение однородной системы при этом значении параметра. 1) $\lambda = 15$, $X_0 = c_{112}$, $\Phi = c_{113}$; 2) $\lambda = 9$, $X_0 = c_{89}$, $\Phi = c_{114}$; 3) $\lambda = 7$, $X_0 = c_{77}$, $\Phi = c_{115}$; 4) $\lambda = 12$,

$X_0 = c_{89}$, $\Phi = c_{77}$. **19.8.** Линейные комбинации с суммой коэффициентов, равной 1. **19.9.** Линейные комбинации с суммой коэффициентов, равной 0. **19.10.** $(1, 1, \ldots, 1)$. **19.11.** $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. **19.12.** 1) $Az = \alpha a$; 2) $Az = a + b$; 3) $Az = \alpha a + \beta b$. **19.16.** Указание: теорема сводится к задачам 18.12, 19.14. **19.17.** Если система уравнений содержит m уравнений с n неизвестными, и ранг основной матрицы равен r, то: 1) $n = r$; 2) $m = r$ (указание: применить теорему Фредгольма); 3) $n > r$; 4) $m = n = r$. **19.18.** 1) Несовместна; 2) совместна; 3) несовместна. **19.19.** 1) Система уравнений совместна при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$. При $\alpha = 0$ фундаментальная матрица c_{101}; при $\alpha = 1$ фундаментальная матрица та же, частное решение c_{77}. 2) Система уравнений совместна при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$. При $\alpha = 0$ фундаментальная матрица A_{153}; при $\alpha = 1$ фундаментальная матрица та же, частное решение $\frac{1}{18} c_{192}$. 3) Система уравнений совместна при $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$. При $\alpha = 0$ фундаментальная матрица A_{147}; при $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ фундаментальные матрицы те же; частное решение при $\alpha = 1$ равно c_{193}, при $\alpha = 2$ частное решение равно c_{194}. **19.20.** Система совместна, если: 1) все λ_i различны, или 2) при некотором i выполнено $\lambda_i = \mu$. В случае 1) решение единственно: $x_k = \prod\limits_{i \neq k} \frac{\lambda_i - \mu}{\lambda_i - \lambda_k}$, $k = 1, \ldots, n$. В случае 2) в качестве частного решения можно взять столбец, у которого все компоненты, кроме i-й, равны 0, а $x_i = 1$. Для описания фундаментальной системы решений заметим, что базисными неизвестными являются те неизвестные, которым соответствуют всевозможные различные столбцы коэффициентов. Поэтому k-е решение из фундаментальной системы решений имеет k-е свободное неизвестное, равное 1, базисное неизвестное, которому соответствует такой же столбец коэффициентов, равное -1, а остальные компоненты k-го решения фундаментальной системы равны 0. **19.21.** Указание: представить решение однородной системы уравнений как разность двух решений неоднородной системы. **19.22.** 3) Необходимое и достаточное условие попарной эквивалентности нетривиальных уравнений $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a$, $b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = b$, $\ldots$, $h_1x_1 + \ldots + h_nx_n = h$ есть

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{matrix} a_1 & \ldots & a_n & a \\ b_1 & \ldots & b_n & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1 & \ldots & h_n & h \end{matrix} \right\| = 1.$$

Указание: сравнить каждое из данных уравнений с системой, полученной объединением всех уравнений. **19.23.** Указание аналогично указанию в 19.22. **19.24.** Системы эквивалентны. **19.25.** 1) Эквивалентны; 2) эквивалентны; 3) не эквивалентны. **19.26.** Системы эквивалентны. **19.32.** Указание: система уравнений для определения коэффициентов имеет основную матрицу с определителем Вандермонда $W(a_1, \ldots, a_{n+1})$ (см. задачу 14.24,8)). **19.33.** $x^3 - 6x^2 + 11x - 5$.

19.34. 1) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{Vmatrix} = 3$; 2) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & 1 \end{Vmatrix} = 3$.

19.35. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. **19.36.** $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2+b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

19.37. 1) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{Vmatrix} < \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$; 2) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{Vmatrix} <$
$< \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{Vmatrix}$. **19.38.** 1) Прямые пересекаются в единственной точке; 2) прямые пересекаются в единственной точке.

19.39. 1) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{Vmatrix} = 4$; 2) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & 1 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 1 \end{Vmatrix} = 4$.

19.40. 1) Все точки лежат в одной плоскости; 2) данные точки не лежат в одной плоскости. **19.41.** $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2 & a_3 & b_3 & c_3 & 1 \\ a_4^2+b_4^2+c_4^2 & a_4 & b_4 & c_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

19.42. 1) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{Vmatrix} = 3$; 2) $\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & c_m & 1 \end{Vmatrix} \geqslant 3$.

19.43. 1) Все точки лежат на одной прямой. 2) Точки не лежат на одной прямой. **19.44.** $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Указание: см.

решение задачи 19.35. **19.45.** 1) $r=R=1$; 2) $r=R=2$; 3) $r=1$, $R=2$, где $r=\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{Vmatrix}$, $R=\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{Vmatrix}$.
19.46. 1) $r=R=1$; 2) $r=R=3$; 3) $r=R=2$; 4) $r=1$, $R=2$; 5) $r=2$, $R=3$, где $r=\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$, $R=\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{Vmatrix}$.
19.47. 1) Плоскости образуют призму; 2) плоскости имеют одну общую прямую. **19.48.** 1) $r=R=3$; 2) $r=2$; $R=3$; 3) $r=2$, $R=2$; 4) $r=3$, $R=4$, где

$$r=\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{Vmatrix}, \qquad R=\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{Vmatrix}.$$

19.49. 1) Прямые скрещиваются; 2) прямые пересекаются.

20.1. 1) Нет; 2) да. **20.2.** Нет. **20.4.** 1) Да; размерность равна 1. 2) Да; размерность равна $n-1$. 3) Да; размерность равна $n-1$. 4) Нет. 5) Да; размерность равна 1. 6) Да; размерность равна 2. 7) Нет. 8) При $\alpha=0°$ и при $\alpha=90°$ данное множество является линейным подпространством размерности 1, при $0°<\alpha<90°$ не является линейным подпространством. **20.5.** Размерность пространства равна mn. Базис образуют занумерованные в каком-нибудь порядке матричные единицы (см. введение к § 15). Стандартный базис указан во введении к гл. VIII. **20.6.** 1) Да; размерность равна $n(n-1)$. 2) Да; размерность равна n. 3) Да; размерность равна $n(n+1)/2$. 4) Да; размерность равна $n(n+1)/2$. 5) да; размерность равна $n(n-1)/2$. 6) Нет. **20.7.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет; 6) нет; 7) да; 8) нет; 9) нет; 10) нет; 11) нет. **20.8.** 1) Размерность равна $n+1$; базис: $1, t, \ldots, t^n$. 2) Размерность равна $[n/2]+1$; базис: $1, t^2, \ldots, t^{2k}$ $(k=[n/2])$. 3) Размерность равна $[(n+1)/2]$; базис: $t, t^3, \ldots, t^{2k-1}$ $(k=[(n+1)/2])$. 4) Размерность равна $2n+1$; базис: $1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt$. 5) Размерность равна $n+1$; базис: $1, \cos t, \ldots, \cos nt$. 6) Размерность равна n; базис: $\sin t, \sin 2t, \ldots, \sin nt$. 7) Размерность равна $2n+1$; базис: $e^{\alpha t}, e^{\alpha t}\cos t, e^{\alpha t}\sin t, \ldots, e^{\alpha t}\cos nt, e^{\alpha t}\sin nt$. **20.10.** 1) (-11); 2) $(1, -3)^T$; 3) $(-3, 1/2, -5)^T$; 4) $(5, -11, 14, -2)^T$. **20.11.** $\begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & -14/3 \\ 7/2 & 1 & -3 \\ 16/3 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$. **20.12.** 1) $(0, 5)^T$; 2) $(-4, 11, 5)^T$; 3) $\frac{1}{5}(7, 9, 4, 0)^T$. **20.13.** 1) $c_{29}=10c_{34}-7c_{35}$; 2) $c_{120}=c_{84}-2c_{83}$; 3) $c_{201}=c_{199}-c_{198}-c_{166}$; 4) $c_{205}=-c_{166}+c_{197}$, $c_{206}=c_{166}+c_{197}$. **20.14.** 1) Размерность равна 1; базис: c_1. 2) Размерность равна 2; базис: c_{31}, c_{28}. 3) Размерность равна 1; базис: c_{31}. 4) Размерность равна 2; базис: c_{121}, c_{124}.

5) Размерность равна 3; базис: $c_{166}, c_{198}, c_{199}$. 6) Размерность равна 2; базис: c_{196}, c_{198}. 7) Размерность равна 4; базис: $c_{166}, c_{196}, c_{197}, c_{198}$. 8) Размерность равна 0. 9) Размерность равна 2; базис: c_{166}, c_{197}. **20.15.** Размерность равна 2; базис: A_{391}, A_{390}. **20.16.** Размерность равна 3; базис: $(1+t)^3$, t^3, 1. **20.17.** 1) (-2); 2) $(1/4, -1/4)^T$; 3) $(1, -2, -1)^T$; 4) $(1, -1, 2, -1)^T$; 5) $(1, 2, -1, 0, 1)^T$. **20.18.** $(-1, 2, -1, 1)^T$. **20.19.** $(1, 1, -1, 1, 1, 1)^T$. **20.20.** $\left(p_n(\alpha), \frac{1}{1!}p_n'(\alpha), \frac{1}{2!}p_n''(\alpha), \ldots, \frac{1}{n!}p_n^{(n)}(\alpha)\right)^T$. **20.21.** $(4, 2, -3)^T$. **20.22.** 1) Размерность равна 1; базис: $(3, 1)^T$. 2) Размерность равна 1; базис: $(0, 1, 1)^T$. 3) Размерность равна 2; базис: $(2, 0, -3)^T$, $(1, 3, 0)^T$. 4) Размерность равна 1; базис: $(23, -18, 3)^T$. 5) Размерность равна 0. 6) Размерность равна 0. 7) Размерность равна 3; базис: $(1, 2, 0, 0, 0)^T$, $(-13, 0, 10, 2, 0)^T$, $(1, 0, 2, 0, -2)^T$. **20.23.** 1) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$; 2) $x_1 + x_2 = 0$; 3) $0 = 0$; 4) $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$; 5) $x_1 - x_2 = 0$, $2x_1 - x_3 = 0$, $2x_1 - x_4 = 0$; 6) $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$; 7) $0 = 0$; 8) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

20.24. 1) $\|3\|$; $\xi_1 = 3\xi_1'$; 2) $\begin{Vmatrix} -6 & 13 \\ 10 & -20 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = -6\xi_1' + 13\xi_2'$, $\xi_2 = 10\xi_1' - 20\xi_2'$; 3) $\begin{Vmatrix} -5 & 0 & -4 \\ -4 & -1 & 4 \\ 13 & 3 & -1 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = -5\xi_1' - 4\xi_3'$, $\xi_2 = -4\xi_1' - \xi_2' + 4\xi_3'$, $\xi_3 = 13\xi_1' + 3\xi_2' - \xi_3'$; 4) $\begin{Vmatrix} 25/2 & -17/2 & 4 & 2 \\ -8 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ -11/2 & 7/2 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = \frac{25}{2}\xi_1' - \frac{17}{2}\xi_2' + 4\xi_3' + 2\xi_4'$, $\xi_2 = -8\xi_1' + 9\xi_2' - \xi_3'$, $\xi_3 = 4\xi_1' - 5\xi_2'$, $\xi_4 = -\frac{11}{2}\xi_1' + \frac{7}{2}\xi_2' - 2\xi_3'$. **20.25.** $\begin{Vmatrix} 1 & -4 & -3 & 3 & -3 & -3 \\ -1 & 7 & 5 & -3 & 5 & 6 \\ -1 & 19 & 13 & -3 & 12 & 13 \\ 4 & 29 & 19 & -3 & 19 & 20 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -25 & -287 & -192 & 30 & -186 & -199 \end{Vmatrix}$;

$\xi_1 = \xi_1' - 4\xi_2' - 3\xi_3' + 3\xi_4' - 3\xi_5' - 3\xi_6'$, $\xi_2 = -\xi_1' + 7\xi_2' + 5\xi_3' - 3\xi_4' + 5\xi_5' + 6\xi_6'$, $\xi_3 = -\xi_1' + 19\xi_2' + 13\xi_3' - 3\xi_4' + 12\xi_5' + 13\xi_6'$, $\xi_4 = 4\xi_1' + 29\xi_2' + 19\xi_3' - 3\xi_4' + 19\xi_5' + 20\xi_6'$, $\xi_5 = 2\xi_2' + \xi_3' + \xi_5' + \xi_6'$, $\xi_6 = -25\xi_1' - 287\xi_2' - 192\xi_3' + 30\xi_4' - 186\xi_5' - 199\xi_6'$.

20.26. $\begin{Vmatrix} 9 & 40 & 9 \\ -3 & -11 & -2 \\ 8 & 37 & 8 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = 9\xi_1' + 40\xi_2' + 9\xi_3'$, $\xi_2 = -3\xi_1' - 11\xi_2' -$

$-2\xi_3'$, $\xi_3 = 8\xi_1' + 37\xi_2' + 8\xi_3'$. **20.27.** $\begin{Vmatrix} 0 & -18 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = -18\xi_2' + \xi_3' - 10\xi_4'$, $\xi_2 = -2\xi_2' + \xi_3'$, $\xi_3 = 6\xi_2' + 4\xi_4'$, $\xi_4 = \xi_1' - 5\xi_2' - 3\xi_4'$. **20.28.** $\begin{Vmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$; $\xi_1 = \frac{3}{4}\xi_1' + \frac{1}{4}\xi_2' + \frac{1}{2}\xi_3'$, $\xi_2 = \frac{1}{4}\xi_1' + \frac{3}{4}\xi_2' + \frac{1}{2}\xi_3'$, $\xi_3 = -\xi_3'$. **20.29.** 1) Поменяются местами i-я и j-я строки матрицы перехода; 2) поменяются местами i-й и j-й столбцы матрицы перехо а; 3) матрица перехода, рассматриваемая как квадратная таблица, отразится симметрично относительно своего центра. **20.30.** 1) S_1S_2; 2) S_1^{-1}. **20.31.** 1) e_i' коллинеарны e_i, $i = 1, 2, 3$; 2) e_1' и e_1 коллинеарны, e_1, e_2, e_2' компланарны; 3) e_3' и e_3 коллинеарны, e_2, e_3, e_2' компланарны. **21.5.** 1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{b}_1$; 2) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 \in \mathscr{P}$; 3) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 = (-7, -9, -10)^T \in \mathscr{P}$, $\boldsymbol{z} = 9\boldsymbol{b}_1 \in \mathscr{Q}$; 4) $\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{b}_1 \in \mathscr{Q}$; 5) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} = -\frac{13}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{29}{2}\boldsymbol{a}_2 = (8,\ 8,\ 8,\ 37)^T \in \mathscr{P}$, $\boldsymbol{z} = -9\boldsymbol{b}_1 - 5\boldsymbol{b}_2 = (-9, 0, -14, -32)^T \in \mathscr{Q}$. **21.6.** 1) $\boldsymbol{x}$; 2) $\boldsymbol{o}$; 3) $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}_1 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$; 4) $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = (-1, 4, 2)^T$; 5) $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = (2, -6, 6, 1)^T$.

21.7. 1) Размерность суммы равна 2 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3$. Размерность пересечения равна 1 (пересечение совпадает со вторым подпространством); базис: $\boldsymbol{b}_1$. 2) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Размерность пересечения равна 2 (пересечение совпадает со вторым подпространством); базис: $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. 3) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Размерность пересечения равна 0 (сумма прямая). 4) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(1,\ 0,\ 1)^T$. 5) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(3,\ 1,\ 0)^T$. 6) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(40, 45, 43)^T$. 7) Размерность суммы равна 3; базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(2, -6, 7, -2)^T$. 8) Размерность суммы равна 4 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Размерность пересечения равна 0 (сумма прямая). 9) Размерность суммы равна 3; базис: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Размерность пересечения равна 2; базис: $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$. Сумма совпа-

дает с первым подпространством, пересечение — со вторым. 10) Размерность суммы равна 4 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_4$. Размерность пересечения равна 2; базис: $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1$. **21.8.** Размерность суммы равна 5; базис: $A_{202}, A_{201}, A_{209}, A_{204}, A_{256}$. Размерность пересечения равна 2; базис: A_{202}, A_{258}. **21.9.** Размерность суммы равна 3; базис: $1+2t+t^3$, $1+t^2$, $1+t+t^2$. Размерность пересечения равна 1; базис: $2+3t+t^2+t^3$. **21.14.** 2) Если $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ — одномерные пространства, натянутые на три компланарных, но не коллинеарных вектора, то $\mathscr{P} \neq \mathscr{Q}$. **22.1.** 1) $(4-8i)$; 2) $(-2+3i, 9+5i)^T$; 3) $\frac{1}{2}(4+i, -18i, 1-10i)^T$. **22.2.** $\begin{Vmatrix} 1+5i & -6+i \\ -11+13i & -8-14i \end{Vmatrix}$.
22.3. 1) $(-1-8i, -3+6i)^T$; 2) $(2, -10i, 4-6i)^T$. **22.4.** 1) $c_{43} = (-1+i)\,c_{26}$; 2) $c_{40} = -\frac{2+9i}{5}c_{26} + \frac{-3+4i}{5}c_{30}$; 3) $c_{133} = -2c_{131} + c_{132}$. **22.5.** 1) Размерность равна 1; базис: c_5. 2) Размерность равна 2; базис: c_{27}, c_{39}. 3) Размерность равна 1; базис: c_{26}. 4) Размерность равна 1; базис: c_{134}. 5) Размерность равна 2; базис: c_{215}, c_{275}. 6) Размерность равна 3; базис: $c_{166}, c_{215}, c_{196}$. **22.6.** 1) $(1+3i)$; 2) $(1+2i, 2-i)^T$; 3) $(1, 2)^T$; 4) $(1+i, -3i)^T$; 5) $(1, -i, 2)^T$; 6) $(1+i, -i, 0, 2)^T$. **22.7.** 1) Размерность равна 0. 2) Размерность равна 1; базис: $(1+3i, -2)^T$. 3) Размерность равна 1; базис: $(1, 1, 1)^T$. 4) Размерность равна 2; базис: $(1-i, -1, 0)^T$, $(2+i, 0, -1)^T$. 5) Размерность равна 2; базис: $(-1, i, 1, 0)^T$, $(1+i, 1, 0, -1)^T$. **22.8.** 1) $(3-3i)\,x_1 - 2x_2 = 0$; 2) $0=0$; 3) $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $(1-i)\,x_1 - x_4 = 0$; 4) $(13-4i)\,x_1 + 37x_2 - (11+45i)\,x_3 = 0$; 5) $(1-7i)\,x_1 + (-11+7i)\,x_2 + 10x_3 = 0$, $(-19+13i)\,x_1 + (9-3i)\,x_2 + 10x_4 = 0$. **22.9.** 1) $\|4+i\|$; $\xi_1 = (4+i)\,\xi_1'$;

2) $\begin{Vmatrix} \frac{-1-6i}{2} & \frac{-29-18i}{2} \\ \frac{2+i}{2} & \frac{10-5i}{2} \end{Vmatrix}$; $\quad \xi_1 = -\frac{1+6i}{2}\xi_1' - \frac{29+18i}{2}\xi_2'$,

$\xi_2 = \frac{2+i}{2}\xi_1' + \frac{10-5i}{2}\xi_2'$. $\quad$ 3) $\begin{Vmatrix} 2-i & -1-2i & 1-i \\ -2-i & 3+10i & -1+5i \\ 1+2i & 1-8i & 1-4i \end{Vmatrix}$;

$\xi_1 = (2-i)\,\xi_1' - (1+2i)\,\xi_2' + (1-i)\,\xi_3'$, $\quad \xi_2 = -(2+i)\,\xi_1' + (3+10i)\,\xi_2' + (-1+5i)\,\xi_3'$, $\xi_3 = (1+2i)\,\xi_1' + (1-8i)\,\xi_2' + (1-4i)\,\xi_3'$.

22.10. 1) $\boldsymbol{x} = i c_{44}$; 2) $\boldsymbol{o}$; 3) $\frac{3}{5}(2-9i)\,c_{44} = \frac{3}{5}(9+2i, 4-18i)^T$.

22.11. 1) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(0, 4, 3-i)^T$. 2) Размерность суммы равна 3 (сумма совпадает со всем пространством); базис: $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$. Размерность пересечения равна 1; базис: $(9+10i, 2-16i, -10-3i)^T$. 3) Размерность суммы равна 4 (сумма совпадает со всем пространством); базис: a_1, a_2, a_4, b_4. Размерность пересечения равна 2; базис: b_1, b_2. **22.12.** 2) Базис образуют векторы $(1, 0)^T$, $(i, 0)^T$, $(0, 1)^T$, $(0, i)^T$. Вектор c_{27} имеет в этом базисе координатный столбец $(-3, 2, 0, -1)^T$. **22.13.** 1) Комплексное пространство $(n+1)$-мерно; базис: $1, t, \ldots, t^n$. Вещественное пространство $(2n+2)$-мерно; базис: $1, i, t, it, \ldots, t^n, it^n$. 2) В комплексном пространстве: $(1-2i, 3+i, -3)^T$. В вещественном пространстве: $(1, -2, 3, 1, -3, 0)^T$.

23.1. 1), 5), 9) — линейно; 2), 3), 4), 6), 7), 8), 10) — нет. **23.2.** В любом базисе: 1) нулевая матрица; 2) единичная матрица E; 3) скалярная матрица λE (λ — коэффициент гомотетии). 1) Не является; 2), 3) изоморфизм. **23.4.** При $\mathscr{M} = \mathscr{L}$. **23.5.** Нет при $\{o\} \neq \mathscr{M} \neq \mathscr{L}$. **23.6.** 1) Ортогональное проектирование на прямую $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$; 2) проектирование на подпространство $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$ параллельно подпространству $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; 3) ортогональное проектирование на подпространство $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; 4) проектирование на подпространство $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$ параллельно вектору $\mathbf{a}$; 5) ортогональное отражение в подпространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; 6) ортогональное отражение в прямой $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$. **23.7.** 1) Произведение ортогонального проектирования на плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$ и поворота на $\pi/2$ вокруг прямой $\mathbf{x} = t\mathbf{a}$. 2) Произведение проектирования на плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, поворота на угол $\pi/2$ вокруг прямой $\mathbf{x} = t\,[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ и гомотетии с коэффициентом $|\,[\mathbf{u}, \mathbf{v}]\,|$. **23.8.** 1) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$; ядро — прямая $[\mathbf{r}, \mathbf{n}] = 0$; множество значений — плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; $\operatorname{rg}\varphi = 2$; 2) $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$; ядро — плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0$; множество значений — прямая $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$; $\operatorname{rg}\varphi = 1$; 3) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$, ядро—прямая $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$, множество значений — плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; $\operatorname{rg}\varphi = 2$; 4) $\varphi(\mathbf{x}) = \dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$; ядро — плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$; множество значений — прямая $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = 0$; $\operatorname{rg}\varphi = 1$; 5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n})\dfrac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$; 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x})\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$; 7) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$; 8) $\varphi(\mathbf{x}) = 2\dfrac{(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a} - \mathbf{x}$; в 5)—8) преобразования являются изоморфизмами; $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$; $\operatorname{Im}\varphi$ — все пространство; $\operatorname{rg}\varphi = 3$. **23.9.** 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

$$2)\ \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix};\quad 3)\ \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix};\quad 4)\ \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Указание: *использовать результаты задач* 23.8, 1) и 2).

23.10. 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -6 & -9 & -3 \\ 8 & 12 & -4 \\ 10 & 15 & -5 \end{Vmatrix}$;

4) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{Vmatrix}$. Указание то же, что в задаче 23.9.

23.11. Если исходный базис в $\mathscr{E}_3$ ортонормированный, а базис в $\mathscr{L}$ состоит из вектора $\mathbf{a}$ (в случае прямой) или пары векторов $\mathbf{a}$, $\mathfrak{b}$ (в случае плоскости), то: 23.9. 1) $\|0\ \ 1\ \ 0\|$ при $\mathbf{a}(0, 1, 0)$; 2) $\frac{1}{3}\ \|1\ \ 1\ \ 1\|$ при $\mathbf{a}(1, 1, 1)$; 3) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$ при $\mathbf{a}(2, -1, -1)$, $\mathfrak{b}(-1, 2, -1)$; 4) $-\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$. 23.10. 1) $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ при $\mathbf{a}(0, 1, 0)$, $\mathfrak{b}(0, 0, 1)$; 2) $\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$ при $\mathbf{a}(1, 1, 0)$, $\mathfrak{b}(0, 0, 1)$; 3) $\|2\ \ 3\ \ -1\|$ при $\mathbf{a}(-3, 4, 5)$; 4) $\|1/2\ \ 3/4\ \ -1\|$ при $\mathbf{a}(1, 2, 3)$.

23.12. 1) $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{9}\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Указание: использовать результаты задач 23.8, 5) и 6).

23.13. 1) $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{Vmatrix}$. Указание: использовать результаты задач 23.8, 7) и 8). **23.14.** 1) $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0 \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

2) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 3) A_{259} и A_{260}. **23.15.** В 1) и 2) $\operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{L}''$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathscr{L}'$. Если базис в $\mathscr{L}'$ образуют первые k базисных векторов базиса пространства $\mathscr{L}$, то: 1) $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (k единиц); 2) $\|E_k\ \ O\|$□ (E_k — единичная матрица порядка k). **23.16.** $\operatorname{diag}(1, \ldots$ $\ldots, 1, -1, \ldots, -1)$; φ—изоморфизм (число единиц равно размерности $\mathscr{L}'$). **23.17.** Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — базис в $\mathscr{M}$, а векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ дополняют его до базиса в $\mathscr{L}$. Матрица отображения $\tilde{\varphi}$ в паре базисов $(e_1, \ldots, e_n)$, $(e_1, \ldots, e_r)$ получается из матрицы преобразования φ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ вычеркиванием строк с номерами $r+1, \ldots, n$. **23.22.** 1) $\operatorname{rg}\varphi = \dim\mathscr{L} = \dim\tilde{\mathscr{L}}$, $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$; 2) $B = A^{-1}$. **23.25.** Указание: выбрать базис в $\mathscr{L}$, включающий базис подпространства (если оно ненулевое). **23.26.** 1) $-2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $4\mathbf{a}_3$. Произведение растяжений с коэффициентами — 2, 1, 4 в направлении соответственно

векторов a_1, a_2, a_3. 2) $3a_1, 3a_2, 2a_3$. Гомотетия с коэффициентом 3 в плоскости $x = sa_1 + ta_2$ и растяжение с коэффициентом 2 в направлении вектора a_3. 3) o, $(5, 0, -5)^T$, $(11, 5, -1)^T$. 4) a_1, ia_2, $-ia_3$. Произведение растяжений комплексного арифметического пространства в направлении векторов a_1, a_2, a_3 с коэффициентами $1, i, -i$ соответственно. 5) $-a_1$, $(1+i)\,a_2$, $(1-i)\,a_3$. Произведение растяжений комплексного арифметического пространства в направлении векторов a_1, a_2, a_3 с коэффициентами -1, $1+i$, $1-i$ соответственно. **23.27.** 1) $(0, 6, 18)^T$; 2) o; 3) $(-8, -11, 3, 0, -13)^T$; 4) $\varphi(a_1) = (2n-1)\,a_1$, $\varphi(a_k) = -a_k$ $(k = 2, \ldots, n)$. *В ответах к задачам 23.28, 23.29 и 23.31 приведены координатные столбцы базисных векторов искомых подпространств.* **23.28.** 1) $(12, -5)^T$ и $(5, 12)^T$; 2) $(1, 1, -1)^T$, $(3, 0, 2)^T$ и $(1, 1, -1)^T$; 3) $(1, -1, 1)^T$ и $(1, 1, 0)^T$, $(0, 1, -1)^T$; 4) $(0, 1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$ и $(1, 1, -3, -3)^T$, $(1, -1, -1, 1)^T$; 5), 6) $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathscr{L}$, φ — изоморфизм. **23.29.** 1) $(0, 2, 0, 1)^T$, $(0, -3, 1, 0)^T$ и $(0, 1, 0)^T$, $(1, 0, -2)^T$; 2) φ инъективно, $\operatorname{Ker}\varphi = \{o\}$; $(4, 3, -1, 7)^T$, $(5, 2, 3, 7)^T$, $(9, 7, 2, 6)^T$; 3) $(3, 1, 0)^T$, $(2, 0, -1)^T$ и $(-2, 1, 7, -3)^T$; 4) $(2, 0, 1, -1, 0)^T$, $(0, 1, 2, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0, 1)^T$; φ сюръективно; 5) $(0, 1, 1)^T$ и $(-2, -2, -3, 4, 6)^T$, $(2, 2, 2, 1, -5)^T$; 6) $(-23, 1, 0, -3, 6)^T$, $(-42, 0, 1, 5, 10)^T$; φ сюръективно. **23.30.** Здесь C, C_1, C_2, C_3 — любые действительные числа. 1) $(0, 0, 1/10, 1/5)^T + C_1\,(10, 0, -7, 6)^T + C_2\,(0, 5, -1, -7)^T$; 2) $(7/2, 0, -1/2, 0, 0)^T + C_1\,(19, 2, -5, 0, 0)^T + C_2\,(41, 0, -11, 2, 0)^T + C_3\,(1, 0, -2, 0, 1)^T$; 3) $(0, 0, 1)^T + C\,(1, -2, -3)^T$; 4) $(0, 1, 0, 0)^T + C\,(2, 2, 1, -1)^T$. **23.31.** 1) $(1, 1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 2, 0, 0)^T$, $(2, 0, 1, -1, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0, 1)^T$; 2) $(1, 1, -1, -1)^T$, $(0, 2, 1, 0)^T$, $(7, 23, 0, -11)^T$; 3) $(0, 3, -1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0, -1, 0, 0)^T$, $(0, 4, 0, 0, 0, -1)^T$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $(0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$. **23.34.** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

23.35. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. **23.36.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. **23.37.** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

23.38. Изоморфизм определяется равенством: 1) $\varphi(x) = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{Vmatrix}$, 2) $\varphi(x) = \begin{Vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{Vmatrix}$, 3) $\varphi(x) = \begin{Vmatrix} ix_3 & x_1 + ix_2 \\ -x_1 + ix_2 & -ix_3 \end{Vmatrix}$, где $x =$

$=(x_1, x_2, x_3)^T$. **23.40.** 1) Ядро — многочлены нулевой степени; множество значений — многочлены степени не выше $m-1$; а), б) A_{594} $(n=m+1)$; в) A_{613} $(n=m+1)$. 2) A_{595} (размеров $m \times (m+1)$). **23.41.** 1) Ядро состоит из многочленов нулевой степени; множество значений — $\mathscr{P}$; ранг n; $A=A_{596}$; 2) ядро $\{0\}$; множество значений — Q; ранг $n+1$; $A=\operatorname{diag}(1, 3, \ldots, 2n+1)$. **23.42.** A_{612} $(n=m+1)$.

23.43. 1) $\operatorname{diag}\left(0, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{Vmatrix}\right)$ (матрица порядка $2n+1$); 2) $\operatorname{diag}(1, \ldots, n)$, $\operatorname{diag}(1, 1/2, \ldots, 1/n)$. **23.44.** 1) Ядро $\{0\}$; множество значений — подпространство многочленов степени не выше n с нулевым свободным членом; ранг n; $A=A_{597}$. 2) $\mathscr{M}$; преобразование инъективно, но не сюръективно. **23.45.** 1), 3) Отображения инъективны, но не сюръективны и не обратимы. 2) Обратное отображение — дифференцирование. **23.46.** Четные многочлены. **23.47.** 1) $\operatorname{diag}(A, A)$. Базис ядра: $\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; базис образа: $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$. 2) A_{589}. Базис ядра: $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$; φ сюръективно. **23.48.** 1) Ядро состоит из матриц, у которых первые $n-1$ столбцов нулевые; φ сюръективно. 2) $\| E_{m(n-1)} \quad O \|$ — матрица размеров $m(n-1) \times mn$. 3) φ — умножение справа на $\begin{Vmatrix} E_{n-1} \\ O \end{Vmatrix}$ — матрицу размеров $n \times (n-1)$. **23.49.** Ядро натянуто на вектор $(1, -2, 1, -2)^T$; множество значений — вещественные матрицы вида $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & a \end{Vmatrix}$; $\operatorname{rg}\varphi = 3$; $A=A_{496}$. **23.50.** A_{590}.

23.51. 1) Ядро — многочлены вида a_0x^n, множество значений состоит из многочленов без y^n $(a_n=0)$; 2) ядро — многочлены вида a_ny^n, множество значений состоит из многочленов без x^n $(a_0=0)$; 3) при нечетном n преобразование является изоморфизмом, при $n=2m$ его ядро состоит из многочленов вида $a_mx^my^m$, множество значений — из многочленов, не содержащих члена x^my^m. Матрицы: 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 2 \ldots 0 \\ . & . & . \quad . \\ 0 & 0 & 0 \ldots n \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}$;

2) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & & -n+2 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -n \end{Vmatrix}$.

23.53. 1) При $k=\dim\mathscr{L}$. 2) а) Пусть $a_1, \ldots, a_r$ образуют базис в линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_k$. Тогда $a_{r+1}, \ldots, a_k$ должны быть такими же линейными комбинациями векторов $a_1, \ldots, a_r$, как $b_{r+1}, \ldots$ $\ldots, b_k$ — векторов $b_1, \ldots, b_r$. б) Условие 1) и $r=\dim\mathscr{L}$. **23.54.** 1) BA^{-1};

2) B; 3) E. **23.55.** 1) BA^{-1}; 2), 3) $A^{-1}B$. **23.56.** 1) A_{16}; 2) A_{31}; 3) A_{37}; 4) A_{61}. **23.57.** 1) а) A_{267}; б) diag $(1, 2, 2)$; 2) а) A_{230}; б) diag $(0, 1, 1)$; 3) а) $\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -7 & -3 & 6 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; 4) а) A_{273}; б) $\begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

23.58. 1) а) A_{141}; б) A_{392}; в) A_{172}; г) A_{506}; д) A_{406}; е) A_{516}. 2) Во всех задачах: матрица B. Указание: использовать результат задачи 23.54. **23.59.** 1) $\begin{Vmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 2 & -2+3a & 2a \\ 2 & -3+3b & 2b \\ -3 & 4+3c & 2c \end{Vmatrix}$ (a, b, c — произвольные числа). 2), 4) не существует. **23.60.** 1) φ сюръективно; $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$; $\varphi(a) = (4, -1)^T$; 2) φ инъективно; $\operatorname{rg} \varphi = 2$; $\varphi(a) = (11, 10, -6)^T$; 3) φ сюръективно; $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$; $\varphi(a) = (-4, -6, 0)^T$; 4) φ не единственно, ранг может равняться двум или трем, размерность ядра 1 или 0 соответственно. Во втором случае φ инъективно. $\varphi(a) = (-10, -10, -13, 10, 28)^T$. **23.61.** 1) $(1+i)E$; 2) A_{82}; 3) A_{98}; 4) A_{262}. **23.62.** 1) $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 7 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$; 9) A_{497}; 10) A_{498}. **23.63.** 1) $\begin{Vmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$; 3) diag $(-1, 1+i, 1-i)$; 4) diag $(1, \omega^2, \omega)$; 5) diag $(2, 2, -2, 2i)$; 6) diag $\left(\begin{Vmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}\right)$. **23.64.** 1) $\begin{Vmatrix} 36 & -25 & -3 \\ 23 & -16 & -2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} -42 & -18 & -20 & 48 \\ 15 & 7 & 7 & -17 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{Vmatrix}$; 4) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -3 & -15 & 9 \\ 1 & 5 & 5 \\ 5 & 25 & -31 \\ 1 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$.

23.65. 1) $\begin{Vmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix}$. Указание: сначала записать матрицу в базисе из направляющих векторов данных прямых. **23.66.** 1) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$; 4) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & 1 \end{Vmatrix}$ и

$$\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix};\quad 5)\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$ и

$$\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$ Указание: сначала записать матрицу преобразования в базисе, составленном из базисов данных подпространств. **23.67.** 1) A_{383}; 2) A_{428}; 3) A_{613} ($n = m + 1$); 4) A_{598} ($n = m$); 5) A_{599} ($n = m$). **23.68.** 1) Та же матрица, что и в ответе к 23.43, 1); 2) $\begin{Vmatrix} O & A \\ B & O \end{Vmatrix}^{\square}$,

где $A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 2 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{Vmatrix}$, $\quad B = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n \end{Vmatrix}$;

3) A_{551}. **23.69.** 1) Поменяются местами i-й и j-й столбцы; 2) поменяются местами k-я и l-я строки; 3) i-й столбец умножится на λ, j-я строка разделится на μ; 4) к i-му столбцу прибавится j-й, к l-й строке прибавится k-я. **23.70.** 1) Поменяются местами две строки и два столбца с номерами i и j; 2) i-я строка умножится на λ, i-й столбец разделится на λ; 3) к i-му столбцу прибавится j-й, из j-й строки вычтется i-я; 4) произойдут аналогичные перестановки столбцов и строк матрицы; 5) матрица заменится на центрально симметричную исходной. Указание. При решении задач 23.69—23.71 можно использовать формулы (3), (4) из введения к § 23 и задачи 15.27—15.30. **23.73.** $\operatorname{rg}\varphi$. Указание: использовать задачу 23.72 или 23.71 и метод Гаусса. **23.74.** 1) $\operatorname{diag}(1, 0)$ в базисах $(1, 0)^T$, $(-1, 1)^T$ и $(1, 1)^T$, $(0, 1)^T$; 2) E в базисах $(1, 0)^T$, $(0, 1)^T$ и $(1, 3)^T$, $(3, 10)^T$; 3) $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$ в базисах $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(1, 1, -1)^T$ и $(0, -1, -1)^T$, $(1, 0, 1)^T$, $(0, 0, 1)^T$; 4) $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ в базисах $(1, 0, 0)^T$, $(1, 1, 0)^T$, $(1, -1, -1)^T$ и $(1, -1, 2)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$; 5) A_{570} в базисах: $(1, 0, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 2, 0, 0)^T$, $(2, 0, 1, -1, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0, 1)^T$ и $(1, 1)^T$, $(2, -2)^T$; 6) A_{416} в базисах: $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$ и $(-2, -2, -3, 4, 6)^T$, $(-2, -2, -2, -1, 5)^T$, $(0, 1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 0, 0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 0, 0, 1)^T$. **23.77.** λE, где λ — произвольное число. **23.78.** 1) $\varphi\psi$ существует при $n = k$, $\psi\varphi$ существует при $m = l$. **23.79.** Пусть $\varphi\colon \mathcal{R}_k \to \mathcal{R}_l$, $\psi\colon \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_m$, $\chi\colon \mathcal{R}_s \to \mathcal{R}_t$. 1) $n = t$, $m = k$; 2) $s = n$, $t = m = k$; 3) $t = k = n$, $l = m$; 4) $k = n$, $l = m$. **23.80.** Если $\varphi\colon \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{M} = \varphi(\mathcal{L})$, то $\varphi = I\hat{\varphi}$, где $\hat{\varphi}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и $I\colon \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{L}}$ — естественное вложение.

23.82. 1) $\begin{Vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} -3 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & -4 \\ -2 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 4 & 5 & -4 \\ 3 & 13 & -8 \end{Vmatrix}$.

У к а з а н и е. Пусть A, B, C — матрицы, составленные из координатных столбцов векторов a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$), X, Y — матрицы преобразований φ и ψ в данном базисе. Тогда $XA = B$, $YB = C$, $YXA = YB = C$, т. е. матрица Z преобразования $\psi\varphi$ удовлетворяет матричному уравнению $ZA = C$. В базисе a_1, a_2, a_3: $Z' = A^{-1}ZA = A^{-1}C$, $AZ' = C$. В базисе b_1, b_2, b_3: $Z'' = B^{-1}ZB$. **23.83.** 1), 2) 0; 3) $\begin{Vmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. У к а з а н и е: $\varphi - \psi = 5\iota$. **23.85.** 1) Матрица порядка $n+1$: $\begin{Vmatrix} O & E \\ O & O \end{Vmatrix}$, где E — единичная матрица порядка $n-k+1$ при $k \leqslant n$, 0 при $k > n$; 2) матрица порядка $2n+1$: $(-1)^s \operatorname{diag}(0, B, 2^kB, \ldots, n^kB)$, где $B = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ при $k = 2s-1$, $B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ при $k = 2s$ ($k = 1, 2, \ldots, s = [(k+1)/2]$). **23.86.** 1)$(\tau D)(a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n) = a_1t + 2a_2t^2 + \ldots + na_nt^n$; 2) $(D\tau)(a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n) = a_0 + 2a_1t + \ldots + (n+1)a_nt^n$; 3) $[D, \tau] = \iota$; 4) у к а з а н и е: доказывать по индукции на основе результата задачи 3). **23.91.** Ср. 15.59. **23.100.** 2) Пусть отображение ε_{ij} имеет в некоторой паре базисов матрицу E_{ij} (матричную единицу). Базис в $L(\mathscr{P}, \mathscr{Q})$ состоит из всех отображений ε_{ij}; $\dim L(\mathscr{P}, \mathscr{Q}) = mn$. **23.101.** 1), 2), 4), 5) — нет; 3), 6) — да. **23.103.** 1), 2), 3), 5) при $d \neq 1$ нет; 4), 6) — да. **23.104.** У к а з а н и е: если грани отражателя совместить с координатными плоскостями, то направляющий вектор луча подвергнется последовательным отражениям с матрицами $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$, $\operatorname{diag}(1, -1, 1)$, $\operatorname{diag}(-1, 1, 1)$.

В ответах к задачам на отыскание собственных значений и собственных векторов для каждого собственного значения λ указывается либо множество $\mathscr{X}$ соответствующих собственных векторов, либо базис собственного подпространства, а в случае диагонализируемого преобразования — диагональный вид матрицы преобразования и собственный базис или матрица из координатных столбцов векторов этого базиса.
24.1. У к а з а н и е: рассматриваемое множество содержится в собственном подпространстве. **24.3.** $n - r$. **24.4.** $\begin{Vmatrix} A & B \\ O & C \end{Vmatrix}^{\square}$, где $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные значения. **24.13.** У к а з а н и е: многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень **24.14.** 2) Пусть $\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$; тогда $a_k = \sum\limits_{(i_1, \ldots, i_k)} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}$, где $(i_1, \ldots, i_k)$ пробегает упорядоченные k-элементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ ($k = 1, \ldots, n$); $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$; $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$. **24.15.** Все ненулевые векторы. **24.16.** Собственное значение λ (кратности n), собственные векторы αe_1

($\alpha \neq 0$). **24.17.** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. **24.18.** Искомый базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$, где $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис в $\mathscr{L}'$, $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ — базис в $\mathscr{L}''$. 1) $\operatorname{diag}(E_k, O)$; 2) $\operatorname{diag}(E_k, -E_{n-k})$ в базисе e. **24.19.** 1) $\lambda = 1$, $x + 2y = 0$; $\lambda = -1$, $x + 3y = 0$; $\operatorname{diag}(-1, 1)$ в базисе $(-2, 1)^T$, $(-3, 1)^T$. 2) $\lambda = 1$, $x + y = 0$; $\lambda = 0$, $4x + 5y = 0$; $\operatorname{diag}(1, 0)$ в базисе $(1, -1)^T$, $(-5, 4)^T$. 3) $\lambda = 1$, $3x - 2y = 0$; $\lambda = 2$, $x - y = 0$; $\operatorname{diag}(1, 2)$ в базисе $(2, 3)^T$, $(1, 1)^T$. **24.20.** 1) $\lambda = 1$, прямая $x = z = 0$; $\lambda = 0$, плоскость $y = 0$; $\operatorname{diag}(0, 1, 0)$ в данном базисе. 2) $\lambda = 1$, прямая $x = y = z$; $\lambda = 0$, плоскость $x + y + z = 0$; $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ в базисе $(1, 1, 1)^T$, $(1, -1, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$. 3) $\lambda = 1$, плоскость $x + y + z = 0$; $\lambda = 0$, прямая $x = y = z$; $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$ в базисе $(1, -1, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$, $(1, 1, 1)^T$. 4) $\lambda = 1$, плоскость $-x + y + 2z = 0$; $\lambda = 0$, прямая $-2x = 2y = z$; $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$ в базисе $(1, -1, 1)^T$, $(1, -3, 2)^T$, $(-1, 1, 2)^T$. 5) $\lambda = 1$, плоскость $x = 0$; $\lambda = 0$, прямая $2x = 2y = -z$; $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$ в базисе $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$, $(1, 1, -2)^T$. 6) $\lambda = 1$, плоскость $x = y$; $\lambda = 0$, прямая $-2x = 3y = 6z$; $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$ в базисе $(1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$, $(-3, 2, 1)^T$. 7) $\lambda = 1$, прямая $-20x = 15y = 12z$; $\lambda = 0$, плоскость $2x + 3y - z = 0$; $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ в базисе $(-3, 4, 5)^T$, $(1, 0, 2)^T$, $(0, 1, 3)^T$. 8) $\lambda = 1$, прямая $2x = y = 2z$; $\lambda = 0$, плоскость $2x + 3y - 4z = 0$; $\operatorname{diag}(1, 0, 0)$ в базисе $(1, 2, 1)^T$, $(-3, 2, 0)^T$, $(2, 0, 1)^T$. 9) $\lambda = 1$, плоскость $x = 0$; $\lambda = -1$, прямая $y = z = 0$; $\operatorname{diag}(-1, 1, 1)$ в базисе $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$. 10) $\lambda = 1$, прямая $x = 2y = z$; $\lambda = -1$, плоскость $2x + y + 2z = 0$; $\operatorname{diag}(1, -1, -1)$ в базисе $(2, 1, 2)^T$, $(-1, 2, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$. 11) $\lambda = 1$, плоскость $x + y + z = 0$; $\lambda = -1$, прямая $x = y = z$; $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$ в базисе $(1, -1, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$, $(1, 1, 1)^T$. 12) $\lambda = 1$, плоскость $x = 0$; $\lambda = -1$, прямая $2x = y = -z$; $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$ в базисе $(0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$, $(1, 2, -2)^T$. 13) $\lambda = 1$, прямая $2x = y = 2z$; $\lambda = -1$, плоскость $x + y = 0$; $\operatorname{diag}(1, -1, -1)$ в базисе $(1, 2, 1)^T$, $(-1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$. **24.21.** 1) При $\alpha = 2k\pi$: $\lambda = 1$, все ненулевые векторы собственные; при $\alpha = (2k + 1)\pi$: $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha e_3 \mid \alpha \neq 0\}$ и $\lambda = -1$, $\mathscr{X} = \{\alpha e_1 + \beta e_2 \mid |\alpha| + |\beta| \neq 0\}$; при $\alpha \neq k\pi$: $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha e \mid \alpha \neq 0\}$ (k — целое); 2) $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha e_1 \mid \alpha \neq 0\}$; 3) $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha (1, 1, 1)^T \mid \alpha \neq 0\}$; 4) $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha (1, 1, -1)^T \mid \alpha \neq 0\}$ и $\lambda = 0$, $\mathscr{X} = \{\alpha (-3, 1, 0)^T + \beta (0, 0, 1)^T \mid |\alpha| + |\beta| \neq 0\}$; 5) $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha (2, 2, -1)^T \mid \alpha \neq 0\}$ и $\lambda = -1$, $\mathscr{X} = \{\alpha (1, -1, 0)^T + \beta (3, 0, -1)^T \mid |\alpha| + |\beta| \neq 0\}$; 6) $\lambda = 2$, $\mathscr{X} = \{\alpha (1, 1, 1)^T \mid \alpha \neq 0\}$ и $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha (0, 1, 0)^T + \beta (2, 0, 1)^T \mid |\alpha| + |\beta| \neq 0\}$; 7) $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha (1, 1, -1)^T \mid \alpha \neq 0\}$; 8) $\lambda = 1$, $\mathscr{X} = \{\alpha (-1, 1, 1)^T \mid \alpha \neq 0\}$. **24.22.** 1) $\lambda = 0$, собственное подпространство $b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0$; если $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \neq 0$, то еще $\lambda = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, $\mathscr{X} = \{\alpha (a_1, \ldots, a_n)^T \mid \alpha \neq 0\}$. 2) $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \neq 0$; 3) а) да; б) нет. **24.23.** Преобразование с матрицей $\operatorname{diag}(\lambda E_{k-1}, J_{m+1}(\lambda), \mu E_{n-m})$, где $\mu \neq \lambda$. **24.26.** 1) $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$; 2) $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$; 3) $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$. Указание: доказать, что при $\lambda \neq 0$

$\det(A-\lambda E)=(-1)^n \det A\cdot\det(A^{-1}-\lambda^{-1}E)$. 4) $p(\lambda_1)$, ..., $p(\lambda_n)$ Указание: использовать задачу 24.25. **24.27.** $\lambda_j\mu_j$. Указание: диагонализируемость матриц A и B влечет диагонализируемость $A\otimes B$ **24.29.** Преобразование с матрицей $J_n(0)$. **24.30.** 1) $\operatorname{diag}(-4, 4)$ в базисе $(8, -1)^T$; $(0, 1)^T$; 2) $\operatorname{diag}(0, 1)$ в базисе $(0, 1)^T$, $(1, 1)^T$; 3) $\operatorname{diag}(-1, -2)$ в базисе $(2, -1)^T$, $(1, -1)^T$; 4) $\operatorname{diag}(4, 9)$ в базисе $(2, 1)^T$, $(-1, 2)^T$; 5) $\operatorname{diag}(0, 25/12)$ в базисе $(3, 4)^T$, $(4, -3)^T$; 6) $\lambda=1$, $(1, 0)^T$; 7) $\operatorname{diag}(2, 0)$ в базисе $(1, 1)^T$, $(1, -1)^T$; 8) $\lambda=0$, $(1, 1)^T$; 9) $\operatorname{diag}(169, 0)$ в базисе $(5, 12)^T$, $(-12, 5)^T$; 10) $\lambda=-2$, $(1, 2)^T$; 11) $\operatorname{diag}(-2, 1, 4)$ в базисе $(1, 0, -1)^T$, $(0, 1, 0)^T$, $(3, 4, 3)^T$; 12) $\operatorname{diag}(1, 1, -1)$ в базисе $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1)^T$, $(0, -1, 1)^T$; 13) $\operatorname{diag}(1, -1, -2)$ в базисе $(2, 1, 1)^T$, $(1, 0, 1)^T$, $(1, -1, 1)^T$; 14) $\operatorname{diag}(1, 2, 3)$ в базисе $(0, 1, 1)^T$, $(1, 1, 1)^T$, $(1, 0, 1)^T$; 15) $\operatorname{diag}(0, -1, 2)$ в базисе $(1, 0, 1)^T$, $(0, 1, -2)^T$, $(3, -2, 1)^T$; 16) $\operatorname{diag}(-2, 9, -4)$ в базисе $(1, 0, -1)^T$, $(2, 1, 2)^T$, $(5, -4, 5)^T$; 17) $\operatorname{diag}(1, 2, 10)$ в базисе $(2, 1, -2)^T$, $(1, 0, 1)^T$, $(-1, 4, 1)^T$; 18) $\operatorname{diag}(14, 0, 0)$ в базисе $(2, 1, -3)^T$, $(-1, 2, 0)^T$, $(6, 3, 5)^T$; 19) $\operatorname{diag}(3, 3, 2)$ в базисе $(1, -1, 0)^T$, $(1, 0, 1)^T$, $(1, 2, 4)^T$; 20) $\operatorname{diag}(1, 2, 2)$ в базисе $(1, 1, 1)^T$, $(1, 0, -3)^T$, $(0, 1, 3)^T$; 21) $\operatorname{diag}(7, 7, -7)$ в базисе $(1, -2, 0)^T$, $(0, 3, 1)^T$, $(2, 1, -3)^T$; 22) $\lambda=0$, $(1, 0, 0)^T$; $\lambda=-1$, $(0, 1, 0)^T$; 23) $\operatorname{diag}(3, -1, -1)$ в базисе $(1, 1, 2)^T$, $(1, -1, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$; 24) $\lambda=-3$, $(2, 0, 1)^T$; $\lambda=2$, $(0, -1, 1)^T$; 25) $\lambda=0$, $(2, -1, 0)^T$; 26) $\operatorname{diag}(0, 1, 1)$ в базисе $(1, 1, -1)^T$, $(2, 1, 0)^T$, $(3, 0, 2)^T$; 27) $\lambda=0$, $(1, 1, 0)^T$, $(-1, 3, 2)^T$; 28) $\lambda=-1$, $(2, -1, 0)^T$, $(1, -2, 1)^T$; 29) $\operatorname{diag}(-1, 1, 1)$ в базисе $(3, 5, 6)^T$, $(2, 1, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$; 30) $\lambda=-1$, $(-2, 1, 1)^T$; 31) $\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$ в базисе $(1, 0, 0, 1)^T$; $(0, 1, 1, 0)^T$, $(0, -1, 1, 0)^T$, $(-1, 0, 0, 1)^T$; 32) $\operatorname{diag}(1, -1, 1, -1)$ в базисе $(1, 1, 0, 0)^T$, $(-1, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, $(0, 0, -1, 1)^T$; 33) $\operatorname{diag}(4, 9, 9, -1)$ в базисе $(2, 1, 0, 0)^T$, $(1, -2, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, $(8, 4, -5, 5)^T$; 34) $\operatorname{diag}(0, 0, 0, 4)$ в базисе $(1, 1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, $(1, -1, 1, -1)^T$; 35) $\lambda=0$, $(1, 0, 0, 1)^T$, $(0, 1, 1, 0)^T$; $\lambda=2$, $(1, -1, 1, -1)^T$; 36) $\operatorname{diag}(1, 3, 5, -4)$ в базисе $(1, 0, -1, 1)^T$, $(1, 1, 0, -1)^T$, $(1, 1, -1, 0)^T$, $(0, 1, 1, -1)^T$; 37) $\operatorname{diag}(-1, 1, 1, -2)$ в базисе $(-2, 1, 1, 1)^T$, $(1, -1, 0, 0)^T$, $(1, 0, -1, 0)^T$, $(1, 0, 0, -1)^T$; 38) $\operatorname{diag}(2, 2, 2, -2)$, A_{468}; 39) $\lambda=0$, $(1, 1, 1, 1)^T$; 40) $\lambda=1$, $(1, 0, 1, 0)^T$, $(1, -3, 0, 0)^T$, $(1, 1, -1, -1)^T$. **24.31.** 1) $\operatorname{diag}(i, -i)$ в базисе $(1, -i)^T$, $(-i, 1)^T$; 2) $\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2)$, $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$, в базисе $(1, -\varepsilon)^T$, $(-\varepsilon, 1)^T$; 3) $\operatorname{diag}(0, 2i)$ в базисе $(1, -i)^T$, $(-i, 1)^T$; 4) $\operatorname{diag}(-1, 1)$ в базисе $(\varepsilon, -1)^T$, $(\varepsilon, 1)^T$; 5) $\operatorname{diag}(1-i, 1+i)$ в базисе $(1, 1)^T$, $(-1, 1)^T$; 6) $\operatorname{diag}(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$ в базисе $(1, -i)^T$, $(-i, 1)^T$; 7) $\operatorname{diag}(\varepsilon+i, \varepsilon-i)$ в базисе $(1, i)^T$, $(i, 1)^T$; 8) $\operatorname{diag}(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ в базисе $(\sqrt{3}-1, 1-i)^T$, $(1+i, 1-\sqrt{3})^T$; 9) $\operatorname{diag}(0, 3i, -3i)$ в базисе $(2, 2, -1)^T$, $(5, 3i-4, 2+6i)^T$, $(5, -4-3i, 2-6i)^T$; 10) $\operatorname{diag}(1, i, -i)$ в базисе $(0, 1, 1)^T$, $(2, 2, 3+i)^T$, $(2, 2, 3-i)^T$; 11) $\operatorname{diag}(-1,$

$1+i, 1-i)$ в базисе $(1, 1, -1)^T$, $(1+i, 1, -i)^T$, $(1-i, 1, i)^T$; 12) $\operatorname{diag}(2, 3+i, 3-i)$ в базисе $(2, 1, 1)^T$, $(4, 3, 2-i)^T$, $(4, 3, 2+i)^T$; 13) $\operatorname{diag}(2, -1+i, -1-i)$ в базисе $(1, 0, -1)^T$, $(2, 2, -5-i)^T$, $(2, 2, -5+i)^T$; 14) $\operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2)$, $\omega = e^{2\pi i/3}$, в базисе A_{363}; 15) $\operatorname{diag}(\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i\sqrt{3})$ в базисе $(1+\sqrt{3}, 1, 1)^T$, $(1-\sqrt{3}, 1, 1)^T$, $(0, 1, -1)^T$; 16) $\operatorname{diag}(1+i, 1+i, 2+i)$ в базисе $(1, 0, 0)^T$, $(0, 2, 1)^T$, $(1+i, 1, 1)^T$; 17) $\operatorname{diag}(4, 1, 0)$ в базисе $(1+i, 3i, 1)^T$, $(1, 0, i-1)^T$, $(1+i, -i, 1)^T$; 18) $\operatorname{diag}(i, -i, i, -i)$ в базисе A_{486}; 19) $\operatorname{diag}(2, -4, -1+i, -1-i)$ в базисе $(1, 1, 1, 1)^T$, $(1, -1, 1, -1)^T$, $(1, i, -1, -i)^T$, $(1, -i, -1, i)^T$; 20) $\operatorname{diag}(1+i, -1+i, 1+i, -1+i)$ в базисе $\operatorname{diag}(A_{16}, A_{16})$; 21) $\operatorname{diag}(2, 2, -2, 2i)$ в базисе A_{473}.

24.32. 1) $\lambda = -3$, $(-1, 2)^T$; 2) $\lambda = 5$, $(1, 3)^T$; 3) $\lambda = 3$, $(2, 0, -1)^T$; $\lambda = 2$, $(0, -1, 1)^T$; 4) $\lambda = 0$, $(2, 1, -1)^T$; $\lambda = -1$, $(3, 3, -4)^T$; 5) $\lambda = -1$, $(2, 0, 1)^T$; $\lambda = 1$, $(1, 1, 1)^T$; 6) $\lambda = 0$, $(1, 1, -1)^T$, $(3, 0, 2)^T$; 7) $\lambda = 0$, $(1, 0, 0, 1)^T$, $(0, 1, 1, 0)^T$; 8) $\lambda = 1$, $(2, -1, 2, -1)^T$; $\lambda = -1$, $(2, -1, -2, 1)^T$; 9) $\lambda = 1$, $(1, 1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 0, 0, 1, 1)^T$; $\lambda = -1$, $(0, 1, 1, 0, 0)^T$.

24.33. 1) $\lambda_1 = \varepsilon$, $\lambda_2 = \varepsilon^2$; а) нет; б) $\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2)$ в базисе $(1, 1-\varepsilon)^T$, $(1, 1-\varepsilon^2)^T$ $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$. 2) $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$; а) $(-1)^n E$ при $\alpha = \pi n$ (n целое), в любом базисе; при остальных α преобразование не диагонализируемо; б) $\operatorname{diag}(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha})$, A_{94}. 3) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \omega$, $\lambda_3 = \omega^2$; а) нет; б) $\operatorname{diag}(1, \omega^2, \omega)$, A_{363} $(\omega = e^{2\pi i/3})$. 4) $\lambda_{1,2} = 3$; а), б) нет. 5) $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$; а) нет; б) $\operatorname{diag}(0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3})$, A_{384}. 6) $\lambda_{1,2} = 1$; а), б) нет. 7) $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$, $\lambda_{3,4} = 1$; а), б) нет. 8) $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$; а) нет; б) $\operatorname{diag}(i, i, -i, -i)$, A_{488}. 9) $\lambda_{1,2} = 1+i$, $\lambda_{3,4} = 1-i$; а) нет; б) $\operatorname{diag}(1+i, 1+i, 1-i, 1-i)$, A_{488}. 10) $\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i$; а), б) нет.

24.34. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис, $m = [(n+1)/2]$, $r = [n/2]$. 1) $\operatorname{diag}(E_m, -E_r)$ в базисе из векторов $e_k + e_{n-k+1}$ $(k = 1, \ldots, m)$ и $e_k - e_{n-k+1}$ $(k = 1, \ldots, r)$. 2) $\operatorname{diag}(3E_m, -E_m)$ в базисе примера 1). 3) $\operatorname{diag}(2n-1, -1, \ldots, -1)$ в базисе из векторов $e_1 + \ldots + e_n$, $e_1 - e_k$ $(k = 2, \ldots, n)$. 4) $\operatorname{diag}(x + (n-1)y, x-y, \ldots, x-y)$ в базисе примера 3). 5) $\lambda = 0$, базисный собственный вектор $\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s C_{n-1}^s e_{s+1}$; преобразование не диагонализируемо. 6) $\operatorname{diag}(n-1, n-3, \ldots, 1-n)$, компонентами k-го базисного собственного вектора являются коэффициенты многочлена $(1+t)^{n-k}(1-t)^{k-1}$, расположенного по возрастающим степеням t. 7) $\operatorname{diag}\left(2\cos\frac{\pi}{n+1}, \ldots, 2\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)$ в базисе из векторов

$$a_k = \sum_{s=1}^{n} \sin\frac{\pi ks}{n+1} e_s, \quad k = 1, \ldots, n.$$

8) $\operatorname{diag}(0, \ldots, 0, n)$ в базисе $a_1, \ldots, a_n$, где $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — базис подпространства $x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^{n-1} x_n = 0$, $a_n = e_1 - e_2 + \ldots + (-1)^{n-1} e_n$. 9) $\operatorname{diag}(2E_m,$

$-2E_m)$ при $n=2m$; $\operatorname{diag}(2E_{m-1}, 1, -2E_{m-1})$ при $n=2m-1$ в базисе из векторов e_k+2e_{n-k+1} $(k=1, \ldots, m)$, e_k-2e_{n-k+1} $(k=1, \ldots, r)$. 10) $\lambda=0$ с собственными векторами $e_1, \ldots, e_r$; при $n=2m-1$ еще $\lambda=1$ с собственным вектором e_m; преобразование не диагонализируемо. 11) $\operatorname{diag}(iE_m, -iE_m)$ при $n=2m$; $\operatorname{diag}(iE_{m-1}, 1, -iE_{m-1})$ при $n=2m-1$ в базисе из векторов e_k+ie_{n-k+1} $(k=1, \ldots, m)$, e_k-ie_{n-k+1} $(k=1, \ldots, r)$. 12) $\operatorname{diag}\left(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}\right)$ в базисе из векторов $a_k=\sum\limits_{s=1}^{n} \varepsilon^{(k-1)s} e_s$ $(k=0, 1, \ldots, n-1;\quad \varepsilon=e^{2\pi i/n})$.
13) $\operatorname{diag}\left(2i\cos\dfrac{\pi}{n+1}, \ldots, 2i\cos\dfrac{\pi n}{n+1}\right)$ в базисе из векторов $a_k=$ $=\sum\limits_{s=1}^{n} i^{s-1}\sin\dfrac{\pi k s}{n+1} e_s$, $k=1, \ldots, n$. 24.35. 1) $\pm\dfrac{i}{2}(\sqrt{5}\pm 1)$; 2) $4, 0, 2\pm 2\sqrt{2}$; 3) $0, 8, 8, 12$; 4) $0, \pm 4i, \pm 8i$; 5) $e^{k\pi i/3}$, $k=0, \pm 1, \pm 2$; 6) $a+2b\cos\dfrac{\pi k}{n+1}$, $k=1, \ldots, n$. Указание: использовать преобразование $a\iota+b\psi$, где ψ — преобразование из 24.34, 7). 7) $\lambda_k=a_1+a_2\varepsilon_k+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1}$, где $\varepsilon_k=e^{2\pi k i/n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Указание: перейти к базису $f_k=\left(1, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_k^{n-1}\right)^T$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. 8) $a_1+\ldots+a_n$ и $\pm\lambda_k$, где $\lambda_k=\left|a_1+a_2\varepsilon_k+\ldots+a_n\varepsilon_k^{n-1}\right|$, $\varepsilon_k=e^{2\pi k i/n}$, $0<k<[n/2]$, а при четном n также $a_1-a_2+\ldots+$ $+(-1)^{n-1}a_n$. 9) $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$ с кратностями соответственно $k+1, k, k, k$ при $n=4k+1$ и $k+1, k+1, k+1, k$ при $n=4k+3$. Указание: характеристические числа матрицы A^2 равны n и $-n$ с кратностями соответственно $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$. 24.36. 1) $1+$ $+(-1)^n$; 2) 0; 3) $\sqrt{n}$ при $n=4k+1$, $i\sqrt{n}$ при $n=4k+3$; 4) $i^{(n-1)(3n-2)/2}n^{n/2}$. Указание: воспользоваться результатами задач 24.34, 7), и 24.35, 9). 24.37. 1) A_{287}; 2) A_{230}; 3) $A_{304}\sim D_2$, $A_{305}\sim D_1$. 24.38. 1) $J_3(-1)$; 2) A_{485}. 24.39. 5. 24.40. 9, 4, 3, 2; 2. 24.41. $\dfrac{b+3a}{4}$. Указание: проверить, что $\left\|\begin{matrix} x_{n+1} \\ x_n \end{matrix}\right\|=A\left\|\begin{matrix} x_n \\ x_{n-1} \end{matrix}\right\|$, где A — некоторая матрица. Выразить $\left\|\begin{matrix} x_{n+1} \\ x_n \end{matrix}\right\|$ через $\left\|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\|$ и A. Для вычисления A^n привести матрицу A к диагональному виду. 24.42. 1), 2) $\lambda=0$, собственные векторы — константы; 3) собственному значению λ_k отвечает собственная функция $e^{\lambda_k t}$, $k=1, \ldots, n$; 4) $\lambda=\lambda_0$, собственная функция $e^{\lambda_0 t}$. 24.43. 1) $\lambda=0$, собственные векторы — многочлены $at+b$ $(|a|+|b|\neq 0)$; 2) $\lambda=0$, собственные векторы — константы; $\lambda=-k^2$, $\mathscr{X}=\{a_k\cos kt+b_k\sin kt \mid |a_k|+|b_k|\neq 0\}$, $k=1, \ldots, n$; 3) $\lambda=\lambda_k^2$, $\mathscr{X}=\left\{ce^{\lambda_k t} \mid c\neq 0\right\}$, $k=1, \ldots, n$; 4) $\lambda=\lambda_0^2$, $\mathscr{X}=\left\{ce^{\lambda_0 t} \mid c\neq 0\right\}$. 24.44. 1) $\lambda=0$, $\mathscr{X}=\left\{(a_0+a_1t)e^t \mid |a_0|+\right.$ $\left.+|a_1|\neq 0\right\}$; 2) $\lambda=-1$, $\mathscr{X}=\left\{ae^t \mid a\neq 0\right\}$; 3) $\lambda=2$, все ненулевые

функции из $\mathscr{L}$ собственные. **24.45.** 1) $\lambda=-1$, все ненулевые функции из $\mathscr{M}$ собственные. 2) Нет собственных векторов. **24.46.** 1) $\lambda=0$, $\mathscr{X}=\{a\cos 2t+b\sin 2t \mid |a|+|b|\neq 0\}$; 2) $\lambda=-16$, все ненулевые функции собственные. **24.47.** Через p, q обозначены базисные векторы собственных подпространств. 1) $\lambda=0$, $p=1$; $\lambda=1$, $p=t$; $\lambda=2$, $p=t^2$; 2) $\lambda=1$, $p=1$; $\lambda=2$, $p=t$; $\lambda=3$, $p=t^2$; 3) $\lambda=1$, $p=t$; $\lambda=2$, $p=1$, $q=t^2$. **24.48.** Собственные значения — всевозможные $\lambda\in\mathbb{R}$. Собственные функции $ce^{\lambda t}$, $c\neq 0$. **24.49.** $\lambda=-n^2$, $\mathscr{X}=\{c\sin nt \mid c\neq 0\}$, n — любое натуральное число. **24.50.** $A=B=C=E$. **24.51.** 2) $\lambda=1$, собственные векторы — многочлены степени меньше m; $\lambda=0$, собственные векторы — многочлены, делящиеся на $p_0(t)$. **24.52.** 1) $\operatorname{diag}(1, 0, 0, 0)$ в базисе $1, t, t^2, t^3$; 2) $\operatorname{diag}(1, 1, 0, 0)$ в базисе $1, t, t^2+1, t^3+t$; 3) $\operatorname{diag}(1, 1, 1, 0)$ в базисе $1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3$. **24.53.** $\lambda=1$, собственные векторы — ненулевые симметрические матрицы; $\lambda=-1$, собственные векторы — ненулевые кососимметрические матрицы. Формула $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$ дает искомое разложение. **24.54.** $\lambda=1$, собственные векторы — ненулевые эрмитовы матрицы; $\lambda=-1$, собственные векторы — ненулевые косоэрмитовы матрицы. **24.55.** 1) $\operatorname{diag}(-4, -4, 4, 4)$ в базисе $\begin{Vmatrix}8 & 0\\ -1 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 8\\ 0 & -1\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$; 2) $\lambda=5$, собственные матрицы $\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{Vmatrix}$; 3) $\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2)$, $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$, в базисе $\begin{Vmatrix}1 & 0\\ -\varepsilon & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & -\varepsilon\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}-\varepsilon & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & -\varepsilon\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$. **24.56.** 1) $\operatorname{diag}(-1, -1, -2, -2)$ в базисе $\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{Vmatrix}$; 2) $\lambda=-3$, собственные матрицы $\begin{Vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{Vmatrix}$; 3) $\operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2)$, $\varepsilon=e^{2\pi i/3}$, в базисе $\begin{Vmatrix}3 & \varepsilon-1\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 3 & \varepsilon-1\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}3 & \varepsilon^2-1\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 3 & \varepsilon^2-1\end{Vmatrix}$. **24.57.** 1) Если $A=\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{Vmatrix}$, то $A_\varphi=$

$$=\begin{Vmatrix}0 & a_{12} & -a_{21} & 0\\ a_{21} & a_{22}-a_{11} & 0 & -a_{21}\\ -a_{12} & 0 & a_{11}-a_{22} & a_{12}\\ 0 & -a_{12} & a_{21} & 0\end{Vmatrix}.$$

2) а) $\lambda=0$, собственные матрицы E, A_{106}; б) $\operatorname{diag}(0, 0, 2, -2)$ в базисе E, A_{22}, A_5, A_5^T; в) $\operatorname{diag}(0, 0, -2i, 2i)$ в базисе $\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}-i & 1\\ 1 & i\end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix}i & 1\\ 1 & -i\end{Vmatrix}$. **24.58.** 1) $\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$ в базисе E, A_{22}, $-A_5$, A_{20}; 2) $\lambda=1$, собственные матрицы E, A_{106}. **24.59.** $\lambda=1$; собственные функции:

1) 1, y, y^2; 2) 1, $2x+y$, $(2x+y)^2$. Указание: можно использовать результат задачи 23.50. 24.60. 1) $\lambda=0$, собственный вектор x^n; 2) $\lambda=0$, собственный вектор y^n; 3) diag $(n, n-2, \ldots, -n)$ в базисе x^n, $x^{n-1}y$, ..., $y^{n-1}x$, y^n. Указание: можно использовать задачу 23.51. 24.61. 1) $\lambda=1$, собственные векторы — константы; $\lambda = 0$, собственные векторы x, xy, x^2. 2) diag $(1, 1, 1, 1, -1, -1)$ в базисе 1, $x+y$, xy, x^2+y^2, $x-y$, x^2-y^2. 3) $\lambda=1$, собственные векторы 1, x, x^2, y^2; $\lambda=-1$, собственные векторы y, xy. 24.62. 1) diag $(2, -2, 0)$ в базисе $x+x^2$, $x-x^2$, $3-5x^2$; 2) diag $(2/3, 4/3, -8/15)$ в базисе $6x+1$, x, $3x^2-1$. 24.63. 1) diag $(\pi/2, -\pi/2)$ в базисе $\sin x+\cos x$, $\sin x-\cos x$; 2) diag $(\pi/2, \pi/4, \pi/4)$ в базисе 1, $\cos 2x$, $\sin 2x$. 24.64. $\lambda=0$, собственные векторы — гармонические многочлены, т. е. решения уравнения Лапласа $\Delta p=0$. При $n=0$ это многочлены нулевой степени, а при $n\geqslant 1$ существуют два линейно независимых однородных гармонических многочлена степени n: $u_n=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k}x^{n-2k}y^{2k}$, $v_n=\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^{2k+1}x^{n-2k-1}y^{2k+1}$. Указание: $u_n+iv_n = (x+iy)^n$. 24.65. Преобразования с матрицами $\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$. 24.72. 1) $\begin{Vmatrix}A & B\\ O & C\end{Vmatrix}^{\square}$; 2) $\begin{Vmatrix}A & O\\ B & C\end{Vmatrix}^{\square}$, матрица A порядка k. 24.75. Любое подпространство инвариантно. 24.76. Вся плоскость и нулевое подпространство. 24.77. Прямая $\mathbf{x}=t\mathbf{a}$ и плоскость $(\mathbf{x}, \mathbf{a})=0$. 24.78. Если матрица преобразования диагональна в базисе $e_1, \ldots, e_n$, то ненулевые инвариантные подпространства натянуты на всевозможные системы векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$. Число инвариантных подпространств равно 2^n. 24.79. Пусть $\mathscr{L}$ является прямой суммой собственных подпространств преобразования φ: $\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\oplus\ldots\oplus\mathscr{L}_s$. Тогда любое инвариантное подпространство $\mathscr{M}$ имеет вид $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1\oplus\ldots\oplus\mathscr{M}_s$, где $\mathscr{M}_i$ — некоторое подпространство в $\mathscr{L}_i$ $(i=1, \ldots, s)$. 24.80. Подпространства $\{o\}$ и линейные оболочки векторов $e_1, \ldots, e_k$ для каждого $k=1, \ldots, n$. 24.81. $\mathscr{M}_1+\mathscr{M}_2$, где $\mathscr{M}_i$ — произвольное подпространство в $\mathscr{L}_i$ $(i=1, 2)$. 24.82. 2) Указание: использовать задачи 24.2 и 24.26, 4). 24.83. 2) Указание: использовать задачи 24.26, 1), и 23.98. 24.85. Указание: использовать задачу 24.84. 24.86. Очевидные инвариантные подпространства: $\{o\}$ и все пространство. Другие инвариантные подпространства: 1) одномерные с базисными векторами $(2, -1)^T$ и $(1, -1)^T$; 2) одномерное с базисным вектором $(-1, 2)^T$; 3) одномерные подпространства с базисными векторами $\boldsymbol{a}_1=(0, 1, 1)^T$, $\boldsymbol{a}_2=(1, -1, -1)^T$, $\boldsymbol{a}_3=(1, -1, -2)^T$, двумерные: линейные оболочки пар векторов $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_k$, $1\leqslant i<k\leqslant 3$; 4) одномерное инвариантное подпространство $\mathscr{P}$ с базисным векто-

ром $(3, 5, 6)^T$, двумерное инвариантное подпространство $\mathcal{Q}$ с базисом $(2, 1, 0)^T$, $(1, 0, -1)^T$; все подпространства $\mathcal{M}$ пространства $\mathcal{Q}$; всевозможные суммы $\mathcal{M} + \mathcal{P}$. 5), 6) Собственные подпространства $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ с базисами из векторов $e_k + e_{n-k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant [(n+1)/2]$ и $e_k - e_{n-k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant [n/2]$; все подпространства $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ пространств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$; всевозможные суммы $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$. 7) Собственные подпространства $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ с базисами $e_1 + \ldots + e_n$ и $e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n$; все подпространства $\mathcal{P}$ пространства $\mathcal{N}$; все суммы $\mathcal{P} + \mathcal{M}$. **24.87.** $(n-1)$-мерные инвариантные подпространства определяются уравнениями: 1) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ и $x_1 - x_2 + x_3 = 0$; 2) $(2\alpha + 3\beta) x_1 - \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ $(|\alpha| + |\beta| \neq 0)$; 3) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$; 4) $x_1 - x_2 = 0$; 5) $x_1 + 2x_2 \pm (x_3 + 2x_4) = 0$; 6) $x_1 + x_3 \pm (x_2 + x_4) = 0$; 7) $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$; 8) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Указание: использовать результаты задачи 24.84 или 24.85, 2). **24.88.** 2) Базис в $\mathcal{L}$: $(1, -1, -1, 0)^T$, $(0, 0, 0, 1)^T$. **24.89.** 1) Указание: если $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $\mathcal{L}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, то $e_1, \ldots, e_n$ — искомый базис. **24.90.** Искомый базис задан матрицей S. Решение не единственно. 1) $\begin{Vmatrix} 0 & -25 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$, $S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$, $S = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. 4) Матрица к треугольному виду над полем действительных чисел не приводится. Указание: применить задачу 24.89. Можно использовать результаты задачи 24.87. **24.91.** 2) Если $k_1, \ldots, k_r$ — порядки диагональных блоков, то $\dim \mathcal{L}_j = k_1 + \ldots + k_j$ $(j = 1, \ldots, r)$. **24.93.** 1) $\lambda = 0$, собственные векторы — константы; 2) $\lambda = 0$, at $(a \neq 0)$; 3) $\lambda_k = -k^2$, $a \cos kt$ $(a \neq 0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$; 4) $\lambda_k = -k^2$, $b \sin kt$ $(b \neq 0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. **24.94.** Многочлены степени не выше n. **24.96.** См. ответ к задаче 24.81, где $\mathcal{L}_1$ — подпространство многочленов степени не выше $m - 1$, $\mathcal{L}_2$ — подпространство многочленов, делящихся на $p_0(t)$. Указание: Преобразование является проектированием на $\mathcal{L}_1$ параллельно $\mathcal{L}_2$. **24.98.** См. ответ к задаче 24.81, где $\mathcal{L}_1$ — подпространство симметрических матриц, $\mathcal{L}_2$ — подпространство кососимметрических матриц. **24.99.** Указание: $\mathcal{L}_k$ есть множество матриц, у которых все столбцы, кроме k-го, нулевые. **24.101.** 2) $\lambda_i + \lambda_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. **24.103.** При $\alpha = \pi k$ (k — целое) преобразования 1), 2) тождественные, $\lambda = 1$, все ненулевые матрицы порядка 2 собственные. При $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ имеется собственное значение $\lambda = 1$ с собственной матрицей E для 1) и A_{20} для 2) и собственное значение $\lambda = -1$ с собственными матрицами $\begin{Vmatrix} a & b \\ b & -a \end{Vmatrix}$, $|a| + |b| \neq \neq 0$, для обоих преобразований. При $\alpha \neq \pi k/2$ собственное значение $\lambda = 1$ с собственной матрицей E для 1) и A_{20} для 2), а также собственные значения $\lambda = e^{\pm 2i\alpha}$ с собственными матрицами $\begin{Vmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{Vmatrix}$ соответственно для обоих преобразований. **24.106.** Указание: использовать утверждение 2) задачи 24.104. **24.107.** Если λ_0 — наименьшее по модулю ненулевое собственное значение преобразования φ, то $0 < \varepsilon_0 < |\lambda_0|$. Если все собственные значения равны нулю, то годится любое $\varepsilon_0 > 0$. **24.108.** Указание: если одно из преобразований невырождено, то воспользоваться утверждением задачи 23.92. Если оба вырождены, то использовать утверждение задачи 24.107. В этом случае преобразования $\varphi + \varepsilon\iota$ и ψ перестановочны и имеют одинаковые характеристические многочлены для любого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим требуемое. **24.109.** Указание: применить утверждение задачи 24.106. **24.110.** Указание: доказать, что φ и ψ имеют общий собственный базис. **24.111.** Указание: применить утверждения задач 24.103, 24.109. **24.112.** Указание. Пусть e_1 — собственный вектор для φ: $\varphi(e_1) = o$, тогда он собственный для ψ с некоторым собственным значением λ. Векторы $e_1, \ldots, e_n$ такие, что $\varphi(e_{k+1}) = e_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, линейно независимы, причем $\psi(e_k) = (\lambda - k + 1)e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

25.4. 4) а), 5), 6), 9) и 10) может; 1) и 2) нет, нарушается свойство симметричности; 3), 8) и 12) нет, нарушается свойство положительности; 4) б), 7) и 11) нет, нарушается свойство положительности, но $F(x, x) \geqslant 0$. Указание: при проверке свойства положительности воспользоваться приведением $F(x, x)$ к сумме квадратов. **25.6.** 6) а), 8), 9) и 12) может; 1), 2), 3) и 7) нет, нарушается свойство эрмитовой симметричности; 4), 5) и 10) нет, нарушается свойство положительности; 6) б) и 11) нет, нарушается свойство положительности, но $F(x, x) \geqslant 0$. Указание: при проверке свойства положительности воспользоваться приведением $F(x, x)$ к сумме квадратов модулей координат векторов. **25.7.** $a_{21} = \bar{a}_{12}$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{11}a_{22} - |a_{12}|^2 > 0$. **25.10.** Да, и не единственным образом. **25.11.** 2) и 5) удовлетворяет; 1) нет, нарушается свойство положительности; 3) нет, $F(X, X) \geqslant 0$, но из равенства $F(X, X) = 0$ не следует, что X — нулевая; 4) нет, нарушается свойство линейности. **25.13.** $F_2(X, Y)$. **25.16.** При $m \leqslant n$ — нет; нарушается свойство положительности, но $(f, f) \geqslant 0$. **25.18.** Матрица Грама базиса $f_1, \ldots, f_n$: 1) а) $\begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$; 2) а) $\begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) а) $\begin{Vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) а) $\begin{Vmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}$; 5) а) $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$;

6) а) $\begin{Vmatrix} 3 & 1-2i & 2+i \\ 1+2i & 3 & 2+i \\ 2-i & 2-i & 6 \end{Vmatrix}$; б) E. **25.19.** $\Gamma = \|g_{ij}\|$, $i, j = 1, \ldots, n+1$, где: 1) $g_{ij} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), $\Gamma = E$; 2) $g_{ij} = \sum_{k=0}^{\min(i-1,\, j-1)} \frac{(i-1)!\,(j-1)!}{(i-k-1)!\,(j-k-1)!} a^{i+j-2k-2}$; при $a = 0$ $g_{ij} = ((i-1)!)^2 \delta_{ij}$; 3) $g_{ij} = \sum_{k=1}^{m} t_k^{i+j-2}$. **25.20.** Если $\Gamma = \|g_{jk}\|$, $j, k = 1, \ldots, n+1$, $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, $q(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \ldots + \beta_n t^n$, то: 1) $g_{jk} = (j+k-1)^{-1}$, $(p, q) = \sum_{j,\,k=1}^{n+1} \alpha_{j-1}\beta_{k-1}(j+k-1)^{-1}$; 2) $g_{jk} = 0$, если $j+k$ нечетное, $g_{jk} = 2(j+k-1)^{-1}$, если $j+k$ четное; $(p, q) = 2\sum_{j,\,k=1}^{n+1} \alpha_{j-1}\beta_{k-1}(j+k-1)^{-1}$ (сумма по четным $j+k$). **25.21.** 3) $\det \Gamma' = \det \Gamma\,(\det S)^2$. **25.23.** Указание: воспользоваться результатом задачи 25.20. **25.24.** 1) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = -1$; 2) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 2$; 3) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 7$; 4) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 1 + 3i$; 5) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 3$;

6) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = -3$; 7) $\Gamma_e = \begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $(x, y) = 7i$.

25.25. 1) $5\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{30}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $3\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{7}$; 6) $\sqrt{10}$. **25.27.** 5) Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. **25.29.** $\left(\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx \times \int_a^b |g(x)|^2\,dx$; $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$. **25.33.** 1) $x_1 = x_2 = 0$; 2) $3x_1 - x_2 = 0$; 3) $2x_1 + x_2 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$; 4) $\operatorname{tr} X = 0$. **25.34.** 1) а) 0; б) $\pi/6$; в) $3\pi/4$;

2) а) π; б) $2\pi/3$; в) $\arccos\sqrt{7/10}$; 3) а) $\arccos(1/\sqrt{3})$; б) $\pi/2$; 4) а) $\pi/4$; б) $\pi/2$. **25.35.** Указание: $\cos\angle(f_n, f_{n+1}) = \sqrt{1-\frac{1}{4n^2}}$.

26.4. 2) $|f_1+f_2|^2 = |f_1|^2+|f_2|^2$ равносильно $\operatorname{Re}(f_1, f_2) = 0$. Если $x \neq o$, $f_1 = ix$, $f_2 = x$, то $(f_1, f_2) = i(x, x) \neq 0$, но $\operatorname{Re}(f_1, f_2) = 0$. **26.5.** 1) Параллелограмм, у которого равны длины диагоналей, является прямоугольником. 2) $|x+y| = |x-y|$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(x, y) = 0$, далее см. ответ задачи 26.4, 2). **26.6.** 2) Нет. Если в системе есть нулевой вектор, то система линейно зависима. **26.8.** $(x, y) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \ldots + \xi_n\bar{\eta}_n$. **26.11.** 1) $\frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$; 2) $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$; 3) например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2, -1)^T$; 5) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, -1, 1)^T$; 6) $\frac{1}{2}(1+i, -1+i)^T$; 7) $\frac{1}{2}(1-i, 1, -i)^T$. **26.13.** 1) $\frac{1}{\sqrt{11}}(1, -3, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)^T$; 2) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, -1, 2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1, 0)^T$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(1, 5, 2)^T$; 4) $\frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$, $\frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$, $\frac{1}{3}(2, -2, 1)^T$; 5) $\frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$, $\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1, 4, 1)^T$; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, 1)^T$. **26.15.** 1) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 3, 2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(-5, 1, -4)^T$; 3) $\frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, -2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$; 4) $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(-2, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{14}}(0, 2, 1, -3)^T$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, 1, 2)^T$; 6) $\frac{1}{\sqrt{15}}(1, -3, 2, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0)^T$; 7) $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)^T$; 8) $\frac{1}{\sqrt{3}}(i, 1, -i)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0)^T$; 9) $\frac{1}{2}(1, -1, 1+i)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1-i, 0, -1)^T$, $\frac{\sqrt{3}}{6}(1, 3, 1+i)^T$. **26.16.** 1) а) $e_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T$, $e_2 = (-\frac{1}{2}, 1, 0)^T$; $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, 2, 2)^T$; б) $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (-2, 1, 0)^T$, $e_3 =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-4, 2, 1)^T$; 2) $e_1 = \frac{1}{4}(1, 0, -2)^T$. $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$, $e_3 = \frac{1}{4}(-1, 4, 2)^T$; 3) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -1)^T$, $e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2, -2, 1)^T$, $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(0, 4, 1)^T$. **26.17.** Данную пару дополняют до ортогонального базиса, например, векторы с координатными столбцами: 1) $(-1, 0, 1, 0)^T$, $(1, -6, 1, 2)^T$; 2) $(1, 1, 0, 0)^T$, $(1, -1, -1, 1)^T$; 3) $(1, -1, -1, 1)^T$, $(2, -1, 2, -1)^T$. **26.18.** Например: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 1, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1)^T$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, -1)^T$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, -1, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(6, -1, -2, 1)^T$. **26.19.** Базис в $\mathscr{L}$ образуют, например, векторы с координатными столбцами: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^T$, $\frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$; 3) $\frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, -2, 1)^T$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{22}}(-2, 3, 2, -2, 1)^T$; 5) $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, 2, 2, 1)^T$; 6) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1, 0, 0)^T$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 3, 1, 3, 0)^T$, $\frac{1}{2\sqrt{5}}(1, 1, -1, -1, -4)^T$. **26.20.** Искомый базис образуют, например, векторы с координатными столбцами: 1) $\frac{1}{\sqrt{10}}(2, 2, 1, 1)^T$, $\frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)^T$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0)^T$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1)^T$; 3) $\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 1, 1, 1, 1)^T$. У к а з а н и е: найти в подпространстве базис из векторов с более простыми, чем данные, координатными столбцами и применить к нему процесс ортогонализации и нормирования. **26.21.** 1) $1, t, \ldots, t^n$; 2) $(k!)^{-1}(t-a)^k$, $k = 0, \ldots, n$; 3) $\prod\limits_{j=1,\ j\neq k}^{n+1}(t - t_j)(t_k - t_j)^{-1}$, $k = 1, \ldots, n+1$. **26.22.** Нормированная система: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$. **26.23.** $1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t$. **26.24.** e^{-t}, $e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t}$, $e^{-3t} - \frac{6}{5}e^{-2t} + \frac{3}{10}e^{-t}$. **26.25.** 2) $|p_k|^2 = 2(2k+1)^{-1}$, $k \geqslant 0$. **26.26.** $q_k(t) =$

$= 2^k (k!)^2 ((2k)!)^{-1} p_k(t)$, $k \geqslant 0$. **26.28.** Нормированная система: $\frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(t)$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} T_k(t)$ при $k \geqslant 1$. Указание: в интеграле $\int\limits_{-1}^{1} T_k(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ выполнить замену переменной $\theta = \arccos t$. **26.29.** Указание: процессу ортогонализации соответствует треугольная матрица перехода. **26.30.** $2^n \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$.

26.31. 4) Формула в 3) заменится на $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$. **26.32.** 3) Если системы $e_1, \ldots, e_m$ и $f_1, \ldots, f_m$ биортогональны, то системы $e_1, \ldots, e_m$ и $h_1, \ldots, h_m$ биортогональны тогда и только тогда, когда векторы $f_k - h_k$, $k = 1, \ldots, m$, ортогональны линейной оболочке системы $e_1, \ldots, e_m$. **26.34.** 1) $(1, -100)^T$, $(0, 1)^T$; 2) $(1, 0)^T$, $(0, 1/3)^T$; 3) $\frac{1}{2}(5, -1)^T$, $\frac{1}{2}(-3, 1)^T$; 4) $(1, -3, -13)^T$, $(0, 1, 5)^T$, $(0, 0, 1)^T$; 5) $(3, -3, 1)^T$, $\frac{1}{2}(-5, 8, -3)^T$, $\frac{1}{2}(1, -2, 1)^T$; 6) $\alpha(1, -10^{-1}, 10^{-2})^T$, $\alpha(10^{-2}, 1, 10^{-1})^T$, $\alpha(-10^{-1}, 10^{-2}, 1)^T$, где $\alpha = (1 + 10^{-3})^{-1}$; 7) $\frac{1}{5}(3 - i, -1 - 3i, -1 + 2i)^T$, $\frac{1}{5}(2 + i, 1 + 3i, 1 - 2i)^T$, $\frac{1}{5} \times (1 - 2i, 2 + i, 2 + i)^T$; 8) $(1, 1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 1, 1)^T$, $(0, 0, 0, 1)^T$; 9) $\frac{1}{3}(0, 1, 1, 1)^T$, $\frac{1}{3}(1, 0, 1, 1)^T$, $\frac{1}{3}(1, 1, 0, 1)^T$, $\frac{1}{3}(1, 1, 1, 0)^T$. **26.35.** 1) $\frac{1}{6}(-1, -1, 2)^T$, $\frac{1}{6}(5, -1, -4)^T$; 2) $(0, 0, 0, 1)^T$, $\frac{1}{3}(1, 1, 1, -3)^T$; 3) $\frac{1}{7}(2, 3, 2, 2)^T$, $\frac{1}{7}(4, -1, -4, -3)^T$, $\frac{1}{7}(-3, -1, -3, 4)^T$. **26.36.** 1) $\frac{3}{8}(3 - 5t^2)$, $\frac{3}{2} t$, $-\frac{15}{8} \times (1 - 3t^2)$; 2) $\frac{3}{8}(3 - 5t^2)$, $\frac{15}{8}(5t - 7t^3)$, $-\frac{15}{8}(1 - 3t^2)$, $-\frac{35}{8} \times (3t - 5t^3)$. **26.42.** Искомый базис образуют, например, векторы с координатными столбцами: 1) $(1, -10, 0)^T$, $(0, 7, 1)^T$; 2) $(3, 2, -5)^T$; 3) $(5, 1, 0, 0)^T$, $(2, 0, -1, 0)^T$, $(9, 0, 0, 1)^T$; 4) $(2, 1, 0, -3)^T$, $(1, 0, 1, 4)^T$; 5) $(1, 0, -5, 1)^T$, $(0, 0, 1, -3)^T$; 6) $(5, -3, 1, 0, 0)^T$, $(4, 2, 0, -1, 0)^T$, $(1, -1, 0, 0, 1)^T$. **26.43.** Например: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1)^T$, $\frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T$; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(-2, 1, 2, 1)^T$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,$

$1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{15}}(3, 1, 2, 1)^T$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0, 0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1, 0)^T$, $\frac{1}{2\sqrt{6}}(1, -3, 2, 1, -3)^T$. **26.44.** Искомый базис образуют, например, векторы с координатными столбцами: 1) $(1, 1, -1, 1)^T$, $(10, 1, 0, -2)^T$; 2) $(0, 1, 1, -1)^T$, $(1, 0, -2, 3)^T$; 3) $(1, 1, -1, -1, 1)^T$, $(0, 1, 2, 3, 4)^T$. **26.45.** Например: 1) $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$; 2) $2x_1 - x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $5x_1 - x_4 = 0$; 3) $x_1 + x_2 = 0$, $2x_2 + x_3 - x_4 = 0$; 4) $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$; 5) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$; 6) $x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 0$. **26.51.** $l = m$, $\det \| (f_j, g_k) \| \neq 0$. **27.2.** Если η и ζ — координатные столбцы ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора x соответственно, то: 1) $\eta = \frac{1}{3}(-1, 2, -1)^T$, $\zeta = \frac{1}{3}(1, 1, 1)^T$; 2) $\eta = (2, -2, 3)^T$, $\zeta = (5, -1, -4)^T$; 3) $\eta = \frac{1}{15}(4, 3, 2, 1)^T$, $\zeta = \frac{1}{15}(11, -18, 13, -16)^T$; 4) $\eta = (0, -1, 2, -1)^T$, $\zeta = (1, 1, 0, -1)^T$; 5) $\eta = \frac{1}{2}(3, 2, 1, 2)^T$, $\zeta = \frac{1}{2}(1, 0, 1, -2)^T$; 6) $\eta = (2, 3, -1, 0)^T$, $\zeta = (-1, 1, 1, 2)^T$; 7) $\eta = \frac{1}{2}(1, 3, -1, -3)^T$, $\zeta = \frac{1}{2} \times (1, 1, 1, 1)^T$; 8) $\eta = (3, 0, -1, 2)^T$, $\zeta = (2, 4, -2, -4)^T$; 9) а) $\eta = \frac{1}{7}a_1 + \frac{1}{3}a_2$; б) $\eta = \frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{12}a_2$; в) $\eta = a_1 + a_2$; г) $\eta = a_2$; $\zeta = \xi - \eta$. **27.3.** 1) $y = \frac{1}{2}(3, -3, 7, -7)^T$, $z = -\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$; 2) $y = (5, 2, -1, 1)^T$, $z = (3, -4, 9, 2)^T$; 3) $y = (1, 1, -1, 1)^T$, $z = (1, 2, 0, -3)^T$; 4) $y = -\frac{2}{3}(1, -3, 2, -1)^T$, $z = \frac{1}{3}(-2, 3, -2, 7)^T$. **27.4.** 1) $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} t^k$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{p^k(a)}{k!}(t - a)^k$. **27.5.** 1) $p(t_1)\,\omega_1(t) + \ldots + p(t_k)\,\omega_k(t)$, где $\omega_j(t) = \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} (t - t_i)\,(t_j - t_i)^{-1}$, $j = 1, \ldots, k$. **27.6.** 1) $f(t) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\,d\tau$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos k\tau\,d\tau$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin k\tau\,d\tau$ $(k \geqslant 1)$, $2\pi a_0^2 +$

$+\sum_{k=1}^{n} \pi\left(a_k^2+b_k^2\right) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} (f(\tau))^2\, d\tau$; 2) $f_1(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k p_k(t)$, $a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(\tau)\, p_k(\tau)\, d\tau$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} a_k^2 \leqslant \int_{-1}^{1} (f(\tau))^2\, d\tau$; 3) $f(t)=\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(t)$, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(\tau)\, T_0(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau$, при $k \geqslant 1$ $a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(\tau)\, T_k(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau$, $\pi a_0^2+\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2} a_k^2 \leqslant \int_{-1}^{1} (f(\tau))^2 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$.

27.10. 1) Указание: рассмотреть определитель матрицы $\overline{A}^T A$. **27.13.** Указание: воспользоваться результатами задач 26.29 и 27.12. **27.15.** 1) $1/\sqrt{6}$; 2) $1/3$; 3) $\sqrt{10}/2$; 4) $1/2$; 5) $\sqrt{10/3}$; 6) $1/\sqrt{3}$. **27.16.** $a_0=\pi/2$; $a_k = 2\,\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}$; $b_k=0$; $\frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (2k+1)^{-4}$. **27.17.** $\frac{2^{n+3}((n+1)\,!)^4}{((2n+2)\,!)^2\,(2n+3)}$. Указание: см. задачи 27.14, 27.6, а также решение задачи 26.25. **27.18.** Нет. **27.20.** 1) $\pi/6$; 2) $\pi/2$; 3) $\arccos\sqrt{3/7}$; 4) 0; 5) $\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$; 6) $\pi/2$; 7) $\pi/4$; 8) $\pi/6$; 9) $\arccos\sqrt{3/5}$. **27.21.** 1) $\arccos(2/3)$; 2) $\pi/2$; 3) $\pi/6$; 4) 0; 5) $\pi/3$; 6) $\arccos\left(1/\sqrt{6}\right)$; 7) $\pi/3$. **27.26.** 1) $\arccos(2/7)$; 2) $\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$. Указание: воспользоваться результатом задачи 27.24. 3) $\pi/2$; 4) 0.

28.2. 1) $\sum_{j=1}^{k} (x, e_j)\, e_j$; 2) $x-\sum_{j=1}^{k} (x, e_j)\, e_j$; 3) $2\sum_{j=1}^{k} (x, e_j)\, e_j - x$; 4) $x-2\sum_{j=1}^{k} (x, e_j)\, e_j$. **28.3.** 1) $x-\sum_{j=1}^{k} (x, n_j)\, n_j$; 2) $x-2\sum_{j=1}^{k} (x, n_j)\, n_j$. **28.4.** 1) $\frac{1}{15}\begin{Vmatrix} 4 & 6 & -2 & 2 \\ 6 & 9 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

2) $\frac{1}{10}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; 5) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$;

6) $\frac{1}{42}\begin{Vmatrix} 6 & 6 & 12 & -6 \\ 6 & 41 & -2 & 1 \\ 12 & -2 & 38 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 41 \end{Vmatrix}$. 28.5. 1) $\frac{1}{15}\begin{Vmatrix} -7 & 12 & -4 & 4 \\ 12 & 3 & -6 & 6 \\ -4 & -6 & -13 & -2 \\ 4 & 6 & -2 & -13 \end{Vmatrix}$;

2) $\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} -4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

4) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 5) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$;

6) $\frac{1}{21}\begin{Vmatrix} -15 & 6 & 12 & -6 \\ 6 & 20 & -2 & 1 \\ 12 & -2 & 17 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 20 \end{Vmatrix}$. 28.6. 1) $\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$;

2) $\frac{1}{12}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 7 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & 9 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & 7 \end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 5 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{Vmatrix}$;

4) $\frac{1}{10}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$. 28.7. 1) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

2) $\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} -5 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$; 3) $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix} 3 & -6 & -2 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{Vmatrix}$;

4) $\frac{1}{5}\begin{Vmatrix} -4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$. 28.8. 1) $\sum_{k=1}^{m} \frac{(x,\ h_k)}{(f_k,\ h_k)} f_k$;

2) $2\sum_{k=1}^{m} \frac{(x,\ h_k)}{(f_k, h_k)} f_k - x$. 28.10, 28.11. 1) $\varphi^* = \varphi$; 2) если $\varphi(x) = \lambda x$, то $\varphi^*(x) = \bar{\lambda} x$. 28.12. 1) и 2) $\varphi^* = \varphi$; 3) $\varphi^* = \varphi^{-1}$. 28.13. 1) $\varphi^* = \varphi^{-1}$; 2) φ^* является проектированием на направление e_3 параллельно ортогональному дополнению линейной оболочки вектора a; 3) $\varphi^* = -\varphi$. 28.14. 1) $\varphi^* = \varphi$; 2) преобразование φ^* состоит в растяжении по тем же взаимно ортогональным направлениям с коэффициентом $\bar{\lambda}_j$ по j-

му направлению. 28.15. $\varphi^*(x) = \sum_{j=1}^{n} (x, g_j) f_j$. 28.17. 1) $\varphi^*(x) = A^T x$; 2) $\varphi^*(x) = \bar{A}^T x$. 28.18. 1) $\varphi^*(X) = A^T X$ $(\varphi^*(X) = \bar{A}^T X)$; 2) $\varphi^*(X) = XB^T$ $(\varphi^*(X) = X\bar{B}^T)$. 28.19. 1) $\varphi^*(p)(t) = \int_a^b K(s, t)\, p(s)\, ds$.

28.21. 2) $A^* = \bar{\Gamma}^{-1}\bar{A}^T\bar{\Gamma}$. 28.22. 1) $\begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{Vmatrix}$. 28.23. 1) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$;

2) $\begin{Vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & 2 \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$;

5) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 6 & 4 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$; 7) $\frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 12 & -1 & -11 \\ 12 & 51 & 49 \end{Vmatrix}$;

8) $\begin{Vmatrix} 2-i & 1 & 4-i \\ 2i & -1 & 1+2i \\ -1 & i & 0 \end{Vmatrix}$. 28.24. 1) $\begin{Vmatrix} -2 & 15 \\ -1 & 7 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} -2+4i & 2+9i \\ 2-i & 2-4i \end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{Vmatrix}$;

6) $\begin{Vmatrix} 11 & 2-3i & 10i \\ -i & -5-4i & 20 \\ 4+4i & 2 & -4+5i \end{Vmatrix}$. 28.25. 1) $\begin{Vmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$.

28.26. 1) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{Vmatrix}$. 28.27. 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$;

2) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. 28.28. $\varphi^* = -\varphi$, $a^*_{2k,\,2k+1} = k$, $a^*_{2k+1,\,k} = -k$

$(k = 1, \ldots, n)$, остальные $a^*_{jk} = 0$, где a^*_{jk} $(j, k = 1, \ldots, 2n+1)$ — элементы матрицы преобразования φ^*. 28.29. 3) $(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$; 5) $(p(\varphi))^* = \bar{p}(\varphi^*)$; формулировки свойств 1), 2), 4) не меняются. 28.31. 1) $\det \varphi^* = \det \varphi$; 2) $\det \varphi^* = \overline{\det \varphi}$. 28.39. 1) Собственные значения преобразований φ и φ^* совпадают; 2) собственные значения φ^* комплексно сопряжены собственным значениям φ. 28.41. У к а з а н и е: использовать задачу 28.33. 28.44. Не всегда. 28.45. 2) Нет. 28.46. 1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; 2) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$; 3) $3x_1 + x_2 -$

$-2x_3=0$; 4) $4x_1+x_2-3x_3=0$; 5) $3x_1+5x_2+6x_3=0$. **28.48.** 2) Преобразование, задаваемое в ортонормированном базисе матрицей A_{13}. **28.54.** 3) Такого базиса нет. В остальных задачах базис и матрица определены неоднозначно. Ими будут, например, векторы с указанными координатными столбцами (относительно исходного базиса) и матрицы: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$, A_{353}; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{42}}(1,5,4)^T$, $\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)^T$, A_{354}; 4) $(1,0,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)^T$, A_{355}; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-1)^T$, A_{356}. **28.55.** Кроме приведенных в ответе к задаче 28.54, 5): $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^T$, A_{357} и $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$, A_{358}, а также базисы, получаемые из любого приведенного выше домножением некоторых векторов на множитель -1, и соответствующим образом измененные матрицы. **29.1.** 1) Является; 2) только при действительном λ; 3) и 4) является; 5) нет при $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, самосопряженное при $\alpha=0,\pi$; 6) нет; 7) только тогда, когда a ортогонален e_1 и e_2; 8) только при $a=o$; 9) да; 10) только тогда, когда все λ_j действительны; 11) только тогда, когда $A^T=A$; 12) только тогда, когда $\bar{A}^T=A$; 13) только тогда, когда $A^T=A$ $(\bar{A}^T=A)$; 14) только тогда, когда $B^T=B$ $(\bar{B}^T=B)$; 15)—17) нет. **29.2.** Линейные оболочки систем векторов $f_1,\ldots,f_m$ и $g_1,\ldots,g_m$ совпадают и матрица $\|\alpha_{jk}\|$, определяемая из разложений $f_j=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}g_k$, симметрическая. **29.3.** 1) $A^T\Gamma=\Gamma A$, в случае ортонормированного базиса $A^T=A$; 2) $\overline{A^T\Gamma}=\bar{\Gamma}A$, в случае ортонормированного базиса $\bar{A}^T=A$. **29.4.** 1), 3) и 7) нет; 2), 4), 5), 6) и 8) будет. **29.5.** 1), 2), 4) и 6) нет; 3), 5) и 7) будет. **29.6.** Может. Например, преобразование, заданное матрицей $\begin{Vmatrix}0&0\\1&1\end{Vmatrix}$ в базисе $f_1=(1,1)^T$, $f_2=(1,0)^T$ двумерного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением, будет самосопряженным. **29.7.** 2), 3), 4), 5) и 8) является; 1), 6) и 7) нет. **29.20.** Может. Например, тождественное преобразование. **29.21.** Будет. **29.24.** 1) $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=5$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$; 2) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$,

$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)^T$; 3) $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1+\sqrt{2}, -1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1, 1+\sqrt{2})^T$; 4) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}, 1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, \sqrt{2})^T$; 5) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$; 6) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1+i)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-i, 1)^T$; 7) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2+i, -1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2-i)^T$; 8) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$; 9) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $f_1 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$, $f_2 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^T$, $f_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^T$; 10) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)^T$; 11) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$; 12) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 18$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T$, $f_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^T$, $f_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, -1)^T$; 13) $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 7$, $f_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$, $f_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T$, $f_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)^T$; 14) $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$, $f_1 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$, $f_3 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1)^T$; 15) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $f_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$, $f_3 = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})^T$; 16) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, i)^T$, $f_2 = (0, 1, 0)^T$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -i)^T$; 17) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$, $f_1 = \frac{1}{6}(3+i, -3+i, 4i)^T$, $f_2 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)^T$, $f_3 = \frac{1}{6}(3-i, -3-i, -4i)^T$; 18) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 5$, $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)^T$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)^T$, $f_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$, $f_4 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$;

19) $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=0,\ \lambda_4=2,\ f_1=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T,\ f_2=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)^T,\ f_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)^T,\ f_4=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$;

20) $\lambda_1=\lambda_2=0,\quad \lambda_3=2,\quad \lambda_4=6,\quad f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T,\ f_2=$ $=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ 1,-2,0)^T,\ f_3=\frac{1}{2}(1,1,1,-1)^T, f_4=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,3)^T$;

21) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0,\quad \lambda_4=4,\quad f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)^T,\ f_2=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 0,\ 1,-1)^T,\ f_3=\frac{1}{2}(1,\ 1,-1,-1)^T,\ f_4=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 1,$ $1)^T$. **29.25.** 1) Все собственные значения равны k, ортонормированный базис из собственных векторов — произвольный ортонормированный базис пространства; 2) собственному значению $\lambda=1$ отвечает произвольный ортонормированный базис в $\mathscr{L}$, собственному значению $\lambda=$ $=0$ — произвольный ортонормированный базис в $\mathscr{L}^{\perp}$; 3) собственному значению $\lambda=1$ отвечает произвольный ортонормированный базис в $\mathscr{L}$, собственному значению $\lambda=-1$ — произвольный ортонормированный базис в $\mathscr{L}^{\perp}$. **29.28.** $\varphi_1=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi^*)$, $\varphi_2=\frac{1}{2i}(\varphi-\varphi^*)$. **29.32.** Указание: воспользоваться результатами задач 24.101 и 24.107. **29.35.** 1) Указание: воспользоваться результатом задачи 29.13, 2). 2) Нет. Указание: рассмотреть преобразование, матрица которого в ортонормированном базисе кососимметрическая. **29.36** и **29.37.** Указание: воспользоваться результатом задачи 29.33. **29.38.** Указание: воспользоваться неравенством $2\xi\eta\leqslant\xi^2+\eta^2$ и результатом задачи 29.33. См. также решение задачи 19.31. **29.41.** Указание: воспользоваться результатами задач 29.33 и 29.40.1). **29.42.** Указание: воспользоваться результатами задач 27.24 и 29.33. **30.2.** 1) Если преобразование определено формулой $\varphi(x)=$ $=\lambda x$, то при $\lambda=\pm1$; 2) только при $|\lambda|=1$, где λ — коэффициент гомотетии; 3) нет; 4), 5) и 6) является; 7) и 8) нет; 9) и 10) только при $|\lambda_j|=1$, $j=1,\ldots,n$; 11) только при $A^TA=E$; 12) только при $\bar{A}^TA=E$; 13) только при $A^TA=E$ $(\bar{A}^TA=E)$; 14) только при $BB^T=$ $=E\left(B\bar{B}^T=E\right)$; 15) нет. **30.3.** 1) Нет; 2) является. **30.6.** 1), 2), 5), 6), 8) нет; 3), 4), 7), 9), 10) является. **30.7.** 1), 2), 5), 7) нет; 3), 6), 6) является. **30.8.**. 2) Нет; 1), 3) является. **30.9.** 1), 4), 6) нет; 2), 3), 5) является. **30.11.** 1) $A^T\Gamma A=\Gamma$; 2) $\bar{A}^T\bar{\Gamma}A=\bar{\Gamma}$. Если базис ортонормирован, то: 1) $A^TA=E$; 2) $\bar{A}^TA=E$. **30.13.** 1), 5), 6), 9) нет; 2), 3), 4), 7), 8) является. **30.14.** 1) и 4) нет; 2), 3), 5) и 6) является. **30.15.** Может. Указание: см. условия следующей задачи. **30.16.** 1), 3), 5) является; 2), 4), 6) нет. **30.20.** 1) Образует; 2) нет.

30.21. Образует. **30.22.** 2) Например, если преобразования φ и ψ двумерного евклидова пространства заданы в ортонормированном базисе матрицами $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$ и $\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$, то $\varphi+\psi$ — ортогональное преобразование. **30.25.** 1) Указание. Установить тождество $(\varphi(\alpha x+\beta y)-\alpha\varphi(x)-\beta\varphi(y), \varphi(z))=0$ (α, β — произвольные числа, а x, y, z — произвольные векторы). Положить в нем z равным $\alpha x+\beta y$, $-\alpha x$ и $-\beta y$, затем сложить три полученные равенства. 2) Например, преобразование φ: $x \to |x| e$, где e — некоторый вектор длины 1. **30.28.** 1) Может; пример — преобразование задачи 30.29. 5) при $\alpha \neq \pi k$; 2) может; пример — тождественное преобразование; 3) может; пример — преобразование задачи 30.29, 7). **30.29.** 1) и 3) нет собственных векторов; 2) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $f_1=k(-1, 1+\sqrt{2})^T$, $f_2=k(1+\sqrt{2}, 1)^T$, где $k=(4+2\sqrt{2})^{-1/2}$; 4) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)^T$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$; 5) при $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$ нет собственных векторов; при $\alpha=0$ $\lambda_1=\lambda_2=1$; при $\alpha=\pi$ $\lambda_1= =\lambda_2=-1$, любой ортонормированный базис — базис из собственных векторов; 6) $\lambda_1=-1, \lambda_2=1, f_1=\left(\sin\frac{\alpha}{2}, -\cos\frac{\alpha}{2}\right)^T, f_2=\left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right)^T$; 7) $\lambda_1=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$; 8) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)^T$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$, $f_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)^T$; 9) и 10) $\lambda_1=1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T$; 11) $\lambda_1=-1$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{2}-1, 1, -\sqrt{2}-1)^T$; 12) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $f_1=\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)^T$; $f_2=\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$; 13) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$, $f_1=\frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)^T$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)^T$, $f_3= =\frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)^T$, $f_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)^T$. **30.32.** 1) $\lambda_1= =\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\lambda_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$; 2) $\lambda_1= =\frac{4+3i}{5}$, $\lambda_2=\frac{4-3i}{5}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$; 3) $\lambda_1= =\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\lambda_2=\cos\alpha-i\sin\alpha$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$, $f_2= =\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$; 4) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $f_1= =\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$, $f_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3}, -2)^T$, $f_3=$

$=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1-i\sqrt{3},\ 1+i\sqrt{3},-2)^T$; 5) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1+i2\sqrt{2}}{3}$, $\lambda_3=$ $=\frac{1-i2\sqrt{2}}{3}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $f_2=\frac{1}{2}(1,-1,i\sqrt{2})^T$, $f_3=\frac{1}{2}\times$ $\times(1,-1,-i\sqrt{2})^T$; 6) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $f_2=\frac{1}{2}(1,-1,i\sqrt{2})^T$, $f_3=\frac{1}{2}(1,-1,-i\sqrt{2})^T$; 7) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\frac{3+i\sqrt{7}}{4}$, $\lambda_3=\frac{3-i\sqrt{7}}{4}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{2}-1,\ 1,$ $-\sqrt{2}-1)^T$, $f_2=\frac{1}{2\sqrt{7(2+\sqrt{3})}}(1+\sqrt{2}-i(\sqrt{7}+\sqrt{14}),\ 3+$ $+2\sqrt{2}+i\sqrt{7}, 2\sqrt{2})^T$, $f_3=\bar{f}_2$; 8) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=i$, $\lambda_4=$ $=-i$, $f_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $f_2=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$, $f_3=\frac{1}{2}(1,-i,$ $-1,i)^T$, $f_4=\frac{1}{2}(1,i,-1,-i)^T$; 9) $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$, $f_1=k(i(1+$ $+\sqrt{2}),1)^T$, $f_2=k(1,i(1+\sqrt{2}))^T$, где $k=(4+2\sqrt{2})^{-1/2}$; 10) $\lambda_1=$ $=1$, $\lambda_2=i$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(i-1,1)^T$, $f_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1+i)^T$; 11) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\lambda_3=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0)^T$, $f_2=\frac{1}{2}(1,-i,$ $-\sqrt{2})^T$, $f_3=\frac{1}{2}(1,-i,\sqrt{2})^T$. **30.34.** Либо тождественное преобразование, либо центральная симметрия (тождественное преобразование, умноженное на -1), либо ортогональное отражение в собственном подпространстве, отвечающем собственному значению 1. **30.35.** Подпространство $\mathscr{L}$ натянуто на векторы: 1) $(1+\sqrt{2},1)^T$; 2) $(2,1)^T$; 3) $\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)^T$; 4) $(1,1,0)^T$, $(1,-1,2)^T$; 5) $(1,1,1,1)^T$. **30.36.** Преобразование с определителем, равным 1, представляет собой поворот. Если определитель преобразования равен -1, то в ортонормированном базисе матрица преобразования имеет вид A_{76}, а преобразование представляет собой ортогональное отражение в одномерном подпространстве, натянутом на вектор с координатами $\left(\cos\frac{\alpha}{2},\right.$ $\left.\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Указание: см. задачу 30.35, 3). **30.37.** Указание: преобразование диагонализируемо; см. задачу 30.34. **30.40.** 1) и 3): любой ортонормированный базис. В остальных задачах искомые базис и матрица также определены неоднозначно. Ими будут, например, векторы с указанными координатными столбцами (относительно исходного базиса) и матрицы: 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$, $A=A_{15}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$, $A=\frac{1}{2}A_{359}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $(0,0,-1)^T$, $A=\frac{1}{3}A_{360}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times(1,1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $(0,0,-1)^T$, $A=\frac{1}{2}A_{361}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{7}}\times$ $\times(\sqrt{2}-1,1,-\sqrt{2}-1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{14(2+\sqrt{2})}}(1+\sqrt{2},3+2\sqrt{2},2\sqrt{2})^T$, $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(1+\sqrt{2},-1,0)^T$, $A=\frac{1}{4}A_{362}$; 8) $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T$, $\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)^T$, $A=A_{494}$. **30.41**

Указания: 1) число 1 является собственным значением; 2) число -1 является собственным значением. **30.45.** 3) Указание: воспользоваться результатом задачи 30.39, 3). **30.46.** Указание: воспользоваться результатами задач 30.45, 1), и 24.105.

31.1. Линейная функция на $\mathscr{L}_n$ — линейное отображение в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$, если $\mathscr{L}_n$ комплексное). **31.2.** Если $e'=eS$ и $\varkappa$, $\varkappa'$ — координатные строки линейной функции в базисах e и e', то $\varkappa'=\varkappa S$. **31.3.** С помощью матрицы $(S^{-1})^T$. **31.4.** $(0,\ldots,0)$. **31.5.** 1) Нет, 2) только для нулевой функции; 3) только при $\alpha=0$. **31.6.** Для ненулевой функции всегда, для нулевой только при $\alpha=0$. **31.7.** Для ненулевой функции $\mathbb{R}$, для нулевой $\{0\}$ **31.8.** 1), 4) да; 2), 3) нет. **31.9.** 1) (1, 1, 0); 4) (1, 2, —3). **31.10.** 1) (4, 4, 4); 2) (2, 4, 6); 3) (9, 6, 3); 4) (—2, 0, 2). **31.11.** 1) $\frac{1}{|\mathbf{a}|}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — координаты $\mathbf{a}$. 2) Нет. **31.12.** 1) $(-\alpha_2,\alpha_1)$, где α_1, α_2 — координаты $\mathbf{a}$; 2) нет. **31.13.** 1) $(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,\ \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)$, где α_1, α_2, α_3 и β_1, β_2, β_3 — координаты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; 2) нет. **31.14.** 1), 2) Нет; 3) $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (единица на i-м месте); 4) $(1,\ldots,1)$. **31.15.** E_n. **31.16.** C^T. **31.19.** 1) (8/3, 0, 16/15, 0); 2) (1, 1/3, 1/5, 1/7). **31.20.** $(1,0,\ldots,0)$. **31.21.** 1) $(1,t_0,\ldots,t_0^n)$; 2) $(1,0,\ldots,0)$. **31.23.** $\delta=3\varphi_1-3\varphi_2+\varphi_3$. **31.25.** $k!\ (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (единица на $(k+1)$-м месте) при $k\leqslant n$; $(0,\ldots,0)$ при $k>n$. **31.26.** 1) $(\varkappa_0,\ldots,\varkappa_n)$, где $\varkappa_i=0$ при $i\leqslant k$ и $\varkappa_i=i(i-1)\ldots(i-k)t_0^{i-k-1}$ при $i>k$; 2) $k!\ (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (единица на $(k+1)$-м месте). **31.29.** $f(x)=3\xi_1'+5\xi_2'+4\xi_3'$. **31.31.** 1) (0, 0, —2); 2) (5, —5, —2); 3) (3, 3, 3); 4) (0, 1, 2). **31.32.** $\delta_0=\varphi_2$, $\delta_1=\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1)$, $\delta_2=\varphi_1-2\varphi_2+\varphi_3$, или $\delta=\frac{1}{2}\varphi A_{197}$. **31.33.** $\delta_k(p)=$

$= \dfrac{1}{k!} \dfrac{d^k(p)}{dt^k}\Big|_{t=0}$ $(k = 0, \ldots, n)$ или $\delta_k(p) = a_k$, если $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$. 31.34. $f_k(p) = \dfrac{1}{k!} \dfrac{d^k(p)}{dt^k}\Big|_{t=t_0}$ $(k = 0, \ldots, n)$. 31.35. $f_1' = f_1$, $f_2' = f_2 - f_1$, $f_3' = f_3 - f_2 + f_1$. 31.36. $\frac{1}{2}(t-2)(t-3)$, $(t-1)(3-t)$, $\frac{1}{2}(t-1)(t-2)$. 31.37. $p_i(t) = \prod\limits_{k \neq i} \dfrac{t - t_k}{t_i - t_k}$, $i = 1, \ldots, n+1$. Координаты многочлена $p(t)$ равны $p(t_1), \ldots, p(t_n)$. 31.38. 1, $t-2$, $(t-2)^2/2$. 31.39. $p(t) = p(t_0) + p'(t_0)(t - t_0) + \ldots + \dfrac{1}{n!} p^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n$. 31.41. Базис состоит из функций $f_{ij}(X) = x_{ij}$, где $X = \|x_{ij}\| \in \mathscr{R}_{n \times n}$. Функции f_{ij} соответствует матрица $C_{ij} = E_{ji}$. 31.42. Базис состоит из функций $f_i(X) = \operatorname{tr} C_i X$, $i = 0, 1, 2, 3$, где $C_0 = \frac{1}{2}\sigma_0$, $C_1 = \frac{1}{2}\sigma_1$, $C_2 = \frac{1}{2}\sigma_2$, $C_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$. 31.43. Указание: использовать задачу 31.30. 31.44. $\dim \mathscr{N} = n - 1$ при $f \neq \theta$ и $\mathscr{N} = \mathscr{L}_n$ при $f = \theta$. 31.45. Указание: выбрать подходящий базис. 31.46. $A_{151}(c_1, c_2)^T$, c_1, c_2 — произвольные числа. 31.47. $\dim \mathscr{K} = n - \dim \mathscr{N}$. 31.48. $(c_1, c_2, c_3)\, A_{410}^T$, c_1, c_2, c_3 — произвольные числа. 31.49. *Линейная оболочка функций* $\varphi_1, \varphi_2, \delta_1$, определенных в задачах 31.23 и 31.32. 32.1. 1) $\|1\|$, x_1^2; 2) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, x_1^2; 3) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \end{Vmatrix}$, $2x_1^2 - 2x_1x_2 - 5x_2^2$; 4) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 7 & 1 \end{Vmatrix}$, $2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 14x_2x_3 + x_3^2$; 5) единичная матрица, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$; 6) A_{604}, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{n-i+1}$; 7) A_{638} при $a = b = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$. 32.2. 1) $\|-3\|$, $-3x_1y_1$; 2) $\begin{Vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 9 \end{Vmatrix}$, $9(-x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2)$; 3) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$, $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2 + 7x_3y_3$; 4) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 3x_2y_2$; 5) $\frac{1}{2}A_{634}$; $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x_iy_{i+1} + x_{i+1}y_i)$. 32.3. 1) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$; 2) $-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$; 3) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$; 4) $4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2^2 + 4x_2x_3$; 5) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 +$

$+ x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 - x_3x_4)$; 6) $2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3^2 + x_4^2)$; 7) $2(x_1^2 - x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_4 + x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 - x_4x_5 + x_5^2 - x_5x_6 + x_6^2)$; 8) $2\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$. **32.4.** $\mathrm{b}(x, y) = (\mathrm{k}(x+y) - \mathrm{k}(x) - \mathrm{k}(y))/2$. **32.5.** 1) Поменяются местами i-я и j-я строки матрицы, а также i-й и j-й стол цы; 2) i-я строка и i-й столбец умножатся на λ (при этом элемент диагонали, стоящий на их пересечении, умножится на λ^2); 3) к i-й строке прибавится j-я, умноженная на λ, а также к i-му столбцу прибавится j-й, умноженный на λ (при этом элемент диагонали, стоящий на их пересечении, преобразуется по формуле $b'_{ii} = b_{ii} + 2\lambda b_{ij} + \lambda^2 b_{jj}$); 4) матрица отразится симметрично относительно побочной диагонали. **32.6.** Ортогональная матрица. **32.7.** 1) $13x_1'^2 - 46x_1'x_2' + 41x_2'^2$; 2) $x_1'^2 + 2x_2'^2$; 3) $x_1'^2$; 4) $8x_1'^2 - 18x_1'x_2' - 8x_1'x_3' + 3x_2'^2 - 6x_2'x_3' - 4x_3'^2$; 5) $7x_1'^2 - 11x_2'^2 - 2x_3'^2 + 3x_1'x_2' - 6x_1'x_3' + 11x_2'x_3'$; 6) $20x_1'^2 + 8x_2'^2 + 35x_3'^2$; 7) $(n-1)x_1'^2 + (n-2)x_2'^2 + \ldots + x_{n-1}'^2 + (2n-3)x_1'x_2' + (2n-5)x_1'x_3' + (2n-5)x_2'x_3' + \ldots + x_1'x_n' + \ldots + x_{n-1}'x_n'$. **32.8.** 1) $x_1'^2 + x_2'^2$; 2, 2, 0, 2; 2) $x_1'^2 - x_2'^2$; 2, 1, 1, 0; 3) $x_1'^2 - x_2'^2$; 2, 1, 1, 0; 4) $x_1'^2$; 1, 1, 0, 1; 5) $-x_1'^2 - x_2'^2$; 2, 0, 2, -2; 6) $-x_1'^2$; 1, 0, 1, -1; 7) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 2, 1, 1; 8) $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 1, 2, -1; 9) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2$; 3, 3, 0, 3; 10) $x_1'^2$; 1, 1, 0, 1; 11) $x_1'^2 + x_2'^2$; 2, 2, 0, 2; 12) $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 1, 2, -1; 13) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$; 4, 4, 0, 4; 14) $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 - x_5'^2 - x_6'^2$; 6, 4, 2, 2; 15) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$; 4, 2, 2, 0; 16) $-x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$; 3, 0, 3, -3.
32.9. Пусть n — размерность линейного пространства. Положительно определенными являются формы: 1) при $n = 2$, 9) при $n = 3$, 13) при $n = 4$. Отрицательно определенными являются формы: 5) при $n = 2$, 16) при $n = 3$. Неотрицательными являются формы: 1) при $n > 2$, 4) при $n \geqslant 2$, 10), 11) при $n \geqslant 3$, 9) при $n > 3$; 13) при $n > 4$. Неположительными являются формы: 5) при $n > 2$, 6) при $n \geqslant 2$, 16) при $n > 3$. **32.10.** 1) $x_1'y_1' + x_2'y_2'$; 2) $x_1'y_1'$; 3) $x_1'y_1' + x_2'y_2'$; 4) $x_1'y_1' - x_2'y_2'$; 5) $x_1'y_1' - x_2'y_2' - x_3'y_3'$; 6) $x_1'y_1' + x_2'y_2' + x_3'y_3'$; 7) не приводится (форма несимметрична). **32.12.** 1) $x_1'^2 + x_2'^2$ при $\lambda > 1/3$, $x_1'^2$ при $\lambda = 1/3$, $x_1'^2 - x_2'^2$ при $\lambda < 1/3$; 2) $x_1'^2 + x_2'^2$ при $|\lambda| < 8$, $x_1'^2$ при $|\lambda| = 8$, $x_1'^2 - x_2'^2$ при $|\lambda| > 8$; 3) $x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2$ при $\lambda > -6$, $x_1'^2 - x_2'^2$ при $\lambda = -6$, $x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$ при $\lambda < -6$; 4) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 + x_4'^2$ при $\lambda > 7/4$, $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$ при $\lambda = 7/4$, $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$ при $\lambda < 7/4$; 5) $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$ при $\lambda = 3$, $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$ при $\lambda \neq 3$.
32.13. 1) $\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; 2) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i'^2$; 3) $\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; 4) $x_1'^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i'^2$;

5) $-\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; 6) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i'^2$. 32.18. 1) Положительно определена при $\lambda > 1$, неотрицательна при $\lambda = 1$, отрицательно определена при $\lambda < -4$, неположительна при $\lambda = -4$; 2) отрицательно определена при $|\lambda| < 1$, неположительна при $\lambda = \pm 1$; 3) положительно определена при $\lambda > 8$, неотрицательна при $\lambda = 8$; 4) таких значений λ нет; 5) положительно определена при $\lambda < -6$, неотрицательна при $\lambda = -6$, отрицательно определена при $\lambda > 6$, неположительна при $\lambda = 6$. 32.21. n^2 и n. 32.22. $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$ в базисе $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}\,t$, $\sqrt{\frac{5}{2}}\,\frac{3t^2-1}{2}$, $\sqrt{\frac{7}{2}}\,\frac{5t^3-3t}{2}$. 32.25. Ранг — четное число, сигнатура равна нулю. 32.26. 2) Все линейные преобразования, матрицы которых ортогональны в том базисе, в котором записана данная форма. 32.27. Приводятся матрицы или формулы перехода от данного базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_1', \ldots, e_n'$ и диагональная форма в новом базисе. 1) A_{61}, $x_1'^2 - 9x_2'^2$; 2) A_{62}, $\frac{25}{12}x_1'^2$; 3) A_{53}, $x_1'^2 + 9x_2'^2$; 4) A_{54}, $-10x_1'y_1'$; 5) A_{61}, $-\frac{1}{2}x_1'y_1' - \frac{3}{2}x_2'y_2'$; 6) $\operatorname{diag}(A_{61}, 1)$, $-\frac{1}{2}x_1'^2 - \frac{3}{2}x_2'^2$; 7) A_{313}, $x_1'^2 + 2x_2'^2 + 10x_3'^2$; 8) A_{319}, $x_1'y_1' + 3x_2'y_2'$; 9) A_{314}, $x_1'y_1' + 6x_2'y_2' - 6x_3'y_3'$; 10) A_{322}, $3(x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2)$; 11) A_{319}, $4x_1'^2 + 4x_2'^2 + x_3'^2$; 12) A_{313}, $9x_1'^2 - x_2'^2 - 9x_3'^2$; 13) A_{316}, $\frac{3}{2}(x_1'^2 + x_2'^2)$; 14) A_{328}, $14x_1'^2$; 15) A_{315}, $-6x_1'y_1'$; 16) A_{330}, $\sqrt{3}\,(x_1'y_1' - x_2'y_2')$; 17) $\frac{1}{2}A_{468}$, $2(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4'^2)$; 18) $3x_1'^2 + 3x_2'^2 + 6x_3'^2 - 6x_4'^2$ в базисе $e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 - e_3 + e_4)$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_4)$, $e_4' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_3 - e_4)$; 19) $x_1'^2 + 2x_2'^2 + 5x_3'^2 + 10x_4'^2$ в базисе $e_1' = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4e_1 + e_2 - e_3)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 - e_4)$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_2 + e_3 + 2e_4)$, $e_4' = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3)$; 20) $-x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_3'^2 - 2x_4'^2$ в базисе $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_2 + e_3 - 2e_4)$, $e_3' = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $e_4' = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$; 21) $\frac{1}{2}(x_1'y_1' + x_2'y_2' - x_3'y_3' - x_4'y_4')$ в базисе $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4)$, $e_3' =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $e_4' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$; 22) $5(x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2)$ в базисе $e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 - e_2)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_1 + 2e_2)$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{5}}(e_3 - 2e_4)$, $e_4' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_3 + e_4)$. 23) $\frac{n+1}{2}x_1'^2 + \frac{1}{2}(x_2'^2 + \ldots + x_n'^2)$; $e_1' = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sum_{i=1}^{n} e_i$; $e_2', \ldots, e_n'$ — какой-либо ортонормированный базис подпространства $x_1 + \ldots + x_n = 0$, например $e_k' = \frac{1}{\sqrt{k^2 - k}}\left(\sum_{i=1}^{k-1} e_i - (k-1)e_k\right)$ $(k = 2, \ldots, n)$; 24) $nx_1'y_1'$; $e_1' = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}e_i$; $e_2', \ldots, e_n'$ — ортонормированный базис подпространства $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i = 0$; 25) $x_1'^2 + \ldots + x_n'^2 - x_{n+1}'^2 - \ldots - x_{2n-1}'^2$ в базисе $e_k' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2n-k})$, $e_n' = e_n$, $e_{n+k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2n-k})$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$; 26) $2\sum_{i=1}^{n} x_i'^2$; $e_k' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{2n-k+1})$, $e_{n+k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{2n-k+1})$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$; 27) $\sum_{k=1}^{n} x_k'^2 \cos\frac{\pi k}{n+1}$ в базисе $e_k' = f_k/\|f_k\|$, где $f_k = \sum_{i=1}^{n}\sin\frac{k\pi i}{n+1}e_i$ $(k = 1, \ldots, n)$. 32.28. 1) $x_1''^2 - x_2''^2$; 2, 0; 2) $x_1''^2$; 1, 1; 3) $x_1''^2 + x_2''^2$; 2, 2; 4) $-x_1''y_1''$; 1, -1; 5) $-x_1''y_1'' - x_2''y_2''$; 2, -2; 6) $-x_1''^2 - x_2''^2$; 2, -2; 7) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$; 3, 3; 8) $x_1''y_1'' + x_2''y_2''$; 2, 2; 9) $x_1''y_1'' + x_2''y_2'' - x_3''y_3''$; 3, 1; 10) $x_1''^2 + x_2''^2 - x_3''^2$; 3, 1; 11) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2$; 3, 3; 12) $x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2$; 3, -1; 13) $x_1''^2 + x_2''^2$; 2, 2; 14) $x_1''^2$; 1, 1; 15) $-x_1''^2$; 1, -1; 16) $x_1''y_1'' - x_2''y_2''$; 2, 0; 17), 18) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 - x_4''^2$; 4, 2; 19) $x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 + x_4''^2$; 4, 4; 20) $x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2 - x_4''^2$; 4, -2; 21) $x_1''y_1'' + x_2''y_2'' - x_3''y_3'' - x_4''y_4''$; 4, 0; 22) $x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2$; 3, -1; 23) $\sum_{i=1}^{n} x_i''^2$; n, n; 24) $x_1''y_1''$; 1, 1; 25) $\sum_{i=1}^{n} x_i''^2 -$

$-\sum_{i=n+1}^{2n-}x_i''^2$; $2n-1,\ 1$; 26) $\sum_{i=1}^{n}x_i''^2$; $n,\ n$; 27) $\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi i}{n+1}\right)x_i''^2$, ранг равен $2\ [n/2]$. 32.32. 2) $\Gamma^{-1}B$. 32.33. 1) $\begin{Vmatrix}2 & 9\\ 2 & -1\end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix}29 & 0\\ -18 & -1\end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix}5/2 & -1\\ 9/2 & -2\end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix}26 & 44 & -49\\ -12 & -21 & 24\\ -5 & -8 & 10\end{Vmatrix}$;

5) $\frac{1}{3}\begin{Vmatrix}5 & 1 & 2\\ 8 & 4 & 8\\ -1 & 1 & 2\end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & -1 & -1\\ 3 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 0 & -1 & 0\end{Vmatrix}$. 32.35. $x_1'^2+\ldots+x_r'^2$, если первые r векторов ортонормированного базиса принадлежат $\mathscr{M}$, а остальные $n-r$ принадлежат $\mathscr{M}^{\perp}$. 32.36. 1) $x_1=\frac{x_1''}{\sqrt{2}}-x_2''$, $x_2=\frac{x_1''}{3\sqrt{2}}+\frac{2x_2''}{3}$; $f=x_1''^2+x_2''^2$, $g=5x_1''^2-4x_2''^2$; 2) $x_1=\sqrt{5}x_1''$, $x_2=\frac{-3x_1''+x_2''}{\sqrt{5}}$; $f=\frac{29}{2}x_1''^2-\frac{1}{2}x_2''^2$, $g=x_1''^2+x_2''^2$; 3) $x_1=\frac{x_1''}{\sqrt{6}}+\frac{x_2''}{\sqrt{21}}$, $x_2=\frac{x_1''}{\sqrt{6}}+\frac{4x_2''}{\sqrt{21}}$; $f=x_1''^2+\frac{1}{7}x_2''^2$, $g=x_1''^2+x_2''^2$ или $x_1=\frac{x_1''}{\sqrt{6}}+\frac{x_2''}{\sqrt{3}}$, $x_2=\frac{x_1''}{\sqrt{6}}+\frac{4x_2''}{\sqrt{3}}$; $f=x_1''^2+x_2''^2$, $g=x_1''^2+7x_2''^2$ (обе формы положительно определены); 4) $x_1=\frac{2x_1''}{\sqrt{3}}+\frac{x_2''}{\sqrt{6}}$, $x_2=\sqrt{3}x_1''+\sqrt{\frac{3}{2}}x_2''$; $f=x_1''^2+x_2''^2$, $g=x_1''^2-\frac{1}{2}x_2''^2$; 5) $x_1=\frac{-5x_1''+x_2''}{\sqrt{26}}$, $x_2=\frac{21x_1''+x_2''}{\sqrt{26}}$; $f=26x_1''^2$, $g=x_1''^2+x_2''^2$; 6) $x_1=\frac{8x_1''+x_2''}{2\sqrt{13}}$, $x_2=\frac{-2x_1''+3x_2''}{2\sqrt{13}}$; $f=x_1''^2+x_2''^2$, $g=-5x_1''^2-\frac{1}{8}x_2''^2$ или $x_1=\frac{\sqrt{10}x_1''-4x_2''}{\sqrt{65}}$, $x_2=\frac{3\sqrt{10}x_1''+x_2''}{\sqrt{65}}$; $f=8x_1''^2+0{,}2\,x_2''^2$, $g=-x_1''^2-x_2''^2$; 7) $x_1=(\sqrt{3}x_1''-\sqrt{2}x_2'')/\sqrt{5}$, $x_2=((\sqrt{2}-2\sqrt{3})x_1''+(\sqrt{3}+2\sqrt{2})x_2'')/\sqrt{5}$; $f=3x_1''^2-2x_2''^2$, $g=x_1''^2+x_2''^2$; 8) $x_1=\sqrt{(a+1}x_1''-\sqrt{a}\ x_2'')/\sqrt{2a+1}$, $x_2=((\sqrt{a}-m\sqrt{a+1})x_1''+(\sqrt{a+1}+m\sqrt{a})x_2'')/\sqrt{2a+1}$; $f=(a+1)x_1''^2-ax_2''^2$, $g=x_1''^2+x_2''^2$; 9) $x_1=\frac{x_2''}{\sqrt{2}}$, $x_2=\frac{x_1''}{\sqrt{3}}+\frac{x_2''}{\sqrt{2}}-\frac{2x_3''}{\sqrt{6}}$, $x_3=\frac{x_1''}{\sqrt{3}}-\frac{x_2''}{\sqrt{2}}+\frac{x_3''}{\sqrt{6}}$; $f=3x_1''^2+2x_2''^2$, $g=x_1''^2+$

$+x_2''^2+x_3''^2$; 10) $x_1=\frac{x_1''}{\sqrt{5}}+\frac{5x_2''}{4\sqrt{3}}+\frac{7x_2''}{4\sqrt{5}}$, $x_2=-\frac{x_1''}{\sqrt{5}}+\frac{x_2''}{2\sqrt{3}}-\frac{x_3''}{2\sqrt{5}}$, $x_3=-\frac{x_2''}{4\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}\,x_3''}{4}$; $\mathrm{f}=5x_1''^2-x_2''^2-5x_3''$, $\mathrm{g}=x_1''^2+x_2''^2+x_3''^2$; 11) $x_1=\frac{x_1''}{\sqrt{2}}+\frac{x_2''}{\sqrt{6}}-\frac{x_3''}{\sqrt{3}}$, $x_2=\sqrt{3}\,x_3''$, $x_3=-\frac{2x_2''}{\sqrt{6}}+\frac{2x_3''}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{f}=3x_1''^2+3x_2''^2-3x_3''^2$, $\mathrm{g}=x_1''^2+x_2''^2+x_3''^2$; 12) $x_1=\frac{2x_1''}{\sqrt{14}}+\frac{2x_2''}{\sqrt{5}}+\frac{8x_3''}{\sqrt{70}}$, $x_2=\frac{4x_1''}{\sqrt{14}}+\frac{3x_2''}{\sqrt{5}}+\frac{2x_3''}{\sqrt{70}}$, $x_3=\frac{3x_1''}{\sqrt{14}}+\frac{5x_3''}{\sqrt{70}}$; $\mathrm{f}=x_1''^2+x_2''^2+x_3''^2$, $\mathrm{g}=14x_1''^2$; 13) $x_1=\frac{9x_1''-x_2''}{\sqrt{6}}+\frac{6x_3''+7x_4''}{\sqrt{3}}$, $x_2=\frac{8x_1''-2x_2''}{\sqrt{6}}+\frac{5x_3''-8x_4''}{\sqrt{3}}$, $x_3=\frac{3x_1''-x_2''}{\sqrt{6}}+\frac{3x_3''+4x_4''}{\sqrt{3}}$, $x_4=\frac{x_1''-x_2''}{\sqrt{6}}+\frac{x_3''+x_4''}{\sqrt{3}}$; $\mathrm{f}=3x_1''^2+3x_2''^2+6x_3''^2-6x_4''^2$, $g=-x_1''^2-x_2''^2-x_3''^2-x_4''^2$; 14) $x_1=x_1''+x_2''+x_3''+x_4''$, $x_2=(x_1''+x_2''+x_3''+3x_4'')/2$, $x_3=x_3''+x_4''$, $x_4=(-x_1''+x_2''+x_3''+x_4'')/2$; $\mathrm{f}=2\left(x_1''^2+x_2''^2+x_3''^2-x_4''^2\right)$, $\mathrm{g}=x_2''^2+x_2''^2+x_3''^2+x_4''^2$. **32.37.** Формы x_1^2 и x_3^2 диагональны, но среди их линейных комбинаций нет положительно определенных форм. **32.39.** 1) $5x_1''^2$; 2) $x_1''^2+4x_2''^2$; 3) $\frac{49}{2}x_1''^2-\frac{1}{2}x_2''^2$; 4) $9x_1''^2-x_2''^2$. **32.41.** 1) $x_1'^2$; 2), 3), 4) $x_1'^2+x_2'^2$; 5) $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$; 6) $x_1'^2+x_2'^2$; 7) $x_1'^2$. **32.42.** 1) $\|-i\|$; 2) $\begin{Vmatrix}-i & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix}3 & 4i\\ -5 & i\end{Vmatrix}$; 4) $\begin{Vmatrix}-3i & 2\\ 2 & 1-i\end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix}0 & 1+i\\ 1+i & -5\end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix}0 & 1+i\\ 1-i & -5\end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix}1 & -i & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 4+i & 0 & 2+i\end{Vmatrix}$; 8) $\begin{Vmatrix}2 & 3 & 2-5i\\ 3 & -6 & 4i\\ 2+5i & -4i & 1+3\sqrt{2}\end{Vmatrix}$; 9) единичная матрица. **32.43.** 6) $(1+i)\,x_1\bar{x}_2+(1-i)\,x_2\bar{x}_1-5\,|x_2|^2$; 8) $2\,|x_1|^2+3x_1\bar{x}_2+3x_2\bar{x}_1+(2-5i)\,x_1\bar{x}_3+(2+5i)\,x_3\bar{x}_1-6\,|x_2|^2+4ix_2\bar{x}_3-4ix_3\bar{x}_2+\left(1+3\sqrt{2}\right)|x_3|^2$; 9) $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2$. **32.44.** 1) $5\,|x_1|^2-2x_1\bar{x}_2-2x_2\bar{x}_1+8\,|x_2|^2$; 2) $\varepsilon x_1\bar{x}_2+\bar{\varepsilon}x_2\bar{x}_1$; 3) $8\,|x_2|^2+2x_1\bar{x}_2+2x_2\bar{x}_1+x_1\bar{x}_3+x_3\bar{x}_1+2x_2\bar{x}_3+2x_3\bar{x}_2$; 4) $7\,(|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2+|x_4|^2)+3x_1\bar{x}_2+3x_2\bar{x}_1+(1+2i)\,x_1\bar{x}_3+(1-2i)\,x_3\bar{x}_1+(-1+2i)\,x_1\bar{x}_4-(1+2i)\,x_4\bar{x}_1+(1-2i)\,x_2\bar{x}_3+(1+2i)\,x_3\bar{x}_2-(1+2i)\,x_2\bar{x}_4+(-1+2i)\,x_4\bar{x}_2-3x_3\bar{x}_4-3x_4\bar{x}_3$. **32.45.** В ответах даны формулы замены координат при переходе к искомому ортонормированному базису. 1) $x_1=(x_1'-ix_2')/\sqrt{2}$, $x_2=(-ix_1'+x_2')/\sqrt{2}$, $|x_1'|^2+$

$+3|x_2'|^2$; 2) $x_1=\frac{3+4i}{5\sqrt{2}}(x_1'+x_2')$, $x_2=(x_1'-x_2')/\sqrt{2}$, $6|x_1'|^2-$ $-4|x_2'|^2$; 3) $x_1=(x_1'+x_2')/\sqrt{2}$, $x_2=\varepsilon(x_1'-x_2')/\sqrt{2}$, $2|x_1'|^2$; 4) $x_1=$ $=(x_1'+ix_2')/\sqrt{2}$, $x_2=(ix_1'+x_2')/\sqrt{2}$, $x_3=x_3'$, $2|x_1'|^2+4|x_2'|^2-$ $-5|x_3'|^2$; 5) $x_1=\frac{x_1'}{\sqrt{3}}+\frac{x_2'}{\sqrt{2}}+\frac{x_3'}{\sqrt{6}}$, $x_2=\frac{x_1'}{\sqrt{3}}-\frac{2x_3'}{\sqrt{6}}$, $x_3=\frac{ix_1'}{\sqrt{3}}-$ $-\frac{ix_2'}{\sqrt{2}}+\frac{ix_3'}{\sqrt{6}}$, $3|x_1'|^2$; 6) $x_1=(-x_1'+x_3'+(1-i)x_4')/2$, $x_2=(x_2'+$ $+(1+i)x_3'-x_4')/2$, $x_3=(x_1'+(-1+i)x_2'+x_3')/2$, $x_4=((1+i)x_1'+$ $+x_2'+x_4')/2$, $4|x_1'|^2+8|x_2'|^2+12|x_3'|^2+16|x_4'|^2$. **32.46.** $\mathrm{h}(x,y)=$ $=\frac{\mathrm{k}(x+y)-\mathrm{k}(x)-\mathrm{k}(y)}{2}+i\,\frac{\mathrm{k}(x+iy)-\mathrm{k}(x)-\mathrm{k}(y)}{2}$.

33.13. При условии линейной зависимости векторов a_1, b_1, a_0-b_0. **33.14.** 1) $x_1=-1+3t$, $x_2=t$, $x_3=3+t$, $x_4=-2+7t$; 2) $x_1=$ $=-2+3t_1+2t_2$, $x_2=1+2t_1$, $x_3=1-6t_1$, $x_4=1+t_1+3t_2$; 3) $2x_1-32x_2-10x_3-9x_4+21=0$. **33.15.** $C\left(\frac{px_1''+qx_1'}{p+q},\ldots\right.$ $\left.\ldots,\frac{px_n''+qx_n'}{p+q}\right)$. **33.18.** 1) $x_1=2+3t$, $x_2=t$; 2) $x_1=-1$, $x_2=1$; 3) $x_1=1+t$, $x_2=1+t$, $x_3=1-t$; 4) $x_1=t_1$, $x_2=-3+3t_1+$ $+2t_2$, $x_3=t_2$; 5) $x_1=x_2=x_3=1$; 6) $x_1=1+7t_2$, $x_2=2t_1+23t_2$, $x_3=1+t_1$, $x_4=1-11t_2$; 7) $x_1=11t$, $x_2=-1-7t$, $x_3=1+t$; 8) $x_1=t_1+4t_2+2t_3-3t_4$, $x_2=t_1$, $x_3=1+t_2$, $x_4=t_3$, $x_5=t_4$. **33.19.** 1) $x_1-2x_2+13=0$; 2) $2x_1-3x_2+x_3+1=0$; 3) $4x_1-$ $-x_2-22=0$, $x_2-4x_3-2=0$; 4) $x_1-x_2+1=0$, $x_1-x_3=0$, $2x_1-x_4=0$; 5) $14x_1-5x_2-9x_3-4=0$, $x_1+2x_2-3x_4+13=$ $=0$. **33.20.** $2x_1+3x_2-4x_3+x_4+3=0$. **33.21.** $x_1=-1+3t$, $x_2=3+t$, $x_3=4+7t$, $x_4=-t$. **33.22.** 1) $x_1+2x_2+3x_3-x_4+$ $+6=0$, $x_1+x_2+x_3+x_4-2x_5+5=0$; 2) $x_1-x_3+x_4=0$, $5x_1+x_2+4x_3-4x_5-8=0$; 3) $2x_1+3x_2-x_4-4=0$, x_2+ $+2x_3+2x_4+x_5-6=0$. **33.24.** Если две двумерные плоскости в трехмерном пространстве имеют общую точку, то они содержат и общую прямую. Если в четырехмерном пространстве трехмерная и двумерная плоскости имеют общую точку, то они содержат и общую прямую. Если в четырехмерном пространстве две трехмерные плоскости имеют общую точку, то они содержат и общую двумерную плоскость. **33.26.** Пусть $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ и $\mathfrak{m}_3$ — плоскости с направляющими подпространствами $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$, проходящие через точки A, B и C соответственно. Тогда существует единственная плоскость наименьшей размерности, содержащая $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ и $\mathfrak{m}_3$; направляющим подпространством искомой плоскости является сумма $\mathscr{L}+\mathscr{M}+\mathscr{N}+\mathscr{P}$, где $\mathscr{P}$ — линейная оболочка системы векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. **33.27.** 1) $5x_1-x_2+7x_3-9=0$,

$3x_3 - x_4 - 3 = 0$; 2) $x_1 - 2x_2 - 12x_3 + 1 = 0$, $x_2 - x_3 + x_4 + 5 = 0$; 3) $2x_2 - x_3 + x_4 + 1 = 0$. **33.28.** 1) Трехмерная плоскость $5x_1 + 2x_2 + x_4 + 11x_5 - 42 = 0$, $11x_1 + 5x_2 - x_3 + 20x_5 - 81 = 0$; 2) четырехмерная плоскость $73x_1 - 6x_2 - 111x_3 - 62x_4 - 52x_5 - 195 = 0$. 3) четырехмерная плоскость $x_2 + x_3 - 2 = 0$. **33.30.** 1) Параллельны; 2) имеют единственную общую точку $(1, 2, 1, 0)$; 3) скрещиваются (абсолютно); 4) прямая принадлежит двумерной плоскости. **33.31.** 1) Абсолютно скрещиваются; 2) имеют единственную общую точку $(1, 1, 1, 1/2, 3/2)$; 3) скрещиваются параллельно прямой $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = \frac{1}{2} x_5$; 4) пересекаются по прямой $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 + x_4 = x_5 = 2$; 5) параллельны; 6) совпадают. **33.32.** $(2, -2, 3, 3)$; $14x_1 - 4x_3 - 3x_4 - 7 = 0$, $3x_1 + x_2 - 2x_4 + 2 = 0$. **33.33.** $2t^3$. **33.34.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = -1 - t$, $x_4 = 5 + t$; $(1, 1, 2, 2)$ и $(1, 2, 1, 3)$. **33.37.** 1) $(12, -28, -24, -3)$; 2) $(-5, 4, 8, -1)$. **33.38.** 1) Является; 2) является; 3) является; 4) является при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, не является во всех остальных случаях; 5) является; 6) является при $n = 1$, не является при $n \geqslant 2$. **33.41.** Тетраэдр с вершинами в точках $(3/4, -1/4, -1/4, -1/4)$, $(-1/4, 3/4, -1/4, -1/4)$, $(-1/4, -1/4, 3/4, -1/4)$, $(-1/4, -1/4, -1/4, 3/4)$. **33.43.** 1) $C_k^p 2^{k-p}$; 2) 2^{k-1}. **33.44.** Октаэдр с вершинами в точках $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1, -1)$, $(-1, 1, -1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$.

34.2. 1) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{14}$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \angle C = 45^\circ$; 2) $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}$, $\angle C = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$; 3) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 6$, $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$. **34.3.** 2) и 4) не могут; 1) могут; $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \arccos(\sqrt{7}/3)$, $\gamma = \arccos(\sqrt{2}/3)$; 3) могут; $\alpha = \arccos(3/\sqrt{10})$, $\beta = \arccos(2/\sqrt{5})$, $\gamma = 135^\circ$. Здесь α, β и γ — внутренние углы треугольника, расположенные против сторон a, b и c соответственно. **34.4.** $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$, $\varphi_3 = 90^\circ$, где φ_1, φ_2 и φ_3 — внутренние углы треугольника, расположенные против сторон $p_1(t)$, $p_2(t)$ и $p_3(t)$ соответственно. **34.5.** Указания. 1) Можно воспользоваться изоморфностью плоскости, в которой лежит треугольник, евклидовой плоскости и фактом из элементарной геометрии. 2) Можно установить равенство $\cos\alpha + \cos(\beta + \gamma) = 0$, где α, β и γ — внутренние углы треугольника, и отсюда вывести требуемое. **34.8.** $\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_k^2}$. **34.9.** $\arccos(1/\sqrt{n})$. **34.11.** 1) $(-2, -2, -1, -1)$, $R = 6$; 2) $(0, -1, 1, -1)$, $R = 5$. **34.12.** $(1, -2, -3, 1)$, $R = 7$. **34.13.** 1) 5; 2) $2\sqrt{6}$; 3) 2; 4) $6\sqrt{10}$; 5) 3; 6) 10. **34.15.** 1) 6; 2) 1; 3) $7\sqrt{21}$. **34.16.** $\frac{\sqrt{n+1}}{n!}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^n$. **34.20.** 1) 5; 2) 3. **34.21.** 1) $5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = C_{1,2}$; $C_1 = 17$, $C_2 = -11$; 2) $x_1 - 4x_2 + 2x_3 +$

$+ 2x_4 = C_{1,2}$; $C_1 = 29$, $C_2 = -21$; 3) $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = C_{1,2}$; $C_1 = 7$, $C_2 = -17$. **34.22.** 1) $(1, 1, 2, -1)$; 2) $(7, 2, 2, 1)$; 3) $(-2, -3, 1, 3, 2)$. **34.23.** 1) $(2, -1, 1, 3)$; 2) $(2, 1, 3, 3, 0)$. **34.24.** $1/n$. **34.25.** 1) $(-3, -7, -1, -5)$; 2) $(5, -1, 5, -5)$; 3) $(7, 2, 3, 0, 9)$. **34.26.** 1) $(1, -3, 0, -2)$; 2) $(1, 1, 1, -1)$; 3) $(0, 2, 1, 3, -1)$. **34.28.** 1) $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -3 - t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 4 + t$; 2) $x_1 = 1 + t$, $x_2 = -3 + t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = 3 - t$; 3) $x_1 = 4 + 2t$, $x_2 = t$, $x_3 = 1 + t$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1 - t$. **34.29.** 1) $(0, -3, -1, 3)$; 2) $(-4, -1, 3, -2)$. **34.30.** 1) $45°$; 2) $\arccos(1/3)$; 3) $30°$. **34.31.** 1) $30°$; 2) $\arccos\left(1/\sqrt{5}\right)$. **34.32.** 1) 3; 2) $2\sqrt{3}$; 3) 4; 4) $\sqrt{6}$. **34.34.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) 2; 4) $2\sqrt{2}$; 5) 4. **34.35.** 1) $x_1 = 3 + t$, $x_2 = 7 + 2t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 1 + t$; 2) $x_1 = -3 + t$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = 4 - t$, $x_4 = 7 - 2t$, $x_5 = -3 + t$. **34.36.** 1) $(0, 2, -1, 1)$; 2) $(-1, 0, 1, 0, 1)$; 3) $(2, 1, 3, -1, 0)$. **34.37.** 1) $(1, 1, 1, 3)$; 2) $(1, 1, -2, -2, 0)$. **34.39.** 1) $2\sqrt{7}$; 2) $6\sqrt{2}$. **34.40.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{14}$; 3) 4. **34.41.** 1) 3; 2) 1. **34.42.** 1) $\arccos\left(\sqrt{7}/3\right)$; 2) $45°$; 3) $\arccos\sqrt{2/3}$. **34.44.** 1) $1/\sqrt{5}$; 2) 5; 3) 2; 4) $3/\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{6}$; 6) $2\sqrt{5/3}$. **34.46.** 1) $x_1 = 2 + t_1 + t_2$, $x_2 = -1 - t_1$, $x_3 = -1 + t_1$, $x_4 = -1 - t_2$ и $x_1 = 2 + t$, $x_2 = -1 - t$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = -1$; 2) $x_1 = 2 + t_1$, $x_2 = 2 + t_2$, $x_3 = -1 + t_3$, $x_4 = 2 - 2t_1 - 2t_2 + t_3$, $x_5 = 1 - t_1 - 2t_2 + 2t_3$ и $x_1 = 2 + t$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1 + t$, $x_4 = 2 - t$, $x_5 = 1 + t$; 3) $x_1 = 3t_1 + 2t_2$, $x_2 = -1 - 2t_1 - t_2$, $x_3 = 1 + t_1 + t_2$, $x_4 = -2 + t_1$, $x_5 = 1 + t_2$ и $x_1 = t$, $x_2 = -1 - t$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2 + t$, $x_5 = 1 - t$. **34.47.** $45°$. **34.48.** 1) $\arccos(2/3)$; 2) $45°$; 3) $\arccos\left(1/\sqrt{5}\right)$.

35.1. 1) $(\xi')^1 + (\xi')^2 = (\tau_1^1 + \tau_1^2)\xi^1 + (\tau_2^1 + \tau_2^2)\xi^2$; 2) $(\xi')^1 + (\eta')^1 = \tau_1^1(\xi^1 + \eta^1) + \tau_2^1(\xi^2 + \eta^2)$; 3) $\begin{vmatrix} (\xi')^1 & (\eta')^1 \\ (\xi')^2 & (\eta')^2 \end{vmatrix} = \det T \cdot \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix}$. Ни одна из величин не является ни тензором, ни инвариантом. **35.2.** 1) Инвариант; 2) набор из n инвариантов, не тензор. **35.3.** 1), 2), 3), 4), 6) инварианты; 5) не тензор. **35.4.** 1), 4) относительные инварианты; 5), 6) инварианты; 2) и 3) ни тензоры, ни инварианты. **35.5.** 1) Не инвариант; 2) тензор типа (0, 1). **35.6.** 1) Тензор типа (0, 2); 2) тензор типа (0, 2). **35.7.** 1) Тензор типа (0, 2), $a_{ik} = a_i a_k$; 2) тензор типа (0, 2), $a_{ik} = a_i b_k$. **35.8.** 1) Тензор типа (0, 2), $a_{ik} = a_i b_k$; 2) тензор типа (0, 2), $a_{ik} = a_i a_k$. **35.9.** 1) Тензор типа (0, 2), $a_{13} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq 1$ или $j \neq 3$; 2) тензор типа (0, 2), $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. **35.10.** 1) Тензор типа (0, 1), $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = \ldots = a_n = 0$; 2) тензор типа (0, 2), $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i + j \geqslant 4$; 3) тензор типа (0, 2), $a_{ij} = 1$ при всех i, j; 4) тензор типа (0, 2), $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. **35.14.** Данный тензор («символ Кронекера», или «изотропный тензор») соответствует тождественному линейному преобразованию, его компоненты во всех базисах одинаковы.

35.15. $\delta'_{ij} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha$. Билинейная функция, соответствующая этому тензору, в базисе e определяется формулой $K(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i$, где ξ^i, η^i — координаты векторов x и y. Она симметрична и положительно определена. 35.16. $(\theta')^i = \tau^i_{i_0}$, где $T = S^{-1} = \|\tau^i_j\|$. Данный тензор есть i_0-й базисный вектор базиса e. 35.17. $(\theta')_i = \sigma_i^{i_0}$, где $S = \|\sigma^i_j\|$. Ковектор θ_i соответствует функции φ: $\mathscr{L}_n \to \mathbb{R}$, которая в базисе e определяется формулой $\varphi(x) = \xi^{i_0}$ (ξ^{i_0} — координата с номером i_0 вектора x в базисе e). 35.18. δ^{ij}_{kl} — изотропный тензор типа (2, 2). Указание: проверить закон преобразования компонент. При $n = 3$ среди компонент — 69 нулевых. 35.19. При $i_0 = j_0$ все компоненты нулевые; при $i_0 \neq j_0$: $\theta_{i_0 j_0} = 1$, $\theta_{j_0 i_0} = -1$, остальные компоненты нулевые; $\theta'_{kl} = \sigma_k^{i_0}\sigma_l^{j_0} - \sigma_l^{i_0}\sigma_k^{j_0}$. 35.20. Изотропный тензор типа (k, k). Указание: проверить закон преобразования координат. 35.21. 1) $\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = (\det S)\, \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$; 2) Совокупность n^n инвариантов, но не тензор. 35.22. Трехвалентный тензор в четырехмерном пространстве имеет 64 компоненты. При замене координат выражение для каждой компоненты будет содержать 64 слагаемых, каждое из которых состоит из четырех сомножителей. 35.23. Для всех возможных значений индексов i, j: $(a')^i_j = a^1_1\sigma^1_j\tau^i_1 + a^1_2\sigma^2_j\tau^i_1 + a^2_1\sigma^1_j\tau^i_2 + a^2_2\sigma^2_j\tau^i_2$; 2) для всех возможных значений индексов i, j: $(a')^{ij} = a^{11}\tau^i_1\tau^j_1 + a^{12}\tau^i_1\tau^j_2 + a^{21}\tau^i_2\tau^j_1 + a^{22}\tau^i_2\tau^j_1$; 3) для всех возможных значений индексов i, j, k: $(a')^i_{jk} = a^1_{11}\sigma^1_j\sigma^1_k\tau^i_1 + a^2_{11}\sigma^1_j\sigma^1_k\tau^i_2 + a^1_{21}\sigma^2_j\sigma^1_k\tau^i_1 + a^2_{21}\sigma^2_j\sigma^1_k\tau^i_2 + a^2_{12}\sigma^1_j\sigma^2_k\tau^i_2 + a^1_{12}\sigma^1_j\sigma^2_k\tau^i_1 + a^1_{22}\sigma^2_j\sigma^2_k\tau^i_1 + a^2_{22}\sigma^2_j\sigma^2_k\tau^i_2$.

$$35.24.\quad 1)\ V = T \otimes S^T:\ \begin{Vmatrix} a'^1_1 \\ a'^1_2 \\ a'^2_1 \\ a'^2_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sigma^1_1\tau^1_1 & \sigma^2_1\tau^1_1 & \sigma^1_1\tau^1_2 & \sigma^2_1\tau^1_2 \\ \sigma^1_2\tau^1_1 & \sigma^2_2\tau^1_1 & \sigma^1_2\tau^1_2 & \sigma^2_2\tau^1_2 \\ \sigma^1_1\tau^2_1 & \sigma^2_1\tau^2_1 & \sigma^1_1\tau^2_2 & \sigma^2_1\tau^2_2 \\ \sigma^1_2\tau^2_1 & \sigma^2_2\tau^2_1 & \sigma^1_2\tau^2_2 & \sigma^2_2\tau^2_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a^1_1 \\ a^1_2 \\ a^2_1 \\ a^2_2 \end{Vmatrix};$$

$$2)\ V = T \otimes T:\ \begin{Vmatrix} a'^{11} \\ a'^{12} \\ a'^{21} \\ a'^{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (\tau^1_1)^2 & \tau^1_1\tau^1_2 & \tau^1_2\tau^1_1 & (\tau^1_2)^2 \\ \tau^1_1\tau^2_1 & \tau^1_1\tau^2_2 & \tau^1_2\tau^2_1 & \tau^1_2\tau^2_2 \\ \tau^2_1\tau^1_1 & \tau^2_1\tau^1_2 & \tau^2_2\tau^1_1 & \tau^2_2\tau^1_2 \\ (\tau^2_1)^2 & \tau^2_1\tau^2_2 & \tau^1_2\tau^2_1 & (\tau^2_2)^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a^{11} \\ a^{12} \\ a^{21} \\ a^{22} \end{Vmatrix};$$

3) если компоненты тензора a^i_{jk} упорядочены так: a^1_{11}, a^1_{12}, a^1_{21}, a^1_{22}, a^2_{11}, a^2_{12}, a^2_{21}, a^2_{22}, то $V = T \otimes S^T \otimes S^T$. Указание: при вычислениях использовать результат соответствующего пункта задачи 35.23. 35.25. 1) $A' = S^T A S$, где $A = \|a_{ij}\|$; 2) $A' = S^{-1} A S$, где $A = \|a^i_j\|$; 3) $A' = S^{-1} A (S^{-1})^T$, где $A = \|a^{ij}\|$. 35.26. 1) Тензор типа (2, 0); 2) тензор типа (1, 1); 3) тензор типа (0, 2); если данный тензор соответ-

ствует линейному преобразованию φ, то тензор, имеющий обратную матрицу, соответствует обратному преобразованию φ^{-1}. **35.27.** k-мерные матрицы компонент имеют k-валентные тензоры. **35.28.** $a_{111} = a_{121} = a_{211} = a_{221} = 1$, $a_{112} = a_{212} = a_{122} = a_{222} = 0$. **35.29.** A_{309} при всех i. **35.30.** 1) 9 двумерных сечений третьего порядка; 2) 24; 3) 54. **35.31.** 1) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 2) Матрица $\|\theta_{kl}\|$ — сечение матрицы $\|\delta^{ij}_{kl}\|$, соответствующее фиксированным верхним индексам: $i = i_0$, $j = j_0$. **35.33.** 1) $\mathrm{f}\,(x, y, z) = a_{ijk}\xi^i\eta^j\zeta^k$; 3) $a_{ijk} = \mathrm{f}\,(e_i, e_j, e_k)$. **35.34.** Тензоры типа (0, 3). 1) $a_{ijk} = a_i b_j c_k$; 2) $a_{ijk} = a_i a_j a_k$; 3) $a_{ijk} = a_i a_j a_k + b_i b_j b_k + c_i c_j c_k$. **35.35.** Тензоры типа (0, 3). 1) $a_{123} = a_{321} = 1$, остальные компоненты нулевые; 2) $a_{111} = a_{222} = a_{333} = 1$, остальные компоненты нулевые. **35.37.** 1) В каждом из сечений переставляются две последние строки и два последних столбца; кроме того, два последних сечения меняются местами: A_{727}. 2) Все элементы матрицы меняют знак. 3) $-12A_{791}$. **35.38.** Если $e'_i = e_{m_i}$, то $a'^{ij}_{k} = a^{m_i m_j}_{m_k}$. Указание: если S — матрица перестановки, то $S^{-1} = S^T$. **35.39.** 1) $\left\|\begin{array}{rr|rr} -16 & 8 & 12 & 11 \\ -11 & 5 & 8 & 9 \end{array}\right\|$; 2) $\left\|\begin{array}{rr|rr} 7 & 9 & 12 & 16 \\ 11 & 15 & 18 & 25 \end{array}\right\|$; 3) $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right\|$; 4) $\left\|\begin{array}{rr|rr} -8 & -6 & 21 & 14 \\ -4 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right\|$

36.4. 1) а) A_{660}; б) A_{662}; в) A_{663}; 2) а) A_{664}; б) A_{665}; в) A_{666}; 3) а) A_{661}; б) A_{667}; в) A_{671}; 4) а) A_{713}; б) A_{714}; в) A_{715}. **36.5.** 1), 3) линейно зависимы; 2) линейно независимы. **36.6.** 1) 2^{p+q}; 2) базис состоит из всевозможных векторов, у которых одна компонента равна единице, остальные — нули. **36.7.** Упорядочим компоненты тензоров так: 2) $(a^1_1, a^1_2, a^2_1, a^2_2)$; 3) $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$; 4) $(a^1_{11}, a^1_{12}, a^1_{21}, a^1_{22}, a^2_{11}, a^2_{12}, a^2_{21}, a^2_{22})$, и пусть $T = S^{-1}$. Тогда матрица перехода в пространстве тензоров есть: 1) T^T; 2) $S \otimes T^T$; 3) $T^T \otimes T^T$; 4) $S \otimes T^T \otimes T^T$. **36.9.** 1) (2, 0), A_5; 2) (1, 1), A_5; 3) (1, 1), A_5^T; 4) (0, 2), A_5; 5) (0, 3), A_{656}; 6) (0, 3), A_{657}; 7) (3, 0), A_{658}; 8) (2, 1), A_{668}; 9) (3, 0), A_{659}; 10) (2, 1), A_{669}; 11) (0, 4), A_{684}; 12) (0, 4), A_{685}; 13) (1, 3), A_{648}; 14) (1, 3), A_{710}; 15) (0, 4), A_{695}; 16) (0, 4), A_{696}; 17) (2, 2), A_{716}; 18) (3, 1), A_{697}. **36.10.** 1) $a \otimes b^T = b^T \otimes a$; 2) $b \otimes a^T = a^T \otimes b$; 3) $a \otimes b$; 4) $b \otimes a$. **36.11.** 1) $a_{ij}b^{kl}$; 2) $a^{ij}b^{kl}$; $a^{ij}b^k_l$; $a_{ij}b_{kl}$; $a^i_j b_{kl}$; $a^{ij}b_{kl}$. **36.12.** 1) $\varkappa^T\mu$; 2) $\mu^T\varkappa$. Билинейные функции, определяемые формулами: 1) $\mathrm{b}\,(x, y) = \mathrm{f}\,(x)\,\mathrm{g}\,(y)$; 2) $\mathrm{b}\,(x, y) = \mathrm{g}\,(x)\,\mathrm{f}\,(y)$. **36.13.** Линейное преобразование φ пространства $\mathscr{L}_n$, определяемое формулой $\varphi\,(x) = \mathrm{f}\,(x)\,y$, имеет матрицу $\eta\varkappa$ в базисе e. **36.14.** См. ответ задачи 36.12. **36.15.** 1) Тензор типа (2, 0); 3), 5) тензоры типа (1, 1); 6) тензор типа (2, 1); 7) тензор типа (2, 0); 8) тензор типа (0, 2); выражения 2), 4) смысла не имеют. **36.16.** 1) $\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$; 3) $\begin{Vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -11 \end{Vmatrix}$; 6) A_{672}; 7) $\begin{Vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 18 \end{Vmatrix}$;

8) $\begin{Vmatrix} 52 & -18 \\ -76 & 42 \end{Vmatrix}$. **36.17.** 1) $A_{\hat{1}99}$, $A_{3\hat{1}0}$; 2) $A_{\hat{1}99}$, $A_{3\hat{1}\hat{1}}$; 3) $A_{\hat{1}99}$, $A_{3\hat{1}2}$.
36.18. 1) $a \otimes b$; 2) $a \otimes b \otimes c$, где a, b — векторы, c — ковектор с компонентами, соответственно равными (1, 1), (1, —1), (1, 2). **36.20.** 2) $(x_1 + x_2)(3y_1 + 2y_2)$. 3) Координатные строки функций f_1, g_1, f_2, g_2, соответственно равны, например, (2, 1, —3, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1). Разложение не единственно. У к а з а н и е: использовать задачу 16.31. **36.22.** 1) Значение линейной функции на векторе; 2) образ вектора при линейном преобразовании; 3) значение билинейной функции на паре одинаковых векторов. **36.23.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **36.24.** $c^i_j = a^i_k b^k_j$ (свертка). **36.25.** 1) $(6, 8, 2)^T$; 2) $(0, -1, -2)$; 3) -12. **36.26.** 6. **36.27.** 1) а) $(4, 7)^T$; б) $(8, 8)^T$; 2) а) $(3, 0)^T$; б) $(5, 3)^T$.
36.28. 1) а) $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{Vmatrix}$, г) $\begin{Vmatrix} -10 & -5 \\ 10 & 5 \end{Vmatrix}$;
д) 3; е) —5; 2) а) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}$; г) $\begin{Vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$;
д) 0; е) 1; 3) а) $\begin{Vmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 13 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$; г) $\begin{Vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6 \end{Vmatrix}$;
д) 18; е) 4. **36.30.** 1) Нет; 2) да. **36.31.** $\mathrm{f}(x, y) = \mathrm{g}(y, x)$. **36.32.** 1) A^T_{16}; 2) A^T_{16}; 3) A_{648}; 4) A_{649}. **36.33.** 1) $k!$; 2) A_{648}, A_{649}, $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right\Vert$;
$\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \end{array}\right\Vert$, $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \end{array}\right\Vert$; для тензора типа (3, 0) ответ тот же;

$$3)\ \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 11 & 21 & 4 & 14 & 24 & 7 & 17 & 27 \\ 2 & 12 & 22 & 5 & 15 & 25 & 8 & 18 & 28 \\ 3 & 13 & 23 & 6 & 16 & 26 & 9 & 19 & 29 \end{array}\right\Vert, \quad \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \end{array}\right\Vert;$$

$$4)\ \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 13 & 14 \\ \hline 3 & 4 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 15 & 16 \end{array}\right\Vert, \quad \left\Vert\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 9 & 13 & 11 & 15 \\ \hline 2 & 6 & 4 & 8 \\ 10 & 14 & 12 & 16 \end{array}\right\Vert.$$

36.34. $c^{ij}_{kl} = d^{jl}_{ik}$.

36.35. 1) $\begin{Vmatrix} x^1y^1 & x^1y^2 \\ x^2y^1 & x^2y^2 \end{Vmatrix}$; 2) $\begin{Vmatrix} x^1y^1 & \frac{1}{2}(x^1y^2 + x^2y^1) \\ \frac{1}{2}(x^2y^1 + x^1y^2) & x^2y^2 \end{Vmatrix}$;

3) $\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(x^1y^2 - x^2y^1) \\ \frac{1}{2}(x^2y^1 - x^1y^2) & 0 \end{Vmatrix}$; 4) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} x^1a_{11} & x^1a_{21} & x^1a_{12} & x^1a_{22} \\ x^2a_{11} & x^2a_{21} & x^2a_{12} & x^2a_{22} \end{array}\right\Vert$;
5) $(x^1a_{11} + x^2a_{21},\ x^1a_{12} + x^2a_{22})$; 6) $((a^1_1 + a^2_2)\,x^1,\ (a^1_1 + a^2_2)\,x^2)$;
7) $\left(x^1a^1_1 + \frac{1}{2}(x^1a^2_2 + x^2a^1_2),\ x^2a^2_2 + \frac{1}{2}(x^2a^1_1 + x^1a^2_1)\right)$; 8) $\frac{1}{2}(x^1a^2_2 - x^2a^1_2,\ x^2a^1_1 - x^1a^2_1)$; 9) $(a^1_1 + a^2_2)^2$; 10) $a^1_1a^2_2 - a^1_2a^2_1$; 11) $(a^1_1)^2 + (a^2_2)^2 +$

$+ a_1^1 a_2^2 + a_2^1 a_1^2$; 12) $\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{Vmatrix}$; 13) $\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{Vmatrix}$; 14) $a_1^1 + a_2^2$;

15) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} a_1^1 & 0 & 0 & a_1^1 \\ a_1^2 & 0 & 0 & a_1^2 \\ \hline a_2^1 & 0 & 0 & a_2^1 \\ a_2^2 & 0 & 0 & a_2^2 \end{array}\right\Vert$; 16) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} a_1^1 & a_1^2 & a_2^1 & a_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^1 & a_1^2 & a_2^1 & a_2^2 \end{array}\right\Vert$. **36.36.** 1) а) $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$; 2) а) $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; 3) а) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 4) а) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 1 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ -1 & -3/2 & 0 \end{Vmatrix}$. **36.37.** 1) а) A_{676}; б) A_{650}; в) A_{677}; г) A_{678}; 2) а) A_{679}; б) A_{680}; в) A_{681}; г) A_{682}; 3) а) A_{683}; б) A_{720}; в) A_{729}; г) A_{730}. **36.38.** 1) а) A_{698}; б) A_{609}; в) A_{700}; 2) а) A_{701}; б) A_{702}; в) A_{703}. **36.39.** 1) а) A_{675}; б) O; в) A_{675}; 2) а) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 0 & 2 \\ 1/2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right\Vert$; б) A_{674}; в) $\left\Vert\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$; 3) а) A_{722}; б) O; в) A_{725}. **36.40.** 1) а) A_{704}; б) A_{705}; в) A_{706}; 2) а) A_{707}; б) A_{708}; в) A_{709}. **36.41.** 1) а) A_{731}; б) A_{733}; 2) а) A_{723}; б) A_{734}. **36.42.** 1) Антисимметричен по трем индексам; 2), 3) антисимметричен по первому и третьему индексам; 4) симметричен по первому и третьему индексам; 5) антисимметричен по первому и второму индексам. **36.43.** 1) а) 6; б) 1; в) 0; 2) а) 11; б) 27; в) 1. **36.45.** 0. **36.49.** 1) n; 2) δ_m^i; 3) $(n^3 - 3n^2 + 2n)/6$; 4) $(n^3 + 3n^2 + 2n)/6$; 5) na_k^k.

36.53. 1) $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$; 2) $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert$.

36.55. 1) $A_{59} + A_{20}$; 2) $E + A_{20}$; 3) $A_{253} + A_{242}$. **36.56.** 1) $2\delta^i_{[k}\delta^j_{l]}$; 2) $k!\delta^{i_1}_{[j_1} \dots \delta^{i_k}_{j_k]}$. **36.57.** 3) $\varphi(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1 + \xi^2)^2 + (\sqrt{2}\xi^2)^2$. Представление не единственно. **37.1.** 2) а) $\begin{Vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{Vmatrix}$; б) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\begin{Vmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 \end{Vmatrix}$. **37.2.** Указание: если S — матрица перехода от некоторого ортонормированного базиса к данному базису $\boldsymbol{e}$, то матрица Грама базиса $\boldsymbol{e}$ равна S^TS; можно использовать также задачу 35.21. **37.4.** δ_j^i, g^{ij}. **37.5.** g_{ij}, g^{ij}.

37.7. 1) $g^{lj}g_{ik}a_j^l$; 2) $a^i_{[j}g_{k]i} = 0$. **37.8.** 1) а) $\begin{Vmatrix} 60 & -34 \\ -37 & 21 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 60 & -37 \\ -34 & 21 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} 402 & -248 \\ -248 & 153 \end{Vmatrix}$; 2) а) $\begin{Vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 19 & 7 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} -56 & 22 \\ 23 & -9 \end{Vmatrix}$; 3) а) $\begin{Vmatrix} 4 & 7 & 13 \\ 4 & 7 & 17 \\ 11 & 19 & 25 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 6 & 9 & 19 \\ 13 & 17 & 25 \end{Vmatrix}$; в) $\begin{Vmatrix} 14 & 17 & 51 \\ 8 & 9 & 71 \\ 53 & 67 & 37 \end{Vmatrix}$. **37.9.** 1) Нет;

2) да. 37.10. 1) а) $\begin{Vmatrix} 10 & -4 \\ -23 & 1 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 42 & 16 \\ -113 & -45 \end{Vmatrix}$; 2) а) $\begin{Vmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 10 & 17 & 24 \\ 1 & -1 & -3 \end{Vmatrix}$;
б) $\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -16 & 33 & 18 \\ 43 & -21 & -9 \end{Vmatrix}$. 37.11. 1) а) A_{683}; б) A_{647}; в) A_{647}; г) A_{686}; 2) а) A_{687}; б) A_{688}; в) A_{684}; г) A_{685}; 3) а) A_{735}; б) A_{736}; в) A_{732}; г) A_{737}. 37.12. 1) а) A_{718}; б) A_{719}; 2) а) A_{711}; б) A_{712}. 37.13. 1) $2a_{(ls)}$; 2) a^l_l; 3) a^s_l. 37.14. $a_{lmk}=g_{li}g_{mj}a^{ij}_{\cdot\cdot k}$. 37.16. Вектор y получается из x поворотом на $\pi/2$ в направлении, противоположном направлению кратчайшего поворота от e_1 к e_2, если e_1, e_2 — правый базис. Указание: вычислить компоненты вектора y в правом ортонормированном базисе. 37.17. Указание: найти компоненты z в правом ортонормированном базисе. 38.1. $\pm\begin{Vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{Vmatrix}$ (знак $+$ для правого базиса). 38.3. 1) A_{429}; 2) A_{431}; 3) A_{439}. 38.4. 1) (21, —21, 42); 2) (—1, 0, 2); 3) (—2, —2, —2, 0, 0, 0); 4) (0, 0, 3, 0, 3, 0). 38.5. 1) 0; 2) 2/3; 3) 26; 4) (—23, —32, 8, 107/3); 5) (0, 0, 1/6, 1/6); 6) (—2, —2, —3, 0, 3, 3, 0, 4, 4, 0). 38.6. 1) 3; 2) 0; 3) —3; 4) (—2, 11, 15, —5); 5) (—1, —1, 1, 1). 38.9. $(p!)^{-1}\det\|f^i(x_j)\|$. 38.10. 1) —8; 2) 3. 38.14. Матрица, составленная из миноров второго порядка матрицы S. 38.18. 1), 2) нет; 3) да. 38.19. 1), 3) да; 2), 4) нет. 38.21. Векторы $l^{i_1\ldots i_{p-1}}=u^{i_1\ldots i_{p-1}k}e_k$ лежат в подпространстве, порожденном разложимым p-вектором u. 38.22. Нет. 38.23. 1) Линейная оболочка векторов $(1,\ 0,\ -1,\ -2)^T$, $(0,\ 1,\ 2,\ 3)^T$. 3) Линейная оболочка векторов $(-1,\ 1,\ -4,\ 0)^T$, $(-1,\ 0,\ -2,\ 1)^T$. 2), 4) $\{o\}$. 38.25. 1), 2) $\frac{1}{2}$ (2, 1, 3, 2, 4, —1); 3) $\frac{1}{2}$ (9, 5, 1, 4, —1, —1). 38.26. 1) $(0,\ -10,\ -1,\ -3)^T+\alpha\xi$, 2) $(0,\ 4,\ 2,\ 6)^T+\alpha\xi$ (α — произвольное число). 38.27. 1) $\frac{4}{3}$ (1, 1, —1, —1); $\xi^1-\xi^2-\xi^3+\xi^4=0$. 2) $\frac{1}{3}$ (13, 8, 3, 5); $5\xi^1-3\xi^2+8\xi^3-13\xi^4=0$.
38.29. 1), 4) не существует; 2) $g^2=\frac{1}{2}f^1+\alpha f^2$, 3) $g^2=-2f^1+\alpha f^2$ (α — произвольное число). 38.31. 1) $f^1\wedge f^2$, где $f^1=2g^1+6g^3$, $f^2=g^2-2g^3$; 2) $f^1\wedge f^2+f^3\wedge f^4$, где $f^1=2g^1+2g^2$, $f^2=g^2+g^3+g^4$, $f^3=2g^3$, $f^4=g^4$; 3) $f^1\wedge f^2+f^3\wedge f^4$, где $f^1=2g^1-2g^3$, $f^2=g^2$, $f^3=2g^3$, $f^4=g^4$; 4) $f^1\wedge f^2$, где $f^1=2g^1+2g^3-6g^4$, $f^2=g^2+g^3+2g^4$ (g^1, g^2, g^3, g^4 — базис, биортогональный исходному базису в $\mathscr{L}_4$).

Столбцы

1. $\begin{Vmatrix} -3 \end{Vmatrix}$. 2. $\begin{Vmatrix} 6 \end{Vmatrix}$. 3. $\begin{Vmatrix} -9 \end{Vmatrix}$. 4. $\begin{Vmatrix} 1-2i \end{Vmatrix}$. 5. $\begin{Vmatrix} 7+i \end{Vmatrix}$. 6. $\begin{Vmatrix} 6-7i \end{Vmatrix}$.

7. $\begin{Vmatrix} 4 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 8. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 9. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 8 \end{Vmatrix}$. 10. $\begin{Vmatrix} -4 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 11. $\begin{Vmatrix} 40 \\ 85 \end{Vmatrix}$. 12. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

13. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 14. $\begin{Vmatrix} 7 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 15. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 16. $\begin{Vmatrix} 17 \\ -9 \end{Vmatrix}$. 17. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 18. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

19. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -4 \end{Vmatrix}$. 20. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 21. $\begin{Vmatrix} 10 \\ -6 \end{Vmatrix}$. 22. $\begin{Vmatrix} 14 \\ -9 \end{Vmatrix}$. 23. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

24. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 25. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 26. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2i \end{Vmatrix}$. 27. $\begin{Vmatrix} -3+2i \\ -i \end{Vmatrix}$. 28. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 6 \end{Vmatrix}$.

29. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 30. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 31. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 32. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 33. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 34. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

35. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 36. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 37. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 38. $\begin{Vmatrix} 5+8i \\ -5+2i \end{Vmatrix}$. 39. $\begin{Vmatrix} 3+i \\ 7-6i \end{Vmatrix}$.

40. $\begin{Vmatrix} 1+i \\ 3 \end{Vmatrix}$. 41. $\begin{Vmatrix} 1+2i \\ 6+2i \end{Vmatrix}$. 42. $\begin{Vmatrix} 3-i \\ 3-6i \end{Vmatrix}$. 43. $\begin{Vmatrix} 1-i \\ -2-2i \end{Vmatrix}$. 44. $\begin{Vmatrix} i \\ 2 \end{Vmatrix}$.

45. $\begin{Vmatrix} 2+3i \\ -3i \end{Vmatrix}$. 46. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -4 \end{Vmatrix}$. 47. $\begin{Vmatrix} 1+i \\ 1+3i \end{Vmatrix}$. 48. $\begin{Vmatrix} -4+2i \\ -3+7i \end{Vmatrix}$.

49. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{Vmatrix}$. 50. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 51. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 52. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 53. $\begin{Vmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 54. $\begin{Vmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

55. $\begin{Vmatrix} -4 \\ 10 \\ 9 \end{Vmatrix}$. 56. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 57. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 58. $\begin{Vmatrix} 20 \\ -5 \\ 65 \end{Vmatrix}$. 59. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{Vmatrix}$. 60. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{Vmatrix}$.

61. $\begin{Vmatrix} 8 \\ -3 \\ -9 \end{Vmatrix}$. 62. $\begin{Vmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 63. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 64. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 65. $\begin{Vmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{Vmatrix}$. 66. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

67. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 68. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 69. $\begin{Vmatrix} -26 \\ -11 \\ -67 \end{Vmatrix}$. 70. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 71. $\begin{Vmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 72. $\begin{Vmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

73. $\begin{Vmatrix} -9 \\ 7 \\ 17 \end{Vmatrix}$. 74. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 71 \\ 41 \end{Vmatrix}$. 75. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 76. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 77. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

78. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{Vmatrix}$. 79. $\begin{Vmatrix} 20 \\ -2 \\ 42 \end{Vmatrix}$. 80. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 6 \\ 11 \end{Vmatrix}$. 81. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 82. $\begin{Vmatrix} -5 \\ 7 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 83. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

84. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 85. $\begin{Vmatrix} 7 \\ -2 \\ \lambda \end{Vmatrix}$. 86. $\begin{Vmatrix} \lambda \\ 5 \\ 7 \end{Vmatrix}$. 87. $\begin{Vmatrix} 2 \\ \lambda \\ 5 \end{Vmatrix}$. 88. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 6 \\ \lambda \end{Vmatrix}$. 89. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

90. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 91. $\begin{Vmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{Vmatrix}$. 92. $\begin{Vmatrix} 15 \\ 15 \\ -3 \end{Vmatrix}$. 93. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 94. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 95. $\begin{Vmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{Vmatrix}$.

96. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 97. $\begin{Vmatrix} 23 \\ -18 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 98. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 99. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 100. $\begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$.

101. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 102. $\begin{Vmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 103. $\begin{Vmatrix} \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{4} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} \end{Vmatrix}$. 104. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

105. $\begin{Vmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 106. $\begin{Vmatrix} 14 \\ -9 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 107. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 108. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 109. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

110. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 111. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 112. $\begin{Vmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 113. $\begin{Vmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 114. $\begin{Vmatrix} 20 \\ 1 \\ -12 \end{Vmatrix}$.

115. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{Vmatrix}$. 116. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 117. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 118. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -4 \\ 15 \end{Vmatrix}$. 119. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

120. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{Vmatrix}$. 121. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 122. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 123. $\begin{Vmatrix} 12 \\ 12 \\ -8 \end{Vmatrix}$. 124. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 6 \\ -15 \end{Vmatrix}$.

125. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{Vmatrix}$. 126. $\begin{Vmatrix} 1 - i \\ 2 + i \\ 3 \end{Vmatrix}$. 127. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 + 2i \\ 3 - i \end{Vmatrix}$. 128. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 + i \\ 1 \end{Vmatrix}$.

129. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 + i \\ 1 \end{Vmatrix}$. 130. $\begin{Vmatrix} -2 + i \\ 1 + i \\ 1 \end{Vmatrix}$. 131. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -i \\ 1 + i \end{Vmatrix}$. 132. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3i \end{Vmatrix}$.

133. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2i \\ -2 + i \end{Vmatrix}$. 134. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ i \end{Vmatrix}$. 135. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 + i \\ -i \end{Vmatrix}$. 136. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 5 + i \\ -3i \end{Vmatrix}$.

137. $\begin{Vmatrix} 7i \\ -7 - 2i \\ -1 + 7i \end{Vmatrix}$. 138. $\begin{Vmatrix} 7 \\ 0 \\ 12 \end{Vmatrix}$. 139. $\begin{Vmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 140. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{Vmatrix}$. 141. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

142. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 143. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 144. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 145. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 146. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

147. $\begin{Vmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 148. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3+i \end{Vmatrix}$. 149. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3+2i \end{Vmatrix}$. 150. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 3-4i \end{Vmatrix}$.

151. $\begin{Vmatrix} 2-i \\ -4+2i \\ 1+2i \end{Vmatrix}$. 152. $\begin{Vmatrix} 3i \\ -6i \\ -3 \end{Vmatrix}$. 153. $\begin{Vmatrix} -i \\ -1 \\ -3i \end{Vmatrix}$. 154. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{Vmatrix}$.

155. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 156. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 157. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 1 \\ 10 \\ -7 \end{Vmatrix}$. 158. $\begin{Vmatrix} 9 \\ 19 \\ 18 \\ 13 \end{Vmatrix}$. 159. $\begin{Vmatrix} 8 \\ 3 \\ -11 \\ -9 \end{Vmatrix}$.

160. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 161. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 162. $\begin{Vmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 163. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 164. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 165. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$.

166. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 167. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 168. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 169. $\begin{Vmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 28 \end{Vmatrix}$. 170. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 8 \\ 17 \\ 14 \end{Vmatrix}$.

171. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 172. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 173. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 174. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 175. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

176. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 177. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 178. $\begin{Vmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \\ -5 \end{Vmatrix}$. 179. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 180. $\begin{Vmatrix} 5 \\ -7 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix}$.

181. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 17 \\ 19 \\ 23 \end{Vmatrix}$. 182. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 183. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 184. $\begin{Vmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 185. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

186. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 187. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 188. $\begin{Vmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 189. $\begin{Vmatrix} -25 \\ 6 \\ 35 \\ 8 \end{Vmatrix}$. 190. $\begin{Vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

191. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 192. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 193. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 194. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 195. $\begin{Vmatrix} 10 \\ 0 \\ -7 \\ 6 \end{Vmatrix}$.

196. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 197. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 198. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 199. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 200. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{Vmatrix}$.

201. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 202. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 203. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 204. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 205. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 206. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

207. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 208. $\begin{Vmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \\ 8 \end{Vmatrix}$. 209. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \\ 9 \end{Vmatrix}$. 210. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 5 \end{Vmatrix}$. 211. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{Vmatrix}$.

212. $\begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{Vmatrix}$. 213. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 17 \\ -5 \\ 18 \end{Vmatrix}$. 214. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 4+i \\ 5-i \\ -2-i \end{Vmatrix}$. 215. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1-i \end{Vmatrix}$.

216. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4-i \end{Vmatrix}$. 217. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{Vmatrix}$. 218. $\begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 219. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{Vmatrix}$. 220. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3-i \end{Vmatrix}$.

221. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3-i \end{Vmatrix}$. 222. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5-2i \end{Vmatrix}$. 223. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 2+i \\ 0 \\ 6+i \end{Vmatrix}$. 224. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

225. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 226. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 227. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 228. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 229. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

230. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 231. $\begin{Vmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 232. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 233. $\begin{Vmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 234. $\begin{Vmatrix} 10 \\ 84 \\ 6 \\ 27 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 235. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

236. $\begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 237. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{Vmatrix}$. 238. $\begin{Vmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \\ -12 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 239. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{Vmatrix}$. 240. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{Vmatrix}$.

241. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 242. $\begin{Vmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 243. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 244. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 10 \\ -10 \\ -14 \\ 30 \end{Vmatrix}$. 245. $\begin{Vmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \\ -59 \\ 9 \end{Vmatrix}$.

246. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 247. $\begin{Vmatrix} 30000 \\ 3000 \\ 100 \\ 40 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 248. $\begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 249. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 250. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

251. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 252. $\begin{Vmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -17 \end{Vmatrix}$. 253. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 254. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 255. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

256. $\begin{Vmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 257. $\begin{Vmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 258. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 259. $\begin{Vmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 260. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$.

261. $\begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$. 262. $\begin{Vmatrix} 40000 \\ -11000 \\ 1100 \\ -50 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 263. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 264. $\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 265. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

266. $\begin{Vmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 267. $\begin{Vmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \end{Vmatrix}$. 268. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 269. $\begin{Vmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 270. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

271. $\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 272. $\begin{Vmatrix} 10000 \\ 7000 \\ -800 \\ 30 \\ 0 \end{Vmatrix}$. 273. $\begin{Vmatrix} -3-i \\ 6+4i \\ 4-3i \end{Vmatrix}$. 274. $\begin{Vmatrix} i \\ 1+i \\ -3+2i \\ 0 \end{Vmatrix}$.

275. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 3+i \\ 4-i \\ -3 \end{Vmatrix}$. 276. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 7+2i \\ 9-2i \\ -5-i \end{Vmatrix}$. 277. $\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 278. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{Vmatrix}$.

279. $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. 280. $\begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$. 281. $\begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$. 282. $\begin{Vmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu^{n-1} \end{Vmatrix}$.

Матрицы

1. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \end{Vmatrix}$ 2. $\begin{Vmatrix} -12 & 13 \end{Vmatrix}$ 3. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ 4. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.
5. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. 6. $\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{Vmatrix}$. 7. $\begin{Vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{Vmatrix}$. 8. $\begin{Vmatrix} 13\,547 & 13\,647 \\ 28\,423 & 28\,523 \end{Vmatrix}$.

9. $\begin{Vmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$. 10. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 11. $\begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 12. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 13. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

14. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 15. $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 16. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 17. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$.

18. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$. 19. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$. 20. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 21. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 22. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

23. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$. 24. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$. 25. $\begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$. 26. $\begin{Vmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{Vmatrix}$.

27. $\begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{Vmatrix}$. 28. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$. 29. $\begin{Vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 3 \end{Vmatrix}$. 30. $\begin{Vmatrix} 25 & 60 \\ 60 & 144 \end{Vmatrix}$.

31. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$. 32. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{Vmatrix}$. 33. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$. 34. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

35. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}$. 36. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}$. 37. $\begin{Vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{Vmatrix}$. 38. $\begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{Vmatrix}$.

39. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{Vmatrix}$. 40. $\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$. 41. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 12 & -3 \end{Vmatrix}$. 42. $\begin{Vmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}$.

43. $\begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 44. $\begin{Vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$. 45. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$. 46. $\begin{Vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

47. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{Vmatrix}$. 48. $\begin{Vmatrix} 4/3 & -1 \\ -1 & 3/4 \end{Vmatrix}$. 49. $\begin{Vmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{Vmatrix}$. 50. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

51. $\begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}$. 52. $\begin{Vmatrix} 11 & -2 \\ 18 & -1 \end{Vmatrix}$. 53. $\begin{Vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{Vmatrix}$.

54. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{Vmatrix}$. 55. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$. 56. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 57. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{Vmatrix}$.

58. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix}$. 59. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}$. 60. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$.

61. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}$. 62. $\begin{Vmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{Vmatrix}$. 63. $\begin{Vmatrix} -3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{Vmatrix}$.

64. $\begin{Vmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{Vmatrix}$. 65. $\begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 66. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 67. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

68. $\begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 69. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$. 70. $\begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{Vmatrix}$. 71. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

72. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$. 73. $\begin{Vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 74. $\begin{Vmatrix} 7 & 4 \\ -8 & -1 \end{Vmatrix}$. 75. $\begin{Vmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 10 \end{Vmatrix}$.

76. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{Vmatrix}$. 77. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$. 78. $\begin{Vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{Vmatrix}$.

79. $\begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & 0 \end{Vmatrix}$. 80. $\begin{Vmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{Vmatrix}$. 81. $\begin{Vmatrix} 1+i\sqrt{2} & 3 \\ 1 & 1-i\sqrt{2} \end{Vmatrix}$.

82. $\begin{Vmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{Vmatrix}$. 83. $\begin{Vmatrix} 1 & 2-i \\ i & 1+2i \end{Vmatrix}$. 84. $\begin{Vmatrix} 1-i\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 1+i\sqrt{2} \end{Vmatrix}$.

85. $\begin{Vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{Vmatrix}$. 86. $\begin{Vmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}$. 87. $\begin{Vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{Vmatrix}$. 88. $\begin{Vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{Vmatrix}$.

89. $\begin{Vmatrix} 1 & -i \\ 2+i & 1-2i \end{Vmatrix}$. 90. $\begin{Vmatrix} 1+i & 1+3i \\ 1-2i & 1+2i \end{Vmatrix}$. 91. $\begin{Vmatrix} 1-i & 2+i \\ 6-4i & 9+7i \end{Vmatrix}$.

92. $\begin{Vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{Vmatrix}$. 93. $\begin{Vmatrix} i-1 & i+1 \\ i+1 & i-1 \end{Vmatrix}$. 94. $\begin{Vmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}$. 95. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2i \end{Vmatrix}$.

96. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{Vmatrix}$. 97. $\begin{Vmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{Vmatrix}$. 98. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{Vmatrix}$. 99. $\begin{Vmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{Vmatrix}$.

100. $\begin{Vmatrix} 1 & 2i \\ i & -1 \end{Vmatrix}$. 101. $\begin{Vmatrix} 2 & 5i \\ 4i & -5 \end{Vmatrix}$. 102. $\begin{Vmatrix} 1+i & -i \\ -i & 1-i \end{Vmatrix}$. 103. $\begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}$.

104. $\begin{Vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$. 105. $\begin{Vmatrix} 5 & -12 \\ 12 & -5 \end{Vmatrix}$. 106. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 107. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

110. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 111. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$. 112. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 113. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

114. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix}$. 115. $\begin{Vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 116. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$. 117. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$.

118. $\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$. 119. $\begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix}$. 120. $\begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 121. $\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

122. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 123. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 124. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{Vmatrix}$. 125. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

126. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{Vmatrix}$. 127. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{Vmatrix}$. 128. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{Vmatrix}$. 129. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

130. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 131. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 132. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 133. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix}$.

134. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix}$. 135. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 136. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 137. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

138. $\begin{Vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 139. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 140. $\begin{Vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$. 141. $\begin{Vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

142. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 143. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 144. $\begin{Vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 145. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$.

146. $\begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 147. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{Vmatrix}$. 148. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. 149. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

150. $\left\|\begin{matrix}1 & 2\\ -2 & -3\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 151. $\left\|\begin{matrix}11 & 5\\ -2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 152. $\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -4 & 5\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 153. $\left\|\begin{matrix}12 & 1\\ 18 & 0\\ 0 & -15\\ 0 & 18\end{matrix}\right\|.$

154. $\left\|\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ -2 & -3\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 155. $\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 3\\ 0 & 4\end{matrix}\right\|.$ 156. $\left\|\begin{matrix}24 & -1\\ 16 & 0\\ 0 & -22\\ 0 & 16\end{matrix}\right\|.$ 157. $\left\|\begin{matrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$

158. $\left\|\begin{matrix}-3 & 1\\ -4 & 2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 159. $\left\|\begin{matrix}-3 & 0\\ 1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 160. $\left\|\begin{matrix}12 & 20\\ -6 & -10\\ 20 & 36\\ -10 & -18\end{matrix}\right\|.$

161. $\left\|\begin{matrix}12 & 20\\ 20 & 36\\ -6 & -10\\ -10 & -18\end{matrix}\right\|.$ 162. $\left\|\begin{matrix}-1 & -2\\ 1 & 2\\ -3 & -4\\ 3 & 4\end{matrix}\right\|.$ 163. $\left\|\begin{matrix}-1 & -2\\ -3 & -4\\ 1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right\|.$ 164. $\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|.$

165. $\left\|\begin{matrix}-5 & 1\\ -2 & -1\\ 2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 166. $\left\|\begin{matrix}7 & 11\\ 7 & 10\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ 17 & 28\end{matrix}\right\|.$ 167. $\left\|\begin{matrix}-1 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 168. $\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}\right\|.$

169. $\left\|\begin{matrix}1 & 6\\ -1 & -7\\ -1 & 12\\ 1 & 0\\ 0 & 5\end{matrix}\right\|.$ 170. $\left\|\begin{matrix}-2 & 5\\ -2 & -1\\ 2 & -2\\ 3 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}\right\|.$ 171. $\left\|\begin{matrix}8 & 5\\ -2 & -3\\ 24 & 17\\ 16 & 11\\ -10 & -13\end{matrix}\right\|.$

172. $\left\|\begin{matrix}3 & 2\\ 1 & -4\\ 7 & 10\\ 5 & 6\\ 3 & -16\end{matrix}\right\|.$ 173. $\left\|\begin{matrix}0 & 10\\ -5 & 0\\ 1 & -7\\ 7 & 6\end{matrix}\right\|.$ 197. $\left\|\begin{matrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 2\end{matrix}\right\|.$

198. $\left\|\begin{matrix}-2 & 8 & 6\\ -4 & 10 & 6\\ 4 & -8 & -4\end{matrix}\right\|.$ 199. $\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$ 200. $\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$

201. $\left\|\begin{matrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{matrix}\right\|.$ 202. $\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{matrix}\right\|.$ 203. $\left\|\begin{matrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{matrix}\right\|.$

204. $\left\|\begin{matrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{matrix}\right\|.$ 205. $\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{matrix}\right\|.$ 206. $\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 1\\ -5 & 21 & 17\\ 6 & -26 & -21\end{matrix}\right\|.$

207. $\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{matrix}\right\|.$ 208. $\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -3\\ 1 & 3 & 5\end{matrix}\right\|.$ 209. $\left\|\begin{matrix}1 & -3 & -1\\ -2 & 7 & 2\\ 3 & 2 & -4\end{matrix}\right\|.$

210. $\begin{Vmatrix}0 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\end{Vmatrix}$. 211. $\begin{Vmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 4\\ -2 & -3 & -1\end{Vmatrix}$. 212. $\begin{Vmatrix}4 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 4 & -4 & -1\end{Vmatrix}$.

213. $\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{Vmatrix}$. 214. $\begin{Vmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{Vmatrix}$. 215. $\begin{Vmatrix}0 & 6 & 1\\ 6 & 3 & -3\\ 1 & -3 & -3\end{Vmatrix}$.

216. $\begin{Vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 7 & -2\end{Vmatrix}$. 217. $\begin{Vmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{Vmatrix}$. 218. $\begin{Vmatrix}4 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 3\end{Vmatrix}$.

219. $\begin{Vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 8\\ 3 & 2 & 1\end{Vmatrix}$. 220. $\begin{Vmatrix}1 & 5 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ -2 & -7 & -3\end{Vmatrix}$. 221. $\begin{Vmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ 4 & 4 & -1\end{Vmatrix}$.

222. $\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -3 & -3 & -3\end{Vmatrix}$. 223. $\begin{Vmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 7 & -6\\ 5 & 8 & 1\end{Vmatrix}$. 224. $\begin{Vmatrix}-2 & 4 & -3\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & 4 & 2\end{Vmatrix}$.

225. $\begin{Vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{Vmatrix}$. 226. $\begin{Vmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 4\\ 5 & 7 & 7\end{Vmatrix}$. 227. $\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 4\end{Vmatrix}$.

228. $\begin{Vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8\end{Vmatrix}$. 229. $\begin{Vmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{Vmatrix}$. 230. $\begin{Vmatrix}-1 & 4 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -4 & -2\end{Vmatrix}$.

231. $\begin{Vmatrix}8 & -12 & 0\\ 6 & -9 & 0\\ 2 & -3 & 0\end{Vmatrix}$. 232. $\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}$. 233. $\begin{Vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{Vmatrix}$.

234. $\begin{Vmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{Vmatrix}$. 235. $\begin{Vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & -2 & -3\end{Vmatrix}$. 236. $\begin{Vmatrix}-2 & 5 & 3\\ -2 & 5 & 3\\ 2 & -5 & -3\end{Vmatrix}$.

237. $\begin{Vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{Vmatrix}$. 238. $\begin{Vmatrix}-3 & 10 & -10\\ -7 & 4 & -4\\ -2 & -3 & 3\end{Vmatrix}$. 239. $\begin{Vmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{Vmatrix}$.

240. $\begin{Vmatrix}-5 & 4 & -2\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & -2 & -2\end{Vmatrix}$. 241. $\begin{Vmatrix}6 & -1 & 1\\ 5 & -5 & 5\\ 4 & -9 & 9\end{Vmatrix}$. 242. $\begin{Vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{Vmatrix}$.

243. $\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}$. 244. $\begin{Vmatrix}4 & -4 & 1\\ 1 & 5 & -3\\ -3 & -2 & 2\end{Vmatrix}$. 245. $\begin{Vmatrix}21 & -10 & -4\\ -10 & 5 & 2\\ -4 & 2 & 1\end{Vmatrix}$.

246. $\begin{Vmatrix}2 & -6 & -5\\ 2 & -6 & -5\\ -2 & 6 & 5\end{Vmatrix}$. 247. $\begin{Vmatrix}2 & -5 & -4\\ -3 & 16 & 12\\ 4 & -20 & -15\end{Vmatrix}$. 248. $\begin{Vmatrix}16 & 0 & 32\\ -4 & 0 & -8\\ -8 & 0 & -16\end{Vmatrix}$.

249. $\begin{Vmatrix}-3 & 1 & -2\\ 6 & -2 & 4\\ -15 & 5 & -10\end{Vmatrix}$. 250. $\begin{Vmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{Vmatrix}$. 251. $\begin{Vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 4\\ 1 & -4 & 0\end{Vmatrix}$.

252. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. 253. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 254. $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{Vmatrix}$.

255. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{Vmatrix}$. 256. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{Vmatrix}$. 257. $\begin{Vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{Vmatrix}$.

258. $\begin{Vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 4 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$. 259. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 260. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 261. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

262. $\begin{Vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$. 263. $\begin{Vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. 264. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

265. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{Vmatrix}$. 266. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \end{Vmatrix}$. 267. $\begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

268. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 269. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 270. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

271. $\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$. 272. $\begin{Vmatrix} -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$. 273. $\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -10 & -18 & -20 \\ 9 & 13 & 15 \end{Vmatrix}$.

274. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$. 275. $\begin{Vmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 5 & -3 & 19 \\ -1 & -4 & 3 \end{Vmatrix}$. 276. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

277. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \end{Vmatrix}$. 278. $\begin{Vmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -6 & 2 & -12 \\ 8 & -3 & 16 \end{Vmatrix}$. 279. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -5 & -6 \end{Vmatrix}$.

280. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. 281. $\begin{Vmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 9 \end{Vmatrix}$. 282. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

283. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{Vmatrix}$. 284. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 285. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

286. $\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ -3 & -5 & -3 \end{Vmatrix}$. 287. $\begin{Vmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{Vmatrix}$. 288. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$.

289. $\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$. 290. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$. 291. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

292. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$. 293. $\begin{Vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{Vmatrix}$. 294. $\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

295. $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{Vmatrix}$. 296. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{Vmatrix}$. 297. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

298. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. 299. $\begin{Vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{Vmatrix}$. 300. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

301. $\begin{Vmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & 11 & 4 \end{Vmatrix}$. 302. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 303. $\begin{Vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{Vmatrix}$.

304. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 305. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{Vmatrix}$. 306. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$.

307. $\begin{Vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$. 308. $\begin{Vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$. 309. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

310. $\begin{Vmatrix} -210 & 105 & 42 \\ 100 & -50 & -20 \\ 40 & -20 & -8 \end{Vmatrix}$. 311. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

312. $\begin{Vmatrix} 42 & 105 & -42 \\ -20 & -50 & 20 \\ -8 & -20 & -8 \end{Vmatrix}$. 313. $\begin{Vmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) \\ 1/3 & 0 & 4/(3\sqrt{2}) \\ -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) \end{Vmatrix}$.

314. $\begin{Vmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \end{Vmatrix}$. 315. $\begin{Vmatrix} -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$.

316. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$. 317. $\begin{Vmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 3/5 & -4/\sqrt{50} & 4/\sqrt{50} \\ 4/5 & 3/\sqrt{50} & -3/\sqrt{50} \end{Vmatrix}$.

318. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$. 319. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$.

320. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{Vmatrix}$. 321. $\begin{Vmatrix} -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{6} & -2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$.

322. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{Vmatrix}$. 323. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \end{Vmatrix}$.

324. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{20} & 3/2 & -1/\sqrt{5} \\ -\sqrt{3/20} & 1/2 & \sqrt{3/5} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{Vmatrix}$. 325. $\begin{Vmatrix} 9/(7\sqrt{10}) & 1/\sqrt{10} & 6/7 \\ 3/(7\sqrt{10}) & -3/\sqrt{10} & 2/7 \\ 2\sqrt{10}/7 & 0 & -3/7 \end{Vmatrix}$.

326. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 4/\sqrt{18} & 0 & -1/3 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{2} & 2/3 \end{Vmatrix}$. 327. $\begin{Vmatrix} 2/\sqrt{14} & -7/\sqrt{75} & -8/(5\sqrt{42}) \\ 1/\sqrt{14} & -1/\sqrt{75} & 31/(5\sqrt{42}) \\ -3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{42} \end{Vmatrix}$.

328. $\begin{Vmatrix} 2/\sqrt{14} & -1/\sqrt{5} & 6/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} \\ -3/\sqrt{14} & 0 & 5/\sqrt{70} \end{Vmatrix}$. 329. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$.

330. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/(3-\sqrt{3}) & 1/(3+\sqrt{3}) & -1/\sqrt{3} \\ 1/(3+\sqrt{3}) & 1/(3-\sqrt{3}) & 1/\sqrt{3} \end{Vmatrix}$. 331. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

332. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 333. $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{Vmatrix}$. 334. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$.

335. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 336. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 337. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

338. $\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$. 339. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 340. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

341. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. 342. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$. 343. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

344. $\begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$. 345. $\begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 \end{Vmatrix}$. 346. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{Vmatrix}$.

347. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. 348. $\begin{Vmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 349. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1 & -3/\sqrt{8} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$.

350. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$. 351. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{Vmatrix}$.

352. $\begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{Vmatrix}$. 353. $\begin{Vmatrix} 2 & -\sqrt{3/2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

354. $\begin{Vmatrix} 0 & 27/\sqrt{14} & -65/\sqrt{42} \\ 0 & 0 & 14/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 355. $\begin{Vmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

356. $\begin{Vmatrix} 2 & 4/\sqrt{3} & 8/\sqrt{6} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 357. $\begin{Vmatrix} 2 & 4/\sqrt{3} & 8/\sqrt{6} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2 \end{Vmatrix}$.

358. $\begin{Vmatrix} -2 & 4/\sqrt{3} & 7/\sqrt{6} \\ 0 & 2 & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. 359. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{Vmatrix}$.

360. $\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$. 361. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{Vmatrix}$.

362. $\begin{Vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{7} \\ 0 & \sqrt{7} & 3 \end{Vmatrix}$. 363. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{Vmatrix}$. 364. $\begin{Vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{Vmatrix}$.

365. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{Vmatrix}$. 366. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{Vmatrix}$. 367. $\begin{Vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \lambda \end{Vmatrix}$.

368. $\begin{Vmatrix} 1+i\sqrt{2} & i-\sqrt{2} & 1 \\ 1+i\sqrt{3} & i-\sqrt{3} & 1 \\ 1+i\sqrt{4} & i-\sqrt{4} & 1 \end{Vmatrix}$. 369. $\begin{Vmatrix} 1-i & -3+2i & 2-i \\ -4+6i & 4-3i & -3i \\ -9+i & 5-i & 4 \end{Vmatrix}$.

370. $\begin{Vmatrix} 2+i & -3 & 2+i \\ -1+2i & -2-3i & 1-2i \\ 2+i & -3+i & 0 \end{Vmatrix}$. 371. $\begin{Vmatrix} 1 & 1-i & 2+i \\ 1-3i & -2-4i & 5-5i \\ 2i & 2+2i & -2+4i \end{Vmatrix}$.

372. $\begin{Vmatrix} 1 & 2i & 1-i \\ -i & 2 & -1-i \\ 3 & 6i & 3-3i \end{Vmatrix}$. 373. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3+i & 3-i \end{Vmatrix}$.

374. $\begin{Vmatrix} 0 & 2i & -2i \\ 1 & 2i & -2i \\ 1 & 3i-1 & -3i-1 \end{Vmatrix}$. 375. $\begin{Vmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & i \end{Vmatrix}$.

376. $\begin{Vmatrix} 1+i & -1-i & 2+2i \\ 0 & i & 2 \\ 0 & -1 & 3+i \end{Vmatrix}$. 377. $\begin{Vmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{Vmatrix}$.

378. $\begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}$. 379. $\begin{Vmatrix} 8 & 1 & i \\ 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1-2i \end{Vmatrix}$. 380. $\begin{Vmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

381. $\begin{Vmatrix} i/\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{Vmatrix}$. 382. $\begin{Vmatrix} i & i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 383. $\begin{Vmatrix} 3 & -5 & -12 \\ -3 & 9 & 18 \\ 2 & -6 & -12 \end{Vmatrix}$.

384. $\begin{Vmatrix} 1 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 1+i\sqrt{3} & 1-i\sqrt{3} \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$. 389. $\begin{Vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -6 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$. 390. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

391. $\begin{Vmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{Vmatrix}$. 392. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. 393. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 394. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

395. $\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. 396. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$. 397. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$. 398. $\begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

399. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$. 400. $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$. 401. $\begin{Vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

402. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 403. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 5 & 13 \end{Vmatrix}$. 404. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \end{Vmatrix}$.

405. $\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 6 \end{Vmatrix}$. 406. $\begin{Vmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 7 & -21 & 14 \\ -3 & 9 & -6 \end{Vmatrix}$. 407. $\begin{Vmatrix} -4 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 14 & 7 & 21 \\ -6 & -3 & -9 \end{Vmatrix}$.

408. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{Vmatrix}$. 409. $\begin{Vmatrix} 19 & 2 & 33 \\ 2 & 11 & 4 \\ -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{Vmatrix}$. 410. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

411. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 412. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$. 413. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

414. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 415. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. 416. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

417. $\begin{Vmatrix} 10 & 1 & -26 \\ -11 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$. 418. $\begin{Vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 419. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

420. $\begin{Vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{Vmatrix}$. 421. $\begin{Vmatrix} 30 & 9 & 4 \\ -24 & -15 & 2 \\ 43 & 8 & 9 \\ -50 & 5 & -20 \\ -5 & 2 & -3 \end{Vmatrix}$.

422. $\begin{Vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & -11 & -15 \\ 9 & 2 & 8 \\ -20 & 13 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{Vmatrix}.$

428. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

429. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

430. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

431. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

432. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

433. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

434. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$

435. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$

436. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$

437. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

438. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$

439. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$

440. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

441. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{Vmatrix}.$

442. $\begin{Vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{Vmatrix}.$

443. $\begin{Vmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{Vmatrix}.$

444. $\begin{Vmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{Vmatrix}.$

445. $\begin{Vmatrix} 1/\sqrt{10} & 1/2 & 1/2 & 2/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -1/2 & -1/2 & 2/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} & -1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{10} \end{Vmatrix}.$

446. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$

447. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$

448. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$

449. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -9 & -7 \\ 4 & -9 & 0 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 8 \end{Vmatrix}.$

450. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

451. $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. **452.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$. **453.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$.

454. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$. **455.** $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$.

456. $\begin{Vmatrix} -5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \end{Vmatrix}$. **457.** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

458. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$. **459.** $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{Vmatrix}$. **460.** $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$.

461. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. **462.** $\begin{Vmatrix} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{Vmatrix}$. **463.** $\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 10 & 18 \\ 9 & 15 & 12 & 20 \\ 15 & 27 & 20 & 36 \end{Vmatrix}$.

464. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$. **465.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

466. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$. **467.** $\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & 6 & -1 \end{Vmatrix}$.

468. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. **469.** $\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -3 & 8 \end{Vmatrix}$.

470. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. **471.** $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

472. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{Vmatrix}$. **473.** $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

474. $\begin{Vmatrix} -5 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{Vmatrix}$. **475.** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -i & -1 & i \\ -i & 3i-3 & i & -3-3i \end{Vmatrix}$.

476. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$. 477. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 478. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

479. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 480. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{Vmatrix}$. 481. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

482. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 483. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

484. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 485. $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$. 486. $\begin{Vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{Vmatrix}$.

487. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 488. $\begin{Vmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 489. $\begin{Vmatrix} -i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

490. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$. 491. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2i \\ 1 & 3 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 1 & 1 \\ -2i & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

492. $\begin{Vmatrix} 7 & 3 & 1+2i & -1+2i \\ 3 & 7 & 1-2i & -1-2i \\ 1-2i & 1+2i & 7 & -3 \\ -1-2i & -1+2i & -3 & 7 \end{Vmatrix}$. 493. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

494. $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$. 495. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 496. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

497. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 498. $\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{Vmatrix}$. 499. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \end{Vmatrix}$.

500. $\begin{Vmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$. 501. $\begin{Vmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{Vmatrix}$.

502. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. 503. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$. 504. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3+i & 4 \\ -i & 3i & 1+i & 0 \end{Vmatrix}$.

505. $\begin{Vmatrix} 0 & 35 & 19 & 2 \\ 8 & 33 & 19 & 0 \end{Vmatrix}$. 506. $\begin{Vmatrix} 3 & -4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$. 507. $\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

508. $\begin{Vmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{Vmatrix}$.

509. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$.

510. $\begin{Vmatrix} 1 & -5 & -6 & 11 \\ 5 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & 7 & -15 \end{Vmatrix}$.

511. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -7 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 \\ 5 & 24 & -7 & -1 \end{Vmatrix}$.

512. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

513. $\begin{Vmatrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{Vmatrix}$.

514. $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{Vmatrix}$.

515. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$.

516. $\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & -8 \\ 4 & -2 & -6 & 4 \end{Vmatrix}$.

517. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & -5 \\ 8 & -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

518. $\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 2 & -8 \\ 16 & 8 & 24 & -16 \\ 0 & 4 & -4 & 16 \end{Vmatrix}$.

519. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

520. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{Vmatrix}$.

521. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 26 \end{Vmatrix}$.

522. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{Vmatrix}$.

523. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 11 & -4 \end{Vmatrix}$.

524. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ -5 & -8 & -7 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

525. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1+2i & -1+i \\ -1 & 3 & -1-3i & 2-i \\ i & 1+i & 1 & 2i \\ 2i & 0 & 2i & -2+2i \\ 0 & 2-i & -1-2i & 2-i \end{Vmatrix}$.

530. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

531. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$.

532. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{Vmatrix}$.

533. $\begin{Vmatrix} 1 & 10 & 100 & 10^3 & 10^4 \\ 0{,}1 & 2 & 30 & 400 & 5000 \\ 0 & 0{,}1 & 3 & 60 & 800 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 4 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 5 \end{Vmatrix}$.

534. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

535. $\left\|\begin{matrix}1&1&1&1&0\\1&2&3&0&0\\0&1&1&1&1\\0&a&b&c&d\\0&a^2&b^2&c^2&d^2\end{matrix}\right\|$. 536. $\left\|\begin{matrix}0&7&0&1&0\\1&4&3&9&1\\0&1&0&5&0\\2&8&4&7&5\\0&3&0&1&0\end{matrix}\right\|$. 537. $\left\|\begin{matrix}3&5&5&5&5\\5&3&5&5&5\\5&5&3&5&5\\5&5&5&3&5\\5&5&5&5&3\end{matrix}\right\|$.

538. $\left\|\begin{matrix}6&1&4&1&8\\7&-7&7&2&2\\14&5&10&3&18\\4&-11&2&1&-8\\9&-7&8&2&5\end{matrix}\right\|$. 539. $\left\|\begin{matrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\1&1&1&1&1\end{matrix}\right\|$.

540. $\left\|\begin{matrix}4&1&-1&4&9\\17&2&-2&17&82\\3&0&-2&-1&4\\4&1&0&12&27\\2&2&-1&10&0\end{matrix}\right\|$. 541. $\left\|\begin{matrix}4&3&-4&2&2\\2&-1&-3&-4&2\\3&1&1&2&-1\\1&2&3&4&-1\\-1&1&-1&-2&3\end{matrix}\right\|$.

542. $\left\|\begin{matrix}1&2&2&2&2\\2&1&2&2&2\\2&2&1&2&2\\2&2&2&1&2\\2&2&2&2&1\end{matrix}\right\|$. 543. $\left\|\begin{matrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{matrix}\right\|$. 544. $\left\|\begin{matrix}1&2&3&0&0\\2&3&4&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&3&4\end{matrix}\right\|$.

545. $\left\|\begin{matrix}7&10&15&25&20\\15&22&18&30&36\\0&0&3&5&6\\0&0&5&9&11\\0&0&6&11&14\end{matrix}\right\|$. 546. $\left\|\begin{matrix}1&2&1&0&0\\2&3&1&0&0\\3&4&1&0&0\\0&0&0&1&3\\0&0&0&2&4\end{matrix}\right\|$.

547. $\left\|\begin{matrix}3&-1&1&0&2\\2&-5&0&1&1\\1&0&0&-1&2\\0&2&1&1&-1\\1&1&-3&1&0\end{matrix}\right\|$. 548. $\left\|\begin{matrix}1&0&0&1&-1\\0&1&-2&3&-3\\0&0&-1&2&-2\\1&-1&1&0&1\\1&-1&1&-1&2\end{matrix}\right\|$.

549. $\left\|\begin{matrix}0&2&-2&0&-4\\-2&0&4&-5&3\\2&-4&0&1&1\\0&5&-1&0&2\\4&-3&-1&-2&0\end{matrix}\right\|$. 550. $\left\|\begin{matrix}0&0&-1&1&0\\1&0&-1&1&0\\1&0&-1&0&1\\0&1&-1&0&1\\0&1&-1&0&0\end{matrix}\right\|$.

551. $\left\|\begin{matrix}1&-1&0&0&1\\1&-1&0&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0\\-2&2&0&0&0\end{matrix}\right\|$. 570. $\left\|\begin{matrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{matrix}\right\|$. 571. $\left\|\begin{matrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{matrix}\right\|$.

572. $\left\|\begin{matrix}-1&0&1&1&1\\0&1&-1&-1&1\end{matrix}\right\|$. 573. $\left\|\begin{matrix}0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1\end{matrix}\right\|$. 574. $\left\|\begin{matrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\end{matrix}\right\|$.

575. $\left\|\begin{matrix}1&-1&1&1&-2\\2&1&-1&-1&1\end{matrix}\right\|$. 576. $\left\|\begin{matrix}1&2&-1&1&1\\1&-2&1&3&-1\end{matrix}\right\|$.

577. $\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{matrix}\right\|$. 578. $\left\|\begin{matrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 10 & 1 & 3 & 6 & -7 \end{matrix}\right\|$. 579. $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|$.

580. $\left\|\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{matrix}\right\|$. 581. $\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{matrix}\right\|$.

582. $\left\|\begin{matrix} 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|$. 583. $\left\|\begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 & -5 & 5 \end{matrix}\right\|$.

584. $\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \end{matrix}\right\|$. 585. $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|$.

586. $\left\|\begin{matrix} -3 & 3 & 12 & 6 & -9 \\ -3 & 3 & 12 & 6 & -9 \\ 2 & -2 & -8 & -4 & 6 \end{matrix}\right\|$. 587. $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 26 & -4 \\ 3 & -4 & 8 & -9 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -12 & 2 \end{matrix}\right\|$.

588. $\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{matrix}\right\|$. 589. $\left\|\begin{matrix} 3 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$.

590. $\left\|\begin{matrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$. 591. $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|$.

592. $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{matrix}\right\|$. 593. $\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{matrix}\right\|$.

594. $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|$. 595. $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right\|$. 596. $\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n \end{matrix}\right\|$.

597. $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{matrix}\right\|$. 598. $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|$. 599. $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|$.

Матрицы порядка n.

600. $\begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{Vmatrix}$. 601. $\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix}$. 602. $\begin{Vmatrix} 1/\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\lambda_n \end{Vmatrix}$.

603. $\begin{Vmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{Vmatrix}$. 604. $\begin{Vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{Vmatrix}$. 605. $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \iddots & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}$.

606. $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1^2 \\ & \iddots & \\ \lambda_n^2 & & 0 \end{Vmatrix}$. 607. $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1\lambda_n \\ & \iddots & \\ \lambda_n\lambda_1 & & 0 \end{Vmatrix}$. 608. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

609. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. 610. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$.

611. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \end{Vmatrix}$. 612. $\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{Vmatrix}$.

613. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 614. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$.

615. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{Vmatrix}$. 616. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. 617. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

618. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$. 619. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

620. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1} & (-1)^{n-2} & \dots & 1 \end{Vmatrix}$.

621. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

622. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

623. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

624. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

625. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

626. $\begin{Vmatrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 3 \end{Vmatrix}$.

627. $\begin{Vmatrix} x & y & y & \dots & y \\ y & x & y & \dots & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & x \end{Vmatrix}$.

628. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{Vmatrix}$.

629. $\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2-\lambda & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-\lambda \end{Vmatrix}$.

630. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{Vmatrix}$.

631. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{Vmatrix}$.

632. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

633. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{Vmatrix}$.

634. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

635. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

636. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$ 637. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$

638. $\begin{Vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{Vmatrix}.$ 639. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 3 \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 \end{Vmatrix}.$

640. $\begin{Vmatrix} n-1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -n+1 & n-3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n+2 & n-5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & -n+3 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -n+1 \end{Vmatrix}.$

641. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{Vmatrix}.$ 642. $\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{Vmatrix}.$

643. $\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{Vmatrix}.$ 644. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{Vmatrix}.$

645. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{Vmatrix}.$

Блочные матрицы.

647. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right\|.$ 648. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}\right\|.$ 649. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{array}\right\|.$

650. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right\|.$ 651. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \end{array}\right\|.$ 652. $\left\|\begin{array}{cc|cc} -4 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right\|.$

653. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 7 & -4 & 3 & 4 \\ -5 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right\|.$ 654. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$ 655. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right\|.$

656. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 12 & 20 & -6 & -10 \\ 20 & 36 & -10 & -18 \end{array}\right\|.$ 657. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 12 & 20 & 20 & 36 \\ -6 & -10 & -10 & -18 \end{array}\right\|.$

658. $\left\|\begin{array}{rr|rr} -1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -4 & 3 & 4 \end{array}\right\|.$ **659.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} -1 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right\|.$ **660.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{array}\right\|.$

661. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 3 & -2 & 6 & 8 \\ -10 & 11 & 7 & 9 \end{array}\right\|.$ **662.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 11 & 14 & 8 & 13 \\ 17 & 23 & 5 & 7 \end{array}\right\|.$ **663.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 5 \end{array}\right\|.$

664. $\left\|\begin{array}{rr|rr} -1 & 6 & 5 & 9 \\ 0 & 10 & 6 & 10 \end{array}\right\|.$ **665.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} -6 & 4 & 13 & 22 \\ -5 & 23 & 17 & 27 \end{array}\right\|.$

666. $\left\|\begin{array}{rr|rr} -10 & -6 & -1 & -8 \\ -15 & -11 & 3 & 1 \end{array}\right\|.$ **667.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 13 & -8 & 15 & 20 \\ -25 & 30 & 16 & 20 \end{array}\right\|.$

668. $\left\|\begin{array}{rr|rr} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right\|.$ **669.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right\|.$ **670.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{array}\right\|.$

671. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 15 & -8 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -8 & -12 \end{array}\right\|.$ **672.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} -8 & -14 & 12 & 26 \\ -8 & -18 & 12 & 22 \end{array}\right\|.$

673. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right\|.$ **674.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right\|.$ **675.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\|.$

676. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right\|.$ **677.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right\|.$ **678.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \end{array}\right\|.$

679. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 3 & 9/2 & 2 & 3 \\ 9/2 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right\|.$ **680.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right\|.$ **681.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 3 & 4 & 7/2 & 6 \\ 7/2 & 6 & 1 & 3 \end{array}\right\|.$

682. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 3 & 11/3 & 11/3 & 13/3 \\ 11/3 & 13/3 & 13/3 & 3 \end{array}\right\|.$ **683.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right\|.$

684. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 19 & 30 & 8 & 13 \\ 17 & 41 & 11 & 17 \end{array}\right\|.$ **685.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 155 & 68 & 66 & 29 \\ 167 & 75 & 89 & 39 \end{array}\right\|.$ **686.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 41 & 17 & 17 & 7 \\ 41 & 17 & 17 & 7 \end{array}\right\|.$

687. $\left\|\begin{array}{rr|rr} -7 & -10 & 0 & -1 \\ 19 & 27 & 1 & 5 \end{array}\right\|.$ **688.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} -23 & 10 & 20 & 9 \\ 39 & 17 & 11 & 5 \end{array}\right\|.$

689. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right\|.$ **690.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right\|.$ **691.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} -3 & -4 & 3 & 4 \\ -5 & -7 & 5 & 7 \\ \hline -2 & -5 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right\|.$

692. $\left\|\begin{array}{rr|rr} -3 & -5 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ \hline -4 & -7 & -5 & -3 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right\|.$ **693.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$

694. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right\|.$ **695.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 3 & 5 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 10 & 18 \\ \hline 9 & 15 & 12 & 20 \\ 15 & 27 & 20 & 36 \end{array}\right\|.$

696. $\left\|\begin{array}{rr|rr} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \\ \hline 5 & 10 & 9 & 18 \\ 15 & 20 & 27 & 36 \end{array}\right\|.$ **697.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right\|.$ **698.** $\left\|\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ \hline -4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \end{array}\right\|.$

699. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & -3 & 3/2 & 5/2 \\ \hline -1/2 & 1/2 & -2 & -1 \\ 3/2 & 5/2 & 7 & 8 \end{array}\right\|.$ 700. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1/2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 5/2 \\ \hline -1/2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 5/2 & 3 & 8 \end{array}\right\|.$

701. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right\|.$ 702. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right\|.$ 703. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right\|.$

704. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right\|.$ 705. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -7/2 \\ \hline -7/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 7/2 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$

706. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$ 707. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right\|.$

708. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline -1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$ 709. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$ 710. $\left\|\begin{array}{cc|cc} -3 & 3 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -1 & 1 \\ \hline -4 & 4 & -5 & 5 \\ -7 & 7 & -3 & 3 \end{array}\right\|.$

711. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 7 & 12 & 19 \\ 15 & 24 & 27 & 42 \end{array}\right\|.$ 712. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 4 & 5 & 2 & 2 \\ -15 & 18 & 2 & 2 \\ \hline -5 & -5 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$

713. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right\|.$ 714. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 11 \\ \hline 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right\|.$

715. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 & -7 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\|.$ 716. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right\|.$ 717. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 13 & 14 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{array}\right\|.$

718. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 39 & 101 & 39 & 101 \\ 100 & 259 & 100 & 259 \\ \hline 39 & 101 & 78 & 202 \\ 100 & 259 & 200 & 518 \end{array}\right\|.$ 719. $\left\|\begin{array}{cc|cc} 89 & 89 & -33 & -33 \\ 0 & 89 & 0 & -33 \\ \hline -34 & -34 & 13 & 13 \\ 0 & -34 & 0 & 13 \end{array}\right\|.$

720. $\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right\|.$ 721. $\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 2 & 6 & 4 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 8 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right\|.$

722. $\left\|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\|.$

723. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

724. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 11 & 12 & 13 & 21 & 22 & 23 \\ 4 & 5 & 6 & 14 & 15 & 16 & 24 & 25 & 26 \\ 7 & 8 & 9 & 17 & 18 & 19 & 27 & 28 & 29 \end{array}\right\|.$$

725. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

726. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right\|.$$

727. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 7 & 9 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right\|.$$

728. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 2 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 6 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right\|.$$

729. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right\|.$$

730. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 2 & 14/3 & 14/3 & 14/3 & 10/3 & 4 & 16/3 & 4 & 8/3 \\ 14/3 & 10/3 & 4 & 10/3 & 4 & 14/3 & 4 & 14/3 & 10/3 \\ 16/3 & 4 & 8/3 & 4 & 14/3 & 10/3 & 8/3 & 10/3 & 6 \end{array}\right\|.$$

731. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

732. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 0 & 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 \\ -3 & 0 & 3 & -10 & 0 & 10 & 9 & 0 & -9 \\ 3 & -3 & 0 & 10 & -10 & 0 & -9 & 9 & 0 \end{array}\right\|.$$

733. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 1 & 10/3 & 19/3 & 10/3 & 3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 \\ 10/3 & 3 & 19/3 & 3 & 5 & 7 & 19/3 & 7 & 4 \\ 19/3 & 19/3 & 19/3 & 19/3 & 7 & 4 & 19/3 & 4 & 1 \end{array}\right\|.$$

734. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 2 & 14/3 & 16/3 & 14/3 & 10/3 & 6 & 16/3 & 6 & 8/3 \\ 14/3 & 10/3 & 6 & 10/3 & 4 & 14/3 & 6 & 14/3 & 10/3 \\ 16/3 & 6 & 8/3 & 6 & 14/3 & 10/3 & 8/3 & 10/3 & 6 \end{array}\right\|.$$

735. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -6 & -25 & 31 & 12 & 50 & -62 & -6 & -25 & 31 \\ 3 & 12 & -15 & -6 & 24 & 30 & 3 & 12 & -15 \\ 1 & 5 & -6 & -2 & 10 & 12 & 1 & 5 & -6 \end{array}\right\|.$$

736. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} -2 & -7 & 7 & 4 & 14 & -14 & -2 & -7 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & -2 & 8 & 10 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right\|.$$

737. $$\left\|\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 6 & 21 & -21 & 20 & 70 & -70 & -18 & -63 & 63 \\ -3 & -12 & 15 & -10 & -40 & 50 & 9 & 36 & -45 \\ -3 & -9 & 6 & -10 & -30 & 20 & 9 & 27 & -18 \end{array}\right\|.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1964.
2. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1985.
3. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.
4. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.
5. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969.
6. Гусятников П. Б., Резниченко С. В. Векторная алгебра в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 1985.
7. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975.
8. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1981.
9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1984.
10. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.
11. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. — М.: Высшая школа, 1983.
12. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976.
13. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1984.
14. Сборник задач по алгебре/Под ред. А. И. Кострикина. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
15. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977.
16. Фаддеева В. Н., Колотилина Л. Ю. Вычислительные методы линейной алгебры. Набор матриц для тестирования. — Л.: Наука, ч. I, 1982; ч. II, III, 1983.
17. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1970.