Б. ШНЕПЕРМАН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье,
стереотипное

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2008

ББК 22.14, 22.13
Ш 76

Шнеперман Л. Б.

Ш 76 Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учебное пособие. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 224 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0885-6

Сборник составлен в соответствии с программой курса «Алгебра и теория чисел». Большое количество задач достаточно, чтобы обеспечить и практические занятия, и домашние задания. Пособие содержит задачи по следующим темам курса: элементы математической логики и теории множеств, комплексные числа, матрицы и определители, линейная алгебра, группы, кольца и поля, делимость и сравнения в кольце целых чисел, кольца многочленов от одной и нескольких переменных, алгебраические числа. Задачи снабжены ответами и указаниями.

Учебное пособие предназначено для студентов математических факультетов университетов и педагогических вузов. Хорошо подготовленные студенты найдут в сборнике материал для углубленного изучения алгебры.

ББК 22.14, 22.13

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время имеется ряд сборников задач по традиционным разделам курсов высшей алгебры, линейной алгебры, теории чисел. Они могут быть использованы в пединститутах, хотя рассчитаны в основном на университетские курсы. Предлагаемый сборник соответствует программе курса алгебры и теории чисел для пединститутов. Этот курс имеет свою специфику, связанную с задачей подготовки учителей математики, что отразилось на содержании задачника, его направленности. Некоторая часть включенных в сборник задач взята из журналов «Квант», «Математика в школе», из сборников олимпиадных и конкурсных задач. Кроме задач по традиционным темам курса, в нем содержится большое число задач по таким темам, как «Элементы математической логики и теории множеств», «Группы», «Кольца», «Алгебраические числа», отсутствующих или почти отсутствующих в других сборниках.

Количество задач в сборнике достаточно, чтобы обеспечить практические занятия и домашние задания. Вместе с тем хорошо подготовленные студенты найдут здесь материал для более углубленного изучения алгебры. Трудные задачи разбиты на части, каждая из которых вполне доступна для начинающего. Решение таких задач является первым шагом в научной работе. Задачи снабжены ответами. Для наиболее трудных задач даны указания к решениям или приведены полные решения.

При составлении сборника использованы многочисленные источники, которые указаны в списке литературы. Кроме того, сборник содержит ряд задач нового типа.

Несколько замечаний относительно пользования задачником. Номер каждой задачи содержит два числа: первое указывает номер главы, второе — номер задачи в этой главе. Как правило, задачи естественным образом объединяются в группы. Поэтому расположение задачи содержит некоторую информацию о методе ее решения.

Автор глубоко признателен рецензентам Е. С. Ляпину, А. Е. Евсееву и Л. М. Глускину за ценные замечания, которые способствовали улучшению рукописи, а также В. Н. Кукреш за помощь в работе над задачником.

Автор

1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

1.1. Пусть A и B означают соответственно «число a делится на 3» и «число a делится на 4». Запишите в символической форме следующие высказывания:

1) a делится на 3 и не делится на 4;
2) a не делится ни на 3, ни на 4;
3) a делится на 3 или на 4;
4) неверно, что a не делится ни на 3, ни на 4.

1.2. Пусть A и B означают соответственно «$KLMN$ — квадрат» и «$KLMN$ — параллелограмм». Запишите в символической форме следующие высказывания:

1) если $KLMN$ — квадрат, то $KLMN$ — параллелограмм;
2) если $KLMN$ — параллелограмм, то $KLMN$ — квадрат;
3) $KLMN$ — квадрат тогда и только тогда, когда $KLMN$ — параллелограмм;
4) если $KLMN$ — параллелограмм, то $KLMN$ — не квадрат;
5) неверно, что $KLMN$ — параллелограмм тогда и только тогда, когда $KLMN$ — не квадрат.

1.3. Сформулируйте отрицания следующих высказываний:

1) $2\cdot 3=7$; 2) $2>3$; 3) $2\geqslant 3$;
4) $2>2$; 5) $2\geqslant 2$; 6) $2<3$;
7) 600 делится на 6 и на 14;
8) 600 делится на 6 или на 14;
9) среди тригонометрических функций есть четные и нечетные;
10) среди тригонометрических функций есть четные или нечетные;
11) среди тригонометрических функций нет ни четных, ни нечетных.

Среди полученных высказываний выделите истинные и ложные.

1.4. Докажите следующие логические законы:

1) $A\Rightarrow A$; 2) $\overline{\overline{A}}\Leftrightarrow A$;
3) $\overline{A\wedge\overline{A}}$; 4) $A\vee\overline{A}$;
5) $\overline{A}\Rightarrow(A\Rightarrow B)$; 6) $[A\wedge(A\Rightarrow B)]\Rightarrow B$;
7) $\overline{A\wedge B}\Leftrightarrow\overline{A}\vee\overline{B}$; 8) $\overline{A\vee B}\Leftrightarrow\overline{A}\wedge\overline{B}$;

9) $[(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}] \Rightarrow \overline{A}$; 10) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$;
11) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$; 12) $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B})$;
13) $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;
14) $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$;
15) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;
16) $(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]$;
17) $(A \vee B \Rightarrow C) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)]$
($\bar{A}$ означает отрицание высказывания A).

1.2. МНОЖЕСТВА

1.5. Найдите все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$.

1.6. Докажите, что множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеет 2^n различных подмножеств.

1.7. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ при:
1) $A = \{-1, 0, 3, 4\}$, $B = \{0, 4, 6\}$;
2) $A = [0, 2]$, $B = [1, 5]$;
3) $A = [0, 2]$, $B = \{0, 4, 6\}$;
4) $A =]-\infty, 7]$, $B =]5, 8[$;
5) $A = [1, 3[\cup]5, 7]$, $B = [2, 6]$.

1.8. Пусть A — множество решений уравнения $f(x) = 0$, B — множество решений уравнения $g(x) = 0$. Выразите через A и B множество решений:
1) уравнений

а) $f(x)\,g(x) = 0$; б) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

2) системы уравнений

$$\begin{aligned} f(x) &= 0; \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

1.9. Как можно выразить множество действительных корней уравнения $f(x) = 0$, если известны множества $X = \{x \mid f(x) > 0\}$ и $Y = \{x \mid f(x) < 0\}$?

1.10. Каким условиям должны удовлетворять множества A и B, чтобы:
1) $A \cap B = A \cup B$; 2) $(A \setminus B) \cup B = A$;
3) $(A \cup B) \setminus B = A$?

1.11. Докажите, что для произвольных множеств A, B и C справедливы следующие равенства:
1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3) $A \cup (A \cap B) = A$; 4) $A \cap (A \cup B) = A$;
5) $A \cup \varnothing = A$; 6) $A \cap \varnothing = \varnothing$;
7) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

8) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
9) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
10) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
11) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$;
12) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
13) $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$;
14) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
15) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.12. Докажите, что для любых подмножеств A и B универсального множества U справедливы следующие равенства:

1) $A \cap U = A$; 2) $A \cup U = U$;
3) $A \cap \overline{A} = \varnothing$; 4) $A \cup \overline{A} = U$;
5) $\overline{\varnothing} = U$; 6) $\overline{U} = \varnothing$;
7) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 8) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
9) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
10) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$;
11) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup (A \cap B)$.

1.13. Верны ли следующие равенства для произвольных множеств A, B, C:

1) $(A \cup B) \setminus B = A$; 2) $(A \setminus B) \cup B = A$;
3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
4) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$;
5) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$?

Если не верны, то в какую сторону имеет место включение?

1.14. Докажите, что для произвольных множеств A, B и C:

1) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
2) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \varnothing \Leftrightarrow A = B$;
3) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$;
4) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;
5) $A = B \cup C \Rightarrow A \setminus B \subseteq C$;
6) $B \subseteq A \Rightarrow (A \setminus B) \cup B = A$;
7) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow (A \cup B) \setminus B = A$;
8) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;
9) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;
10) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;
11) $B \subseteq A \wedge C = A \setminus B \Rightarrow A = B \cup C$;
12) $C = A \setminus B \Rightarrow B \cap C = \varnothing$;
13) $B \cap C = \varnothing \wedge A \cap C \neq \varnothing \Rightarrow A \setminus B \neq \varnothing$;
14) $A \subseteq C \Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
15) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \wedge B = \varnothing$;
16) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$;
17) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing$;
18) $A \setminus B = A \cap B \Leftrightarrow A = \varnothing$;
19) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$;
20) $C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$;
21) $A \subseteq B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$.

1.15. Какие из следующих высказываний истинны для любых A, B и C:

1) $(A \subset B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subset C$;

2) $(A \neq B \wedge B \neq C) \Rightarrow A \neq C$;

3) $(\overline{A \subseteq B} \wedge \overline{B \subseteq C}) \Rightarrow \overline{A \subseteq C}$?

1.16. Докажите, что для любых подмножеств A, B и C универсального множества U:

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$;

2) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \Leftrightarrow B \subseteq \bar{A}$;

3) $A \cup B = U \Leftrightarrow \bar{A} \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq A$.

1.17. Из 100 студентов 28 изучают английский язык, 30 — немецкий, 42 — французский, 8 — английский и немецкий, 10 — английский и французский, 5 — немецкий и французский и 3 студента изучают все три языка. Сколько студентов не изучают ни одного языка; изучают только французский язык?

1.18. Из 100 студентов 24 не изучают никакого языка, 26 — немецкий, 48 — французский, 8 — французский и английский, 8 — немецкий и французский, 18 — только немецкий, 23 — немецкий, но не английский. Сколько студентов изучают только английский язык?

1.19. Следующие высказывания истинны:

1) среди толстяков нет поваров;

2) среди поваров есть вегетарианцы.

Истинно или ложно высказывание: «Не все вегетарианцы толстяки»?

1.20. Следующие высказывания истинны:

1) среди спортсменов есть такие, рост которых меньше 170 см;

2) студенты, рост которых меньше 170 см, не являются спортсменами.

Истинно или ложно высказывание: «Не все спортсмены — студенты»?

1.21. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые:

1) делятся на 2 и на 3;

2) делятся на 2, но не делятся на 3;

3) делятся на 3, но не делятся на 2;

4) делятся на 3 или на 2;

5) не делятся ни на 2, ни на 3?

1.3. КВАНТОРЫ

1.22. Прочитайте следующие высказывания:

1) $(\forall x)\, x + 3 = 8$; 2) $(\exists x)\, x + 3 = 8$;

3) $(\exists x)\, x \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{R}$; 4) $(\forall x)\, x \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{R}$;

5) $(\forall x)\, x \vdots 3 \Rightarrow x^2 \vdots 9$; 6) $(\exists x)\, x^2 = 0$.

Какие из них истинны?

1.23. Прочитайте следующие высказывания:

1) $(\forall x)(\exists y)\, x+y=1$;   2) $(\exists y)(\forall x)\, x+y=1$;
3) $(\forall x)(\exists y)\, xy=0$;   4) $(\exists y)(\forall x)\, xy=0$;
5) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\, x+y<z$;   6) $(\exists z)(\forall x)(\forall y)\, x+y<z$.

Какие из них истинны?

1.24. Запишите следующие высказывания, используя кванторы:

1) квадрат любого числа есть число неотрицательное;

2) если число больше 7, то квадрат его больше 49;

3) для любого числа a существует такое число x, что $a+x=0$;

4) существует такое число x, что для любого числа a $a+x=a$.

1.25. Укажите, какие из следующих пар высказываний эквивалентны:

1) $\overline{(\forall x)P(x)}$ и $(\exists x)\overline{P(x)}$;
2) $\overline{(\exists x)P(x)}$ и $(\forall x)\overline{P(x)}$;
3) $(\forall x)[P(x)\wedge S(x)]$ и $(\forall x)P(x)\wedge(\forall x)S(x)$;
4) $(\forall x)[P(x)\vee S(x)]$ и $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)S(x)$;
5) $(\exists x)[P(x)\wedge S(x)]$ и $(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)S(x)$;
6) $(\exists x)[P(x)\vee S(x)]$ и $(\exists x)P(x)\vee(\exists x)S(x)$;
7) $(\forall x)[P(x)\Rightarrow S(x)]$ и $(\forall x)P(x)\Rightarrow(\forall x)S(x)$;
8) $(\exists x)[P(x)\Rightarrow S(x)]$ и $(\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)S(x)$;
9) $(\forall x)[P(x)\Rightarrow S(x)]$ и $(\forall x)[\overline{S(x)}\Rightarrow\overline{P(x)}]$;
10) $(\exists x)[P(x)\Rightarrow S(x)]$ и $(\forall x)P(x)\Rightarrow(\exists x)S(x)$;
11) $A\Rightarrow(\forall x)P(x)$ и $(\forall x)[A\Rightarrow P(x)]$;
12) $[(\forall x)P(x)]\Rightarrow A$ и $(\exists x)[P(x)\Rightarrow A]$;
13) $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ и $(\forall y)(\forall x)P(x, y)$;
14) $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$ и $(\exists y)(\exists x)P(x, y)$;
15) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ и $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$.

1.26. Сформулируйте отрицание следующих высказываний:

1) существует такое рациональное число x, что $x^2+x+1=0$;

2) всякий четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями является ромбом;

3) существует параллелограмм с взаимно перпендикулярными диагоналями;

4) существует параллелограмм, у которого противоположные стороны не равны или противоположные углы не равны;

5) для любого положительного целого x, если $x>3$, то $x^2>9$;

6) во всяком треугольнике медианы пересекаются в одной точке;

7) если треугольник прямоугольный, то в нем есть угол, равный 90°;

8) при любом действительном a уравнение $x^2=a$ имеет действительный корень;

9) существуют такие натуральные числа x и y, что $x+y=7$;

10) существует такое x, что при любом y $x>y$,

11) если треугольник тупоугольный, то в нем любой угол больше $\pi/2$.

1.27. Пусть x и y — действительные числа. Сформулируйте отрицания следующих высказываний:

1) $(\forall x)2x-4\leqslant x+5$; 2) $(\forall x)x-3\neq 2$;
3) $(\forall x)-x<0$; 4) $(\exists x)x^2<0$;
5) $(\exists x)x-5\geqslant 2$; 6) $(\exists x)(\forall y)xy=0$;
7) $(\exists x)(\forall y)x>y$; 8) $(\forall x)(\forall y)x<y$.

Среди полученных высказываний выделите истинные и ложные.

1.28. Пусть α — плоскость экватора. Рассмотрим высказывания: а) каждая прямая a перпендикулярна к плоскости α; б) существует прямая a, перпендикулярная к плоскости α.

1) Является ли высказывание «б» отрицанием высказывания «а»?

2) Сформулируйте отрицание высказывания «а».

1.29. Является ли высказывание «Ни одна планета не светит отраженным светом» отрицанием высказывания «Все планеты светят отраженным светом»?

1.30. Пусть a, b, c — целые числа. В следующих предложениях вместо многоточия вставьте слова «необходимо», или «достаточно», или «необходимо и достаточно» так, чтобы получились истинные высказывания:

1) для того чтобы число $a+b$ было четным, ..., чтобы числа a и b были нечетными;

2) для того чтобы $|a|+|b|>20$, ..., чтобы хотя бы одно из слагаемых было больше 20;

3) для того чтобы $a^3>8$, ..., чтобы $a>2$;

4) для того чтобы $a=0$, ..., чтобы $ab=0$;

5) для того чтобы ab делилось на 5, ..., чтобы a или b делилось на 5;

6) для того чтобы ab делилось на 6, ..., чтобы a или b делилось на 6;

7) для того чтобы $a^2>9$, ..., чтобы $a>3$;

8) чтобы произведение нескольких чисел делилось на некоторое число, ..., чтобы один из сомножителей делился на это число.

1.31. В следующие предложения вместо многоточия вставьте слова «необходимо или «необходимо и достаточно» так, чтобы получились истинные высказывания:

1) чтобы построить треугольник со сторонами a, b, c, ..., чтобы один из этих отрезков был меньше суммы двух других;

2) чтобы две плоскости были взаимно перпендикулярными, ..., чтобы одна из них проходила через перпендикуляр к другой.

1.32. В следующие предложения вместо многоточия вставьте слова «тогда», или «тогда и только тогда», или «только тогда» так, чтобы получилось истинное высказывание:

1) $a^2<16 \ldots$, когда $a>-4$ и $a<4$;

2) $\frac{a^3-1}{13}<2 \ldots$, когда $a<3$;

3) треугольники равновелики ..., когда они конгруэнтны;

4) многоугольники подобны ..., когда их стороны пропорциональны;

5) прямые параллельны ..., когда при их пересечении с третьей прямой соответственные углы равны.

1.33. Пусть a и b — целые числа. Тогда имеют место следующие теоремы:

1) $a \vdots 3 \wedge b \vdots 3 \Rightarrow (a+b) \vdots 3$;

2) $a \vdots 3 \wedge b \vdots 3 \Rightarrow (a+b) \vdots 3 \wedge (a-b) \vdots 3$;

3) $ab \vdots 3 \wedge \overline{a \vdots 3} \Rightarrow b \vdots 3$;

4) $a \vdots 3 \vee b \vdots 3 \Rightarrow ab \vdots 3$;

5) $a=0 \wedge b=0 \Rightarrow a^2+b^2=0$;

6) $ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$;

7) $a<0 \wedge b>0 \Rightarrow ab<0$.

Какие из этих теорем имеют обратные, противоположные, обратные противоположным?

1.4. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

1.34. Найдите $A \times B$ и $B \times A$ при:

1) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3, 4\}$;

2) $A=\{3\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$.

1.35. Изобразите на декартовой плоскости следующие множества:

1) $[0, 1]\times[0, 1]$; 2) $[-1, 1]\times[2, 3]$;

3) $[0, 1]\times]-\infty, 3]$; 4) $[0, 1]\times[2, \infty[$;

5) $[1, 2]\times]-\infty, \infty[$; 6) $]-1, 1]\times[2, 3]$;

7) $[0, \infty[\times\{2, 3\}$; 8) $]-\infty, \infty[\times[2, 3]$.

1.36. Докажите, что при любых множествах X, Y, Z:

1) $(X \cup Y)\times Z=(X\times Z)\cup(Y\times Z)$;

2) $(X \cap Y)\times Z=(X\times Z)\cap(Y\times Z)$;

3) $(X \setminus Y)\times Z=(X\times Z)\setminus(Y\times Z)$;

4) $X\subset Y \Rightarrow X\times Z\subset Y\times Z$;

5) $X\times Y=\varnothing \Leftrightarrow X=\varnothing \vee Y=\varnothing$;

6) $X\cup Y\subset Z \Rightarrow X\times Y=(X\times Z)\cap(Z\times Y)$;

7) $(X\times Y)\cup(Y\times X)=Z\times Z \Rightarrow X=Y=Z$.

1.37. Докажите, что для любых множеств A, B, C, D

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D).$$

Справедливо ли аналогичное равенство для объединения множеств?

1.38. Докажите, что для любых отношений ρ и σ между элементами множеств X и Y:

1) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; 2) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$;
3) $(\rho \setminus \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \setminus \sigma^{-1}$; 4) $(\overline{\rho})^{-1} = \overline{\rho^{-1}}$;
5) $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$.

1.39. Докажите, что:

1) отношение ρ рефлексивно $\Leftrightarrow \Delta \subseteq \rho$;
2) отношение ρ антирефлексивно $\Leftrightarrow \Delta \cap \rho = \varnothing$;
3) отношение ρ симметрично $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;
4) отношение ρ антисимметрично $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta$ $(\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\})$.

1.40. Укажите, какими свойствами (рефлексивностью, антирефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью, транзитивностью) обладает каждое из следующих отношений:

1) «$\parallel$» на множестве прямых плоскости;
2) «$\perp$» на множестве прямых плоскости;
3) «$=$» на множестве $\mathbf{R}$;
4) «$<$» на множестве $\mathbf{R}$;
5) «$\leqslant$» на множестве $\mathbf{R}$;
6) «Пересечения» на множестве прямых плоскости;
7) «Подобия» на множестве треугольников плоскости;
8) «$\subseteq$» на семействе подмножеств универсального множества.
9) «$\subset$» на семействе подмножеств универсального множества;

1.41. Найдите область определения $pr_1\rho$ и область значений $pr_2\rho$ каждого из следующих отношений, заданных на множестве $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, и укажите, какими свойствами (рефлексивностью, антирефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью, транзитивностью) оно обладает:

1) $a\rho b \Leftrightarrow a - b = 8$;
2) $a\rho b \Leftrightarrow b = a^2$;
3) $a\rho b \Leftrightarrow ab = 12$;
4) $a\rho b \Leftrightarrow b > a^2$.

1.42. На множестве $\mathbf{N}$ для каждого из следующих отношений найдите область определения $pr_1\rho$ и область значений $pr_2\rho$ и укажите, какими свойствами (рефлексивностью, антирефлексивностью; симметричностью, антисимметричностью, транзитивностью) оно обладает:

1) $\rho = \{(1, 1)\}$; 2) $\rho = \{(1, 5)\}$;
3) $\rho = \{(3, 5), (5, 3), (3, 3), (5, 5)\}$;
4) $\rho = \{(3, 5), (5, 3)\}$;
5) $x\rho y \Leftrightarrow$ НОД$(x, y) = 1$;
6) $x\rho y \Leftrightarrow y < 2x$;
7) $x\rho y \Leftrightarrow x = y^2$;
8) $x\rho y \Leftrightarrow x < y$;
9) $x\rho y \Leftrightarrow x \leqslant y$;
10) $x\rho y \Leftrightarrow y - x = 12$;
11) $x\rho y \Leftrightarrow |y - x| = 12$;

12) $x\rho y \Leftrightarrow (x-y) \vdots 3$;
13) $x\rho y \Leftrightarrow x=3y$;
14) $x\rho y \Leftrightarrow xy=30$;
15) $x\rho y \Leftrightarrow x<y-1$;
16) $x\rho y \Leftrightarrow x<y+1$;
17) $x\rho y \Leftrightarrow y=2x+1$.

1.43. Найдите область определения $pr_1\rho$ и область значений $pr_2\rho$ каждого из следующих отношений, заданных на множестве **R**, и укажите, какими свойствами (рефлексивностью, антирефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью, транзитивностью) оно обладает:

1) $\sigma=\{(x, y)\,|\,y=2x\}$;
2) $\sigma=\{(x, y)\,|\,y^2=x^2\}$;
3) $\sigma=[0, 2]\times[0, 2]$;
4) $\sigma=[0, 2]\times[1, 3]$;
5) $\sigma=\{(x, y)\,|\,xy=0\}$.

1.44. Что можно сказать об отношениях $\bar{\rho}$ и ρ^{-1}, если ρ:

1) рефлексивно; 2) антирефлексивно; 3) симметрично; 4) антисимметрично; 5) транзитивно?

1.45. Докажите, что объединение и пересечение двух рефлексивных отношений рефлексивно. Докажите или опровергните аналогичные утверждения для пар антирефлексивных, симметричных, антисимметричных, транзитивных отношений.

1.46. Докажите, что при любом отношении ρ на множестве X отношения $\rho \cap \rho^{-1}$ и $\rho \cup \rho^{-1}$ симметричны.

1.47. Докажите, что отношение включения является отношением порядка.

1.48. Можно ли сказать, что множество **N** разбито на классы семейством подмножеств $\{K, L\}$, если:

1) K — множество четных чисел, L — множество нечетных чисел;

2) K — множество простых чисел, L — множество составных чисел?

1.49. Пусть $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Покажите, что подмножества $A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3=\{4, 5, 6\}$ образуют разбиение A. Запишите множество пар из $A\times A$, принадлежащих соответствующему отношению эквивалентности.

1.50. Пусть ρ и σ — отношения эквивалентности на множестве X. Докажите или опровергните, что $\rho \cap \sigma$, $\rho \cup \sigma$ являются отношениями эквивалентности. Решите аналогичную задачу, когда ρ и σ — отношения порядка.

1.51. Докажите, что если ρ — рефлексивное и транзитивное отношение на множестве X, то $\rho \cap \rho^{-1}$ — отношение эквивалентности.

1.52. Определите, какие из следующих отношений являются отображениями; какие из отображений взаимно-однозначны, какие — обратимы:

1) $\varphi=\{(x, y)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\,|\,y=x^2\}$;

2) $\varphi=\{(x, y)\in[0, \infty[\times]-\infty, \infty[\,|\,y=x^2\}$;
3) $\varphi=\{(x, y)\in[0, \infty[\times[0, \infty[\,|\,y=x^2\}$;
4) $\varphi=\{(x, y)\in[0, 1]\times[0, 1]\,|\,y=x^2\}$;
5) $\varphi=\left\{(x, y)\in\left[0, \frac{1}{2}\right]\times\left[0, \frac{1}{2}\right]\Big|\,y=x^2\right\}$;
6) $\varphi=\{(x, y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,|\,y=x^2\}$;
7) $\varphi=\{(x, y)\in[0, \infty[\times]-\infty, \infty[\,|\,x=y^2\}$;
8) $\varphi=\{(x, y)\in[0, \infty[\times[0, \infty[\,|\,x=y^2\}$;
9) $\varphi=\{(x, y)\in[-1, 1]\times[-1,0]\,|\,x^2+y^2=1\}$;
10) $\varphi=\{(x, y)\in[-1,0]\times[-1, 1]\,|\,x^2+y^2=1\}$;
11) $\varphi=\{(x, y)\in[-1, 0]\times[-1, 0]\,|\,x^2+y^2=1\}$;
12) $\varphi=\{(x, y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,|\,x-y=3\}$;
13) $\varphi=\{(x, y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,|\,y-x=3\}$;
14) $\varphi=\{(x, y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,|\,|x-y|=3\}$.

1.53. Пусть f — отображение X в Y. Докажите, что f^{-1} — отображение Y в X тогда и только тогда, когда f — взаимно-однозначное отображение X на Y. При этом f^{-1} — взаимно-однозначное отображение Y на X.

1.54. Пусть f — отображение X на Y. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$;
2) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$;
3) для любых отображений $g:Y\to X$ и $h:Y\to X$ $f\circ g=f\circ h \Rightarrow g=h$.

1.55. Докажите, что если f — взаимно-однозначное отображение X на Y, а g — взаимно-однозначное отображение Y на Z, то:

1) $g\circ f$ — взаимно-однозначное отображение X на Z;
2) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

1.56. Пусть f — преобразование конечного множества X. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) отображение f взаимно-однозначно;
2) f — отображение X на X.

1.57. Пусть ρ, σ — отношения на множестве $\mathbf{N}$. Найдите $\rho\circ\sigma$, $\sigma\circ\rho$, ρ^2, σ^2, если:

1) $\rho=\{(1, 1), (2, 3)\}$, $\sigma=\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$;
2) $\rho=\{(1, 2), (1, 4), (2, 7)\}$, $\sigma=\{(1, 3), (2, 6), (7, 4), (3, 1)\}$;
3) $a\rho b \Leftrightarrow b \,\vdots\, a$, $a\sigma b \Leftrightarrow a\leqslant b$.

1.58. Докажите, что отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho^2\subseteq\rho$.

1.59. Пусть α и β — отношения. Докажите, что $(\alpha\circ\beta)^{-1}=\beta^{-1}\circ\alpha^{-1}$.

1.60. Пусть α и β — отношения эквивалентности. Докажите, что $\alpha\circ\beta$ — отношение эквивалентности тогда и только тогда, когда $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$.

1.61. Пусть ρ — отношение на множестве X. Докажите, что отношение $\rho\circ\rho^{-1}$ симметрично.

1.62. Пусть ρ и σ — отношения линейного порядка на множестве X. Докажите, что $\rho \circ \sigma$ — отношение линейного порядка тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

1.63. Пусть ρ и σ — симметричные отношения на множестве X. Докажите, что $\rho \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \rho \Leftrightarrow \rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

1.5. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СОЕДИНЕНИЯ

1.64. Докажите, что сложение и умножение на множестве $\mathbf{N}$ удовлетворяют следующим свойствам:

1) $a+c=b+c \Leftrightarrow a=b$;
2) $ac=bc \Leftrightarrow a=b$.

1.65. Докажите, что отношение порядка на множестве $\mathbf{N}$ связано со сложением и умножением следующими свойствами:

1) $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$;
2) $a<a+b$;
3) $a<b \wedge c<d \Rightarrow a+c<b+d$;
4) $a<b \Rightarrow a+1\leqslant b$;
5) $a<b+1 \Rightarrow a\leqslant b$;
6) $a<b \Rightarrow ac<bc$;
7) $a<b \wedge c<d \Rightarrow ac<ad$;
8) для любых натуральных a и b существует такое n, что $a<nb$.

1.66. Докажите, что если на множестве $\mathbf{N}$ соответствующие разности существуют, то:

1) $a+(b-a)=b$;
2) $(a+k)-a=k$;
3) $a+b-c=a+(b-c)$;
4) $(a+b)-(a+c)=b-c$;
5) $c<a+b \Rightarrow c-b<a$;
6) $(a+b)-c=a-(c-b)$;
7) $a+b<c \Rightarrow a<c-b$;
8) $c-(a+b)=(c-a)-b$;
9) $(b-a)c=bc-ac$.

1.67. Докажите, что при любом натуральном n:

1) $(4^n+15n-1) \vdots 9$;
2) $(10^n+18n-1) \vdots 18$;
3) $(3^{2n+3}+40n-27) \vdots 64$;
4) $(3^{2n+3}-24n+37) \vdots 64$;
5) $(5^n+2\cdot 3^{n-1}+1) \vdots 8$;
6) $(6^{2n}+3^{n+2}+3^n) \vdots 11$.

1.68. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

1.69. Докажите, что при любом натуральном n:

1) $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2(x_1x_2+x_1x_3+ +\ldots+x_{n-1}x_n)$;

2) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

3) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}$;

4) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

5) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! = (n+1)!-1$;

6) $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\quad (x\neq 1)$;

7) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$;

8) $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=$

$=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}\quad (|x|\neq 1)$.

1.70. Докажите, что при любом натуральном $n>1$:

1) $(1+x)^n>1+nx$, где $x>-1$, $x\neq 0$;

2) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$;

3) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{3n-2}>1$;

4) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$;

5) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$;

6) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

7) $(a+b)^n<2^{n-1}(a^n+b^n)$ при действительных a, b, $a\neq b$, $a+b>0$;

8) если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные действительные числа и $a_1a_2\ldots a_n=1$, то $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n$.

1.71. Какие из следующих высказываний истинны:

1) $A_n^k=A_n^l\Rightarrow k=l$;

2) $C_n^k=C_n^l\Rightarrow k=l$;

3) $A_n^k=A_m^k\Rightarrow n=m$;

4) $C_n^k=C_m^k\Rightarrow n=m$?

1.72. Решите уравнения:

1) $\frac{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}{C_x^4}=23$; 2) $A_x^2=28x-12C_x^3$;

3) $A_{x+1}^{x-2}=P_x+P_{x-1}$; 4) $\frac{C_{x+1}^5\,P_{x-2}}{P_{x+1}}=2$;

5) $A_x^1-A_x^2+A_x^3-A_x^4+A_x^5-A_x^6=-3185$;

6) $C_x^{x-1}+C_x^{x-2}+C_x^{x-3}+C_x^{x-4}+C_x^{x-5}+C_x^{x-6}=126$.

1.73. Решите системы уравнений:

1) $2A_{y+1}^{x+1}=7(y+1)P_{x+1}$; $\quad\frac{A_y^x}{P_{x-1}}+C_y^{y-x}=126$;

2) $\frac{A_x^{y+1}}{A_x^{y-1}}=2$; $\quad\frac{C_x^{y+1}}{C_x^{y-1}}=\frac{1}{21}$.

1.74. Найдите x и y, если:

1) $C_x^{y+1}:C_x^y:C_x^{y-1}=3:4:3$;

2) $A_{x+1}^{y+1}:(C_{x+1}^{y-1}+(x+1)\,C_x^y):C_{x+1}^{y+1}=24:5:1$;

3) $A_x^y : (C_{x-1}^y + C_{x-1}^{y-1}) : A_{x-1}^{y+1} = 120 : 1 : 90.$

1.75. Докажите тождества:

1) $A_n^k + kA_n^{k-1} = A_{n+1}^k$; 2) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

3) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$; 4) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

5) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = 2^{n-1}$.

1.76. Докажите неравенство $A_{2n+x}^n A_{2n-x}^n \leqslant (A_{2n}^n)^2$.

1.77. Найдите отрицательные члены следующих последовательностей:

1) $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) $x_n = C_{n+5}^4 - \frac{195}{16} \frac{C_{n+3}^n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

3) $x_n = C_{n+4}^n - \frac{119}{96} \frac{P_{n+4}}{P_{n+2}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

2.1. На множестве $C = R \times R$ определим операции — сложение и умножение:

а) $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$;

б) $(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$.

Докажите, что:

1) сложение коммутативно; 2) сложение ассоциативно;

3) $(a, b)+(0, 0)=(a, b)$;

4) $(a, b)+(-a, -b)=(0, 0)$;

5) умножение коммутативно; 6) умножение ассоциативно;

7) $(a, b)\cdot(1, 0)=(a, b)$;

8) если $(a, b)\neq(0, 0)$, то

$$(a,\ b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)=(1,\ 0);$$

9) сложение и умножение связаны законом дистрибутивности.

2.2. Найдите x, y, считая их вещественными:

1) $x-8i+(y-3)i=1$;

2) $\dfrac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i}=2$;

3) $(3+i)x-2(1+4i)y=-2-4i$;

4) $\dfrac{ix-4i-y+1}{1+i}=5+2i$.

2.3. Выясните, при каких условиях произведение двух комплексных чисел:

1) чисто мнимое число; 2) вещественное число.

2.4. Вычислите:

1) i^{4n}; 2) i^{4n+1}; 3) i^{4n+2}; 4) i^{4n+3};

5) $\dfrac{(1+i)^8-1}{(1-i)^8+1}$; 6) $\dfrac{(1+2i)^3+(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$;

7) $\dfrac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\dfrac{(3+4i)(2+i)}{2-i}$;

8) $\left(1+\dfrac{1+i}{2}\right)\left(1+\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\dots\left(1+\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right)$;

9) $\left(1+\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2^2}\right)\dots\left(1+\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2^n}\right)$.

2.5. Докажите, что:

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; 2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$;

3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; 4) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

2.6. При каких действительных x и y следующие пары чисел будут комплексно-сопряженными:

1) $y^2-2y+xy-x+y+(x+y)i$ и $-y^2+2y+11-4i$;

2) $x+y^2+1+4i$ и ixy^2+iy^2-3?

2.7. Докажите, что z_1 и z_2 комплексно-сопряжены тогда и только тогда, когда z_1+z_2 и z_1z_2 — действительные числа.

2.8. Решите уравнения:

1) $\overline{z} = -z$; 2) $\overline{z} = z$; 3) $\overline{z} = 2 - z$;

4) $\overline{z} = -4z$; 5) $z^2 + \overline{z} = 0$; 6) $z^2 = \overline{z}$;

7) $z^3 = \overline{z}$; 8) $(z + 2i)^2 + 4z - 4i\overline{z} + 17 = 0$.

2.9. Найдите действительные значения x, при которых комплексные числа $z_1 = \sqrt{x^2 - 3} + 3 - i\sin\frac{\pi x}{4}$ и $z_2 = \sqrt{x^2+5} + 1 - i\sin^2\frac{\pi x}{4}$ являются сопряженными.

2.10. Решите уравнения·

1) $|z| + z = 1 + 2i$; 2) $|z| + z = 2 - i$;

3) $|z| + \sqrt{2}\left(z - \dfrac{11+3i}{2}\right) = 0$;

4) $|(3-i)z| - 2(1-2i)z = -5i$;

5) $2|z|-4az+1+ai=0$ $(a \in \mathrm{R})$;

6) $z|z|+az+1=0$ $(a \in \mathrm{R})$;

7) $z+a|z+1|i=0$ $(a \in \mathrm{R})$;

8) $|z+1-i| = |3+2i-z| = |z+i|$.

2.11. Пусть $w = \dfrac{z-1}{z+1}$, где $z \neq \pm 1$. Докажите, что w — чисто мнимое тогда и только тогда, когда $|z| = 1$.

2.12. Для каких целых n $(1+i)^n = (1-i)^n$?

2.13. Вычислите $z^{1971} + \dfrac{1}{z^{1971}}$, если:

1) $z^2 + z + 1 = 0$; 2) $\dfrac{1}{z} + z = 1$.

2.14. При каких комплексных z выражения $(3+i)z+1-5i$ и z^2+1-4i одновременно имеют действительные значения?

2.15. Вычислите:

1) $\sqrt{5+12i}$; 2) $\sqrt{5-12i}$; 3) $\sqrt{-5+12i}$;

4) $\sqrt{-5-12i}$; 5) $\sqrt{24+10i}$; 6) $\sqrt{24-10i}$;

7) $\sqrt{-24+10i}$; 8) $\sqrt{-24-10i}$;

9) $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}}$.

2.16. Решите уравнения:

1) $z^2+(6+i)z+5+5i=0$;

2) $z^2-(5+5i)z+2+11i=0$;

3) $4z^2-(6+4i)z-1+3i=0$;
4) $3z^2-(14-8i)z+8(4-3i)=0$;
5) $2(2-i)z^2+(7-i)z+5(1+i)=0$;
6) $(3-i)z^2-2(2-3i)z-4i=0$;
7) $(2+4i)z^2+2z+6-6i=0$.

2.17. Решите уравнения:
1) $z^4-12z^2+64=0$; 2) $9z^4+5z^2+1=0$.

2.18. Найдите, при каких комплексных значениях k следующие уравнения имеют равные корни:
1) $x^2-2(3+2i)x-(k-5)=0$;
2) $x^2-2(2k-i)x+3-4i=0$.

2.19. Найдите, при каких вещественных значениях k следующие уравнения не имеют вещественных корней:
1) $(k+3)x^2-2(k-2)x+(k-3)=0$;
2) $(k-1)x^2-2(2k-1)x-(k+1)=0$?

2.20. Вычислите:
1) $(1+2i)^3$; 2) $(1-2i)^4$; 3) $(2+i)^5$;
4) $(1-i)^6+(1+i)^6$; 5) $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^6$.

2.21. Докажите, что:
1) $1-C_8^2+C_8^4-C_8^6+C_8^8=16$;
2) $1-C_9^2+C_9^4-C_9^6+C_9^8=-16$;
3) $C_9^1-C_9^3+C_9^5-C_9^7+C_9^9=-16$.

2.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

2.22. Представьте в тригонометрической форме следующие комплексные числа:
1) 2; 2) -2; 3) $2i$; 4) $-2i$; 5) $1+i$; 6) $1-i$;
7) $-1+i$; 8) $-1-i$; 9) $1+i\sqrt{3}$; 10) $-1+i\sqrt{3}$;
11) $\sqrt{3}-i$; 12) $-\sqrt{3}-i$; 13) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;
14) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 15) $\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 16) $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$;
17) $2+\sqrt{3}+i$; 18) $2+\sqrt{3}-i$; 19) $2-\sqrt{3}-i$.

2.23. Найдите аргументы следующих комплексных чисел:
1) $\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$; 2) $-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$;
3) $\cos\varphi-i\sin\varphi$; 4) $-\cos\varphi-i\sin\varphi$;
5) $\sin\varphi+i\cos\varphi$; 6) $\sin\varphi-i\cos\varphi$;
7) $-\sin\varphi-i\cos\varphi$.

2.24. Найдите аргументы следующих комплексных чисел:
1) $u=z^4-z^2$; 2) $v=z^3-iz$,
если $\arg z=\varphi$, $|z|=1$.

2.25. Представьте следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $-\cos\varphi + i\sin\varphi$; 2) $-\sin\varphi + i\cos\varphi$;
3) $1-\cos\varphi - i\sin\varphi$; 4) $1-\cos\varphi + i\sin\varphi$;
5) $-\sin\varphi + i(1+\cos\varphi)$; 6) $-\sin\varphi - i(1+\cos\varphi)$;
7) $1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi$, где $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$;
8) $\mathrm{tg}\,\varphi - i$, где $0 \leqslant \varphi < \pi$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

2.26. Вычислите:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100}$; 2) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$;

3) $\frac{(\sqrt{3}+i)^6}{(-1+i)^8-(1+i)^4}$;

4) $\frac{(-i-\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-i+\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$;

5) $\frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{90}+(1+i)^{96}}$;

6) $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^4} + (1+i)^2(\sqrt{3}-i)$;

7) $\frac{(1+i\,\mathrm{ctg}\,\varphi)^5}{(1-i\,\mathrm{ctg}\,\varphi)^5}$; 8) $\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$;

9) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{3n}}{(1+i)^{4n}}$; 10) $(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$;

11) $(\sin\varphi - i(1+\cos\varphi))^n$; 12) $(1+\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

2.27. Докажите, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi \Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

2.28. Выразите через $\sin x$ и $\cos x$:
1) $\sin 3x$, $\cos 3x$; 2) $\sin 4x$, $\cos 4x$; 3) $\sin 6x$, $\cos 6x$.

2.29. Выразите $\mathrm{tg}\,4x$ и $\mathrm{tg}\,6x$ через $\mathrm{tg}\,x$.

2.30. Докажите, что при любом $n \in \mathbf{N}$ $\cos nx = \cos^n x - C_n^2\cos^{n-2}x\sin^2 x + C_n^4\cos^{n-4}x\sin^4 x - C_n^6\cos^{n-6}x\sin^6 x + \ldots$ и $\sin nx = C_n^1\cos^{n-1}x\sin x - C_n^3\cos^{n-3}x\sin^3 x + C_n^5\cos^{n-5}x\sin^5 x + \ldots$

2.31. Докажите, что

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4};$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

2.32. Докажите, что:

1) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$;

2) $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$;

3) $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}$;

4) $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$;

5) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$;

6) $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{2}$.

2.33. Докажите, что

$$\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\ldots+\cos(\varphi+n\alpha)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+2\alpha)+\ldots+\sin(\varphi+n\alpha)=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

2.34. Пусть $z\in\mathbf{C}$. Докажите, что:

1) $|z|=1\wedge z\neq 1\Leftrightarrow z=\frac{s+i}{s-i}$, где $s\in\mathbf{R}$;

2) $|z|=1\wedge z\neq -1\Leftrightarrow z=\frac{1+ti}{1-ti}$, где $t\in\mathbf{R}$.

2.35. Пусть $n\in\mathbf{N}$. Решите уравнения:

1) $\bar{z}=z^{n-1}$; 2) $\bar{z}^2=z^n$.

2.36. Вычислите:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$; 4) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$;

5) $\sqrt[4]{1+i}$; 6) $\sqrt[4]{1-i}$; 7) $\sqrt[4]{-1-i}$; 8) $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$;

9) $\sqrt[6]{1-i\sqrt{3}}$; 10) $\sqrt[6]{-\sqrt{3}+i}$; 11) $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$;

12) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; 13) $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$; 14) $\sqrt[6]{\frac{-\sqrt{3}+i}{-2-2i}}$;

15) $\sqrt[8]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}}$; 16) $\sqrt[6]{\frac{-128}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$;

17) $\sqrt[5]{\frac{(-\sqrt{12}+2i)^2}{16i^{117}}}$.

2.37. Решите уравнения:

1) $x^8-16=0$; 2) $x^8+16=0$; 3) $x^7-1=0$.

2.38. Пусть $n\in\mathbf{N}$, $n>1$, $c\neq 0$, $c\in\mathbf{R}$. Решите уравнения:

1) $(x+c)^n-(x-c)^n=0$;

2) $(x+ci)^n-(x-ci)^n=0$;

3) $(x+ci)^n+i(x-ci)^n=0$;

4) $(x+ci)^n-(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x-ci)^n=0$ $(\alpha\neq 2k\pi)$.

2.39. Покажите, что все корни уравнения

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\frac{1+ai}{1-ai},$$

где $n\geqslant 1$ — целое, $a\in\mathbf{R}$, действительны и различны.

2.40. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$—все значения $\sqrt[n]{z}$. Докажите, что:

1) если v — какое-то одно значение $\sqrt[n]{t}$, то $u_1v, u_2v, \ldots, u_nv$ — все значения $\sqrt[n]{zt}$;

2) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ — все значения $\sqrt[n]{\bar{z}}$.

2.41. Воспользовавшись предыдущей задачей, найдите все значения следующих корней в алгебраической форме:

1) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 2) $\sqrt[3]{-2-2i}$; 3) $\sqrt[6]{-i}$; 4) $\sqrt[6]{i}$;

5) $\sqrt[8]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$; 6) $\sqrt[8]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

2.42. Найдите первообразные корни из единицы следующих степеней:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 6; 5) 8.

2.43. Докажите, что если ε — первообразный корень n-й степени из единицы и $\varepsilon^s=1$, то s делится на n (в $\mathbf{Z}$).

2.44. Докажите, что произведение корня k-й степени из единицы на корень l-й степени из единицы есть корень kl-й степени из единицы.

2.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

2.45. Какое множество точек комплексной плоскости ($z=x+yi$) задается условием:

1) $x>0$; 2) $y\leqslant 0$; 3) $-1\leqslant x<3$?

2.46. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) $\arg z=\frac{\pi}{4}$; 2) $\arg z=\pi$; 3) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\pi$;

4) $\arg(z-2+i)=\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{4}\leqslant\arg(z-2+i)\leqslant\pi$?

2.47. При каких действительных значениях x и y:

1) числа x^2+y^2-xyi и $2xy+25+4i$ изображаются точками, симметричными относительно действительной оси;

2) числа xy^4-16i и $-2-x^4yi$ изображаются точками, симметричными относительно мнимой оси.

2.48. Пусть $z_1, z_2\in\mathbf{C}$. Докажите, что на комплексной плоскости точки, изображающие числа 0, z_1, z_2, z_1+z_2, являются четырьмя вершинами параллелограмма, причем z_1 и z_2 — противоположные вершины.

2.49. Докажите, что расстояние между двумя точками, изображающими числа z_1 и z_2 на комплексной плоскости, равно $|z_1-z_2|$.

2.50. Определите, какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) $|z|=2$; 2) $|z|\leqslant 2$; 3) $|z|<2$;
4) $|z|\geqslant 2$; 5) $|z|>2$; 6) $|z-1|<3$;

7) $|z+2i|=3$; 8) $|z-1+2i|\geqslant 3$;

9) $\begin{cases}|z-i|\leqslant 1;\\ |z+i|\leqslant 1;\end{cases}$ 10) $\begin{cases}|z-i|\leqslant 2;\\ |z-2-i|=1;\end{cases}$

11) $1<|2i-z|<3$; 12) $1\leqslant|2-z|<3$;

13) $\begin{cases}|z-2-i|\leqslant 3;\\ |z-1+i|\geqslant 2;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}|z+1+2i|<1;\\ |z-2-2i|=2;\end{cases}$

15) $\begin{cases}|z-1>3;\\ \arg z=\frac{\pi}{4};\end{cases}$ 16) $\begin{cases}\frac{\pi}{4}<\arg z<\pi;\\ |1-2i-z|=2.\end{cases}$

2.51. Пусть $|z|=3$. Каковы следующие множества точек комплексной плоскости:

1) $\{2z\}$; 2) $\{-2z\}$; 3) $\{2z-i\}$;
4) $\{2z+1\}$; 5) $\{2z-1+3i\}$?

2.52. Найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент, среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию:

1) $|z-25i|\leqslant 15$; 2) $|z-5i|\leqslant 4$.

2.53. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) $|z-1|=|z+2i|$;
2) $|z-i|=|z+i|=|z-2|$;
3) $|z-4|=|z-i|-|z+5|=0$;
4) $|z+i|+|z-i|<3$; 5) $|z-2i|+|z-i|=1$;
6) $|z-3|+|z+3|\geqslant 1$; 7) $|z-1|>|z-2|$;
8) $|z-1-i|\geqslant|z-2+i|$; 9) $|z-1|-|z+1|=1$;
10) $|z-i|-|z+1|=3$?

2.54. Докажите, что для z_1, $z_2\in\mathbf{C}$ следующие высказывания эквивалентны:

1) $\arg z_1=\arg z_2$; 2) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$;
3) $|z_1-z_2|=||z_1|-|z_2||$; 4) $|z_1|\,|z_2|=z_1\bar{z}_2=\bar{z}_1z_2$;
5) $|z_1|z_2=z_1|z_2|$.

2.55. Докажите, что для z_1, $z_2\in\mathbf{C}$ следующие высказывания эквивалентны:

1) $|\arg z_1-\arg z_2|=\pi$; 2) $|z_1+z_2|=||z_1|-|z_2||$;
3) $|z_1-z_2|=|z_1|+|z_2|$; 4) $|z_1|\,|z_2|=-z_1\bar{z}_2=-\bar{z}_1z_2$;
5) $|z_1|z_2=-z_1|z_2|$.

2.56. Докажите, что для z_1, $z_2\in\mathbf{C}$:

1) $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;
2) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

2.57. Докажите, что для $z\in\mathbf{C}$:

1) $\arg(-z)=\arg z+\pi$, если $0\leqslant\arg z<\pi$;
2) $\arg(-z)=\arg z-\pi$, если $\pi\leqslant\arg z<2\pi$.

2.58. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) неравенство $|z-2+i|u^2-2|z-2+i|u+1>0$ верно для всех $u\in\mathbf{R}$;

2) неравенство $|z-1|^2u^2+2|z+1|u+1 \geqslant 0$ верно для всех $u \in \mathbf{R}$?

2.59. Какое множество точек изображает комплексные числа $z=x+yi$, для каждого из которых:

1) $\sqrt{3x-y}+i\sqrt{x-3y}$ — комплексное число в алгебраической форме, лежащее на окружности радиуса 2 с центром в начале координат;

2) $\sqrt{x^2-1}+i\sqrt{4-y^2}$ — комплексное число в алгебраической форме, лежащее на окружности радиуса $\sqrt{3}$ с центром в начале координат?

2.60. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2-2|z|+6}{|z|+4} < 2$;

2) $\log_{0.3}|z-i| > \log_{0.3}|z+2-i|$;

3) $\log_3(2+|z^2+i|)+\log_{27}\frac{1}{(2+|z^2-i|)^3}=0$;

4) $\log_2(5-|z^2-3i|)-\log_{16}(5-|z^2+3i|)^4=0$;

5) $\log_{0,5}(2+2|z^2-1|)+\log_2(1+|z^2+1|)+1=0$?

2.61. Точка, изображающая комплексное число z, описывает на комплексной плоскости окружность радиуса r с центром в начале координат. Как перемещается точка, изображающая число:

1) z^n; 2) $1/z$; 3) z^2-1+2i?

3. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

3.1. МАТРИЦЫ

3.1. Докажите, что в числовом поле:

1) $a\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} ab_k$;

2) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} a_i b$;

3) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$;

4) $\sum_{i=1}^{s} a_i \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} a_i b_k$.

3.2. Вычислите $A+B$, AB, BA, $3A$, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & i \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.

3.3. Вычислите произведения матриц:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 6 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \\ -4 & -5 & -3 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -3 & -6 \\ -4 & -5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 7 & 11 & 5 & 22 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \\ 4 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & -5 & 16 \\ -1 & 3 & -1 & 11 \\ -1 & 4 & -4 & 15 \\ 1 & -4 & 3 & -14 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$;

7) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

3.4. Вычислите $f(A)$, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 7$;

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - 7x - 4$;

3) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

3.5. Найдите матрицы, перестановочные с матрицей A, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; 2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.6. Найдите матрицы, перестановочные с матрицами A и B, если:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.7. Возведите в степень:

1) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}^n$; 2) $\begin{bmatrix} i & i \\ 0 & i \end{bmatrix}^n$; 3) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$;

4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n$.

3.8. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с коэффициентами из поля F, A — матрица над F. Докажите, что:

1) $\varphi(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow \varphi(A)=f(A)+g(A)$;

2) $\psi(x)=f(x)g(x) \Rightarrow \psi(A)=f(A)g(A)$;

3) $f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

3.9. Пусть E_{ik} — матрица n-го порядка, у которой на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит единица, а все остальные элементы — нули и $A=(a_{ik})$ — произвольная матрица n-го порядка:

1) найдите AE_{ik}; 2) найдите $E_{ik}A$;

3) укажите, при каком условии $AE_{ik}=E_{ik}A$;

4) покажите, что если матрица A перестановочна с каждой матрицей E_{ik} $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, то она имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix}$$

(матрица такого вида называется *скалярной*);

5) докажите, что матрица A перестановочна с каждой матрицей n-го порядка тогда и только тогда, когда A скалярна.

3.10. Пусть A и B — диагональные матрицы. Покажите, что матрица AB также диагональная и $AB=BA$. (Матрица A называется *диагональной,* если $a_{ik}=0$ при $i\neq k$.)

3.11. Докажите, что матрица, перестановочная с диагональной матрицей, имеющей попарно-различные диагональные элементы, сама диагональна.

3.12. Пусть A и B — треугольные матрицы. Покажите, что матрица AB также треугольная. Всегда ли $AB=BA$? (Матрица A называется *треугольной,* если $a_{ik}=0$ при $i<k$.)

3.13. Докажите, что если $AB=BA$, то:

1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

2) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$;

3) $(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+C_n^2A^{n-2}B^2+\ldots+B^n$.

3.14. Докажите, что:

1) $(A')'=A$; 2) $(cA+dB)'=cA'+dB'$;

3) $(AB)'=B'A'$; 4) $(A_1A_2\ldots A_n)'=A_n'\ldots A_2'A_1'$;

5) $AB=BA \Leftrightarrow A'B'=B'A'$.

3.15. Матрица A называется *симметрической,* если $A=A'$ (A' — транспонированная к A). Покажите, что если A — симметрическая матрица, то при любой матрице B матрица BAB' тоже симметрическая. Докажите, что если A и B — симметрические матрицы, то матрица AB — симметрическая тогда и только тогда, когда $AB=BA$.

3.16. Пусть X — матрица 2-го порядка. Решите уравнения:

1) $X^2=0$; 2) $X^2=E$; 3) $X^2=X$.

3.17. Пусть $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, где a, b, $c \in \mathbf{R}$. Найдите все такие a, b, c, чтобы $A^n = E$ при каком-нибудь натуральном n.

3.18. *Следом* квадратной матрицы A (обозначается $\operatorname{tr} A$) называется сумма элементов ее главной диагонали. Пусть A, B — матрицы n-го порядка. Докажите, что:

1) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;
2) $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr} A$; 3) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$;
4) $AB - BA \neq E$.

3.19. Пусть A — матрица n-го порядка:

1) найдите $\operatorname{tr}(AE_{ik})$ (см. задачу 3.9);
2) докажите, что если $\operatorname{tr} AX = 0$ для всех X, то $A = 0$.

3.20. Квадратная матрица A называется *матрицей подстановок*, если в каждой ее строке и в каждом столбце ровно один элемент отличен от нуля и равен единице. Докажите, что произведение двух матриц подстановок является матрицей подстановок.

3.21. Квадратная матрица A с неотрицательными элементами называется *стохастической*, если в каждой строке этой матрицы сумма элементов равна единице. Если при этом и в каждом столбце сумма элементов равна единице, то матрица называется *дважды стохастической*. Докажите, что:

1) произведение стохастических матриц является стохастической матрицей;

2) произведение дважды стохастических матриц является дважды стохастической матрицей.

3.22. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, если

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

3.23. Пусть $A^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = [a_{ik}(n)]$. Докажите, что существует предел отношения $\dfrac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$ при $n \to \infty$, и вычислите этот предел.

3.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

3.24. Определите число инверсий в перестановках:

1) 1 3 5 7 9 2 4 6 8; 2) 9 8 7 6 5 4 3 2 1;
3) 2 5 8 1 4 7 3 6 9; 4) 7 5 4 6 1 2 3 9 8.

3.25. Подберите k и l так, чтобы перестановка:

1) $7\ 4\ 3\ k\ l\ 8\ 5\ 2$ была нечетной;
2) $k\ 3\ 4\ 7\ l\ 2\ 6\ 5$ была четной;
3) $4\ 8\ k\ 2\ 5\ l\ 1\ 7$ была четной;
4) $6\ 3\ 4\ k\ 7\ l\ 2\ 1$ была нечетной.

3.26. Определите число инверсий в перестановках:

1) $n\ n-1\ n-2 \ldots 2\ 1$;
2) $1\ 3\ 5\ 7 \ldots 2n-1\ 2\ 4\ 6 \ldots 2n$;
3) $2\ 4\ 6 \ldots 2n\ 1\ 3\ 5 \ldots 2n-1$;
4) $2n-1\ 2n-3 \ldots 5\ 3\ 1\ 2n\ 2n-2 \ldots 6\ 4\ 2$.

3.27. Выясните, какие из следующих произведений являются членами определителя 7-го порядка, и укажите знак члена определителя:

1) $a_{43}a_{53}a_{63}a_{15}a_{23}a_{34}a_{71}$;
2) $a_{23}a_{67}a_{54}a_{16}a_{35}a_{41}a_{72}$;
3) $a_{15}a_{28}a_{74}a_{36}a_{61}a_{43}$;
4) $a_{72}a_{16}a_{33}a_{55}a_{27}a_{61}a_{44}$.

3.28. Подберите k и l так, чтобы в определитель 6-го порядка входили произведения:

со знаком минус:

1) $a_{62}a_{35}a_{k3}a_{44}a_{l6}a_{21}$;
2) $a_{1k}a_{25}a_{44}a_{6l}a_{52}a_{31}$;

со знаком плюс:

3) $a_{63}a_{16}a_{5l}a_{45}a_{2k}a_{31}$;
4) $a_{k5}a_{21}a_{34}a_{13}a_{l6}a_{62}$.

3.29. С каким знаком входит в определитель n-го порядка:

1) произведение элементов главной диагонали;
2) произведение элементов побочной диагонали?

3.30. Вычислите определители, пользуясь только определением:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & \log_{a^2} b \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \ldots & -3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -n & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 2 & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 3 & \dots & a \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ . & . & . & . & . \\ a_n & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3.31. Разложите следующие определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix}$ по элементам 4-го столбца;

2) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ по элементам 1-го столбца;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ по элементам 3-й строки.

3.32. Как изменится определитель n-го порядка, если:

1) каждый его элемент умножить на -1;

2) каждый его элемент заменить сопряженным числом;

3) i-ю строку переставить на последнее место, а $(i+1)$-ю и все последующие строки передвинуть вверх, сохраняя их расположение;

4) его строки записать в обратном порядке;

5) к каждой строке, начиная со 2-й, прибавить предыдущую;

6) к каждой строке, начиная со 2-й, прибавить предыдущую, а к первой строке прибавить последнюю?

3.33. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & -2 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 5 & 1 & 7 \\ 8 & 8 & 3 & 3 & 10 \\ 5 & 0 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & -8 & 2 \\ 4 & 3 & 10 & -9 & 3 \\ 5 & 3 & 11 & -10 & 4 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 & -1 & -5 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

3.34. Вычислите коэффициент при x в разложении определителя:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & x & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & x \\ 7 & -1 & 4 & 15 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

3.35. Решите уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 3-x^2 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 5 \\ -7 & -7 & 6 & x^2-3 \end{vmatrix} = 0$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 2-x & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 4+x & 12 \\ -4 & x-14 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

3.36. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a+x_1 & a & \dots & a \\ a & a & a+x_2 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a+x_{n-1} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & a & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & a & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & a \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a & a \\ a & 2 & a & \dots & a & a \\ a & a & 3 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & n & a \\ a & a & a & \dots & a & a \end{vmatrix}$.

5) $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ a & x & a & \dots & a & a \\ a & a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x & a \\ a & a & a & \dots & a & x \end{vmatrix}$ (n-го порядка).

3.3. ОБРАТИМЫЕ МАТРИЦЫ

3.37. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ d = \det A,$$

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Докажите, что:

1) $AB = BA = dE$;
2) $\det AB = 0 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \det B = 0$;
3) если $d \neq 0$, то $AX = E \Leftrightarrow X = \frac{1}{d} B$.

3.38. Вычислите обратные для следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

3.39. Пусть A — невырожденная $n\times n$-матрица, B — $n\times m$-матрица. Докажите, что:

1) уравнение $AX=B$ имеет решение (т. е. существует такая $n\times m$-матрица C, что $AC=B$);

2) решение уравнения $AX=B$ единственное.

3.40. Решите матричные уравнения: а) $AX=C$, б) $XB=C$, в) $AXB=C$, где:

1) $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

4) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

5) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.41. Докажите, что:

1) если A — матрица подстановок (см. задачу 3.20), то A^{-1} существует и также является матрицей подстановок;

2) если сумма элементов каждой строки невырожденной матрицы A равна единице, то тем же свойством обладает и матрица A^{-1};

3) если A — невырожденная стохастическая матрица (см. задачу 3.21), то A^{-1} может и не быть стохастической.

3.42. Пусть A — матрица n-го порядка и $(E+A)^k=O$ при некотором натуральном k. Докажите, что матрица A невырожденная.

3.43. Пусть A, B, C — матрицы n-го порядка и $ABC=E$. Выясните, какие из равенств $BAC=E$, $ACB=E$, $CAB=E$, $BCA=E$, $CBA=E$ имеют место всегда, а какие — не всегда.

3.44. Докажите, что если A, B — невырожденные матрицы n-го порядка, то $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3.45. Пусть A — обратимая матрица. Докажите, что:

1) $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}$;

2) транспонированная матрица A' — также обратимая и $(A')^{-1}=(A^{-1})'$;

3) для любой матрицы B $\det A^{-1}BA = \det B$.

3.46. Вещественная матрица A n-го порядка называется *ортогональной*, если $AA' = E$. Докажите, что вещественная матрица $A = (a_{ik})$ ортогональна тогда и только тогда, когда при любых i и $k \neq i$

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}^2 = 1; \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{ks} = 0.$$

3.47. Докажите, что:

1) определитель ортогональной матрицы равен ± 1;

2) произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица;

3) матрица, обратная ортогональной, сама ортогональна.

3.48. Покажите, что любая ортогональная матрица 2-го порядка с определителем, равным единице, может быть записана в форме

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

3.49. Комплексная матрица A n-го порядка называется *унитарной*, если $A\bar{A}' = E$. Докажите, что комплексная матрица $A = (a_{ik})$ унитарна тогда и только тогда, когда при любых i и $k \neq i$

$$\sum_{s=1}^{n} |a_{is}|^2 = 1; \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{is} \bar{a}_{ks} = 0.$$

3.50. Докажите, что:

1) модуль определителя унитарной матрицы равен единице;

2) произведение унитарных матриц есть унитарная матрица;

3) матрица, обратная унитарной, сама унитарная.

3.51. Покажите, что любая унитарная матрица 2-го порядка с определителем, равным единице, может быть записана в форме

$$\begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix}, \quad |u|^2 + |v|^2 = 1.$$

3.52. Пусть $u_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ и

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & u_1 & u_2^2 & \dots & u_1^{n-1} \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{n-1} & u_{n-1}^2 & \dots & u_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Покажите, что матрица $\frac{1}{\sqrt{n}}U$ унитарная.

3.4. ПРАВИЛО КРАМЕРА

3.53. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_s \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Покажите, что решение матричного уравнения $AX=B$ сводится к решению системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1; \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\dots+a_{sn}x_n=b_s, \end{aligned}$$

и наоборот, решение этой системы уравнений сводится к решению матричного уравнения $AX=B$.

3.54. Пусть в предыдущей задаче $s=n$ и матрица A невырожденная:

1) докажите, что уравнения $AX=B$ и $X=A^{-1}B$ эквивалентны;

2) запишите последнее уравнение в явном виде.

3.55. Решите системы по правилу Крамера:

1) $\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3&=11; \\ x_1+2x_2-x_3&=11; \\ 4x_1-3x_2-3x_3&=24; \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} x_1-3x_2-4x_3&=4; \\ 2x_1+x_2-3x_3&=-1; \\ 3x_1-2x_2+x_3&=11; \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+3x_4&=0; \\ 3x_1-x_2-x_3-5x_4&=-12; \\ 2x_1+2x_2+x_3-4x_4&=-13; \\ x_1-3x_2-6x_3+x_4&=1; \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+2x_4&=5; \\ x_1+3x_2-x_3+5x_4&=4; \\ 5x_1+4x_2+3x_3&=2; \\ 3x_1-3x_2-x_3-6x_4&=-6; \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4&=-8; \\ 2x_1+3x_2-x_3+5x_4&=19; \\ 4x_1-x_2+x_3+x_4&=-1; \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4&=-2; \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-4x_4-x_5&=13; \\ x_1+2x_2+3x_3-5x_4&=15; \\ x_2-2x_3+x_4+3x_5&=-7; \\ x_1-7x_3+8x_4-x_5&=-30; \\ 3x_1-x_2-5x_5&=4; \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x_1+x_2+4x_3+x_4-x_5&=2; \\ x_1-2x_2-2x_3+3x_5&=0; \\ 4x_2+3x_3-2x_4+2x_5&=2; \end{aligned}$

$$2x_1 \quad\quad - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -2;$$
$$3x_1 + 2x_2 \quad\quad + 5x_4 + 3x_5 = 3.$$

3.56. Решите системы:

1) $(1-i)x-(3+i)y=4;$
$5x-(4+2i)y=9+2i;$

2) $5ix-(2+i)y=4i;$
$-15x-(6i-3)y=-12;$

3) $(1+i)x-2iy=-2;$
$(1-i)x+(2-i)y=3-3i;$

4) $(1-i)x+3iy=5;$
$2x-(3-3i)y=6.$

3.57. Решите системы с действительными коэффициентами:

1) $2x-(9a^2-2)y=3a;$
$x+y=1;$

2) $2x+ay=a+2;$
$(a+1)x+2ay=2a+4;$

3) $ax-4y=a+1;$
$2x+(a+6)y=a+3;$

4) $(a^2-1)x+(a+1)y=a^2-2;$
$(a+1)x+2ay=2a+1.$

3.58. Числа a, b, c таковы, что система уравнений

$$ax-by=2a-b;$$
$$(c+1)x+cy=10-a+3b$$

имеет бесконечно много решений, причем $x=1$, $y=3$ — одно из этих решений. Найдите числа a, b, c.

3.59. Решите системы:

1) $x+y+z=1;$
$ax+by+cz=d;$
$a^2x+b^2y+c^2z=d^2;$

2) $a^3+a^2x+ay+z=0;$
$b^3+b^2x+by+z=0;$
$c^3+c^2x+cy+z=0.$

3.60. Коэффициенты системы уравнений

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0;$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0;$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0$$

удовлетворяют следующим условиям: а) a_{11}, a_{22}, a_{33} положительны, б) все остальные коэффициенты отрицательны, в) сумма коэффициентов каждого уравнения положительна. Докажите, что система имеет единственное решение.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

4.1. Определите, является ли линейным пространством над $\mathbf{R}$ каждое из следующих множеств с обычным сложением и с обычным умножением на число:

1) множество V_0, состоящее из одного нулевого вектора на декартовой плоскости;

2) множество V_1 всех векторов декартовой плоскости, лежащих на прямой, проходящей через начало координат;

3) множество всех векторов декартовой плоскости, концы которых лежат на прямой, не проходящей через начало координат;

4) множество всех векторов декартовой плоскости, концы которых лежат в первой четверти;

5) множество V_2 всех векторов декартовой плоскости;

6) множество $\mathbf{R}$; 7) множество $\mathbf{C}$; 8) множество $\mathbf{Q}$;

9) множество $C[a, b]$ всех непрерывных действительных функций на отрезке $[a, b]$;

10) множество T всех многочленов с действительными коэффициентами;

11) множество T_n всех многочленов с действительными коэффициентами, степень которых не превосходит n;

12) множество всех многочленов с действительными коэффициентами, степень которых равна n;

13) множество $M_n(\mathbf{R})$ всех квадратных матриц n-го порядка над $\mathbf{R}$.

4.2. Пусть K — подполе поля P. Докажите, что если сложение в P рассматривать как сложение векторов, а умножение x из P на $k \in K$ — как умножение вектора на скаляр, то P будет линейным пространством над K.

4.3. Пусть L — линейное пространство над полем K. Докажите, что:

1) в L существует единственный нулевой вектор;

2) для каждого $\mathbf{a} \in L$ существует единственный противоположный вектор;

3) для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ уравнение $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$ имеет решение и это решение единственное;

4) $0\mathbf{a}=\mathbf{o}$ для любого $\mathbf{a} \in L$;

5) $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$ для любого $\mathbf{a}\in L$;

6) $k\mathbf{o}=\mathbf{o}$ при любом $k\in K$;

7) $k\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ при любом $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ из L и $k\neq 0$ из K.

4.4. Пусть K — числовое поле. На множестве $K^n=\{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,|\,a_i\in K\}$, элементы которого назовем *векторами*, определим операции — сложение векторов и умножение вектора на скаляр:

а) для любых $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n);$$

б) для любого $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $k\in K$

$$k\mathbf{a}=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

Докажите, что K^n с этими операциями — линейное пространство.

4.5. Пусть $\mathbf{a}_1=(0, 1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2=(4, -4, 3, -3)$, $\mathbf{a}_3=(-1, 0, 1, 2)$ — векторы из K^n. Найдите линейные комбинации:

1) $\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3$; 2) $-\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2-5\mathbf{a}_3$.

4.6. Решите уравнения:

1) $2\mathbf{a}_1+\mathbf{x}=-\mathbf{a}_2$; 2) $3\mathbf{a}_3-4\mathbf{x}=5\mathbf{a}_1$,

где значения $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — такие же, как в задаче 4.5.

4.7. Определите, какие из следующих систем векторов пространства K^n линейно-зависимы, какие линейно-независимы:

1) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2=(1, 2, 3, 4)$;

2) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2=(-1, -2, -3, -4)$;

3) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2=(3, 6, 9, 12)$;

4) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2=(1, 2, 3, 5)$;

5) $\mathbf{e}_1=(1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0, 0)$;
$\mathbf{e}_3=(0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4=(0, 0, 0, 1)$;

6) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{a}$, где значения $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ — как в п. 5, а $\mathbf{a}$ — произвольный вектор из K^4;

7) $\mathbf{a}_1=(1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2=(0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3=(0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4=(0, 0, 0, 1)$;

8) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2=(3, 6, 9, 12)$, $\mathbf{a}_3=(1, 2, 3, 6)$.

4.8. В пространстве T_3 многочленов степени $\leqslant 3$ рассмотрим систему, состоящую из многочленов $f_1(x)=1+2x-x^3$, $f_2(x)=-1+x^2+x^3$, $f_3(x)=-1+4x+3x^2+x^3$. Найдите следующие линейные комбинации этих многочленов:

1) $3f_1+2f_2-f_3$; 2) $2f_1+3f_2-f_3$.

4.9. Докажите, что в пространстве T_3:

1) система многочленов $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^3$ линейно-независима;

2) система, состоящая из этих многочленов f_0, f_1, f_2, f_3 и произвольного многочлена $f\in T_3$, линейно-зависима.

Обобщите эти утверждения на пространство T_n.

4.10. Пусть $f_k(x)$ — многочлен k-й степени. Докажите, что система $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ линейно-независима.

4.11. Докажите, что в пространстве $C[a, b]$ функций, непрерывных на $[a, b]$:

1) система, состоящая из функций $f_0(x)=1$, $f_1(x)=\sin^2 x$, $f_2(x)=\cos^2 x$, линейно-зависима;

2) для любого натурального n существует система, состоящая из n линейно-независимых функций.

4.12. Пусть L — линейное пространство над полем K. Докажите, что:

1) если подсистема системы векторов линейно-зависима, то и вся система линейно-зависима;

2) всякая подсистема линейно-независимой системы векторов линейно-независима;

3) система, состоящая из одного вектора $\mathbf{a}$, линейно-зависима тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}=0$;

4) система, состоящая из двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, линейно-зависима тогда и только тогда, когда они пропорциональны;

5) система s векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ $(s\geqslant 2)$ линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы является линейной комбинацией других векторов;

6) если система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ линейно-независима, а система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}$ линейно-зависима, то вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ и притом единственным образом.

4.13. Пусть L — линейное пространство над полем K, $(\mathbf{a})$ — система векторов из L. Докажите, что:

1) если система $(\mathbf{a})$ линейно-зависима, то в результате каждого из элементарных преобразований этой системы будет получаться линейно-зависимая система;

2) если система векторов $(\mathbf{b})$ получается из системы векторов $(\mathbf{a})$ в результате элементарных преобразований, то система векторов $(\mathbf{a})$ получается из системы векторов $(\mathbf{b})$ в результате элементарных преобразований;

3) если система $(\mathbf{a})$ линейно-независима, то в результате каждого из элементарных преобразований этой системы будет получаться линейно-независимая система.

4.14. Из следующих систем векторов выберите максимальные линейно-независимые подсистемы:

1) $\mathbf{a}_1=(1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2=(0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3=(0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_4=(0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_5=(1, 2, 3, 4)$;

2) $\mathbf{a}_1=(1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2=(1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3=(1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_4=(1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_5=(1, 2, 3, 4)$;

3) $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^3$, $f_4(x)=1-x+x^2-x^3$;

4) $f_0(x)=1$, $f_1(x)=1+x$, $f_2(x)=1+x+x^2$, $f_3(x)=1+x+x^2+x^3$, $f_4(x)=1-x+x^2-x^3$.

4.15. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ $(\mathbf{a})$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_q$ $(\mathbf{b})$ и $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_s$ $(\mathbf{c})$ — системы векторов линейного пространства L. Докажите, что если система $(\mathbf{a})$ линейно выражается через систему $(\mathbf{b})$, а система (b) линейно выражается через систему (c), то система (a) линейно выражается через систему (c).

4.16. Пусть (a) — система векторов линейного пространства L. Докажите, что:

1) если в системе (a) имеется ненулевой вектор, то в ней можно выбрать максимальную линейно-независимую подсистему;

2) любую линейно-независимую подсистему системы (a) можно дополнить до максимальной;

3) система (a) линейно выражается через свою максимальную линейно-независимую подсистему;

4) любая подсистема системы (a) линейно выражается через максимальную линейно-независимую подсистему системы (a).

4.2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

4.17. Пусть

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n&=b_s \end{aligned}$$

есть система линейных уравнений. Докажите, что получится система линейных уравнений, эквивалентная этой системе, если:

1) поменять какие-либо два уравнения местами;

2) умножить одно из уравнений на число $c\neq 0$;

3) умножить одно из уравнений на число k и прибавить к другому уравнению.

4.18. Решите системы уравнений:

1) $$\begin{aligned} x_1-3x_2+4x_3+2x_4&=1;\\ 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4&=-1;\\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4&=0;\\ 12x_1+4x_2+7x_3+2x_4&=0; \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x_1-x_2-3x_4&=-1;\\ 5x_1+5x_2+4x_3+7x_4&=5;\\ x_1-x_3-2x_4&=-3;\\ 7x_1-x_2+x_3-9x_4&=-4;\\ 5x_1-x_2+3x_3-5x_4&=2; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x_1+3x_2-6x_3-2x_4&=-1;\\ 6x_1+x_2-2x_4&=-2;\\ 6x_1-7x_2+21x_3+4x_4&=3;\\ 9x_1+4x_2+2x_4&=3;\\ 12x_1-6x_2+21x_3+2x_4&=1; \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} x_1-2x_2+8x_3+3x_4&=-1;\\ 5x_1+10x_2+2x_3+11x_4&=3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9x_1 + \ 2x_2 + 34x_3 + 23x_4 &= 3;\\
7x_1 + \ 4x_2 + 26x_3 + 20x_4 &= 4;
\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned}
-2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 5;\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -3;\\
4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0;\\
2x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 1;\\
2x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 3;
\end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned}
6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 5;\\
3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \qquad &= 1;\\
x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 &= -1;\\
3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1;\\
3x_1 + x_2 \qquad + x_4 + x_5 &= 0;
\end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 11;\\
3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 13;\\
4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= 6;\\
5x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad &= 3;\\
6x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 23;
\end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 4;\\
x_1 + 2x_2 \qquad - x_5 &= 1;\\
2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 &= 1;\\
2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1;\\
3x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 + 2x_5 &= 7;
\end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4;\\
3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 5;\\
x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 &= 11;\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 &= 6;
\end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned}
4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 &= 5;\\
2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1;\\
x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2;\\
x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 &= 8;
\end{aligned}$$

11) $$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1;\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 2;\\
2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 20x_5 &= 16;\\
x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 + x_5 &= 56;\\
3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 &= 6;
\end{aligned}$$

12) $$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1;\\
2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 3;\\
x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= -7;\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 2.
\end{aligned}$$

4.19. Решите системы уравнений:

1) $$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -2;\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3;\\
5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= \lambda;
\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + \lambda x_3 &= 0;\\
x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -3;\\
x_1 + x_2 + 3x_3 &= -1;
\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}
(-1 + 2\lambda)x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 2 - \lambda;\\
\lambda x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1;
\end{aligned}$$

$$x_1+\ x_2+\lambda x_3=1;$$

4) $$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3+\lambda x_4&=1;\\ x_1+\ x_2+\lambda x_3+\ x_4&=-1;\\ x_1+\lambda x_2+\ x_3+\ x_4&=0;\\ \lambda x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4&=0. \end{aligned}$$

4.20. Пусть (a):

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_1&=(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{l1});\\ \mathrm{a}_2&=(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{l2});\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \mathrm{a}_k&=(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{lk}) \end{aligned}$$

является системой l-мерных векторов. Докажите, что:

1) если $\mathrm{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_l)$, то $c_1\mathrm{a}_1+c_2\mathrm{a}_2+\ldots+c_k\mathrm{a}_k=\mathrm{b}$ тогда и только тогда, когда $c_1c_2, \ldots, c_n$ — решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k&=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2k}x_k&=b_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\ldots+a_{lk}x_k&=b_l; \end{aligned}$$

2) система векторов (a) линейно-зависима тогда и только тогда, когда система линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k&=0;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2k}x_k&=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\ldots+a_{lk}x_k&=0 \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение;

3) если $k>l$, то система векторов (a) линейно-зависима.

4.21. Докажите, что в пространстве K^n:

1) существует линейно-независимая система, состоящая из n векторов;

2) всякая система, состоящая более чем из n векторов, линейно-зависима;

3) всякая линейно-независимая система, состоящая из n векторов, будет максимальной линейно-независимой.

4.22. Выясните линейно-зависима или линейно-независима система векторов. В линейно-зависимой системе выпишите какую-нибудь линейную зависимость. Выделите какую-нибудь максимальную линейно-независимую подсистему:

1) $\mathrm{a}_1=(2, 1, -2, -1)$, $\mathrm{a}_2=(-9, 5, -6, 21)$, $\mathrm{a}_3=(2, -5, -1, 3)$, $\mathrm{a}_4=(-1, -1, -1, 5)$, $\mathrm{a}_5=(-1, 2, -3, 4)$;

2) $\mathrm{a}_1=(1, 1, 1, 1)$, $\mathrm{a}_2=(2, 0, 1, -1)$, $\mathrm{a}_3=(3, -4, 0, -1)$, $\mathrm{a}_4=(13, -10, 3, -2)$;

3) $\mathrm{a}_1=(1, -1, 1, -1)$, $\mathrm{a}_2=(2, 0, 1, -1)$, $\mathrm{a}_3=(3, -1, 1, -1)$, $\mathrm{a}_4=(4, -2, 1, -2)$;

4) $a_1=(1, 1, 1, 1)$, $a_2=(1, 2, 3, 4)$, $a_3=(-2, 0, 2, 4)$, $a_4=$ $=(0, 3, 6, -5)$;

5) $a_1=(1, 2, -2, -1)$, $a_2=(-1, 0, 2, 1)$, $a_3=(0, 1, 0, 1)$, $a_4=$ $=(3, 6, 0, 4)$;

6) $a_1=(1, 2, -2, 1)$, $a_2=(-3, 1, 2, -3)$, $a_3=(0, 7, -4, 0)$, $a_4=(0, 1, 2, 3)$.

4.23. Покажите, что вычисление матрицы, обратной к $n\times n$-матрице A, можно свести к решению n систем линейных уравнений, каждое из которых состоит из n уравнений с n неизвестными и имеет матрицей коэффициентов при неизвестных матрицу A.

4.24. Указанным в задаче 4.23 методом найдите обратные для следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

4.25. Для следующих матриц n-го порядка найдите обратные:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ . & . & . & . & . \\ b & b & b & \dots & a \end{bmatrix}$, $a\neq b$, $a\neq b(1-n)$.

4.3. РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ. РАНГ МАТРИЦЫ

4.26. Чему равен ранг системы векторов в каждой из задач 4.14, 4.22?

4.27. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ (a) — система векторов в K^n. Докажите, что:

1) если ранг системы (a) равен r, то всякая ее подсистема, содержащая более чем r векторов, линейно-зависима;

2) если ранг системы (a) равен r, то любая ее линейно-независимая подсистема, содержащая r векторов, является максимальной;

3) если вектор b линейно выражается через систему (a), то ранги систем (a) и $a_1, a_2, \dots, a_k, b$ (b) равны.

4.28. Вычислите ранг матриц:

1) $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -6 & 9 & -1 & -2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 12 & -3 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & -9 & -5 & -2 & 9 & -5 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & -4 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & -3 & -5 & -7 & -8 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & -4 & 0 & 15 \\ 7 & 15 & 22 & 11 & 14 & 10 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & -9 & -2 & -8 \\ 3 & 11 & 12 & 9 & 5 & 11 \\ 2 & 26 & 8 & -2 & 16 & -2 \\ 23 & -4 & 19 & 28 & -9 & 31 \end{bmatrix}$.

4.29. Найдите ранг системы векторов. Выясните, является ли система линейно-зависимой или линейно-независимой:

1) $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 2, -8, 2)$;
$\mathbf{a}_2 = (1, -2, 1, 5, 3)$;
$\mathbf{a}_3 = (1, -2, 4, -7, 0)$;

2) $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 1, -1)$;
$\mathbf{a}_2 = (3, 1, 4, 2)$;
$\mathbf{a}_3 = (1, 2, 3, -1)$;
$\mathbf{a}_4 = (1, -4, -7, 5)$;

3) $\mathbf{a}_1 = (2, -1, -3, 2, -6)$;
$\mathbf{a}_2 = (1, 5, -2, 3, 4)$;
$\mathbf{a}_3 = (3, 4, -1, 5, 7)$;
$\mathbf{a}_4 = (3, -7, 4, 1, -7)$;
$\mathbf{a}_5 = (0, 11, -5, 4, -4)$;

4) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 4, -4, 17)$;
$\mathbf{a}_2 = (0, 0, 5, -7, 9)$;
$\mathbf{a}_3 = (2, 1, -6, 10, -11)$;
$\mathbf{a}_4 = (8, 4, 1, 5, 11)$;
$\mathbf{a}_5 = (2, 2, 9, -11, 10)$.

4.30. Докажите, что если в матрице A все миноры k-го порядка равны нулю, то:

1) в матрице A все миноры более высоких порядков равны нулю;

2) в транспонированной матрице A' все миноры k-го порядка равны нулю.

4.31. Докажите, что:

1) если к матрице приписать один столбец, то ее ранг либо не изменится, либо увеличится на единицу;

2) если после вычеркивания какого-то столбца ранг матрицы не изменится, то этот столбец линейно выражается через другие столбцы;

3) если какой-то столбец матрицы линейно выражается через другие столбцы этой матрицы, то после его вычеркивания ранг матрицы не изменится;

4) ранг суммы двух матриц не превосходит суммы их рангов.

4.32. Укажите, при каких значениях λ следующие системы совместны; несовместны; имеют единственное решение; бесконечно много решений:

1) $\begin{aligned} x_1+2x_2-\ x_3&=1;\\ 4x_1-\ x_2+3x_3&=0;\\ 4x_1-\ x_2+\lambda x_3&=0;\\ 3x_1+\lambda x_2+4x_3&=-1;\end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\lambda x_4&=1;\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4&=1;\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4&=1;\\ \lambda x_1+x_2+x_3+x_4&=1;\end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3+2x_4&=2;\\ 2x_1+9x_2\qquad+4x_4&=2;\\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4&=2;\\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4&=7.\end{aligned}$

4.33. Докажите, что следующие системы линейных уравнений совместны:

1) $$\begin{aligned} x_1\qquad\qquad\qquad &= a_1;\\ -x_1+x_2\qquad\qquad &= a_2;\\ -x_2+x_3\qquad &= a_3;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\ -x_{n-2}+x_{n-1} &= a_{n-1};\\ -x_{n-1} &= a_n,\end{aligned}$$

где $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$;

2) $$\begin{aligned} x_1\qquad\qquad\qquad &= a_1;\\ x_1+x_2\qquad\qquad &= a_2;\\ x_2+x_3\qquad &= a_3;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\ x_{n-2}+x_{n-1} &= a_{n-1};\\ x_{n-1} &= a_n,\end{aligned}$$

где $a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n-1}a_n=0$;

3) $$\begin{aligned} x_1\qquad\qquad\qquad\qquad &= a_0;\\ +x_2\qquad\qquad\qquad &= a_1;\\ -x_1\quad+x_3\qquad\qquad &= a_2;\\ -x_2\quad+x_4\qquad &= a_3;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\ -x_{n-3}\qquad+x_{n-1} &= a_{n-2};\\ -x_{n-2}\qquad &= a_{n-1};\\ x_{n-1} &= a_n,\end{aligned}$$

где $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=0$ и $a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots+(-1)^n a_n=0$.

4.34. Пусть

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1;$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\dots+a_{sn}x_n=b_s$$

является совместной системой линейных уравнений, а r — ранг матрицы этой системы. Докажите, что система:

1) эквивалентна некоторой своей части, состоящей из r уравнений;

2) имеет единственное решение, если $r=n$;

3) имеет бесконечно много решений, если $r<n$.

4.35. Пусть r — ранг матрицы системы линейных однородных уравнений с n неизвестными. Докажите, что система имеет:

1) единственное (нулевое) решение, если $r=n$;

2) ненулевое решение, если $r<n$.

4.36. Докажите, что система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда определитель этой системы равен нулю.

4.4. ИЗОМОРФИЗМ, БАЗИС, РАЗМЕРНОСТЬ

4.37. Пусть L и L' — линейные пространства над полем K, $\varphi: L\to L'$ — изоморфизм L на L'. Докажите, что:

1) $\varphi^{-1}: L'\to L$ — изоморфизм L' на L;

2) $\varphi(\mathbf{o})=\mathbf{o}'$;

3) $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{s} k_i\mathbf{a}_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{s} k_i\,\varphi(\mathbf{a}_i)$.

4.38. Докажите, что поле $\mathbf{C}$, рассматриваемое как векторное пространство над полем $\mathbf{R}$, изоморфно пространству $\mathbf{R}^2$.

4.39. Докажите, что если каждому многочлену $f(x)=a_0+$ $+a_1x+\dots+a_nx_1^n$ из T_n — пространства многочленов степени $\leqslant n$ сопоставить вектор $(a_0, a_1, \dots, a_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$, то полученное отображение будет изоморфизмом T_n на $\mathbf{R}^{n+1}$.

4.40. Пусть $\varphi: L\to L'$ — изоморфизм линейных пространств. Докажите, что система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$ из L:

1) линейно-зависима тогда и только тогда, когда линейно-зависима система их образов $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \dots, \mathbf{a}_s'$;

2) линейно-независима тогда и только тогда, когда линейно-независима система их образов $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \dots, \mathbf{a}_s'$;

3) является максимальной линейно-независимой тогда и только тогда, когда максимальной линейно-независимой является система их образов.

4.41. Найдите ранг и максимальную линейно-независимую подсистему системы векторов:

1) $f_1(x)=3x^2-2x+1$; $f_2(x)=4x^2-3x+2$; $f_3(x)=4x^2-3x+4$; $f_4(x)=x^2-x+1$;

2) $f_1(x)=4x^3-5x^2+6x-7$; $f_2(x)=3x^3-4x^2+5x-6$; $f_3(x)=-2x^3+3x^2-4x+5$; $f_4(x)=x^3-2x^2+3x-4$.

4.42. Докажите, что при изоморфизме линейного пространства L на L' образом базиса в L будет базис в L'.

4.43. Докажите, что каждая из следующих систем векторов является базисом пространства $\mathbf{C}$ над полем $\mathbf{R}$:

1) $1, i$; 2) $1+i, 1-i$.

4.44. Докажите, что каждая из следующих систем векторов является базисом в пространстве $\mathbf{R}^n$;

1) $\mathbf{e}_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$; $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$; . . . . $\mathbf{e}_n=(0, 0, 0, \ldots, 1)$;

2) $\mathbf{a}_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$; $\mathbf{a}_2=(1, 1, 0, \ldots, 0)$; . . . . $\mathbf{a}_n=(1, 1, 1, \ldots, 1)$;

3) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 3, \ldots, n-1, n)$; $\mathbf{a}_2=(1, 2, 3, \ldots, n-1, 0)$; . . . . $\mathbf{a}_n=(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$.

4.45. Докажите, что каждая из следующих систем векторов является базисом в пространстве T_n:

1) $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, ... $f_n(x)=x^n$;

2) $f_0(x)=1$, $f_1(x)=1+x$, ... $f_n(x)=1+x+\ldots+x^n$;

3) система, состоящая из $n+1$ ненулевых многочленов с попарно-различными степенями.

4.46. Пусть L — линейное пространство над полем K, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ $(\mathbf{e})$ — его базис. Докажите, что:

1) координаты вектора в базисе $(\mathbf{e})$ определяются однозначно;

2) при сложении двух векторов их координаты складываются;

3) при умножении вектора на скаляр его координаты умножаются на этот скаляр;

4) отображение φ пространства L на K^n, сопоставляющее каждому вектору $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n\in L$ вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in K^n$, является изоморфизмом.

4.47. Проверьте, образует ли каждая из следующих систем векторов базис в пространстве $\mathbf{R}^4$, и найдите координаты вектора $\mathbf{x}=(1, 2, 3, 4)$ в каждом из этих базисов:

1) $\mathbf{a}_1=(0, 1, 0, 1)$; $\mathbf{a}_2=(0, 1, 0, -1)$; $\mathbf{a}_3=(1, 0, 1, 0)$; $\mathbf{a}_4=(1, 0, -1, 0)$;

2) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 3, 0)$; $\mathbf{a}_2=(1, 2, 0, 3)$; $\mathbf{a}_3=(1, 0, 2, 3)$; $\mathbf{a}_4=(0, 1, 2, 3)$;

3) $\mathbf{a}_1=(1, 1, 1, 1)$; $\mathbf{a}_2=(1, -1, 1, -1)$; $\mathbf{a}_3=(1, -1, 1, 1)$; $\mathbf{a}_4=(1, -1, -1, -1)$;

4) $\mathbf{a}_1=(1, -2, 3, -4)$; $\mathbf{a}_2=(-4, 1, -2, 3)$; $\mathbf{a}_3=(3, -4, 1, -2)$; $\mathbf{a}_4=(-2, 3, -4, 1)$.

4.48. Проверьте, образует ли каждая из следующих систем многочленов базис в T_4 — пространстве многочленов степени $\leqslant 4$, и найдите координаты многочлена $f(x)=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4$ в каждом из этих базисов:

1) $1, x, x^2, x^3, x^4$;

2) $1-x, x, x^2-x, x^3, x^4-x$;

3) $1-x^4, x-x^4, x^2-x^4, x^3-x^4, x^4$.

4.49. Дополните до базиса системы векторов:

1) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2=(1, 2, 3, 0)$ в пространстве $\mathbf{R}^4$;

2) x^2, x^2-x^4 в пространстве T_4.

4.50. Существует ли в пространстве T_4 базис:

1) состоящий из многочленов 4-й степени;

2) в котором не содержится ни один многочлен 4-й степени;

3) в котором не содержится ни один многочлен 3-й степени?

4.51. Докажите, что множество $M_n(K)$ матриц n-го порядка над полем K с операциями — сложением матриц и умножением матрицы на число из K — является n^2-мерным векторным пространством над K.

4.52. Пусть $X=\{1, 2, \ldots, n\}$, K — поле. Докажите, что множество всех функций из X в K с поточечным сложением функций и умножением функции на число из K является n-мерным векторным пространством над K.

4.53. Докажите, что:

1) в пространстве K^n все базисы состоят из n векторов;

2) если в линейном пространстве L над K один базис состоит из n векторов, то и все базисы состоят из n векторов.

4.54. Докажите, что в n-мерном векторном пространстве L:

1) любая линейно-независимая система из n векторов является базисом;

2) любую линейно-независимую систему можно дополнить до базиса.

4.55. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ (a) — система векторов из n-мерного векторного пространства L и

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ns} \end{bmatrix}$$

есть матрица, столбцами которой являются соответствующие координатные столбцы векторов системы (a) в некотором фиксированном базисе. Докажите, что:

1) система (a) линейно-независима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен s;

2) при $s=n$ система (a) линейно-независима тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

4.5. ПОДПРОСТРАНСТВО. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ. ЛИНЕЙНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

4.56. Докажите, что подмножество M линейного пространства L над полем K является его подпространством тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $M \neq \varnothing$;
2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in M$;
3) $\mathbf{a} \in L, k \in K \Rightarrow k\mathbf{a} \in M$.

4.57. Докажите, что следующие подмножества пространства $\mathbf{R}^n$ являются его подпространствами:

1) $A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_n = 0\}$;
2) $B = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0\}$;
3) $C = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n = 0\}$.

Найдите размерность каждого из этих подпространств.

4.58. Докажите, что следующие подмножества пространства T_n являются его подпространствами, и найдите размерность каждого из этих подпространств:

1) $A = \{f(x) \mid f(0) = 0\}$;
2) $B = \{f(x) \mid f(1) = 0, f(-1) = 0\}$;
3) $C = \{f(x) \mid$ коэффициенты при четных степенях равны $0\}$;
4) $D = \{f(x) \mid$ коэффициенты при нечетных степенях равны $0\}$.

4.59. Пусть L — линейное пространство над полем K, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ (a) — система векторов из L и $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ — множество, состоящее из всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Докажите, что:

1) $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ — подпространство пространства L;
2) размерность подпространства $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ равна рангу системы (a).

4.60. Найдите размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки, натянутой на векторы:

1) $\mathbf{a}_1 = (3, 11, 5, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 12, 5, 10)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 13, 6, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 11, 9, 2)$;
2) $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 6, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (5, 3, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 2, 4, 2, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (6, -5, 6, -3, -1)$, $\mathbf{a}_5 = (0, -5, -2, -3, -1)$;
3) $f_1(x) = 2x + 4x^3 - x^6$, $f_2(x) = x + 2x^3 - x^6$, $f_3(x) = x + 3x^3 + x^6$, $f_4(x) = x^3 + x^6$.

4.61. Докажите, что в n-мерном линейном пространстве L есть подпространства любой размерности $k = 0, 1, \ldots, n$.

4.62. Пусть L — n-мерное векторное пространство, M — его подпространство. Докажите, что:

1) $\dim M \leqslant \dim L$;
2) $\dim M = \dim L \Rightarrow M = L$;
3) существуют такие векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s \in M$, $s \leqslant n$, что M равно их линейной оболочке $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$.

4.63. Докажите, что:

1) множество M решений системы линейных однородных

уравнений с n неизвестными с коэффициентами из поля K является подпространством пространства K^n;

2) система линейных однородных уравнений ранга r эквивалентна системе вида:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = 0, \end{array}$$

в матрице которой один из миноров r-го порядка не равен нулю (можно считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0);$$

3) отображение φ: $M \to K^{n-r}$: $\varphi(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n) = (c_{r+1}, \ldots, c_n)$ — изоморфизм.

4.64. Найдите фундаментальную систему решений систем уравнений:

1) $$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0; \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0; \end{array}$$

2) $$\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0; \\ 5x_1 - 6x_3 - 4x_3 - 7x_4 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 = 0; \end{array}$$

3) $$\begin{array}{l} 2x_1 - 12x_2 - 5x_3 - 8x_4 - x_5 = 0; \\ 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 10x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 17x_5 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 10x_5 = 0; \end{array}$$

4) $$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0; \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 18x_4 + 6x_5 = 0; \\ 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 27x_4 + 9x_5 = 0; \\ 7x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 48x_4 + 16x_5 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 0; \end{array}$$

5) $$\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0; \end{array}$$

6) $$\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0; \\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0; \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{array}$$

4.65. В зависимости от значений параметра k найдите размерность подпространства решений системы уравнений:

1) $kx_1+x_2+3x_3+4x_4+x_5=0;$
$x_1+kx_2-x_3+x_4+5x_5=0;$
$kx_1+kx_2+4x_3+3x_4-4x_5=0;$
$x_1+x_2+7x_3+7x_4-3x_5=0;$

2) $2kx_1+2kx_2+kx_3+x_4=0;$
$2kx_1+2kx_2+2(k-1)x_3+x_4=0;$
$(2k+1)x_1+(k+2)x_2+kx_3+x_4=0;$
$(3k-2)x_1+2kx_2+kx_3+x_4=0.$

4.66. Пусть

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n=b_s \end{gathered}$$

есть совместная система линейных уравнений с коэффициентами из поля K, $\mathbf{k}=(k_1, \ldots, k_n)\in K^n$ — какое-то решение этой системы, M — пространство решений системы линейных однородных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0; \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+\ldots+a_{sn}x_n=0. \end{gathered}$$

Докажите, что линейное многообразие $\mathbf{k}+M$ — это множество всех решений исходной системы.

4.67. Пусть M — подпространство пространства L, $\mathbf{a}\in L$. Докажите, что:

1) $\mathbf{b}, \mathbf{c}\in\mathbf{a}+M \Rightarrow \mathbf{b}-\mathbf{c}\in M$;

2) $\mathbf{b}\in\mathbf{a}+M \wedge \mathbf{b}\in\mathbf{c}+M \Rightarrow \mathbf{c}\in\mathbf{a}+M$;

3) $\mathbf{a}+M$ — подпространство пространства L тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}\in M$.

4.68. Два линейных многообразия $\mathbf{a}+M$ и $\mathbf{a}'+M'$ линейного пространства L совпадают тогда и только тогда, когда $M=M'$ и $\mathbf{a}-\mathbf{a}'\in M$.

4.69. Какие многообразия в n-мерном векторном пространстве L имеют размерность 0; размерность n?

4.70. Докажите, что в пространстве T_n множество многочленов $A=\{f(x)\,|\,f(2)=7\}$ является многообразием. Найдите размерность этого многообразия.

4.71. Пусть L — линейное пространство. Докажите, что:

1) сумма конечного множества подпространств пространства L является его подпространством;

2) пересечение любого множества подпространств пространства L является его подпространством;

3) линейная оболочка $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s)$ векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s\in L$ совпадает с пересечением всех подпространств пространства L, содержащих эти векторы.

4.72. Пусть $M_1=\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$, $M_2=\mathbf{L}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_t)$. Докажите, что максимальная линейно-независимая подсистема системы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_t$ является базисом подпространства M_1+M_2.

4.73. Найдите базисы суммы и пересечения линейных подпространств $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $\mathbf{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, где:

1) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$; $\mathbf{b}_1 = (3, -3, -1, 1)$;
$\mathbf{a}_2 = (1, 0, 0, -1)$; $\mathbf{b}_2 = (5, -3, 1, 1)$;
$\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1)$; $\mathbf{b}_3 = (3, -1, 1, 1)$;

2) $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 0, -2)$; $\mathbf{b}_1 = (1, 4, -1, -1)$;
$\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0, -1)$; $\mathbf{b}_2 = (1, 4, 4, 8)$;
$\mathbf{a}_3 = (1, 2, 1, 1)$; $\mathbf{b}_3 = (2, 0, 1, -1)$.

4.74. Пусть M_1, M_2, M_3 — подпространства линейного пространства L. Докажите, что:

1) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_1 + (M_2 \cap M_3) = (M_1 + M_2) \cap (M_1 + M_3)$;
2) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2 \cap (M_1 + M_3) = (M_2 \cap M_1) + (M_2 \cap M_3)$.

4.75. Докажите, что если C и D — подпространства пространства T_n из задачи 4.58, то $T_n = C \dotplus D$.

4.76. Найдите дополнительное подпространство для:

1) $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ в $\mathbf{R}^4$, где $\mathbf{a}_1 = (3, 8, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, 0, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 1, 3)$;
2) $M = \{f(x) \mid f(-1) = 0\}$ в T_n.

4.77. Пусть M_1, M_2, M_3 — подпространства линейного пространства L, $M_1 \dotplus M_2 = L$. Докажите, что $M_3 \supseteq M_2 \Rightarrow M_3 = (M_1 \cap M_3) \dotplus M_2$.

4.6. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

4.78. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ — произвольные векторы из $\mathbf{R}^2$. Какая из следующих формул определяет на $\mathbf{R}^2$ скалярное произведение:

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$;
2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ka_1b_1 + la_2b_2$, где $k, l \neq 0$;
3) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1$;
4) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$;
5) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 3a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 - a_2b_2$?

4.79. Докажите, что следующие формулы определяют скалярное произведение:

1) на $\mathbf{R}^n$: если $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ (ниже пространство $\mathbf{R}^n$ рассматривается именно с этим скалярным произведением);

2) на $C[a, b]$ — пространстве функций, непрерывных на $[a, b]$: если $\rho(x)$ — фиксированная непрерывная функция, то $(f, g) = \int\limits_a^b \rho^2(x) f(x) g(x)\, dx$;

3) на пространстве вещественных матриц n-го порядка $M_n(\mathbf{R})$: если $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$, то $(AB) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ik}$.

4.80. Докажите, что в евклидовом пространстве:

1) $(\mathbf{a}, k\mathbf{b})=k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

2) $(\mathbf{o}, \mathbf{b})=(\mathbf{a}, \mathbf{o})=0$;

3) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{a}, \mathbf{c})$;

4) $(\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{c})=(\mathbf{a}, \mathbf{c})-(\mathbf{b}, \mathbf{c})$;

5) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \mathbf{a}_i, \mathbf{b}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} k_i (\mathbf{a}_i, \mathbf{b})$;

6) $\left(\mathbf{a}, \sum\limits_{j=1}^{m} l_j \mathbf{b}_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{m} l_j (\mathbf{a}, \mathbf{b}_i)$;

7) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \mathbf{a}_i, \sum\limits_{j=1}^{m} l_j \mathbf{b}_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} k_i l_j (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)$.

4.81. Докажите, что в евклидовом пространстве $|k\mathbf{a}|=|k|\,|\mathbf{a}|$.

4.82. Докажите, что в неравенстве Коши-Буняковского $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|\leqslant|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно-зависимы.

4.83. Докажите, что:

1) $$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

где $a_i, b_i\in\mathbf{R}$;

2) $$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i^2 a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i^2} b_i^2},$$

где $a_i, b_i, k_i\in\mathbf{R}$;

3) $$\int_a^b \rho^2(x) f(x) g(x)\,dx\leqslant\sqrt{\int_a^b \rho^2(x) f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b \rho^2(x) g^2(x)\,dx},$$

где $\rho(x), f(x), g(x)\in C[a, b]$.

4.84. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — ненулевые векторы в евклидовом пространстве, φ — угол между ними. Докажите, что:

1) угол φ не меняется при умножении обоих векторов на одно и то же число;

2) угол φ равен нулю или π тогда и только тогда, когда эти векторы линейно-зависимы.

4.85. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ найдите углы между следующими парами векторов:

1) $\mathbf{a}=(1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}=(3, 5, 1, 1)$;

2) $\mathbf{a}=(1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}=(3, -5, 1, 1)$;

3) $\mathbf{a}=(1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b}=(-3, -3, -3, -3)$.

4.86. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ найдите длины сторон и углы треугольника, образованного векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ при:

1) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, как в задаче 4.85.1;

2) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, как в задаче 4.85.2;

3) $\mathbf{a}=(2, -1, 2, 4)$, $\mathbf{b}=(2, -1, 2, -4)$.

4.87. Докажите, что в евклидовом пространстве E:

1) $\mathbf{a}\perp\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{a}=\mathbf{o}$;

2) $\mathbf{o}\perp\mathbf{a}$ при любом $\mathbf{a}\in E$;

3) если вектор $\mathbf{a}$ ортогонален любому вектору пространства E, то $\mathbf{a}=\mathbf{o}$;

4) если вектор $\mathbf{a}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$, то он ортогонален любой их линейной комбинации;

5) система ненулевых попарно-ортогональных векторов линейно-независима.

4.88. Для треугольника, образованного векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ евклидова пространства, докажите:

1) теорему Пифагора;

2) теорему, обратную теореме Пифагора;

3) теорему косинусов;

4) неравенство треугольника.

4.89. Докажите в евклидовом пространстве теорему о сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма.

4.90. Докажите, что в евклидовом пространстве $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}| \Leftrightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}\perp\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

4.91. Докажите, что если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ евклидова пространства попарно-ортогональны, то $|\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_s|^2=|\mathbf{a}_1|^2+|\mathbf{a}_2|^2+\ldots+|\mathbf{a}_s|^2$.

4.92. Ортонормируйте следующие системы векторов пространства $\mathbf{R}^4$:

1) $\mathbf{a}_1=(1, 1, 1, 1)$; $\mathbf{a}_2=(1, 1, -3, -3)$; $\mathbf{a}_3=(4, 3, 0, -1)$;

2) $\mathbf{a}_1=(1, 2, 2, 0)$; $\mathbf{a}_2=(1, 1, 3, 5)$; $\mathbf{a}_3=(1, 0, 1, 0)$.

4.93. Покажите, что следующие системы векторов ортогональны, дополните их до ортогональных базисов, нормируйте эти базисы:

1) $\mathbf{a}_1=(1, -1, 1, -1)$; $\mathbf{a}_2=(1, 1, 1, 1)$;

2) $\mathbf{a}_1=(1, -1, -1, 3)$; $\mathbf{a}_2=(1, 1, -3, -1)$.

4.94. Постройте ортонормированный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

2) $\mathbf{a}_1=(1, -5, -2, 10)$; $\mathbf{a}_2=(3, 11, -6, -22)$; $\mathbf{a}_3=(3, -2, -6, 4)$; $\mathbf{a}_4=(3, 11, 4, -7)$;

2) $\mathbf{a}_1=(3, 0, 0, -2)$; $\mathbf{a}_2=(1, 2, 2, 4)$; $\mathbf{a}_3=(3, 0, -6, -13)$; $\mathbf{a}_4=(-1, 2, 4, 9)$.

4.95. Пусть M — подпространство евклидова пространства E. Докажите, что:

1) множество $M^\perp$ всех векторов из E, ортогональных каждому вектору из M, является подпространством пространства E;

2) если $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s$ — базис подпространства M, а $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_t$ — базис подпространства $M^\perp$, то $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_t$ — базис пространства E;

3) $E = M + M^{\perp}$.

4.96. Пусть E — евклидово пространство, M и N — его подпространства. Докажите, что:

1) $(M^{\perp})^{\perp} = M$;

2) $M \subseteq N \Rightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$;

3) $(M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$;

4) $(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} + N^{\perp}$.

4.97. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ найдите ортонормированный базис ортогонального дополнения к линейной оболочке следующих систем векторов:

1) $\mathbf{a}_1 = (4, 10, -1, 4)$;
$\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, -2)$;
$\mathbf{a}_3 = (2, 4, -1, 0)$;

2) $\mathbf{a}_1 = (5, 3, 0, -2)$;
$\mathbf{a}_2 = (9, 5, 6, -4)$;
$\mathbf{a}_3 = (1, 1, -6, 0)$.

5. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

5.1. Докажите, что в линейном пространстве L следующие преобразования являются линейными:

1) $0\mathbf{x}=\mathbf{o}$ для любого $\mathbf{x}\in L$ (нулевой оператор);
2) $E\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in L$ (тождественный оператор);
3) $A\mathbf{x}=k\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in L$ (оператор подобия).

5.2. Пусть $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ — фиксированный вектор в V_3. Определите, какие из следующих преобразований пространства V_3 являются линейными:

1) $A\mathbf{x}=[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$; 2) $A\mathbf{x}=(\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$; 3) $A\mathbf{x}=(\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{a}$;
4) $A\mathbf{x}=\mathbf{a}$; 5) $A\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{a}$.

5.3. Докажите, что в пространстве V_2 оператор поворота на фиксированный угол φ является линейным.

5.4. Укажите, какие из следующих преобразований пространства K^3 являются линейными:

1) $A(x_1, x_2, x_3)=(x_1, 2x_2, 3x_3)$;
2) $A(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3)$;
3) $A(x_1, x_2, x_3)=(x_1-x_2, 0, x_1+x_2)$;
4) $A(x_1, x_2, x_3)=(x_1^2, x_2, x_3)$.

5.5. Пусть L — n-мерное векторное пространство над полем K, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — какой-то его базис, $\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$. Докажите, что следующие преобразования пространства L — линейные:

1) $A\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1$; 2) $A\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\mathbf{e}_i$;

3) $A\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i\mathbf{e}_i$, где $k_i\in K$ — фиксированные.

5.6. Пусть $L=M_1\dotplus M_2$, $\mathbf{x}=\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2$, где $\mathbf{m}_1\in M_1$, $\mathbf{m}_2\in M_2$. Докажите, что следующие преобразования пространства L — линейные:

1) $A\mathbf{x}=\mathbf{m}_1$; 2) $A\mathbf{x}=\mathbf{m}_2$; 3) $A\mathbf{x}=\mathbf{m}_1-\mathbf{m}_2$.

5.7. Определите, какие из следующих преобразований пространства T линейные:

1) $Af(x)=f(-x)$; 2) $Af(x)=f(1-x)$;

3) $Af(x) = xf(x)$; 4) $Af(x) = f(1-x) + f(x)$;

5) $Df(x) = f'(x)$; 6) $Af(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

5.8. Пусть L — линейное пространство над полем K, A — линейное преобразование пространства L. Докажите, что:

1) при любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in L$ и $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i A\mathbf{x}_i;$$

2) $A\mathbf{o} = \mathbf{o}$; 3) $A(-\mathbf{x}) = -A\mathbf{x}$ при любом $\mathbf{x} \in L$.

5.9. Пусть L — линейное пространство над полем K. Докажите, что преобразование A пространства L линейно тогда и только тогда, когда при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in L$ и k, $l \in K$ $A(k\mathbf{x}+l\mathbf{y}) = kA\mathbf{x}+lA\mathbf{y}$.

5.10. Пусть L — одномерное пространство над полем K, A — линейный оператор пространства L. Докажите, что существует такое $k \in K$, что $A\mathbf{x} = k\mathbf{x}$ при любом $\mathbf{x} \in L$.

5.11. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n$ (a) — система векторов в пространстве L, A — линейный оператор. Докажите, что:

1) если система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ (a) линейно-зависима, то и система $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \ldots, A\mathbf{a}_n$ (Aa) линейно-зависима;

2) если система (Aa) линейно-независима, то и система (a) линейно-независима.

5.12. Пусть L — n-мерное линейное пространство $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (e) — его базис, а $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ (f) — произвольная система векторов из L. Определим на L преобразование A следующим образом: если $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in L$, то $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \ldots + x_n\mathbf{f}_n$. Докажите, что:

1) A — линейный оператор;

2) если B — такой линейный оператор, что $B\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i$ для любого $\mathbf{e}_i$, то $B = A$.

5.13. Пусть L — линейное пространство над полем K; A, B, C — линейные преобразования пространства L, k, $l \in K$. Докажите, что:

1) $A+B$ — линейное преобразование пространства L;
2) AB — линейное преобразование пространства L;
3) kA — линейное преобразование пространства L;
4) $A+B = B+A$; 5) $(A+B)+C = A+(B+C)$;
6) $A+O = A$, где O — нулевой оператор пространства L;
7) $A+(-1)A = O$; 8) $(AB)C = A(BC)$;
9) $A(B+C) = AB+AC$; 10) $(A+B)C = AC+BC$;
11) $(kl)A = k(lA)$; 12) $k(A+B) = kA+kB$;
13) $(k+l)A = kA+lA$; 14) $1A = A$;
15) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

5.14. Пусть в пространстве V_3 A — оператор поворота на $\pi/2$ вокруг оси OX (от OY к OZ), B — оператор поворота на $\pi/2$ вокруг оси OY (от OZ к OX). Докажите, что:

1) $A^4=B^4=E$; 2) $AB\neq BA$.

5.15. Пусть L — линейное пространство над полем K. Докажите, что множество $G(L)$ всех обратимых линейных преобразований пространства L является мультипликативной группой.

5.16. Пусть A — обратимый оператор линейного пространства L. Докажите, что система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ из L линейно-независима тогда и только тогда, когда линейно-независима система $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \ldots, A\mathbf{a}_s$.

5.17. Пусть A и B — линейные операторы пространства L. Докажите, что:

1) если операторы AB и BA обратимы, то обратимы операторы A и B;

2) если L — конечномерно и оператор AB обратим, то обратимы операторы A и B.

5.18. Пусть P и Q — линейные операторы пространства L. Докажите, что следующие высказывания эквивалентны:

1) $P+Q=E \wedge PQ=O$;

2) $P+Q=E \wedge P^2=P \wedge Q^2=Q$;

3) $P+Q=E \wedge QP=O$.

5.19. Пусть P и Q — линейные операторы пространства L, $P^2=P$, $Q^2=Q$. Докажите, что $(PQ)^2=PQ \Leftrightarrow PQ=QP$.

5.20. В линейном пространстве L найдите образ и ядро линейных операторов из задач 5.1, 5.5, 5.6.

5.21. Пусть L — линейное пространство, A — линейный оператор на L. Докажите, что:

1) AL — подпространство пространства L;

2) если M_1 и M_2 — подпространства пространства L, то $A(M_1+M_2)=AM_1+AM_2$;

3) $\ker A$ — подпространство пространства A.

5.22. Найдите образ и ядро линейных операторов A и D в пространстве T_n:

1) $A(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}$;

2) D — оператор дифференцирования.

Какой вывод можно сделать?

5.23. Пусть L — линейное пространство, A — линейный оператор на L, M — такое подпространство, что $\ker A \dotplus M=L$. Докажите, что:

1) $AM=AL$;

2) если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — линейно-независимая система векторов из M, то система векторов $A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \ldots, A\mathbf{a}_k$ линейно-независима;

3) линейные пространства M и AL изоморфны;

4) A взаимно-однозначно $\Leftrightarrow \ker A=\{\mathbf{o}\}$.

5.24. Пусть A — линейный оператор конечномерного пространства L. Докажите, что следующие высказывания эквивалентны:

1) оператор A обратим;

2) $AL=L$; 3) $\ker A=\{o\}$.

5.2. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА К НОВОМУ БАЗИСУ

5.25. В n-мерном линейном пространстве L найдите матрицы:
1) нулевого оператора; 2) тождественного оператора;
3) оператора подобия.

5.26. Найдите матрицы линейных операторов из задач:
1) 5.2.1; 2) 5.2.3; 3) 5.3; 4) 5.4.1; 5) 5.4.2; 6) 5.4.3; 7) 5.5.1; 8) 5.5.2; 9) 5.5.3.

5.27. В пространстве T_n — многочленов степени $\leqslant n$ найдите матрицы линейных операторов в базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$:

1) $Af(x)=f(-x)$; 2) $Df(x)=f'(x)$.

5.28. Пусть L — n-мерное векторное пространство над полем K, $(\mathbf{e})$ — фиксированный базис в L, A и B — линейные операторы, $A_{(\mathbf{e})}$ и $B_{(\mathbf{e})}$ — их матрицы в базисе $(\mathbf{e})$. Докажите, что:

1) $(A+B)_{(\mathbf{e})}=A_{(\mathbf{e})}+B_{(\mathbf{e})}$;

2) $(AB)_{(\mathbf{e})}=A_{(\mathbf{e})}B_{(\mathbf{e})}$;

3) $(kA)_{(\mathbf{e})}=kA_{(\mathbf{e})}$ $(k\in K)$.

5.29. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ $(\mathbf{e})$, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ $(\mathbf{f})$ и $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ $(\mathbf{g})$ — базисы в линейном пространстве L, A — матрица перехода от $(\mathbf{e})$ к $(\mathbf{f})$, B — матрица перехода от $(\mathbf{f})$ к $(\mathbf{g})$. Докажите, что:

1) матрица A невырожденная;

2) A^{-1} — матрица перехода от $(\mathbf{f})$ к $(\mathbf{e})$.

3) AB — матрица перехода от $(\mathbf{e})$ к $(\mathbf{g})$.

5.30. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ $(\mathbf{e})$ — базис линейного пространства L,

$$A_{(\mathbf{e})}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} —$$

матрица линейного оператора A в базисе $(\mathbf{e})$. Найдите матрицу оператора A в базисе (f):

1) $\mathbf{f}_1=\mathbf{e}_1$;
$\mathbf{f}_2=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$;
$\mathbf{f}_3=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$;
$\mathbf{f}_4=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$;

2) $\mathbf{f}_1=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$;
$\mathbf{f}_2=3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$;
$\mathbf{f}_3=4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4$;
$\mathbf{f}_4=5\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_4$;

3) $\mathbf{f}_1=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3+3\mathbf{e}_4$;
$\mathbf{f}_2=3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_4$;

4) $\mathbf{f}_1=2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3+5\mathbf{e}_4$;
$\mathbf{f}_2=3\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+4\mathbf{e}_3+5\mathbf{e}_4$;

$\mathrm{f}_3 = 2\mathrm{e}_1 \quad - 2\mathrm{e}_3 + 2\mathrm{e}_4;$ $\qquad$ $\mathrm{f}_3 = 4\mathrm{e}_1 + 4\mathrm{e}_2 + 3\mathrm{e}_3 + 5\mathrm{e}_4;$

$\mathrm{f}_4 = 2\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3 + 2\mathrm{e}_4;$ $\qquad$ $\mathrm{f}_4 = 5\mathrm{e}_1 + 5\mathrm{e}_2 + 5\mathrm{e}_3 + 5\mathrm{e}_4.$

5.31. Докажите, что на множестве $M_n(K)$ всех квадратных матриц n-го порядка над полем K отношение подобия является отношением эквивалентности.

5.32. Докажите, что:

1) матрица kE подобна лишь самой себе;

2) если матрица A подобна лишь самой себе, то она имеет вид kE.

5.33. Пусть $A \in M_n(K)$. Докажите, что множество $G = \{T \in G\mathrm{Ln}(K) \mid T^{-1}AT = A\}$ является группой.

5.34. Пусть A, $B \in M_n(K)$. Докажите, что если A — невырожденная матрица, то матрицы AB и BA подобны.

5.35. Пусть A и B — подобные матрицы. Докажите, что подобны матрицы:

1) A^2 и B^2; 2) A^k и B^k $(k \in \mathbf{N})$;

3) $f(A)$ и $f(B)$ (f — многочлен).

5.36. Пусть A — линейный оператор n-мерного векторного пространства L. Докажите, что следующие высказывания эквивалентны:

1) оператор A обратим;

2) матрица оператора A в каком-то базисе невырожденная.

5.37. Пусть $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ (e) — базис в пространстве L, A — линейный оператор. Докажите, что:

1) $AL = \mathrm{L}(A\mathrm{e}_1, A\mathrm{e}_2, \ldots, A\mathrm{e}_n)$;

2) размерность AL равна рангу системы $A\mathrm{e}_1, A\mathrm{e}_2, \ldots, A\mathrm{e}_n$ (Ae);

3) ранг системы (Ae) равен рангу матрицы $A_{(\mathrm{e})}$;

4) ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса;

5) $\mathrm{x} \in \ker A$ тогда и только тогда, когда координаты вектора x в базисе (e) удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

где $A_{(\mathrm{e})} = (a_{ik})$;

6) линейное пространство $\ker A$ изоморфно пространству решений системы п. 5;

7) $\dim(\ker A) = n - r$, где r — ранг матрицы $A_{(\mathrm{e})}$;

8) $\dim(\ker A) > 0 \Leftrightarrow \det A_{(\mathrm{e})} = 0$.

5.38. Пусть A — линейный оператор на K^3, $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Найдите ранг и дефект оператора A, а также базис образа и ядра:

1) $Ax=(x_1-2x_2+3x_3,\ x_1-2x_2+3x_3,\ x_1+2x_2+3x_3)$;

2) $Ax=(2x_1-2x_2-2x_3,\ x_1-4x_2+2x_3,\ x_1+2x_2-4x_3)$;

3) $Ax=(x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2,\ x_1)$.

5.39. Пусть $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\in T_4$. Найдите ранг и дефект, а также базис образа и ядра оператора A на T_4:

1) $Af(x)=f(x)+f(-x)$;

2) $Af(x)=f(x)-f(-x)$;

3) $Af(x)=f'(x)$.

5.3. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

5.40. Докажите, что в линейном пространстве L любое подпространство M инвариантно относительно следующих операторов:

1) тождественного; 2) нулевого;
3) подобия; 4) проектирования.

5.41. Докажите, что в пространстве V_3 инвариантным подпространством оператора A: $Ax=(\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{a}$ является $\mathbf{L}(\mathbf{a})$.

5.42. Докажите, что инвариантным подпространством оператора поворота на угол $\varphi\neq k\pi$ в пространстве V_2 являются лишь $\{\mathbf{o}\}$ и V_2.

5.43. Докажите, что следующие линейные оболочки в пространстве $\mathbf{R}^3$ инвариантны относительно линейного оператора A: $A(x_1, x_2, x_3)=(x_1, 2x_2, 3x_3)$:

1) $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1)$; 2) $\mathbf{L}(\mathbf{e}_2)$; 3) $\mathbf{L}(\mathbf{e}_3)$;
4) $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$; 5) $\mathbf{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$; 6) $\mathbf{L}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

5.44. Докажите, что T_n — инвариантное подпространство пространства T относительно оператора дифференцирования.

5.45. Пусть A — линейный оператор на пространстве L. Докажите, что:

1) $\ker A$ инвариантно относительно A;

2) AL инвариантно относительно A;

3) если M_1 и M_2 инвариантны относительно A, то M_1+M_2 инвариантно относительно A;

4) если M_1 и M_2 инвариантны относительно A, то $M_1\cap M_2$ инвариантно относительно A;

5) если M — инвариантное подпространство относительно оператора A, то M — инвариантное подпространство относительно оператора $A-kE$;

6) если M — инвариантное подпространство относительно оператора A, то M — инвариантное подпространство относительно $f(A)$ (f — многочлен);

7) $\ker f(A)$ — инвариантно относительно A;

8) $f(A)L$ инвариантно относительно A;

9) если $AB=BA$, то $\ker B$ инвариантно относительно A;

10) если $AB=BA$, то BL инвариантно относительно A;

11) если любое подпространство пространства L инвариантно относительно A, то A — оператор подобия.

5.46. Пусть A — линейный оператор конечномерного векторного пространства L. Докажите, что если оператор A обратим, то его инвариантные подпространства совпадают с инвариантными подпространствами оператора A^{-1}.

5.47. Пусть A — линейный оператор пространства L. Докажите, что:

1) система собственных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s$ оператора A с попарно различными собственными значениями $k_1, k_2, \ldots, k_s$ линейно-независима;

2) если пространство L n-мерно, то оператор A имеет не более n различных собственных значений;

3) если пространство L n-мерно, а оператор A имеет n различных собственных значений, то существует базис пространства L, состоящий из собственных векторов;

4) вектор $\mathbf{o}$ и все собственные векторы, отвечающие данному собственному значению k, образуют подпространство пространства L (собственное подпространство);

5) сумма двух собственных подпространств M_1+M_2, отвечающих различным собственным значениям, прямая.

5.48. Пусть A — линейный оператор пространства L, $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора A с собственным значением k. Докажите, что:

1) $k=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}\in\ker A$;

2) $k\neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}\in AL$.

5.49. Пусть A — линейный оператор конечномерного пространства L. Докажите, что A обратим тогда и только тогда, когда он не имеет нулевого собственного значения.

5.50. Выпишите явное выражение для характеристических многочленов матриц:

1) 2-го порядка; 2) 3-го порядка.

5.51. Докажите, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены.

5.52. В пространстве $\mathbf{R}^3$ найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, заданного матрицей:

1) $\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5.53. В пространстве $\mathbf{C}^3$ найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, заданного матрицей:

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

5.54. Найдите матрицу перехода от канонического базиса к базису из собственных векторов, а затем матрицу оператора A в этом базисе в задачах:

1) 5.52.1; 2) 5.52.2; 3) 5.53.1; 4) 5.53.2.

5.55. Найдите собственные векторы и собственные значения линейных операторов из задач 5.4.1—3; 5.5.1—3; 5.6.1—3.

6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

6.1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

6.1. Опишите фигуры, определяемые на плоскости следующими системами линейных неравенств:

1) $x+2y\leqslant 7;$
$2x+\ \ y\geqslant 5;$
$x-\ \ y\leqslant 1;$

2) $x+2y\geqslant 7;$
$2x+\ \ y\geqslant 5;$
$x-\ \ y\leqslant 1;$

3) $x+\ \ y\leqslant 3;$
$x+\ \ y\geqslant 3;$
$2x-\ \ y\geqslant 0;$
$x-2y\leqslant 0;$

4) $x-4y+5\geqslant 0;$
$x\leqslant 3;$
$2x-\ \ y\leqslant 6;$
$x+3y\geqslant -4;$
$x\geqslant -1;$

5) $x-4y+5\leqslant 0;$
$x\leqslant 3;$
$2x-\ \ y\leqslant 6;$
$x+3y\leqslant -4;$
$x\geqslant -1;$

6) $2x-y\leqslant -2;$
$2x-\ \ y\geqslant 4;$
$2y+y\geqslant 2;$
$2x+y\leqslant 4;$
$y\geqslant 0.$

6.2. Пусть

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leqslant 0;\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leqslant 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n\leqslant 0
\end{aligned}$$

есть система однородных линейных неравенств. Докажите, что:

1) неотрицательная линейная комбинация решений системы является решением этой системы;

2) если $s=n$, то система имеет бесконечно много решений.

6.3. Пусть $a>0$. Докажите, что следующие пары неравенств эквивалентны:

1) $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ и $a\varphi(x)\leqslant a\psi(x);$
2) $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$ и $a\varphi(x)\geqslant a\psi(x);$
3) $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ и $-a\varphi(x)\geqslant -a\psi(x);$
4) $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$ и $-a\varphi(x)\leqslant -a\psi(x).$

Докажите, что аналогичные соотношения справедливы для строгих неравенств.

6.4. Пусть $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\leqslant\psi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, 2, \ldots, s)$ — система линейных неравенств. Докажите, что:

1) если в системе какие-либо два неравенства поменять местами, то полученная система будет эквивалентна исходной;

2) если в системе какое-либо неравенство умножить на положительное число, то полученная система будет эквивалентна исходной;

3) если к одному из неравенств системы прибавить другое, то полученная система будет следствием исходной;

4) неотрицательная линейная комбинация системы неравенств является следствием этой системы.

6.5. Докажите, что уравнение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0$ эквивалентно некоторой системе двух неравенств.

6.6. Докажите, что если неравенство

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\leqslant 0$$

является следствием системы неравенств

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\leqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, s,$$

то уравнение

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$$

является следствием системы уравнений

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

6.7. Докажите, что:

1) каждое линейное неравенство эквивалентно неравенству одного из следующих трех видов:

а) $x_1+f(x_2, \ldots, x_n)\leqslant c$,

б) $-x_1+g(x_2, \ldots, x_n)\leqslant d$,

в) $h(x_2, \ldots, x_n)\leqslant e$;

2) каждая система линейных неравенств эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned} x_1+f_i(x_2,\ \ldots,\ x_n)&\leqslant c_i, & i&=1,\ \ldots,\ r;\\ -x_1+g_j(x_2,\ \ldots,\ x_n)&\leqslant d_j, & j&=1,\ \ldots,\ p;\\ h_k(x_2,\ \ldots,\ x_n)&\leqslant e_k, & k&=1,\ \ldots,\ q. \end{aligned}$$

6.8. Пусть в системе 6.7.2 есть неравенства вида «а» и «б» или неравенство вида «в». Докажите, что:

1) если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — решение системы 6.7.2, то $u_2, \ldots, u_n$ — решение системы

$$f_i(x_2,\ \ldots,\ x_n)+g_j(x_2,\ \ldots,\ x_n)\leqslant c_i+d_j,\ i=1,\ \ldots,\ r;\ j=1,\ \ldots,\ p;$$
$$h_k(x_2, \ldots, x_n)\leqslant e_k,\ k=1, \ldots, q;$$

2) если $v_2, \ldots, v_n$ — решение системы п. 1, то существует такое v_1, что $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — решение системы 6.7.2;

3) каждое неравенство системы п. 1 есть неотрицательная линейная комбинация системы 6.7.2.

6.9. Пусть в системе 6.7.2 есть только неравенства вида «а». Докажите, что:

1) если $v_2, \ldots, v_n$—произвольные числа и $v_1 \leqslant \min\{-f_i(v_2, \ldots, v_n)+c_i\}$, то $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — решение системы 6.7.2;

2) любое решение системы 6.7.2 может быть получено способом, указанным в п. 1.

6.10. Рассмотрите случай, когда в системе 6.7.2 есть только неравенства вида «б»; сформулируйте и докажите результаты, аналогичные задаче 6.9.

6.11. Методом, указанным в задачах 6.7—6.10, найдите частные решения следующих систем линейных неравенств:

1) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 2;\\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 0;\\ 2x_1 + x_3 &\geqslant 2;\\ x_1 + x_2 - x_3 &\leqslant 3;\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 2;\\ x_1 + 2x_2 &\geqslant -1;\\ x_1 - 3x_2 &\geqslant 6;\\ -x_1 - x_2 &\geqslant -2;\\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 4; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leqslant 6;\\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 1;\\ x_1 + x_2 &\geqslant 3;\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\leqslant 1;\\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 1;\\ -x_1 + x_2 &\leqslant 0;\\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3; \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1;\\ x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 1;\\ x_1 + x_2 - x_3 &\geqslant 1;\\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 1; \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} -2x_1 + x_3 &\geqslant -1;\\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\leqslant 4;\\ -x_1 - 3x_2 - x_3 &\leqslant 0;\\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leqslant 1;\\ 2x_1 - x_3 &\leqslant 1. \end{aligned}$$

6.12. Пусть система линейных неравенств

$$\begin{gathered} l_1(x) = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ l_s(x) = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \leqslant b_s \end{gathered}$$

несовместна, 6.7.2 — эквивалентная ей система. Докажите, что:

1) в системе 6.7.2 есть неравенства вида «а» и «б» или неравенства вида «в»;

2) существует несовместная система линейных неравенств с $n-1$ неизвестной, каждое неравенство которой является неотрицательной линейной комбинацией исходной системы;

3) существует ложное неравенство $0 \leqslant b$ ($b \in \mathrm{R}$), которое является неотрицательной линейной комбинацией исходной системы;

4) существуют такие неотрицательные числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$, что

$$\sum_{m=1}^{s} k_m l_m(x) = 0; \quad \sum_{m=1}^{s} k_m b_m < 0.$$

6.13. Пусть неравенство

$$l(x)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n\leqslant 0$$

является следствием системы

$$l_i(x)=a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\leqslant 0\quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Докажите, что:

1) система

$$\begin{aligned} -l(x)&\leqslant -1;\\ l_i(x)&\leqslant 0\quad (i=1, 2, \ldots, s)\end{aligned}$$

несовместна;

2) существуют такие неотрицательные числа $k_0, k_1, \ldots, k_s$, что

$$k_0(-l(x))+\sum_{i=1}^{s}k_il_i(x)=0,\quad k_0(-1)<0;$$

3) неравенство $l(x)\leqslant 0$ является неотрицательной линейной комбинацией системы $l_i(x)\leqslant 0$, $i=1, 2, \ldots, s$.

6.14. Найдите неотрицательные решения следующих систем линейных уравнений:

1) $$\begin{aligned} 7x_1+5x_2-2x_3-4x_4&=8;\\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4&=3;\\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4&=1;\\ x_1-x_3-2x_4&=-1;\\ x_2+x_3+2x_4&=3;\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x_1+3x_2+4x_3+x_4&=1;\\ 4x_1-8x_2-6x_3+3x_4&=-2;\\ 6x_1-2x_2+4x_3-x_4&=0;\\ 12x_1-4x_2+7x_3+x_4&=0;\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x_1-x_2&=1;\\ x_1-x_2+x_3&=4;\\ x_2-x_3+x_4&=3;\\ x_3-x_4+x_5&=2;\\ x_4-x_5&=1;\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=5;\\ x_1+x_2+2x_3-x_4&=1;\\ x_2+4x_3-4x_4+2x_5&=-2;\\ x_3-2x_4+2x_5&=1;\\ 2x_1+x_2-2x_4+2x_5&=0.\end{aligned}$$

6.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

6.15. Найдите решения системы:

а) минимизирующие линейную форму f;

б) максимизирующие линейную форму f;

1) $\begin{aligned} x + 2y &\leqslant 7; \\ 2x + y &\geqslant 5; \\ x - y &\leqslant 1; \\ f &= x + y; \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x + 2y &\geqslant 7; \\ 2x + y &\geqslant 5; \\ x - y &\leqslant 1; \\ f &= x + y; \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x + y &\leqslant 3; \\ x + y &\geqslant 3; \\ 2x - y &\geqslant 0; \\ x - 2y &\leqslant 0; \\ f &= 2x - 3y; \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} &x - 4y + 5 \geqslant 0; \\ &x \leqslant 3; \\ &2x - y \leqslant 6; \\ &x \geqslant 0; \\ &y \geqslant 0; \\ &f = 2x + y. \end{aligned}$

6.16. Найдите решения системы, максимизирующие линейную форму:

1) $\begin{aligned} &x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ &x_1 + x_2 + 5x_3 = 2; \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3; \\ &f = -x_1 + 2x_2 - x_3; \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} &x_2 + x_3 = 2; \\ &3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3; \\ &f = -4x_1 + x_1 + 5x_3; \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} &x_1 - 3x_2 + 11x_3 = -9; \\ &3x_1 - x_2 + 9x_3 = 5; \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3; \\ &f = x_1 + 2x_2 - 5x_3; \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} &-2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ &-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ &x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, 3; \\ &f = x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$

7. ДЕЛИМОСТЬ В КОЛЬЦЕ Z

7.1. ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ

7.1. Является ли отношение делимости $(a \vdots b \Leftrightarrow b \neq 0 \wedge \wedge (\exists s) a = bs)$:

1) отношением порядка на множестве $\mathbf{N}$;

2) отношением порядка на множестве $\mathbf{Z}$;

3) симметричным, антисимметричным, транзитивным отношением на множестве $\mathbf{Z}$?

7.2. Докажите, что в кольце $\mathbf{Z}$:

1) $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow (ua + vb) \vdots c$;

2) $a \vdots b \wedge a \neq 0 \Rightarrow |a| \geqslant |b|$;

3) $a \vdots b \Rightarrow a \vdots -b$;

4) $a \vdots c \Rightarrow ua \vdots c$;

5) $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow t \vdots c$, если $a = bs + t$;

6) $a_1 \vdots c \wedge a_2 \vdots c \wedge \cdots a_n \vdots c \Rightarrow \left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i \right) \vdots c$;

7) $a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = b \vee a = -b$;

8) $a \vdots b \Rightarrow a = 0 \vee |a| \geqslant |b|$;

9) $a \vdots b \wedge k \neq 0 \Leftrightarrow ka \vdots kb$;

10) $b \vdots c \wedge \overline{a \vdots c} \Rightarrow \overline{a \vdots b}$;

11) $a \vdots b \Leftrightarrow |a| \vdots |b|$.

7.3. Докажите, что сумма $2n+1$ последовательных целых чисел кратна $2n+1$. Будет ли кратна $2n$ сумма $2n$ последовательных целых чисел?

7.4. Докажите или опровергните следующие высказывания:

1) $a \vdots m \wedge b \vdots m \Rightarrow (a + b) \vdots m$;

2) $\overline{a \vdots m} \wedge \overline{b \vdots m} \Rightarrow \overline{(a + b) \vdots m}$;

3) $a \vdots m \wedge \overline{b \vdots m} \Rightarrow \overline{(a + b) \vdots m}$;

4) $\overline{(a + b) \vdots m} \Rightarrow \overline{a \vdots m} \vee \overline{b \vdots m}$;

5) $(a + b) \vdots m \wedge (a - b) \vdots m \Rightarrow a \vdots m \wedge b \vdots m$;

6) $ab \vdots m \Rightarrow a \vdots m \vee b \vdots m$.

Сформулируйте утверждения, обратные данным. Выделите среди них истинные и ложные.

7.5. Сумма цифр трехзначного числа равна 7. Цифры единиц и десятков одинаковы. Докажите, что число делится на 7.

7.6. Покажите, что если пятизначное число делится на 41, то и все числа, получающиеся путем круговой перестановки цифр этого числа, делятся на 41.

7.7. Докажите, что дробь, у которой числитель есть разность четвертых степеней нечетных чисел, а знаменатель — сумма их четвертых степеней, сократима на 2, но не сократима на 4.

7.8. Определите, при каких натуральных n:

1) $(n^3+14) \vdots (n+2)$;
2) $(n^2+1) \vdots (n+1)$;
3) $(n^3+9n^2+14) \vdots (n^2+2)$;
4) $(n^4-9n^3-18n+3) \vdots (n^2+2)$.

7.9. Определите, при каких целых n:

1) $(n^3+4n^2-3) \vdots (n+2)$;
2) $(n^4-2n^2+3n-2) \vdots (n^2+n-2)$;
3) $(n^4+4) \vdots (n^2-2n+2)$;
4) $(n^3+7n+1) \vdots (n-2)$;
5) $(n^4+7n^2+1) \vdots (n^2+2)$;
6) $n^4-3n^3+3n^2+5n-42) \vdots (n^2-n-6)$.

7.10. Найдите a и b, если при любом целом n:

1) $(n^3+an+b) \vdots (n^2+1)$;
2) $(n^4+an+b) \vdots (n^2-n+1)$;
3) $(n^5+an+b) \vdots (n^2+n+1)$.

7.11. Докажите, что при любом натуральном n:

1) $(10^{3^n}-1) \vdots 3^{n+2}$;
2) $[a^{2n+1}+(a-1)^{n+2}] \vdots (a^2-a+1)$;
3) $[(a+1)^{2n-1}+a^{n+1}] \vdots (a^2+a+1)$.

7.12. Докажите, что при любом натуральном n:

1) $(a^n-b^n) \vdots (a-b)$ при $a \neq b$;
2) $(a^{2n-1}+b^{2n-1}) \vdots (a+b)$ при $a \neq -b$;
3) $(a^{2n}-b^{2n}) \vdots (a+b)$ при $a \neq -b$.

7.13. Докажите, что при любом натуральном n:

1) $(3^{4n-1}+3^{4n-2}+\ \dots\ +3^2+3+1) \vdots 40$;
2) $[(n+1)^{3n}-n^{2n}(n+3)^n] \vdots (3n+1)$;
3) $(11^{2n}+31^{2n}+38\cdot 11^n\cdot 31^n) \vdots 40$.

7.14. Докажите, что:

1) $(n^3+3n^2-n-3) \vdots 48$ при любом нечетном n;
2) $(n^5-5n^3+4n) \vdots 120$ при любом натуральном n;
3) $(n^4-4n^3-4n^2+16n) \vdots 384$, где n — положительное четное число, большее 4.

7.15. Докажите, что:

1) $(ab+cd) \vdots (a-c) \Rightarrow (ad+bc) \vdots (a-c)$;
2) $(ab+cd) \vdots (a+c) \Rightarrow (ad+bc) \vdots (a+c)$;
3) $(a^2+ab+b^2) \vdots (a+b) \Rightarrow (a^4+b^4) \vdots (a+b)^2$;
4) $(a^4+4b^4) \vdots (a^2+2ab+2b^2)$.

7.16. Определите все трехзначные числа, которые при делении на 11 дают в частном число, равное сумме квадратов цифр исходного числа.

7.17. При каких значениях a и b $(a^2+ab+b^2) \vdots (a+b)$?

7.2. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

7.18. Разделите с остатком:

1) 134 на 26;	2) 134 на —26;
3) —134 на 26;	4) —134 на —26;
5) 168 на 35;	6) 168 на —35;
7) —168 на 35;	8) —168 на —35.

7.19. При делении a на b остаток равен r. Определите:
1) каков остаток при делении $-a$ на b;
2) будет ли mr остатком при делении ma на mb.

7.20. Найдите делители и соответствующие им остатки, если:
1) делимое 534, частное 26;
2) делимое 741, частное —14;
3) делимое —945, частное —16;
4) делимое —234, частное 7.

7.21. Найдите все числа:

1) большие 25 000, но меньшие 30 000, у которых как при делении на 131, так и при делении на 1965 остаток равен 125;

2) большие 10 000, но меньшие 15 000, у которых как при делении на 393, так и при делении на 655 остаток равен 210.

7.22. Делимое 100, остаток 6. Найдите делитель b и частное q.

7.23. Докажите, что если $a>b>0$, то остаток при делении a на b меньше $a/2$.

7.24. Докажите, что при делении на 8 квадрата любого нечетного числа остаток равен единице.

7.25. Докажите, что если r — остаток при делении a на b, то при делении a^n на b^n (n — натуральное число) получается тот же остаток, что и при делении r^n на b.

7.26. При делении a^5 на 7 остаток равен 5. Чему равен остаток при делении на 7 числа a?

7.27. Докажите, что:

1) число 3^n+1 при четном n делится на 2, при нечетном n делится на 2^2, но в обоих случаях не делится ни на какую более высокую степень числа 2;

2) при любом нечетном n $(2^n+1) \vdots 3$, а при любом четном n $\overline{(2^n+1) \vdots 3}$.

7.28. Докажите, что если остатки при делении a и b на m равны, то при любом натуральном n остатки при делении a^n и b^n на m равны.

7.29. Найдите остатки при делении на 7 чисел 23^n, где n — натуральное число.

7.30. Найдите остатки при делении на 9 чисел 65^{6k}, 65^{6k+1}, 65^{6k+2}, 65^{6k+3}, 65^{6k+4}, 65^{6k+5}, где k — натуральное число.

7.31. Докажите, что квадрат любого целого числа делится на 3 или дает при делении на 3 остаток 1.

7.32. Докажите, что ни при каком натуральном n числа $3n-1$, $7n-1$, $7n-2$, $7n+3$ не являются точными квадратами.

7.33. Докажите, что если натуральные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=c^2$, то:

1) по крайней мере одно из чисел a и b делится на 2;
2) по крайней мере одно из чисел a и b делится на 3;
3) по крайней мере одно из чисел a, b, c делится на 5.

7.34. Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

1) Из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7;

2) Из 100 целых чисел всегда можно выбрать 15 таких, у которых разность любых двух делится на 7;

3) Из 100 целых чисел всегда можно выбрать два таких, у которых сумма делится на 7;

4) Из 5 целых чисел всегда можно выбрать два таких, у которых разность квадратов делится на 7.

7.35. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 7 кусков и так сделали несколько раз. Могло ли в результате получиться 1973 куска?

7.36. Докажите, что $a-b$ делится на m тогда и только тогда, когда остатки при делении a и b на m равны.

7.37. Докажите, что:

1) $ab-1$ делится на 3 тогда и только тогда, когда a и b не делятся на 3 и остатки при делении a и b на 3 равны;

2) $ab+1$ делится на 3 тогда и только тогда, когда a и b не делятся на 3 и остатки при делении a и b на 3 не равны;

3) $ab(a^2-b^2)$ всегда делится на 3.

7.38. Докажите, что

$$P=[(b-a)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)] \vdots 12.$$

7.39. Определите, каким должно быть натуральное число n, чтобы при любом целом a:

1) $(a^{2n}+a^n+1) \vdots (a^2+a+1)$;
2) $[(a+1)^n-a^n-1] \vdots (a^2+a+1)$;
3) $[a+1)^n+a^n+1] \vdots (a^2+a+1)$;
4) $[a^{2n+3}+(a-1)^{n+3}] \vdots (a^2-a+1)$.

7.40. Дана числовая последовательность, n-й член которой задается выражением $a_n=3(n^2+n)+7$. Докажите, что эта последовательность обладает следующими свойствами:

1) среди любых пяти последовательных ее членов ровно один делится на 5;

2) ни один член последовательности не совпадает с кубом целого числа.

7.41. При каком натуральном n

1) $(2^n - 1) \vdots 7$;

2) $\overline{(2^n + 1) \vdots 7}$.

7.3. НОД И НОК ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

7.42. Докажите, что наибольший по величине положительный общий делитель чисел a и b является их наибольшим общим делителем.

7.43. Докажите или опровергните следующие высказывания:

1) НОД (a, b) = НОД $(-a, b)$;

2) НОД (a, b) = НОД $(a-b, b)$;

3) НОД (a, b) = НОД $(a+b, a-b)$.

(Поскольку НОД определяется неоднозначно, то равенства вида НОД (a, b) = НОД (c, d) понимаются как равенства положительных значений соответствующих НОД.)

7.44. Найдите линейное представление НОД чисел:

1) 822 и 1734; 2) 4623 и 3743;
3) 4373 и -826; 4) -3791 и 3281;
5) 1073 и 3683; 6) 2576 и 154.

7.45. Докажите, что НОД $(a$, НОД $(b, c))$ = НОД (НОД $(a, b), c)$.

7.46. Докажите, что НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ = НОД $(a_1$, НОД $(a_2, \ldots, a_n))$.

7.47. Пусть d = НОД (a, b), d' = НОД (a', b'). Докажите, что НОД $(aa', bb', ab', a'b) = dd'$.

7.48. Найдите НОД следующих чисел:

1) 420, 630 и 1155; 2) 1023, 1518 и 14883;
3) 498, 2324 и 42598; 4) 663, 731, 2516 и 3655.

7.49. Докажите, что если a/b — несократимая дробь, то дробь $\frac{b-a}{b}$ тоже несократимая.

7.50. Докажите, что

$$a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow \text{НОД}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{\text{НОД}(a, b)}{c}.$$

7.51. Докажите, что.

1) НОД(a_1, c) = НОД$(a_2, c) = 1 \Rightarrow$ НОД$(a_1a_2, c) = 1$;

2) НОД $(a_1, a_2) = 1 \wedge c \vdots a_1 \wedge c \vdots a_2 \Rightarrow c \vdots a_1a_2$.

Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для случая $n > 2$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

3) $ab \vdots c \wedge$ НОД$(a, c) = 1 \Rightarrow b \vdots c$.

7.52. Докажите, что если a и b — целые нечетные числа, то $(a^3 - b^3) \vdots 2^n \Leftrightarrow (a - b) \vdots 2^n$.

7.53. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых совпадает с кубом натурального числа, делится на 504.

7.54. Докажите, что при любом целом a и неотрицательном n $(a^{4n+1}-a)\,\vdots\,30$.

7.55. Докажите, что:

1) НОД$(a, c)=1 \Rightarrow b\,\vdots$ НОД(ab, c);

2) НОД $(a, b)=1 \Rightarrow$ НОД $(ac, b)=$ НОД (c, b);

3) НОД $(a, b)=1 \Rightarrow$ НОД $(a+b, ab)=1$;

4) НОД $(a, b)=1 \Rightarrow$ НОД $(5a+3b, 8a+5b)=1$.

7.56. Докажите, что если a и b взаимно-просты, то НОД $(11a+2b, 18a+5b)$ равен либо 1, либо 19.

7.57. Докажите взаимную простоту следующих пар чисел (n — натуральное число):

1) n и $n+1$; 2) n и $2n-1$;

3) $\frac{n(n+1)}{2}$ и $2n+1$.

7.58. Докажите несократимость дробей:

1) $\frac{21n+4}{14n+3}$; 2) $\frac{n+1}{2n+1}$.

7.59. Докажите, что при любом натуральном n число $a=2903^n-803^n-464^n+261^n$ делится на 1897.

7.60. Решите в натуральных числах следующие системы уравнений:

1) $x+y=180$;
НОД $(x, y)=30$;

2) $x+y=168$;
НОД $(x, y)=24$;

3) НОД $(x, y)=45$;
$\frac{x}{y}=\frac{11}{7}$;

4) НОД $(x, y)=4$;
$xy=720$.

7.61. Подставьте в следующих равенствах вместо каждой буквы определенную цифру так, чтобы получилось тождество (различным буквам соответствуют различные цифры):

1) ЛИК·ЛИК=БУБЛИК;

2) СУК·СУК=БАРСУК.

7.62. Докажите, что если a и b — положительные целые числа, то число членов арифметической прогрессии $a, 2a, 3a, \ldots, ba$, делящихся на b, равно НОД (a, b).

7.63. Докажите, что:

1) уравнение $ax-by=c$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда $c\,\vdots$ НОД(a, b);

2) если НОД $(a, b)=1$ и (x_0, y_0) — одно решение уравнения $ax-by=c$, то все решения имеют следующий вид: $x=x_0+bt$, $y=y_0+at$, $t\in\mathbf{Z}$.

7.64. Запишите множество целочисленных решений уравнений:

1) $5x-3y=-1$; 2) $8x+3y=2$;

3) $8x+5y=49$; 4) $54x-42y=-18$;
5) $3x-2y+11=0$; 6) $75x-39y=1$.

7.65. Имеются контейнеры массой 130 и 160 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 т. Как это можно сделать?

7.66. Докажите, что при любом четном положительном a и натуральном k числа $a+1$ и $a^{2k}+1$ взаимно-просты.

7.67. Докажите, что:

1) НОД $(2^6-1, 2^{15}-1)=7$;
2) НОД $(2^n-1, 2^m-1)=2^d-1$, где $d=$ НОД (m, n);
3) в последовательности $2+1$, 2^2+1, 2^4+1, $2^8+1, \ldots, 2^{2^n}+1, \ldots$ любые два числа взаимно-просты.

7.68. Докажите, что:

1) НОК $(a, b)=\dfrac{ab}{\text{НОД}(a, b)}$;
2) НОК $(ka, kb)=k$НОК (a, b);
3) $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow$ НОК $\left(\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}\right)=\dfrac{\text{НОК}(a, b)}{c}$;
4) наименьшее по величине положительное общее кратное чисел a и b является наименьшим общим кратным этих чисел.

7.69. Докажите, что
НОК $(a,$ НОК $(b, c))=$ НОК (НОК $(a, b)c)$.

7.70. Найдите НОК чисел:

1) 356, 1068 и 1424; 2) 6408, 9256 и 4272.

7.71. Найдите НОД чисел m и n, если:

1) $m=$ НОК (a, b), $n=$ НОД (a, b);
2) $m=$ НОК (a, b), $n=ab$.

7.72. Найдите натуральные a и b, если:

1) НОД $(a, b)=15$;
НОК $(a, b)=420$;
2) НОД $(a, b)=12$;
НОК $(a, b)=840$;
3) НОД $(a, b)=5$;
НОК $(a, b)=260$;
4) $a+b=667$;
$\dfrac{\text{НОК}(a, b)}{\text{НОД}(a, b)}=120$;
5) НОК (a, b) НОД $(a, b)=504$;
$\dfrac{\text{НОК}(a, b)}{\text{НОД}(a, b)}=14$.

7.73. Докажите, что числа $\dfrac{\text{НОК}(a, b)}{a}$ и $\dfrac{\text{НОК}(a, b)}{b}$ взаимно-просты.

7.74. Пусть $a, b, c \neq 0$. Докажите, что:

1) НОД $(a,$ НОК $(b, c))=$ НОК (НОД (a, b), НОД $(a, c))$;
2) НОК $(a,$ НОД $(b, c))=$ НОК (НОК (a, b), НОК $(a, c))$.

7.75. Два ученика вышли одновременно из пункта A; шаг одного из них 60 см, другого — 69 см. В первый раз шаги их совпали через 17 с после начала движения, а после 5 мин движения их шаги совпали в первый раз в пункте B. Определите расстояние от A до B.

7.76. Укажите все натуральные числа, на которые может оказаться сократимой дробь $\frac{5n+6}{8n+7}$.

7.77. Докажите, что из пяти последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно-простое со всеми остальными.

7.78. Найдите все взаимно-простые a и b, для которых

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\frac{3}{13}.$$

7.79. Пусть A — множество, состоящее более чем из семи различных натуральных чисел, никакие два из которых не взаимно-просты. Найдите числа, из которых состоит A, если:

1) НОК всех чисел из A равно 210, произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа;

2) НОК всех чисел из A равно 390, произведение всех чисел из A не делится на 160 и не является 4-й степенью никакого целого числа;

3) НОК всех чисел из A равно 330, сумма всех чисел из A равна 755 и произведение всех чисел из A не является 4-й степенью никакого целого числа.

7.4. КОНЕЧНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

7.80. Следующие обыкновенные дроби разложите в конечные цепные дроби. Для каждой конечной цепной дроби найдите все ее подходящие дроби:

1) $\frac{2121}{1500}$; 2) $\frac{314}{450}$; 3) $\frac{652}{636}$; 4) $\frac{9321}{10959}$;

5) $-\frac{2485}{1638}$; 6) $-\frac{840}{1872}$; 7) $\frac{891}{1530}$; 8) $-\frac{1872}{1560}$;

9) $\frac{3129}{10281}$; 10) $-\frac{3523}{1300}$; 11) $\frac{85547}{87241}$; 12) $\frac{3621}{2769}$.

7.81. Дана конечная цепная дробь [4, 3, 1, 2]. Вычислите последнюю и предпоследнюю подходящие дроби и найдите разность между ними.

7.82. Найдите последнюю и предпоследнюю подходящие дроби для числа 43/40 и разность между ними.

7.83. Вычислите цепную дробь, если предпоследняя подходящая дробь равна 14/9, а последний элемент цепной дроби равен 3.

7.84. Даны подходящие дроби 3/1, 10/3, 33/10 некоторой конечной цепной дроби. Найдите третий элемент цепной дроби.

7.85. Докажите, что при любом $1 \leqslant k \leqslant s$:

1) $P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^k$;

2) любая подходящая дробь P_k/Q_k несократима;

3) $Q_{k-1}<Q_k$;

4) если цепная дробь положительна, то $P_{k-1}<P_k$.

7.86. Докажите, что при любом $2\leqslant k\leqslant s$:

1) $\dfrac{P_k}{Q_k}-\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\dfrac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k-1}}$;

2) $P_kQ_{k-2}-P_{k-2}Q_k=(-1)^kq_k$.

7.87. Докажите, что:

1) четные подходящие дроби образуют возрастающую последовательность;

2) нечетные подходящие дроби образуют убывающую последовательность;

3) из двух соседних подходящих дробей четная дробь всегда меньше нечетной;

4) любая четная подходящая дробь меньше любой нечетной.

7.88. Пусть d — НОД чисел a и b, P_{s-1}/Q_{s-1} — предпоследняя подходящая дробь представления a/b в виде конечной цепной дроби, $u=(-1)^sQ_{s-1}$, $v=(-1)^{s-1}P_{s-1}$. Докажите, что $d=ua+vb$.

7.89. Воспользовавшись предыдущей задачей, решите задачу 7.44.

7.5. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

7.90. Докажите, что остаток при делении простого числа на 30 не является составным числом. Справедливо ли это утверждение при делении простого числа на 60?

7.91. Какой остаток может получиться при делении простого числа $p\geqslant 5$ на 6?

7.92. Докажите, что при делении квадрата простого числа $p\geqslant 5$ на 24 остаток равен единице.

7.93. Найдите все простые числа, лежащие между:

1) 1 и 100; 2) 150 и 200; 3) 200 и 300.

7.94. Выясните, являются ли числа 2657, 2667, 2669, 2671, 2673, 2677 простыми.

7.95. Докажите, что:

1) если четырехзначное число p не делится ни на одно простое число от 2 до 97, то p — простое;

2) каждое составное число a имеет простой делитель p такой, что $p^2\leqslant a$.

7.96. Докажите, что если произведение двух целых чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.

7.97. Обобщите утверждение задачи 7.96 на случай n сомножителей.

7.98. Пусть $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$, где все p_i — различные простые числа, $\alpha_i\geqslant 0$. Докажите, что

$$a \vdots x \Leftrightarrow x=\pm p_1^{\xi_1}p_2^{\xi_2}\ldots p_s^{\xi_s},\ \text{где } 0\leqslant \xi_i\leqslant \alpha_i.$$

7.99. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s}$ $(\alpha_i \geqslant 0,\ \beta_i \geqslant 0)$, $d = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_s^{\gamma_s}$, $m = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_s^{\delta_s}$, где $\gamma_i = \min\{\alpha_i,\ \beta_i\}$, $\delta_i = \max\{\alpha_i,\ \beta_i\}$. Докажите, что $d = $ НОД(a, b), $m = $ НОК(a, b).

7.100. Найдите НОД и НОК следующих чисел, воспользовавшись результатом задачи 7.99:

1) 74, 592 и 21708; 2) 756, 1348 и 1760.

7.101. Найдите трехзначное число, если его произведение на 7 является кубом натурального числа.

7.102. Докажите, что ни одно число вида 2^n, где n — натуральное число, не представимо в виде суммы двух или более последовательных натуральных чисел.

7.103. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что $2/p$ можно представить одним и только одним способом в виде $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y — различные положительные целые числа.

7.104. Найдите тройку простых чисел-близнецов (т. е. тройку простых чисел, составляющих арифметическую прогрессию с разностью 2) и докажите, что она единственная.

7.105. Пусть p — простое число. Докажите, что:

1) если $5p^2-2$ — простое число, то числа $5p^2-4$ и $5p^2+2$ тоже простые;

2) если $2p^2+13$ — простое число, то числа $2p^2+1$ и $2p^2+11$ тоже простые;

3) если $11p-7$ — простое число, то число $11p+7$ — составное.

7.106. Найдите такое простое число p, чтобы были простыми оба числа:

1) p^2-6 и p^2+6; 2) $2p^2-9$ и $2p^2+9$.

7.107. Докажите, что следующие числа одновременно простыми быть не могут:

1) $5k-2$ и $5k+3$; 2) $7k$, $7k+4$, $7k+5$;

3) 2^n-1 и 2^n+1 при $n > 2$.

7.108. Напишите n последовательных составных чисел.

7.109. Найдите наименьшее натуральное число, при делении которого на 2 получается в остатке 1, на 3—2, на 4—3, на 5—4, на 6—5, на 7—6, на 8—7, на 9—8, на 10—9.

7.110. Найдите наибольшее трехзначное число, при делении которого на 4 получается в остатке 3, на 5—4, на 6—5.

7.111. Докажите, что если a и b — целые числа и p — простое число, то $(a+b) \vdots p \wedge ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p \wedge b \vdots p$. Верно ли это утверждение, если p — составное число?

7.112. Определите, чему равно p, если следующие числа простые:

1) p, $p+10$, $p+14$;

2) p, $p+4$, $p+14$.

7.113. Докажите, что если три простых числа образуют арифметическую прогрессию, разность которой не делится на 6, то наименьшее из этих чисел равно 3.

7.144. Докажите, что наименьшее натуральное число, взаимно-простое с числами 2, 3, ..., n,— простое.

7.115. Найдите целые числа m и n, если известно, что из четырех высказываний: а) $(m+1)\,\vdots\, n$; б) $(m+n)\,\vdots\, 3$; в) $m=2n+5$; г) $m+7n$ — простое число, три истинны, а одно ложно.

7.116. Докажите бесконечность множества простых чисел вида:

1) $4m-1$; 2) $6m-1$.

7.117. Докажите, что при $a\neq\pm1$ числа вида a^4+4 составные.

7.118. Обозначим n-е простое число через p_n. Докажите, что если $n\geqslant 12$, то $p_n>3n$.

7.119. Докажите, что при $n\in\mathbf{N}$:

1) $(n-1)!\,\vdots\, n \Leftrightarrow n$ — простое число или $n=4$;

2) $(n-1)!\,\vdots\, n^2 \Leftrightarrow n$ — простое число, или n — удвоенное простое число, или $n=8$, или $n=9$.

7.120. Докажите, что никакая функция

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \qquad (n\geqslant 1)$$

с целыми коэффициентами не может при всех целых значениях x принимать значения, равные по модулю простым числам.

7.121. Докажите, что если a и b взаимно-просты и $ab=c^n$, то каждый сомножитель есть n-я степень какого-то целого числа.

7.6. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

7.122. Докажите, что:

1) $[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1 \qquad (x,\, y\in\mathbf{R})$;

2) для любого целого n

$$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right] \quad (x\in\mathbf{R});$$

3) для любых целых $k,\, l,\, n\neq 0$

$$\left[\left[\frac{k}{l}\right]:n\right]=\left[\frac{k}{ln}\right];$$

4) $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x] \quad (x\in\mathbf{R})$;

5) для любого натурального n

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx] \quad (x\in\mathbf{R});$$

6) для любого натурального n

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots=n.$$

7.123. С каким показателем входит простое число p в разложение $n!$?

7.124. Найдите показатель, с которым число 13 входит в разложение числа 1000!.

7.125. Сколькими нулями оканчивается 123!?

7.126. Докажите, что 288! делится на $(16!)^{18}$ и на $(18!)^{16}$.

7.127. Истинны ли высказывания:

1) $C_{1000}^{500} \vdots 7$; 2) $C_{10000}^{5000} \vdots 7$?

7.128. Разложите на простые множители 50!.

7.129. Докажите, что:

1) дробь $\frac{n!}{a!\, b! \dots k!}$ есть целое число, если $a+b+ \dots + k \leqslant n$;

2) произведение n последовательных целых чисел делится на $n!$;

3) $(n!)!$ делится на $(n!)^{(n-1)!}$;

4) произведение n последовательных целых чисел, образующих арифметическую прогрессию, разность которой взаимно-проста с $n!$, делится на $n!$.

7.130. Найдите число натуральных делителей и сумму натуральных делителей следующих чисел:
1) 60; 2) 360; 3) 1542.

7.131. Докажите, что $\tau(n)$ нечетно тогда и только тогда, когда n — квадрат натурального числа.

7.132. Найдите все четырехзначные числа, имеющие 15 натуральных делителей.

7.133. Докажите, что число делителей числа 1234...91011... 133134135 не равно 357.

7.134. Найдите натуральное число n, которое делится на 12 и имеет 14 различных натуральных делителей.

7.135. Натуральное число a называется *совершенным,* если оно равно сумме всех своих собственных натуральных делителей. Пусть $a = 2^n p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — четное совершенное число. Докажите, что:

1) $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \vdots (2^{n+1}-1)$;

2) если $\frac{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}}{2^{n+1}-1} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, то $2^{n+1} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$;

3) $\sigma(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$;

4) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$;

5) $a = 2^n(2^{n+1}-1)$ и $2^{n+1}-1$ — простое;

6) $a = 2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые.

Докажите, что, наоборот, если $a = 2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые, то a — четное совершенное число.

7.7. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

7.136. Запишите следующие числа в указанной системе счисления:

1) 23163 и 17527 в восьмеричной;
2) 231632 и 729 в семеричной;
3) 2042 и 2786 в двоичной, троичной и пятеричной.

7.137. Запишите следующие числа в десятичной системе счисления:

1) $26014_{(7)}$; 2) $42125_{(5)}$; 3) $11001101_{(2)}$; 4) $530415_{(6)}$.

7.138. Вычислите, не переводя в десятичную систему счисления:

1) $7306_{(8)}+25645_{(8)}-6774_{(8)}$;
2) $425_{(6)}\cdot 54_{(6)}-531_{(6)}\cdot 43_{(6)}$;
3) $352_{(6)}\cdot 245_{(6)}$; 4) $20671_{(8)}:131_{(8)}$;
5) $23213_{(5)}:32_{(5)}+113_{(5)}\cdot 3_{(5)}$;
6) $232011_{(5)}:104_{(5)}+1234_{(5)}\cdot 322_{(5)}$;
7) $(76_{(8)}\cdot 64_{(8)}-55_{(8)}\cdot 37_{(8)}44_{(8)}$;
8) $(563_{(8)}+217_{(8)})15_{(8)}+(2365_{(8)}-636_{(8)}):17_{(8)}$;
9) $120111_{(3)}:102_{(3)}+201_{(3)}\cdot 12_{(3)}$;
10) $6325_{(7)}-456_{(7)}-150335_{(7)}:23_{(7)}$;
11) $3215_{(7)}\cdot 24_{(7)}-11461_{(7)}:25_{(7)}+1532_{(7)}$;
12) $(215_{(8)}+532_{(8)})16_{(8)}-(11031_{(8)}-527_{(8)}):32_{(8)}$;
13) $(351_{(6)}\cdot 14_{(6)}-1153_{(6)}:31_{(6)}-150_{(6)}):205_{(6)}$.

7.139. Определите, в какой системе счисления верны результаты следующих действий:

1) $35+40=115$; 2) $425-342=63$;
3) $216\cdot 3=654$; 4) $736:6=121$;
5) $656:5=124$; 6) $1520:12=123$.

7.140. Найдите значение x, если:

1) $203_{(x)}=53$; 2) $236_{(x)}=1240_{(5)}$;
3) $106_{(x)}=153_{(7)}$; 4) $324_{(x)}=10022_{(3)}$;
5) $541_{(x)}=2014_{(6)}$; 6) $364_{(x)}=3001_{(4)}$.

7.141. Найдите трехзначное число (при основании 10) такое, что число, составленное теми же цифрами в том же порядке, но при другом основании, в 2 раза больше данного.

7.142. Найдите двузначное число (в десятичной системе счисления), которое, будучи записано в двоичной, четверичной и восьмеричной системах счисления, каждый раз изображается одинаковыми цифрами (но различными в разных системах).

8. ГРУППЫ

8.1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ. ПОЛУГРУППЫ

8.1. Определите, какие из операций — сложение, вычитание, умножение, деление — являются алгебраическими на следующих подмножествах из $\mathbf{R}$; какие из алгебраических операций коммутативны, ассоциативны?

1) $\mathbf{N}$; 2) $2\mathbf{N}=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$; 3) $\{2n+1 \mid n\in\mathbf{N}\}$;
4) $\mathbf{Z}$; 5) $2\mathbf{Z}=\{2n \mid n\in\mathbf{Z}\}$; 6) $\mathbf{Q}$;
7) $\mathbf{R}$; 8) $\mathbf{R}\setminus\{0\}$; 9) $\{x\in\mathbf{R} \mid x>0\}$;
10) $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$; 11) $\{0\}$; 12) $\{1\}$; 13) $\{0, 1\}$.

8.2. Укажите, какие из следующих операций являются алгебраическими в трехмерном евклидовом пространстве V_3:

1) умножение вектора на скаляр;
2) скалярное произведение векторов;
3) векторное произведение векторов.

8.3. Укажите, какие из следующих операций являются алгебраическими на подмножестве $\{x\in\mathbf{R} \mid x>0\}$ множества $\mathbf{R}$; какие из алгебраических операций коммутативны, ассоциативны:

1) $a\circ b=\frac{a+b}{2}$; 2) $a\circ b=a+b-1$;
3) $a\circ b=ab^2$; 4) $a\circ b=a^b$;
5) $a\circ b=\sqrt{ab}$; 6) $a\circ b=\log_b a$;
7) $a\circ b=\max\{a, b\}$; 8) $a\circ b=|a-b|$.

8.4. Докажите, что множество $\mathbf{N}$ со следующими операциями является полугруппой:

1) $a\circ b=\text{НОД}(a, b)$; 2) $a\circ b=\text{НОК}(a, b)$;
3) $a\circ b=\min\{a, b\}$; 4) $a\circ b=a$; 5) $a\circ b=1$.

8.5. Укажите, какие из следующих подмножеств множества $\mathbf{C}$ с операцией — умножением — являются полугруппами:

1) $\{2^n \mid n\in\mathbf{Z}\}$; 2) $\{2^n \mid n=-2, -1, 0, 1, 2\}$;
3) $\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in\mathbf{Z}, a^2+b^2\neq 0\}$;
4) $\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in\mathbf{Q}, a^2+b^2\neq 0\}$;
5) $\{z \mid |z|=1\}$; 6) $\{z \mid |z|\leqslant 1\}$; 7) $\{z \mid |z|<1\}$;
8) $\{z \mid |z|\geqslant 1\}$; 9) $\{z \mid |z|>1\}$; 10) $\{z \mid |z|=2\}$;
11) $\{z \mid |z|\leqslant 2\}$; 12) $\{z \mid |z|<2\}$; 13) $\{z \mid |z|\geqslant 2\}$;

14) $\{z \mid |z|>2\}$; 15) $\left\{\{z \mid |z|=\frac{1}{2}\right\}$; 16) $\left\{z \mid |z| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$;

17) $\left\{z \mid |z|<\frac{1}{2}\right\}$; 18) $\{1, -1\}$; 19) $\{-1, 0, 1\}$.

8.6. Пусть X — множество, содержащее более двух элементов, $B(X)$ — множество всех бинарных отношений на X. Докажите, что следующие подмножества множества $B(X)$ с операцией — умножением (композицией) бинарных отношений — являются полугруппами:

1) $B(X)$;

2) множество всех рефлексивных отношений на X;

3) множество всех преобразований X;

4) множество всех взаимно-однозначных преобразований X;

5) максимальное множество всех попарно-коммутирующих отношений;

6) максимальное множество всех попарно-коммутирующих симметричных отношений;

7) максимальное множество всех попарно-коммутирующих отношений эквивалентности.

8.7. Укажите, какие из следующих подмножеств множества действительных функций, определенных на $\mathbf{R}$, с операцией — композицией преобразований — являются полугруппами:

1) множество всех непрерывных функций;

2) множество всех четных функций;

3) множество всех нечетных функций;

4) множество всех ограниченных функций;

5) множество всех таких функций f, что $f(0)=1$;

6) множество всех таких функций f, что $f(0)=0$;

7) множество всех дифференцируемых функций;

8) множество всех интегрируемых функций;

9) множество всех многочленов.

8.8. Пусть P — семейство всех подмножеств данного непустого множества U. Образует ли множество P полугруппу, если операция на нем:

1) пересечение; 2) объединение; 3) разность?

8.9. Пусть A — множество с алгебраической операцией $\circ$. Докажите, что:

1) если $u, v \in A$ — такие элементы, что $(\forall a) u \circ a = a \wedge a \circ v = a$, то $u = v$;

2) если $u, v \in A$ — такие элементы, что $(\forall a) u \circ a = u \wedge a \circ v = v$, то $u = v$.

8.10. Докажите, что в мультипликативной полугруппе A для любых натуральных k и l:

1) $a^k a^l = a^{k+l}$; 2) $(a^k)^l = a^{kl}$.

8.11. Докажите, что в аддитивной полугруппе A для любых натуральных k и l:

1) $ka + la = (k+l)a$; 2) $l(ka) = (lk)a$.

8.2. ПРИМЕРЫ ГРУПП

8.12. Какие из полугрупп задачи 8.5 являются группами?

8.13. Докажите, что следующие подмножества из **C** являются мультипликативными группами:

1) $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}\setminus\{0\}$; 2) $\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0\}$;
3) $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\setminus\{0\}$; 4) $\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$;
5) $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\setminus\{0\}$; 6) $\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$;
7) $\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Q},\ a^2+b^2>0\}$;
8) $\{a+bi\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Q},\ a^2+b^2>0\}$;
9) множество R_n всех корней n-й степени из единицы.

8.14. Докажите, что следующие множества чисел являются аддитивными группами:

1) $\mathbf{Z}$; 2) $2\mathbf{Z}$; 3) $\mathbf{Q}$; 4) $\mathbf{R}$; 5) $\mathbf{C}$;
6) $\left\{\frac{a}{7^k}\,\middle|\, a\in\mathbf{Z},\ k\in\mathbf{N}\right\}$; 7) $\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$;
8) $\{a+bi\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$;
9) $\left\{\frac{a+bi\sqrt{3}}{2}\,\middle|\, a,\ b\in\mathbf{Z},\ a \text{ и } b\text{—числа одинаковой четности}\right\}$.

8.15. Докажите, что следующие множества преобразований с операцией — композицией преобразований — являются группами, и определите, какие из этих групп абелевы:

1) множество всех взаимно-однозначных отображений непустого множества X на себя;

2) полугруппа взаимно-однозначных отображений множества X на себя, которая вместе с каждым отображением содержит обратное ему;

3) множество всех вращений (поворотов) плоскости вокруг фиксированной точки O;

4) множество всех вращений плоскости вокруг фиксированной точки O и всех отражений плоскости относительно всех прямых, проходящих через точку O;

5) множество, состоящее из n вращений плоскости вокруг фиксированной точки O на углы $2k\pi/n$, $k=0, 1, \ldots, n-1$ (эта группа называется *группой вращений правильного n-угольника*).

8.16. Составьте таблицы для закона композиции на следующих группах вращений (поворотов) плоскости, совмещающих с собой:

1) правильный треугольник; 2) квадрат;
3) правильный пятиугольник; 4) правильный шестиугольник.

8.17. Составьте таблицы для закона композиции на следующих множествах движений и отражений плоскости, совмещающих с собой:

1) ромб (но не квадрат) $ABCD$;
2) правильный треугольник ABC;
3) квадрат $ABCD$.

Докажите, что каждое из этих множеств преобразований есть группа.

8.18. Докажите, что каждое из следующих множеств с законом композиции, заданным таблицей, является группой:

1) $\{e, a\}$,

	e	a
e	e	a
a	a	e

2) $\{e, a, b\}$,

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

8.19. Докажите, что следующие множества функций с операцией — композицией преобразований — являются группами:

1) $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, где $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$;

2) $G = \{g_1, g_2, g_3\ g_4\}$, где $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g_3(x) = -\frac{1}{x}$, $g_4(x) = -\frac{x+1}{x-1}$;

3) $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, где $h_1(x) = x$, $h_2(x) = 1 - x$, $h_3(x) = \frac{1}{x}$, $h_4(x) = \frac{1}{1-x}$, $h_5(x) = -\frac{x}{1-x}$, $h_6(x) = -\frac{1-x}{x}$.

8.20. Докажите, что следующие множества квадратных матриц 2-го порядка являются мультипликативными группами:

1) $\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R},\ a^2 + b^2 > 0\right\}$;

2) $\left\{\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Q},\ a^2 + b^2 > 0\right\}$;

3) $\left\{\begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Q},\ a^2 + b^2 > 0\right\}$;

4) $\left\{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \middle| \varphi \in \mathbf{R}\right\}$;

5) $\left\{\begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix} \middle| k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$.

8.21. Докажите, что следующие подмножества множества

$M_n(\mathbf{C})$ всех квадратных матриц n-го порядка с элементами из $\mathbf{C}$ являются мультипликативными полугруппами, и определите, какие из полугрупп являются группами:

1) $M_n(\mathbf{C})$;

2) множество $G\operatorname{Ln}(\mathbf{C})$ всех невырожденных матриц;

3) множество $G\operatorname{Ln}(\mathbf{R})$ всех невырожденных вещественных матриц;

4) множество всех вырожденных матриц;

5) множество всех невырожденных матриц с элементами из $\mathbf{Z}$;

6) множество $S\operatorname{Ln}(\mathbf{C})$ всех матриц, определитель которых равен единице;

7) множество $S\operatorname{Ln}(\mathbf{Z})$ всех матриц с элементами из $\mathbf{Z}$, определитель которых равен единице;

8) множество U_n всех унитарных матриц $(\bar{A}'=A^{-1})$;

9) множество $O_n=U_n\cap G\operatorname{Ln}(\mathbf{R})$ всех ортогональных матриц;

10) множество $\{k\mathrm{E}\,|\,k\in\mathbf{C}\}$ всех скалярных матриц;

11) множество всех невырожденных скалярных матриц;

12) множество всех треугольных матриц вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

8.22. Пусть $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&8&1&5&7&6\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&2&7&3&4&5&6\end{pmatrix}$. Вычислите f^2, g^2, fg, gf, f^{100}, g^{100}.

8.23. Решите уравнение $fu=g$, где:

1) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&5&1&6&4&3\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&4&2\end{pmatrix}$;

2) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&5&3&2&1\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&1&3&6&5\end{pmatrix}$.

8.24. При тех же f и g, что и в задаче 8.23, решите уравнение $uf=g$.

8.25. Решите уравнение $fug=h$ при:

1) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$;

2) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&3&2&1&6&5&4\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&7&4&5&6\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&1&3&6&4&7&2\end{pmatrix}$.

8.26. Составьте таблицу для закона композиции в группе S_3.

8.27. Докажите, что множество подстановок

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix};\quad f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&2&5&3&1\end{pmatrix};$$
$$g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&4&3&2&6\end{pmatrix};\quad h=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&5&2&4&1\end{pmatrix}$$

с операцией — композицией преобразований — является группой.

8.3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ГРУППЫ

8.28. Докажите, что в мультипликативной группе:

1) существует единственная единица;

2) каждый элемент имеет единственный обратный;

3) уравнение $ax=b$ $(ya=b)$ имеет решение и это решение единственное;

4) $ac=bc \Rightarrow a=b$ $(ca=cb \Rightarrow a=b)$;

5) $(a^{-1})^{-1}=a$; 6) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$;

7) $(a_1a_2 \ldots a_k)^{-1}=a_k^{-1} \ldots a_2^{-1}a_1^{-1}$;

8) $(a^k)^{-1}=(a^{-1})^k$, $k\in\mathbf{N}$;

9) $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow ab=ba$.

8.29. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 8.28 для аддитивной группы.

8.30. Докажите, что в аддитивной абелевой группе G:

1) $(a+b)-c=a+(b-c)$;

2) $(a+b)-(a+c)=b-c$;

3) $(a+b)-c=a-(c-b)$;

4) $c-(a+b)=(c-a)-b$.

8.31. Пусть H — полугруппа, в которой при любых a и b уравнения $ax=b$ и $ya=b$ имеют решения. Докажите, что:

1) решение уравнения $ax=a$ есть правая единица в H;

2) в H есть единица;

3) решение уравнения $ax=e$ совпадает с решением уравнения $ya=a$;

4) H — группа.

8.32 Пусть H — конечная полугруппа с сокращением $(ax=ay \Rightarrow x=y$ и $xa=ya \Rightarrow x=y)$. Докажите, что:

1) $\lambda_a:H\to H:\lambda_a x=ax$ — взаимно-однозначное отображение H на H;

2) H — группа.

8.33. Докажите, что в мультипликативной группе G для любых $k,l\in\mathbf{Z}$:

1) $a^ka^l=a^{k+l}$; 2) $(a^k)^l=a^{kl}$.

8.34. Докажите, что в аддитивной группе G для любых $k,l\in\mathbf{Z}$:

1) $ka+la=(k+l)a$; 2) $l(ka)=(lk)a$.

8.35. Найдите порядки элементов группы S_3.

8.36. В мультипликативной группе $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ найдите все элементы:

1) 5-го порядка; 2) 6-го порядка.

8.37. Докажите, что единственная мультипликативная группа n-го порядка, элементами которой являются комплексные числа, есть группа R_n всех корней n-й степени из единицы.

8.38. Могут ли в мультипликативной группе G существовать ровно два элемента 2-го порядка?

8.39. Докажите, что в группе порядки элементов ab и ba равны.

8.40. Докажите, что:

1) если в группе G порядок каждого неединичного элемента равен 2, то она абелева;

2) если при этом группа G конечна, то она содержит 2^n элементов.

8.41. Какие из групп задач 8.5, 8.13, 8.14, 8.16—8.20 циклические? Для циклических групп укажите какую-нибудь образующую.

8.42. Докажите, что существуют циклические группы подстановок любого порядка.

8.43. Докажите, что аддитивная группа $\mathbf{Z}$ является циклической. Найдите все ее образующие.

8.44. Пусть a — элемент n-го порядка мультипликативной группы G. Докажите, что:

1) элементы $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}$ попарно различны;

2) множество $H = \{a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ с умножением, индуцированным из G, является группой.

8.45. Докажите, что если a — элемент бесконечного порядка группы G, то $k \neq l \Rightarrow a^k \neq a^l$ при любых $k, l \in \mathbf{Z}$.

8.46. Пусть a — элемент группы G, n — натуральное число. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) a — элемент n-го порядка;

2) $\langle a \rangle$ — группа n-го порядка;

3) при любом целом t $a^t = e \Leftrightarrow t \vdots n$.

8.47. Пусть a — элемент простого порядка p группы G. Докажите, что при целом m либо $a^m = e$, либо порядок a^m равен p.

8.48. Пусть a — элемент n-го порядка группы G. Докажите, что:

1) порядок элемента a^s равен n/d, где $d = \text{НОД}(n, s) > 0$;

2) порядок a^s равен n тогда и только тогда, когда n и s взаимно-просты;

3) число элементов n-го порядка в группе $\langle a \rangle$ равно $\varphi(n)$ (φ — функция Эйлера).

8.49. Пусть G — мультипликативная абелева группа, b и c — элементы k-го и l-го порядков соответственно, k и l взаимно-просты. Докажите, что:

1) порядок элемента $a = bc$ равен kl;

2) представление a в виде произведения элемента k-го порядка и элемента l-го порядка однозначно.

8.4. ПОДГРУППЫ, СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ, НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ, ГОМОМОРФИЗМЫ

8.50. Пусть H — конечное непустое подмножество группы G. Докажите, что H — подгруппа группы G тогда и только тогда, когда $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

8.51. Пусть G — мультипликативная группа. Докажите, что:

1) при любых подмножествах A, B, C группы G $(AB)C = A(BC)$;

2) при любом $a \in G$ $aG = G$;

3) $GG = G$; 4) $G^{-1} = G$; 5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8.52. Пусть A — подмножество мультипликативной группы G. Докажите, что множество $H = \{a \in G \mid aA = Aa\}$ — подгруппа группы G.

8.53. Пусть H и K — подгруппа группы G. Докажите, что HK — группа тогда и только тогда, когда $HK = KH$.

8.54. Пусть H — подгруппа группы G. Докажите, что:

1) $aH \cap bH \neq \varnothing \Rightarrow aH = bH$;

2) семейство подмножеств $\{aH \mid a \in G\}$ образует разбиение группы G;

3) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow b \in aH$;

4) отображение f: $H \to aH$: $f(x) = ax$ взаимно-однозначно.

8.55. В группе S_3:

1) найдите все подгруппы;

2) найдите правые смежные классы по каждой подгруппе;

3) найдите левые смежные классы по каждой подгруппе;

4) определите, какие из подгрупп группы S_3 являются нормальными.

8.56. Докажите, что:

1) левые смежные классы группы $G\,\mathrm{Ln}(\mathbf{C})$ по подгруппе $S\,\mathrm{Ln}(\mathbf{C})$ состоят из матриц с одинаковыми определителями;

2) $S\,\mathrm{Ln}(\mathbf{C})$ — нормальная подгруппа группы $G\,\mathrm{Ln}(\mathbf{C})$.

8.57. Пусть G — конечная группа. Докажите, что порядок элемента g из G есть делитель порядка G.

8.58. Пусть n — порядок конечной группы G. Докажите, что $g^n = e$ при любом $g \in G$.

8.59. Докажите, что любая группа простого порядка циклическая. Найдите все ее образующие.

8.60. Пусть L — левый смежный класс группы G по подгруппе H. Докажите, что:

1) $R = \{g^{-1} \mid g \in L\}$ — правый смежный класс группы G по подгруппе H;

2) число правых смежных классов группы G по подгруппе H равно числу левых смежных классов.

8.61. Докажите, что каждая подгруппа абелевой группы нормальна.

8.62. Докажите, что каждая подгруппа индекса 2 нормальна.

8.63. Докажите, что H — нормальная подгруппа группы G тогда и только тогда, когда при любом $a \in G$ $a^{-1}Ha \subseteq H$.

8.64. Докажите, что если произведение любых двух левых смежных классов группы G по подгруппе H является левым смежным классом, то H — нормальная подгруппа.

8.65. Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Докажите, что при любых $a, b \in G$:

1) $aH \cdot bH = (ab)H$;
2) $H \cdot aH = aH \cdot H = aH$;
3) $aH \cdot a^{-1}H = a^{-1}H \cdot aH = H$.

8.66. Найдите все подгруппы и все фактор-группы по этим подгруппам:

1) в аддитивной группе $\mathbf{Z}$;
2) в циклической группе 12-го порядка.

8.67. Пусть $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа, H — ее подгруппа и a^m — минимальная положительная степень элемента a, принадлежащая H. Докажите, что:

1) $H = \langle a^m \rangle$;
2) $e, a, a^2, \ldots, a^{m-1}$ — представители смежных классов группы G по подгруппе H;
3) индекс H в G равен m;
4) фактор-группа G/H — циклическая группа m-го порядка.

8.68. Докажите, что бесконечная циклическая группа изоморфна аддитивной группе целых чисел.

8.69. Докажите, что циклическая группа порядка n изоморфна группе R_n (мультипликативной группе корней n-й степени из единицы).

8.70. Докажите изоморфизм групп из следующих задач:

1) 8.13.5 и 8.20.1;
2) 8.13.6, 8.15.3 и 8.20.4;
3) 8.13.7 и 8.20.2;
4) 8.13.8 и 8.20.3;
5) 8.13.9, 8.15.5 и 8.20.5;
6) 8.14.1 и 8.14.2;
7) 8.16.2, 8.19.2;
8) 8.17.1 и 8.19.1;
9) 8.17.2, 8.19.3.

8.71. Докажите, что существуют лишь две неизоморфные группы 4-го порядка и что обе они абелевы.

8.72. Пусть G — группа, a — ее элемент, λ_a: $G \to G$: $\lambda_a(x) = ax$ — преобразование множества G. Докажите, что:

1) множество $\Lambda(G) = \{\lambda_a \mid a \in G\}$ с операцией — композицией преобразований — является группой.
2) отображение f: $G \to \Lambda(G)$: $f(a) = \lambda_a$ — изоморфизм.

8.73. Докажите, что группа G порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы S_n.

8.74. Пусть $a \neq 1$ — положительное действительное число. Докажите, что отображение φ мультипликативной группы положительных действительных чисел на аддитивную группу действительных чисел: $\varphi(x) = \log_a x$ является изоморфизмом.

8.75. Докажите, что каждый внутренний автоморфизм абелевой группы тождественный.

8.76. Докажите, что:

1) группа S_3 имеет ровно шесть внутренних автоморфизмов;

2) каждый автоморфизм группы S_3 внутренний.

8.77. Пусть $\mathbf{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, k — целое число. Докажите, что отображение φ: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$: $\varphi(a) = ka$ — автоморфизм.

8.78. Пусть G — мультипликативная группа положительных действительных чисел, k — целое число. Докажите, что отображение φ: $G \to G$: $\varphi(a) = a^k$ — автоморфизм.

8.79. Пусть $T = \{t_0, t_1\}$ с операцией — сложением:

	t_0	t_1
t_0	t_0	t_1
t_1	t_1	t_0

Докажите, что следующие отображения гомоморфны, и опишите их ядра:

1) f: $\mathbf{Z} \to T$: $f(x) = \begin{cases} t_0, & \text{если } x \text{ четно;} \\ t_1, & \text{если } x \text{ нечетно;} \end{cases}$

2) g: $S_3 \to T$: $g(s) = \begin{cases} t_0, & \text{если } s \text{ — четная подстановка;} \\ t_1, & \text{если } s \text{ — нечетная подстановка.} \end{cases}$

8.80. Докажите, что отображение φ: $G\,\mathrm{Ln}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$: $\varphi(A) = \det A$ гомоморфно. Опишите ядро этого гомоморфизма.

8.81. Пусть K — мультипликативная группа комплексных чисел, модуль которых равен единице. Докажите, что отображение аддитивной группы действительных чисел φ: $\mathbf{R} \to K$: $\varphi(x) = \cos x + i \sin x$ гомоморфно. Опишите ядро этого гомоморфизма.

8.82. Пусть R_n — мультипликативная группа корней n-й степени из единицы и $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Докажите, что отображение φ: $\mathbf{Z} \to R_n$: $\varphi(k) = \varepsilon_1^k$ — гомоморфизм. Опишите ядро этого гомоморфизма.

8.83. Пусть G — мультипликативная абелева группа, k — фиксированное целое число, $H = \{a^k \mid a \in G\}$. Докажите, что:

1) H — подгруппа группы G;

2) отображение φ: $G \to H$: $\varphi(a) = a^k$ — гомоморфизм G на H. Опишите ядро этого гомоморфизма.

8.84. Пусть φ — гомоморфизм группы G на G'. Докажите, что:

1) $\varphi(e)=e'$; 2) $\varphi(a^{-1})=[\varphi(a)]^{-1}$.

8.85. Пусть H — нормальная подгруппа группы G и φ: $G\to\bar{G}=G|H$: $\varphi(a)=\bar{a}$. Докажите, что:

1) φ — гомоморфизм G на $\bar{G}$;

2) H — ядро гомоморфизма φ.

8.86. Пусть φ — гомоморфизм группы G на G', H — ядро этого гомоморфизма. Докажите, что:

1) H — нормальная подгруппа группы G;

2) $aH=bH \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(b)$;

3) если φ^*: $\bar{G}=G/H\to G'$: $\varphi^*(\bar{a})=\varphi(a)$, то φ^* — отображение $\bar{G}$ на G';

4) $\varphi^*(\bar{a}\bar{b})=\varphi^*(\bar{a})\varphi^*(\bar{b})$;

5) $\varphi^*(\bar{a})=\varphi^*(\bar{b}) \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$;

6) φ^* — изоморфизм $\bar{G}$ на G'.

8.87. Пусть φ: $G\to G'$ — гомоморфизм групп. Докажите, что φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его ядро равно $\{e\}$.

9. КОЛЬЦА

9.1. КОЛЬЦО, ПОДКОЛЬЦО

9.1. Докажите, что каждое из следующих числовых множеств с обычным сложением и умножением является кольцом:

1) $\mathbf{Z}$; 2) $2\mathbf{Z}$ (множество четных чисел);
3) $m\mathbf{Z}$ (множество целых чисел, кратных m); 4) $\mathbf{Q}$;
5) $\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$;
6) $\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in 2\mathbf{Z}\}$;
7) $\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$;
8) $\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$;
9) $\{a+bi\mid a,\ b\in 3\mathbf{Z}\}$;
10) $\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$;
11) $\{a+bi\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$;
12) $\left\{\dfrac{a+bi\sqrt{3}}{2}\,\middle|\, a \text{ и } b \text{ — целые числа одинаковой четности}\right\}$;
13) $\{a+bi\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$.

Какие из этих колец содержат единицу? В таких кольцах укажите обратимые элементы. Укажите пары колец, из которых одно является подкольцом другого.

9.2. Докажите, что каждое из следующих множеств матриц с обычным сложением и умножением является кольцом:

1) $M_n(\mathbf{Z})$ (множество квадратных матриц n-го порядка, элементы которых — целые числа);

2) $M_n(\mathbf{Q})$; 3) $M_n(\mathbf{R})$; 4) $M_n(\mathbf{C})$;

5) $\left\{\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in\mathbf{Z}\right\}$; 6) $\left\{\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in 2\mathbf{Z}\right\}$;

7) $\left\{\begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in\mathbf{Q}\right\}$; 8) $\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in\mathbf{Z}\right\}$;

9) $\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in 3\mathbf{Z}\right\}$; 10) $\left\{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in\mathbf{Q}\right\}$;

11) $\left\{\begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in\mathbf{Z}\right\}$;

12) $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a & -\frac{3}{2}b \\ \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}a \end{bmatrix} \middle| \, a \text{ и } b \text{ — целые числа одинаковой четности} \right\}$;

13) $\left\{\begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Q}\right\}$; 14) $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z}\right\}$;

15) $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{Z}\right\}$; 16) $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbf{Z}\right\}$.

Какие из этих колец коммутативны? Какие содержат единицу? В таких кольцах укажите обратимые элементы. В кольцах с делителями нуля найдите все делители нуля. Укажите пары колец, из которых одно является подкольцом другого.

9.3. Докажите, что каждое из следующих множеств действительных функций на отрезке $[-1, 1]$ с поточечным сложением и умножением является коммутативным кольцом с единицей:

1) множество всех непрерывных функций;
2) множество всех четных функций;
3) множество всех многочленов;
4) множество всех многочленов, степень которых меньше или равна n;
5) множество всех дифференцируемых функций;
6) множество всех ограниченных функций.

Укажите в этих кольцах обратимые элементы. В каких из этих колец есть делители нуля? Укажите пары колец, из которых одно является подкольцом другого.

9.4. Докажите, что множество $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ со следующими операциями является коммутативным кольцом с единицей:

1) $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$,
$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1a_2, b_1b_2)$;
2) $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$,
$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1a_2+b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)$;
3) $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$,
$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1a_2+3b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)$;
4) $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$,
$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1a_2-3b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)$.

Укажите в каждом из этих колец обратимые элементы. В кольцах с делителями нуля найдите все делители нуля.

9.5. Пусть A — аддитивная абелева группа. Определим на A операцию умножения: $ab=0$ для любых $a, b\in A$. Докажите, что множество A с этими двумя операциями есть кольцо.

9.6. Докажите, что в кольце A:

1) $a\sum\limits_{k=1}^{m} b_k=\sum\limits_{k=1}^{m} ab_k$; 2) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)b=\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib$;

3) $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_i b_k$;

4) $a(b-c)=ab-ac$; 5) $a\cdot 0=0$;

6) $(-a)b=a(-b)=-ab$;

7) при любом целом n $na\cdot b=a\cdot nb=n(ab)$;

8) при любых целых n, k $na\cdot kb=(nk)(ab)$.

9.7. Докажите, что в кольце A, состоящем из n элементов, для любого $a\in A$ $na=0$.

9.8. Докажите, что в кольце A:

1) $ab=ba \Rightarrow a(-b)=(-b)a$;

2) $ab=ba \Rightarrow a\cdot nb=nb\cdot a$ $(n\in \mathbf{Z})$;

3) $ab=ba \wedge ac=ca \Rightarrow a(b+c)=(b+c)a$;

4) $ab=ba \wedge ac=ca \Rightarrow a(bc)=(bc)a$.

9.9. Докажите, что в коммутативном кольце A $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$.

9.10. Докажите, что если a — ненулевой элемент кольца A и не делитель нуля, то $ax=ay \Rightarrow x=y$.

9.11. Докажите, что если a — такой элемент коммутативного кольца A, что $aA=A$, то A — кольцо с единицей и a — обратимый элемент. Наоборот, если A — коммутативное кольцо с единицей и a — обратимый элемент кольца A, то $aA=A$.

9.12. Докажите, что множество A^* всех обратимых элементов кольца A с единицей является мультипликативной группой.

9.13. Докажите, что:

1) непустое подмножество B кольца A является подкольцом тогда и только тогда, когда $a, b\in B \Rightarrow a-b\in B \wedge ab\in B$;

2) непустое конечное подмножество B кольца A является подкольцом тогда и только тогда, когда $a, b\in B \Rightarrow a+b\in B \wedge \wedge ab\in B$.

9.14. Пусть A — кольцо с единицей e. Докажите, что подмножество $B=\{ne \mid n\in \mathbf{Z}\}$ является подкольцом кольца A.

9.15. Докажите, что пересечение любого множества подколец кольца A является подкольцом кольца A.

9.2. ОБЛАСТЬ ЦЕЛОСТНОСТИ. ПОЛЕ

9.16. Какие из колец задач 9.1—9.4 являются областями целостности; полями?

9.17. Докажите, что в области целостности A:

1) в равенстве $a=bs$ элемент s однозначно определяется элементами a и b;

2) отношение делимости $(a \vdots b \Leftrightarrow b\neq 0 \wedge (\exists s\in A)\, a=bs)$ транзитивно;

3) $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow (xa+yb) \vdots c$;

4) u — обратимый элемент $\Leftrightarrow u$ — делитель единицы;

5) $a \vdots b \Rightarrow a \vdots ub$, где u — обратимый элемент;

6) $a \vdots b \wedge b \vdots a \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a = ub$, где u — обратимый элемент;

7) если $a = bs + t$, то $a \vdots c \wedge b \vdots c \Leftrightarrow b \vdots c \wedge t \vdots c$;

8) $a \vdots b \wedge c \neq 0 \Leftrightarrow ca \vdots cb$;

9) $a \vdots c \wedge \overline{b \vdots c} \Rightarrow \overline{a \vdots b}$.

9.18. В кольце $K = \{a + bi\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$:

1) покажите, что $4 \vdots (1 + i\sqrt{3})$;

2) покажите, что $\overline{4 \vdots (2 + 2i\sqrt{3})}$;

3) найдите все обратимые элементы;

4) найдите все делители числа 4;

5) найдите все общие делители чисел 4 и $2 + 2i\sqrt{3}$;

6) докажите, что числа 4 и $2 + 2i\sqrt{3}$ не имеют наибольшего общего делителя;

7) докажите, что числа ± 2 и $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$ неприводимые;

8) докажите, что число 4 неоднозначно раскладывается на неприводимые множители;

9) докажите, что каждый ненулевой необратимый элемент разложим на неприводимые множители.

9.19. Пусть A — область целостности. Докажите, что если d — НОД элементов a и b и u — обратимый элемент, то ud — также НОД элементов a, b. Наоборот, если d и c — два НОД элементов a и b, то $c = ud$, где u — обратимый элемент.

9.20. Пусть A—факториальное кольцо, $a \in A$ и $a = up_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ $\ldots p_s^{\alpha_s}$—каноническое разложение. Докажите, что $a \vdots x \Leftrightarrow x = vp_1^{\xi_1} p_2^{\xi_2} \ldots$ $\ldots p_s^{\xi_s}$, где v — обратимый элемент и $0 \leqslant \xi_i \leqslant \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

9.21. Пусть A — факториальное кольцо, $a = up_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, $b = vp_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}$, где все p_i — попарно различные неприводимые элементы, u и v — обратимые элементы, а α_i, $\beta_i \geqslant 0$. Докажите, что:

1) $p_1^{\gamma_1} \ldots p_s^{\gamma_s}$, где $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ — НОД(a, b);

2) $p_1^{\delta_1} \ldots p_s^{\delta_s}$, где $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ — НОК(a, b).

9.22. Докажите, что в факториальном кольце A:

1) если a взаимно-просто с $b_1, b_2, \ldots, b_n$, то a взаимно-просто и с их произведением;

2) если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ попарно взаимно-просты и c делится на каждый из этих элементов, то c делится и на их произведение;

3) если a и b взаимно-просты и $bc \vdots a$, то $c \vdots a$.

9.23. Докажите, что в факториальном кольце A:

1) элемент a или делится на неприводимый элемент p, или взаимно-прост с ним;

2) если произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$ делится на неприводимый элемент p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.

9.24. Пусть A — область целостности, в которой каждый ненулевой необратимый элемент раскладывается в произведение неприводимых множителей. И пусть для любого неприводимого элемента $p \in A$ выполняется следующее условие: $ab \vdots p \Rightarrow a \vdots p \vee b \vdots p$. Докажите, что кольцо A факториально.

9.25. Пусть A — факториальное кольцо, d — НОД(a, b), $b \neq 0$. Докажите, что:

1) kd — НОД(ka, kb) $(k \neq 0)$;

2) a/d и b/d взаимно-просты;

3) если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то d/c — НОД$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$.

9.26. Пусть A — факториальное кольцо, a и b — ненулевые элементы, d — их НОД, m — их НОК. Докажите, что:

1) если a и b взаимно-просты, то ab — НОК(a, b);

2) km — НОК(ka, kb) $(k \neq 0)$;

3) ab/d — НОК(a, b).

9.27. Пусть a, b, c — элементы факториального кольца A, a и b взаимно-просты и $ab = c^n$. Докажите, что существуют такие x, $y \in A$, что $a = ux^n$, $b = vy^n$, где u, $v \in A$ — обратимые элементы.

9.28. Докажите, что в поле P:

1) нет делителей нуля;

2) множество P^* всех ненулевых элементов является мультипликативной группой;

3) уравнение $ax = b$ $(a \neq 0)$ имеет решение и это решение единственное.

9.29. Докажите, что в поле P:

1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; 2) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$;

3) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$; 4) $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

5) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$; 6) если $\frac{a}{b} \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

9.30. Пусть P — поле, A — ненулевое подкольцо поля P. Докажите, что множество $F = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in A, b \neq 0\right\}$ является минимальным подполем поля F, содержащим A.

9.31. Пусть P — поле, e — его единица. Докажите, что множество $F = \left\{\frac{ke}{ne} \,\middle|\, k, n \in \mathbf{Z}\right\}$ является минимальным подполем поля P.

9.32. 1) Пусть A — область целостности, $B = \{(a, b) \mid a, b \in A, b \neq 0\}$. На множестве B определим отношение $\sim$: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Докажите, что $\sim$ есть отношение эквивалентности;

2) класс эквивалентности $\sim$, содержащий пару (a, b), обозначим a/b. Докажите, что:

а) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$; б) $\frac{0}{b} = \frac{0}{d}$;

в) $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$; г) $\frac{b}{b} = \frac{d}{d}$.

3) Пусть T — множество всех классов эквивалентности $\sim$. Определим сложение и умножение следующими формулами:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};\qquad \frac{a}{b}\,\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

(Символы в правой части имеют смысл, так как $b\neq 0\wedge d\neq 0\Rightarrow \Rightarrow bd\neq 0$). Докажите, что:

а) $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\wedge\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$;

б) $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\wedge\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}\Rightarrow\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$;

4) Докажите, что множество T с определенными в п. 3 сложением и умножением является полем;

5) Докажите, что множество $A'=\left\{\frac{a}{e}\,\middle|\,a\in A\right\}$ является подкольцом поля T.

9.33. Докажите, что конечная область целостности A является полем.

9.34. Докажите, что поле рациональных чисел является минимальным числовым полем.

9.3. ИДЕАЛЫ КОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ

9.35. Докажите, что идеалами являются:

1) в кольце $\mathbf{Z}$ множества $2\mathbf{Z}$, $m\mathbf{Z}$;

2) в кольце $\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$ подкольцо $\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in 2\mathbf{Z}\}$;

3) в кольце $\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$ подкольцо $\{a+bi\mid a,\ b\in 3\mathbf{Z}\}$;

4) в кольце функций, непрерывных на отрезке $[-1,\ 1]$, множество таких функций g, что $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$;

5) в кольце $A=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}\middle|\,a,\ b\in\mathbf{Z}\right\}$ множество $J=\left\{\begin{bmatrix}a & a\\ a & a\end{bmatrix}\middle|\,a\in\mathbf{Z}\right\}$;

6) в кольце $A=\left\{\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}\middle|\,a,\ b,\ c\in\mathbf{Z}\right\}$, множество $J=\left\{\begin{bmatrix}0 & b & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\middle|\,b,\ c\in\mathbf{Z}\right\}$.

9.36. Докажите, что в произвольном кольце A идеалами являются:

1) все A и $\{0\}$;

2) множество $(a)=aA=\{ax\mid x\in A\}$;

3) множество $(a_1,\ \ldots,\ a_s)=\{a_1x_1+\ldots+a_sx_s\mid x_1,\ \ldots,\ x_s\in A\}$.

9.37. Докажите, что $(a_1, \ldots, a_s)$ — минимальный идеал кольца A, содержащий элементы $a_1, \ldots, a_s$.

9.38. Докажите, что следующие высказывания эквивалентны:

1) J — идеал кольца A;

2) J — подкольцо кольца A, удовлетворяющее условию $JA \subset J$;

3) J — подгруппа аддитивной группы кольца A, удовлетворяющая условию $JA \subset J$.

9.39. Пусть B — подкольцо кольца A, J — идеал кольца A. Докажите, что $B \cap J$ — идеал кольца B.

9.40. Пусть кольцо A содержит по крайней мере два элемента. Докажите, что A — поле тогда и только тогда, когда в A нет идеалов, кроме $\{0\}$ и A.

9.41. Пусть S, T, U — идеалы кольца A. Докажите, что:

1) $S+T, S \cap T, S \circ T, S:T$ — идеалы кольца A;

2) операции $+$, $\cap$, $\circ$ коммутативны и ассоциативны; ,

3) $S \supseteq T \Rightarrow S \cap (T+U) = T+(S \cap U)$;

4) $S \circ (T+U) = S \circ T + S \circ U$;

5) $S \circ T \subseteq S \cap T$; 6) $S:T \supseteq S$;

7) $S:A = S$ (A — кольцо с единицей);

8) $U \circ T \subseteq S \Leftrightarrow U \subseteq S:T$;

9) $S \supseteq T \Leftrightarrow S:T = A$;

10) $(S \cap T):U = (S:U) \cap (T:U)$.

9.42. В кольце $\mathbf{Z}$ найдите:

1) $(3)+(4)$;	2) $(3)\cap(4)$;	3) $(3)\circ(4)$;
4) $(3):(4)$;	5) $(4):(3)$;	6) $(3)+(6)$;
7) $(3)\cap(6)$;	8) $(3)\circ(6)$;	9) $(3):(6)$;
10) $(6):(3)$;	11) $(4)+(6)$;	12) $(4)\cap(6)$;
13) $(4)\circ(6)$;	14) $(4):(6)$;	15) $(6):(4)$.

9.43. Докажите, что в кольце A:

1) $a = bc \Leftrightarrow (a) \subseteq (b)$;

2) $a = bc$ и c — обратимый элемент $\Leftrightarrow (a) = (b)$;

3) $a = bc$ и c — необратимый элемент $\Leftrightarrow (a) \subset (b)$.

9.44. Докажите, что если $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots \subseteq J_n$ — последовательность вложенных идеалов кольца A, то $J = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_k$ — тоже идеал кольца A.

9.45. Пусть J — ненулевой идеал кольца $\mathbf{Z}$, m — наименьшее положительное число из J. Докажите, что $J = (m)$.

9.46. Докажите, что если a и b — ненулевые элементы кольца главных идеалов A, то:

1) d — НОД$(a, b) \Leftrightarrow (d) = (a) + (b)$;

2) m — НОК$(a, b) \Leftrightarrow (m) = (a) \cap (b)$.

9.47. Найдите образующие следующих идеалов кольца $\mathbf{Z}$:

1) $(6, 9, 15) + (10, 25, 30)$;

2) $(6, 9, 15) \cap (20, 25, 30)$;

3) $(6, 9, 15) \circ (20, 25, 30)$;

4) (6, 9, 15):(20, 25, 30); 5) (20, 25, 30):(6, 9, 15).

9.48. Докажите, что следующие множества являются идеалами кольца **Z**, и найдите образующие этих идеалов:

1) $\{x \mid bx \vdots a\}$; 2) $\{x \mid x \vdots a \wedge x \vdots b\}$;

3) $\{x \mid x = 26u + 65v; \quad u, v \in \mathbf{Z}\}$;

4) $\{x \mid x \vdots 8 \wedge x \vdots 14 \wedge x \vdots 35\}$;

5) $\{x \mid x \vdots 5 \wedge x = 18u + 42v; \ u, v \in \mathbf{Z}\}$.

9.49. Пусть в области целостности A $(a, b) = (d)$. Докажите, что:

1) $a \in (d)$ и $b \in (d)$;

2) d — общий делитель элементов a и b;

3) существуют такие u, $v \in A$, что $d = ua + vb$;

4) $a \vdots c \wedge b \vdots c \Rightarrow d \vdots c$; 5) d — НОД(a, b).

9.50. Докажите, что в кольце главных идеалов A каждые два элемента a, b $(b \neq 0)$ имеют НОД.

9.51. Пусть A — кольцо главных идеалов, p — неприводимый элемент в A. Докажите, что:

1) элемент a или делится на p, или взаимно-прост с ним.

2) если $a_1 a_2 \ldots a_n \vdots p$, то хотя бы один из элементов a_i делится на p.

9.52. Пусть A — область целостности, a — ее ненулевой и необратимый элемент, который не разлагается на неприводимые множители. Докажите, что:

1) a имеет собственный делитель, который не разлагается на неприводимые множители;

2) существует такая бесконечная последовательность элементов кольца A: $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, в которой каждый следующий элемент является собственным делителем предыдущего;

3) $(a) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \ldots \subset (a_n) \subset \ldots$, т. е. в A существует последовательность идеалов, в которой каждый следующий идеал строго включает предыдущий.

9.53. Пусть A — кольцо главных идеалов. Докажите, что:

1) если $(a) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \ldots \subset (a_n) \subset \ldots$, то при каком-то a_n $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i) = (a_n)$;

2) в A не существует последовательности идеалов, в которой каждый последующий строго включает предыдущий;

3) в A каждый ненулевой и необратимый элемент разлагается на неприводимые множители.

9.54. Докажите, что кольцо главных идеалов факториально.

9.55. Пусть A — евклидово кольцо. Докажите, что:

1) $b \neq 0 \Rightarrow \varphi(b) > \varphi(0)$, т. е. функция φ ограничена снизу;

2) если u — обратимый элемент, то $a = bu \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$;

3) $a \vdots b \wedge \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = bu$, где u — обратимый элемент;

4) $\varphi(a) = \varphi(e) \Leftrightarrow e \vdots a$;

5) $a \neq 0 \wedge e \vdots a \Rightarrow \varphi(a) > \varphi(e)$;

6) b — собственный делитель $a \Rightarrow \varphi(b) < \varphi(a)$.

9.56. Пусть A — евклидово кольцо, J — его ненулевой идеал. Докажите, что:

1) существует такой ненулевой элемент $m \in J$, что $\varphi(m) \leqslant \varphi(c)$ для любого ненулевого $c \in J$;

2) $J = mA$, т. е. A — кольцо главных идеалов.

9.57. Пусть $A = \{a+bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Докажите, что:

1) если $z = s+ti$, где $s, t \in \mathbf{Q}$, то существует такое $w \in A$, что $|z - w|^2 \leqslant \frac{1}{2}$;

2) если $u, v \in A$, то существует такое $w \in A$, что $|u - vw|^2 < |v|^2$;

3) кольцо A с функцией φ: $A \to \mathbf{Z}$: $\varphi(x) = |x|^2$ евклидово.

9.58. Пусть $A = \left\{\frac{a+bi\sqrt{3}}{2} \middle| a, b \in \mathbf{Z};\ a \text{ и } b \text{ одинаковой четности}\right\}$. Докажите, что:

1) если $z = s+ti$, где $s, t \in \mathbf{Q}$, то существует такое $w \in A$, что $|z - w|^2 \leqslant \frac{3}{4}$;

2) если $u, v \in A$, то существует такое $w \in A$, что $|u - vw|^2 < |v|^2$;

3) кольцо A с функцией φ: $A \to \mathbf{Z}$: $\varphi(x) = |x|^2$ евклидово.

9.59. Докажите, что следующие кольца евклидовы:

1) $A = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ с функцией φ: $A \to \mathbf{Z}$: $\varphi(a+b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$;

2) $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ с функцией φ: $A \to \mathbf{Z}$: $\varphi(a + b\sqrt{3}) = |a^2 - 3b^2|$.

9.4. ГОМОМОРФИЗМЫ КОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ

9.60. Пусть J — идеал кольца A. Докажите, что:

1) отношение сравнения по модулю J есть отношение эквивалентности на A;

2) $a+J$ — это класс вычетов, содержащий a.

9.61. Докажите, что в кольце $\mathbf{Z}$ при $m \geqslant 1$ $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a - b) \vdots m$. Что означает $a \equiv b \pmod{0}$?

9.62. Пусть J — идеал кольца A. Докажите, что:

1) $a \equiv b \pmod{J} \Leftrightarrow a+c \equiv b+c \pmod{J}$;

2) $a \equiv b \pmod{J} \wedge c \equiv d \pmod{J} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{J}$;

3) $a \equiv b \pmod{J} \Leftrightarrow -a \equiv -b \pmod{J}$;

4) при любом целом n $a \equiv b \pmod{J} \Rightarrow na \equiv nb \pmod{J}$;

5) $a \equiv b \pmod{J} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{J}$;

6) $a \equiv b \pmod{J} \wedge c \equiv d \pmod{J} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{J}$;

7) при любом натуральном n $a \equiv b \pmod{J} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{J}$.

9.63. Пусть J — идеал кольца A, $\bar{a}$ — класс вычетов, содержащий элемент a, $\bar{A}$ — множество всех классов вычетов. Пусть

$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}$. Докажите, что $\bar{A}$ с этими операциями является кольцом, т. е. что:

1) $\bar{a}=\bar{a}' \wedge \bar{b}=\bar{b}' \Rightarrow \bar{a}+\bar{b}=\bar{a}'+\bar{b}'$;

2) $\bar{a}=\bar{a}' \wedge \bar{b}=\bar{b}' \Rightarrow \bar{a}\bar{b}=\bar{a}'\cdot\bar{b}'$;

3) сложение коммутативно; 4) сложение ассоциативно;

5) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$; 6) $\bar{a}+-\bar{a}=\bar{0}$;

7) умножение ассоциативно; 8) умножение коммутативно;

9) сложение и умножение связаны законом дистрибутивности.

9.64. Составьте таблицы сложения и умножения в кольцах $\mathbf{Z}_5$, $\mathbf{Z}_6$. В каком из этих колец есть делители нуля, какое является полем?

9.65. Докажите, что:

1) если m — простое число, то $\mathbf{Z}_m$ — поле;

2) если m — составное число, то $\mathbf{Z}_m$ — кольцо с делителями нуля.

9.66. Докажите, что в кольце $\mathbf{Z}$ при $m \geqslant 1$:

1) любые m чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$, попарно несравнимых по модулю m, образуют полную систему вычетов по этому модулю;

2) если a и m взаимно-просты и $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — полная система вычетов по модулю m, то $ax_1+b, ax_2+b, \ldots, ax_m+b$ — тоже полная система вычетов по этому модулю;

3) если a и m взаимно-просты, то числа $0, a, 2a, \ldots, (m-1)a$ образуют полную систему вычетов по модулю m.

9.67. Пусть $A=\{a+b\sqrt{3}\,|\,a,\ b\in\mathbf{Z}\}$, $J=\{a+b\sqrt{3}\,|\,a,\ b\in 2\mathbf{Z}\}$. Опишите:

1) классы вычетов по модулю J;

2) кольцо A/J (составьте таблицы сложения и умножения).

9.68. Пусть $A=\{a+bi\,|\,a,\ b\in\mathbf{Z}\}$, $J=\{a+bi\,|\,a,\ b\in 3\mathbf{Z}\}$. Опишите:

1) классы вычетов по модулю J;

2) кольцо A/J (составьте таблицы сложения и умножения).

9.69. Пусть $\varphi\colon\ \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_2 : \varphi(x)=\begin{cases}\bar{0}, & \text{если } x \text{ четное;}\\ \bar{1}, & \text{если } x \text{ нечетное.}\end{cases}$ Докажите, что φ — гомоморфизм.

9.70. Пусть $A=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ b & a\end{bmatrix}\,\middle|\, a,\ b\in\mathbf{Z}\right\}$. Докажите, что отображение $\varphi\colon\ A\to\mathbf{Z}\colon\ \varphi\begin{bmatrix} a & b\\ b & a\end{bmatrix}=a-b$ — гомоморфизм. Укажите его ядро.

9.71. Пусть F — кольцо всех непрерывных функций на отрезке $[-1,\ 1]$. Докажите, что отображение $\varphi\colon\ F\to\mathbf{R}\colon\ \varphi(f)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ — гомоморфизм. Укажите его ядро.

9.72. Докажите изоморфизм колец из следующих задач:

1) 9.1.5, 9.2.5 и 9.4.3; 2) 9.1.6 и 9.2.6;

3) 9.1.7 и 9.2.7; 4) 9.1.8 и 9.2.8;
5) 9.1.9 и 9.2.9; 6) 9.1.10 и 9.2.10;
7) 9.1.11, 9.2.11 и 9.4.4; 8) 9.1.12 и 9.2.12;
9) 9.1.13 и 9.2.13; 10) 9.2.14 и 9.4.2;
11) 9.2.15 и 9.4.1.

9.73. Покажите, что следующие отображения удовлетворяют первому условию ($\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$) из определения гомоморфизма, но не удовлетворяют второму его условию ($\varphi(ab)=\varphi(a)+\varphi(b)$):

1) φ: $\mathbf{Z}\rightarrow 2\mathbf{Z}$: $\varphi(a)=2a$;

2) φ: $\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{R}$: $\varphi(a+bi)=a$.

9.74. Покажите, что следующие отображения удовлетворяют второму условию ($\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$) из определения гомоморфизма, но не удовлетворяют его первому условию ($\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$):

1) φ: $\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{C}$: $\varphi(z)=z^2$;

2) φ: $M_2(\mathbf{C})\rightarrow\mathbf{C}$: $\varphi(A)=\det A$.

9.75. Пусть φ — гомоморфизм кольца A на кольцо A'. Докажите, что:

1) $\varphi(a-b)=\varphi(a)-\varphi(b)$; 2) $\varphi(0)=0'$;
3) $\varphi(-a)=-\varphi(a)$; 4) $\varphi(e)=e'$.

9.76. Покажите, что гомоморфный образ области целостности может и не быть областью целостности.

9.77. Пусть J — идеал кольца A и φ: $A\rightarrow\bar{A}=A/J$: $\varphi(a)=\bar{a}$. Докажите, что:

1) φ — гомоморфизм A на $\bar{A}$;

2) J — ядро гомоморфизма φ.

9.78. Пусть φ — гомоморфизм кольца A на A', J — ядро этого гомоморфизма. Докажите, что:

1) J — идеал кольца A;

2) $a\equiv x(\operatorname{mod} J)\Leftrightarrow\varphi(a)=\varphi(x)$;

3) если φ^*: $\bar{A}=A/J\rightarrow A'$: $\varphi^*(\bar{a})=\varphi(a)$, то φ^* — отображение $\bar{A}$ на A';

4) $\varphi^*(\bar{a}+\bar{b})=\varphi^*(a)+\varphi^*(b)$, $\varphi^*(\bar{a}\bar{b})=\varphi^*(\bar{a})\varphi^*(\bar{b})$;

5) $\varphi^*(\bar{a})=\varphi^*(\bar{b})\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{b}$;

6) φ^* — изоморфизм $\bar{A}$ на A'.

9.79. Пусть φ: $A\rightarrow A'$ — гомоморфизм колец. Докажите, что φ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его ядро равно $\{0\}$.

9.80. Пусть A — ненулевое коммутативное кольцо с единицей. Докажите, что A — поле тогда и только тогда, когда любой гомоморфизм A на ненулевое кольцо является изоморфизмом.

9.81. Пусть A — ненулевое коммутативное кольцо с единицей e, $B=\{ne\mid n\in\mathbf{Z}\}$ — его подкольцо. Докажите, что:

1) отображение φ: $\mathbf{Z}\rightarrow B$: $\varphi(n)=ne$ — гомоморфизм;

2) B изоморфно $\mathbf{Z}$ или B изоморфно $\mathbf{Z}_m$ при некотором m;

3) если A — область целостности, то B изоморфно $\mathbf{Z}_p$ при некотором простом p.

9.5. УПОРЯДОЧЕННОЕ ПОЛЕ

9.82. Докажите, что в упорядоченном поле:

1) $x \leqslant y \Leftrightarrow x+z \leqslant y+z$;
2) $x < y \Leftrightarrow x+z < y+z$;
3) $x \leqslant y \Leftrightarrow 0 \leqslant y-x \Leftrightarrow x-y \leqslant 0 \Leftrightarrow -y \leqslant -x$;
4) $x < y \Leftrightarrow 0 < y-x \Leftrightarrow x-y < 0 \Leftrightarrow -y < -x$;
5) если $x_1 \leqslant y_1$, $x_2 \leqslant y_2$, ..., $x_n \leqslant y_n$, то $x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant \leqslant y_1+y_2+\ldots+y_n$; если, кроме того, хотя бы для одного индекса i $x_i < y_i$, то $x_1+x_2+\ldots+x_n < y_1+y_2+\ldots+y_n$;
6) если $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$, то $x_1+x_2+\ldots+x_n \geqslant 0$; если, кроме того, не имеют места равенства $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то $x_1+x_2+\ldots+x_n > 0$;
7) $x \geqslant 0 \Leftrightarrow nx \geqslant 0$ (n — натуральное число);
8) $x > 0 \Leftrightarrow nx > 0$ (n — натуральное число);
9) упорядоченное поле — это поле нулевой характеристики.

9.83. Докажите, что в упорядоченном поле:

1) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy > 0$;
2) $x \leqslant 0 \wedge y \geqslant 0 \Rightarrow xy \leqslant 0$;
3) $x < 0 \wedge y > 0 \Rightarrow xy < 0$;
4) $x \leqslant 0 \wedge y \leqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$;
5) $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0$;
6) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$; 7) $1 > 0$;
8) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$; 9) $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$;
10) если $z > 0$, то $x \leqslant y \Leftrightarrow xz \leqslant yz$;
11) если $z < 0$, то $x \leqslant y \Leftrightarrow xz \geqslant yz$.

9.84. Докажите, что в упорядоченном поле:

1) если $a > 0$, то $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$;
2) если $a > 0$; то $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
3) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$;
4) $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$;
5) $|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.

9.85. Докажите, что каждое упорядоченное поле включает поле **Q**.

9.86. Докажите, что поле **C** нельзя упорядочить.

10. СРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕ Z

Кольцо $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ обозначается $\mathbf{Z}_m$, его элементы — $\overline{a}$, $\overline{b}$ и т. п. Алгебраическое уравнение в кольце $\mathbf{Z}_m$ записывается так: $\overline{a_n}x^n + \ldots + \overline{a_1}x + \overline{a_0} = \overline{0}$.

10.1. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА СРАВНЕНИЙ

10.1. Приняв в качестве определения отношения сравнения по модулю m в кольце $\mathbf{Z}$ $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a-b) \vdots m$, докажите, что:

1) отношение сравнения является отношением эквивалентности;

2) сравнения можно почленно складывать;

3) сравнения можно почленно перемножать;

4) $a+b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c-b \pmod{m}$;

5) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b+ms \pmod{m}$;

6) при любом натуральном n $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$;

7) если при $i=1, 2, \ldots, n$ $a_i \equiv c_i \pmod{m}$ и $b_i \equiv d_i \pmod{m}$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} c_i d_i \pmod{m}$;

8) если c и m взаимно-просты, то $ac \equiv bc \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b$;

9) при любом натуральном c $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$;

10) если c — натуральный делитель числа m, то $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{c}$;

11) если m — НОК (m_1, m_2), то $a \equiv b \pmod{m_1} \wedge a \equiv b \pmod{m_2} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$;

12) если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a \vdots x \wedge m \vdots x \Leftrightarrow b \vdots x \wedge m \vdots x$. В частности, НОД $(a, m) =$ НОД (b, m).

10.2. Найдите остаток при делении:

1) 15^{231} на 14; 2) 15^{231} на 16;

3) $12^{1231}+14^{4324}$ на 13; 4) 208^{208} на 23;

5) 2^{15783} на 25; 6) 3^{79821} на 17;

7) 10^{2732} на 22; 8) 18^{2815} на 14;

9) $13^{1054}-23\cdot 16^{285}+22^{17}$ на 15;

10) $29^{2929}-34^{3434}+29\cdot 41\cdot 6^{231}$ на 31.

10.3. Найдите две последние цифры числа:

1) 2^{341}; 2) 289^{289}; 3) 203^{203203}.

10.4. Докажите, что:

1) $(26^{30}-1) \vdots (5\cdot 7\cdot 11\cdot 31)$;

2) $(26^{15}-1) \vdots (5\cdot 7)$;

3) $(26^{15}+1) \vdots (3\cdot 7\cdot 31)$.

10.5. Докажите, что при любых целых a, b и неотрицательном n:

1) $[(11a+5)^{2n+1}+(11b+6)^{2n+1}] \vdots 11$;

2) $(13a+3)^{3n+2}+(13b-4)^{3n+2}+1] \vdots 13$.

10.6. Докажите, что при любом натуральном n:

1) $(10^n+17) \vdots 3$; 2) $(3^{4n+3}-17) \vdots 10$;

3) $(24^{2n+1}\cdot 21^{n+2}-3^{n+2}\cdot 17^{2n+1}) \vdots 19$;

4) $(1+16^{3n+1}+48^{3n+1}) \vdots 13$.

10.7. Найдите такие натуральные k, l, m, чтобы при любом целом a:

1) $(a^{3k}+a^{3l+1}+a^{3m+2}) \vdots (a^2+a+1)$;

2) $(a^{3k}-a^{3l+1}+a^{3m+2}) \vdots (a^2-a+1)$;

3) $(a^{3k}+a^{3l+1}+a^{3m+2}) \vdots (a^4+a^2+1)$.

10.8. Пусть p — простое число. Докажите, что:

1) $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod p$;

2) $C_{p-2}^k \equiv (-1)^k (k+1) \pmod p$.

10.9. Докажите, что при любых натуральных k и l

$$\left(\sum_{t=1}^{2k-1} t^{2l-1}\right) \vdots (2k-1).$$

10.10. Докажите, что:

1) $a-5b\equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 10a+7b\equiv 0 \pmod{19}$;

2) $16a-11b+c\equiv 0 \pmod{21} \Rightarrow 11a-b+2c\equiv 0 \pmod{21}$.

10.11. Докажите, что:

1) $\dfrac{a-5b}{17} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \dfrac{2a+7b}{17} \in \mathbf{Z}$;

2) $\dfrac{12a-7b}{16} \in \mathbf{Z} \Rightarrow \dfrac{4a+23b}{16} \in \mathbf{Z}$.

10.12. Докажите, что следующие уравнения неразрешимы в натуральных числах:

1) $24^x+36^y=61^z$; 2) $20^x+50^y=71^z$.

1013. Пусть g — основание системы счисления, m — натуральное число и $s_1, s_2, \ldots$ — такие числа, что $g^k\equiv s_k \pmod m$ при любом $k=1, 2, \ldots$ Докажите, что •

$$(a_n \ldots a_1 a_0)_g \equiv a_n s_n + \ldots + a_1 s_1 + a_0 s_0 \pmod m.$$

10.14. Выведите признак делимости на m в системе счисления с основанием g при:

1) $m=3$, $g=10$; 2) $m=9$, $g=10$;

3) $m=4$, $g=10$; 4) $m=8$, $g=10$;

5) $m=11$, $g=10$; 6) $m=5$, $g=7$;
7) $m=4$, $g=7$; 8) $m=12$, $g=7$;
9) $m=6$, $g=8$; 10) $m=3$, $g=8$;
11) $m=5$, $g=11$; 12) $m=101$, $g=10$.

10.15. Замените x и y такими цифрами, чтобы:

1) $\overline{88x5y} \vdots 36$; 2) $\overline{2x35y6} \vdots 72$;
3) $\overline{1xy44} \vdots 33$; 4) $\overline{364xy2} \vdots 88$;
5) $\overline{665xy} \vdots 504$.

10.16. Найдите признак делимости на m в системе счисления с основанием g, если:

1) $(g-1) \vdots m$; 2) $(g+1) \vdots m$.

10.17. Докажите, что сумма данного числа и числа, написанного теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке, делится на 11, если число цифр в данном числе четное.

10.2. ГРУППА КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ, ВЗАИМНО-ПРОСТЫХ С МОДУЛЕМ

10.18. Замените наименьшим по абсолютной величине, а также наименьшим положительным вычетом:

1) 103 по модулю 87; 2) 484 по модулю 15;
3) 185 по модулю 16; 4) 217 по модулю 19;
5) 153 по модулю 61; 6) 76 499 по модулю 37;
7) 625 по модулю 25; 8) 624 по модулю 25.

10.19. Замените число k наименьшим по абсолютной величине, а также наименьшим неотрицательным вычетом по данному модулю:

1) $k=128(-25)41\cdot 83$, модуль 10;
2) $k=11\cdot 18\cdot 23\cdot 22\cdot 13\cdot 5$, модуль 17;
3) $k=27\cdot 18(-34)(-22)$, модуль 13.

10.20. Образуют ли полную систему вычетов по указанному модулю следующие числа:

1) -253, -138, 170, 393, 965, 2000, 47, 1660, модуль 8;
2) 597, -181, 242, -303, 135, 32, -43, 186, модуль 8;
3) -40, -45, 31, 26, -48, -34, модуль 6;
4) 36, 25, -23, 21, -43, -33, 31, модуль 7?

10.21. Образуют ли приведенную систему вычетов по модулю 12 числа:

1) -349, -193, 231, 401;
2) 385, -247, -133, -197?

10.22. Запишите полную и приведенную системы наименьших неотрицательных и наименьших по абсолютной величине вычетов по модулю:

1) 9; 2) 15; 3) 12.

10.23. Пусть $p>2$ — простое число. Докажите, что:

1) приведенная система вычетов по модулю p состоит из $p-1$ вычетов;

2) система чисел $-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \ldots, -1, 1, \ldots, \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}$ является приведенной системой вычетов по модулю p.

10.24. Докажите, что если a и m взаимно-просты и $x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(m)}$ — приведенная система вычетов по модулю m, то $ax_1, ax_2, \ldots, ax_{\varphi(m)}$ — тоже приведенная система вычетов по этому модулю.

10.25. Пусть $\mathbf{Z}_m^*$ — подмножество кольца $\mathbf{Z}_m$, состоящее из классов вычетов, взаимно-простых с модулем. Докажите, что;

1) $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{Z}_m^* \Rightarrow \bar{a}\bar{b} \in \mathbf{Z}_m^*$;

2) для любого $\bar{a} \in \mathbf{Z}_m^*$ существует такой элемент $\bar{u} \in \mathbf{Z}_m^*$, что $\bar{u}\bar{a} = \bar{1}$;

3) множество $\mathbf{Z}_m^*$ с операцией—умножением классов—является коммутативной группой;

4) порядок группы $\mathbf{Z}_m^*$ равен $\varphi(m)$;

5) для любого $\bar{a} \in \mathbf{Z}_m^*$ справедливо равенство $\bar{a}^{\varphi(m)} = \bar{1}$;

6) $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m \Leftrightarrow$ НОД$(a, m) = 1$;

7) $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{Z}_m \wedge \bar{a}\bar{b} = \bar{1} \Rightarrow \bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{Z}_m^*$.

10.26. Пусть p — простое число. Докажите, что:

1) если $\bar{a}$ — ненулевой элемент поля $\mathbf{Z}_p$, то $\bar{a}^{p-1} = \bar{1}$;

2) $a^p \equiv a \pmod p$ при любом целом a;

3) $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$;

4) в поле $\mathbf{Z}_p$ обратны себе лишь $\bar{1}$ и $-\bar{1}$;

5) произведение всех ненулевых элементов поля $\mathbf{Z}_p$ равно $-\bar{1}$;

6) $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$;

7) если p — число вида $4n+1$, то $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv -1 \pmod p$;

8) если p — число вида $4n+3$, то $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv 1 \pmod p$;

9) $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$;

10) $a^p + a(p-1)! \equiv 0 \pmod p$;

11) $a^p(p-1)! + a \equiv 0 \pmod p$.

10.27. Пусть n — составное число. Докажите, что:

1) $(n-1)! \not\equiv -1 \pmod p$;

2) $(n-2)! \not\equiv 1 \pmod p$.

10.28. Докажите, что:

1) $(22^{144} - 1) \vdots 73$; 2) $(34^{19} - 34) \vdots 646$;

3) $5^{17 \cdot 19} \equiv 23 \pmod{17 \cdot 19}$.

10.29. Исходя из таблицы умножения, покажите, что группы $\mathbf{Z}_2^*, \mathbf{Z}_3^*, \mathbf{Z}_5^*, \mathbf{Z}_6^*$ циклические.

10.30. Найдите остаток при делении:

1) 23^{247} на 7; 2) 4298^{33} на 17;

3) $3^{200} + 7^{200}$ на 101; 4) $2^{60} + 7^{30}$ на 13;

5) 3^{10000} на 5, 7, 11, 13.

10.31. Докажите, что:

1) НОД$(a, 30) = 1 \Rightarrow a^8 \equiv 1 \pmod{30}$;

2) НОД$(a, 1155) = 1 \Rightarrow a^{60} \equiv 1 \pmod{1155}$.

10.32. Докажите, что при любом простом p число

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123\ldots9$$

делится на p.

10.33. Пусть a и b взаимно-просты, $u_1, \ldots, u_{\varphi(a)}$ и $v_1, \ldots, v_{\varphi(b)}$ — приведенная система вычетов по модулям a и b соответственно. Докажите, что:

1) при любых i и k числа $av_i + bu_k$ и ab взаимно-просты;

2) если x и ab взаимно-просты, то x сравнимо с каким-то $av_i + bu_k$ по модулю ab;

3) $av_i + bu_k \equiv av_s + bu_t \pmod{ab} \Rightarrow i = s \wedge k = t$;

4) множество $\{av_i + bu_k \mid 1 \leqslant i \leqslant \varphi(b);\ 1 \leqslant k \leqslant \varphi(a)\}$ является приведенной системой вычетов по модулю ab;

5) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

10.34. Сколько элементов входит в приведенную систему вычетов по модулю:

1) 95; 2) 70?

10.35. Сколько существует натуральных чисел, взаимно-простых с числом n и не превосходящих его при:

1) $n = 2478$; 2) $n = 9944$?

10.36. Найдите число натуральных чисел, меньших n и имеющих с ним наибольший общий делитель d, при:

1) $n = 975$, $d = 13$; 2) $n = 1072$, $d = 8$;

3) $n = 2500$, $d = 50$; 4) $n = 2476$, $d = 619$.

10.37. Решите уравнения:

1) $\varphi(7^\alpha) = 294$; 2) $\varphi(5^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 11) = 42000$;

3) $\varphi(x) = \frac{4x}{5}$; 4) $\varphi(p^\alpha q^\beta) = 120$, где p, q — различные простые.

10.38. Решите те из задач 10.2 и 10.3, в которых можно воспользоваться теоремой Эйлера.

10.39. Найдите две последние цифры каждого из следующих чисел:

1) 11^{203}; 2) 803^{1254}; 3) 19^{82}; 4) 2^{54}.

10.40. Пусть $d = $ НОД$(a, b) > 0$, $m = $ НОК$(a, b) > 0$. Докажите, что:

1) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)\dfrac{d}{\varphi(d)}$;

2) $\varphi(ab) = \varphi(d)\varphi(m)$.

10.41. Пусть p — простое число. Докажите, что $1 + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \ldots + \varphi(p^\alpha) = p^\alpha$.

10.42. Пусть $m>1$. Докажите, что сумма натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно-простых с m, равна $\frac{1}{2}m\varphi(m)$.

10.3. СРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

10.43. Пусть $\bar{a}_n\bar{x}^n+\bar{a}_{n-1}\bar{x}^{n-1}+\ldots+\bar{a}_0=0$ — уравнение в кольце $\mathbf{Z}_m$. Докажите, что $\bar{c}$ является решением этого уравнения тогда и только тогда, когда $a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\ldots+a_0\equiv 0 \pmod m$.

10.44. Решите следующие сравнения:

1) $x^4-3x^3+x^2-2\equiv 0 \pmod 7$;
2) $x^4-x^2+3x-1\equiv 0 \pmod 4$;
3) $x^3-7x+3\equiv 0 \pmod 5$;
4) $x^3+x^2-4x-4\equiv 0 \pmod{14}$;
5) $7x^5-2x^4+5x^3-x^2+3x-2\equiv 0 \pmod{11}$.

10.45. Докажите, что:

1) если c и m взаимно-просты, то сравнения $f(x)\equiv 0 \pmod m$ и $cf(x)\equiv 0 \pmod m$ эквивалентны;

2) если при любом $i=0, 1, \ldots, n$ $a_i\equiv b_i \pmod m$, то сравнения

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\equiv 0 \pmod m$$

и

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0\equiv 0 \pmod m$$

эквивалентны;

3) если p — простое число и $f(x)=(x^p-x)g(x)+r(x)$, то сравнения $f(x)\equiv 0 \pmod p$ и $g(x)\equiv 0 \pmod p$ эквивалентны.

10.46. Решите сравнения:

1) $323x^{90}+259x^{67}-95x^{23}-1\equiv 0 \pmod{23}$;
2) $13x^{23}-8x^{22}-2x^{13}+1\equiv 0 \pmod{11}$;
3) $10x^{91}+14x^{15}+x^{11}-3x^5+9x^2-x+6\equiv 0 \pmod{11}$;
4) $10x^{42}-5x^{30}+10x^{18}+9x^{12}+4\equiv 0 \pmod 7$.

10.47. При каких целых a:

1) $(3a^3-a^2+4a+2)\,\vdots\,10$;
2) $2a^5+a^3+2a)\,\vdots\,10$?

10.48. Сколько решений имеют сравнения:

1) $x^6\equiv 1 \pmod 7$;
2) $x^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ (p — простое число);
3) $x^{\varphi(20)}\equiv 1 \pmod{20}$?

10.49. Сколько решений имеют сравнения:

1) $x^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$; 2) $x^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \pmod p$;

3) $x^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod p$?

(В последних двух примерах p — нечетное простое число.)

10.50. Докажите, что если $\bar{a}\in \mathbf{Z}_p^*$ — элемент k-го порядка, то решением уравнения $\bar{x}^k=\bar{1}$ являются степени элемента $\bar{a}$ и только они.

10.51. Решите сравнения:

1) $x^2\equiv 0 \pmod{1152}$;
2) $x^3\equiv 0 \pmod{16000}$.

10.52. Пусть p — простое число. Докажите, что сравнение $x^2+p\equiv 0 \pmod{p^2}$ не имеет решений.

10.53. Решите сравнения:

1) $4x\equiv 3 \pmod 7$;
2) $7x\equiv 6 \pmod 9$;
3) $3x\equiv 1 \pmod{11}$;
4) $16x\equiv 9 \pmod{23}$;
5) $32x\equiv 63 \pmod{119}$;
6) $69x\equiv 192 \pmod{201}$;
7) $88x\equiv 324 \pmod{404}$;
8) $365x\equiv 50 \pmod{395}$;
9) $342x\equiv 222 \pmod{534}$;
10) $369x\equiv 549 \pmod{846}$;
11) $637x\equiv 234 \pmod{906}$;
12) $354x\equiv 567 \pmod{639}$.

10.54. Докажите, что если a и m взаимно-просты, то класс $x\equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod m$ является решением сравнения $ax\equiv b \pmod m$.

10.55. Пусть a и b взаимно-просты. Решите сравнения:

1) $(a-b)x\equiv a^2+b^2 \pmod{ab}$;
2) $(a+b)x\equiv a^2+b^2 \pmod{ab}$;
3) $(a^2+b^2)x\equiv a-b \pmod{ab}$;
4) $(a+b)^2x\equiv a^2-b^2 \pmod{ab}$.

10.56. Для каждого элемента из группы $\mathbf{Z}_{30}^*$ найдите обратный.

10.57. В группе $\mathbf{Z}_{24}^*$ решите уравнения:

1) $\bar{5}\bar{x}=\bar{7}$; 2) $\bar{7}\bar{x}=\overline{11}$;
3) $\overline{11}\bar{x}=\overline{13}$; 4) $\overline{13}\bar{x}=\overline{17}$;
5) $\overline{17}\bar{x}=\overline{19}$; 6) $\overline{19}\bar{x}=\overline{23}$;
7) $\overline{23}\bar{x}=\bar{5}$.

10.58. В кольце $\mathbf{Z}_{30}$ решите уравнения:

1) $\bar{5}\bar{x}=\overline{12}$; 2) $\overline{13}\bar{x}=\overline{29}$;
3) $\overline{12}\bar{x}=\overline{24}$; 4) $\overline{25}\bar{x}=\overline{15}$.

10.4. ПОРЯДОК ЧИСЛА ПО ДАННОМУ МОДУЛЮ. ПЕРВООБРАЗНЫЕ КОРНИ. ИНДЕКСЫ

10.59. Пусть k — порядок a по модулю m. Докажите, что:

1) порядок элемента $\bar{a}\in \mathbf{Z}_m^*$ равен k;

2) числа $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{k-1}$ попарно несравнимы по модулю m;

3) $a^s\equiv 1 \pmod m \Leftrightarrow s \,\vdots\, k$;
4) $a^s\equiv a^t \pmod m \Leftrightarrow s\equiv t \pmod k$;
5) $\varphi(m) \,\vdots\, k$;
6) порядок a^s по модулю m равен k/d, где $d=\text{НОД}(s, k)>0$.

10.60. Найдите порядок a по модулю m при:

1) $a=9$, $m=10$; 2) $a=3$, $m=25$;
3) $a=4$, $m=15$; 4) $a=7$, $m=20$;
5) $a=2$, $m=17$; 6) $a=5$, $m=17$;
7) $a=10$, $m=13$; 8) $a=10$, $m=31$.

10.61. Найдите порядок 10 по модулю $31\cdot 13$.

10.62. Найдите все возможные порядки элементов по модулю:

1) 8; 2) 9.

10.63. Найдите порядок числа $m-1$ по модулю m.

10.64. Найдите все натуральные x, удовлетворяющие сравнениям:

1) $3^x \equiv 1 \pmod{10}$; 2) $4^x \equiv 1 \pmod 7$.

10.65. Пусть $a>1$. Докажите, что:

1) порядок a по модулю a^m-1 равен m;
2) $\varphi(a^m-1) \equiv 0 \pmod m$.

10.66. Пусть p — простой делитель числа $2^{2^n}+1$. Докажите, что:

1) порядок числа 2 по модулю p равен 2^{n+1};
2) $(p-1) \vdots 2^{n+1}$;
3) простые делители числа $2^{2^n}+1$ имеют вид $k\cdot 2^{n+1}+1$.

10.67. Воспользовавшись решением задачи 10.62, покажите, что по модулю 8 нет первообразных корней, а по модулю 9 есть.

10.68. Докажите, что число a является первообразным корнем по модулю m тогда и только тогда, когда $\mathbf{Z}_m^*$ — циклическая группа с образующей $\bar{a}$.

10.69. Найдите классы первообразных корней по модулю:
1) 7; 2) 9; 3) 11.

10.70. Докажите, что если g — первообразный корень по модулю p, то g^s — первообразный корень по этому модулю тогда и только тогда, когда НОД$(s, p-1)=1$.

10.71. Докажите, что произведение двух первообразных корней по простому модулю $p\neq 2$ не может быть первообразным корнем.

10.72. Найдите все первообразные корни:

1) по модулю 17, зная, что 3 — первообразный корень по этому модулю;
2) по модулю 19, зная, что 2 — первообразный корень по этому модулю.

10.73. Найдите все возможные основания индексов по модулю 13 и составьте таблицу индексов при наименьшем из найденных оснований.

10.74. Пусть g — первообразный корень по простому модулю p. Докажите, что a — первообразный корень по модулю p тогда и только тогда, когда НОД$(\operatorname{ind}_g a, p-1)=1$.

10.75. Пусть g — первообразный корень по простому модулю $p>2$. Докажите, что $\operatorname{ind}_g(-1)=\frac{p-1}{2}$.

10.76. Пусть g — первообразный корень по простому модулю p. Докажите, что:

1) $a \equiv b \pmod p \leftrightarrow \operatorname{ind}_g a \equiv \operatorname{ind}_g b \pmod{p-1}$;

2) $\operatorname{ind}_g ab \equiv \operatorname{ind}_g a + \operatorname{ind}_g b \pmod{p-1}$;

3) $\operatorname{ind}_g (a_1 a_2 \dots a_n) \equiv \operatorname{ind}_g a_1 + \operatorname{ind}_g a_2 + \dots + \operatorname{ind}_g a_n \pmod{p-1}$;

4) $\operatorname{ind}_g a^n \equiv n \operatorname{ind}_g a \pmod{p-1}$.

10.77. Пусть g и h — первообразные корни по простому модулю p. Докажите, что:

1) $\operatorname{ind}_g a \equiv \operatorname{ind}_g h \cdot \operatorname{ind}_h a \pmod{p-1}$;

2) $\operatorname{ind}_h a \equiv \operatorname{ind}_g a \cdot (\operatorname{ind}_g h)^{\varphi(p-1)-1} \pmod{p-1}$.

10.78. Определите число цифр (t) от запятой до первого периода и число цифр в периоде (s) при обращении в десятичную следующей обыкновенной дроби:

1) $\frac{1}{29}$; 2) $\frac{1}{93}$; 3) $\frac{1}{11 \cdot 17}$;

4) $\frac{1}{13 \cdot 17}$; 5) $\frac{1}{53 \cdot 73}$; 6) $\frac{1}{540}$;

7) $\frac{1}{950}$; 8) $\frac{1}{816}$; 9) $\frac{1}{528}$.

10.79. Найдите знаменатель дроби $1/b$, которая представляется чистой периодической дробью:

1) с двумя цифрами в периоде;

2) с тремя цифрами в периоде.

10.80. Докажите, что если сумму дробей $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) обратить в десятичную, то полученная дробь будет смешанной периодической.

10.5. СТЕПЕННЫЕ ВЫЧЕТЫ

10.81. Пусть

$$ax^n \equiv b \pmod p \qquad (10.1)$$

есть двучленное сравнение, $d = \text{НОД}(n, p-1) > 0$, g — первообразный корень по модулю p. Докажите, что:

1) сравнение (10.1) эквивалентно сравнению $n \operatorname{ind}_g x \equiv \operatorname{ind}_g b - \operatorname{ind}_g a \pmod{p-1}$;

2) если $\overline{(\operatorname{ind}_g b - \operatorname{ind}_g a) \vdots d}$, то сравнение (10.1) не имеет решений;

3) если $(\operatorname{ind}_g b - \operatorname{ind}_g a) \vdots d$, то сравнение (10.1) имеет d решений.

10.82. Решите сравнения:

1) $47x \equiv 26 \pmod{83}$; 2) $17x \equiv 8 \pmod{73}$;

3) $5x^2 \equiv 3 \pmod{11}$; 4) $x^3 \equiv 34 \pmod{41}$;

5) $9x^5 \equiv 14 \pmod{41}$; 6) $x^6 \equiv 51 \pmod{59}$;

7) $x^{21} \equiv 2 \pmod{31}$; 8) $39x^2 \equiv 53 \pmod{73}$.

10.83. Пусть p — простое число, g — первообразный корень по модулю p, $\overline{a \vdots p}$, $d = \text{НОД}(n, \; p-1) > 0$. Докажите, что следующие высказывания эквивалентны;

а) сравнение $x^n \equiv a \pmod p$ имеет решение;

б) $\text{ind}_g a \vdots d$;

в) $a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod p$.

10.84. Пусть $p > 2$ — простое число, $\overline{a \vdots p}$. Докажите, что:

1) число a является квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$;

2) число a является квадратичным невычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$;

3) если a — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ имеет два решения.

10.85. Докажите, что числа $1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ образуют систему представителей всех классов квадратичных вычетов по простому модулю $p > 2$.

10.86. Найдите наименьшие положительные квадратичные вычеты по модулю:

1) 13; 2) 17.

10.87. Решите квадратные сравнения:

1) $x^2 \equiv 8 \pmod{17}$; 2) $x^2 \equiv 18 \pmod{23}$;

3) $x^2 \equiv 20 \pmod{23}$; 4) $12x^2 \equiv 9 \pmod{37}$;

5) $11x^2 \equiv 6 \pmod{79}$.

10.88. Исследуйте сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$, где p — простое число, когда:

1) $a \equiv 0 \pmod p$; 2) $p=2$.

10.89. Пусть $p > 2$ — простое число, $\overline{a \vdots p}$. Докажите, что:

1) эквивалентны сравнения $ax^2+bx+c \equiv 0 \pmod p$ и $(2ax+b)^2 \equiv b^2-4ac \pmod p$;

2) сравнение $ax^2+bx+c \equiv 0 \pmod p$ имеет два решения, когда b^2-4ac — квадратичный вычет, одно решение, когда $b^2-4ac \equiv 0 \pmod p$, и не имеет решений, когда b^2-4ac — квадратичный невычет.

10.90. Решить квадратные сравнения:

1) $3x^2+x-2 \equiv 0 \pmod{17}$;

2) $4x^2+3x+4 \equiv 0 \pmod{17}$;

3) $13x^2-9x+5 \equiv 0 \pmod{23}$;

4) $26x^2+3x+1 \equiv 0 \pmod{37}$;

5) $20x^2-13x+5 \equiv 0 \pmod{79}$;

6) $3x^2+10x+10 \equiv 0 \pmod{23}$.

10.91. Докажите, что если $p > 2$ — простое число и $\overline{a \vdots p}$, то:

1) по модулю $p=4n+1$ числа a и $-a$ — либо оба квадратичные вычеты, либо оба квадратичные невычеты;

2) по модулю $p=4n+3$ одно из чисел a и $-a$ — квадратичный вычет, другое — квадратичный невычет.

10.92. Докажите, что по простому модулю:

1) произведение двух квадратичных вычетов есть квадратичный вычет;

2) произведение двух квадратичных невычетов есть квадратичный вычет;

3) произведение квадратичного вычета на квадратичный невычет есть квадратичный невычет.

10.93. Пусть $p>2$ — простое число. Докажите, что:

1) сравнение $x^2+1\equiv 0 \pmod p$ имеет решение тогда и только тогда, когда $p=4n+1$ $(n\in\mathbf{N})$;

2) если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа вида $4n+1$, то все простые делители числа $(2p_1p_2\ldots p_k)^2+1$ имеют вид $4n+1$;

3) простых чисел вида $4n+1$ бесконечно много.

10.94. Пусть p — простое число вида $3k+2$. Докажите, что в поле $\mathbf{Z}_p$ при любом $\bar{a}$ существует ровно одно значение $\sqrt[3]{\bar{a}}$.

10.95. Пусть $p>3$ — простое число. Докажите, что в поле $\mathbf{Z}_p$:

1) если $\sqrt{-\bar{3}}$ извлекается, то $\sqrt[3]{\bar{1}}$ имеет три значения;

2) если $\sqrt{-\bar{3}}$ не извлекается, то $\sqrt[3]{\bar{1}}$ имеет одно значение.

10.96. Решите уравнение $\bar{x}^3-\bar{1}=\bar{0}$ в поле;

1) $\mathbf{Z}_{103}$; 2) $\mathbf{Z}_{107}$.

11. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В этой главе рассматриваются многочлены над областью целостности, в § 11.3—11.5 — над полями, в § 11.4, 11.5 — над полями нулевой характеристики.

11.1. ОТНОШЕНИЕ ДЕЛИМОСТИ В КОЛЬЦЕ МНОГОЧЛЕНОВ

11.1. Найдите многочлен $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, если:

1) $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$;

2) $f(2)=1$, $f(3)=0$, $f(4)=2$;

3) $f(1)=f(2)=2$, $f(3)=-2$.

11.2. Докажите, что если значения многочлена $f(x)\in\mathbf{C}[x]$ при любом рациональном c являются рациональными числами, то все коэффициенты многочлена $f(x)$ — рациональные числа.

11.3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ — различные комплексные числа, $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ — произвольные комплексные числа. Докажите, что существует и притом единственный многочлен $f(x)\ni\mathbf{C}[x]$ такой, что $f(x_i)=c_i$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$.

11.4. Докажите, что не существует квадратного трехчлена, который при любом иррациональном значении аргумента принимает рациональные значения.

11.5. Пусть $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$. При каких p и q многочлен $f(x)$ делится на x^2+x+1, если:

1) $f(x)=x^4+px^2+q$; 2) $f(x)=x^4+px+q$;

3) $f(x)=x^5+px^2+q$; 4) $f(x)=x^5+px+q$?

11.6. Пусть $f(x)=x^4+a$ и $g(x)=x^2+bx+1$ — многочлены над $\mathbf{Z}$. При каких a и b $f(x)\,\vdots\,g(x)$?

11.7. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены над областью целостности A. Докажите, что:

1) если $f(x)\,\vdots\,g(x)$ и $f(x)\neq 0$, то степень $f(x)$ не меньше степени $g(x)$;

2) если $u\in A$—обратимый элемент и $f(x)\,\vdots\,g(x)$, то $f(x)\,\vdots\,ug(x)$;

3) если $f(x)\,\vdots\,g(x)$ и $g(x)\,\vdots\,f(x)$, то $f(x)=ug(x)$, где $u\in A$— обратимый элемент.

11.8. Докажите, что при любом натуральном n и $a\in A$:

1) $(x^n-a^n)\,\vdots\,(x-a)$; 2) $(x^{2n}-a^{2n})\,\vdots\,(x+a)$;

3) $(x^{2n-1}+a^{2n-1})\,\vdots\,(x+a)$;

4) $(x^{4n}+a^2x^{4n-2}+\ldots+a^{4n}) \vdots (x^{2n}+ax^{2n-1}+\ldots+a^{2n})$.

11.9. Докажите, что для многочлена $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ не могут одновременно выполняться равенства $f(7)=5$ и $f(15)=9$.

11.10. Пусть φ — гомоморфное отображение области целостности A на область целостности A'. Положим φ^*: $A[x]\to A'[y]$: $\varphi^*(a_nx^n+\ \ldots+a_0)=a_n'y^n+\ldots+a_0'$, где $a_i'=\varphi(a_i)$. Докажите, что φ^* — гомоморфное отображение $A[x]$ на $A'[y]$.

11.11. Пусть в задаче 11.10 $A=\mathbf{Z}$, $A'=\mathbf{Z}_{17}$, $y=\bar{x}$, а φ — канонический гомоморфизм. Вычислите:

1) $\varphi^*(x^6-68x^5+128x^4+357x^2+70x-1)$;

2) $\varphi^*(x+a)^{17}$; 3) $\varphi^*(x+a)^{19}$; 4) $\varphi^*(x+a)^{51}$.

11.2. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЙ ДВУЧЛЕН

11.12. Пусть $f(x)\in A[x]$, $c\in A$. Докажите, что:

1) $[f(x)-f(c)] \vdots (x-c)$;

2) существует и притом единственный многочлен $g(x)\in A[x]$ такой, что $f(x)=(x-c)g(x)+f(c)$;

3) $f(c)=0 \Leftrightarrow f(x) \vdots (x-c)$.

11.13. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k\in A$ — различные корни многочлена n-й степени $f(x)\in A[x]$. Докажите, что:

1) $f(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_k)g(x)$;

2) если $k=n$, то $f(x)=a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, где a_n — старший коэффициент многочлена $f(x)$;

3) число корней многочлена $f(x)$ не превосходит его степени.

11.14. Найдите частное и остаток при делении:

1) $x^4+2x^2+20x+7$ на $x+3$;

2) $2x^4-3x^3-5x^2+8x-3$ на $x-4$;

3) x^3+x^2-7 на $x+4+4i$;

4) $3x^5-x^4+2x^3-x-1$ на $x+1-i$;

5) $2x^5-2x^3+x$ на $x-1-2i$.

11.15. Вычислите $f(c)$, если:

1) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+22$, $c=2$;

2) $f(x)=x^5-4ix^4+x^2-3$, $c=2-i$;

3) $f(x)=x^5+(2i-1)x^3-2ix-5$, $c=1-i$.

11.16. Многочлены, приведенные в задаче 11.15, разложите по степеням $x-c$.

11.17. Найдите кратность корня c многочлена $f(x)$, если:

1) $f(x)=2x^4-7x^3+9x^2-5x+1$, $c=1$;

2) $f(x)=5x^4+14x^3+12x^2+2x-1$, $c=-1$;

3) $f(x)=x^5-5x^4+40x^2-80x+48$, $c=2$;

4) $f(x)=x^5+6x^4+11x^3+2x^2-12x-8$, $c=-2$.

11.18. Докажите, что в $\mathbf{Z}[x]$:

1) $(100x^{100}-50x^{50}+10x^{10}-5x^5+x-56) \vdots (x-1)$;

2) $[(x+3)^{25}-(x+1)^5+x] \vdots (x+2)$;

3) $[(x-2)^{63}-(x-1)^{36}+1] \vdots (x^2-3x+2)$.

11.19. При каких значениях p и q:

1) $(x^{16}-3x^9+4x^4+px^2+qx) \vdots (x^2-1)$;
2) $(x^3+px^2+qx-1) \vdots (x-1)^2$;
3) $(px^4-qx^3+1) \vdots (x+1)^2$?

11.20. Докажите, что в кольце $\mathbf{C}[x]$ при любых целых неотрицательных k, l, m, n:

1) $(x^{3k}+x^{3l+1}+x^{3m+2}) \vdots (x^2+x+1)$;
2) $(x^{4k}+x^{4l+1}+x^{4m+2}+x^{4n+3}) \vdots (x^3+x^2+x+1)$.

11.21. Пусть $n, p \in \mathbf{N}$. При каком условии в кольце $\mathbf{C}[x]$:

1) $(x^n-1) \vdots (x^2+x+1)$; 2) $(x^n+1) \vdots (x^2-x+1)$;
3) $(x^{2n}+x^n+1) \vdots (x^2+x+1)$; 4) $(x^n-a^n) \vdots (x^p-a^p)$?

11.22. Пусть $u_0=1, u_1, \ldots, u_{n-1}$ — корни многочлена $f(x)=x^n-1$. Докажите, что:

1) $(1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)=n$;
2) $(2-u_1)(2-u_2)\ldots(2-u_n)=2^n-1$.

11.23. Разложите на линейные множители следующие многочлены из кольца $\mathbf{C}[x]$:

1) $f(x)=x^4+16$; 2) $f(x)=x^4-10x^2+1$;
3) $f(x)=(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12$;
4) $f(x)=(x^2-x+1)(x^2-x+2)-12$;
5) $f(x)=(x-1)x(x+1)(x+2)-24$;
6) $f(x)=(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+15$.

11.24. Докажите, что при любом натуральном n

$$[(x^{n+2}-1)(x^{n+1}-1)(x^n-1)] \vdots [(x^3-1)(x^2-1)(x-1)].$$

11.25. Пусть многочлен $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ принимает значение, равное пяти, в пяти целых точках. Докажите, что $f(x)$ не имеет целых корней.

11.26. Докажите, что над полем $\mathbf{Z}_p$

$$(\bar{x}-\bar{1})(\bar{x}-\bar{2})\ \ldots\ (\bar{x}-\overline{p-1})=\bar{x}^{p-1}-\bar{1}.$$

11.3. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ

11.27. Разделите с остатком:

1) $x^4-4x^3+5x^2+x-1$ на x^2-2x-3;
2) $5x^4-x^2+6$ на x^2+3x+2;
3) $2x^2-3x+1$ на x^3+4;
4) x^3-2x^2+3x-4 на $3x^2-2x+1$.

11.28. Найдите остаток при делении многочлена:

1) $x^{62}-4x^{31}+5$ на x^2-1;
2) $x^{17}-x^{10}+2x^3-1$ на x^2+1;
3) $x^{10}-2x^9+3x^8-x^2+2x-1$ на x^4-1;
4) $x^{16}+2x^{15}-x^8-2x^7+x^4+2x^3-x^2-2x+1$ на x^2+x-2.

11.29. При делении многочлена $f(x)$ на $x-1$ и $x-2$ остатки равны соответственно 1 и 2. Чему равен остаток при делении $f(x)$ на $(x-1)(x-2)$?

11.30. При делении многочлена $f(x)$ на $x+1$, $x-1$ и $x+3$ остатки равны соответственно 5, -4 и 6. Чему равен остаток при делении $f(x)$ на $(x^2-1)(x+3)$?

11.31. При делении многочлена $f(x)$ на $x-a$, $x-b$ и $x-c$ остатки равны соответственно u, v, w. Чему равен остаток при делении $f(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$?

11.32. Найдите a и b, если при делении многочлена ax^3+bx-1 на x^2-3x+2 остаток равен 7.

11.33. При каком условии в кольце $\mathbf{Q}[x]$ на x^2+ax+1 делятся следующие многочлены:

1) x^4+q;   2) $x^4-21x+q$;
3) x^4+px+q;   4) x^4-7x^2+q;
5) x^4+px^2+q;   6) x^5+px^2+q?

11.34. Найдите все действительные значения a и b, при которых многочлены x^3+ax^2+18 и $x^3+bx+12$ имеют два общих корня. Найдите эти корни.

11.35. Пусть при делении $f(x)$ на $g(x)$ с остатком получили $f(x)=g(x)s(x)+r(x)$. Найдите остаток при делении:

1) $f^2(x)$ на $g(x)$, если $r(x)=7x^3-x+1$ и степень $g(x)$ равна 7;

2) $f(x)$ на $g^2(x)$, если $r(x)=2$, а остаток при делении $f^2(x)$ на $g^2(x)$ равен 4;

3) $f(x)$ на $s(x)$, если $s(x)=2x^3+x+3$ и $r(x)=4x^4+2x^2+1$.

11.36. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены над полем F. Докажите, что:

1) если $d(x)$ — НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $cd(x)$ — тоже их НОД при любом $c\neq 0$ из F;

2) два различных НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ отличаются лишь множителем $c\neq 0$ из F.

11.37. Найдите НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное представление:

1) $f(x)=x^4+4x^3-7x+2$, $g(x)=x^3+3x^2-4$;
2) $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+2x-2$, $g(x)=x^5-1$;
3) $f(x)=3x^5+6x^4+3x^3-x^2-2x-1$, $g(x)=x^4-2x^2+1$;
4) $f(x)=x^6-x^4+3x^3-2x+2$, $g(x)=x^3+2$;
5) $f(x)=3x^6-4x^4+2x^2-1$, $g(x)=3x^5+5x^3-4x-4$;
6) $f(x)=2x^6-3x^4-x^2-4x-2$, $g(x)=-2x^6+3x^4-2x^3-3x^2-4x-4$.

11.38. Найдите НОД и НОК многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x)=x^3(x+1)^2(x-2)(x-1)$, $g(x)=x^3(x+1)(x+3)$;
2) $f(x)=(x-2)(x^2-4)(x^3-8)(x^4-16)$, $g(x)=(x+2)(x^2+4)(x^3+8)(x^4+16)$;
3) $f(x)=(x^3-8)(x^2-4x+4)$, $g(x)=(x^2-4)^3$;
4) $f(x)=(x-1)(x+2)^2(x-3)$, $g(x)=x^2+x-6$.

11.39. Найдите НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

1) $f(x)=x^{51}-1$, $g(x)=x^{21}-1$;
2) $f(x)=x^m-1$, $g(x)=x^n-1$.

11.40. Докажите, что:

1) многочлен 1-й степени над любым полем F неприводим;

2) если многочлен $f(x)$ неприводим над полем F, то при любом $c\neq0$ из F многочлен $cf(x)$ неприводим над F;

3) если K — расширение поля F, то многочлен $f(x)$ с коэффициентами из F, неприводимый над K, неприводим и над F.

11.4. ПРОИЗВОДНАЯ МНОГОЧЛЕНА НАД ПОЛЕМ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ. КРАТНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

11.41. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены над полем F. Докажите, что:

1) производная многочлена n-й степени есть многочлен $(n-1)$-й степени;

2) $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$;

3) $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

4) $[f^k(x)]'=kf^{k-1}(x)f'(x)$.

11.42. Найдите $f(x)$, если:

1) $f(x)=f'(x)+x$;

2) $f'(x)=3x^3-2x^2+x-1$ и $f(2)=2$;

3) $f(x)=[f'(x)]^n$ при некотором $n\in\mathbf{N}$.

11.43. Найдите значения производных многочлена $f(x)$ при $x=c$ из задачи 11.15.

11.44. Пусть $f(x)$ — многочлен n-й степени над $\mathbf{R}$, $a\in\mathbf{R}$ и $f(a)\geqslant0$, $f'(a)\geqslant0$, $\ldots$, $f^{n-1}(a)\geqslant0$, $f^n(a)>0$. Докажите, что действительные корни многочлена $f(x)$ не превосходят a.

11.45. Пусть $f(x)=p^k(x)g(x)$ — многочлен над полем F, $p(x)$—неприводимый многочлен над F, $\overline{g(x)\,\vdots\,p(x)}$. Докажите, что:

1) $f'(x)\,\vdots\,p^{k-1}(x)$; 2) $\overline{f'(x)\,\vdots\,p^k(x)}$.

11.46. Пусть $f(x)\in F[x]$, $p(x)$ — неприводимый многочлен над F. Докажите, что следующие высказывания эквивалентны:

а) $p(x)$ — k-кратный множитель $f(x)$;

б) $f(x)\,\vdots\,p(x)$, $f'(x)\,\vdots\,p^{k-1}(x)$ и $\overline{f'(x)\,\vdots\,p^k(x)}$;

в) $f(x)\,\vdots\,p(x)$, $f'(x)\,\vdots\,p(x)$, $\ldots$ $f^{k-1}(x)\,\vdots\,p(x)$ и $\overline{f^k(x)\,\vdots\,p(x)}$.

11.47. Пусть $f(x)=ap_1^{\alpha_1}(x)\,\ldots\,p_s^{\alpha_s}(x)$ — каноническое разложение многочлена $f(x)$ над полем F. Докажите, что НОД $(f(x), f'(x))=p_1^{\alpha_1-1}(x)\,\ldots\,p_s^{\alpha_s-1}(x)$.

11.48. Пусть $f(x)\in F[x]$. Докажите, что:

1) многочлен $f(x)$ тогда и только тогда не содержит кратных множителей, когда он взаимно-прост со своей производной;

2) если многочлен $f(x)$ не имеет кратных множителей над F, то он не имеет кратных множителей ни над каким расширением поля F.

11.49. Найдите НОД $(f(x), f'(x))$, если:

1) $f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$;

2) $f(x)=(x^2-4)^3(x^2+4)^2(x^4-16)$;

3) $f(x)=(x^2+1)^2(x^4+1)^4(x^6+1)^6(x^8+1)^8$;

4) $f(x)=x^{k+l}-x^k-x^l+1$.

11.50. Пусть $f(x)\in F[x]$. Докажите, что:

1) если c—k-кратный корень многочлена $f(x)$, то c—$(k-1)$-кратный корень его производной;

2) простой корень многочлена $f(x)$ не является корнем его производной;

3) если многочлен $f(x)$ взаимно-прост со своей производной, то он не имеет кратных корней;

4) если многочлен $f(x)$ неприводим над F, то он не имеет кратных корней;

5) если $d(x)=\text{НОД}(f(x), f'(x))$, то все корни многочлена $f(x)/d(x)$ простые. Множество корней этого многочлена совпадает с множеством корней многочлена $f(x)$.

11.51. При каких p, q, r каждый из следующих многочленов делится на $(x-1)^3$:

1) $f(x)=x^3+px^2+qx+r$;

2) $f(x)=x^4+px^3+qx^2+r$;

3) $f(x)=px^4+qx^2+rx+1$;

4) $f(x)=px^n+qx^{n-1}+rx^2+1$, $n\geqslant 4$;

5) $f(x)=x^n+px^2+qx+r$?

11.52. При каких значениях a многочлен $f(x)$ имеет кратный корень; какова кратность этого корня:

1) $f(x)=x^3+ax^2+3x-1$;

2) $f(x)=2x^3-x^2+ax+3$;

3) $f(x)=3x^4-6x^3+ax^2-2x+1$?

11.53. При каком условии следующие многочлены имеют кратные корни:

1) $f(x)=x^3+px+q$; 2) $f(x)=x^3+px^2+q$;

3) $f(x)=x^4+px+q$; 4) $f(x)=x^4+px^2+q$?

11.54. При каких натуральных n следующие многочлены делятся на $(x-1)^2$:

1) $f(x)=x^n-nx+n-1$;

2) $f(x)=x^{2n}-x^{n+1}-5x+5$;

3) $f(x)=nx^{2n}-(2n-1)x^n-9x+17$?

11.55. Докажите, что многочлен $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

11.56. Докажите, что $f(x)\,\vdots\, f'(x) \Leftrightarrow f(x)=a(x-c)^n$.

11.57. Докажите, что многочлен

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$$

делится на x^{n+1}.

11.58. Отделите кратные множители следующих многочленов:

1) $f(x)=x^6-2x^5-9x^4+4x^3+31x^2+30x+9$;
2) $f(x)=x^6-2x^5-x^4+4x^3-x^2-2x+1$;
3) $f(x)=x^6-4x^5+7x^4-8x^3+7x^2-4x+1$;
4) $f(x)=x^6+2x^5-x^4+4x^3+7x^2-6x+9$.

11.5. МНОГОЧЛЕНЫ НАД C И НАД R

11.59. Следующие многочлены разложите на неприводимые множители над **C** и **R**:

1) x^3-8; 2) x^3+8; 3) x^4-16;
4) x^4+16; 5) x^6-27; 6) x^6+27;
7) x^8-6x^4+9; 8) $x^4+6x^3+9x^2-9$;
9) $x^4-10x^3+25x^2-6$.

11.60. По данным корням постройте многочлен наименьшей степени над **C** и над **R**:

1) двойной корень 1, простые корни -1 и i;
2) тройной корень $1-2i$;
3) двойной корень $-1-i$ и двойной корень $-2+i$.

11.61. Докажите, что:

1) если u — корень многочлена $ax^2+bx+c\in\mathbb{R}[x]$, то $\bar{u}$ — тоже корень этого многочлена;

2) если $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ имеет корень $s+ti$ $(t\neq0)$, то $f(x)\,\vdots\,[(x-s)^2+t^2]$;

3) многочлен $f(x)$ нечетной степени над **R** имеет действительный корень.

11.62. Если в уравнении $x^2+px+q=0$, где p, q — действительные числа:

1) $q>0$, то верно ли, что корни его одного знака?
2) $q<0$, то верно ли, что корни его разных знаков?

11.63. При каких условиях квадратный трехчлен с действительными коэффициентами ax^2+bx+c является квадратом линейного двучлена с действительными коэффициентами?

11.64. Докажите, что при любых попарно-неравных a, b, c, d

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$$
$$+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1.$$

11.65. Найдите все корни каждого из следующих уравнений, если известен один из них (c):

1) $x^3-4x^2+3x+30=0$, $c=3+i\sqrt{6}$;
2) $4x^4-24x^3+53x^2+18x-42=0$, $c=3-i\sqrt{5}$;
3) $x^4+5x^3+31x^2+60x+150=0$, $c=-2-i\sqrt{6}$;
4) $x^6-2x^5+2x^4-2x^3-2x^2-2x+3=0$, $c=1+i\sqrt{2}$.

11.66. Определите c так, чтобы:

1) один из корней уравнения $x^3-21x+c=0$ был равен удвоенному другому;

2) сумма двух корней уравнения $x^3+12x^2+c=0$ была равна третьему корню;

3) произведение двух корней уравнения $x^3-20x+c=0$ было равно третьему корню.

11.67. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^3+px+q=0$, чтобы один корень был равен:

1) сумме двух других;
2) разности двух других;
3) утроенному другому;
4) сумме обратных величин всех корней?

11.68. Каким условиям должны удовлетворять p, q и r, чтобы они были корнями уравнения:

1) $x^3-px^2+qx+r=0$
2) $x^3-px^2+qx-r=0$?

11.69. Каким условиям удовлетворяют коэффициенты квадратного трехчлена $f(x)=x^2+px+q$, если при любой их перестановке получается квадратный трехчлен:

1) с теми же корнями;
2) имеющий хотя бы один общий корень с исходным?

11.70. Сумма квадратов корней уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ равна 1,7. Найдите a.

11.71. Какова зависимость между коэффициентами уравнения $x^2+px+q=0$, если $\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_1^2+x_2^2}=\frac{1}{x_1x_2}$?

11.72. Пусть x_1 и x_2 — корни многочлена $g(x)=x^2+ax+b$ с целыми коэффициентами. Докажите, что если $f(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами, то $f(x_1)+f(x_2)$ — целое число.

11.73. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что при любых целых a и b число $f(a+\sqrt{b})+f(a-\sqrt{b})$ — целое.

11.74. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни кубического уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами a, b, c. Пусть далее $f(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)$ — целое число.

11.75. Найдите многочлен $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ и его корни, если известно, что они образуют арифметическую прогрессию:

1) $f(x)=x^3+6x^2+5x+r$;
2) $f(x)=x^3-18x^2+qx+24$.

11.76. Найдите многочлен $f(x)=x^3+px^2-6x+8\in\mathbb{R}[x]$ и его корни, если известно, что они образуют геометрическую прогрессию.

11.77. При каких a и b система

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a; \\ x^3+y^3=b \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11.78. Докажите, что при $a>0$ и произвольном действительном b уравнение $x^3+ax+b=0$ имеет только один действительный корень.

11.79. Докажите, что при любом действительном k следующие уравнения имеют только один действительный корень:

1) $x^3-x^2+x+k=0$; 2) $x^3+7x^2+25x+k=0$.

11.80. Докажите, что следующие многочлены имеют только один действительный корень:

1) $x^3+7x^2+24x-1$; 2) $x^3-5x^2+12x+1$.

11.81. Решите уравнения:

1) $x^3+3x^2-3x+4=0$; 2) $2x^3+3x^2-3x-9=0$;
3) $3x^3-10x^2+13x+14=0$; 4) $3x^3-11x^2+28x-30=0$;
5) $x^3-9x+12=0$; 6) $x^3+3x+2i=0$;
7) $x^3-3x^2+3(1-2i)x+3+2i=0$;
8) $x^3+(1-i)x^2+(1-i)x-i=0$;
9) $4x^3-2(10-i)x^2+10(3-i)x+15i=0$.

11.82. Решите уравнения:

1) $x^4+2x^3+2x^2+6x-3=0$;
2) $x^4-2x^3-2x^2+12x-24=0$;
3) $x^4-5x^3+8x^2-3x-3=0$;
4) $x^4-8x^3+21x^2-20x+5=0$;
5) $x^4+2x^3+4x^2+4x+4=0$;
6) $x^4-2x^3+8x^2-12x+12=0$;
7) $16x^4+16x^3-48x^2+28x-133=0$.

11.83. Разложите следующие многочлены на неприводимые множители над **C**, **R**, **Q**:

1) $f(x)=x^4-2x^3-27x^2-44x+7$;
2) $f(x)=x^4+x^3-5x^2+2$;
3) $f(x)=3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$;
4) $f(x)=5x^4+44x^3+28x^2+4x+1$.

11.84. Сколько существует многочленов вида $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ над **C** таких, что множество их корней есть $\{a, b, c\}$?

11.85. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены ненулевой степени над **C** и для любого $c\in\mathbf{C}$ $f(c)=0 \Leftrightarrow g(c)=0$ и $f(c)=1 \Leftrightarrow g(c)=1$. Докажите, что $f(x)=g(x)$.

11.86. Отделите действительные корни многочленов:

1) x^3+3x^2+3; 2) x^3-3x^2+2x+5;
3) $x^4-4x^3+6x^2-5x+1$; 4) $x^4+3x^3+2x^2-2x-1$;
5) $x^4+2x^3-4x^2-5x+5$; 6) $x^4-6x^2-4x+18$.

12. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Докажите, что ненулевой многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ является однородным степени m тогда и только тогда, когда $f(ux_1, \ldots, ux_n) = u^m f(x_1, \ldots, x_n)$.

12.2. Пусть $f, g \in A[x_1, \ldots, x_n]$ — ненулевые многочлены, $h = fg$. Докажите, что многочлен h однороден тогда и только тогда, когда однородны f и g.

12.3. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены над A. Докажите, что степень fg равна сумме степеней f и g.

12.4. Докажите, что в кольце $\mathbf{R}[x, y]$:

1) множество $J = \{xf + yg \mid f, g \in \mathbf{R}[x, y]\}$ является идеалом;

2) $h(x, y) \in J \Leftrightarrow h(0, 0) = 0$;

3) многочлены $s(x, y) = x$ и $t(x, y) = y$ принадлежат идеалу J;

4) $h(x, y) \in J \Rightarrow$ степень $h \neq 0$;

5) если $h(x, y) \in J$, $u(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$ и $hu = x$, то $u(x, y) = \mathrm{const} \in \mathbf{R}$;

6) если $h(x, y) \in J$, а $u, v \in \mathbf{R}[x, y]$, то высказывание $hu = x \wedge hv = y$ ложно;

7) идеал J в кольце $\mathbf{R}[x, y]$ не является главным.

12.5. Пусть $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Докажите, что:

1) $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = \frac{s}{t} f^*(x)$, где $s, t \in \mathbf{Z}$, а $f^*(x) \in \mathbf{Z}[x]$ — примитивный многочлен;

2) если коэффициенты многочлена $f(x)$ — целые числа, то его можно представить в виде $f(x) = sf^*(x)$, где $s \in \mathbf{Z}$, а $f^*(x) \in \mathbf{Z}[x]$ — примитивный многочлен;

3) если $f(x)$ — неприводимый многочлен в $\mathbf{Q}[x]$, то $f^*(x)$ — неприводимый многочлен в $\mathbf{Z}[x]$.

12.6. Докажите, что результаты задачи 12.5 остаются справедливыми, если в условии $\mathbf{Z}$ заменить произвольным факториальным кольцом A, а $\mathbf{Q}$ — K — полем частных кольца A.

12.7. Следующие многочлены разложите на неприводимые множители над $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$:

1) x^4-9y^4; 2) x^4-9y^2;
3) x^2+y^2+1; 4) $2x^2+2y^2+2x+2y+1$.

12.8. Пусть $>$ — отношение сравнения по высоте на множестве неподобных одночленов от n переменных над A. Докажите, что:

1) $>$ — отношение строгого линейного порядка;

2) для любых одночленов φ_1, φ_2, ψ $\varphi_1>\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1\psi>\varphi_2\psi$;

3) для любых одночленов φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 $\varphi_1>\varphi_2 \wedge \psi_1>\psi_2 \Rightarrow \Rightarrow \varphi_1\psi_1>\varphi_2\psi_2$.

12.9. Пусть $f, g \in A[x_1, \ldots, x_n]$. Докажите, что:

1) высший член произведения fg равен произведению высших членов сомножителей;

2) если степень f относительно x_i равна k, а степень g относительно x_i равна l, то степень fg относительно x_i равна $k+l$;

3) если степень f по совокупности переменных равна s, а степень g по совокупности переменных равна t, то степень fg по совокупности переменных равна $s+t$.

12.2. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

12.10. Определите, какие из следующих многочленов от переменных x_1, x_2 x_3 являются симметрическими:

1) $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$;

2) $(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$;

3) $x_1(x_2-x_3)+x_2(x_3-x_1)+x_3(x_1-x_2)$;

4) $x_1^2(x_2-x_3)+x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_1-x_2)$;

5) $x_1(x_2-x_3)^2+x_2(x_3-x_1)^2+x_3(x_1-x_2)^2$.

12.11. Составьте симметрический многочлен от переменных x_1, x_2, x_3 с наименьшим числом одночленов, содержащий:

1) x_1^3; 2) x_1x_2; 3) $x_1^3x_2$.

12.12. Докажите, что множество симметрических многочленов из кольца $A[x_1, \ldots, x_n]$ является подкольцом этого кольца.

12.13. Докажите, что всякий многочлен $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ над A, рассматриваемый как многочлен от $x_1, \ldots, x_n$, является симметрическим.

12.14. Следующие симметрические многочлены выразите через элементарные:

1) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+ + x_2^2x_3+x_2x_3^2)$;

2) $x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3$;

3) $x_1^4+x_2^4+x_3^4$;

4) $x_1^3x_2^2+x_1^3x_3^2+x_1^2x_2^3+x_1^2x_3^3+x_2^3x_3^2+x_2^2x_3^3$;

5) $(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2)$;

6) $(x_1+x_2)^2(x_1+x_3)^2(x_2+x_3)^2$;

7) $(x_1x_2-x_3)(x_2x_3-x_1)(x_3x_1-x_2)$;

8) $(x_1^2-x_2-x_3)(x_2^2-x_1-x_3)(x_3^2-x_1-x_2)$.

12.15. Следующие симметрические многочлены выразите через элементарные:

1) $(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_4)(x_1+x_3+x_4)(x_2+x_3+x_4)$;

2) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$;

3) $(x_1+x_2+x_3-x_4)(x_1+x_2-x_3+x_4)(x_1-x_2+x_3+x_4)(-x_1+x_2+x_3+x_4)$.

12.16. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $5x^3-4x^2+3x-2=0$. Вычислите:

1) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}$;

2) $\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\right)$;

3) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_3}+\frac{(x_2-x_3)^2}{x_1}+\frac{(x_3-x_1)^2}{x_2}$.

12.17. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+px+q=0$. Вычислите:

1) $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$;

2) $(x_1^2+x_2^2)(x_2^2+x_3^2)(x_3^2+x_1^2)$;

3) $\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}+\frac{x_3}{x_3+1}$.

12.18. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3-3x^2+5=0$. Составьте уравнение со следующими корнями:

1) $y_1=x_2x_3$, $y_2=x_1x_3$, $y_3=x_1x_2$;

2) $y_1=\frac{x_1}{x_2x_3}$, $y_2=\frac{x_2}{x_1x_3}$, $y_3=\frac{x_3}{x_1x_2}$;

3) $y_1=\frac{x_1+x_2}{x_3}$, $y_2=\frac{x_2+x_3}{x_1}$, $y_3=\frac{x_3+x_1}{x_2}$.

12.19. Вычислите площадь треугольника, длины сторон которого являются корнями уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$.

12.20. Найдите сумму квадратов и сумму кубов корней уравнения $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$.

12.3. РЕЗУЛЬТАНТ. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

12.21. Вычислите результант многочленов:

1) $3x^2+7x+2$ и x^2-3;

2) x^3-x+1 и $2x^2+3x$;

3) x^2+2x+5 и $2x^3+3x^2+2x+2$;

4) x^3+3x^2+3 и x^3+4x^2+4x;

5) x^4-3x^2+2 и x^3-2x^2-3x+4.

12.22. При каком значении a многочлены имеют общий корень:

1) x^3+ax+3 и x^2+ax+3;

2) x^3+x^2+ax-4 и x^2+x-a;
3) $x^3+(2a-1)x+4$ и x^2-ax-3;
4) $2x^3+ax+1$ и x^2+ax+2;
5) x^3+ax^2+8 и x^3+ax+8?

12.23. Решите системы уравнений:

1) $x^2-x+y^2-y-2=0$;
$x^2+(6y-5)x+(-y^2-5y+6)=0$;
2) $x^2-(y+1)x+2y^2-2y-8=0$;
$5x^2-12xy+20y^2-64=0$;
3) $4x^2-(7y+1)x+y^2+2y-3=0$;
$9x^2-14xy+y^2-9=0$;
4) $2xy+5y^2+2x+6y+1=0$;
$x^2+2xy-y^2-4x-8y-1=0$;
5) $x^2+xy+y^2-1=0$;
$x^3-x^2+x(y-3)+y^3+y^2-y-1=0$.

13. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

13.1. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ПОЛЕМ Q

13.1. Пусть несократимая дробь s/t является корнем многочлена $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\in\mathbf{Z}[x]$. Докажите, что:

1) $a_n \,\vdots\, t$; 2) $a_0 \,\vdots\, s$;

3) $f(k) \,\vdots\, (s-kt)$ при любом $k\in\mathbf{Z}$, если $s-kt\neq 0$.

13.2. Докажите, что если r — рациональный корень многочлена $f(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, то $r\in\mathbf{Z}$.

13.3. Найдите рациональные корни многочленов:

1) $2x^3+x^2+47x-24$;

2) $5x^4-6x^3-15x^2+43x-30$;

3) $12x^4+32x^3+23x^2+15x+18$;

4) $36x^4-60x^3-47x^2+60x+36$;

5) $6x^5+6x^4+29x^3+3x^2-x+20$;

6) $6x^5-6x^4+89x^3+5x^2-19x+60$;

7) $225x^5-165x^4-401x^3+145x^2+192x+36$;

8) $54x^5-135x^4+261x^3-322x^2-188x-40$.

13.4. Найдите все тройки рациональных чисел, если:

1) их сумма и сумма квадратов — нечетные целые числа, а произведение равно 3;

2) одно из них, а также их сумма и произведение — целые числа, а сумма квадратов равна 37/2.

13.5. Решите уравнения 4-й степени, используя для нахождения корней кубической резольвенты метод вычисления рациональных корней:

1) $4x^4-8x^3+12x^2-12x+9=0$;

2) $3x^4-8x^3+16x^2-28x-15=0$;

3) $x^4+4x^3+2x^2+4x+1=0$.

13.6. Пусть $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$ — несократимая дробь, s/t — его корень. Докажите, что:

1) $f(0) \,\vdots\, s$; 2) $f(1) \,\vdots\, (s-t)$;

3) если $f(0)$ и $f(1)$ нечетные числа, то t — четно;

4) если $f(0)$ и $f(1)$ нечетные числа, то $f(x)$ не имеет целых корней;

5) если при каком-нибудь целом k числа $f(k)$ и $f(k+1)$ оба нечетные, то $f(x)$ не имеет целых корней.

13.7. Покажите, что следующие многочлены неприводимы над полем $\mathbf{Q}$:

1) $f(x)=2x^3+6x^2-4x+3$;

2) $f(x)=6x^3-5x^2+4x-3$;

3) $f(x)=4x^3-6x^2+3x-6$.

13.8. Выпишите все неприводимые многочлены:

1) над полем $\mathbf{Z}_2$ до 4-й степени включительно;

2) над полем $\mathbf{Z}_3$ до 3-й степени включительно.

13.9. Докажите, что многочлен $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\in\in\mathbf{Z}[x]$ неприводим, если неприводим многочлен $f(\bar{x})=\bar{a}_n\bar{x}^n+\ldots+\bar{a}_1\bar{x}+\bar{a}_0\in\mathbf{Z}_p[\bar{x}]$.

13.10. Воспользовавшись задачами 13.8.1 и 13.9, покажите, что следующие многочлены неприводимы над полем $\mathbf{Q}$:

1) $6x^6+4x^5-7x^4+9x^3-25$;

2) $24x^{10}-12x^6+25x^3-13x^2+51$;

3) $60x^6-30x^5+15x^4-19x^3+23x^2-27x+35$.

13.11. Докажите, что если многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\mathbf{Q}$, то при любых a, $b\in\mathbf{Q}$ $(a\neq 0)$ многочлен $f(ax+b)$ неприводим над полем $\mathbf{Q}$.

13.12. Воспользовавшись критерием Эйзенштейна, докажите неприводимость следующих многочленов над полем $\mathbf{Q}$:

1) $6x^5-7x^4+14x^3-28x^2+7x-35$;

2) x^4-2x-6; 3) x^n+5;

4) x^p+p (p — простое число);

5) x^4+1; 6) x^5-4;

7) $x^p-2px+(p-1)$ (p — простое число);

8) $x^{p-1}+\ldots+x+1$ (p — простое число).

13.13. Пусть $f(x)=x^p-x+1\in\mathbf{Z}_p[x]$, $\varphi(x)$ — неприводимый множитель многочлена $f(x)$. Докажите, что:

1) $f(x)=f(x+a)$ при любом $a\in\mathbf{Z}_p$;

2) $f(x)\,\vdots\,\varphi(x+a)$ при любом $a\in\mathbf{Z}_p$;

3) степень $\varphi(x)$ больше единицы;

4) среди многочленов $\varphi(x)$, $\varphi(x+1)$, ..., $\varphi(x+p-1)$ есть одинаковые;

5) $\varphi(x)=\varphi(x+1)=\ldots=\varphi(x+p-1)$;

6) каждый элемент поля $\mathbf{Z}_p$ является корнем многочлена $\varphi(x)-\varphi(0)$;

7) $\varphi(x)$ — многочлен p-й степени;

8) многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\mathbf{Z}_p$;

9) многочлен $g(x)=x^p-x+c\in\mathbf{Z}_p[x]$, $\overline{c\,\vdots\,p}$ неприводим над полем $\mathbf{Z}_p$;

10) многочлен $h(x)=x^p-x+c\in\mathbf{Q}[x]$, $\overline{c\,\vdots\,p}$ неприводим над полем $\mathbf{Q}$.

13.14. Докажите, что многочлен $f(x)=x^4+px^2+q$ приводим над $\mathbf{Q}$ тогда и только тогда, когда

1) или $p^2-4q=a^2$, где $a\in\mathbf{Q}$;

2) или $q=b^2$, $2b-p=c^2$, где b, $c\in\mathbf{Q}$.

13.15. Пусть $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$, где a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — попарно различные целые числа, и $f(x)=g(x)h(x)$, где $g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Докажите, что:

1) $g(a_i)+h(a_i)=0$ при любом $i=1, 2, \ldots, n$;

2) если $g(x)\neq\text{const}$, $h(x)\neq\text{const}$, то $g(x)+h(x)=0$;

3) если $g(x)\neq\text{const}$, $h(x)\neq\text{const}$, то $f(x)=-g^2(x)$;

4) многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\mathbf{Q}$.

13.16. Пусть $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$, где a_1, $a_2, \ldots, a_n$ — попарно различные целые числа, и $f(x)=g(x)h(x)$, где $g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Докажите, что:

1) можно считать, что $g(x)>0$, $h(x)>0$ при любом вещественном x;

2) $g(a_i)=h(a_i)=1$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$;

3) степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ равны n;

4) $g(x)=u(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1$, $h(x)=v(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1$;

5) $uv=1$, $u+v=0$;

6) многочлен $f(x)$ неприводим над полем $\mathbf{Q}$.

13.2. ПРОСТОЕ И КОНЕЧНОЕ РАСШИРЕНИЕ ПОЛЯ

13.17. Пусть F — числовое поле, $z\in\mathbf{C}$, $F(z)$ — множество всевозможных отношений вида $f(z)/g(z)$, где $f(x), g(x)\in F[x]$ и $g(z)\neq 0$. Докажите, что:

1) $F(z)$ — поле; 2) $F\subseteq F(z)$, $z\in F(z)$;

3) $F(z)$ — наименьшее расширение поля F, содержащее z;

4) $F(z)$ совпадает с пересечением всех расширений поля F, содержащих z.

13.18. Опишите следующие расширения поля $\mathbf{Q}$:

1) $\mathbf{Q}(a)$, где $a\in\mathbf{Q}$; 2) $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$;

3) $\mathbf{Q}(a+b\sqrt{3})$, где $a, b\in\mathbf{Q}$, $b\neq 0$; 4) $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$;

5) $\mathbf{Q}(i)$; 6) $\mathbf{Q}(a+bi)$, где $a, b\in\mathbf{Q}$, $b\neq 0$;

7) $\mathbf{Q}(i\sqrt{3})$; 8) $\mathbf{Q}(a+bi\sqrt{3})$, где $a, b\in\mathbf{Q}$, $b\neq 0$;

9) $\mathbf{Q}(e)$; 10) $\mathbf{Q}(\pi)$.

13.19. Определите, какие из следующих пар полей изоморфны:

1) $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ и $\mathbf{Q}(-\sqrt{3})$;

2) $\mathbf{Q}(a+b\sqrt{3})$ и $\mathbf{Q}(a-b\sqrt{3})$, где $a, b\in\mathbf{Q}$;

3) $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$;

4) $\mathbf{Q}(\sqrt{3}+i\sqrt{5})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{3}-i\sqrt{5})$;

5) $\mathbf{Q}(z)$ и $\mathbf{Q}(\bar{z})$, где $z\in\mathbf{C}$;

6) $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{q})$, где $p\neq q$ — простые числа.

13.20. Докажите, что аддитивные группы полей $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ изоморфны.

13.21. Пусть $a, b\in\mathbf{R}$, $b\neq 0$. Докажите, что $\mathbf{R}(a+bi)=C$.

13.22. Докажите, что если T — расширение поля F, то T можно рассматривать как векторное пространство над F.

13.23. Найдите степени расширений из задачи 13.18 над полем $\mathbf{Q}$.

13.24. Докажите, что $(\mathbf{C}:\mathbf{R})=2$.

13.25. Пусть P — конечное расширение поля F с базисом $u_1, u_2, \ldots, u_s$, T — конечное расширение поля P с базисом $v_1, v_2, \ldots, v_t$. Докажите, что:

1) $u_1v_1+u_1v_2, \ldots, u_sv_t$ — базис T над F;
2) $(T:F)=(T:P)(P:F)$;
3) $(T:F)=(P:F) \Rightarrow P=T$;
4) $(T:P)=(T:F) \Rightarrow F=P$.

13.26. Пусть P — расширение поля F, T — расширение поля P. Докажите, что T — конечное расширение поля F тогда и только тогда, когда P — конечное расширение F и T — конечное расширение P.

13.27. Докажите, что расширения из задач 13.18.2—8 являются квадратичными расширениями поля.

13.28. Докажите, что каждое из следующих полей может быть получено из поля $\mathbf{Q}$ с помощью нескольких квадратичных расширений.

1) $\mathbf{Q}(\sqrt{3}+i\sqrt{5})$; 2) $\mathbf{Q}(\sqrt[4]{3})$;
3) $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}\right)$; 4) $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2\sqrt{3}-i\sqrt{5}}+\sqrt{7}\right)$.

13.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

13.29. Докажите, что следующие числа являются алгебраическими над полем $\mathbf{Q}$:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[3]{2}$; 3) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$; 4) i;
5) $1-i\sqrt{3}$; 6) $-1+i\sqrt{5}$; 7) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{2}}$.

13.30. Докажите, что каждое комплексное число $a+bi$ является алгебраическим над $\mathbf{R}$.

13.31. Пусть z — алгебраическое число над полем F. Докажите, что:

1) существует такой неприводимый над F многочлен $p(x)$ со старшим коэффициентом 1, корнем которого является z;

2) многочлен $p(x)$ определяется алгебраическим числом z однозначно;

3) если $f(x)$ — многочлен над F, корнем которого является z, то $f(x) \vdots p(x)$.

13.32. Пусть $a+b\sqrt{r}$, где $a, b, r \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{r} \equiv \mathbf{Q}$,— корень многочлена $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$. Докажите, что $a-b\sqrt{r}$ — также корень многочлена $f(x)$.

13.33. Число c является корнем многочлена $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$. Найдите остальные корни этого многочлена, когда:

1) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+6x+2,\ c=1+\sqrt{3}$;

2) $f(x)=x^5+ax^3+bx^2+5x+2,\ c=1+\sqrt{2}$.

13.34. Докажите, что:

1) алгебраическим числом 1-й степени над полем F являются числа из поля F и только они;

2) если P — расширение поля F и z — алгебраическое число степени n над F, то z — алгебраическое число степени, меньшей или равной n, над P.

13.35. Пусть P — конечное расширение поля F степени n. Докажите, что если $z\in P$, то:

1) система $1, z, z^2, \ldots, z^n$ линейно-зависима над F;

2) z — алгебраическое число над F.

13.36. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+3}$; 2) $\dfrac{4}{2\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+3}$;

3) $\dfrac{7-4\sqrt[3]{49}}{2\sqrt[3]{49}+7\sqrt[3]{7}-21}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}+2\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{3}+1}$;

5) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}-2}$;

7) $\dfrac{1}{z^2-z+1}$, где $z^3-z+1=0$;

8) $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$, где $z^3-2z+2=0$;

9) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$; 10) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$;

11) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}-1}$.

13.37. Опишите следующие расширения поля $\mathbf{Q}$:

1) $\mathbf{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$; 2) $\mathbf{Q}\left(\sqrt[4]{2}\right)$; 3) $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}-1}\right)$.

13.38. Пусть α — корень уравнения $x^3-x-1=0$. Составьте уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого было бы число $\beta=2\alpha^2-\alpha$.

13.39. Пусть $F=\mathbf{Q}\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}-2}\right)$. Докажите, что:

1) $\sqrt[3]{5}\in F$; 2) $\sqrt[3]{5}+2\in F$;

3) $\sqrt[3]{5}+\sqrt{\sqrt[3]{5}-2}\in F$; найдите элемент, обратный $\sqrt[3]{5}+\sqrt{\sqrt[3]{5}-2}$.

13.40. Докажите, что множество чисел $A = \left\{a + b\sqrt[3]{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{Q}\right\}$ не образует поля.

13.41. Образует ли поле множество чисел вида:

1) $a + b\sqrt[3]{3}$, где $a, b \in \mathbf{Q}$;

2) $a + b\sqrt[3]{9}$, где $a, b \in \mathbf{Q}$;

3) $a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}$, где $a, b \in \mathbf{Q}$?

13.42. Пусть u и v — алгебраические числа над полем F. Докажите, что:

1) поля $F(u)$ и $F(v)$ изоморфны тогда, когда минимальные многочлены чисел u и v совпадают;

2) аддитивные группы полей $F(u)$ и $F(v)$ изоморфны тогда и только тогда, когда степени u и v над F равны.

13.43. Докажите, что каждое алгебраическое расширение P поля $\mathbf{R}$, не совпадающее с $\mathbf{R}$, изоморфно $\mathbf{C}$.

13.44. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_s$ — алгебраические числа над полем F. Докажите, что:

1) $F(z_1)$ — конечное расширение поля F;

2) $F(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ — конечное расширение поля F;

3) $F(z_1, z_2, \ldots, z_s)$ — алгебраическое расширение поля F.

13.45. Пусть $\bar{F}$ — множество всех алгебраических чисел над F. Докажите, что:

1) если $z_1, z_2 \in \bar{F}$, то $F(z_1, z_2) \subseteq \bar{F}$;

2) $\bar{F}$ — поле.

13.46. Пусть P — алгебраическое расширение поля F, а z — алгебраическое число над полем P. Докажите, что z — алгебраическое число над полем F.

13.47. Пусть u выражается в радикалах через элементы поля F, т. е. существует такая последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_s = u$, в которой каждое u_t либо принадлежит F, либо является суммой, разностью, произведением или частным двух каких-то u_i, u_k $(i, k < t)$, либо $u_t = \sqrt[n]{u_l}$ $(l < t)$. Докажите, что u — алгебраическое число над F.

13.48. Найдите примитивные элементы расширений:

1) $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; 2) $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$;

3) $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2})$.

13.49. Пусть α — трансцендентное число над полем F. Докажите, что:

1) каждое число из $F(\alpha)$ можно представить в виде $f(\alpha)/g(\alpha)$, где $f(x), g(x) \in F[x]$ — взаимно-простые многочлены, старший коэффициент у $g(x)$ равен единице;

2) представление из п. 1 однозначно;

3) два простых трансцендентных расширения поля F изоморфны;

4) каждое число $\beta \in F(\alpha) \setminus F$ трансцендентно;

5) если $\beta \in F(\alpha) \setminus F$, то $F(\alpha)$ является простым алгебраическим расширением поля $F(\beta)$.

13.4. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

13.50. Пусть на плоскости заданы две точки, которые изображают комплексные числа 0 и 1, т. е. точки, которым приписываются координаты (0, 0) и (0, 1). Докажите, что с помощью циркуля и линейки можно построить следующие числа:

1) любое рациональное число;

2) i; 3) $u+v$, $u-v$, uv и u/v $(v \neq 0)$, если u и v — заданные комплексные числа;

4) любое число из поля $\mathbf{Q}(u)$, если u — заданное комплексное число;

5) $\bar{u}$ и $\sqrt{u}$, если u — заданное комплексное число;

6) любое комплексное число из поля $P=\mathbf{Q}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, если $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — заданные комплексные числа;

7) любое комплексное число из поля $P(\sqrt{u})$, если $u \in P$;

8) любое комплексное число из поля $\mathbf{Q}(i, u_1, \ldots, u_n, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$, если $u_1, \ldots, u_n$ — заданные числа.

13.51. Пусть F — числовое поле, содержащее вместе с каждым элементом ему сопряженный, $u_1, u_2, u_3, u_4 \in F$. Докажите, что:

1) если через u_1 и u_2 и через u_3 и u_4 провести прямые и эти прямые пересекаются, то точка их пересечения принадлежит F;

2) если через u_1 и u_2 провести прямую, а через u_4 — окружность с центром в u_3 и эта прямая пересекается с этой окружностью, то каждая точка их пересечения принадлежит либо F, либо $F(\sqrt{z})$, где $z \in F$;

3) если через u_2 провести окружность с центром в u_1, а через u_4 — окружность с центром в u_3, и эти окружности пересекаются, то каждая точка их пересечения принадлежит либо F, либо $F(\sqrt{z})$, где $z \in F$.

13.52. Пусть A — совокупность комплексных чисел, P — наименьшее поле, содержащее i, каждое число из A и ему сопряженное, F — расширение поля P. Докажите, что каждый элемент поля F можно построить циркулем и линейкой исходя из совокупности A тогда и только тогда, когда F можно получить из P в результате конечной последовательности квадратичных расширений: $P = S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_k = F$, где $S_{i+1}=S_i(\sqrt{z_i})$, $z_i \in S_i$.

13.53. Докажите, что следующие уравнения неразрешимы в квадратных радикалах:

1) $x^3=2$; 2) $8x^3-6x-1=0$; 3) $x^7=1$; 4) $x^9=1$.

13.54. Докажите, что:

1) уравнение $x^5-1=0$ разрешимо в квадратных радикалах;

2) правильный пятиугольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

РЕШЕНИЯ

1

1.10. 1) Если $A \cap B = A \cup B$, то $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in B$. Аналогично $x \in B \Rightarrow x \in A$. Таким образом, $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$. Обратная импликация очевидна.

1.11. 1) Воспользовавшись определениями операций над множествами и результатом задачи 1.4.14, получаем $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.12. 7) Воспользовавшись определением операций над множествами и результатом задачи 1.4.8, получаем $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \overline{x \in A \cup B} \Leftrightarrow \overline{x \in A \vee x \in B} \Leftrightarrow \overline{x \in A} \wedge \overline{x \in B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.25. 1) Пусть высказывание $\overline{(\forall x) P(x)}$ истинно. Значит, высказывание $(\forall x) P(x)$ ложно, т. е. существует такой x, который свойством P не обладает. А это означает, что высказывание $(\exists x) \overline{P(x)}$ истинно. Аналогично в обратном порядке.

1.36. 7) $(X \times Y) \cup (Y \times X) = Z \times Z \Rightarrow X \cup Y = Z$. Теперь $u \in Z \Rightarrow (u, u) \in Z \times Z = (X \times Y) \cup (Y \times X) \Rightarrow (u, u) \in X \times Y \vee (u, u) \in Y \times X \Rightarrow u \in X$. Значит, $Z \subseteq X$, а тогда $X = Z$. Аналогично $Y = Z$.

1.60. Если $\alpha \circ \beta$ — отношение эквивалентности, то, согласно задачам 1.39.3 и 1.59, $\alpha \circ \beta = (\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \alpha$. Наоборот, пусть $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. Тогда $\alpha \supseteq \Delta \wedge \beta \supseteq \Delta \Rightarrow \alpha \circ \beta \supseteq \Delta \circ \Delta = \Delta$, т. е. $\alpha \circ \beta$ рефлексивно. $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$, т. е. $\alpha \circ \beta$ симметрично. $(\alpha \circ \beta)^2 = \alpha \circ \beta \circ \alpha \circ \beta = \alpha \circ \alpha \circ \beta \circ \beta = \alpha \circ \beta$, т. е. $\alpha \circ \beta$ транзитивно.

1.62. Так как $\rho = \rho \cup \Delta$ и $\sigma = \sigma \cup \Delta$, то $\rho \circ \sigma \supseteq \rho \cup \sigma$. Если $\rho \neq \sigma$, то существует такая пара (x, y), что $(x, y) \in \rho$ и $(x, y) \overline{\in} \sigma$. Но σ — линейная упорядоченность. Значит, $(y, x) \in \sigma$. Тогда отношение $\rho \circ \sigma$ содержит как (x, y), так и (y, x) и не является антисимметричным. Если же $\rho = \sigma$, то $\rho \circ \sigma \supseteq \rho$. Согласно результату задачи 1.58, $\rho \circ \sigma = \rho^2 \subseteq \rho$. Значит, $\rho \circ \sigma = \rho$.

1.70. 1) При $n = 2$ имеем $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, так как $x \neq 0$. Пусть $(1+x)^k > 1 + kx$. Так как $x > -1$, то $1 + x > 0$ и $(1+x)^{k+1} > (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x$.

2) При $n=2$ имеем $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$, что легко проверить. Пусть $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$, $k>2$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{1}}+$ $+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ и достаточно доказать, что $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$ или равносильное неравенство $\sqrt{k}>\sqrt{k+1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. А это неравенство легко доказывается возведением левой и правой частей в квадрат.

3) При $n=2$ имеем $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$. Пусть $S_k=$ $=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1$. Тогда $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{3k+2}+$ $+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=S_k+\frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}>1$.

5) При $n=2$ имеем $\frac{2}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$. Пусть $\frac{k}{2}<S_k=$ $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}<k$. Тогда $S_{k+1}=S_k+\frac{1}{2^k}+$ $+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>S_k+\frac{2^k}{2^{k+1}-1}>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=$ $=\frac{k+1}{2}$. С другой стороны, $S_{k+1}<S_k+\frac{2^k}{2^k}<k+1$.

7) При $n=2$ имеем $(a+b)^2<2(a^2+b^2)$, что равносильно очевидному неравенству $(a-b)^2>0$. Пусть $(a+b)^k<2^{k-1}(a^k+$ $+b^k)$. Тогда $(a+b)^{k+1}<2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)$ и достаточно доказать, что $2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)<2^k(a^{k+1}+b^{k+1})$, что равносильно неравенству $a^kb+ab^k<a^{k+1}+b^{k+1}$. А это неравенство в свою очередь равносильно очевидному неравенству $(a^k-b^k)(a-b)>0$.

8) При $n=2$ имеем $(1+a_1)(1+a_2)-2^2=a_1+\frac{1}{a_1}-2=$ $=\frac{(1-a_1)^2}{a_1}>0$. Пусть $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)\geqslant 2^k$. Так как $a_1\ldots(a_ka_{k+1})=1$, то по предположению индукции $(1+a_1)(1+$ $+a_2)\ldots(1+a_ka_{k+1})\geqslant 2^k$. Не ограничивая общности, можно считать, что a_{k+1} — максимальное из чисел $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$, а a_k — минимальное из этих чисел. Покажем, что при этом $(1+a_k)(1+$ $+a_{k+1})\geqslant 2(1+a_ka_{k+1})$, откуда сразу следует доказательство. Последнее неравенство равносильно такому: $(a_{k+1}-1)(1-a_k)\geqslant 0$. Если $a_{k+1}=a_k=1$, то это неравенство очевидно, а если $a_{k+1}>1$, то $a_k<1$, и опять-таки это неравенство очевидно.

2

2.11. Пусть $z=a+bi$. Тогда $w=\frac{(a-1)+bi}{(a+1)+bi}=\frac{a^2+b^2-1}{(a+1)^2+b^2}+$ $+\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}i$. Отсюда следует, что w — чисто мнимое тогда и только тогда, когда $a^2+b^2-1=0$. А это равносильно тому, что $|z|=1$.

2.21. 1) С одной стороны, $(1+i)^8=(2i)^4=16$. С другой стороны, $(1+i)^8=1+C_8^1 i-C_8^2-C_8^3 i+C_8^4+C_8^5 i-C_8^6-C_8^7 i+C_8^8$. Остается сравнить действительные части.

2.22. 17) $|2+\sqrt{3}+i|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=$ $=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Если $\varphi=\arg(2+\sqrt{3}+i)$, то $\cos\varphi=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=$ $=\sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\cos\frac{\pi}{12}$. Отсюда $2+\sqrt{3}+$ $+i=2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

2.24. 1) $u=z^4-\bar{z}^2=\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi-\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi=$ $=-2\sin 3\varphi\sin\varphi+2i\sin 3\varphi\cos\varphi=2\sin 3\varphi(-\sin\varphi+i\cos\varphi)$. Если $\sin 3\varphi>0$, т. е. $\frac{2k\pi}{3}<\varphi<\frac{(2k+1)\pi}{3}$, то $u=2\sin 3\varphi\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right)$. Если $\sin 3\varphi<0$, т. е. $\frac{(2k-1)\pi}{3}<\varphi<$ $<\frac{2k\pi}{2}$, то $u=-2\sin 3\varphi\left(\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\Big)$. Если же $\sin 3\varphi=0$, т. е. $\varphi=\frac{k\pi}{3}$, то $u=0$.

2.32. 3) Обозначим $A=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$, $B=\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{3\pi}{9}+\sin\frac{5\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}$, $z=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$. Тогда

$$A+Bi=z+z^3+z^5+z^7=\frac{z(1-z^8)}{1-z^2}=$$
$$=\frac{z-z^9}{1-z^2}=\frac{z+1}{1-z^2}=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}}=$$
$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{9}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{2}-\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{9}\right)}i.$$

Следовательно, $A=\frac{1}{2}$.

2.33. Обозначим $A=\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\ldots+\cos(\varphi+n\alpha)$, $B=\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\ldots+\sin(\varphi+n\alpha)$, $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $c=$ $=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Тогда

$$A+Bi=c+cz+\ldots+cz^n=\frac{c(1-z^{n+1})}{1-z}=$$

$$= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(1-\cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha)}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, 2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\left(\cos\frac{(n+1)\alpha-\pi}{2} + i\sin\frac{(n+1)\alpha-\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha-\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\, i.$$

Остается сравнить действительные и мнимые части.

2.34. 1) $\Rightarrow$ Если $|z|=1$ и $z\neq 1$, то $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и $\varphi\neq$ $\neq 2k\pi$. Тогда $\frac{\varphi}{2}\neq k\pi$ и $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$. Поэтому

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + i}{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - i}.$$

$\Leftarrow$ Легко подсчитать, что ни при каком $s\in\mathbf{R}$ невозможно равенство $\frac{s+i}{s-i}=1$ и что $\left|\frac{s+i}{s-i}\right|=1$ при любом $s\in\mathbf{R}$.

2.39. $\left|\frac{1+ai}{1-ai}\right|=1$, поэтому $\frac{1+ai}{1-ai}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ и $\frac{1+xi}{1-xi}=$ $=\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}$. Отсюда

$$x = \frac{\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} - 1 + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}}{i\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + 1 + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+2k\pi}{2n}.$$

2.58. 1) Квадратное неравенство верно для всех $u\in\mathbf{R}$, если дискриминант квадратного трехчлена $|z-2+i|u^2-2|z-2+$ $+i|u+1$ отрицательный: $|z-2+i|^2-|z-2+i|<0$. Отсюда имеем $|z-2+i|<1$, следовательно, условием задачи задается окружность радиуса 1 с центром в точке $2-i$.

2.59. 1) Поскольку $\sqrt{3x-y}+i\sqrt{x-3y}$ — алгебраическая форма комплексного числа, то $3x-y\geqslant 0$ и $x-3y\geqslant 0$. Кроме того, согласно условию, $(\sqrt{3x-y})^2+(\sqrt{x-3y})^2=4$. Таким образом, получаем систему:

$$x-y=1;$$
$$3x-y\geqslant 0;$$
$$x-3y\geqslant 0.$$

Подставляя в два последних неравенства $y=x-1$, получаем:

$$y=x-1;$$
$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}.$$

Это отрезок прямой $y=x-1$, ограниченный точками $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.60. 3) Из условия получаем

$$\log_3\frac{2+|z^2+i|}{2+|z^2-i|}=0,$$

откуда

$$\frac{2+|z^2+i|}{2+|z^2-i|}=1 \text{ и } |z^2+i|=|z^2-i|.$$

Следовательно, z^2 — любое действительное число. Но тогда z — любое действительное или любое чисто мнимое число. Таким образом, условию задачи удовлетворяют точки, лежащие на координатных осях, и только они.

4) Как и в п. 3, получаем, что $z^2 \in \mathbf{R}$. Однако z^2 должно удовлетворять еще одному условию: $5-|z^2-3i|>0$, т. е. z^2 лежит внутри окружности радиуса 5 с центром в точке $3i$. Легко видеть, что это равносильно неравенству $-4<z^2<4$. Отсюда следует, что условие задачи задает два отрезка: один лежит на действительной оси между точками -2 и 2, другой — на мнимой оси между точками $-2i$ и $2i$.

5) Решая логарифмическое уравнение, получаем $|z^2-1|=|z^2+1|$. Следовательно, z^2 — любое чисто мнимое число. Но тогда $z=a(1\pm i)$, где a — любое действительное число, т. е. условие задачи задает две прямые: $y=x$ и $y=-x$.

3

3.1. 4) Положим в п. 2 $b=\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Тогда, воспользовавшись п. 1, получим

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{i=1}^{s}\left(a_i\sum_{k=1}^{n} b_k\right)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} a_i b_k.$$

3.9. 1, 2) Перемножая матрицы, получаем:

$$AE_{ik}=\underset{(k)}{\begin{bmatrix} 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2i} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0 \end{bmatrix}}; \quad E_{ik}A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}(i).$$

3) Сравнивая матрицы AE_{ik} и $E_{ik}A$, получаем: $a_{ji}=0$ при $j\neq i$, $a_{kl}=0$ при $l\neq k$ и $a_{ii}=a_{kk}$.

4) Из п. 3 следует, что если $AE_{ik}=E_{ik}A$ при любых i и k, то $a_{ii}=a_{kk}$ при любых i и k, а $a_{ki}=0$ при любых $i\neq k$, т. е. матрица A — скалярная.

5) Легко проверить, что если A — скалярная матрица, то она перестановочна с любой матрицей n-го порядка. С другой стороны, если A перестановочна с любой матрицей n-го порядка, то, согласно п. 4, она скалярна.

3.11. Пусть A — диагональная матрица, $a_{ii}\neq a_{kk}$ при $i\neq k$. Пусть $AB=BA$. Если $AB=(c_{ik})$, $BA=(d_{ik})$, то $c_{ik}=\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}=$ $=a_{ii}b_{ik}$, $d_{ik}=\sum\limits_{s=1}^{n} b_{is}a_{sk}=b_{ik}a_{kk}$ и $c_{ik}=d_{ik}\Leftrightarrow a_{ii}b_{ik}=b_{ik}a_{kk}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b_{ik}(a_{ii}-a_{kk})=0$. Если $i\neq k$, то $a_{ii}\neq a_{kk}$ и, следовательно, $b_{ik}=0$, т. е. B — диагональная матрица.

3.14. 3) Обозначим $AB=C$, $B'A'=D$. Надо доказать, что $C'=D$: $d_{ik}=\sum\limits_{s=1}^{n} b'_{is}a'_{sk}=\sum\limits_{s=1}^{n} a_{ks}b_{si}=c_{ki}=c'_{ik}$.

5) Пусть $AB=BA$. Согласно п. 3, $A'B'=(BA)'=(AB)'=$ $=B'A'$.

3.15. 2) Согласно задаче 3.14.3 и условию, $(AB)'=B'A'=$ $=BA$. Поэтому $(AB)'=AB \Leftrightarrow AB=BA$.

3.17. Матрица A^n имеет вид $A^n=\begin{bmatrix} a^n & x \\ 0 & c^n \end{bmatrix}$. Поэтому, если $A^n=E$, то $a=\pm 1$, $c=\pm 1$. Если $A=\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, то $A^n=\begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, следовательно, $b=0$, $A=E$. Аналогично при $A=\begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ получаем $A=-E$. Наконец, если $A=\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ или $A=\begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, то $A^2=E$.

3.18. 3) Пусть $AB=C=(c_{ik})$. Тогда $c_{ii}=\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{si}$ и $\operatorname{tr}(AB)=$ $=\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{si}$. Аналогично $\operatorname{tr}(BA)=\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{si}a_{is}$. Отсюда $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$.

4) Из пп. 1—3 следует, что $\operatorname{tr}(AB-BA)=\operatorname{tr}(AB)-\operatorname{tr}(BA)=$ $=0$, А $\operatorname{tr}E=n$.

3.19. 1) Согласно задаче 3.9.1, в матрице $C=AE_{ik}$ все элементы, стоящие на диагонали, кроме c_{kk}, равны нулю, а $c_{kk}=a_{ki}$. Следовательно, $\operatorname{tr}AE_{ik}=a_{ki}$.

2) Если $\operatorname{tr} AX=0$ для всех X, то $\operatorname{tr} AE_{ik}=0$ для всех E_{ik}. Из п. 1 следует, что все $a_{ik}=0$.

3.21. 1) Пусть A и B — стохастические матрицы и $AB=C$. Тогда $c_{ik}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}$ и $\sum_{i=1}^{n} c_{ik}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{is}\right)b_{sk}=$ $=\sum_{s=1}^{n} b_{sk}=1.$

3.22. Пусть

$$A^n=\begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ 0 & \frac{1}{3^n} & a_{23}(n) \\ 0 & 0 & \frac{1}{5^n} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A^{n+1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2}a_{12}(n)+\frac{1}{3^n} & \frac{1}{2}a_{13}(n)+a_{23}(n)+\frac{1}{5^n} \\ 0 & \frac{1}{3^{n+1}} & \frac{1}{3}a_{23}(n)+\frac{1}{5^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5^n} \end{bmatrix}$$

Отсюда получаем $a_{12}(n+1)=\frac{1}{2}a_{12}(n)+\frac{1}{3^n}$. Подробнее:

$$a_{12}(2)=\frac{1}{2}a_{12}(1)+\frac{1}{3};$$

$$a_{12}(3)=\frac{1}{2}a_{12}(2)+\frac{1}{3^2};$$

$$a_{12}(4)=\frac{1}{2}a_{12}(3)+\frac{1}{3^3};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{12}(n-1)=\frac{1}{2}a_{12}(n-2)+\frac{1}{3^{n-2}};$$

$$a_{12}(n)=\frac{1}{2}a_{12}(n-1)+\frac{1}{3^{n-1}};$$

$$a_{12}(n+1)=\frac{1}{2}a_{12}(n)+\frac{1}{3^n}.$$

Умножая k-ю строку на $\frac{1}{2^{n-k}}$ и складывая полученные в результате равенства, имеем $a_{12}(n+1)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{2^{n-2}}\,\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{3^{n-2}}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}.$

Теперь очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{12}(n)=0$. Так же доказывается, что $a_{23}(n+1)=\frac{5}{3^n}-\frac{3}{5^n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{23}(n)=0$. Наконец, $a_{13}(n+1)=$ $=\frac{1}{2}a_{13}(n)+a_{23}(n)+\frac{1}{5^n}=\frac{1}{2}a_{13}(n)+\frac{5}{3^{n-1}}-\frac{3}{5^{n-1}}+\frac{1}{5^n}=$ $=\frac{1}{2}a_{13}(n)+\frac{5}{3^{n-1}}-\frac{14}{5^{n-1}}$, и аналогично получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{13}(n)=0$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} A^n=O$.

3.23. $A^{n+1}=A^nA=\begin{bmatrix} 2a_{11}(n)+a_{21}(n) & 2a_{12}(n)+a_{22}(n) \\ a_{11}(n) & a_{12}(n)\end{bmatrix}$.

Отсюда $\frac{a_{12}(n+1)}{a_{22}(n+1)}=\frac{2a_{12}(n)+a_{22}(n)}{a_{12}(n)}=2+\frac{a_{22}(n)}{a_{12}(n)}$. Обозначим $x_n=\frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$, $n\geqslant 2$. Тогда $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$. Покажем, что последовательность $\{x_{2n}\}$ возрастающая, а последовательность $\{x_{2n+1}\}$ убывающая. Для $n=2$, т. е. для последовательности из двух элементов, это легко проверить. Пусть утверждение справедливо для некоторого n, т. е. $x_2<x_4<\ldots<x_{2n-2}<x_{2n}$ и $x_3>$ $>x_5>\ldots>x_{2n-1}>x_{2n+1}$. Тогда $x_{2n+2}=2+\frac{1}{x_{2n+1}}>2+$ $+\frac{1}{x_{2n-1}}=x_{2n}$ и $x_{2n+3}=2+\frac{1}{x_{2n+2}}<2+\frac{1}{x_{2n}}=x_{2n+1}$. Так как $x_{2n+1}>2$ при любом n, то убывающая последовательность $\{x_{2n+1}\}$ ограничена снизу, а потому имеет предел. $x_{2n}=2+$ $+\frac{1}{x_{2n-1}}<2+\frac{1}{2}$ при любом n. Значит, возрастающая последовательность $\{x_{2n}\}$ ограничена сверху и тоже имеет предел. При произвольном $k\geqslant 3$ имеем

$$x_{k+1}=2+\frac{1}{x_k}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{x_{k-1}}}.$$

Так как $k+1$ и $k-1$ одинаковой четности, то можно в этом равенстве перейти к пределу при $k\to\infty$. Обозначив $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1}=x$, получим

$$x=2+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}.$$

Отсюда $x^2-2x-1=0$ и $x=1+\sqrt{2}$. Поскольку для четного и нечетного k получается одно и то же соотношение, то обе последовательности имеют один и тот же предел.

3.39. 2) Если U — решение уравнения $AX=B$, то $AU=B\leftrightarrow$ $\leftrightarrow A^{-1}(AU)=A^{-1}B\leftrightarrow U=A^{-1}B$.

3.41. 2) Пусть δ_{ik} — элемент матрицы $A^{-1}A$. Тогда $\delta_{ik}=$

$=\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n} A_{si}a_{sk}$. Сумма элементов i-й строки произведения $A^{-1}A$, с одной стороны, равна единице, с другой стороны, равна $\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}A_{si}a_{sk}=\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}A_{si}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\right)=\frac{1}{d}\sum_{s=1}^{n}A_{si}$. Таким образом, $\sum_{s=1}^{n}\frac{A_{si}}{d}=1$.

3.42. $(E+A)^k=E+kA+\ldots+A^k=O\Rightarrow E=A(-kE-\ldots-A^{k-1})$, т. е. A — обратимая матрица (обратной ей служит матрица $-kE-\ldots-A^{k-1}$).

3.43. $E=ABC=AB\cdot C=C\cdot AB=CAB$, $E=ABC=CAB=CA\cdot B=B\cdot CA=BCA$. Остальные равенства неверны, когда $AB\neq BA$. Действительно, $BAC=E\wedge ABC=E\Rightarrow BAC=ABC\Leftrightarrow BA=AB$ и т. п.

3.48. Пусть $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. Тогда $A'=\begin{bmatrix} a & c\\ b & d\end{bmatrix}$, $A^{-1}=\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ и из $A^{-1}=A'$ получаем $d=a$ и $c=-b$. Значит, $A=\begin{bmatrix} a & -c\\ c & a\end{bmatrix}$, и так как $a^2+c^2=1$, то можно положить $a=\cos\varphi$, $c=\sin\varphi$.

3.52. Элемент матрицы U, стоящий в l-й строке и k-м столбце, имеет вид u_{l-1}^{k-1}. Соответственно элемент матрицы $\bar{U}'$ имеет вид $\bar{u}_{k-1}^{l-1}$. Полагая $U\bar{U}'=C$, имеем $c_{lk}=\sum_{s=1}^{n}u_{l-1}^{s-1}\bar{u}_{k-1}^{s-1}$. Если $l=k$, то $u_{l-1}\bar{u}_{k-1}=1$ и $c_{lk}=n$. Если же $l\neq k$, то $c_{lk}=\frac{(u_{l-1}\bar{u}_{k-1})^n-1}{u_{l-1}\bar{u}_{k-1}-1}=0$. Следовательно, $U\bar{U}'=nE$.

4

4.3. 4) $0\mathbf{a}+\mathbf{a}=0\mathbf{a}+1\mathbf{a}=(0+1)\mathbf{a}=1\mathbf{a}=\mathbf{a}$. Пусть $\mathbf{u}$ — решение уравнения $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Тогда $0\mathbf{a}+\mathbf{b}=0\mathbf{a}+(\mathbf{a}+\mathbf{u})=(0\mathbf{a}+\mathbf{a})+\mathbf{u}=\mathbf{a}+\mathbf{u}=\mathbf{b}$.

5) $(-1)\mathbf{a}+\mathbf{a}=(-1)\mathbf{a}+1\mathbf{a}=(-1+1)\mathbf{a}=0\mathbf{a}=\mathbf{o}$.

4.9. 1) Равенство $c_0f_0+c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0$ означает, что $c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3=0$ при любом x. Полагая $x=0$, получим $c_0=0$ и $c_1x+c_2x^2+c_3x^3=0$ при любом x. Значит, $c_1+c_2x+c_3x^2=0$ при любом $x\neq0$. А так как стоящая слева функция непрерывна, то она равна нулю и при $x=0$. Отсюда $c_1=0$, и т. д. Другое решение опирается на тот факт, что многочлен 3-й степени имеет не более трех корней.

2) Если $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, то $f(x)=a_0f_0(x)+a_1f_1(x)+$ $+a_2f_2(x)+a_3f_3(x)$.

4.10. Пусть $f=c_0f_0+c_1f_1+\ldots+c_sf_s=0$. Допустим, что не все $c_i=0$, а из не равных нулю коэффициентов c_p имеет наибольший номер. Тогда f — многочлен p-й степени, а следовательно, он имеет не более p корней. Противоречие.

4.12. 6) Существуют такие $c_0, c_1, \ldots, c_s$, не все равные нулю, что $c_0\mathbf{b}+c_1\mathbf{a}_1+\ldots+c_s\mathbf{a}_s=0$. Если бы $c_0=0$, то равенство $c_1\mathbf{a}_1+$ $+\ldots+c_s\mathbf{a}_s=0$ означало бы, что система $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ линейно-зависима. Поэтому $c_0=0$ и $\mathbf{b}=-\frac{c_1}{c_0}\mathbf{a}_1-\ldots-\frac{c_s}{c_0}\mathbf{a}_s$.

4.20. 1) Равенство $c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\ldots+c_k\mathbf{a}_k=\mathbf{b}$ равносильно системе равенств

$$\begin{gathered}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\ldots+a_{1k}c_k=b_1;\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\ldots+a_{2k}c_k=b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{l1}c_1+a_{l2}c_2+\ldots+a_{lk}c_k=b_l.\end{gathered}$$

2) Положим в п. 1 $\mathbf{b}=0$ и воспользуемся определением линейной зависимости.

3) Если $k>l$, то в однородной системе линейных уравнений из п. 2 число неизвестных больше числа уравнений. А в этом случае система имеет ненулевое решение.

4.27. 3) Максимальная линейно-независимая подсистема из (b) не может содержать более r векторов из (a) согласно п. 1. Значит, в ней либо r векторов, и тогда ранг системы (b) равен r, либо r векторов из (a) и вектор $\mathbf{b}$. Эти r векторов из (a) образуют, согласно п. 2, максимальную линейно-независимую подсистему (c) из (a). Тогда (a) линейно выражается через (c), а $\mathbf{b}$ — через (a). Значит, $\mathbf{b}$ линейно выражается через (c) и система, состоящая из $(r+1)$-го вектора, линейно-зависима.

4.34. 1) Так как система совместна, то ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы B и равен r. Следовательно, в матрице B есть r линейно-независимых строк (допустим, первые), а все остальные являются их линейной комбинацией. Это значит, что каждое из уравнений системы является линейной комбинацией первых r уравнений, и система с помощью элементарных преобразований может быть преобразована в эквивалентную, состоящую из этих r уравнений:

$$\begin{gathered}a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r+a_{1r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r+a_{rr+1}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}x_n=b_r.\end{gathered}$$

2) Если $r=n$, то в системе п. 1 число уравнений равно числу неизвестных, а определитель

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1r}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{rl} & \ldots & a_{rr}\end{vmatrix}\neq 0,$$

так как его строки линейно-независимы. Согласно правилу Крамера, система п. 1, а следовательно, и исходная имеют единственное решение.

3) Если $r<n$, то, придавая неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в системе п. 1 произвольные значения и решая полученную систему по правилу Крамера, мы каждый раз получаем решение системы п. 1, а следовательно, и исходной.

4.36. Пусть определитель системы равен нулю. Тогда ранг r матрицы системы A меньше n. Согласно задаче 4.35.2, система имеет ненулевое решение. Наоборот, если определитель системы не равен нулю, то, согласно правилу Крамера, она имеет единственное решение, а значит, только нулевое.

4.40. 1) Пусть система $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_s$ линейно-зависима. Тогда существуют такие $c_1, c_2, \ldots, c_s \in K$, не все равные нулю, что $c_1\mathrm{a}_1+c_2\mathrm{a}_2+\ldots+c_s\mathrm{a}_s=0$. Если φ — изоморфизм L на L', то $c_1\mathrm{a}_1' + c_2\mathrm{a}_2' + \ldots + c_s\mathrm{a}_s' = c_1\varphi\,\mathrm{a}_1 + c_2\varphi\,\mathrm{a}_2 + \ldots + c_s\varphi\,\mathrm{a}_s = \varphi(c_1\mathrm{a}_1 + c_2\mathrm{a}_2 + \ldots + c_s\mathrm{a}_s) = \varphi\,\mathrm{o} = \mathrm{o}'$, т. е. система $\mathrm{a}_1', \mathrm{a}_2', \ldots, \mathrm{a}_s'$ линейно-зависима. Обратное утверждение следует из задачи 4.37.1.

3) Пусть система $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_s$ — максимальная линейно-независимая. Согласно п. 2, система $\mathrm{a}_1', \mathrm{a}_2', \ldots, \mathrm{a}_s'$ линейно-независима. Если предположить, что она не максимальна, то существует такой вектор a_{s+1}', что система $\mathrm{a}_1', \mathrm{a}_2', \ldots, \mathrm{a}_s'', \mathrm{a}_{s+1}'$ линейно-независима. Согласно п. 2, линейно-независима и система $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_s, \mathrm{a}_{s+1}$. Противоречие.

4.45. 3) В системе, состоящей из $n+1$ ненулевых многочленов с попарно-различными степенями, есть многочлены степени $0, 1, \ldots, n$. Обозначим их соответственно $f_0, f_1, \ldots, f_n$, так что $f_k(x)=a_{0k}+a_{1k}x+\ldots+a_{kk}x^k$, где $a_{kk}\neq 0$. При изоморфизме T_n на K^{n+1} (см. задачу 4.39) системе $f_0, f_1, \ldots, f_n$ отвечает система $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}_0 &= (a_{00},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0); \\ \mathrm{a}_1 &= (a_{01},\ a_{11},\ 0,\ \ldots,\ 0); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{a}_n &= (a_{0n},\ a_{1n},\ a_{2n},\ \ldots,\ a_{nn}). \end{aligned}$$

Так как все $a_{kk}\neq 0$, легко видеть, что ранг этой системы векторов равен $n+1$, т. е. она линейно-независима.

4.46. 1) Если $\mathrm{a} = a_1\mathrm{e}_1 + a_2\mathrm{e}_2 + \ldots + a_n\mathrm{e}_n$ и $\mathrm{a} = a_1'\mathrm{e}_1' + a_2'\mathrm{e}_2' + \ldots + a_n'\mathrm{e}_n'$, то, вычитая, получаем $\mathrm{o} = (a_1 - a_1')\mathrm{e}_1 + (a_2 - a_2')\mathrm{e}_2 + \ldots + (a_n - a_n')\mathrm{e}_n$. Отсюда в силу линейной независимости системы (e) следует, что каждое $a_i' = a_i$.

4) Согласно п. 1, отображение φ взаимно-однозначно, а согласно пп. 1, 2, удовлетворяет остальным условиям изоморфизма.

4.51. Обозначим символом E_{ik} матрицу из $M_n(K)$, у которой на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит единица, а все остальные элементы — нули. Так как

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik}E_{ik}=\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

то ясно, что система матриц $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn}$ является базисом в пространстве $M_n(K)$.

4.52. Обозначим символом f_i следующую функцию: $f_i(i)=1$, $f_i(k)=0$ $(k\neq i)$. Система функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно-независима. Действительно, $f=c_1f_1+c_2f_2+\dots+c_nf_n=0$ означает, что $f(i)=0$ при любом i. Но $f(i)=c_if_i(i)=c_i$. Значит, $c_i=0$. Пусть теперь g — произвольная функция. Обозначим $g(i)=a_i$. Тогда $g=af_1+a_2f_2+\dots+a_nf_n$.

4.56. Согласно условиям, на M определено сложение и умножение вектора на число. Так как $M\neq\varnothing$, то существует элемент $\mathbf{a}\in M$. По условию 3 $0\mathbf{a}\in M$. Но, согласно задаче 4.3.4, $0\mathbf{a}=\mathbf{o}$. Аналогично по условию 3 и п. 5 задачи 4.3 $\mathbf{a}\in M\Rightarrow -\mathbf{a}=(-1)\mathbf{a}\in M$. Выполнение остальных аксиом линейного пространства проверяется тривиально.

4.57. 2) Базисом этого подпространства является система векторов $\mathbf{e}_1=(1, -1, 0, \dots, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, -1, \dots, 0, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_{n-1}=(0, 0, 0, \dots, 1, -1)$. То, что они принадлежат B, очевидно, а в их линейной независимости убеждаемся обычным образом. Теперь следует показать, что любой вектор из B можно представить как линейную комбинацию векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$, т. е. доказать, что если $a_1+a_2+\dots+a_n=0$, то найдутся такие $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, что $c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+\dots+c_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Это равносильно совместности системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
c_1 \qquad\qquad\qquad &= a_1;\\
-c_1+c_2 \qquad\qquad &= a_2;\\
-c_2+c_3 \qquad &= a_3;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\\
-c_{n-2}+c_{n-1} &= a_{n-1};\\
c_{n-1} &= a_n
\end{aligned}$$

при условии $a_1+a_2+\dots+a_n=0$ (см. задачу 4.33.1).

4.59. 2) Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ (b) — максимальная линейно-независимая подсистема системы (a). Каждый вектор из $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ линейно выражается через систему (a), а система (a) линейно выражается через систему (b), значит, каждый вектор из $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$ есть линейная комбинация векторов системы (b). Т. е. система (b) — базис пространства $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$. Поэтому r, с одной стороны, ранг системы (a), а с другой — размерность $\mathbf{L}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s)$.

4.63. 2) Доказывается, как задача 4.34.1.

3) Покажем, что φ — это отображение «на». Пусть $(d_{r+1}, \dots,$

d_n) — произвольный вектор из K^{n-r}. Подставим в систему из п. 2 вместо неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ значения $d_{r+1}, \ldots, d_n$. Тогда получим систему

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}d_{r+1} - \ldots - a_{1n}d_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}d_{r+1} - \ldots - a_{rn}d_n,$$

которая, согласно правилу Крамера, имеет единственное решение $(d_1, \ldots, d_r)$. Значит, $(d_1, \ldots, d_r, d_{r+1}, \ldots, d_n)$ — это решение системы из п. 2, а $\varphi(d_1, \ldots, d_r, d_{r+1}, \ldots, d_n) = (d_{r+1}, \ldots, d_n)$. В силу единственности отображение φ взаимно-однозначно. Проверка остальных условий изоморфизма тривиальна.

4.67. 3) $\mathbf{a}+M$ — подпространство $\Rightarrow \mathbf{o} \in \mathbf{a}+M \Leftrightarrow -\mathbf{a} \in M \Leftrightarrow \mathbf{a} \in M \Leftrightarrow \mathbf{a}+M = M \Rightarrow \mathbf{a}+M$ — подпространство.

4.68. $\mathbf{a}'+M' = \mathbf{a}+M \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{a}'+\mathbf{o}' \in \mathbf{a}'+M' = \mathbf{a}+M \Rightarrow \mathbf{a}'-\mathbf{a} \in M \Rightarrow (\mathbf{a}'-\mathbf{a})+M = M \Rightarrow \mathbf{a}'+M = \mathbf{a}+M = \mathbf{a}'+M' \Rightarrow M = M'$.

4.74. 1) Включение $M_1 + (M_2 \cap M_3) \subseteq (M_1 + M_2) \cap (M_1 + M_3)$ очевидно. Если $\mathbf{x} \in (M_1+M_2) \cap (M_1+M_3) = M_2 \cap (M_1+M_3)$, то $\mathbf{x} \in M_2$ и $\mathbf{x} = \mathbf{m}_1+\mathbf{m}_3$, где $\mathbf{m}_1 \in M_1$ и $\mathbf{m}_3 \in M_3$. Тогда $\mathbf{m}_3 = \mathbf{x}-\mathbf{m}_1 \in M_2 \Rightarrow \mathbf{m}_3 \in M_2 \cap M_3$ и $\mathbf{x} = \mathbf{m}_1+\mathbf{m}_3 \in M_1 + (M_2 \cap M_3)$.

4.77. Пусть $\mathbf{m}_3 \in M_3$. Имеем $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2$, где $\mathbf{m}_1 \in M_1$, $\mathbf{m}_2 \in M_2$. Тогда $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_3 - \mathbf{m}_2 \in M_3 \Rightarrow \mathbf{m}_1 \in M_1 \cap M_3$ и $\mathbf{m}_3 \in (M_1 \cap M_3)+M_2$. Включение $M_3 \supseteq (M_1 \cap M_3)+M_2$ очевидно.

4.82. Если $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$, то $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |(k\mathbf{b}, \mathbf{b})| = |k|\,|\mathbf{b}|^2 = |k\mathbf{b}|\,|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$. Наоборот, если $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, то $\left(\mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}, \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}\right) = |\mathbf{a}|^2 - 2\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^4}|\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\frac{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|^2} + \frac{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|^4} = 0$. Но скалярное произведение вектора на себя равно нулю тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой. Следовательно, $\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$.

4.87. 5) Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ — система ненулевых попарно-ортогональных векторов и $c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\ldots+c_s\mathbf{a}_s = \mathbf{o}$. Умножив скалярно на $\mathbf{a}_i$, получим $c_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) = 0$. Поскольку $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{o}$, то $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i) > 0$ и $c_i = 0$.

4.88. 1) Если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ и $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

2) Если $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$, то из $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2$ следует $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, т. е. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

3) Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, получаем $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$. Аналогично доказывается, что $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}+\mathbf{b}|$.

4.95. 2) Если $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_s, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_t$ — не базис, то его можно дополнить до базиса. Значит, существует такой ненулевой вектор $\mathbf{g}$, который ортогонален каждому из этих векторов, в частности системе (e). Поэтому $\mathbf{g} \in M^\perp$, а так как он ортогонален системе (f), то $\mathbf{g} = \mathbf{o}$. Противоречие.

4.96. 3) $\mathbf{x} \in (M+N)^\perp \Leftrightarrow (\forall \mathbf{m} \in M,\ \mathbf{n} \in N)\, \mathbf{x} \perp \mathbf{m} + \mathbf{n} \Leftrightarrow (\forall \mathbf{m} \in M)\, \mathbf{x} \perp \mathbf{m} \wedge (\forall \mathbf{n} \in N)\, \mathbf{x} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in M^\perp \wedge \mathbf{x} \in N^\perp \Leftrightarrow \mathbf{x} \in M^\perp \cap N^\perp$.

5

5.10. Пусть $\mathbf{a} \in L$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$. Так как $A\mathbf{a} \in L$ и L одномерно, то $A\mathbf{a} = k\mathbf{a}$ при каком-то $k \in K$. Пусть теперь $\mathbf{x} \in L$. Тогда существует такое l, что $\mathbf{x} = l\mathbf{a}$ и $A\mathbf{x} = A(l\mathbf{a}) = lA\mathbf{a} = l(k\mathbf{a}) = k(l\mathbf{a}) = k\mathbf{x}$.

5.12. 2) Воспользовавшись задачей 5.8.1, получим: $B\mathbf{x} = B\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i B\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{f}_i = A\mathbf{x}$.

5.15. $G(L)$ является подмножеством группы всех обратимых преобразований L. Ясно, что $G(L)$ — полугруппа с единицей, и нужно доказать истинность импликации $A \in G(L) \Rightarrow A^{-1} \in G(L)$. Пусть $y_1, y_2 \in L$. Так как A — отображение L на L, то существуют такие $x_1, x_2 \in L$, что $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ (x_1 и x_2 определяются однозначно). Поэтому при любых $k_1, k_2 \in K$ имеем $A^{-1}(k_1y_1 + k_2y_2) = A^{-1}(k_1Ax_1 + k_2Ax_2) = k_1x_1 + k_2x_2 = k_1A^{-1}y_1 + k_2A^{-1}y_2$.

5.17. 1) Операторы AB и BA обратимы. Это означает, что существуют такие X и Y, что $(AB)X = X(AB) = E$ и $(BA)Y = Y(BA) = E$. Тогда $(BX)A = (BXA)(BAY) = B(XAB)AY = BAY = E$. Так как $A(BX) = E$, то A обратим и $A^{-1} = BX$. Аналогично B обратим и $B^{-1} = XA$.

2) Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в пространстве L. Тогда, согласно задаче 5.16, система $(AB)\mathbf{e}_1, (AB)\mathbf{e}_2, \ldots, (AB)\mathbf{e}_n$ линейно-независима. На основании п. 2 задачи 5.11 линейно-независима система $B\mathbf{e}_1, B\mathbf{e}_2, \ldots, B\mathbf{e}_n$. Значит, эта система является базисом в L, и, согласно задаче 5.12, существует такой линейный оператор C, что $C(B\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i$ при любом i. Но тогда $(CB)\mathbf{x} = \mathbf{x}$ при любом $\mathbf{x} \in L$, т. е. $CB = E$. С другой стороны, $(BC)(B\mathbf{e}_i) = B\mathbf{e}_i$ при любом i. А так как $B\mathbf{e}_1, B\mathbf{e}_2, B\mathbf{e}_n$ — базис в L, то $(BC)\mathbf{x} = \mathbf{x}$ при любом $\mathbf{x} \in L$, т. е. $BC = E$. Таким образом, B — обратимый оператор. Но тогда $A = (AB)B^{-1}$ — также обратимый оператор.

5.28. 1) Пусть $A_{(e)} = (a_i^j)$, $B_{(e)} = (b_i^j)$, т. е. $A\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j \mathbf{e}_i$, $B\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_i^j \mathbf{e}_i$. Тогда $(A+B)\mathbf{e}_j = A\mathbf{e}_j + B\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^j \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i^j + b_i^j)\mathbf{e}_i$, т. е. $(A+B)_{(e)} = [a_i^j + b_i^j] = A_{(e)} + B_{(e)}$.

2) $(AB)\mathbf{e}_j = A(B\mathbf{e}_j) = A\sum_{i=1}^{n} b_i^j \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i^j A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i^j \sum_{s=1}^{n} a_s^i \mathbf{e}_s =$ $= \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_s^i b_i^j\right)\mathbf{e}_s$. Это означает, что элемент матрицы $(AB)_{(e)}$, стоящий в s-й строке и j-м столбце, равен $\sum_{i=1}^{n} a_s^i b_i^j$, т. е. $(AB)_{(e)} = A_{(e)} B_{(e)}$.

5.29. 3) $\mathbf{f}_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k \mathbf{e}_i$, $\mathbf{g}_l = \sum_{k=1}^{n} b_k^l \mathbf{f}_k$. Отсюда $\mathbf{g}_l = \sum_{k=1}^{n} b_k^l \sum_{i=1}^{n} a_i^k \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_i^k b_k^l\right)\mathbf{e}_i$. Это означает, что элемент матрицы перехода, стоящий в i-й строке и l-м столбце, равен $\sum_{k=1}^{n} a_i^k b_k^l$. А это элемент, стоящий в i-й строке и l-м столбце матрицы AB.

5.36. 1) $\rightarrow$ 2) Пусть A — обратимый оператор. Тогда существует оператор A^{-1} и $AA^{-1}=E$. В пространстве L зафиксируем произвольный базис (e). Вследствие изоморфизма алгебры линейных операторов и матричной алгебры $A_{(\mathbf{e})} A_{(\mathbf{e})}^{-1} = E$. Значит, матрица оператора A в базисе (e) невырожденная.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть матрица $A_{(\mathbf{e})}$ оператора A в базисе (e) невырождена. Тогда она имеет обратную матрицу $A_{(\mathbf{e})}^{-1}$, которая является матрицей некоторого оператора B в базисе (e). А так как $A_{(\mathbf{e})} A_{(\mathbf{e})}^{-1} = A_{(\mathbf{e})}^{-1} A_{(\mathbf{e})} = E$, то вследствие изоморфизма алгебры линейных операторов и матричной алгебры $AB = BA = E$, т. е. A — обратимый оператор.

5.37. 5) Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$. Тогда $A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{k} a_k^i \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_k^i x_i\right)\mathbf{e}_k$. Следовательно, $\mathbf{x}\in\ker A \Leftrightarrow A\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_k^i x_i = 0$ при любом $k = 1, 2, \ldots, n$.

5.45. 11) Если пространство L нуль-мерно, то нечего доказывать. Если оно одномерно, то сошлемся на задачу 5.10. Пусть теперь в L есть система, состоящая более чем из двух линейно-независимых векторов. Для $\mathbf{x}\in L$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$ имеем $A\mathbf{x}=k\mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{y}\in L$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{o}$ и система $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ линейно-независима. Тогда $A\mathbf{y}=l\mathbf{y}$, $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = m(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. Следовательно, $m\mathbf{x}+m\mathbf{y}=k\mathbf{x}+l\mathbf{y}$, и из линейной независимости системы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ следует $m=l=k$.

5.46. Пусть подпространство M инвариантно относительно A.

Если $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ — линейно-независимая система векторов, то $Aa_1, Aa_2, \ldots, Aa_k \in M$ — также линейно-независимая система векторов (см. задачу 5.16). Поэтому $\dim AM = \dim M$, а значит, $AM = M$. Отсюда следует $A^{-1}M = M$.

5.47. 1) Утверждение истинно при $s=1$. Допустим, что оно истинно для всякой системы из $s-1$ собственных векторов оператора A. Пусть $c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\ldots+c_s\mathbf{x}_s=\mathbf{o}$. Применяя оператор A и учитывая, что $A\mathbf{x}_i=k_i\mathbf{x}_i$, получаем $c_1k_1\mathbf{x}_1+c_2k_2\mathbf{x}_2+\ldots+c_sk_s\mathbf{x}_s=$ $=\mathbf{o}$. Умножим первое равенство на -1 и сложим со вторым: $c_2(k_2-k_1)\mathbf{x}_2+\ldots+c_s(k_s-k_1)\mathbf{x}_s=\mathbf{o}$. Так как система $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s$, состоящая из $s-1$ собственных векторов, по индуктивному предположению линейно-независима, то $c_i(k_i-k_1)=0$ при любом $i=2, \ldots, s$. А поскольку $k_i-k_1\neq 0$, то $c_i=0$. Значит, и $c_1\mathbf{x}_1=\mathbf{o}$, т. е. $c_1=0$. Итак, все $c_i=0$.

5.49. Пусть A обратим. Если $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора A и $A\mathbf{x}=k\mathbf{x}$, то $\mathbf{x}=A^{-1}A\mathbf{x}=kA^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow k\neq 0$. Наоборот, пусть А необратим. Согласно задаче 5.24, существует ненулевой вектор $\mathbf{x}\in\ker A$. Тогда $\mathbf{x}$ — это собственный вектор с собственным значением 0 (см. задачу 5.48).

5.51. Пусть $B=T^{-1}AT$. Тогда $|B-kE|=|T^{-1}AT-T^{-1}(kE)T|=$ $=|T^{-1}(A-kE)T|=|T|^{-1}|A-kE||T|=|A-kE|$.

6

6.2. 2) Если ранг матрицы системы неравенств меньше n, то система однородных уравнений

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{array}$$

имеет бесконечно много решений, а каждое решение этой системы является решением системы неравенств. Если ранг матрицы системы неравенств равен n, то решение каждой системы

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{array}$$

где все $b_i\leqslant 0$ (а такое решение, согласно правилу Крамера, существует), является решением системы неравенств.

6.5. Это система неравенств

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\leqslant 0;\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\geqslant 0.$$

6.6. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — решение системы

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=0,\ i=1, 2, \ldots, s.$$

Тогда $-c_1, -c_2, \ldots, -c_n$ — также решение этой системы.

Значит, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и $-c_1, -c_2, \ldots, -c_n$ — решения системы неравенств

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\leqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, s,$$

а потому — и решения следствия этой системы, т. е. неравенства

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\leqslant 0.$$

Это значит, что

$$a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n\leqslant 0;$$
$$-a_1c_1-a_2c_2-\ldots-a_nc_n\leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n=0$.

6.7. 1) Рассмотрим произвольное линейное неравенство

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nc_n\leqslant b.$$

Если $a_1>0$, то, разделив это неравенство на a_1, получим неравенство вида «а». Если $a_1<0$, то точно так же получим неравенство вида «б». А если $a_1=0$, то наше неравенство есть неравенство вида «в».

6.8. 1) Согласно условию, подставляя в систему 6.7.2 вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно $u_1, u_2, \ldots, u_n$, получаем числовые неравенства трех видов:

$$u_1+f_i(u_2, \ldots, u_n)\leqslant c_i,\ i=1, \ldots, r;$$
$$-u_1+g_j(u_2, \ldots, u_n)\leqslant d_j,\ j=1, \ldots, p;$$
$$h_k(u_2, \ldots, u_n)\leqslant e_k,\ k=1, \ldots, q.$$

Складывая неравенства вида «а» и «б», получаем:

$$f_i(u_2, \ldots, u_n)+g_j(u_2, \ldots, u_n)\leqslant c_i+d_j,\ i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, p;$$
$$h_k(u_2, \ldots, u_n)\leqslant e_k,\ k=1, \ldots, q,$$

т. е. $u_2, \ldots, u_k$ — решения системы п. 1.

2) Согласно условию, подставляя в систему п. 1 вместо $x_2, \ldots, x_n$ соответственно $v_2, \ldots, v_n$, после незначительных преобразований получаем верные числовые неравенства

$$g_j(v_2, \ldots, v_n)-d_j\leqslant -f_i(v_2, \ldots, v_n)+c_i.$$

Поэтому существует такое v_1, что

$$\max_j \{g_j(v_2, \ldots, v_n)-d_j\}\leqslant v_1\leqslant \min_i \{-f_i(v_2, \ldots, v_n)+c_i\},$$
$$i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, p.$$

Значит,

$$v_1\leqslant -f_i(v_2, \ldots, v_n)+c_i,\quad i=1, \ldots, r;$$
$$v_1\geqslant g_j(v_2, \ldots, v_n)+d_j,\quad j=1, \ldots, p;$$
$$h_k(v_2, \ldots, v_n)\leqslant e_k,\quad k=1, \ldots, q.$$

Это равносильно тому, что $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — решение системы 6.7.2.

6.12. 1) Возможны следующие три случая: в системе 6.7.2 есть неравенства вида «а» и «б» или неравенства вида «в»; в системе 6.7.2 есть неравенства только вида «а»; в системе 6.7.2 есть неравенства только вида «б». Из задач 6.9 и 6.10 следует, что во втором и третьем случаях система совместна.

2) Утверждение следует непосредственно из результатов задачи 6.8.

3) Надо применить несколько раз п. 2.

4) Неотрицательная линейная комбинация системы линейных неравенств имеет вид

$$\sum_{m=1}^{s} k_m l_m(x) \leqslant \sum_{m=1}^{s} k_m b_m,$$

где все $k_m \geqslant 0$. Согласно п. 3, можно подобрать k_m так, чтобы $\sum_{m=1}^{s} k_m l_m(x) = 0$ и $\sum_{m=1}^{s} k_m b_m = b$, где $b < 0$ (неравенство $0 \leqslant b$ ложное!).

6.13. 1) Пусть $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — решение системы

$$l_i(x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Тогда u — решение неравенства $l(x) \leqslant 0$, т. е. $l(u) \leqslant 0$. Следовательно, $-l(u) \geqslant 0 > -1$. Значит, u не может быть решением п. 1.

2) К системе п. 1 достаточно применить результат задачи 6.12.4.

3) Так как $-k_0 < 0$, то $k_0 > 0$. Поэтому равенство из п. 2 можно разделить на k_0. Тогда имеем $l(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{k_i}{k_0} l_i(x)$.

7

7.16. Пусть искомое число $a = 10^2x + 10y + z$. Тогда $a = 99x + 11y + x - y + z \,\vdots\, 11 \Rightarrow x - y + z \,\vdots\, 11$. Так как $-9 \leqslant x - y + z \leqslant 18$, то $x - y + z = 0$ или $x - y + z = 11$.

Первый случай:

$$100x + 10y + z = 11(x^2 + y^2 + z^2);$$
$$x - y + z = 0.$$

Упрощая, получаем:

$$9x + y = x^2 + y^2 + z^2;$$
$$y = x + z.$$

Отсюда $10x+z=2x^2+2z^2+2xz$. Значит, z — четное. Положим $z=2u$. Тогда $x^2-(5-2u)x+(4x^2-u)=0$. Так как $x\in\mathbf{R}$, то $(5-2u)^2-4(4u^2-u)=25-16u-12u^2\geqslant 0$, откуда $\frac{-4-\sqrt{91}}{6}\leqslant u\leqslant\frac{-4+\sqrt{91}}{6}$. Поскольку u — целое неотрицательное, то $u=0$. Тогда $z=0$, $x=y=5$. Аналогично во втором случае.

7.17. Пусть $(a^2+ab+b^2)\,\vdots\,(a+b)$, тогда $a^2\,\vdots\,(a+b)$ и $b^2\,\vdots\,(a+b)$. Значит, существуют такие k и l, что $a^2=k(a+b)$ и $b^2=l(a+b)$. Отсюда $a-b=k-l$ и $\frac{a^2}{b^2}=\frac{k}{l}$. Рассматривая эти равенства как систему уравнений относительно a и b и решая эту систему, получаем: $a=k\pm\sqrt{kl}$, $b=l\pm\sqrt{kl}$, где $\sqrt{kl}\in\mathbf{Z}$. Наоборот, если выполняются эти условия, то $(a^2+ab+b^2)\,\vdots\,(a+b)$.

7.23. Пусть $a=bs+r$, $0\leqslant r<b$. Так как $a>b>0$, то $s\geqslant 1$ и $\frac{a}{2}-r=\frac{a}{2}-a+bs=\frac{-a+2bs}{2}=\frac{bs-r}{2}>\frac{b-r}{2}>0$.

7.26. Пусть $a=7s+r$, $0\leqslant r<7$. Тогда a^5 и r^5 при делении на 7 дают одинаковые остатки. Непосредственной проверкой убеждаемся, что из чисел 0^5, 1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5 только 3^5 при делении на 7 дает остаток 5. Значит, $r=3$.

7.33. 3) Пусть $\overline{a\,\vdots\,5}$ и $\overline{b\,\vdots\,5}$. Легко видеть, что остаток при делении a^2 на 5 и b^2 на 5 может быть равен 1 или 4. А остаток при делении a^2+b^2 на 5 может быть равен 0, 2, 3. Но $a^2+b^2=c^2$, а остаток при делении c^2 на 5 может быть равен 0, 1 или 4. Значит, он равен нулю, т. е. $c\,\vdots\,5$.

7.34. 4) Остаток при делении на 7 квадрата натурального числа может быть равен одному из четырех чисел: 0, 1, 2, 4. Поэтому из пяти чисел всегда можно выбрать два таких, квадраты которых при делении на 7 дают одинаковые остатки.

7.38. Разобьем множество целых чисел на четыре класса $\{4k\}$, $\{4k+1\}$, $\{4k+2\}$, $\{4k+3\}$. Если среди чисел, a, b, c, d есть два таких, которые принадлежат одному и тому же классу, то их разность, а значит, и число P, делится на 4. Если же никакие два из чисел a, b, c, d не принадлежат одному и тому же классу, то среди них есть 2 четных и 2 нечетных. Разность как двух четных, так и двух нечетных делится на 2, а потому число P делится на 4.

Среди любых четырех целых чисел a, b, c, d всегда найдутся два таких, которые при делении на 3 дают одинаковые остатки. Их разность, а значит и число P, делится на 3.

7.39. 1) Так как $(a^{3k}-1)\,\vdots\,(a^3-1)$ и $(a^3-1)\,\vdots\,(a^2+a+1)$, то $(a^{3k}-1)\,\vdots\,(a^2+a+1)$. Рассмотрим три возможных случая. Пусть $n=3k$. Тогда $a^{6k}+a^{3k}+1=[a^{3k}(a^{3k}-1)+2(a^{3k}-1)+3]\,\vdots\,(a^2+a+1)\Leftrightarrow 3\,\vdots\,(a^2+a+1)$. А 3 не делится на a^2+a+1 при любом целом a. Пусть теперь $n=3k+1$; $a^{6k+2}+a^{3k+1}+1=[a^{3k+2}(a^{3k}-1)+a^2(a^{3k}-1)+a(a^{3k}-1)+(a^2+a+1)]\,\vdots\,(a^2+a+1)$. При $n=3k+2$ доказательство проводится аналогично.

2) $[a^2-(-a-1)] \vdots (a^2+a+1)$, поэтому a^2 и $-a-1$ при делении на a^2+a+1 дают одинаковые остатки. То же верно и для a^{2n} и $(-a-1)^n$. Теперь рассмотрим два случая. Пусть n — четное. Тогда $[(a+1)^n-a^n-1] \vdots (a^2+a+1) \Leftrightarrow (a^{2n}-a^n-1) \vdots (a^2+a+1)$. Тем же методом, что и в п. 1, убеждаемся, что $a^{2n}-a^n-1$ не делится на a^2+a+1. Пусть теперь n — нечетное. Тогда $[(a+1)^n-a^n-1] \vdots (a^2+a+1) \Leftrightarrow (-a^{2n}-a^n-1) \vdots (a^2+a+1)$. Согласно п. 1, n не делится на 3. Итак, $n=6k \pm 1$.

7.40. 1) Пусть $n=5k+r$, $0 \leqslant r < 5$. Тогда легко показать, что $a_n \vdots 5 \Leftrightarrow [3(r^2+r)+7] \vdots 5$. Отсюда $r=2$ и $n=5k+2$.

2) $a_n=3n(n+1)+7$. Первое слагаемое четное, второе нечетное, a_n нечетно. Если a_n — куб, то куб нечетного числа $2k+1$. Значит, $3n(n+1)+7=8k^3+1+6k(2k+1)$ и $3n(n+1)+6=8k^3+6k(2k+1)$. Следовательно, $k=3u$, и после подстановки и сокращения $n(n+1)+2=72u^3+6u(6u+1)$. А это невозможно, так как число, стоящее справа, делится на 3, а слева — нет.

7.47. НОД $(aa', ab', a'b, bb')=$ НОД (НОД (aa', ab'), НОД $(a'b, bb')) =$ НОД $(a$ НОД $(a'b'), b,$ НОД $(a', b')) =$ НОД $(ad', bd') = d'$ НОД $(a, b) = dd'$.

7.53. Надо доказать, что $n=(a^3-1)a^3(a^3+1) \vdots 504$.

Покажем, что $n \vdots 7$. Пусть $a=7k+r$, $0 \leqslant r < 7$. Тогда $a^3 = 7^3k^3+3 \cdot 7^2k^2r+3 \cdot 7kr^2+r^3$. Значит, число a^3 при делении на 7 дает такой же остаток, что и r^3. Но r^3 — одно из чисел 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216. Поэтому остаток при делении числа a^3 на 7 равен одному из чисел 0, 1, 6. Отсюда следует, что одно из чисел a^3, a^3-1, a^3+1 делится на 7.

Для доказательства делимости числа n на 8 достаточно заметить, что если a четно, то $a^3 \vdots 8$. Если же a нечетно, то a^3-1 и a^3+1 — два последовательных четных числа, поэтому одно из них делится на 4, а произведение — на 8.

Покажем, что $n \vdots 9$. Пусть $a=3l+s$, $0 \leqslant s < 3$. Тогда $a^3 = 3^3l^3+3^3l^2s+3^2ls^2+s^3$, откуда видно, что a^3 при делении на 9 дает такой же остаток, как и s^3, т. е. 0, 1 или 8. Значит, одно из чисел a^2, a^3-1, a^3+1 делится на 9.

7.54. Индукцией по n. При $n=0$ утверждение тривиально. При $n=1$ имеем $a^5-a=a(a-1)(a+1)(a^2+1)$. Произведение первых трех сомножителей делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Если $a=5s+r$, то легко убеждаемся, что при любом $r=0$, 1, 2, 3, 4 произведение делится на 5. Пусть $(a^{4n+1}-a) \vdots 30$. Тогда $a^{4(n+1)+1}-a=a^{4n}(a^5-a)+(a^{4n+1}-a)$, и каждое слагаемое делится на 30.

7.59. $a=(2903^n-464^n)-(803^n-261^n)$, и каждая разность в скобках делится на 271. С другой стороны, $a=(2903^n-803^n)-(464^n-261^n)$, и каждая разность в скобках делится на 7. Наконец, НОД $(7,271)=1 \Rightarrow a \vdots (7 \cdot 271)$.

7.61. 1) Из обеих частей равенства ЛИК·ЛИК=БУБЛИК вычтем ЛИК. Получим ЛИК·(ЛИК−1)=БУБ×1000. Числа

ЛИК—1 и ЛИК взаимно-просты, а так как их произведение делится на $1000=5^3\cdot2^3$, то одно из них делится на 5^3, но не делится на 2, а другое делится на 2^3, но не делится на 5. Среди нечетных трехзначных чисел делятся на 125 только 125, 375, 625, 875. Среди соседних с ними чисел делятся на 8 только 376 и 624. Проверка показывает, что первое из этих чисел годится, а второе — нет.

7.62. Пусть $d=\text{НОД}(a, b)>0$, $a=a_1d$, $b=b_1d$. Тогда $ka \vdots b \Leftrightarrow \Leftrightarrow ka_1 \vdots b_1 \Leftrightarrow k \vdots b_1 \Leftrightarrow k \vdots \frac{b}{d}$. Среди чисел $k=1, 2, \ldots, b$ на $\frac{b}{d}$ делятся $\frac{b}{d}, 2\frac{b}{d}, \ldots, d\frac{b}{d}$, т. е. d чисел.

7.63. 1) Пусть $\text{НОД}(a, b)=d$, а u и v такие, что $d=ua+vb$. Если $c=ds$, то $a(us)-b(-vs)=c$, т. е. уравнение $ax-by=c$ имеет решение. Обратное утверждение очевидно.

2) Согласно п. 1, уравнение $ax-by=c$ имеет по крайней мере одно решение: x_0, y_0. Легко проверить, что x_0+bt, y_0+at — также решение этого уравнения. Пусть теперь x_1, y_1 — какое-то решение. Тогда $ax_0-by_0=c$ и $ax_1-by_1=c$, откуда $a(x_1-x_0)= = b(y_1-y_0)$. Так как a и b взаимно-просты, то $(x_1-x_0) \vdots b$, т. е. $x-x_0=bt$ и $x=x_0+bt$. Отсюда $abt=b(y-y_0)$, $y-y_0=at$ и $y=y_0+at$.

7.65. Нужно найти неотрицательные решения уравнения $16x+13y=300$. Перепишем его в виде $16x-(-13)y=300$ и найдем общее решение (см. задачу 7.63): $x=-1200-13t$, $y=1500+ + 16t$. Из условия $x\geqslant0$, $y\geqslant0$ получаем $-\frac{1500}{16}\leqslant t\leqslant-\frac{1200}{13}$, т. е. $-93\frac{3}{4}\leqslant t\leqslant-92\frac{4}{13}$. Отсюда $t=-93$, $x=9$, $y=12$.

7.66. Пусть $x\neq1$—целое число. Если $(a+1) \vdots x$, то a и x взаимно-просты. Поэтому $(a+1) \vdots x \wedge (a^{2k}+1) \vdots x \Rightarrow (a^{2k}+1)-(a+1) = = a(a^{2k-1}-1) \vdots x \Rightarrow (a^{2k-1}-1) \vdots x \Rightarrow (a^{2k-1}-1)+(a+1)=a(a^{2k-2}+ + 1) \vdots x \Rightarrow (a^{2k-2}+1) \vdots x$. Отсюда, во-первых, при $k=1$ имеем $(a+1) \vdots x \wedge (a^2+1) \vdots x \Rightarrow 2 \vdots x \Rightarrow x=2$, а это невозможно, так как $a+1$ — число нечетное. Значит, $a+1$ и a^2+1 взаимно-просты. Во-вторых, если утверждение справедливо для числа $k-1$, то оно справедливо и для числа k.

7.67. 2) Рассмотрим множество всех пар натуральных чисел (m, n) с НОД, равным d. Будем доказывать теорему индукцией по большему из этих чисел. Если оно равно d, то НОД $(2^n- -1, 2^m-1)=$ НОД $(2^d-1, 2^d-1)=2^d-1$. Пусть теперь $m<n$ и для всех натуральных чисел, меньших n, утверждение доказано. Тогда $(2^n-1)-(2^m-1)=2^m(2^{n-m}-1)$. Поэтому НОД $(2^n-1, 2^m-1)=$ НОД $(2^m(2^{n-m}-1), 2^m-1)$. Так как 2^m и 2^m-1 взаимно-просты, то НОД $(2^n-1, 2^m-1)=$ НОД $(2^{n-m}-1, 2^m-1)= =2^d-1$ по индуктивному предположению.

3) Любые два числа из последовательности имеют вид $2^{2^k}+1$ и

$2^{2^{k+s}}+1$. Если обозначить $2^{2^k}=a$, то получим числа $a+1$ и $a^{2^s}+1$, которые, согласно задаче 7.66, взаимно-просты.

7.75. Так как НОК (60, 69) = 1380, то в первый раз шаги совпали на расстоянии 1380 см. Первый раз после 5 мин движения шаги совпали через $306=17\cdot18$ (с); за это время ученики прошли $1380\cdot18=24\,840$ см. Следовательно, расстояние от A до B равно 248,4 м.

7.78. $(a+b)\vdots x\wedge(a^2+ab+b^2)\vdots x\Rightarrow(a^2+2ab+b^2)-(a^2+ab+b^2)=ab\vdots x\Rightarrow a(a+b)-ab=a^2\vdots x\wedge b(a+b)-ab=b^2\vdots x\Rightarrow x=\pm1$ (так как a и b взаимно-просты). Следовательно, $a+b=3$ и $a^2+ab+b^2=13$. Решая эту систему, получаем $a_1=-1$, $b_1=4$; $a_2=4$, $b_2=-1$.

7.79. 1) Число x, принадлежащее A, является делителем числа $210=2\cdot3\cdot5\cdot7$, поэтому $x=2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}7^{k_4}$, где k_i равно нулю или единице. Среди чисел такого вида четных восемь: 2, $2\cdot3=6$, $2\cdot5=10$, $2\cdot7=14$, $2\cdot3\cdot5=30$, $2\cdot3\cdot7=42$, $2\cdot5\cdot7=70$, $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$. Если $2\in A$, то A состоит только из четных чисел, так как НОД $(2, x)\neq1$. Поскольку в A не меньше восьми элементов, то $A=\{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$. Но тогда произведение всех чисел из A равно $2^8\cdot3^4\cdot5^4\cdot7^4$, что противоречит условию. Следовательно, $2\notin A$. Но тогда оставшиеся семь четных чисел 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210 обязательно принадлежат A, так как произведение всех чисел из A делится на $1920=2^7\cdot3\cdot5$. Поскольку в A не меньше восьми элементов, то множество A не исчерпывается только четными числами. Пусть a — нечетное число, принадлежащее A. Так как НОД $(a, 6)\neq1$, то НОД $(a, 6)=3$. Значит, $a\vdots3$. Аналогично $a\vdots5$ и $a\vdots7$. Так как a содержит каждый из простых множителей 3, 5 и 7 в степени, не выше первой, то $a=3\cdot5\cdot7$ и других нечетных множителей в А нет.

7.85. 1) $P_1Q_0-P_0Q_1=q_1\cdot0-1\cdot1=(-1)^1$. Допуская, что $P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1}=(-1)^{k-1}$, получаем $P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(P_{k-1}q_k+P_{k-2})Q_{k-1}-P_{k-1}(Q_{k-1}q_k+Q_{k-2})=-(P_{k-1}Q_{k-2}-P_{k-2}Q_{k-1})=-(-1)^{k-1}=(-1)^k$.

3) $Q_0=0<1=Q_1$. Соотношение $Q_k=Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}$ показывает, что все следующие Q_k положительны. Поэтому $Q_{k-1}\leqslant Q_{k-1}q_k<Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}=Q_k$.

7.87. 4) Если допустить, что хоть одна четная дробь больше или равна какой-то нечетной, то, согласно пп. 1 и 2, последняя четная дробь больше последней нечетной. А это противоречит п. 3.

7.88. Воспользуемся задачей 7.85.1 и тем, что $\frac{a}{d}=P_s$, $\frac{b}{d}=Q_s$.

7.101. $7a=b^3$. Значит, $b^3\vdots7$, откуда $b\vdots7$, т. е. $b=7c$ и $a=49c^3$. Тогда $a\vdots49$, причем частное — куб натурального числа. Отсюда $c=2$, $a=392$.

7.103. $\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Leftrightarrow2xy=p(x+y)\Rightarrow2xy\vdots p$. Так как $\overline{2\vdots p}$, то $x \vdots p$ или $y \vdots p$. Пусть $x = ps$. Тогда $2sy = ps + y$, откуда $y(2s - 1) = ps$. Поскольку s и $2s - 1$ взаимно-просты, то $2s - 1 = p$ и $y = s$. Таким образом, если $2/p$ можно представить в нужном виде, то $y = s = \frac{p+1}{2}$, $x = ps = \frac{p(p+1)}{2}$. Остается заметить, что

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}.$$

7.104. Пусть p, $p+2$, $p+4$ — тройка простых чисел-близнецов. Разделим p на 3 с остатком: $p=3s+r$. Если $r=0$, то $s=1$ и $p=3$, $p+2=5$, $p+4=7$. Если $r=1$, то число $p+2=3s+3(s+1)$ — не простое. Если $r=2$, то число $p+4=3s+6=3(s+2)$ — не простое.

7.105. 1) Разделим p на 3 с остатком: $p=3s+r$. Если $r=0$, то $s=1$. Тогда $p=3$, $5p^2-2=43$ и $5p^2-4=41$, $5p^2+2=47$. Если $r=1$, то число $5p^2-2=45s^2+30s+3=3(15s^2+10s+1)$ — не простое. Если $r=2$, то $5p^2-2=45s^2+60s+18=3(15s^2+20s+9)$ — не простое.

7.107. 3) Разделим 2^n-1 на 3 с остатком: $2^n-1=3s+r$. Если $2^n-1=3q$, то $q \neq 1$, так как $n>2$. Поэтому 2^n-1 — составное число. Если $2^n-1=3q+1$, то $2^n+1=3q+3$ — составное число. Если $2^n - 1 = 3q + 2$, то $2^n = 3q + 3 \vdots 3$, что невозможно.

7.109. Пусть n — искомое число. Заметим, что остаток при делении n на $k=2, 3, \ldots, 10$ равен $k-1$. Значит, $n+1$ делится на $2, 3, \ldots, 10$. Наименьшее такое число НОК $(2, 3, \ldots, 10) = 2520$ и $n=2519$.

7.113. Пусть p, $p+d$, $p+2d$ — простые числа. Если $p=2$, то $p+2d$ составное. Значит, $p \geqslant 3$. Поэтому p нечетное, а d четное. Так как $\overline{d \vdots 6}$, то $d = 6k + 2$ или $d = 6k + 4$. С другой стороны, $p = 3s$, или $p = 3s + 1$, или $p = 3s + 2$. Если $p = 3s + 1$ или $p = 3s + 2$, то легко проверить, что $p + d$ или $p + 2d$ делится на 3. Поэтому $p = 3s$, а так как p простое, то $p = 3$.

7.115. Пусть высказывание $(m+n) \vdots 3$ ложно. Тогда $m=2n+5$ и $m + 1 = 2n + 6$. Так как $(m + 1) \vdots n$, то $6 \vdots n$, т. е. n может принимать лишь значения 1, 2, 3, 6. Соответствующие значения для $m+7n$ — 14, 23, 33, 59. Из этих чисел простые 23 и 59. Таким образом, $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, а $m_1 = 9$, $m_2 = 17$.

7.116. 1) Допустим, что множество простых чисел вида $4m-1$ конечно. Пусть a — произведение всех этих чисел. Рассмотрим число $4a-1$. Оно должно иметь простой делитель q вида $4m-1$, так как произведение чисел вида $4m+1$ опять число такого же вида. Следовательно, $a \vdots q$ и $(4a - 1) \vdots q$. А это невозможно, так как a и $4a - 1$ взаимно-просты.

7.117. $a^4+4=(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$.

7.118. Прежде всего, $p_{12}=37>3 \cdot 12$. Далее, при $n \geqslant 2$ среди чисел $3n-2$, $3n-1$, $3n$ — не более одного простого, так как последнее делится на три, а из двух других одно четное. Поэтому при $n \geqslant 12$ число p_n находится среди чисел $3(n+1)-2$, $3(n+1)-1$, $3(n+1)$ или правее. А это означает, что $p_n > 3n$.

7.119. 1) Пусть n — составное число. Если $n=kl$, $1<k$, $l>n$, $k \neq l$, то $a \leqslant n-1$, $b \leqslant n-1$ и $(n-1)! \vdots kl$. Если $n=p^2$, $p \neq 2$ — простое, то $n-1=p^2-1>2p$. Поэтому $(n-1)! \vdots (p \cdot 2p)$. Таким образом, если n — составное число, не равное четырем, то $(n-1)! \vdots n$.

2) Пусть n — составное число, не равное 8, 9, p и $2p$ (p — любое простое число). При этом возможны следующие случаи:

а) n имеет нечетный простой делитель p и $n \neq p^2$. Тогда $n=pt$, где $t \neq 2$. Поэтому n можно представить в виде $n=kl$, $3 \leqslant k < l$. Но каждое из чисел k, l, $2k$, $2l$, $3k$ меньше $n-1$. Причем числа k, l, $2l$ различны, а $2k$ или $3k$ не равно l. Следовательно, либо числа k, l, $2l$, $2k$ различны, либо числа k, l, $2l$, $3k$ различны. В любом случае $(n-1)! \vdots k^2l^2 (=n^2)$.

б) $n=p^2$, где p — нечетное простое число. Тогда $p>4$ и $n-1>4p$. Поэтому $(n-1)! \vdots (p \cdot 2p \cdot 3p \cdot 4p)$. Следовательно, $(n-1)! \vdots p^4 (=n^2)$.

в) $n=2^4$. Так как $15! . (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14)$, а это произведение содержит 2^{11}, то $15! \; 16^2$.

г) $n=2^m$, $m>4$. Тогда $n=2^2 \cdot 2^{m-2}=kl$ и проходит рассуждение п. «а».

Остается показать, что $7!$ не делится на 8^2, $8!$ не делится на 9^2, и заметить, что если $n=2p$, то $(n-1)! \vdots p^2$.

7.122. 1) $x=[x]+\alpha$, $y=[y]+\beta$, где $0 \leqslant \alpha$, $\beta < 1$. Тогда $x+y=[x]+[y]+\alpha+\beta$ и $[x]+[y]$ есть целое число, не превосходящее $x+y$. А так как $[x+y]$ — наибольшее из таких целых чисел, то $[x+y] \geqslant [x]+[y]$.

5) $x=[x]+\alpha$ и при некотором натуральном k $\frac{k}{n} \leqslant \alpha < \frac{k+1}{n}$. Тогда $x+\frac{n-k-1}{n}=[x]+\alpha+\frac{n-k-1}{n}<[x]+\frac{k+1}{n}+\frac{n-k-1}{n}=[x]+1 \Rightarrow [x] \leqslant \left[x+\frac{1}{n}\right] \leqslant \left[x+\frac{2}{n}\right] \leqslant \ldots \leqslant \left[x+\frac{n-k-1}{n}\right] < [x]+1 \Rightarrow [x]=\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{2}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right]$. Аналогично $x+\frac{n-k}{n} \geqslant [x]+1 \Rightarrow \left[x+\frac{n-k}{n}\right]=\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+1$. Так как первых слагаемых в сумме $n-k$, а вторых k, то $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=(n-k)[x]+k([x]+1)=n[x]+k$.

С другой стороны, $[nx]=[n[x]+n\alpha] \Rightarrow [n[x]+k] \leqslant]nx] < [n[x]+k+1] \Rightarrow [nx]=n[x]+k$.

6) Согласно п. 4, рассматриваемая сумма, в которой лишь конечное число слагаемых отлично от 0, равна $\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]+\ldots=\left([n]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)+\ldots+\left(\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]\right)+\ldots=[n]=n.$

7.123. В ряду 1, 2, 3, ..., n числа, делящиеся на p, исчерпываются следующими: p, $2p$, $3p, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right]p$; их $\left[\frac{n}{p}\right]$. Среди чисел $1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right]$ на p делится $\left[\left[\frac{n}{p}\right]:p\right]=\left[\frac{n}{p^2}\right]$ чисел. Значит, в ряду 1, 2, 3, ..., n чисел, делящихся на p^2,— $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, и т. д. Таким образом, в разложение $n!$ простое число p входит с показателем $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots$

7.129. 1) Показатель, с которым простое число p входит в разложение числителя, равен $s=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots$, а в разложение знаменателя — $t=\left(\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\ldots\right)+\left(\left[\frac{b}{p}\right]+\left[\frac{b}{p^k}\right]+\ldots\right)+\ldots+\left(\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\ldots\right)=\left(\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{b}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{a}{p^2}\right]+\left[\frac{b}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{p^2}\right]\right)+\ldots$

Согласно задаче 7.122.1, $s\geqslant t$.

2) $\frac{(t+1)\ldots(t+n)}{n!}=\frac{1\ldots t(t+1)\ldots(t+n)}{t!\,n!}=\frac{(t+n)!}{t!\,n!}$.

Согласно п. 1, это число целое. Можно этот вывод сделать и из того, что $\frac{(t+n)!}{t!\,n!}=C_{t+n}^n$.

3) $(n!)!$ — это произведение $n!$ множителей. Разобьем эти множители на $(n-1)!$ групп по n последовательных чисел в каждой. Согласно п. 2, произведение множителей в каждой из этих групп делится на $n!$

4) Пусть a — первый член и d — разность арифметической прогрессии. Каждое из чисел d, $2d$, ..., $(n!-1)d$ не делится на $n!$. При делении на $n!$ любые два из этих чисел дают разные остатки, иначе модуль их разности (а это одно из этих чисел) делился бы на $n!$. Этих чисел $n!-1$, значит, при делении на $n!$ они дают $n!-1$ различных остатков. Поэтому существует такое k, что остаток при делении kd на $n!$ равен единице: $kd=n!s+1$. Заметим, что k и $n!$ взаимно-просты. Поэтому достаточно доказать, что делится на $n!$ произведение $k^na(a+d)(a+2d)\ldots(a+(n-1)d)=ka(ka+kd)(ka+2kd)\ldots(ka+(n-1)kd)=ka(ka+1+n!s)(ka+2+2n!s)\ldots(ka+(n-1)+(n-1)n!s)=ka(ka+$

$+1)(ka+2)\ldots(ka+(n-1))+An!$. Первое слагаемое делится на $n!$ согласно п. 2, второе очевидно.

7.132. Пусть a — четырехзначное число, имеющее 15 делителей. Согласно результату задачи 7.131, a — квадрат натурального числа. Поскольку $\tau(a)=1\cdot 15=3\cdot 5$, то $a=p^{14}$ или $a=p^2q^4$. Первое равенство невозможно, так как уже $2^{14}>9999$. При втором равенстве $32\leqslant pq^2\leqslant 99$. Этому условию удовлетворяют числа $2\cdot 5^2$, $2\cdot 7^2$, $3\cdot 5^2$, $5\cdot 3^2$, $7\cdot 3^2$, $11\cdot 2^2$, $11\cdot 3^2$, $13\cdot 2^2$, $17\cdot 2^2$, $19\cdot 2^2$, $23\cdot 2^2$.

7.133. Если бы число делителей было равно 357, то, согласно задаче 7.131, наше число было бы квадратом натурального числа, оканчивающегося цифрой 5. Поэтому две его последние цифры 2 и 5.

7.134. $14=1\cdot 14=2\cdot 7$. Так как n имеет по крайней мере два простых делителя (2 и 3), то $\tau(n)=2\cdot 7$. А поскольку $n \vdots 2^2$, то $n=2^6\cdot 3$.

7.135. 1) Так как $\sigma(a)=2a$, то

$$\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\,\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\,\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}=2^{n+1}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Поскольку $2^{n+1}-1$ и 2^{n+1} взаимно-просты, то $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k} \vdots (2^{n+1}-1)$.

2) Частное от деления этих чисел имеет вид $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$, т. е. $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}=(2^{n+1}-1)p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_s^{\beta_s}$, откуда $2^{n+1}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}+p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}$.

3) Из п. 1, а затем из п. 2 получаем

$$\sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k})=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\,\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k}-1}{p_k-1}=$$
$$=\frac{2^{n+1}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}}{2^{n+1}-1}=2^{n+1}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}+$$
$$+p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k}.$$

4) Равенство п. 3 означает, что сумма всех натуральных делителей числа $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ равна сумме двух делителей этого числа. Такое возможно, лишь когда это простое число, т. е. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\ldots\alpha_k=0$.

5) Согласно п. 4, $a=2^n p_1$, а согласно п. 1, $p_1 \vdots (2^{n+1}-1)$, т. е. $p_1=2^{n+1}-1$ и $a=2^n(2^{n+1}-1)$, причем $2^{n+1}-1$ — простое.

6) Если $n+1$ — составное число, т. е. $n+1=st$, где $s>1$, $t>1$, то $(2^{st}-1)\vdots(2^s-1)$, а значит, $2^{n+1}-1$ — составное число. Поэтому $n+1$ — простое число. Обозначим $n+1=p$. Тогда $a=2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа.

Обратное утверждение получается простым подсчетом $\sigma(a)$.

7.141. Пусть другое основание — g, а искомое число — xyz. Тогда $2(10^2x+10y+z)=g^2x+gy+z$, откуда $(200-g^2)x+(20-$

$-g)y+z=0$. Заметим, кстати, что z четное. Если предположить, что первое слагаемое положительно, то $200-g^2>0 \to g\leqslant 14$. Так как $g>10$, то $10<g\leqslant 14 \Rightarrow 6\leqslant 20-g<10$ и вся сумма положительна. Значит, $200-g^2<0$, $g\geqslant 15$ и $(200-g^2)x+z\leqslant -25x+$ $+z<0$. Поэтому $20-g>0$ и $15\leqslant g<20$. Так как $(20-g)y+z\leqslant$ $\leqslant(20-15)9+8=53$, то $(g^2-200)x\leqslant 53$ и $g^2\leqslant 253$. Отсюда и из предыдущего получаем $g=15$ и $-25x+5y+z=0$. Так как z четное и делится на 5, то $z=0$ и $y=5x$. Значит, $x=1$, $y=5$. Итак, $xyz=150$.

7.142. Искомое число $a=1+2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1$, так как в двоичной системе оно может быть записано лишь с помощью единиц. Тогда в четверичной системе a записывается с помощью троек (a — нечетное): $a=3(1+4+\ldots+4^l)=4^{l+1}-1$. Такой вид имеют лишь два двузначных числа: 15 и 63. В восьмеричной системе одинаковыми цифрами могут быть лишь 5 или 7. Непосредственно проверяем, что 5 не годится, а 7 подходит.

8

8.6. 1) Умножение отношений ассоциативно. Действительно, если ρ_1, ρ_2, $\rho_3\in B(X)$, то $a[(\rho_1\rho_2)\rho_3]b$ означает, что найдутся такие c, $d\in X$, что $a\rho_1c$, $c\rho_2d$ и $d\rho_3b$. То же самое означает $a[\rho_1(\rho_2\rho_3)]b$, т. е. $(\rho_1\rho_2)\rho_3=\rho_1(\rho_2\rho_3)$.

2) $\rho\supseteq\Delta\wedge\sigma\supseteq\Delta\Rightarrow\rho\sigma\supseteq\Delta\cdot\Delta=\Delta$, т. е. произведение двух рефлексивных отношений рефлексивно.

5) Пусть M — максимальное множество попарно коммутирующих отношений. Пусть ρ, $\sigma\in M$. Если ξ — произвольное отношение из M, то $(\rho\sigma)\xi=\rho(\sigma\xi)=\rho(\xi\sigma)=(\rho\xi)\sigma=(\xi\rho)\sigma=\xi(\rho\sigma)$, т. е. $\rho\sigma$ коммутирует с любым $\xi\in M$. В силу максимальности M $\rho\sigma\in M$.

8.31. 1) Пусть v — решение уравнения $ax=a$. Тогда $av=a$. Если b — произвольный элемент из H, то пусть y_0 — решение уравнения $ya=b$. Тогда $bv=(y_0a)v=y_0(av)=y_0a=b$, т. е. v — правая единица в H.

2) Аналогично п. 1 доказывается, что в H есть левая единица u; остается воспользоваться результатом задачи 8.9.1.

3) Пусть s — решение уравнения $ax=e$, t — решение уравнения $ya=e$. Тогда $s=(ta)s=t(as)=te=t$.

8.40. 2) Конечная группа содержит конечное минимальное порождающее множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Так как любое $a_i^2=e$, то каждый неединичный элемент a группы G можно представить в виде $a=a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_s}$, где все элементы из порождающего множества различны. Значит, каждому элементу $a\in G$ соответствует подмножество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}\}$ множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (единице группы соответствует пустое подмножество). Ясно, что это соответствие взаимно-однозначно. Поэтому в группе G столько элементов, сколько подмножеств в множестве $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. А в этом множестве 2^n подмножеств.

8.44. 1) Допустим, что $a^k=a^l$, где $0\leqslant l<k\leqslant n-1$. Тогда $a^{k-l}=e$ и $k-l<n$, а это противоречит тому, что n — порядок элемента a.

2) Пусть a^k, $a^l\in H$. Разделим $k+l$ на n с остатком: $k+l=$ $=ns+r$, где $0\leqslant r\leqslant n-1$. Тогда $a^ka^l=a^{k+l}=a^{ns+r}=(a^n)^s a^r=a^r\in H$. Далее, $e=a^0\in H$ и обратным элементу $a^k\in H$ служит $a^{n-k}\in H$.

8.46. 1) $\Rightarrow$ 3). Покажем, что $a^t=e\Rightarrow t\,\vdots\, n$. Разделим t на n с остатком: $t=ns+r$, где $0\leqslant r<n$. Тогда $a^r=a^{t-ns}=a^t(a^n)^{-s}=$ $=e$. Так как $r<n$, то по определению порядка r не может быть положительным. Значит, $r=0$ и $t=ns$, т. е. $t\,\vdots\, n$. Обратная импликация $t\,\vdots\, n\Rightarrow a^t=e$ очевидна.

3) $\Rightarrow$ 1). С одной стороны, дано, что $t\,\vdots\, n\Rightarrow a^t=e$. В частности, $n\,\vdots\, n\Rightarrow a^n=e$. С другой стороны, из $a^t=e\Rightarrow t\,\vdots\, n$ следует, что если t — такое положительное число, что $a^t=e$, то $t\geqslant n$. Значит, n — порядок элемента a.

8.47. $m\,\vdots\, p$ или m и p взаимно-просты. В первом случае $a^m=e$. Во втором, согласно задаче 8.46, $(a^m)^t=e\Leftrightarrow a^{mt}=e\Leftrightarrow mt\,\vdots\, p\Leftrightarrow t\,\vdots\, p$ означает, что порядок a^m равен p.

8.48. 1) Согласно задаче 8.46, $(a^s)^t=e\Leftrightarrow a^{st}=e\Leftrightarrow st\,\vdots\, n\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{s}{d}t\,\vdots\,\frac{n}{d}\Leftrightarrow t\,\vdots\,\frac{n}{d}$ означает, что порядок a^s равен n/d.

3) Группа $<a>$ состоит из элементов $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$. Согласно п. 2, те из них имеют порядок n, чьи показатели взаимно-просты с n. А таких показателей $\varphi(n)$.

8.49. 1) Согласно задаче 8.46, $(bc)^t=e\Rightarrow(bc)^{tl}=e\Leftrightarrow b^{tl}=$ $=e\Leftrightarrow tl\,\vdots\, k\Leftrightarrow t\,\vdots\, k$. Аналогично $(bc)^t=e\Rightarrow t\,\vdots\, l$. Таким образом, $(bc)^t=e\Rightarrow t\,\vdots\, k\wedge t\,\vdots\, l\Rightarrow t\,\vdots\, kl\Rightarrow(bc)^t=e$. Опять, согласно задаче 8.46, порядок bc равен kl.

2) Пусть b_1 и c_1 — элементы k-го и l-го порядков соответственно; $bc=b_1c_1\Leftrightarrow b_1^{-1}b=c_1c^{-1}$. Пусть q — порядок элемента $b_1^{-1}b=c_1c^{-1}$. Так как $(b_1^{-1}b)^k=e$ и $(c_1c^{-1})^l=e$, то $k\,\vdots\, q$ и $l\,\vdots\, q$. А так как k и l взаимно-просты, то $q=1$. Тогда $(b_1^{-1}b)^1=e$, и, значит, $b_1=b$. Также и $c_1=c$.

8.53. Согласно задаче 8.51. 4, 5, HK — группа $\Rightarrow HK=$ $=(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}=KH$. Пусть теперь $HK=KH$. Покажем, что если $x\in HK$, то $x^{-1}\in HK$. Существуют такие $h\in H$ и $k\in K$, что $x=hk$. Так как $h^{-1}\in H$ и $k^{-1}\in K$, то $x^{-1}=k^{-1}h^{-1}\in KH=HK$. Остальное очевидно.

8.54. 1) Пусть $c\in aH\cap bH$, тогда существуют такие элементы $h_1, h_2\in H$, что $c=ah_1$ и $c=ah_2$. Отсюда $a=bh_2h_1^{-1}$ и, согласно задаче 8.51. 1, 2, $aH=(bh_2h_1^{-1})H=b(h_2h_1^{-1}H)=bH$.

3) $aH=bH\Leftrightarrow H=a^{-1}bH\Rightarrow a^{-1}bH\Rightarrow a^{-1}bH=H\Rightarrow aH=bH$.

4) $fx_1=fx_2\Leftrightarrow ax_1=ax_2\Leftrightarrow x_1=x_2$.

8.56. 1) Согласно задаче 8.54.3, матрицы A и B принадлежат одному и тому же левому смежному классу тогда и только тогда, когда $A^{-1}B\in S\,\mathrm{Ln}(\mathrm{C})$, т. е. $\det A^{-1}B=1$. Но $\det A^{-1}B=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\det A)^{-1} \det B = 1 \Leftrightarrow \det A = \det B$. Таким образом, левые смежные классы $G\,\mathrm{Ln}(\mathbf{C})$ по $S\,\mathrm{Ln}(\mathbf{C})$ состоят из матриц с одинаковыми определителями.

8.60. 1) Пусть $a \in L$, тогда, согласно задаче 8.51. 4, 5, $L = aH$ и $R = L^{-1} = (aH)^{-1} = Ha^{-1}$.

8.62. Пусть H — подгруппа группы G индекса 2. Если $a \notin H$, то $G = H \cup aH$ и $H \cap aH = \varnothing$. Тогда также $G = H \cup a^{-1}H$ и $G = G^{-1} = H^{-1} \cup (a^{-1}H)^{-1} = H \cup Ha$, где $H \cap Ha = \varnothing$. Значит, $aH = Ha$.

8.64. Пусть $a \in G$. Тогда $a^{-1}H \cdot aH$ — смежный класс, а так как он содержит элемент e, то $a^{-1}H \cdot aH = H \Rightarrow a^{-1}Ha \subseteq H$. Остается сослаться на задачу 8.63.

8.66. 1) Пусть A — подгруппа аддитивной группы $\mathbf{Z}$. Возможно, что $A = \{0\}$. Если же $A \neq \{0\}$, то в A есть число $c \neq 0$. Одно из чисел c или $-c$ положительное. Значит, A содержит положительные числа. Пусть m — наименьшее из них. Если $x \in A$, то, разделив x на m с остатком, получаем $x = ms + r$, где $0 \leqslant r < m$. Значит, $r = x - ms \in A$, так как $x \in A$ и $m \in A$. Но r не может быть положительным из-за минимальности m. Следовательно, $r = 0$ и $x = ms$. Итак, $A = m\mathbf{Z}$.

Фактор-группа $\mathbf{Z}/\{0\}$ состоит из смежных классов вида $k + \{0\} = \{k\}$. Значит, это бесконечная циклическая группа с образующей $\{1\}$. Рассмотрим фактор-группу $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Согласно задаче 8.54.3, k и l принадлежат одному и тому же смежному классу тогда и только тогда, когда $k - l \in m\mathbf{Z}$, т. е. когда k и l при делении на m дают один и тот же остаток. Значит, фактор-группа $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ состоит из классов вида $0 + m\mathbf{Z}$, $1 + m\mathbf{Z}$, ..., $(m-1) + m\mathbf{Z}$. А это циклическая группа с образующей $1 + m\mathbf{Z}$.

8.71. Пусть $G = \{e, a, b, c\}$ — мультипликативная группа с единицей e. Если в группе G есть элемент 4-го порядка, то она циклическая. Если же в ней такого элемента нет, то все неединичные элементы — это элементы 2-го порядка, т. е. $a^2 = b^2 = c^2 = e$. В этом случае $ab = c$; никакой другой вариант невозможен: $ab = a \Rightarrow b = e$, $ab = b \Rightarrow a = e$, $ab = e \Rightarrow a = b$. Аналогично показывается, что таблицу умножения можно записать только так:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

8.76. 1) Пусть φ_i — внутренний автоморфизм, порожденный элементом f_i (см. решение задачи 8.26). Непосредственной проверкой убеждаемся, что все φ_i различны. Например, $\varphi_2(f_2) = f_2^{-1} f_2 f_2 = f_2$, а $\varphi_3(f_2) = f_3^{-1} f_2 f_3 = f_6$.

2) Пусть φ — автоморфизм группы S_3. Группа S_3 является объединением подмножеств, состоящих из элементов 1-го порядка — $\{f_1\}$, элементов 2-го порядка — $\{f_2, f_3, f_6\}$ и элементов 3-го порядка — $\{f_4, f_5\}$. Автоморфизм φ отображает каждое из этих подмножеств на себя. Он определяется своими значениями на $\{f_2, f_3, f_6\}$, так как $f_5 = f_2 f_3 \Rightarrow \varphi(f_5) = \varphi(f_2)\varphi(f_3)$ и $f_4 = f_3 f_2 \Rightarrow \varphi(f_4) = \varphi(f_3)\varphi(f_2)$. Поскольку существует лишь шесть различных отображений множества $\{f_2, f_3, f_6\}$ на себя, то существует не более шести автоморфизмов группы S_3. Остается сослаться на п. 1.

8.81. Надо доказать, что $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Имеем $\varphi(x)\varphi(y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y) = \varphi(x+y)$. Если x принадлежит ядру гомоморфизма φ, то $\cos x + i\sin x = 1$, т. е. $x = 2k\pi$. Значит, ядро гомоморфизма φ — это множество $\{2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

8.85. 1) $\varphi(ab) = \overline{ab} = \bar{a}\bar{b} = \varphi(a)\varphi(b)$.

2) $\varphi(a) = \bar{e} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{e} \Leftrightarrow aH = eH \Leftrightarrow a \in H$.

8.86. 1) $x,\ y \in H \Rightarrow \varphi(x) = e' \wedge \varphi(y) = e' \Rightarrow \varphi(x\,y) = \varphi(x)\varphi(y) = e' \Rightarrow xy \in H$. Согласно задаче 8.84, $\varphi(e) = e'$, значит, $e \in H$. По этой же задаче $x \in H \Rightarrow \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1} = e'^{-1} = e' \Rightarrow x^{-1} \in H$. Итак, H — подгруппа группы G. При любом $a \in G$ и $h \in H$ имеем $\varphi(a^{-1}ha) = \varphi(a^{-1})\varphi(h)\varphi(a) = a'^{-1}e'a' = e' \Rightarrow a^{-1}ha \in H \Rightarrow a^{-1}Ha \subseteq H$. Согласно задаче 8.63, подгруппа H нормальная.

2) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow \varphi(a^{-1}b) = e' \Leftrightarrow (\varphi(a))^{-1}\varphi(b) = e' \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$.

3) Надо показать, что определение φ^* не зависит от выбора представителя в классе $\bar{a} = aH$. Согласно п. 2, при любом представителе b из этого класса $\varphi(a) = \varphi(b)$, а значит, и $\varphi^*(\bar{a}) = \varphi^*(\bar{b})$.

4) $\varphi^*(\bar{a}\bar{b}) = \varphi^*(\overline{ab}) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi^*(\bar{a})\varphi^*(\bar{b})$.

5) Следует из п. 2.

6) Следует из пп. 4 и 5.

9

9.1. 11) Найдем обратимые элементы. Если $u = a + bi\sqrt{3} \neq 0$, то $|u|^2 = a^2 + 3b^2 \geqslant 1$. Причем $|u| = 1$ возможно только тогда, когда $b = 0$ и $a = \pm 1$, т. е. когда $u = \pm 1$. Поэтому если u, w — элементы нашего кольца, то $uv = 1 \Rightarrow |u| = 1 \Rightarrow u = \pm 1$.

12) Найдем обратимые элементы. Если $u = \dfrac{a + bi\sqrt{3}}{2} \neq 0$, то $|u|^2 = \dfrac{a^2 + 3b^2}{4} \geqslant 1$, что легко проверить, рассматривая случаи четных a и b и нечетных a и b. Поэтому если u, v — элементы на-

шего кольца, то $uv=1 \Rightarrow |u|=1 \Rightarrow \frac{a^2+3b^2}{4}=1$. Это возможно, лишь когда $a=\pm 2$ $b=0$ или $a=\pm 1$ и $b=\pm 1$. Таким образом, получаем шесть обратимых элементов: ± 1, $\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

9.2. 1) Найдем делители нуля. Пусть $A=[a_{kl}]$ — вырожденная ненулевая матрица. Тогда ее столбцы

$$s_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \; s_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots, \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \; \dots, \; s_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

линейно-зависимы. Существуют такие $c_1, c_2, \dots, c_n$, не все равные нулю, что $c_1s_1+c_2s_2+\dots+c_ns_n=0$. Обозначим

$$C=\begin{bmatrix} c_1 & c_1 & \dots & c_1 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_n & \dots & c_n \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $AC=O$.

11) Найдем обратимые элементы: если $u=\begin{bmatrix} a & -3b \\ b & a \end{bmatrix} \neq O$, то $\det U=a^2+3b^2 \geqslant 1$, и далее как при решении задачи 9.1.11.

9.6. 7) При $n=0$ эти равенства следуют из определения, а при n натуральном — из пп. 1, 2. Пусть $n=-k$ (k — натуральное), $(-k)a\cdot b=k(-a)\cdot b=k(-a\cdot b)=k(-ab)=(-k)(ab)$.

9.11. Если $aA=A$, то существует такой элемент $e \in A$, что $ae=a$. Для любого $x \in A$ существует такой y, что $x=ay$. Поэтому $ex=eay=ay=x$. т. е. e — единица кольца A. Поскольку $e \in A=aA$, то существует такой элемент $b \in A$, что $e=ab$. Наоборот, пусть a — обратимый элемент в A, а b — такой элемент, что $ab=e$. Тогда $aA \supseteq a(bA)=(ab)A=eA \Rightarrow aA=A$.

9.18. 1) $4=(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})$.

2) Если $4=(2+2i\sqrt{3})(x+yi\sqrt{3})$, то вычисления дают $x=\frac{1}{2}$ и $y=-\frac{1}{2}$, т. е. $x, y \overline{\in} Z$.

3) Если ненулевой элемент $u=a+bi\sqrt{3} \in K$, то $|u|^2=a^2+3b^2 \geqslant 1$. А равенство $|u|=1$ возможно только тогда, когда $b=0$ и $a=\pm 1$, т. е. когда $u=\pm 1$. Поэтому $uv=1 \Rightarrow |u|=1 \Rightarrow u=\pm 1$.

4) Найдем все делители числа 4. Если $4=(a+bi\sqrt{3})\times (c+di\sqrt{3})$, то $|4|^2=|a+bi\sqrt{3}|^2|c+di\sqrt{3}|^2$, откуда $16=(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$. Значит, $16 \vdots (a^2+3b^2)$. Все возможные значения a и b, при которых это имеет место, выписаны в следующую таблицу:

a	± 1	± 1	± 2	± 2	± 4
b	0	± 1	0	± 2	0

Следовательно, делители числа 4 находятся среди чисел ± 1, $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$, $\pm 2 \pm 2i\sqrt{3}$, ± 2, ± 4. Проверкой устанавливаем, что делителями числа 4 являются ± 1, $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$, ± 2, ± 4.

5) Среди чисел, приведенных в п. 4, ± 1, $\pm 1 \pm i\sqrt{3}$, ± 2 являются делителями числа $2+2i\sqrt{3}$.

6) Ни один среди общих делителей чисел 4 и $2+2i\sqrt{3}$ не делится на все другие.

7) Если искать делители числа $1+i\sqrt{3}$ так, как делается выше, то получим, что это числа, модули которых равны 1 или 2. Такие числа нетрудно перебрать и удостовериться, что делители числа $1+i\sqrt{3}$ в K — это только оно само, противоположное ему и ± 1.

8) $4=2\cdot 2=(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})$.

9) Пусть $u \in K$ — необратимый элемент. Тогда он приводим, если $|u|^2=1$ (так как это равенство в действительности невозможно, если u необратим). Воспользуемся индукцией по $|u|^2$. Предположим, что приводим каждый необратимый элемент v, для которого $|v|^2<|u|^2$. Если u приводим, то нечего доказывать. В противном случае $u=u_1u_2$, где $|u_1|^2<|u|^2$ и $|u_2|^2<|u|^2$. По индуктивному предположению, u_1 и u_2, а следовательно, и u являются конечными произведениями неприводимых множителей.

9.24. Неприводимый элемент p однозначно раскладывается на неприводимые множители. Предположим, что это свойство справедливо для любого элемента из A, который может быть разложен на k неприводимых множителей, и докажем его для любого элемента a, разложимого на $k+1$ неприводимых множителей. Пусть $a=p_1p_2\ldots p_{k+1}=q_1q_2\ldots q_s$ — два разложения элемента a на неприводимые множители. Так как $q_1q_2\ldots q_s \vdots p_1$, то, согласно условию, p_1 должен делить один из q_i. Пусть p_1 делит q_1. Так как q_1 неприводим, то $q_1=up_1$, где u обратим, и после сокращения получаем $p_2\ldots p_{k+1}=uq_2\ldots q_s$. Слева стоит произведение k неприводимых множителей. По индуктивному предположению, такое разложение однозначно.

9.33. Пусть $a \in A$, $a \neq 0$. Рассмотрим отображение $\varphi_a : A \to A : \varphi_a(x)=ax$. Согласно задаче 9.10, это отображение взаимно-однозначно. А так как A конечно, то $\varphi_a(A)=A$, т. е. $aA=A$. По задаче 9.11 a — обратимый элемент.

9.40. Пусть A — поле. Если $J \neq \{0\}$ — идеал в A, то он содержит ненулевой элемент u. Так как u обратим, то $uA=A$, следовательно, $J=A$. Наоборот, пусть $\{0\}$ и A — единственные идеалы в A. Если a — ненулевой элемент из A, то $aA=A$, и, согласно задаче 9.11, a — обратимый элемент.

9.41. 3) Из очевидных включений $S\supseteq T+(S\cap U)$ и $T+U\supseteq T+(S\cap U)$ следует $S\cap(T+U)\supseteq T+(S\cap U)$. С другой стороны, если $x\in S\cap(T+U)$, то $x=t+u$, где $t\in T$, $u\in U$. Тогда $u=x-t\in S\cap U$ и $x=t+u\in T+(S\cap U)$, т. е. $S\cap(T+U)\subseteq T+(S\cap U)$.

8) $U\circ T\subseteq S \Leftrightarrow (\forall u)uT\subseteq S \Leftrightarrow (\forall u)u\in(S:T) \Leftrightarrow U\subseteq S:T$.

9) $S:T=A \Leftrightarrow AT\subseteq S \Leftrightarrow T\subseteq S$.

9.43. 1) $(\exists c)a=bc \Rightarrow aA=bcA\subseteq bA$, $(a)\subseteq(b)\Rightarrow a\in bA\Rightarrow(\exists c)a=bc$.

2) $(\exists c)a=bc$ и c — обратимый $\Rightarrow b=ac^{-1}$. Остается воспользоваться п. 1.

9.45. $m\in J\Rightarrow m\mathbf{Z}\subseteq J$. Установим обратное включение. Пусть $a\in J$. Разделим a на m с остатком: $a=ms+r$, $0\leqslant r<m$. Так как $a\in J$ и $ms\in J$, то $r=a-ms\in J$. Поскольку $r<m$, а m — наименьшее положительное число в J, то $r=0$. Таким образом, $a=ms\in m\mathbf{Z}$. Значит, $J\subseteq m\mathbf{Z}$.

9.46. 1) Пусть $d=\text{НОД}(a,b)$. Тогда существуют такие $u, v\in A$, что $d=ua+vb$. Следовательно, $d\in(a)+(b)$ и $(d)\subseteq(a)+(b)$. С другой стороны, $a\,\vdots\,d\wedge b\,\vdots\,d\Rightarrow(a)\subseteq(d)\wedge(b)\subseteq(d)\Rightarrow(a)+(b)\subseteq(d)$. Пусть теперь $(d)=(a)+(b)$. Тогда $a=ae+b\cdot 0\in(a)+(b)=(d)\Rightarrow a\,\vdots\,d$. Аналогично $b\,\vdots\,d$. С другой стороны, $d\in(d)=(a)+(b)\Rightarrow d=ax+by$. Поэтому $a\,\vdots\,c\wedge b\,\vdots\,c\Rightarrow d\,\vdots\,c$.

2) Пусть $m=\text{НОК}(a,b)$, тогда $m\,\vdots\,a\wedge m\,\vdots\,b\Rightarrow(m)\subseteq(a)\cap(b)$. С другой стороны, $z\in(a)\cap(b)\Rightarrow z\,\vdots\,a\wedge z\,\vdots\,b\Rightarrow z\,\vdots\,m\Rightarrow z\in(m)$, т. е. $(a)\cap(b)\subseteq(m)$. Пусть теперь $(m)=(a)\cap(b)$. Тогда $z\,\vdots\,m\Leftrightarrow z\,\vdots\,a\wedge z\,\vdots\,b$, а отсюда ясно, что $m=\text{НОК}(a,b)$.

9.53. 1) Согласно задаче 9.44, $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i)$ — идеал, а так как A — кольцо главных идеалов, то существует такое $b\in A$, что $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i)=(b)$. Так как $b\in\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i)$, то при каком-то n $b\in(a_n)$. Следовательно, $(b)\subseteq(a_n)$. Обратное включение очевидно.

9.55. 1) Разделим 0 на b с остатком: $0=bs+r$, $\varphi(r)<\varphi(b)$. Отсюда $r=-bs$, т. е. $r\,\vdots\,b$. Если бы $r\neq 0$, то, согласно определению евклидова кольца, $\varphi(r)\geqslant\varphi(b)$. Противоречие.

2) Если $a=0$, то $b=0$ и $\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi(0)$. Если же $a\neq 0$, то $a\,\vdots\,b$ и $b\,\vdots\,a$ и, согласно определению евклидова кольца, $\varphi(a)\geqslant\varphi(b)$ и $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)$.

3) Разделим b на a с остатком: $b=as+r$, $\varphi(r)<\varphi(a)$. Тогда $\varphi(r)<\varphi(a)=\varphi(b)$. Так как $a\,\vdots\,b$, то $r=b-as\,\vdots\,b$. Поскольку $\varphi(r)<\varphi(b)$, то $r=0$ и $b\,\vdots\,a$. Остается воспользоваться задачей 9.17.6.

6. По определению евклидова кольца, $\varphi(a)\geqslant\varphi(b)$. Если

предположить, что $\varphi(a)=\varphi(b)$, то, согласно п. 3, $a=bu$, где u — обратимый элемент. Противоречие.

9.56. 1) J содержит элемент $c\neq 0$. Согласно задаче 9.55.1, значения функции φ на ненулевых элементах идеала J ограничены снизу числом $\varphi(0)$. Поэтому существует такой ненулевой элемент $m\in J$, для которого это значение наименьшее.

2) Так как $m\in J$, то $mA\subseteq J$. Докажем обратное включение. Пусть $a\in J$. Разделим a на m с остатком: $a=ms+r$, $\varphi(r)<\varphi(m)$. Поскольку $a\in J$ и $ms\in J$, то $r=a-ms\in J$. А так как $\varphi(r)<\varphi(m)$, то по определению m элемент r не может быть ненулевым. Значит, $a=ms\in mA$, т. е. $J\subseteq mA$.

9.57. 1) Возьмем такие целые k и l, чтобы $|s-k|\leqslant\frac{1}{2}$, $|t-l|\leqslant\frac{1}{2}$, и положим $w=k+li$. Тогда $w\in A$ и $|z-w|^2=$ $=|(s-k)+(t-l)i|^2=(s-k)^2+(t-l)^2\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

2) В п. 1 положим $z=\frac{u}{v}$ и умножим полученное неравенство на $|v|^2$.

3) Для любых u, $v\in A$ имеем $u=vw+(u-vw)$, где, согласно п. 2, $\varphi(u-vw)=|u-vw|^2<|v|^2=\varphi(v)$. Остальная часть определения евклидова кольца проверяется тривиально.

9.58. 1) Возьмем такие целые k и l, чтобы $|s+t-k|\leqslant\frac{1}{2}$, $|2t-l|\leqslant\frac{1}{2}$, и положим $w=\left(k-\frac{l}{2}\right)+\frac{l}{2}i\sqrt{3}$. Тогда $w\in A$ и $|z-w|^2=(s+t-k)^2-(s+t-k)(2t-l)+(2t-l)^2\leqslant\frac{3}{4}$.

2 и 3) как в задаче 9.57.

9.60. 2) $x\in\bar{a}\Leftrightarrow x\equiv a(\operatorname{mod}J)\Leftrightarrow x-a\in J\Leftrightarrow x\in a+J$. Это означает, что $\bar{a}=a+J$.

9.62. 2) $a\equiv b(\operatorname{mod}J)\wedge c\equiv d(\operatorname{mod}J)\Leftrightarrow a+c\equiv b+c(\operatorname{mod}J)\wedge$ $\wedge b+c\equiv b+d(\operatorname{mod}J)\Rightarrow a+c\equiv b+d(\operatorname{mod}J)$.

9.63. 1) $\bar{a}=\bar{a}'\wedge\bar{b}=\bar{b}'\Leftrightarrow a\equiv a'(\operatorname{mod}J)\wedge b\equiv b'(\operatorname{mod}J)\Rightarrow a+b\equiv$ $\equiv a'+b'(\operatorname{mod}J)\Leftrightarrow\overline{a+b}=\overline{a'+b'}\Leftrightarrow\bar{a}+\bar{b}=\bar{a}'+\bar{b}'$.

9.65. 1) Если m простое, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{0}\Leftrightarrow\overline{ab}=\bar{0}\Leftrightarrow ab\,\vdots\,m\Leftrightarrow a\,\vdots\,m\vee$ $\vee b\,\vdots\,m\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{0}\vee\bar{b}=\bar{0}$.

2) Если m составное, то его можно представить в виде $m=$ $=ab$, где $1<a<m$ и $1<b<m$. Тогда $a\not\equiv 0\ (\operatorname{mod}m)$ и $b\not\equiv 0$ $(\operatorname{mod}m)$, т. е. $\bar{a}\neq\bar{0}$ и $\bar{b}\neq\bar{0}$. Вместе с тем $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab}=\bar{m}=\bar{0}$.

9.76. Например, $\varphi:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_6:\varphi(x)=\bar{x}$.

9.77. 1) $\varphi(a+b)=\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}=\varphi(a)+\varphi(b)$.

2) $\varphi(a)=\bar{0}\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{0}\Leftrightarrow a\equiv 0(\operatorname{mod}J)\Leftrightarrow a\in J$.

9.78. 1) $a,\ b\in J\Leftrightarrow\varphi(a)=0'\wedge\varphi(b)=0'\Rightarrow\varphi(a-b)=0'\Leftrightarrow a-$ $-b\in J$; $a\in A$, $b\in J\Rightarrow\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(a)\cdot 0'=0'\Rightarrow ab\in J$.

2) $a\equiv x(\operatorname{mod}J)\Leftrightarrow a-x\in J\Leftrightarrow\varphi(a-x)=0'\Leftrightarrow\varphi(a)-\varphi(x)=$ $=0'\Leftrightarrow\varphi(a)=\varphi(x)$.

3) Значение $\varphi^*(\bar{a})$, согласно п. 2, не зависит от выбора представителей в классе $\bar{a}$.

4) $\varphi^*(\bar{a}+\bar{b})=\varphi^*(\overline{a+b})=\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi^*(\bar{a})+$ $+\varphi^*(\bar{b})$.

5) $\varphi^*(\bar{a})=\varphi^*(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(a)=\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(a-x)=0' \Leftrightarrow a-x\in J \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\equiv x(\operatorname{mod} J) \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{x}$.

9.80. Пусть A — поле. Если φ — гомоморфизм на ненулевое кольцо, то $\ker\varphi\neq A$. Так как $\ker\varphi$ — идеал A, а поле имеет лишь два идеала — A и $\{0\}$, то $\ker\varphi=\{0\}$. Согласно задаче 9.79, φ — изоморфизм. Наоборот, пусть гомоморфизм φ кольца A всегда либо нулевой, либо является изоморфизмом. Тогда $\ker\varphi$ либо A, либо $\{0\}$ и в A есть лишь два идеала — A и $\{0\}$. Согласно задаче 9.40, A — поле.

9.81. 2) Поскольку $B\neq\{0\}$, то $\ker\varphi\neq\mathbf{Z}$. Значит, $\ker\varphi=\{0\}$ или $\ker\varphi=(m)$, $m>1$ (согласно задаче 9.78.1, других идеалов в $\mathbf{Z}$ нет). В первом случае B изоморфно $\mathbf{Z}$, во втором — $\mathbf{Z}/(m)$ (см. задачу 9.78.6).

3) Если A — область целостности, то и B, а вместе с ним и $\mathbf{Z}_m$ — область целостности. Воспользовавшись задачей 9.51, получим, что m — простое число.

9.82. 1) $x\leqslant y \Rightarrow x+z\leqslant y+z$ по определению упорядоченного поля. Благодаря этой же аксиоме $x+z\leqslant y+z \Rightarrow x+z(-z)\leqslant y+$ $+z+(-z) \Rightarrow x\leqslant y$.

2) К п. 1 остается присоединить доказательство того, что $x\neq y \Leftrightarrow x+z\neq y+z$, или по закону контрапозиции $x=y \Leftrightarrow x+z=$ $=y+z$, а это очевидно.

5) Пусть $n=2$. Согласно определению упорядоченного поля, $x_1\leqslant y_1 \Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+x_2$, $x_2\leqslant y_2 \Rightarrow y_1+x_2\leqslant y_1+y_2$, и так как отношение порядка транзитивно, то $x_1\leqslant y_1\wedge x_2\leqslant y_2\Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$. Остается доказать, что если при этом $x_1\neq y_1$ или $x_2\neq y_2$, то x_1+ $+x_2\neq y_1+y_2$, или, согласно закону контрапозиции, что в условиях задачи $x_1+x_2=y_1+y_2 \Rightarrow x_1=x_2 \wedge y_1=y_2$. Действительно, x_1+ $+x_2=y_1+y_2 \Leftrightarrow x_1=y_1+y_2-x_2$, и тогда $x_1\leqslant y_1 \Leftrightarrow y_1+y_2-x_2\leqslant y_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y_2-x_2\leqslant 0 \Leftrightarrow y_2\leqslant x_2$. Вместе с $x_2\leqslant y_2$ это, согласно антисимметричности отношения порядка, дает $x_2=y_2$. Следовательно, и $x_1=y_1$. Доказательство завершается индукцией по n.

9.83. 2) $x\leqslant 0\wedge y\geqslant 0\Rightarrow -x\geqslant 0\wedge y\geqslant 0\Rightarrow -xy\geqslant 0\Rightarrow xy\leqslant 0$.

6) Следует из пп. 1 и 5.

7) Согласно п. 6, $1=1^2>0$.

8) Во-первых, $x^{-1}\neq 0$. Если же допустить, что $x^{-1}<0$, то, согласно п. 3, $1=x^{-1}x<0$, а это противоречит п. 7.

9.84. 1) Согласно определению, $x\leqslant|x|$, поэтому $|x|\leqslant a \Rightarrow$ $\Rightarrow x\leqslant a$. Точно так же $-x\leqslant|x| \Rightarrow -x\leqslant a$, и если мы воспользуемся результатом задачи 9.82.3, то получим $-a\leqslant x$. Наоборот, согласно задаче 9.82. 3, $-a\leqslant x\leqslant a\Leftrightarrow x\leqslant a\wedge -a\leqslant x\Leftrightarrow x\leqslant a\wedge$ $\wedge -x\leqslant a\Leftrightarrow|x|\leqslant a$.

3) Так как $x_1\leqslant|x_1|$, $x_2\leqslant|x_2|$, $-x_1\leqslant|x_1|$, $-x_2\leqslant|x_2|$, то, со-

гласно задаче 9.82.5, $x_1+x_2 \leqslant |x_1|+|x_2|$ и $-(x_1+x_2) \leqslant |x_1|+|x_2|$. А так как одно из чисел x_1+x_2 или $-(x_1+x_2)$ есть $|x_1+x_2|$, то $|x_1+x_2| \leqslant |x_1|+|x_2|$.

4) $|x_1| = |(x_1+x_2)+(-x_2)| \leqslant |x_1+x_2|+|x_2| \Rightarrow |x_1|-|x_2| \leqslant |x_1+x_2|$.

9.86. Согласно задаче 9.83.6, $-1=i^2>0$, что невозможно.

10

10.7. 1) Поскольку $a^3 \equiv 1 \pmod{a^3-1}$, то $a^{3k} \equiv 1 \pmod{a^3-1}$. Значит, при любых k, l, m $a^{3k}+a^{3l+1}+a^{3m+2} \equiv 1+a+a^2 \pmod{a^3-1} \Rightarrow a^{3k}+a^{3l+1}+a^{3m+2} \equiv 1+a+a^2 \pmod{a^2+a+1} \Leftrightarrow a^{3k}+a^{3l+1}+a^{3m+2} \equiv 0 \pmod{a^2+a+1} \Leftrightarrow (a^{3k}+a^{3l+1}+a)^{3m+2}) \,\vdots\, (a^2+a+1)$.

2) $a^3 \equiv -1 \pmod{a^3+1}$. Пусть k, l, m все четные. Тогда $a^{3k}-a^{3l+1}+a^{3m+2} \equiv 1-a+a^2 \pmod{a^3+1} \Rightarrow a^{3k}-a^{3l+1}+a^{3m+2} \equiv 0 \,(\mathrm{mad}\, a^2-a+1) \Leftrightarrow (a^{3k}-a^{3l+1}+a^{3m+2}) \,\vdots\, (a^2-a+1)$.

Аналогично, когда k, l, m все нечетные. Если же k, l, m разной четности, то легко подобрать такие значения a, что $(a^{3k}-a^{3l+1}+a^{2m+2}) \,\overline{\vdots}\, (a^2-a+1)$. Например, если k и m четны, а l нечетно, то достаточно положить $a=-1$.

10.8. 1) $C_{p-1}^k = \dfrac{(p-1)(p-2)\ \ldots\ (p-k)}{1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot k}$. Имеем $p-1 \equiv -1 \pmod p$, $p-2 \equiv -2 \pmod p$, $\ldots$, $p-k \equiv -k \pmod p$. Перемножая эти сравнения, получаем $(p-1)(p-2)\ldots(p-k) \equiv (-1)^k 1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot k \pmod p$. Поскольку $k!$ и p взаимно-просты и каждая часть сравнения делится на $k!$, то $\dfrac{(p-1)(p-2)\ \ldots\ (p-k)}{k!} \equiv (-1)^k \pmod p$.

10.9. Имеем $2k-1-t \equiv -t \pmod{2k-1} \Rightarrow (2k-1-t)^{2l-1} \equiv$

$$\equiv -t^{2l-1} \pmod{2k-1} \Rightarrow \sum_{t=1}^{2k-1} t^{2l-1} = \sum_{t=1}^{2k-1} (2k-1-t)^{2l-1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{t=1}^{2k-1} -t^{2l-1} \pmod{2k-1} \Rightarrow 2\sum_{t=1}^{2k-1} t^{2l-1} \equiv 0 \pmod{2k-1} \Rightarrow \sum_{t=1}^{2k-1} t^{2l-1} \equiv$$

$\equiv 0 \pmod{2k-1}$.

10.12. 1) $24^k+36^l=61^m \Rightarrow (-1)^k+1^l \equiv 1^m \pmod 5 \Leftrightarrow (-1)^k \equiv 0 \pmod 5$.

10.15. 5) $\overline{665xy}$ делится на 7, 8, 9 $(504=7\cdot 8\cdot 9)$. Используя признаки делимости на 7, 8 и 9, получаем:

$$(4\cdot 6-1\cdot 6+2\cdot 5+3x+y) \,\vdots\, 7 \text{ или } (3x+y) \,\vdots\, 7;$$

$$(4\cdot 5+2x+y) \,\vdots\, 8 \text{ или } (4+2x+y) \,\vdots\, 8;$$

$$(6+6+5+x+y) \,\vdots\, 9 \text{ или } (8+x+y) \,\vdots\, 9.$$

Далее $(8+x+y) \,\vdots\, 9 \Rightarrow x+y=1 \vee x+y=10$. Пусть $x+y=1$. Тогда $(1+2x) \,\vdots\, 7$ и $(5+x) \,\vdots\, 8$. Отсюда $x=3$. Но x не может быть больше единицы. Значит, $x+y=10$. Тогда $(3+2x) \,\vdots\, 7$ и $(6+x) \,\vdots\, 8$. Отсюда $x=2$ и $y=8$, а искомое число 66 528.

10.25. 1) $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{Z}_m^{\bullet} \Leftrightarrow$ НОД$(a, m) = 1$, НОД$(b, m) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$НОД$(ab, m) = 1 \Leftrightarrow \overline{ab} \in \mathbf{Z}_m^{\bullet} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} \in \mathbf{Z}_m^{\bullet}$.

2) $\bar{a} \in \mathbf{Z}_m^{\bullet}$ означает, что a и m взаимно-просты. Поэтому существуют такие u и v, что $ua + vb = 1$. Тогда $ua \equiv 1 \pmod m$ или $\bar{u} \cdot \bar{a} = \bar{1}$.

4) Порядок группы $\mathbf{Z}_m^{\bullet}$ — это число классов вычетов, взаимно-простых с модулем. По определению это $\varphi(m)$.

5) $\bar{a}^{\varphi(m)} = \bar{1}$, так как порядок элемента $\bar{a} \in \mathbf{Z}_m^{\bullet}$ является делителем $\varphi(m)$—порядка группы $\mathbf{Z}_m^{\bullet}$.

10.26. 1) Следует из задачи 10.25.3 и того, что $\varphi(p) = p-1$.

3) Согласно п. 2, $(a+b)^p \equiv a+b \equiv a^p + b^p \pmod p$.

4) Пусть элемент $\bar{a}$ обратен сам себе. Тогда $\bar{a}^2 = \bar{1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\bar{a} - \bar{1})(\bar{a} + \bar{1}) \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{1} \vee \bar{a} = -\bar{1}$, так как в $\mathbf{Z}_p$ нет делителей нуля.

5) Согласно п. 4, произведение всех элементов поля $\mathbf{Z}_p$, не равных 0 и ± 1, вместе с каждым множителем $\bar{a}$ содержит не равный ему множитель $\bar{a}^{-1}$, а потому равно $\bar{1}$.

6) Воспользовавшись п. 5, получим $\bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \ldots \cdot \overline{p-1} = -\bar{1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

7) $$(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-3}{2} \frac{p-1}{2}\left(p - \frac{p-1}{2}\right)\left(p - \frac{p-3}{2}\right) \times$$ $$\times (p-2)(p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-3}{2} \frac{p-1}{2}\left(-\frac{p-1}{2}\right)\left(-\frac{p-3}{2}\right) \ldots$$ $$\ldots (-2)(-1) = (-1)^{2n}\left(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{p-3}{2} \frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2$$ $\pmod p$. Остается воспользоваться п. 6.

10) Согласно пп. 6 и 2, $(p-1)! \equiv -1 \Rightarrow a(p-1)! \equiv -a \Rightarrow$ $\Rightarrow a(p-1)! \equiv -a^p \pmod p$.

10.32. Воспользовавшись теоремой Ферма, получим
$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} = \underbrace{11\ldots1}_{p}(10^{8p} + 2 \cdot 10^{7p} + \ldots + 9) =$$
$$= 12\ldots9 \pmod p.$$

10.33. 2) Согласно результату задачи 10.24, числа $av_1, \ldots, av_{\varphi(b)}$ образуют приведенную систему вычетов по модулю b. Поскольку x и b взаимно-просты, то при каком-то i $x \equiv$ $\equiv av_i \pmod b$. Аналогично при каком-то k $x \equiv bu_k \pmod a$. Тогда $x \equiv av_i + bu_k \pmod b$ и $x \equiv av_i + bu_k \pmod a$, и поскольку НОК$(a, b) = ab$, то $x \equiv av_i + bu_k \pmod{ab}$.

3) $av_i + bu_k \equiv av_s + bu_t \pmod{ab} \Rightarrow av_i + bu_k \equiv av_s +$ $+ bu_t \pmod a \Leftrightarrow bu_k \equiv bu_t \pmod a \Rightarrow u_k \equiv u_t \pmod a \Leftrightarrow k = t$.

10.37. 4) Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha = \beta = 1$. Тогда $\varphi(pq) = (p-1)(q-1) = 120$. Пусть $p < q$. Учитывая, что $120 =$ $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, получим следующие возможные разложения: $(p-1) \times$ $\times (q-1) = 2 \cdot 60 = 10 \cdot 12$, т. е. $p_1 = 3$, $q_1 = 61$ и $p_2 = 11$, $q_2 = 13$. Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы один из показателей, скажем α, больше единицы. Поскольку $\varphi(p^\alpha q^\beta)=(p-1)p^{\alpha-1}\times$ $\times(q-1)q^{\beta-1}$, то в этом случае $120=2^3\cdot 3\cdot 5 \vdots (p-1)p^{\alpha-1}$. Поэтому для p^α возможно предположить лишь следующие значения: 2^2, 2^3, 3^2, 5^2. Имеем $\varphi(2^2q^\beta)=120 \Rightarrow (q-1)q^{\beta-1}=60$. Отсюда $60 \vdots (q-1)$ и $(q-1) \vdots 4$. Поэтому для $q-1$ можно предположить лишь значения 4, 12, 60. В первом случае $q^{\beta-1}=60:4=15$ — это невозможно, во втором $q^{\beta-1}=60:12=5$. Это тоже невозможно ($q-1=$ $=12$, $q=5$); в третьем $q^{\beta-1}=60:60=1$, $\beta=1$, $q=61$. Итак, $\alpha_3=2$, $\beta_3=1$, $p_3=2$, $q_3=61$. Аналогично в других случаях.

10.42. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ — приведенная система наименьших положительных вычетов по модулю m. Тогда $m-a_1$, $m-a_2, \ldots, m-a_{\varphi(m)}$ — та же система, но записанная в обратном порядке. Складывая числа обеих систем, получаем $m\varphi(m)$. Значит, $a_1+a_2+\ \ldots\ +a_{\varphi(m)}=\frac{1}{2}m\,\varphi(m)$.

10.48. 2) Согласно теореме Ферма, классы $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}$ по модулю p являются решениями этого сравнения. Ими исчерпываются все решения, поскольку сравнение $(p-1)$-й степени не может иметь более $p-1$ решения.

3) Воспользуемся теоремой Эйлера так же, как в п. 2 теоремой Ферма.

10.49. 2 и 3) В поле $\mathbf{Z}_p$ $\overline{a}^{p-1}-\overline{1}=\overline{0} \Leftrightarrow (\overline{a}^{\frac{p-1}{2}}-\overline{1})\cdot(\overline{a}^{\frac{p-1}{2}}+\overline{1})=$ $=\overline{0} \Leftrightarrow \overline{a}^{\frac{p-1}{2}}=\overline{1} \vee \overline{a}^{\frac{p-1}{2}}=-\overline{1}$, т. е. решение уравнения $\overline{x}^{p-1}=\overline{1}$ является решением уравнения $\overline{x}^{\frac{p-1}{2}}=\overline{1}$ либо $\overline{x}^{\frac{p-1}{2}}=-\overline{1}$. Каждое из двух последних уравнений имеет не более $\frac{p-1}{2}$ решений, а множество решений обоих уравнений совпадает с множеством решений уравнения $\overline{x}^{p-1}=\overline{1}$, т. е. содержит $p-1$ элемент (см. задачу 10.48.2). Значит, каждое из рассматриваемых уравнений имеет ровно $\frac{p-1}{2}$ решений.

10.50. Очевидно, что степени элемента $\bar{a}$ являются решениями уравнения $\bar{x}^k=\overline{1}$. А так как элементы $\bar{a}^0, \bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^{k-1}$ попарно-различны (поскольку $\bar{a}$ — элемент k-го порядка), а решений не больше k, то ими исчерпываются все решения.

10.51. 1) $1152=2^7\cdot 3^2$, $a^2\equiv 0 \pmod{1152} \Leftrightarrow a^2 \vdots 2^7 3^2 \Leftrightarrow a \vdots 2^4 3$. Остается из полной системы вычетов по модулю 1152 выбрать те, которые делятся на $2^4\cdot 3=48$. Это будут вычеты $48k$, где $k=$ $=0, 1, 2, \ldots, 23$.

10.52. $a^2+p\equiv 0 \pmod{p^2} \Rightarrow a^2+p\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow a^2\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow a^2\equiv 0 \pmod{p^2}$. Наконец, $a^2+p\equiv 0 \pmod{p^2} \wedge a^2\equiv$ $\equiv 0 \pmod{p^2} \Rightarrow p\equiv 0 \pmod{p^2}$, а это невозможно.

10.54. Воспользовавшись теоремой Эйлера, получаем $\bar{a}\cdot\bar{b}\bar{a}^{\varphi(m)-1}=\bar{b}\bar{a}^{\varphi(m)}=\bar{b}\cdot\overline{1}=\bar{b}$.

10.55. 1) $(a-b)x \equiv a^2+b^2 \pmod{ab} \Leftrightarrow (a-b)x \equiv a^2+ + b^2-2ab \pmod{ab} \Leftrightarrow (a-b)x \equiv (a-b)^2 \pmod{ab} \Leftrightarrow x \equiv \equiv a-b \pmod{ab}$.

3) $(a^2+b^2)x \equiv a-b \pmod{ab} \Leftrightarrow (a^2+b^2-2ab)\,x \equiv a- -b \pmod{ab} \Leftrightarrow (a-b)x \equiv 1 \pmod{ab} \Leftrightarrow x \equiv (a-b)^{\varphi(ab)-1} \pmod{ab}$.

10.59. 1) Поскольку $a^s \equiv 1 \pmod m \Leftrightarrow \bar{a}^s = \bar{1}$, то наименьшее из s, удовлетворяющее этим эквивалентным условиям, с одной стороны, является порядком a по модулю m, с другой — порядком элемента $\bar{a} \in \mathbf{Z}_m^*$.

4) Пусть, например, $s \geqslant t$. Так как a и m взаимно-просты, то $a^s \equiv a^t \pmod m \Leftrightarrow a^{s-t} \equiv 1 \pmod m \Leftrightarrow (s-t) \,\vdots\, k \Leftrightarrow s \equiv t \pmod k$.

10.61. Воспользуемся результатом задач 10.60.7 и 8, а также взаимной простотой чисел 13 и 31: $10^k \equiv 1 \pmod{13 \cdot 31} \Leftrightarrow 10^k \equiv \equiv 1 \pmod{13} \wedge 10^k \equiv 1 \pmod{31} \Leftrightarrow k \,\vdots\, 6 \wedge k \,\vdots\, 15$. Наименьшее такое положительное k равно 30.

10.65. 1) Пусть k — порядок a по модулю m. Тогда $a^k \equiv \equiv 1 \pmod{a^m-1}$. Следовательно, $(a^k-1) \,\vdots\, (a^m-1)$. Наименьшее такое k равно m.

2) Так как порядок a по модулю a^m-1 равен m (п. 1), то, согласно задаче 10.59.5, $\varphi(a^m-1) \,\vdots\, m$.

10.66. 1) $(2^{2^n}+1) \,\vdots\, p \Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv -1 \pmod p \Rightarrow 2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p$. Если k — порядок 2 по модулю p, то $2^{n+1} \,\vdots\, k$. Значит, $k = 2^l$ и $l \leqslant n+1$. Если предположить, что $l < n+1$, то $2^{2^n} = (2^{2^l})^{2^{n-l}} \equiv \equiv 1 \pmod p$, что противоречит условию.

10.68. a — первообразный корень по модулю m. Это означает, что порядок a по модулю m равен $\varphi(m)$. Согласно задаче 10.59.1, это равносильно тому, что в группе $\mathbf{Z}_m^*$ порядок элемента $\bar{a}$ равен $\varphi(m)$, т. е. $\bar{a}$ порождает циклическую группу порядка $\varphi(m)$. Поскольку порядок всей группы $\mathbf{Z}_m^*$ тоже $\varphi(m)$, то эта циклическая группа совпадает с $\mathbf{Z}_m^*$.

10.71. Если g и h — первообразные корни по модулю $p \neq 2$, то $h = g^s$, где s взаимно-просто с $p-1$ (см. задачу 10.70). Так как $p-1$ четно, то s нечетно и $gh = g^{s+1}$. Показатель $s+1$ четный, поэтому он не взаимно-прост с $p-1$ и gh — не первообразный корень.

10.75. $g^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow (g^{\frac{p-1}{2}}-1)(g^{\frac{p-1}{2}}+1) \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow g^{\frac{p-1}{2}} \equiv \equiv 1 \pmod p \vee g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod q$. Так как g — первообразный корень по модулю p, то $g^{\frac{p-1}{2}} \not\equiv 1 \pmod p$ и, следовательно, $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv \equiv -1 \pmod p$, т. е. $\operatorname{ind}_g(-1) = \frac{p-1}{2}$.

10.76. Воспользовавшись определением индекса и результатом задачи 10.59.4, имеем:

1) $a \equiv b \pmod p \Leftrightarrow g^{\operatorname{ind}_g a} \equiv g^{\operatorname{ind}_g b} \pmod p \Leftrightarrow \operatorname{ind}_g a \equiv \operatorname{ind}_g b \pmod{p-1}$.

2) $g^{\mathrm{ind}_g ab} \equiv ab \equiv g^{\mathrm{ind}_g a} g^{\mathrm{ind}_g b} = g^{\mathrm{ind}_g a + \mathrm{ind}_g b} \pmod p \Leftrightarrow \mathrm{ind}_g ab \equiv$
$\equiv \mathrm{ind}_g a + \mathrm{ind}_g b \pmod{p-1}$.

10.77. 1) Воспользовавшись результатом задачи 10.76.4, получаем $g^{\mathrm{ind}_g a} \equiv h^{\mathrm{ind}_h a} \pmod p \Leftrightarrow \mathrm{ind}_g a \equiv \mathrm{ind}_h a \cdot \mathrm{ind}_g h \pmod{p-1}$.

2) Рассматривая сравнение п. 1 как линейное сравнение с неизвестным $\mathrm{ind}_h a$ и воспользовавшись результатом задачи 10.54, получим $\mathrm{ind}_h a = \mathrm{ind}_g a \cdot (\mathrm{ind}_g h)^{\varphi(p-1)-1} \pmod{p-1}$.

10.80. $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3n^2-1}{n(n^2-1)}$. Если n четное, то числитель нечетный, знаменатель четный и дробь представляется смешанно-периодической. Если n нечетное ($n=2k+1$), то числитель $3n^2-1=2(6k^2+6k+1)$ делится на 2, но не делится на 4, а знаменатель $n^2-1=4k(k+1)$ делится на 4. Значит, и в этом случае дробь представляется смешанно-периодической.

10.81. 1) Пусть x_0 — произвольное целое число. Тогда $ax_0^n \equiv$
$\equiv b \pmod p \Leftrightarrow \mathrm{ind}_g a + n\, \mathrm{ind}_g x_0 \equiv \mathrm{ind}_g b \pmod{p-1} \Leftrightarrow n\, \mathrm{ind}_g x_0 \equiv$
$\equiv \mathrm{ind}_g b - \mathrm{ind}_g a \pmod{p-1}$. Это означает, что сравнения $ax^n \equiv$
$\equiv b \pmod p$ и $n\, \mathrm{ind}_g x \equiv \mathrm{ind}_g b - \mathrm{ind}_g a \pmod{p-1}$ равносильны.

10.83. а) $\Leftrightarrow$ б) Это частный случай задачи 10.81; б) $\Leftrightarrow$ в)
$a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow \frac{p-1}{d} \mathrm{ind}_g a \equiv 0 \pmod{p-1} \Leftrightarrow \mathrm{ind}_g a \,\vdots\, d$.

10.84. 1) Если в задаче 10.83 положить $n=2$, то $d=$ НОД $(2, p-1)=2$, так как $p-1$ — четное число.

2) При любом ненулевом $\bar a \in \mathbf{Z}_p$ $\bar a^{p-1} = \bar 1 \Leftrightarrow (\bar a^{\frac{p-1}{2}} - \bar 1)(\bar a^{\frac{p-1}{2}} +$
$+ \bar 1) = \bar 0 \Leftrightarrow \bar a^{\frac{p-1}{2}} = \bar 1 \vee \bar a^{\frac{p-1}{2}} = -\bar 1$, т. е. $\bar a$ обязательно является решением одного из двух уравнений: $\bar x^{\frac{p-1}{2}} = \bar 1$ или $\bar x^{\frac{p-1}{2}} = -\bar 1$. Поскольку, согласно п. 1, множество решений первого уравнения совпадает с множеством классов квадратичных вычетов, то множество решений второго совпадает с множеством квадратичных невычетов.

3) Если a — квадратичный вычет, то сравнение $x^2 = a \pmod p$ имеет решение $\bar c$. Но тогда оно имеет решение $-\bar c$, причем поскольку $p \neq 2$, то $\bar c \neq -\bar c$, так как $\bar c = -\bar c \Rightarrow 2\bar c = \bar 0 \Rightarrow \bar c = \bar 0 \Rightarrow a \equiv$
$\equiv 0 \pmod p$ противоречит условию.

10.89. 1) Поскольку НОД $(2, p)=1$ и НОД $(a, p)=1$, то при любом $x_0 \in \mathbf{Z}$ имеем $ax_0^2 + bx_0 + c \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow 4a^2x_0^2 + 4abx_0 +$
$+ b^2 - b^2 + 4ac \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow (2ax_0 + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod p$.

2) Следует из результатов задач 10.84 и 10.88.1.

10.93. 1) Если $p = 4n+1$, то $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2n} = 1 \equiv 1$. Значит, -1 — квадратичный вычет по модулю $p = 4n+1$. Если $p =$
$= 4n+3$, то $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{2n+1} = -1$. Значит, -1 — квадратичный невычет по модулю $p = 4n+3$.

2) Пусть q — простой делитель числа $(2p_1p_2\dots p_k)^2+1$. Тогда $(2p_1p_2\dots p_k)^2+1\equiv 0 \pmod q$. Значит, сравнение $x^2+1\equiv \equiv 0 \pmod q$ имеет решение, и так как $q\neq 2$, то, согласно п. 1, q имеет вид $4n+1$.

3) Достаточно заметить, что в п. 2 q не совпадает ни с одним из чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$.

10.94. Надо доказать, что при любом a сравнение $x^3\equiv \equiv a \pmod p$ имеет решение и притом единственное. Согласно результату задачи 10.83, при $a\not\equiv \pmod p$ это сравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $a^{\frac{p-1}{d}}\equiv \pmod p$. Но здесь $d=$ НОД $(3, p-1)=$ НОД $(3, 3k+1)$, а $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ согласно теореме Ферма. Значит, при a, не сравнимом с нулем по модулю p, решение существует, а при $a\equiv 0 \pmod p$ существование решения очевидно. Таким образом, для любого $\bar a\in \mathbf{Z}_p$ существует элемент $\bar c\in \mathbf{Z}$ такой, что $\bar c^3=\bar a$. Поэтому отображение φ: $\mathbf{Z}_p\to \mathbf{Z}_p : \varphi(\bar x)=\bar x^3$ — это отображение $\mathbf{Z}_p$ на $\mathbf{Z}_p$. А так как множество $\mathbf{Z}_p$ конечное, то отображение φ взаимно-однозначно. Следовательно, существует отображение $\varphi^{-1}: \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p : \varphi^{-1}(\bar a) = \sqrt[3]{\bar a}$, т. е. значение $\sqrt[3]{\bar a}$ единственное.

10.96. 1) $\bar x^3-\bar 1=\bar 0 \Leftrightarrow (\bar x-\bar 1)(\bar x^2+\bar x+\bar 1)$. Отсюда сразу получаем одно решение: $x\equiv 1 \pmod{103}$. Так как $(-3)^{\frac{103-1}{2}}\equiv \pmod{103}$, то сравнение $x^2+x+1\equiv 0 \pmod{103}$ имеет два решения. Находим их, как в задаче 10.89.1: $x\equiv 56{,}46 \pmod{103}$.

11

11.2. Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$. Выбрав произвольные, но различные $n+1$ рациональные числа и вычислив значения многочлена $f(x)$ в них, получим систему линейных уравнений относительно $a_0, a_1, \dots, a_n$:

$$a_0+a_1x_1+\dots+a_nx_1^n=f(x_1);$$
$$a_0+a_1x_2+\dots+a_nx_2^n=f(x_2);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_0+a_1x_{n+1}+\dots+a_nx_{n+1}^n=f(x_{n+1}).$$

Определитель этой системы — это определитель Вандермонда $D=\prod\limits_{i<k}(x_i-x_k)\neq 0$, поэтому система имеет единственное решение. А так как все коэффициенты и свободные члены системы — рациональные числа, то из правила Крамера или из метода последовательного исключения неизвестных очевидно, что и $a_0, a_1, \dots, a_n$ — рациональные числа.

11.9. Легко видеть, что в кольце $\mathbf{Z}$ разность $f(15)-f(7)$ делится на $15-7=8$. Если $f(15)=9$ и $f(7)=5$, то $f(15)-f(7)$ 4 и не делится на 8.

11.12. 1) $f(x)-f(c)=a_n(x^n-c^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-c^{n-1})+\ldots+$ $+a_1(x-c)$. Согласно задаче 11.8.1, каждое слагаемое $a_k(x^k-c^k)$ делится на $x-c$. Значит, и сумма делится на $x-c$.

3) $f(x) \vdots (x-c) \Rightarrow f(x)=(x-c)\,g(x) \Rightarrow f(c)=(c-c)\,g(c)=0$. Из п. 2 имеем $f(c)=0 \Rightarrow f(x)=(x-c)\,g(x)$.

11.13. 1) При $k=1$ это задача 11.12.3. Допустим, что утверждение справедливо при $k-1$ различных корней. Тогда $f(x)=$ $=(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})h(x)$, где $h(x)\in A[x]$. Так как $f(x_k)=0$, то $(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})h(x_k)=0$. Поскольку A — область целостности, то $h(x_k)=0$. Опять, согласно задаче 11.12.3, $h(x)=$ $=(x-x_k)g(x)$, где $g(x)\in A[x]$, и $f(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-$ $-x_k)g(x)$.

11.20. 1) Пусть ε_1 и ε_2 — корни многочлена x^2+x+1. Тогда $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и $\varepsilon_i^3=1$. Значит, $\varepsilon_i^{3k}+\varepsilon_i^{3k+1}+\varepsilon_i^{3l+2}=1+\varepsilon_i+\varepsilon_i^2=0$, т. е. ε_i — корни многочлена $x^{3k}+x^{3l+1}+x^{3m+2}$. Остается сослаться на задачу 11.13.1.

11.25. Пусть c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — целые точки, в которых многочлен $f(x)$ принимает значения, равные 5. Тогда $f(x)-5=$ $=(x_1-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-c_4)(x-c_5)g(x)$. Если допустить, что a — целый корень многочлена $f(x)$, то $-5=(a-c_1)(a-c_2)\times$ $\times(a-c_3)(a-c_4)(a-c_5)$. Значит, число -5 должно иметь пять различных целый делителей, в то время как оно имеет их только четыре.

11.26. $\overline{1}$, $\overline{2}$, ..., $\overline{p-1}$ — все корни многочлена $\bar{x}^{p-1}-\overline{1}$.

11.34. Общие корни многочленов x^3+ax^2+18 и $x^3+bx+12$ — это корни их разности ax^2-bx+6. Поэтому если многочлены имеют два общих корня, то каждый из этих многочленов делится на ax^2+bx+6. Найдя остаток при делении x^3+ax^2+18 на ax^2- $-bx+6$ и приравняв его нулю, получим $(a^2+b)b-6a=0$ и $b=$ $=2a^2$. Отсюда $a=1$, $b=2$. Проверка показывает, что, действительно, НОД многочленов x^3+x^2+18 и $x^2+2x+12$ равен x^2- $-2x+6$. Таким образом, остается найти корни этого многочлена: $x_{1,2}=1\pm i\sqrt{5}$.

11.39. 2) Пусть $d=\text{НОД}(m, n)>0$, $m=m_1d$, $n=n_1d$. Разложим $f(x)$ и $g(x)$ на множители над $\mathbf{C}$:

$$f(x)=\prod_{k=0}^{m-1}\left[x-\left(\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}\right)\right];$$

$$g(x)=\prod_{l=0}^{n-1}\left[x-\left(\cos\frac{2l\pi}{n}+i\sin\frac{2l\pi}{n}\right)\right].$$

Два множителя в разложениях $f(x)$ и $g(x)$ совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{2k\pi}{m}=\frac{2l\pi}{n}$, или после преобразований $kn_1=lm_1$. Так как m_1 и n_1 взаимно-просты, то это возможно тогда и только тогда, когда $k=0$, m_1, $2m_1$, ..., $(d-1)m_1$, т. е. $k=$ $=k_1m_1$, где $k_1=0, 1, 2, \ldots, d-1$. При этих значениях k имеем:

$$\frac{2k\pi}{m}=\frac{2k_1m_1\pi}{m_1d}=\frac{2k_1\pi}{d};$$

$$\text{НОД}\,(f(x),\ g(x))=\prod_{k_1=0}^{d-1}\left[x-\left(\cos\frac{2k_1\pi}{d}+i\sin\frac{2k_1\pi}{d}\right)\right]=x^d-1.$$

11.44. $f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+$ $+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$. В силу ограничений, наложенных на $f^{(k)}(a)$, это равенство при $x>a$ дает $f(x)>0$.

11.55. Легко видеть, что $f(x)=f'(x)+\frac{x^n}{n!}$. Если допустить, что c — кратный корень многочлена $f(x)$, то $f(c)=f'(c)=0$ влечет $\frac{c^n}{n!}=0$ и $c=0$. Но нуль не является корнем $f(x)$.

11.56. Пусть $f(x)\,\vdots\, f'(x)$ и $f(x)=ap_1^{\alpha_1}(x)\ \ldots\ p_s^{\alpha_s}(x)$. Тогда из задачи 11.47 следует, что $f'(x)=bp_1^{\alpha_1-1}(x)\ \ldots\ p_s^{\alpha_s-1}(x)$. А так как степень $f'(x)$ на 1 меньше степени $f(x)$, то $f(x)=ap^{\alpha}(x)$. Отсюда $f'(x)=\alpha ap^{\alpha-1}(x)\,p'(x)$ и $f(x)\,\vdots\,f'(x)\Rightarrow f(x)\,\vdots\,p'(x)$. Если допустить, что $p'(x)$ имеет неприводимый над F множитель, то на него делится $p(x)$, а это невозможно, так как этот множитель не совпадает с $p(x)$ (степень меньше). Поэтому $p'(x)=\text{const}$. Будем считать $p'(x)=1$. Тогда $p(x)=x-c$ и $f(x)=a(x-c)^{\alpha}$.

11.57. $f(x)$ делится на x, так как каждое слагаемое делится на x. Согласно задаче 11.46, достаточно показать, что $f'(x)$ делится на x^n. Имеем

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}[(2x-x^2)^{k-1}(2-2x)-2x^{k-1}]=2(1-x)\sum_{k=1}^{n}(2x-$$
$$-x^2)^{k-1}-2\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=2(1-x)\frac{1-(2x-x^2)^n}{(1-x)^2}-2\frac{1-x^n}{1-x}=$$
$$=\frac{2}{1-x}[-(2x-x^2)^n+x^n]=2x^n\,\frac{1-(2-x)^n}{1-x}.$$

Остается заметить, что $\frac{1-(2-x)^n}{1-x}$ — многочлен, так как $1-(2-x)^n$ делится на $1-x$.

11.72. Разделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком: $f(x)=g(x)s(x)+$ $+cx+d$. Тогда $f(x_1)+f(x_2)=c(x_1+x_2)+2d=-ca+2d$.

11.73. Разделим $f(x)$ на $x^2-2ax+a^2-b$ с остатком: $f(x)=$ $=(x^2-2ax+a^2-b)s(x)+cx+d$. Тогда c и d — целые, а $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$ — корни многочлена $x^2-2ax+a^2-b$. Поэтому $f(a+$ $+\sqrt{b})+f(a-\sqrt{b})=2ac+2d$ — целое.

11.77. Пусть $x+y=u$, $xy=v$. Тогда:

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=u^2-v=a,$$
$$x^3+y^3=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=u(u^2-3v)=b.$$

Отсюда следует $2u^3-3au+b=0$. Если a и b — такие, что существует единственная пара x, y, удовлетворяющая системе, то существует и единственное u, удовлетворяющее этому уравнению. Значит, все три корня уравнения совпадают, а их сумма равна нулю. Поэтому 0 — корень уравнения. Следовательно, $a=b=0$.

11.78. Из $x_1+x_2+x_3=0$ следует, что $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=0$. Но $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a$. Поэтому $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a=0$. При x_1, x_2, x_3 действительных этого быть не может, так как $a>0$.

11.80. 1) $x_1+x_2+x_3=-7$ и $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=24$. Следовательно, $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=49$, откуда $x_1^2+x_2^2+x_3^2+48=49$ и $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. Если бы все три корня были действительными, то каждый $x_i^2<1$, так как никакое $x_i\neq 0$ $(x_1x_2x_3=1)$. Но тогда $(x_1x_2x_3)^2<1$. Противоречие.

11.84. Если a, b, c — корни многочлена $f(x)$, то по теореме Виета это равносильно системе

$$a+b+c=-a;$$
$$ab+bc+ac=b;$$
$$abc=-c.$$

При $c=0$ получаем $a_1=0$, $b_1=0$, $c_1=0$ и $a_2=1$, $b_2=-2$, $c_2=0$. При $c\neq 0$ получаем:

$$ab=-1;$$
$$c(b+1)(b-1)=b(b+1);$$
$$c=\frac{2-b^2}{b}.$$

Отсюда при $b=-1$ имеем $a_3=1$, $b_3=-1$, $c_3=-1$. При $b\neq -1$ получаем $c\frac{b}{b-1}=\frac{2-b^2}{b}$ и $b^3-2b+2=0$. Это уравнение имеет три различных корня: b_4, b_5, b_6, не совпадающих ни с одним из найденных ранее значений b_1, b_2, b_3. Значит, существует шесть многочленов требуемого вида.

11.85. Пусть степень $f(x)$ равна n и не меньше степени $g(x)$. Если предположить, что $f(x)\neq g(x)$, то многочлен $h(x)=[f(x)-g(x)]f'(x)$ ненулевой. Пусть c — k-кратный корень многочлена $f(x)$. Тогда c — корень $g(x)$, а следовательно, и $f(x)-g(x)$. Кроме того, c — $(k-1)$-кратный корень $f'(x)$. Значит, c — k-кратный корень $h(x)$. Аналогично, если c — k-кратный корень многочлена $f(x)-1$, то c — k-кратный корень многочлена $h(x)$. Так как сумма кратностей корней многочлена $f(x)$ равна n и сумма кратностей корней многочлена $f(x)-1$ тоже равна n, то сумма кратностей корней многочлена $h(x)$ больше или равна $2n$. Значит, степень $h(x)$ больше или равна $2n$. С другой стороны, видно, что степень $f(x)\leqslant 2n-1$. Итак, $h(x)$ не может быть ненулевым многочленом. А если $h(x)=0$, то $f(x)=g(x)$.

12

12.6. 1) Коэффициенты a_i многочлена $f(x)$ — это элементы из K — поля частных области целостности A. Значит, каждый из них можно представить в виде $a_i = \frac{s_i}{t_i}$, где s_i, $t_i \in A$. Если t — произведение всех знаменателей этих коэффициентов, то $f(x) = \frac{1}{t} f_1(x)$ и $f_1(x)$ — многочлен с коэффициентами из A. Так как A — факториальное кольцо, то коэффициенты многочлена $f_1(x)$ имеют НОД. Пусть $s \in A$ — этот НОД. Тогда $f_1(x) = sf^*(x)$ и НОД коэффициентов многочлена $f^*(x)$ равен единице, т. е. $f^*(x)$ — примитивный многочлен. Итак, $f(x) = \frac{1}{t} f_1(x) = \frac{s}{t} f^*(x)$.

3) Допустим, что $f^*(x)$ можно разложить в $A[x]$: $f^*(x) = \varphi(x)\psi(x)$, где каждый множитель — необратимый элемент. Поскольку $f^*(x)$ — примитивный многочлен, то в его разложении не может участвовать многочлен нулевой степени, т. е. элемент из A. Значит, степень каждого из многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не меньше единицы. Но тогда $f^*(x) = \varphi(x)\psi(x)$ — это разложение в $K[x]$.

13

13.4. 1) Пусть x_1, x_2, x_3 — искомая тройка. Если $x_1+x_2+x_3=a$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=b$, то $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{1}{2}[(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)] = \frac{a^2-b}{2} = c \in \mathbf{Z}$. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями многочлена x^3-ax^2+cx-3 с целыми коэффициентами. Согласно результату задачи 13.2, этот многочлен может иметь лишь целые корни. Так как $x_1x_2x_3=3$, то здесь возможны следующие комбинации: 1, 1, 3; —1, —1, 3; —1, 1, —3.

2) Пусть x_1, x_2, x_3 — искомые числа, x_1 — целое, $x_1+x_2+x_3=a$. Тогда

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2} = \frac{2a^2-37}{4}.$$

Если $x_1x_2x_3=c$, то x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $4x^3-ax^2+(2a^2-37)x+c=0$ с целыми коэффициентами. Знаменателями корней этого уравнения могут быть лишь 1, 2, 4, причем знаменатель x_2 и x_3 равен 2 или 4. Пусть $x_2 = \frac{u}{2}$. Тогда очевидно, что x_3 можно представить в форме $x_3 = \frac{v}{2}$ и $x_1 \vdots 4$. Так как $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \frac{37}{2}$, то x_1 может быть равно 4 или —4. В этом случае $x_2^2+x_3^2=\frac{37}{2}-16=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$ — единственное представление с точностью до порядка слагаемых. Поэтому искомыми тройками являются ± 4, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ со всевозможными комбинациями знаков. Знаменателя 4 у x_2 и x_3 быть не может, так как в этом случае $x_1 \vdots 16$, а это невозможо, поскольку $16^2>\frac{37}{2}$.

13.12. 8) Заметим, что $f(x)=x^{p-1}+\ldots+x+1=\frac{x^p-1}{x-1}$. Полагая $x=y+1$, получим $f(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+py^{p-2}+C_p^2y^{p-3}+\ldots+C_p^{p-2}y+p$. Каждый коэффициент $C_p^k=\frac{p!}{k!\,(p-k)!}\vdots p$, поскольку числитель делится на p, знаменатель не делится на p, а число C_p^k — целое. Остается воспользоваться критерием Эйзенштейна.

13.13. 1) Коэффициент при x^{p-k} равен C_p^k и делится на p.

2) $f(x)=f(x+a)\vdots\varphi(x+a)$.

3) $f(x)$, а следовательно, и $\varphi(x)$ не имеет корней в $\mathbf{Z}_p$.

4) Если бы все эти многочлены были попарно различны, то многочлен $f(x)$ делился бы на их произведение, а степень этого произведения больше $2p$.

5) Если $\varphi(x+k)=\varphi(x+l)$, $0\leqslant k<l\leqslant p-1$, то $\varphi(x)=\varphi(x+m)=\varphi(x+2m)=\ldots=\varphi(x+(p-1)m)$, где $m=l-k$. Так как 0, m, $2m$, $\ldots$, $(p-1)m$ — все элементы поля $\mathbf{Z}_p$, то $\varphi(x)=\varphi(x+1)=\ldots=\varphi(x+p-1)$.

6) $\varphi(a)-\varphi(0)=a^p-a+1-1=0$.

7) Многочлен $\varphi(x)-\varphi(0)$ имеет p корней. Значит, степень его не меньше p, поэтому степень $\varphi(x)$ не меньше p, а больше p она быть не может, поскольку $f(x)\vdots\varphi(x)$.

8) $f(x)=\varphi(x)$.

9) Доказательство аналогично доказательству п. 8.

10) Достаточно воспользоваться п. 9 и результатом задачи 13.9.

13.19. 6) Покажем, что поля $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{q})$ не изоморфны. Если допустить, что изоморфизм φ этих полей существует, то $\varphi(1)=1$, $\varphi(p)=\varphi(1+\ldots+1)=\varphi(1)+\ldots+\varphi(1)=p$. Но $\varphi(\sqrt{p})=a+b\sqrt{q}$, где a, $b\in\mathbf{Q}$. Поэтому $p=\varphi(p)=\varphi^2(\sqrt{p})=a^2+2ab\sqrt{q}+q$. Следовательно, $ab=0$. Если $a=0$, то $p=q$, что противоречит условию. Если $b=0$, то $\varphi(\sqrt{p})=a=\varphi(a)$, что противоречит взаимной однозначности φ.

13.25. 1) Докажем, что система u_1v_1, u_1v_2, $\ldots$, u_sv_t линейно-независима над F. Пусть $c_{ik}\in F$ — такие, что $\sum\limits_{k=1}^{t}\sum\limits_{i=1}^{s}c_{ik}u_iv_k=0$. Поскольку система v_1, v_2, $\ldots$, v_t линейно-независима над P, то

$$\sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s} c_{ik}u_i\right)v_k=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} c_{ik}u_i=0$$

при любом k. А так как система $u_1, u_2, \ldots, u_s$ линейно-независима над F, то все $c_{ik}=0$. Пусть теперь $z\in T$. Тогда $z=\sum_{k=1}^{t} a_k v_k$, где все $a_k\in P$. Но тогда $a_k=\sum_{i=1}^{s} b_{ki}u_i$, где $b_{ki}\in F$. Подставляя a_k в выражение для z, получаем $z=\sum_{k=1}^{t}\sum_{i=1}^{s} b_{ki}u_i v_t$.

13.29. 7) Пусть $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{2}}=z$. Тогда $z^3=-1-i\sqrt{2}$, $z^3+1=-i\sqrt{2}$, $z^6+2z^3+3=0$.

13.30. Число $a+bi$ является корнем многочлена $x^2-2ax+a^2+b^2$.

13.31. 1) Пусть z — корень многочлена $f(x)\in F[x]$. Тогда $f(x)=ap_1(x)\ldots p_k(x)$, где $a\in F$ и все $p_i(x)$ — неприводимые многочлены со старшими коэффициентами 1. Так как $f(z)=0$, то какое-то $p_i(z)=0$.

2) Если $p(x)$ и $q(x)$ — неприводимые многочлены со старшими коэффициентами 1, корнем которых является z, то либо $p(x)=q(x)$, либо $p(x)$ и $q(x)$ взаимно-просты. Второго случая быть не может, так как $u(x)p(x)+v(x)q(x)=1$ влечет $1=u(z)p(z)+v(z)q(z)=0$.

3) Согласно доказательству п. 1, z — корень какого-то неприводимого множителя многочлена $f(x)$. А в силу п. 2 этот неприводимый многочлен — $p(x)$.

13.35. 1) Так как P — расширение F степени n, то любая система из $(n+1)$-го элемента поля P, в частности $1, z, \ldots, z^n$, линейно-зависима.

2) Линейная зависимость системы п. 1 означает существование таких $a_0, a_1, \ldots, a_n\in F$, что $a_0 1+a_1 z+\ldots+a_n z^n=0$.

13.38. Согласно задаче 13.35.1, система векторов $1, \beta, \beta^2, \beta^3$ линейно-зависима. Но $\beta^2=4\alpha^4-4\alpha^3+\alpha^2$. Разделив многочлен $4x^4-4x^3+x^2$ на x^3-x-1 с остатком, получим $4x^4-4x^3+x^2=(x^3-x-1)(4x-4)+5x^2-4$. Подставляя сюда $x=\alpha$, получаем $\beta^2=5\alpha^2+4$. Аналогично $\beta^3=2\alpha^2+9\alpha-5$. Теперь остается найти линейную зависимость системы векторов $1, \beta, \beta^2, \beta^3$, каждый из которых выражен через базис $1, \alpha, \alpha^2$. В результате стандартных вычислений получаем $\beta^3-4\beta^2+9\beta-11=0$, т. е. β — корень уравнения $x^3-4x^2+9x-11=0$.

13.40. Очевидно, что $\sqrt[3]{2}\in A\subseteq \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$. Если бы A было полем, то в силу минимальности простого расширения $A=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$. Но число $\sqrt[3]{4}$, представление которого, согласно теореме об освобождении от иррациональности в знаменателе, однозначно, не принадлежит A.

13.43. Пусть $\alpha\in P\setminus \mathbf{R}$. Так как α — корень некоторого неприводимого многочлена над $\mathbf{R}$ и $\alpha \overline{\in} \mathbf{R}$, то $\alpha^2+p\alpha+q=0$ при некоторых $p, q \in \mathbf{R}$, причем $p^2-4q<0$. Тогда $\left(\alpha+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q=-b^2$, $b \in \mathbf{R}$. Обозначив $j=\frac{\alpha}{b}+\frac{p}{2b}$, имеем $j^2=-1$. Ясно, что $\alpha \in \mathbf{R}(j)$ и поле $\mathbf{R}(j)$ изоморфно полю $\mathbf{R}(i)=\mathbf{C}$. Покажем, что $P=\mathbf{R}(j)$. Допустим, что $P \setminus \mathbf{R}(j) \neq \varnothing$. Если $\beta \in P \setminus \mathbf{R}(j)$, то, как и выше, устанавливается существование такого $k \in P$, что $k^2=-1$, $\beta \in \mathbf{R}(k)$. Так как $\beta \overline{\in} \mathbf{R}(j)$, то $k \neq j$ и $k-j \neq 0$, $k+j \neq 0$. Но $(k-j)(k+j)=k^2-j^2=0$, что невозможно.

13.44. 1) Пусть степень алгебраического числа z_1 над F равна n. Тогда z_1 не является корнем никакого многочлена степени ниже n, т. е. $c_0 1+c_1 z_1+\ldots+c_{n-1} z_1^{n-1}=0$ влечет $c_0=c_1=\ldots=c_{n-1}=0$, т. е. $1, z_1, \ldots, z_1^{n-1}$ линейно-независимы над полем F. Кроме того, согласно теореме об освобождении от иррациональности в знаменателе, каждое $t \in F(z_1)$ можно представить в виде $t=a_0 \cdot 1+a_1 z_1+\ldots+a_{n-1} z_1^{n-1}$.

13.45. 2) Согласно п. 1), $z_1, z_2 \in \bar{F} \Rightarrow z_1+z_2 \in F(z_1, z_2) \subseteq \bar{F}$. Аналогично для остальных арифметических операций.

13.46. z является корнем некоторого многочлена $f(x)=a_n x^n+\ldots+a_1 x+a_0$ над P. Согласно задаче 13.44, $T=F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ — конечное расширение поля F, а $T(z)$ — конечное расширение поля T. В силу задачи 13.26, $T(z)$ — конечное расширение поля F, и, согласно задаче 13.35, z — алгебраическое число над полем F.

13.47. Если $s=1$, то $u=u_1 \in F$ и, значит, u — алгебраическое над F. Пусть числа $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ — алгебраические над F. Если $u=u_s$ есть сумма, разность, произведение или частное x_i и x_k, то, согласно задаче 13.44.3, $u \in F(x_i, x_k)$ — алгебраическое число. Если же $u_s=\sqrt[n]{u_l}$, то u_s — алгебраическое над $F(u_l)$, а $F(u_l)$ — алгебраическое расширение поля F. Согласно задаче 13.43, u_s — алгебраическое число над полем F.

13.49. 1) Пусть $\beta \in F(\alpha)$. Тогда β можно представить в виде $\beta=\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}$, где $\varphi(x)$, $\psi(x) \in F[x]$. Пусть $d(x)$ — наибольший общий делитель $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, старший коэффициент которого совпадает со старшим коэффициентом $\psi(x)$. Тогда $\varphi(x)=d(x)f(x)$, $\psi(x)=d(x)g(x)$. Ясно, что $f(x)$, $g(x) \in F[x]$ и взаимно-просты, старший коэффициент $g(x)$ равен единице и $\beta=\frac{\varphi(\alpha)}{\psi(\alpha)}=\frac{d(\alpha)f(\alpha)}{d(\alpha)g(\alpha)}=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$.

2) Пусть $\frac{f_1(\alpha)}{g_1(\alpha)}=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, где $f(x)$, $g(x)$ и $f_1(x)$, $g_1(x)$ удовлетворяют условиям п. 1. Тогда $f_1(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g_1(\alpha)=0$. Рассмотрим многочлен $h(x)=f_1(x)g(x)-f(x)g_1(x)$. Так как $h(x)$ — многочлен над F и трансцендентное число α является его корнем,

то $h(x)=0$. Значит, $f_1(x)g(x)=f(x)g(x)$. Поскольку $f(x)g_1(x) \vdots g(x)$, а $f(x)$ и $g(x)$ взаимно-просты, то $g_1(x) \vdots g(x)$. Так как старшие коэффициенты многочленов $g(x)$ и $g_1(x)$ равны единице, то $g_1(x) = g(x)$, а следовательно, и $f_1(x) = f(x)$.

4) Пусть $\beta = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, как в п. 1. Если предположить, что β — корень многочлена над F, то при некоторых $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in F$

$$a_n\left[\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\right]^n + a_{n-1}\left[\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\right]^{n-1} + \ldots + a_1\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} + a_0 = 0$$

и

$$a_nf^n(\alpha)+a_{n-1}f^{n-1}(\alpha)g(\alpha)+\ldots+a_1f(\alpha)g^{n-1}(\alpha)+a_0g^n(\alpha)=0,$$

т. е. трансцендентное число α — корень многочлена

$$a_nf^n(x)+a_{n-1}f^{n-1}(x)g(x)+\ldots+a_1f(x)g^{n-1}(x)+a_0g^n(x)=0.$$

Значит, этот многочлен нулевой. Поэтому

$$a_nf^n(x) = [-a_{n-1}f^{n-1}(x)g(x) + \ldots + a_1f(x)g^{n-1}(x) + a_0g^n(x)] \vdots g(x).$$

Так как $f^n(x)$ и $g(x)$ взаимно-просты, то $a_n \vdots g(x)$, т. е. $g(x)$ — постоянная из F (единица). Аналогично доказывается, что $f(x)$ — постоянная из F. Таким образом, $\beta \in F$.

5) Пусть $\beta = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, как в п. 1. Тогда $\beta g(\alpha) - f(\alpha) = 0$, т. е. α — корень многочлена $\beta g(x) - f(x)$. Так как $\beta \in F(\beta)$ и $g(x)$, $f(x)$ — многочлены над F, а следовательно, над $F(\beta)$, то α — корень многочлена над $F(\beta)$.

13.50. 2) К прямой, соединяющей точки 0 и 1, проведем перпендикуляр в точке 0. Отложим на нем единичный отрезок от начала координат.

3) Поскольку комплексные числа складываются, как векторы, то построение $u+v$ и $u-v$ очевидно. Для построения uv нужно сначала построить отрезок $|uv|$, а это четвертый пропорциональный к отрезкам 1, $|u|$, $|v|$. Затем строим угол $\arg u + \arg v$, а далее все очевидно. Для построения $\frac{u}{v}$ нужно сначала построить отрезок $\left|\frac{u}{v}\right|$, а это четвертый пропорциональный к отрезкам $|v|$, $|u|$, 1. Затем строим угол $\arg u - \arg v$, а далее все очевидно.

5) Построение $\sqrt{u}$ сводится к построению $\sqrt{|u|}$ (а это среднее пропорциональное между отрезками $|u|$ и 1) и построению угла $\frac{1}{2}\arg u$.

13.51. 2) Пусть $u_k=x_k+y_ki$ ($k=1, 2, 3, 4$). Уравнение прямой, проходящей через u_1 и u_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Уравнение окружности с центром в u_3, проходящей через u_4:

$$(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2.$$

Так как $x_k = \frac{u_k+\bar{u}_k}{2} \in F$ и $y_k=\frac{u_k-\bar{u}_k}{2i} \in F$, а коэффициенты уравнений прямой и окружности рационально выражаются через x_k, y_k, то эти коэффициенты принадлежат полю F. Поэтому решение системы, состоящей из уравнений прямой и окружности, сводится к решению квадратного уравнения с коэффициентами из поля F (разумеется, нас интересуют только действительные решения). Если дискриминант z этого квадратного уравнения есть полный квадрат, то решение принадлежит F, а если нет — то $F(\sqrt{z})$.

13.53. 3) Один из корней уравнения $x^7=1$ есть 1, а остальные удовлетворяют уравнению $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$. Разделив левую и правую части этого уравнения на x^3, после некоторых преобразований получим

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Полагая $y=x+\frac{1}{x}$, получим $y^3+y^2-2y-1=0$: Легко видеть, что это уравнение неразрешимо в квадратных радикалах. Значит и исходное уравнение неразрешимо в квадратных радикалах, так как соотношение $y=x+\frac{1}{x}$ показывает, что x и y одновременно выражаются или нет в квадратных радикалах.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1

1.1. 1) $A\wedge\overline{B}$; 2) $\overline{A}\wedge\overline{B}$; 3) $A\vee B$; 4) $\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}$. **1.2.** 1) $A\Rightarrow B$; 2) $B\Rightarrow A$; 3) $A\Leftrightarrow B$; 4) $B\Rightarrow\overline{A}$; 5) $B\Leftrightarrow\overline{A}$. **1.3.** 1) $2\cdot 3\neq 7$, истинно; 2) $2\leqslant 3$, истинно; 3) $2<3$, истинно; 4) $2\leqslant 2$, истинно; 5) $2<2$, ложно; 6) $2\geqslant 3$, ложно; 7) 600 не делится на 6 или не делится на 14, истинно; 8) 600 не делится на 6 и не делится на 14, ложно; 9) среди тригонометрических функций нет четных или нет нечетных, ложно; 10) среди тригонометрических функций нет четных и нет нечетных, ложно; 11) среди тригонометрических функций есть четные или есть нечетные, истинно. **1.5.** $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. **1.7.** 1) $A\cap B=\{0, 4\}$, $A\cup B=\{-1, 0, 3, 4, 6\}$, $A\cap B=[1, 2]$, $A\cup B=[0, 5]$, $A\setminus B=[0, 1[$, $B\setminus A=]2, 5]$; 3) $A\cap B=\{0\}$, $A\cup B=[0, 2]\cup\{4, 6\}$; $A\setminus B=]0, 2]$, $B\setminus A=\{4, 6\}$; 4) $A\cap B=]5, 7]$, $A\cup B=]-\infty, 8[$, $A\setminus B=]-\infty, 5]$, $B\setminus A=]7, 8[$; 5) $A\cap B=[2, 3[\cup]5, 6]$, $A\cup B=[1, 7]$, $A\setminus B=[1, 2[\cup]6, 7]$, $B\setminus A=[3, 5]$. **1.8.** 1а) $A\cup B$; 1б) $A\setminus B$; 2) $A\cap B$. **1.9.** $\mathbf{R}\setminus(X\cup Y)$. **1.10.** 1) $A=B$; 2) $B\subseteq A$; 3) $A\cap B=\varnothing$. **1.13.** 1) $A\supseteq(A\cup B)\setminus B$; 2) $A\subseteq(A\setminus B)\cup B$; 3) верно; 4) $(A\cup B)\setminus C\subseteq A\cup(B\setminus C)$; 5) $(\overline{A}\cup C)\setminus B\subseteq(A\setminus B)\cup C$. **1.15.** Первое. **1.17.** 20; 30. **1.18.** 18. **1.19.** Истинно. **1.20.** Истинно. **1.21.** 1) 166; 2) 333; 3) 167; 4) 666; 5) 333. **1.22.** Истинны высказывания 2—6. **1.23.** Истинны высказывания 1, 3—5. **1.24.** 1) $(\forall x)\,x^2\geqslant 0$; 2) $(\forall x)\,x>7\Rightarrow x^2>49$; 3) $(\forall a)(\exists x)\,a+x=0$; 4) $(\exists x)(\forall a)a+x=a$. **1.25.** Высказывания 1—3, 6, 7, 9—14. **1.26.** 1) При любом рациональном x $x^2+x+1\neq 0$; 2) существует четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, который не является ромбом; 3) в любом параллелограмме диагонали не взаимно перпендикулярны; 4) в любом параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны; 5) существует такое положительное целое x, что $x>3$ и $x^2\leqslant 9$; 6) существует треугольник, в котором медианы не пересекаются в одной точке; 7) существует прямоугольный треугольник, в котором ни один из углов не равен 90°; 8) существует такое действительное число a, что уравнение $x^2=a$ не имеет действительных корней; 9) при любых натуральных x и y $x+y\neq 7$; 10) при любом x существует такое y, что $x\leqslant y$; 11) существует тупоугольный треугольник, в котором есть угол $\leqslant\frac{\pi}{2}$. **1.27.** 1) $(\exists x)2x-4>x+5$, истинно; 2) $(\exists x)x-3=2$, истинно; 3) $(\exists x)-x\geqslant 0$, истинно; 4) $(\forall x)x^2\geqslant 0$, истинно; 5) $(\forall x)x-5<2$, ложно; 6) $(\forall x)(\exists y)xy\neq 0$, ложно; 7) $(\forall x)(\exists y)x\leqslant y$, истинно; 8) $(\exists x)(\exists y)x\geqslant y$, истинно. **1.28.** 1) Нет; 2) существует прямая, не перпендикулярная к плоскости α. **1.29.** Нет. **1.30.** 1) Достаточно; 2) достаточно; 3) необходимо и достаточно; 4) необходимо; 5) необходимо и достаточно; 6) достаточно; 7) достаточно; 8) достаточно. **1.31.** 1) Необходимо; 2) необходимо и достаточно. **1.32.** 1) Тогда и только тогда; 2) тогда и только тогда; 3) тогда; 4) только тогда; 5) тогда и только тогда. **1.33.** В пп. 1, 2, 3, 7 есть теорема, обратная противоположной; в пп. 4—6 есть теорема обратная, противоположная, обратная противоположной. 1.34. 1) $A\times B=\{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$, $B\times A=\{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$; 2) $A\times B=\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$, $B\times A=\{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$. 1.35. См. рис. 1. 1.37. Нет. 1.40. 1) Рефлексивно, симметрично, транзитивно; 2) антирефлексивно, симметрично; 3) рефлексивно, симметрично, антисимметрично, транзитивно; 4) антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 5) рефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 6) рефлексивно, симметрично; 7) рефлексивно, симметрично, транзитивно; 8) рефлексивно, анти-

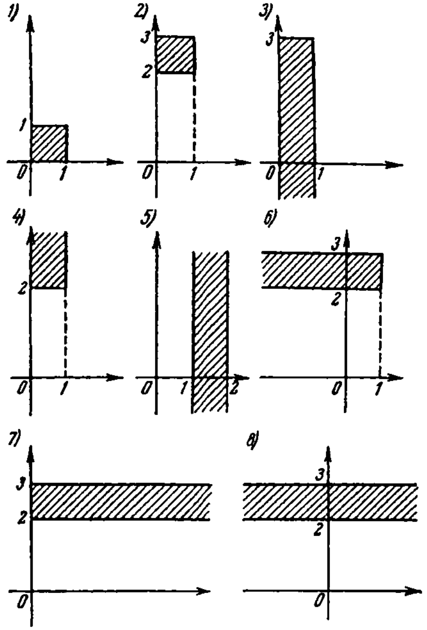

Рис. 1

симметрично, транзитивно; 9) антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно. 1.41. 1) $pr_1\rho=\{10, 9\}$, $pr_2\rho=\{1, 2\}$, антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 2) $pr_1\rho=\{1, 2, 3\}$, $pr_2\rho=\{1, 4, 9\}$, антисимметрично; 3) $pr_1\rho=\{2, 3, 4, 6\}$, $pr_2\rho=\{2, 3, 4, 6\}$, антирефлексивно, симметрично; 4) $pr_1\rho=\{1, 2, 3\}$, $pr_2\rho=\{2, 3, 4, \ldots, 10\}$, антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно. 1.42. 1) $pr_1\rho=pr_2\rho=\{1\}$, симметрично, антисимметрично, транзитивно; 2) $pr_1\rho=\{1\}$, $pr_2\rho=\{5\}$, антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 3) $pr_1\rho=pr_2\rho=\{3, 5\}$, симметрично, транзитивно; 4) $pr_1\rho=pr_2\rho=\{3, 5\}$, антирефлексивно, симметрично; 5) $pr_1\rho=pr_2\rho=\mathrm{N}$, симметрично; 6) $pr_1\rho=pr_2\rho=\mathrm{N}$, рефлексивно; 7) $pr_1\rho=\{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$, $pr_2\rho=\mathrm{N}$, антисимметрично; 8) $pr_1\rho=\mathrm{N}$, $pr_2\rho=\mathrm{N}\setminus\{1\}$, антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 9) $pr_1\rho=pr_2\rho=\mathrm{N}$, рефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 10) $pr_1\rho=\mathrm{N}$, $pr_2\rho=\{13, 14, 15, \ldots\}$, антирефлексивно, антисимметрично; 11) $pr_1\rho=pr_2\rho=\mathrm{N}$, антирефлексивно, симметрично; 12) $pr_1\rho=pr_2\rho\mathrm{N}$, рефлексивно, симметрично, транзитивно; 13) $pr_1\rho=\{3k|k\in\mathrm{N}\}$, $pr_2\rho=\mathrm{N}$, антирефлексивно, антисимметрично; 14) $pr_1\rho=pr_2\rho=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, антирефлексивно, симметрично; 15) $pr_1\rho=\mathrm{N}$, $pr_2\rho=\mathrm{N}\setminus\{1, 2\}$, антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 16) $pr_1\rho=pr_2\rho=\mathrm{N}$, рефлексивно, антисимметрично, транзитивно; 17) $pr_1\rho=\mathrm{N}$, $pr_2\rho=\{3, 4, 5, \ldots\}$, антирефлексивно, антисимметрично. 1.43. 1) $pr_1\rho=$

$=pr_2\rho=\mathbf{R}$, антисимметрично, 2) $pr_1\rho=pr_2\rho=\mathbf{R}$, рефлексивно, симметрично, транзитивно; 3) $pr_1\rho=pr_2\rho=[0, 2]$, симметрично, транзитивно; 4) $pr_1\rho=[0, 2]$, $pr_2\rho=[1, 3]$; 5) $pr_1\rho=pr_2\rho=\mathbf{R}$, симметрично. **1.44.** 1) $\bar\rho$ антирефлексивно, ρ^{-1} рефлексивно; 2) $\bar\rho$ рефлексивно, ρ^{-1} антирефлексивно; 3) $\bar\rho$ симметрично, ρ^{-1} симметрично; 4) $\bar\rho$ не антисимметрично, ρ^{-1} — антисимметрично; 5) $\bar\rho$ — не транзитивно, ρ^{-1} — транзитивно. **1.48.** 1) Да; 2) нет. **1.49.** $\rho = \Delta \bigcup \{(1, 2), (2, 1), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 6), (6, 4), (6, 5)\}$. 1.52. 1) Отображение; 2) взаимно-однозначное отображение; 3) обратимое отображение; 4) обратимое отображение; 5) взаимно-однозначное отображение; 6) взаимно-однозначное отображение; 7) не отображение; 8) обратимое отображение; 9) отображение; 10) не отображение; 11) обратимое отображение; 12) не отображение; 13) взаимно-однозначное отображение; 14) не отображение. **1.57.** 1) $\rho\circ\sigma = \{(1, 3)\}$, $\sigma\circ\rho = \{(1, 2), (2, 4)\}$, $\rho^2 = \{(1, 1)\}$, $\sigma^2 = \{(1, 3), (2, 4)\}$; 2) $\rho\circ\sigma = \{(3, 2), (3, 4)\}$, $\sigma\circ\rho = \{(1, 6), (2, 4)\}$, $\rho^2 = \{(1, 7)\}$, $\sigma^2 = \{(1, 1), (3, 3)\}$; 3) $\rho\circ\sigma = \sigma\circ\rho = \sigma$, $\rho^2 = \rho$, $\sigma^2=\sigma$. **1.63.** Воспользуйтесь результатами задач 1.38, 1.39 и 1.59. **1.64.** 1) Индукцией по c; 2) индукцией по a. **1.71.** Высказывания 1, 3, 4 истинны, высказывание 2 ложно. **1.72.** 1) $x=5$; 2) $x=5$; 3) $x=6$; 4) $x=18$; 5) $x=7$; 6) $x=7$. **1.73.** 1) $x=5$, $y=7$; 2) $x=7$, $y=6$. **1.74.** 1) $x=6$, $y=3$; 2) $x=5$, $y=3$; 3) $x=8$, $y=5$. **1.77.** 1) $x_1 = -\frac{63}{4}$, $x_2 = -\frac{23}{8}$; 2) $x_1 = -\frac{75}{8}$, $x_2 = -\frac{45}{8}$; 3) $x_1 = -\frac{515}{16}$, $x_2 = -\frac{355}{16}$, $x_3 = -\frac{273}{16}$.

2

2.2. 1) $x=1$, $y=11$; 2) $x=-\frac{2}{3}$, $y=-\frac{28}{9}$; 3) $x=-\frac{4}{11}$, $y=\frac{5}{11}$; 4) $x=11$, $y=-2$. **2.3.** 1) Сомножители отличны от нуля и имеют вид $a+bi$ и $c(b+ai)$; 2) сомножители имеют вид $a+bi$ и $c(a-bi)$. **2.4.** 1) 1; 2) i; 3) -1; 4) $-i$; 5) $\frac{15}{17}$; 6) $-\frac{11}{4}i$; 7) $-\frac{14}{5}$; 8) Умножьте и разделите данное выражение на $\left(1-\frac{1+i}{2}\right)$; $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(1+i)$; 9) 0. **2.6** 1) $x_1=1$, $y_1=3$; $x_2=9$; $y_2=5$; 2) $x_{1,2}=-5$, $y_{1,2}=\pm 5$. **2.8.** 1) z — любое чисто мнимое число и 0; 2) z — любое действительное число; 3) $z=1+bi$; 4) $z=0$; 5) $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z_4=\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 6) $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z_4=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 7) $z_1=0$, $z_{2,3}=\pm 1$, $z_{4,5}=\pm i$; 8) $z_1=-2+i$, $z_2=-2-9i$. **2.9.** $x=-2$. **2.10.** 1) $z=-\frac{3}{2}+2i$; 2) $z=\frac{3}{4}-i$; 3) $z=3+4i$; 4) $z=\frac{-1+3i}{2}$. 5) $z_{1,2}=\frac{4a\pm\sqrt{4a^2+3}}{16a^2-4}+\frac{1}{4}i$; 6) $z_{1,2}\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ при $a\in]-\infty, -2]$, $z_3=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ при любом a; 7) $z_1=-1+i$ при $a=1$, $z_2=\frac{-a^3+a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}+i$ при $a\in]-1, 1[\bigcup]1, 2]$, $z_3=\frac{-a^2-a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}$ при $a\in]1, 2]$; 8) $z=\frac{7+5i}{6}$. **2.12.** $n=4k$, где $k\in\mathbf{Z}$. **2.13.** 1) 2; 2) -2. **2.14.** $z_1=2+i$, $z_2=3+\frac{2}{3}i$. **2.15.** 1) $\pm(3+2i)$; 2) $\pm(3-2i)$;

3) $\pm(2+3i)$; 4) $\pm(2-3i)$; 5) $\pm(5+i)$; 6) $\pm(5-i)$; 7) $\pm(1+5i)$; 8) $\pm(1-5i)$; 9) $\pm\sqrt{6}$; $\pm i\sqrt{2}$. **2.16.** 1) $z_1=-5$, $z_2=-1-i$; 2) $z_1=3+4i$, $z_2=2+i$; 3) $z_1=\frac{1}{2}i$, $z_2=\frac{3+i}{2}$; 4) $z_1=2-4i$, $z_2=\frac{4}{3}(2+i)$; 5) $z_1=-i$, $z_2=\frac{-3+i}{2}$; 6) $z_1=1-i$, $z_2=\frac{4-2i}{5}$; 7) $z_1=1+i$, $z_2=-\frac{1}{5}(6+3i)$. **2.17.** 1) $x_{1,2}=\pm(\sqrt{7}+i)$, $x_{3,4}=\pm(\sqrt{7}-i$; 2) $x_{1,2}=\pm\frac{1+i\sqrt{11}}{6}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1-i\sqrt{11}}{6}$. **2.18.** 1) $k=-12i$; 2) $k_1=1$, $k_2=-1+i$. **2.19.** 1) $k>\frac{13}{4}$; 2) $0<k<\frac{4}{5}$. **2.20.** 1) $-11-2i$; 2) $-7+24i$; 3) $-38-39i$; 4) 0; 5) $(\cos^6\varphi-15\cos^4\varphi\sin^2\varphi+15\cos^2\varphi\sin^4\varphi-\sin^6\varphi)+i(6\cos^5\varphi\sin\varphi-20\cos^3\varphi\sin^3\varphi+6\cos\varphi\sin^5\varphi)$. **2.22.** 1) $2(\cos 0+i\sin 0)$; 2) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; 3) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; 7) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 8) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 9) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 10) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 11) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; 12) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$; 13) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$; 14) $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$; 15) $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$; 16) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; 17) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. Воспользуйтесь тем, что $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$; 18) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$; 19) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$. **2.23.** 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $-\varphi$; 4) $\pi+\varphi$; 5) $\frac{\pi}{2}-\varphi$; 6) $\varphi-\frac{\pi}{2}$; 7) $-\frac{\pi}{2}-\varphi$.

$$\textbf{2.24.}\ 1)\ \arg u=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+\varphi, & \text{если } \frac{2k\pi}{3}<\varphi<\frac{(2k+1)\pi}{3};\\ \text{не определен}, & \text{если } \varphi=\frac{k\pi}{3};\\ \varphi-\frac{\pi}{2}, & \text{если } \frac{(2k-1)\pi}{3}<\varphi<\frac{3k\pi}{3};\end{cases}$$

$$2)\ \arg v=\begin{cases}2\varphi+\frac{\pi}{4}, & \text{если } \frac{(8k-1)\pi}{4}<\varphi<\frac{(8k+3)\pi}{4};\\ \text{не определен}, & \text{если } \varphi=\frac{(4k+3)\pi}{4};\\ 2\varphi+\frac{5\pi}{4}, & \text{если } \frac{(8k+3)\pi}{4}<\varphi<\frac{(8k+7)\pi}{4}.\end{cases}$$

2.25. 1) $\cos(\pi-\varphi)+i\sin(\pi-\varphi)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$; 3) $2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi-\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi-\pi}{2}\right)$, если $\sin\frac{\varphi}{2}>0$, $-2\sin\frac{\varphi}{2}\times \left(\cos\frac{\pi+\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi+\varphi}{2}\right)$, если $\sin\frac{\varphi}{2}<0$; 4) $2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+ i\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$, если $\sin\frac{\varphi}{2}>0$, $-2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{3\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{3\pi-\varphi}{2}\right)$, если $\sin\frac{\varphi}{2}<0$; 5) $2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi+\varphi}{2}+i\sin\frac{\pi+\varphi}{2}\right)$, если $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, $-2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{3\pi+\varphi}{2}+i\sin\frac{3\pi+\varphi}{2}\right)$, если $\cos\frac{\varphi}{2}<0$; 6) $2\cos\frac{\varphi}{2}\times \left(\cos\frac{3\pi-\varphi}{2}+i\sin\frac{3\pi-\varphi}{2}\right)$, если $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, $-2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+ i\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$, если $\cos\frac{\varphi}{2}<0$; 7) $\frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; 8) $\frac{1}{\cos\varphi}\times \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)\right)$, если $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{1}{\cos\varphi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+ \varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right)$, если $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$. **2.26.** 1) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 2^{12}; 3) $-3{,}2$; 4) $-64i$; 5) -2; 6) $4i\sqrt{3}$; 7) $\cos(\pi-10\varphi)+i\sin(\pi- -10\varphi)$; 8) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(6\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(6\varphi-\frac{\pi}{12}\right)\right)$; 9) 2; 10) $\cos n\varphi- -i\sin n\varphi$; 11) $2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n(\varphi-\pi)}{2}+i\sin\frac{n(\varphi-\pi)}{2}\right)$; 12) $2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\times \left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)$. **2.27.** Из $z+\frac{1}{z}=2\cos\varphi$ следует, что $z= =\cos\varphi\pm i\sin\varphi$. **2.28.** 1) $\sin 3x=3\cos^2x\sin x-\sin^3x$, $\cos 3x=\cos^3x- -3\cos x\sin^2x$; 2) $\sin 4x=4\cos^3x\sin x-4\cos x\sin^3x$, $\cos 4x=\cos^4x- -6\cos^2x\sin^2x+\sin^4x$; 3) $\sin 6x=6\cos^5x\sin x-20\cos^3x\sin^3x+6\cos x\sin^5x$, $\cos 6x=\cos^6x-15\cos^4x\sin^2x+15\cos^2x\sin^4x-\sin^6x$. **2.29.** $\operatorname{tg}4x= =\frac{4\operatorname{tg}x-4\operatorname{tg}^3x}{1-6\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x}$, $\operatorname{tg}6x=\frac{6\operatorname{tg}x-20\operatorname{tg}^3x+6\operatorname{tg}^5x}{1-15\operatorname{tg}^2x+15\operatorname{tg}^4x-\operatorname{tg}^6x}$. **2.30.** Вычислите $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$ один раз, воспользовавшись формулой Муавра, второй раз — биномом Ньютона, а затем сравните действительные и мнимые части полученных чисел. **2.31.** Вычислите $(1+i)^n$ один раз, воспользовавшись формулой Муавра, второй раз — биномом Ньютона, а затем сравните действительные и мнимые части полученных чисел. **2.35.** 1) Если $n=1$, то $z=1$; если $n=2$, то z — любое действительное число; если $n\geqslant3$, то $z=0$ или $z= =\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k\in\mathbb{Z})$; 2) если $n=2$, то z — любое действительное или чисто мнимое число; если $n\neq2$, то $z=0$ или $z=\cos\frac{2k\pi}{n+2}+ +i\sin\frac{2k\pi}{n+2}$ $(k\in\mathbb{Z})$. **2.36.** 1) $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; 2) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; 3) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(3+8k)\pi}{12}+ +i\sin\frac{(3+8k)\pi}{12}\right)$, $k=0, 1, 2$; 4) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(5+12k)\pi}{18}+i\sin\frac{(5+12k)\pi}{18}\right)$,

$k=0,\ 1,\ 2$; 5) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(1+8k)\pi}{16}+i\sin\frac{(1+8k)\pi}{16}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$;

6) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(-1+8k)\pi}{16}+i\sin\frac{(-1+8k)\pi}{16}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$;

7) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{(7+8k)\pi}{16}+i\sin\frac{(7+8k)\pi}{16}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$;

8) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(1+6k)\pi}{18}+i\sin\frac{(1+6k)\pi}{18}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$;

9) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(-1+6k)\pi}{18}+i\sin\frac{(-1+6k)\pi}{18}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$;

10) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(5+12k)\pi}{36}+i\sin\frac{(5+12k)\pi}{36}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$;

11) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{(7+12k)\pi}{36}+i\sin\frac{(7+12k)\pi}{36}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$;

12) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\frac{(19+24k)\pi}{36}+i\sin\frac{(19+24k)\pi}{36}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2$;

13) $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{(13+24k)\pi}{48}+i\sin\frac{(13+24k)\pi}{48}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$;

14) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{(-5+24k)\pi}{72}+i\sin\frac{(-5+24k)\pi}{72}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$;

15) $\cos\frac{(1+6k)\pi}{24}+i\sin\frac{(1+6k)\pi}{24}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$;

16) $2\left(\cos\frac{(3+8k)\pi}{24}+i\sin\frac{(3+8k)\pi}{24}\right.$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$;

17) $\cos\frac{(7+12k)\pi}{30}+i\sin\frac{(7+12k)\pi}{30}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

2.37. 1) $x_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$;

2) $x_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{(1+2k)\pi}{8}+i\sin\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$;

3) $x_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. **2.38.** 1) $x=-c\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$; 2) $x=-ci\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$; 3) $x=-ci\operatorname{ctg}\frac{(3+4k)\pi}{4n}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$; 4) $x=-ci\operatorname{ctg}\frac{\alpha+2k\pi}{2n}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. **2.41.** 1) $u_0=1+i$, $u_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$, $u_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$; 2) $u_0=1-i$, $u_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$, $u_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$;
3) $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $u_1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$, $u_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$, $u_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $u_4=$

$=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i,\ u_5=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i;$

4) $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ u_1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i,\ u_2=$ $=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i,\ u_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ u_4=$ $=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i,\ u_5=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i;$

5) $u_0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ u_1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i,\ u_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+$ $+\frac{1}{2}i,\ u_3=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i,\ u_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ u_5=$ $=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i,\ u_6=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ u_7=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+$ $+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i;$ 6) $u_0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ u_1=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i,$ $u_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ u_3=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i,\ u_4=-\frac{1}{2}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ u_5=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i,\ u_6=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ u_7=$ $=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i.$ **2.42.** 1) -1; 2) $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\pm i$; 4) $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$. **2.45.** 1) Правая полуплоскость без границы; 2) нижняя полуплоскость с границей; 3) часть плоскости, ограниченная прямыми $x=-1$ и $x=3$, включающая прямую $x=-1$. **2.46.** 1) Луч с началом в начале координат, образующий с осью абсцисс угол $\pi/4$; 2) луч с началом в начале координат, образующий с осью абсцисс угол π; 3) внутренность угла с вершиной в начале координат, ограниченного лучами, образующими с осью абсцисс углы $\pi/4$ и π; 4) луч с началом в точке $(2, -1)$, образующий с осью абсцисс угол $\pi/4$; 5) угол с вершиной в точке $(2, -1)$, ограниченный лучами, образующими с осью абсцисс углы $\pi/4$ и π. **2.47.** 1) $x_1=2,\ y_1=2;\ x_2=-2,\ y_2=-2$; 2) $x=1,\ y=2$. **2.49.** Обозначив $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, вычислите $|z_1-z_2|$, затем расстояние между точками (a_1, b_1) и (a_2, b_2) и сравните полученные результаты. **2.50.** 1) Окружность радиуса 2 с центром в начале координат; 2) замкнутый круг радиуса 2 с центром в начале координат; 3) открытый круг радиуса 2 с центром в начале координат; 4) множество точек, лежащих вне открытого круга радиуса 2 с центром в начале координат; 5) множество точек, лежащих вне замкнутого круга радиуса 2 с центром в начале координат; 6) открытый круг радиуса 3 с центром в точке $(1, 0)$; 7) окружность радиуса 3 с центром в точке $(0, -2)$; 8) множество точек, лежащих вне открытого круга радиуса 3 с центром в точке $(1, -2)$; 9) пересечение замкнутых кругов радиуса 1 с центрами в точках $(0, 1)$ и $(0, -1)$; 10) пересечение замкнутого круга радиуса 2 с центром в точке $(0, 1)$ с окружностью радиуса 1 с центром в точке $(2, 1)$; 11) открытое кольцо, ограниченное окружностями радиуса 1 и 3 с центрами в точке $(0, 2)$; 12) кольцо с внутренним контуром, ограниченное окружностями радиуса 1 и 3 с центрами в точке $(2, 0)$; 13) часть замкнутого круга радиуса 3 с центром в точке $(2, 1)$, лежащая вне открытого круга радиуса 2 с центром в точке $(1, -1)$; 14) $\varnothing$; 15) часть луча, проведенного из начала координат под углом $\pi/4$ к оси абсцисс, лежащая вне замкнутого круга радиуса 3 с центром в точке $(1, 0)$; 16) дуга окружности радиуса 2 с центром в точке $(1, 2)$, лежащая внутри открытого угла с вершиной в начале координат, стороны которого образуют с осью

абсцисс углы $\pi/4$ и π. 2.51. 1) Окружность радиуса 6 с центром в начале координат; 2) окружность радиуса 6 с центром в начале координат; 3) окружность радиуса 6 с центром в точке (0, 1); 4) окружность радиуса 6 с центром в точке (—1, 0); 5) окружность радиуса 6 с центром в точке (1, —3). 2.52. 1) $12+16i$, наименьший положительный аргумент имеет точка касания окружности $|z-25i|=15$ с лучом, исходящим из начала координат и лежащим в первой четверти; 2) $\frac{12}{5}+\frac{9}{5}i$. 2.53. 1) Прямая $y=-2x-\frac{3}{2}$; 2) точка $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$; 3) точка $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 4) открытая область, ограниченная эллипсом $\frac{4x^2}{5}+\frac{4y^2}{9}=1$; 5) отрезок мнимой оси от i до $2i$; 6) вся комплексная плоскость; 7) полуплоскость без границы, ограниченная прямой $y=\frac{3}{2}$ и содержащая точку (2, 0); 8) полуплоскость с границей, ограниченная прямой $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ и содержащая точку (2, —1); 9) гипербола $4x^2-\frac{4}{3}y^2=1$; 10) $\varnothing$. 2.58. 1) окружность радиуса 1 с центром в точке $2-i$; 2) полуплоскость $x\leqslant 0$. 2.59. 1) Отрезок прямой $y=x-1$, ограниченный точками $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 2) 4 отрезка, соединяющих следующие пары точек: (1, 1) и (2, 2), (—1, 1) и (—2, 2), (—1, —1) и (—2, —2), (1, —1) и (2, —2). 2.60. 1) Открытый круг радиуса 6 с центром в начале координат; 2) полуплоскость $x>-1$; 3) координатные оси; 4) два отрезка: один — на действительной оси между точками —2 и 2, другой — на мнимой оси между точками $-2i$ и $2i$; 5) две прямые: $y=x$ и $y=-x$. 2.61. 1) Описывает n раз окружность радиуса r^n с центром в начале координат; 2) описывает окружность радиуса $1/r$ с центром в начале координат; 3) описывает 2 раза окружность радиуса r^2 с центром в точке $-1+2i$.

3

3.2. 1) $A+B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 4+i\end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix}4 & -4+2i\\ 12 & -12+4i\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}-8 & -8\\ 3 & 4i\end{bmatrix}$, $3A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$; 2) $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 5 & 6\\ 5 & -4 & 9\end{bmatrix}$, $AB=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -3\\ -2 & 3 & 16\\ -2 & -7 & 15\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}6 & 1 & 5\\ 23 & -1 & 14\\ -17 & -12 & 11\end{bmatrix}$, $3B=\begin{bmatrix}3 & -3 & 0\\ 6 & 3 & 3\\ 9 & -3 & 6\end{bmatrix}$.

3.3. 1) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 10 & 9\\ -5 & 0 & -7\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}11 & 9 & 13\\ -22 & -27 & -17\\ 29 & 32 & 26\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}8 & 5 & 7 & 10\\ 6 & 0 & 7 & 9\\ 4 & -5 & 7 & 8\\ 2 & -10 & 7 & 7\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 4 & 6 & 6\\ 12 & -3 & 20\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

3.4. 1) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -6 & 1\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}-5 & 13 & -1\\ -26 & -16 & 2\\ 33 & -3 & 29\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}-32 & 6 & 16\\ 6 & -2 & -14\\ 16 & -14 & -12\end{bmatrix}$.

3.5. 1) $\begin{bmatrix} a+b & 5a \\ a & b \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

3.6. 1) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a+2b \end{bmatrix}$.

3.7. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, если n четное, $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$, если n нечетное;

2) $\begin{bmatrix} i^n & ni^n \\ 0 & i^n \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 2 & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.9. 1) $AE_{ik} = [c_{pq}]$, где $c_{pq} = \begin{cases} a_{pi}, & \text{если } q = k; \\ 0, & \text{если } q \neq k; \end{cases}$ 2) $E_{ik}A = [d_{pq}]$, где $d_{pq} = \begin{cases} a_{kq}, & \text{если } p = i; \\ 0, & \text{если } p \neq i; \end{cases}$ 3) $a_{ii} = a_{kk}$ и $a_{pi} = 0$ при $p \neq i$, $a_{kq} = 0$ при $q \neq k$.

3.12. Нет. 3.16. 1) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$, где $x^2 + yz = 0$; 2) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}$, где $x^2 + yz = 1$ или $X = \pm E$; 3) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1-x \end{bmatrix}$, где $x^2+yz=x$, или $X=0$, или $X = E$. 3.17. $A = E$, или $A = -E$, или $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, или $A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 3.19. 1) a_{ki}. 3.22. 0. 3.23. $1+\sqrt{2}$. 3.24. 1) 10; 2) 36; 3) 12; 4) 17. 3.25. 1) $k = 6$, $l = 1$; 2) $k = 8$, $l = 1$; 3) $k = 6$, $l = 3$; 4) $k = 5$, $l = 8$. 3.26. 1) $\frac{n(n-1)}{2}$; 2) $\frac{n(n-1)}{2}$; 3) $\frac{n(n+1)}{2}$; 4) $\frac{3n(n-1)}{2}$. 3.27. 1) Не является; 2) плюс; 3) не является; 4) плюс. 3.28. 1) $k = 5$, $l = 1$; 2) $k = 6$, $l = 3$; 3) $k = 2$, $l = 4$; 4) $k = 5$, $l = 4$. 3.29. 1) Плюс; 2) плюс, если $n = 4k$ или $n = 4k+1$, и минус, если $n=4k+2$ или $n = 4k+3$. 3.30. 1) 1; 2) 1; 3) 4; 4) -21; 5) a_1^n; 6) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!$; 7) $n!$; 8) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2 \dots a_n$; 9) 0; 10) 0. 3.31. 1) $4a - c - d$; 2) $2a + b - c + d$; 3) $-5a-5b-5c-5d$. 3.32. Пусть в результате указанных преобразований получится определитель d_1. Тогда: 1) $d_1 = (-1)^n d$; 2) $d_1 = \bar{d}$; 3) $d_1 = (-1)^{n-i}$; 4) $d_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d$; 5) $d_1 = d$; 6) $d_1 = 0$. 3.33. 1) -20; 2) -2858; 3) 255; 4) 5; 5) 0; 6) -36. 3.34. 1) -20; 2) 255. 3.35. 1) $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm 3$; 2) $x_1=6$, $x_2=5$. 3.36. 1) $ax_1x_2 \dots x_{n-1}$; 2) a^{n-1}; 3) $1 + (-1)^{n+1} a_1a_2 \dots a_n$; 4) $(1-a)(2-a) \dots (n-a)a$; 5) $(x + (n-1)a)(x-a)$. Прибавьте все строчки к первой.

3.38. 1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} 17 & 15 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 13 & 12 & -1 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; 8) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

3.39. 1) Решением уравнения является матрица $A^{-1}B$.

3.40. 1а) $X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 13 & -13 \end{bmatrix}$; 1б) $X = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$;

1в) $X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 70 & -50 \\ 91 & -65 \end{bmatrix}$; 2а) $X = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ 9 & -22 & 15 \\ -28 & 56 & -42 \end{bmatrix}$;

2б) $X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -1 & 2 & 11 \\ -5 & 10 & 1 \end{bmatrix}$; 2в) $X = -\frac{1}{63}\begin{bmatrix} 19 & -14 & -17 \\ -41 & 70 & -23 \\ 98 & -196 & 56 \end{bmatrix}$;

3а) $X = \begin{bmatrix} -59 & 124 & -54 \\ -4 & 8 & -3 \\ -47 & 96 & -42 \end{bmatrix}$; 3б) $= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -17 & 9 & 7 \\ -7 & 7 & 1 \\ -17 & 9 & 1 \end{bmatrix}$;

3в) $X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -625 & 377 & 237 \\ -41 & 25 & 15 \\ -485 & 293 & 185 \end{bmatrix}$; 4а) $X = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$;

4б) $X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 39 & -4 & 10 \end{bmatrix}$; 4в) $X = \begin{bmatrix} 57 & -4 & 14 \\ 48 & -4 & 12 \end{bmatrix}$; 5а) $X = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$;

5б) $X = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 5в) $X = \begin{bmatrix} -21 & 8 \\ -23 & 9 \\ 26 & -10 \end{bmatrix}$. **3.41.** 1) Покажите, что если $a_{ik} = 1$, то и $A_{ik} = 1$, а если $a_{ik} = 0$, то и $A_{ik} = 0$; 2) найдите сумму элементов i-й строки в левой и правой части произведения $A^{-1}A = E$. **3.42.** Возведите в k-ю степень по формуле бинома Ньютона и выразите E. **3.43.** Всегда имеют место равенства $CAB = E$ и $BCA = E$. **3.46.** Перемножьте матрицы A и A'. **3.49.** Перемножьте матрицы A и A'. **3.51.** Аналогично задаче 3.48.

3.54. 2) $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1}) \\ \frac{1}{d}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{d}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn}) \end{bmatrix}.$$

3.55. 1) $x_1 = 9$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$; 4) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{4}{3}$; 5) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = 3$; 6) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$, $x_5 = 0$; 7) $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -\frac{3}{5}$, $x_3 = \frac{4}{5}$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.
3.56. 1) $x = 1$, $y = -1$; 2) бесконечно много решений: $y = (1-2i)x - \frac{4}{5}(1-2i)$; 3) $x = 1+i$, $y = 1-i$; 4) система несовместна. **3.57.** 1) Если

$a \neq 0$, то $x = \dfrac{9a^2+3a-2}{9a^2}$, $y = \dfrac{-3a+2}{9a^2}$; если $a=0$, то система несовместна; 2) если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x=0$, $y = \dfrac{a+2}{a}$; если $a=3$, то система имеет бесконечно много решений: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$; если $a=0$, то система несовместна; 3) если $a \neq -2$ и $a \neq -4$, то $x = \dfrac{a+9}{a+4}$, $y = \dfrac{a-1}{a+4}$; если $a=-2$, то система имеет бесконечно много решений: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$; если $a=-4$, то система несовместна; 4) если $a \neq -1$ и $a \neq \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, то $x = \dfrac{2a^3-2a^2-7a-1}{(a+1)(2a^2-3a-1)}$ и $y = \dfrac{a^3-2a+3}{(a+1)(2a^2-3a-1)}$; если $a=-1$ или $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, то система несовместна. **3.58.** $a=2$, $b=-1$, $c=1$. **3.59.** 1) Если $a \neq b$, $a \neq c$ и $b \neq c$, то решение единственное:

$$x = \frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)}, \quad y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}, \quad z = \frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-c)};$$

если $a=b=c=d$, то решений бесконечно много: $x=1-y-z$; если $d=a=b \neq c$, то решений бесконечно много: $x=1-y$, $z=0$. Еще два случая получаются перестановкой коэффициентов и соответствующих неизвестных. Если $a=b \neq c=d$, то решений бесконечно много: $x=1-y$, $z=1$. Еще два случая получаются перестановкой коэффициентов и соответствующих неизвестных. Во всех остальных случаях система несовместна; 2) если $a \neq b$, $a \neq c$ и $b \neq c$, то решение единственное: $x=-(a+b+c)$, $y=ab+ac+bc$, $z=-abc$; если $a \neq b=c$, то решений бесконечно много: $y=-(a^2+ab+b^2)-(a+b)x$, $z=ab(a+b+x)$. Еще два случая получаются перестановкой коэффициентов и соответствующих неизвестных. Если $a=b=c$, то решений бесконечно много: $z=-a^3-a^2x-ay$.

4

4.1. Линейными пространствами являются множества из пп. 1, 2, 5—7, 9—11, 13. **4.5.** 1) (11, -7, 5, -13); 2) (-17, 11, 6, 20). **4.6.** 1) (-4, 2, -7, 5); 2) $\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{5}{4}, -\dfrac{13}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$. **4.7.** Линейно-зависимы системы векторов из пп. 1—3, 6, 8. **4.8.** 1) $2+2x-x^2-2x^3$; 2) 0, система линейно-зависима. **4.11.** 2) Воспользуйтесь задачей 4.10. **4.14.** Например: 1) a_1, a_2, a_3, a_4; 2) a_1, a_2, a_3, a_4; 3) f_0, f_1, f_3, f_4; 4) f_0, f_1, f_2, f_3. **4.16.** Воспользуйтесь задачей 4.12. **4.18.** 1) $x_1 = \dfrac{1-59x_4}{10}$, $x_2 = \dfrac{-3+67x_4}{10}$, $x_3 = 6x_4$; 2) $x_1 = \dfrac{-6+8x_4}{7}$, $x_2 = \dfrac{1-13x_4}{7}$, $x_3 = \dfrac{15-6x_4}{7}$; 3) $x_1 = \dfrac{7}{5}$, $x_2=-4$, $x_3 = -\dfrac{11}{5}$, $x_4 = \dfrac{16}{5}$; 4) система несовместна; 5) $x_1 = \dfrac{1-x_2+x_4}{2}$, $x_3 = x_4-2$; 6) $x_1 = \dfrac{6-x_5}{3}$, $x_2=-5+x_5$, $x_3=1$, $x_4=-1-x_5$; 7) $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=0$, $x_4=-5$, $x_5=11$; 8) система несовместна; 9) $x_1 = \dfrac{-15-4x_2-2x_5}{4}$, $x_3 = \dfrac{-3+2x_5}{4}$, $x_4=-5+x_5$; 10) $x_1=-1+x_2+x_5$, $x_3=3-4x_5$, $x_4=0$; 11) $x_1=3$, $x_2=-5$, $x_3=4$, $x_4=-2$, $x_5=1$; 12) $x_1=-34$, $x_2=$

$= 19 - x_4 - x_5$, $x_3 = 13$. **4.19.** 1) При $\lambda = 4$ общее решение $x_1 = 5 + x_3$, $x_2 = \frac{-7 - 4x_3}{2}$; при $\lambda \neq 4$ система несовместна; 2) при $\lambda \neq 1$ единственное решение $x_1 = \frac{-5\lambda - 11}{3(\lambda - 1)}$, $x_2 = \frac{2\lambda - 22}{3(\lambda - 1)}$, $x_3 = \frac{4}{\lambda - 1}$; при $\lambda = 1$ система несовместна; 3) при $\lambda = 1$ общее решение $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; при $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -1$ единственное решение $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1}$, $x_3 = \frac{1}{\lambda + 1}$; при $\lambda = -1$ система несовместна; 4) при $\lambda \neq -3$ и $\lambda \neq 1$ единственное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\frac{1}{\lambda - 1}$, $x_4 = \frac{1}{\lambda - 1}$; при $\lambda = -3$ общее решение $x_1 = \frac{1}{4} + x_4$, $x_2 = \frac{1}{4} + x_4$, $x_3 = \frac{1}{2} + x_4$; при $\lambda = 1$ система несовместна.

4.21. 1) Рассмотрите систему векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$; 2) воспользуйтесь задачей 4.20.3. **4.22.** 1) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_4 - 2\mathbf{a}_5 = \mathbf{o}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$; 2) $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{o}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$; 3) система линейно-независима; 4) $4\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$; 5) система линейно-независима; 6) $3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

4.24. 1) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & -10 \\ 4 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

4.25. 1) $\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}$; 2) $\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2-n \end{bmatrix}$;

3) $\frac{1}{(a-b)(a+b(n-1))}\begin{bmatrix} c & -b & -b & \ldots & -b \\ -b & c & -b & \ldots & -b \\ -b & -b & c & \ldots & -b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b & -b & -b & \ldots & c \end{bmatrix}$.

4.26. В задаче 4.14: 1) 4; 2) 4; 3) 4; 4) 4. В задаче 4.22: 1) 4, 2) 3; 3) 4; 4) 3; 5) 4; 6) 3. 4.28. 1) 4; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 4. 4.29. 1) 3, линейно-независима; 2) 3, линейно-зависима; 3) 3, линейно-зависима; 4) 5, линейно-независима. 4.30. 1) Воспользуйтесь первой теоремой о разложении определителя по строке. 4.31. 4) Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & \ldots & a_{sn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s1} & \ldots & b_{sn} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрите матрицу

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} \ldots a_{1n} + b_{1n} \, a_{11} \ldots a_{1n} \, b_{11} \ldots b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1} + b_{s1} \ldots a_{sn} + b_{sn} \, a_{s1} \ldots a_{sn} \, b_{s1} \ldots b_{sn} \end{bmatrix}.$$

4.32. 1) При $\lambda = 3$ — единственное решение, при $\lambda \neq 3$ — несовместна; 2) при $\lambda = -3$ несовместна, при $\lambda = 1$ — бесконечно много решений, при $\lambda \neq -3$ и

$\lambda \neq 1$ — единственное решение; 3) при $\lambda = 1$ — несовместна, при $\lambda \neq 1$ бесконечно много решений. 4.41. 1) 3, например f_1, f_2, f_3; 2) 2, например f_1, f_2. 4.47. 1) 3, -1, 2, -1; 2) $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, 1; 3) 1,5, $-0{,}5$, 1, -1; 4) $-1{,}3$, $-0{,}7$, $-1{,}3$, $-1{,}7$. 4.48. 1) 1, -2, 3, -4, 5; 2) 1, 7, 3, -4, 5; 3) 1, -2, 3, -4, 3. 4.49. 1) Например, a_1, a_2, $a_3 = (1, 0, 0, 0)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$; 2) например, x^2, $x^2 - x^4$, 1, x, x^3. 4.50. 1) Да; 2) нет; 3) да. 4.57. 1) $n-1$; 2) $n-1$. Докажите, что $\mathbf{e}_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, -1, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, -1)$ — базис пространства B; 3) $n-1$. Докажите, что $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 1, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 1)$ — базис пространства C. 4.58. 1) n; 2) $n-1$. Докажите, что $1 - x^2$, $x - x^3$, $\ldots$, $x^{n-2} - x^n$ — базис пространства B; 3) $\left[\frac{n+1}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{n}{2}\right]+1$. 4.60. 1) 3; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$; 2) 3; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$; 3) 3; f_2, f_3, f_4. 4.64. 1) $\mathbf{e}_1 = (-1, 2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-2, 8, 0, 1, 0)$; 2) $\mathbf{e}_1 = (1, -1, 1, 1)$; 3) $\mathbf{e}_1 = (9, 2, 0, 0, -6)$, $\mathbf{e}_2 = (3, -2, 6, 0, 6)$; 4) $\mathbf{e}_1 = (-1, 1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (3, -3, 3, 1, 0)$; 5) система имеет только нулевое решение; 6) $\mathbf{e}_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, -3, 0, 2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (3, -9, 0, 0, 4)$. 4.65. 1) При $k \neq \frac{1}{4}$ и $k \neq 1$ размерность 1, при $k = \frac{1}{4}$ или $k = 1$ размерность —2; 2) при $k \neq 2$ размерность 0, при $k = 2$ размерность 3. 4.69. Размерность 0 имеет многообразие, состоящее лишь из одного вектора, размерность n — все L. 4.70. n. 4.73. 1) Базис суммы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$, базис пересечения $\mathbf{c} = (2, 0, 2, 0)$; 2) базис суммы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_2$, базис пересечения $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{c} = (0, 4, 1, 3)$. 4.76. 1) Например, $\mathrm{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, где $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$; 2) например, $\mathrm{L}(x)$. 4.78. Формулы 1, 2, 4 определяют скалярное произведение. Формулы 3, 5 — нет. 4.80. 7) Сначала положите в п. 5 $\mathbf{b} = \sum\limits_{j=1}^{m} l_j \mathbf{b}_j$, а затем воспользуйтесь п. 6. 4.83. Неравенство Коши—Буняковского примените в п. 1 к $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$; в п. 2 — к $\mathbf{a} = (k a_1, k a_2, \ldots, k a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = \left(\frac{1}{k} a_1, \frac{1}{k} a_2, \ldots, \frac{1}{k} a_n\right) \in \mathbf{R}^n$; в п. 3 — к $f(x)$, $g(x) \in C[a, b]$ со скалярным произведением, определенным в задаче 4.79.3. 4.85. 1) $\arccos\frac{5}{6}$; 2) $\pi/2$; 3) π. 4.86. 1) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 6$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 2\sqrt{15}$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{5}{6}$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}}) = \frac{7}{2\sqrt{15}}$, $\cos(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}}) = \frac{13}{6\sqrt{15}}$; 2) $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 6$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 2\sqrt{10}$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}}) = \frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $|\mathbf{a}| = 5$, $|\mathbf{b}| = 5$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = 6$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = -\frac{7}{25}$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}}) = \frac{4}{5}$, $\cos(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}}) = \frac{4}{15}$. 4.89. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — стороны параллелограмма, то его диагонали $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. 4.91. Индукцией, воспользовавшись задачей 4.88.1. 4.92. 1) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; 2) $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$, $\mathbf{b}_2 = \left(0, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{6}{\sqrt{78}}, -\frac{17}{3\sqrt{78}}, \frac{8}{3\sqrt{78}}, -\frac{5}{3\sqrt{78}}\right)$. 4.93. 1) $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{e}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0,\right.$

$\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\Big)$, $e_4=\Big(0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$; 2) $e_1=\Big(\frac{1}{2\sqrt{3}},\ -\frac{1}{2\sqrt{3}},$ $-\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$, $e_2=\Big(\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)$, $e_3=\Big(\frac{2}{\sqrt{6}},$ $\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ 0\Big)$, $e_4=\Big(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)$. **4.94.** 1) $e_1=$ $=\Big(\frac{1}{\sqrt{130}},\ -\frac{5}{\sqrt{130}},\ -\frac{2}{\sqrt{130}},\ \frac{10}{\sqrt{130}}\Big)$, $e_2=\Big(\frac{5}{\sqrt{130}},\ \frac{1}{\sqrt{130}},$ $-\frac{10}{\sqrt{130}},\ -\frac{2}{\sqrt{130}}\Big)$, $e_3=\Big(\frac{4}{\sqrt{130}},\ \frac{6}{\sqrt{130}},\ \frac{2}{\sqrt{130}},\ \frac{3}{\sqrt{130}}\Big)$; 2) $e_1=$ $=\Big(\frac{3}{\sqrt{13}},\ 0,\ 0,\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\Big)$, $e_2=\Big(\frac{14}{5\sqrt{39}},\ \frac{13}{5\sqrt{39}},\ \frac{13}{5\sqrt{39}},\ \frac{21}{5\sqrt{39}}\Big)$, $e_3=\Big(-\frac{16}{5\sqrt{273}},\ \frac{103}{5\sqrt{273}},\ -\frac{47}{5\sqrt{273}},\ -\frac{24}{5\sqrt{273}}\Big)$. **4.97.** 1) $e_1=$ $=\Big(\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{1}{\sqrt{14}},\ \frac{2}{\sqrt{14}},\ 0\Big)$, $e_2=\Big(-\frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{1}{\sqrt{7}},\ \frac{2}{\sqrt{7}},\ -\frac{1}{\sqrt{7}}\Big)$; 2) $e_1=\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$, $e_2=\Big(\frac{1}{\sqrt{115}},\ \frac{7}{\sqrt{115}},\ \frac{1}{\sqrt{115}},$ $-\frac{8}{\sqrt{115}}\Big)$.

5

5.2. Преобразования 1, 3 линейны, преобразования 2, 4, 5 нет. 5.4. Преобразования 1—3 линейны, преобразование 4 нет. 5.7. Все. 5.20. 1) $OL=O$, $\ker O=L$; 2) $EL=L$, $\ker E=\mathbf{o}$; 3) $AL=L$, если $k\neq 0$, и $AL=\mathbf{o}$, если $k=0$. $\operatorname{Ker} A=\{\mathbf{o}\}$, если $k\neq 0$, и $\ker A=L$, если $k=0$; 4) $AL=\mathrm{L}(e_1)$, $\ker A=$ $=\mathrm{L}(e_2, \ldots, e_n)$; 5) $AL=\mathrm{L}(e_1, \ldots, e_m)$, $\ker A=\mathrm{L}(e_{m+1}, \ldots, e_n)$; 6) AL — это линейная оболочка тех базисных векторов e_i, где $k_i\neq 0$, а $\ker A$ — это линейная оболочка тех базисных векторов e_i, где $k_i=0$; 7) $AL=M_1$, $\ker A=M_2$; 8) $AL=M_2$, $\ker A=M_1$; 9) $AL=L$, $\ker A=\{0\}$. 5.22. 1) $AT_n=T_{n-1}$, $\ker A=$ $=T_0$; 2) $DT_n=T_{n-1}$, $\ker D=T_0$. Два различных линейных оператора могут иметь один и тот же образ и одно и то же ядро. 5.25. 1) Нулевая матрица, 2) единичная матрица;

3) $\begin{bmatrix} k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & k \end{bmatrix}$. **5.26.** Если a_1, a_2, a_3 — координаты вектора

а в правом ортогональном базисе пространства V_3, то:

1) $\begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & . & 0\ldots \end{bmatrix}$;

8) $\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ m\text{-я строка;} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$ 9) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$.

5.27. 1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^n \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

5.30. 1) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 17 & 24 \\ -11 & -19 & -33 & -44 \\ -5 & -4 & -1 & -4 \\ 10 & 13 & 16 & 23 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} -13 & -15 & -16 & -11 \\ -11 & -17 & -18 & -14 \\ 21 & 25 & 23 & 19 \\ 10 & 17 & 22 & 14 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 25 & 22 & 26 & 35 \\ -33 & -33 & -41 & -55 \end{bmatrix}$. **5.32.** 2) См. задачу 3.9.4. 5.38. 1) $r_A=1$, $n_A=2$, базис образа (1, 1, 1), базис ядра — (2, 1, 0), (−3, 0, 1); 2) $r_A=2$, $n_A=1$, базис образа (2, 1, 1), (−2, −4, 2), базис ядра (0, 1, 1); 3) $r_A=3$, $n_A=0$. 5.39. 1) $r_A=3$, $n_A=2$, базис образа 1, x^2, x^4, базис ядра x, x^3; 2) $r_A=2$, $n_A=3$, базис образа x, x^3, базис ядра 1, x^2, x^4; 3) $r_A=4$, $n_A=1$, базис образа 1, x, x^2, x^3, базис ядра 1. 5.47. 2) Воспользуйтесь п. 1; 3) воспользуйтесь п. 1. 5.50. 1) $k^2-(a_{11}+a_{22})k+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$; 2) $k^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})k^2+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32})k-|A|$. 5.52. 1) $k_1=3$, $\mathbf{a}_1=c(5,\ -2,\ 5)$; $k_2=-2$, $\mathbf{a}_2=c(-5,\ 1,\ 5)$; $k_3=-3$, $\mathbf{a}_3=c(-1,\ 0,\ 1)$; 2) $k_1=0$, $\mathbf{a}_1=c(2,\ 1,\ 0)+d(-3,\ 0,\ 1)$; $k_2=-8$, $\mathbf{a}_2=c(-3,\ -1,\ 3)$; 3) $k=2$, $\mathbf{a}=c(0,\ -1,\ 1)$; 4) $k_1=4$, $\mathbf{a}_1=c(6,\ 8,\ 5)$; $k_2=\dfrac{-1+\sqrt{\ }}{2}$, $\mathbf{a}_2=c\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},\ 1\right)$; $k_3=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\mathbf{a}_3=c\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2},\ 1\right)$. **5.53.** $k_1=2$, $\mathbf{a}_1=c(0,\ -1,\ 1)$; $k_2=1+i$, $\mathbf{a}_2=c(1+i,\ 1,\ 1)$; $k_3=1-i$, $\mathbf{a}_3=c(-1+i,\ 1,\ 1)$; 2) $k_1=4$, $\mathbf{a}_1=c(1,\ 2,\ 4)$; $k_2=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$, $\mathbf{a}_2=c\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$; $k_3=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$, $\mathbf{a}_3=c\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$. **5.54.** 1) $\begin{bmatrix} 5 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1+i & -1+i \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 2 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3-i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$

5.55. В 5.4: 1) $k_1=1$, $\mathbf{a}_1=(1, 0, 0)$; $k_2=2$, $\mathbf{a}_2=(0, 1, 0)$; $k_3=3$, $\mathbf{a}_3=(0, 0, 1)$; 2) $k=1$, $\mathbf{a}=(0, 0, 1)$; 3) $k_1=0$, $\mathbf{a}_1=(0, 0, 1)$; $k_2=1$, $\mathbf{a}_2=(1, 0, 1)$; В 5.5: 1) $k_1=0$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$; $k_2=1$, $\mathbf{e}_1$; 2) $k_1=0$, $\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$; $k_2=1$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$; 3) k_i, $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; В 5.6: 1) Любой вектор $\mathbf{m}_2 \in M_2$ собственный с собственным значением 0; любой вектор $\mathbf{m}_1 \in M_1$ собственный с собственным значением 1; 2) любой вектор $\mathbf{m}_1 \in M_1$ собственный с собственным значением 0; любой вектор $\mathbf{m}_2 \in M_2$ собственный с собственным значением 1; 3) любой вектор $\mathbf{m}_1 \in M_1$ собственный с собственным значением 1; любой вектор $\mathbf{m}_2 \in M_2$ собственный с собственным значением -1.

6

6.1. См. рис. 2. 6.2. 2) Рассмотрите соответствующую систему уравнений. 6.14. 1) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=\frac{1}{2}$; 2) $x_1=\frac{1}{10}$, $x_2=\frac{3}{10}$, $x_3=0$, $x_4=0$; 3) $x_1=6$, $x_2=5$, $x_3=3$, $x_4=1$, $x_5=0$; 4) $x_1=1$,

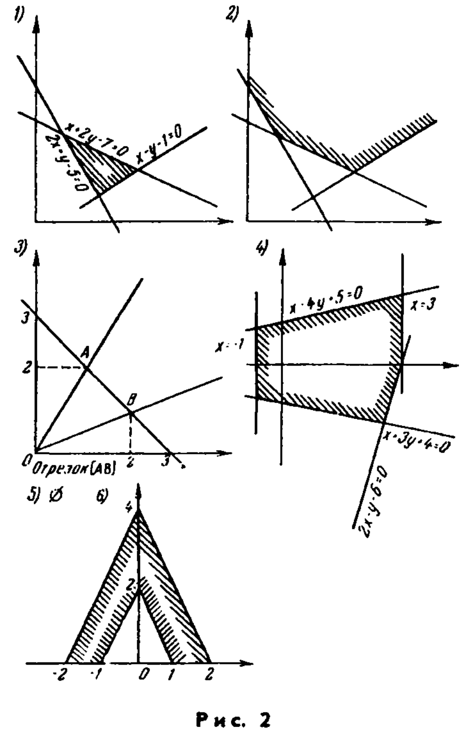

Рис. 2

$x_2=0$, $x_3=3$, $x_4=6$, $x_5=5$. **6.15.** Воспользуйтесь решениями задачи 6.1. 1а) $x=2$, $y=1$; 1б) $x=3$, $y=2$; 2а) $x=1$, $y=3$; 2б) нет решения; 3а) $x=1$, $y=2$; 3б) $x=2$, $y=1$; 4а) $x=0$, $y=0$; 4б) $x=3$, $y=2$. **6.16.** 1) (1, 1, 0); 2) (0, 1, 1); 3) (3, 4, 0); 4) задача неразрешима.

7

7.1. 1) Да; 2) нет; 3) нет, нет, да. **7.3.** Нет. **7.4.** 1) $(a+b)\vdots m \Rightarrow a\vdots m \wedge b\vdots m$, ложно; 2) $\overline{(a+b)\vdots m} \Rightarrow \overline{a\vdots m} \wedge \overline{b\vdots m}$, ложно; 3) $\overline{(a+b)\vdots m} \Rightarrow \overline{a\vdots m \wedge b\vdots m}$, истинно; 4) $\overline{a\vdots m} \vee \overline{b\vdots m} \Rightarrow \overline{(a+b)\vdots m}$, ложно; 5) $a\vdots m \wedge b\vdots m \Rightarrow (a+b)\vdots m \wedge (a-b)\vdots m$, истинно; 6) $a\vdots m \vee b\vdots m \Rightarrow ab\vdots m$, истинно. **7.8.** 1) 1, 4; 2) 1; 3) 1; 4) ни при каких. **7.9.** 1) -1, 3, -7; 2) любое, кроме -2 и 1; 3) любое; 4) 1, 3, 25, -21; 5) 1; 6) любое, кроме -2 и 3. **7.10.** 1) $a=1$, $b=0$; 2) $a=1$, $b=0$; 3) $a=b=1$. **7.13.** Воспользуйтесь результатом задачи 7.12.1. **7.16.** 550 и 803. **7.17.** $a=k\pm\sqrt{kl}$, $b=l\pm\sqrt{kl}$, где $\sqrt{kl}\in\mathbf{N}$. **7.18.** 1) $134=26\cdot5+4$; 2) $134=(-26)(-5)+4$; 3) $-134=26(-6)+22$; 4) $-134=(-26)6+22$; 5) $168=35\cdot4+28$; 6) $168=(-35)(-4)+28$; 7) $-168=35(-5)+7$; 8) $-168=(-35)5+7$. **7.19.** 1) $|b|-r$; 2) нет. **7.20.** 1) Делитель 20, остаток 14; 2) делители -52, -51, -50, остатки соответственно 13, 27, 41; 3) делители 60, 61, 62, остатки соответственно 15, 31, 47; 4) делители -38, -37, -36, -35, -34, остатки соответственно 32, 25, 18, 11, 4. **7.21.** 1) 25 670, 27 635, 29 600; 2) 10 035, 12 000, 13 965. **7.22.** $b_1=94$, $q_1=1$; $b_2=47$, $q_2=2$. **7.26.** 3. **7.29.** 1, 2, 4. **7.30.** 1, 2, 4, 8, 7, 5. **7.34.** 1) Истинно; 2) истинно; 3) ложно; 4) истинно. **7.35.** Докажите, что после n-го шага число кусков равно $7+6(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, $0\leqslant a_i\leqslant 7$. Число такого вида не может быть равно 1973. **7.38.** Докажите, что P делится на 4 и на 3. **7.39.** 1) $3k\pm1$; 2) $6k\pm1$; 3) $6k-3\pm1$; 4) любое. **7.41.** 1) $n=3k$; 2) при любом n. **7.44.** 1) $6=64\cdot1734-135\cdot822$; 2) $23=-30\cdot4623+37\cdot3749$; 3) $1=17\cdot4373+90(-826)$; 4) $17=45(-3791)+52\cdot3281$; 5) $29=7\cdot3683-24\cdot1073$; 6) $14=(-4)2576+67\cdot154$. **7.48.** 1) 105; 2) 33; 3) 2; 4) 17. **7.53.** Докажите, что $n=(a^3-1)a^3(a^3+1)$ делится на 7, на 8 и на 9. **7.54.** Для доказательства справедливости утверждения при $n=1$ воспользуйтесь тем, что произведение k последовательных натуральных чисел делится на $k!$. **7.60.** 1) $x=30$, $y=150$, и наоборот; 2) $x_1=24$, $y_1=144$; $x_2=48$, $y_2=120$; $x_3=72$, $y_3=96$, и наоборот; 3) $x=495$, $y=315$, и наоборот; 4) $x_1=4$, $y_1=180$; $x_2=20$, $y_2=36$, и наоборот. **7.61.** 1) Нужно вычесть из обеих частей равенства ЛИК; $376\cdot376=141\,376$; 2) $625\cdot625=390\,625$. **7.64.** При $t\in\mathbf{Z}$: 1) $x=1-3t$, $y=2-5t$; 2) $x=1-3t$, $y=-2+8t$; 3) $x=98-5t$, $y=-147+8t$; 4) $x=9+42t$, $y=12+54t$; 5) $x=-11+2t$, $y=-11+3t$; 6) нет решений. **7.65.** Единственное решение: 9 контейнеров по 160 кг и 12 контейнеров по 130 кг. **7.66.** Рассмотрите разность $(a^{2k}+1)-(a+1)$. **7.67.** 2) Рассмотрите разность $(2^n-1)-(2^m-1)$; используйте индукцию по большему показателю; 3) воспользуйтесь результатом задачи 7.66. **7.70.** 1) 4272; 2) 166 608. **7.71.** 1) n; 2) m. **7.72.** 1) $a_1=15$, $b_1=420$; $a_2=60$, $b_2=105$. И наоборот; 2) $a_1=12$, $b_1=840$; $a_2=24$, $b_2=420$; $a_3=60$, $b_3=168$; $a_4=84$, $b_4=120$. И наоборот; 3) $a_1=5$, $b_1=260$; $a_2=20$, $b_2=65$. И наоборот; 4) $a_1=232$, $b_1=435$; $a_2=115$, $b_2=552$. И наоборот; 5) $a_1=6$, $b_1=84$; $a_2=12$, $b_2=42$. И наоборот. 6) $a_1=720$, $b_1=336$. И наоборот. **7.75.** 248, 4м. **7.76.** 13. **7.78.** $a_1=1$, $b_1=-4$; $a_2=-4$, $b_2=1$. **7.79.** 1) $A=\{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$; 2) $A=\{15, 30, 39, 65, 78, 130, 195, 390\}$; 3) $A=\{6, 15, 30, 33, 66, 110, 165, 330\}$. **7.80.** 1) $\frac{707}{500}=[1, 2, 2, 2, 2, 5, 3]$; $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{3}{2}$, $\alpha_3=\frac{7}{5}$, $\alpha_4=\frac{17}{12}$, $\alpha_5=\frac{41}{29}$, $\alpha_6=\frac{222}{157}$, $\alpha_7=\frac{707}{500}$; 2) $\frac{157}{225}=[0, 1, 2, 3, 4, 5]$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=\frac{2}{3}$, $\alpha_4=\frac{7}{10}$,

$\alpha_5=\frac{30}{43}$; $\alpha_6=\frac{157}{225}$; 3) $\frac{163}{159}=[1,\ 39,\ 1,\ 3]$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{40}{39}$, $\alpha_3=\frac{41}{40}$, $\alpha_4=\frac{163}{159}$; 4) $\frac{3107}{3653}=[0,\ 1,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 3]$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=\frac{5}{6}$, $\alpha_4=\frac{6}{7}$, $\alpha_5=\frac{17}{20}$, $\alpha_6=\frac{74}{87}$, $\alpha_7=\frac{239}{281}$; 5) $-\frac{355}{234}=$ $=[-2,\ 2,\ 14,\ 8]$, $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=-\frac{3}{2}$, $\alpha_3=-\frac{44}{29}$, $\alpha_4=-\frac{355}{234}$; 6) $-\frac{105}{234}=[-1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 2]$, $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=-\frac{1}{2}$, $\alpha_4=-\frac{4}{9}$, $\alpha_5=-\frac{9}{20}$, $\alpha_6=-\frac{13}{29}$, $\alpha_7=-\frac{35}{78}$; 7) $-\frac{99}{170}=[0,\ 1,\ 1,$ $2,\ 1,\ 1,\ 6,\ 2]$; $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=\frac{1}{2}$, $\alpha_4=\frac{3}{5}$, $\alpha_5=\frac{4}{7}$, $\alpha_6=\frac{7}{12}$, $\alpha_7=\frac{46}{79}$, $\alpha_8=\frac{99}{170}$, 8) $-\frac{234}{195}=[-2,\ 1,\ 4]$, $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=-\frac{6}{5}$; 9) $\frac{1043}{3427}=[0,\ 3,\ 3,\ 2]$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$, $\alpha_3=\frac{3}{10}$, $\alpha_4=\frac{7}{23}$; 10) $-\frac{271}{100}=[-3,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3]$, $\alpha_1=-3$, $\alpha_2=-\frac{8}{3}$, $\alpha_3=-\frac{19}{17}$, $\alpha_4=-\frac{84}{31}$, $\alpha_5=-\frac{271}{100}$; 11) $\frac{89587}{91361}=[0,\ 1,\ 50,\ 2]$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=\frac{50}{51}$, $\alpha_4=\frac{101}{103}$, 12) $\frac{3587}{2743}=[1,\ 3,\ 4]$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{4}{3}$, $\alpha_3=\frac{17}{13}$. **7.81.** $\alpha_4-\alpha_3=\frac{47}{11}-\frac{17}{4}=\frac{1}{44}$. **7.82.** α_3- $-\alpha_2=\frac{43}{40}-\frac{14}{13}=-\frac{1}{520}$. **7.83.** $[1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 3]$. Разложите 14/9 в цепную дробь. **7.84.** 3. **7.85.** 1) Индукцией по k; 2) воспользуйтесь п. 1; 3) воспользуйтесь соотношением $Q_k=Q_{k-1}q_k+Q_{k-2}$. **7.86.** 1) Воспользуйтесь задачей 7.85.1; 2) воспользуйтесь задачей 7.85.1. **7.87.** 1) Воспользуйтесь задачей 7.86.2; 2) воспользуйтесь задачей 7.86.2; 4) воспользуйтесь пп. 1—3. **7.90.** Нет (например, $109=60\cdot 1+49$). **7.91.** 5 или 1. **7.92.** Воспользуйтесь результатом задачи 7.91. **7.93.** 1) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; 2) 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199; 3) 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293. **7.94.** 2657, 2671, 2677 — простые. **7.100.** 1) 2, 4 212 784; 2) 4, 112 099 680. **7.101.** 392. **7.104.** 3, 5, 7. Меньшее число p в тройке близнецов представьте в виде $p=3s+r$. **7.105.** Представьте p в виде $p=$ $=3s+r$. **7.106.** $p=5$. Представьте p в виде $p=5s+r$. **7.107.** 1), 2) Представьте p в виде $p=2s+r$; 3) представьте числа 2^n-1 в виде $2^n-1=3s+r$. **7.108.** $(1+n)!+2$, $(1+n)!+3$, $\ldots$, $(1+n)!+n$, $(1+n)!+(n+1)$. **7.109.** 2519. **7.110.** 959. **7.111.** Если p — составное число, то утверждение неверно. **7.112.** 1) 3; 2) 3. **7.115.** $m_1=9$, $n_1=2$; $m_2=17$, $n_2=6$. **7.116.** 1) Допустите противное и рассмотрите простые делители числа $4a-1$, где a — произведение всех простых чисел вида $4m-1$. **7.120.** Покажите, что если $f(x_0)=p$ — простое число, то $f(x_0)+py)\ \vdots\ p$ при любом $y\in\mathbf{Z}$. **7.121.** Воспользуйтесь основной теоремой арифметики. **7.122.** 1) Представьте x в виде $x=[x]+\alpha$; 2) представьте x в виде $x=[x]+\alpha$ и разделите $[x]$ на n с остатком; 3) воспользуйтесь п. 2; 4) рассмотрите 2 случая: $x-[x]<\frac{1}{2}$, $x-[x]\geqslant\frac{1}{2}$; 5) представьте x в виде $x=[x]+\alpha$ и воспользуйтесь тем, что для некоторого k $\frac{k}{n}\leqslant\alpha<$ $<\frac{k+1}{n}$; 6) воспользуйтесь п. 4. **7.123.** $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots$ **7.124.** 832.

7.125. 28 (число нулей равно показателю, с которым 5 входит в разложение $123!$). 7.126. Найдите показатель, с которым каждый простой множитель числа $(16!)^{18}$ входит в разложение этого числа и в разложение $288!$. 7.127. 1) Нет; 2) да. 7.128. $50! = 2^{47}\cdot 3^{22}\cdot 5^{12}\cdot 7^{8}\cdot 11^{4}\cdot 13^{3}\cdot 17^{2}\cdot 19^{2}\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 39\times$ $\times 41\cdot 43\cdot 47$. 7.129. 1) Сравните показатели, с которыми простое число p входит в числитель и знаменатель; 2) воспользуйтесь п. 1; 3) разбейте множители на группы и воспользуйтесь п. 2; 4) пусть a — первый член, а d — разность прогрессии, докажите существование такого целого k, что остаток при делении kd на $n!$ равен единице. Затем, воспользовавшись п. 2, докажите, что $k^n a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(n-1)d] \,\vdots\, n!$. 7.130. 1) 12, 168; 2) 24, 780; 3) 8, 3096. 7.132. Воспользуйтесь задачей 7.131. Искомые числа: 50^2, 98^2, 75^2, 45^2 63^2, 44^2, 99^2, 52^2, 68^2, 96^2, 92^2. 7.134. 192. 7.136. 1) $23163 = 55173_{(8)}$; $17527 = 42167_{(8)}$; 2) $231632 = 1653212_{(7)}$, $729 = 2061_{(7)}$; 3) $2042 = 11111111010_{(2)} =$ $= 2210122_{(3)} = 31132_{(5)}$, $2786 = 101011100010_{(2)} = 10211012_{(3)} = 42121_{(5)}$. 7.137. 1) 6871; 2) 2790; 3) 205; 4) 42923. 7.138. 1) $26157_{(8)}$; 2) $245_{(6)}$; 3) $145244_{(6)}$; 4) $141_{(8)}$; 5) $1243_{(5)}$; 6) $1022132_{(5)}$; 7) $200464_{(8)}$; 8) $15123_{(8)}$; 9) $11221_{(3)}$; 10) $552_{(7)}$; 11) $115045_{(7)}$; 12) $14775_{(8)}$; 13) $25_{(6)}$. 7.139. 1) В шестеричной; 2) в двенадцатеричной; 3) семеричной; 4) девятеричной; 5) семеричной; 6) шестеричной. 7.140. 1) 5; 2) 9; 3) 9; 4) 5; 5) 9; 6) 7. 7.141. 150. 7.142. $63 = 77_{(8)} = 333_{(4)} = 111111_{(2)}$.

8

8.1. 1) $+$, $\cdot$; обе коммутативны и ассоциативны; 2) $+$, $\cdot$; обе коммутативны и ассоциативны; 3) $\cdot$; коммутативно и ассоциативно; 4) $+$, $\cdot$, $-$; сложение и умножение коммутативны и ассоциативны; 5) $+$, $\cdot$, $-$; сложение и умножение коммутативны и ассоциативны; 6) $+$, $-$, $\cdot$; сложение и умножение коммутативны и ассоциативны; 7) $+$, $-$, $\cdot$; сложение и умножение коммутативны и ассоциативны; 8) $\cdot$, $:$; умножение коммутативно и ассоциативно; 9) $+$, $\cdot$, $:$; сложение и умножение коммутативны и ассоциативны; 11) $+$, $-$, $\cdot$; все коммутативны и ассоциативны; 12) $\cdot$; $:$; обе коммутативны и ассоциативны; 13) $\cdot$; коммутативно и ассоциативно. 8.2. Векторное произведение. 8.3. 1) Алгебраическая, коммутативная; 2) не алгебраическая; 3) алгебраическая; 4) алгебраическая; 5) алгебраическая, коммутативная; 6) не алгебраическая; 7) алгебраическая, коммутативная и ассоциативная; 8) не алгебраическая. 8.5. 1, 3—9, 13, 14, 16—19. 8.6. 4) См. задачу 1.4.23; 6—7) см. задачу 1.4.29. 8.7. Все, кроме п. 5. 8.8. Пересечение и объединение — ассоциативные операции на U, разность — нет. 8.9. Подставьте в условие сначала $a=u$, затем $a=v$ и сравните. 8.12. Полугруппы из пп. 1, 4, 5, 18. 8.15. 1) Воспользуйтесь задачей 1.55; абелевыми являются группы из пп. 1 и 2, если множество X содержит не более двух элементов. 8.16. 1) Пусть φ_k — поворот плоскости на угол $\frac{2\pi}{3}k$. Тогда наша группа состоит из элементов φ_0, φ_1, φ_2 с законом композиции, определяемым таблицей

	φ_0	φ_1	φ_2
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2
φ_1	φ_1	φ_2	φ_0
φ_2	φ_2	φ_0	φ_1

2) φ_k — поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{2}k$. Умножение задается таблицей

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_0
φ_2	φ_2	φ_3	φ_0	φ_1
φ_3	φ_3	φ_0	φ_1	φ_2

3) φ_k — поворот плоскости на угол $\frac{2\pi}{5}k$. Умножение задается таблицей

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_0
φ_2	φ_2	φ_3	φ_4	φ_0	φ_1
φ_3	φ_3	φ_4	φ_0	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3

4) φ_k — поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{3}k$. Умножение задается таблицей

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_1	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_0
φ_2	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_0	φ_1
φ_3	φ_3	φ_4	φ_5	φ_0	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_5	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
φ_5	φ_5	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4

8.17. 1) Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}; \quad f_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix};$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix}; \quad f_4 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

Умножение задается таблицей

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

2) пусть

$$f_1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}; \quad f_2=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}; \quad f_3=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix};$$
$$f_4=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}; \quad f_5=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}; \quad f_6=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}.$$

Умножение задается таблицей

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_6	f_5	f_1	f_2
f_5	f_5	f_6	f_2	f_1	f_4	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

3) пусть

$$f_1=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}; \quad f_2=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix}; \quad f_3=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix};$$
$$f_4=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}; \quad f_5=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix}; \quad f_6=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix};$$
$$f_7=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}; \quad f_8=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}.$$

Умножение задается таблицей

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_2	f_2	f_1	f_7	f_8	f_6	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_7	f_8	f_5	f_6
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_8	f_7	f_1	f_2
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2	f_8	f_7
f_6	f_6	f_5	f_8	f_7	f_2	f_1	f_4	f_3
f_7	f_7	f_8	f_2	f_1	f_3	f_4	f_6	f_5
f_8	f_8	f_7	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

8.21. Группами являются полугруппы 2, 3, 6, 8, 9, 11.

8.22. $f^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&8&6&2&1&7&5\end{pmatrix}$; $g^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&1&5&2&7&3&4\end{pmatrix}$;

$fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&3&7&4&8&1&5\end{pmatrix}$; $gf=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&7&6&8&3&5&4\end{pmatrix}$;

$$f^{100}=f^2;\quad g^{100}=g^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&6&2&8&3&1&5\end{pmatrix}.$$

8.23. 1) $u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&2&3&4&5&1\end{pmatrix}$; 2) $u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&5&6&4&1&3\end{pmatrix}$.

8.24. 1) $u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&5&6\end{pmatrix}$; 2) $u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&3&2&1&4\end{pmatrix}$.

8.25. 1) $u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$; 2) $u=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&2&6&7&1&3&5\end{pmatrix}$.

8.26. Пусть

$$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix};\quad f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix};\quad f_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix};$$
$$f_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix};\quad f_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix};\quad f_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

Умножение задается таблицей

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_6	f_5	f_1	f_2
f_5	f_5	f_6	f_2	f_1	f_4	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

8.28. 1) См. задачу 8.9; 3) докажите, что $a^{-1}b$ — решение уравнения и что каждое решение совпадает с этим. 8.32. 1) Воспользуйтесь задачей 1.5.6; 2) покажите, что условие задачи равносильно условию задачи 8.31. 8.38. Нет. Если a и b — элементы 2-го порядка, то рассмотрите элемент aba. 8.39. Равенство $(ab)^n=e$ умножьте слева на b, а справа на a. 8.41. В 8.5: 1) 2; 18) -1. В 8.13: 9) $\varepsilon_1=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. В 8.14: 1) 1, 2) 2. В 8.15: 5) Поворот на угол $2\pi/n$. В 8.16: 1) Поворот на угол $2\pi/3$; 2) поворот на угол $\pi/2$; 3) поворот на угол $2\pi/5$; 4) поворот на угол $\pi/3$. В 8.18: 1) a; 2) a. В 8.19: 2) g_2. В 8.20: 5) $\begin{bmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n}\end{bmatrix}$.

8.50. Воспользуйтесь задачей 8.32. 8.68. Если a — образующая, то φ: $\varphi(a^k)=k$ — изоморфизм. 8.69. Если a — образующая, то φ: $\varphi(a^k)=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ — изоморфизм. 8.73. Воспользуйтесь задачей 8.72.

9

9.1. Кольца с единицей — в пп. 1,3 (если $m=1$), в пп. 4, 5, 7, 8, 10—13. Обратимые элементы: 1) 1, -1, 4) любое число, не равное 0; 5) 1, -1; 7) любое число, не равное 0; 8) 1, -1; 10) любое число, не равное 0; 11) 1, -1; 12) 1, -1, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; 13) любое число, не равное нулю. 9.2. Коммутативные кольца в пп. 5—16. Кольца с единицей в пп. 1—5, 7, 8, 10—16. Обратимые элементы: 1) матрицы с определителем, равным ± 1; 2—4) любая невырожденная матрица, 5) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$; 7) любая ненулевая матрица; 8) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$; 10) любая ненулевая матрица; 11) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$; 12) сравните с задачей 9.1.12. $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$; 13) любая ненулевая матрица; 14) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$; 15) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$; 16) любая матрица вида $\begin{bmatrix}1 & b & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1 & b & c\\ 0 & -1 & b\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$. Делители нуля: 1—4) Вырожденные ненулевые матрицы; 14) матрицы вида $\begin{bmatrix}a & a\\ a & a\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}a & -a\\ -a & a\end{bmatrix}$, где $a \neq 0$; 15) матрицы вида $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$, где a, $b \neq 0$; 16) матрицы вида $\begin{bmatrix}0 & b & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, где $b^2 + c^2 \neq 0$. **9.3.** Обратимые элементы: 1, 2, 5; 6) Функции, нигде не обращающиеся в ноль. 3), 4) Многочлены нулевой степени. Делители нуля есть в кольцах из пп. 1, 2, 5, 6. Например, если $f(x) = x^2 + x|x|$, $g(x) = x^2 - x|x|$, то $fg = 0$. **9.4.** Обратимые элементы: 1) (1, 1), (1, —1), (—1, 1), (—1, —1); 2—4) (1, 0), (—1, 0). Делители нуля: 1) $(a, 0)$, $(0, b)$, где a, $b \neq 0$; 2) (a, a), $(a, -a)$, где $a \neq 0$. **9.6.** 4) Рассмотрите сумму $a(b-c)+ac$; 5) воспользуйтесь п. 4; 6) воспользуйтесь пп. 4 и 5; 8) воспользуйтесь п. 7. **9.7.** Рассмотрите аддитивную группу кольца. **9.13.** Рассмотрите критерий подгруппы аддитивной группы кольца. **9.14.** Воспользуйтесь задачами 9.13.1 и 9.6.8. **9.16.** Области целостности: 9.1.1, 4, 5, 7, 8, 10—13; 9.2.5, 7, 8, 10—13; 9.3.3, 4; 9.4.3, 4. Поля: 9.1.4, 7, 10, 13; 9.2.7, 10, 13. **9.21.** Воспользуйтесь задачей 9.20. **9.31.** Воспользуйтесь задачей 9.6.8. **9.34.** Воспользуйтесь задачей 9.16. **9.42.** 1) (1); 2) (12); 3) (12); 4) (3); 5) (4); 6) (3); 7) (6); 8) (18); 9) (1); 10) (2); 11) (2); 12) (12); 13) (24); 14) (2); 15) (3). **9.47.** 1) (1); 2) (15); 3) (15); 4) (3); 5(5). **9.48.** 1) $\left(\frac{a}{d}\right)$, где $d = $ НОД(a, b); 2) (m), где $m = $ НОК(a, b), 3) (13); 4) (280); 5) (30). **9.49.** См. решение задачи 9.46. **9.50.** Воспользуйтесь задачей 9.49. **9.51.** 1) Рассмотрите все делители элемента p; 2) воспользуйтесь задачей 9.22.1. **9.52.** 2) Воспользуйтесь п. 1. **9.53.** 1) Воспользуйтесь задачей 9.52 и тем, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i)$ — главный идеал; 2) воспользуйтесь п. 1; 3) воспользуйтесь п. 2 и задачей 9.52.3. **9.54.** Воспользуйтесь задачами 9.53 и 9.51. **9.55.** Разделите 0 на b с остатком; 3) разделите b на a с остатком; 4) воспользуйтесь п. 3; 5) воспользуйтесь законом контрапозиции и п. 4. **9.59.** Аналогично задаче 9.57. **9.61.** $a \equiv b (\mathrm{mod}\ 0) \Leftrightarrow a = b$. **9.62.** 2) Воспользуйтесь п. 1; 4) воспользуйтесь пп. 2 и 3; 6) аналогично п. 2. **9.63.** 1) Воспользуйтесь задачей 9.62.2. **9.64.** Для кольца $\mathbf{Z}_5$ операции задаются следующими таблицами:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Для кольца $\mathbf{Z}_6$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\mathbf{Z}_5$ — поле; в $\mathbf{Z}_6$ делители нуля $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$. **9.66.** 2) Докажите, что $ax_1+b, \ldots, ax_m+b$ попарно несравнимы, и воспользуйтесь п. 1; 3) воспользуйтесь п. 2. **9.67.** 1) $a+b\sqrt{3}$ и $c+d\sqrt{3}$ принадлежат одному и тому же классу вычетов тогда и только тогда, когда $a\equiv c \pmod 2$ и $b\equiv d \pmod 2$, т. е. существует 4 различных класса вычетов по модулю J: $u_0=\bar{0}$, $u_1=\bar{1}$, $u_2=\overline{\sqrt{3}}$, $u_3=\overline{1+\sqrt{3}}$; 2) $A/J=\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$. Операции задаются следующими таблицами:

$+$	u_0	u_1	u_2	u_3
u_0	u_0	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_0	u_3	u_2
u_2	u_2	u_3	u_0	u_1
u_3	u_3	u_2	u_1	u_0

$\cdot$	u_0	u_1	u_2	u_3
u_0	u_0	u_0	u_0	u_0
u_1	u_0	u_1	u_2	u_3
u_2	u_0	u_2	u_1	u_3
u_3	u_0	u_3	u_3	u_0

9.68. 1) $a+b\sqrt{3}$ и $c+d\sqrt{3}$ принадлежат одному и тому же классу вычетов тогда и только тогда, когда $a\equiv c \pmod 3$ и $b\equiv d \pmod 3$, т. е. существует 9 различных классов вычетов по модулю J: $u_0=\bar{0}$, $u_1=\bar{1}$, $u_2=\bar{2}$, $u_3=\overline{\sqrt{3}}$, $u_4=\overline{1+\sqrt{3}}$, $u_5=\overline{2+\sqrt{3}}$, $u_6=\overline{2\sqrt{3}}$, $u_7=\overline{1+2\sqrt{3}}$, $u_8=\overline{2+2\sqrt{3}}$; 2) $A/J=\{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$. Операции задаются следующими таблицами:

+	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_0	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	u_0	u_4	u_5	u_3	u_7	u_8	u_6
u_2	u_2	u_0	u_1	u_5	u_3	u_4	u_8	u_6	u_7
u_3	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_0	u_1	u_2
u_4	u_4	u_5	u_3	u_7	u_8	u_6	u_1	u_2	u_0
u_5	u_5	u_3	u_4	u_8	u_6	u_7	u_2	u_0	u_1
u_6	u_6	u_7	u_8	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
u_7	u_7	u_8	u_6	u_1	u_2	u_0	u_4	u_5	u_3
u_8	u_8	u_6	u_7	u_2	u_0	u_1	u_5	u_3	u_4

	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_0	u_0	u_0	u_0	u_0	u_0	u_0	u_0	u_0	u_0
u_1	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_2	u_0	u_2	u_1	u_6	u_8	u_7	u_3	u_5	u_4
u_3	u_0	u_3	u_6	u_0	u_3	u_6	u_0	u_3	u_6
u_4	u_0	u_4	u_8	u_3	u_7	u_2	u_6	u_1	u_5
u_5	u_0	u_5	u_7	u_6	u_2	u_4	u_3	u_8	u_1
u_6	u_0	u_6	u_3	u_0	u_6	u_3	u_0	u_6	u_3
u_7	u_0	u_7	u_5	u_3	u_1	u_8	u_6	u_4	u_2
u_8	u_0	u_8	u_4	u_6	u_5	u_1	u_3	u_2	u_7

9.70. $\operatorname{Ker}\varphi = \left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Z}\right\}$. **9.71.** $\operatorname{Ker}\varphi = \left\{f \in F \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right\}$.

9.79. Воспользуйтесь задачей 9.78.2.

10.2. 1) 1; 2) 15; 3) 0; 4) 1; 5) 8; 6) 12; 7) 12; 8) 4; 9) 3; 10) 25. 10.3. 1) 24; 2) 9; 3) 27. 10.7. 1) При любых k, l, m; 2) k, l, m одновременно четные или нечетные; 3) k, $l+1$, m одновременно четные или одновременно нечетные. 10.15. 1) 88 452, 88 056, 88 758; 2) 213 516, 283 536, 263 556, 243 576, 223 596; 3) 11 244, 14 544; 4) 364 232, 364 672; 5) 666 528. 10.16. 1) a делится на m тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на m; 2) a делится на m тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, делится на m. 10.18. 1) 16; 2) 4; 3) -7; 9; 4) 8; 5) -30, 31; 6) -17, 20; 7) 0; 8) -1, 24. 10.19. 1) 0; 2) -2, 15; 3) -3, 14. 10.20. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да. 10.21. 1) Нет; 2) да. 10.22. 1) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 1, 2, 4, 5, 7, 8; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4; -4, -2, -1, 1, 2, 4; 2) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14; -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14; -7, -4, -2, -1, 2, 4, 7; 3) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 1, 5, 7, 11; -5, -1, 1, 5. 10.25. 2) Воспользуйтесь представлением $ua+vm=1$; 5) воспользуйтесь п. 4. 10.26. 1) Воспользуйтесь задачей 10.25. 2) воспользуйтесь п. 1; 3) воспользуйтесь п. 2; 7) воспользуйтесь равенством $(p-1)!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \frac{p-3}{2}\times \frac{p-1}{2}\left(p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p-\frac{p-3}{2}\right)\cdot \ldots \cdot (p-2)(p-1)$. 10.30. 1) 2; 2) 14; 3) 2; 4) 0; 5) 1, 4, 1, 4. 10.34. 1) 72; 2) 24. 10.35. 1) 696; 2) 4480. 10.36. 1) 40; 2) 66; 3) 20; 4) 2. 10.37. 1) $\alpha=3$; 2) $\alpha=3$, $\beta=2$; 3) $x=5^{\alpha}$, $\alpha\in N$; 4) $p^{\alpha}\cdot q^{\beta}=3\cdot 61$, $11\cdot 13$, $2^2\cdot 61$, $2^3\cdot 31$, $3^2\cdot 5^2$. 10.39. 1) 31; 2) 61; 3) 61; 4) 84. 10.44. 1) $x\equiv -2, 3 \pmod 7$; 2) $x\equiv 3 \pmod 4$; 3) нет решений; 4) $x\equiv -1, \pm 2, \pm 5, 6 \pmod{14}$; 5) $x\equiv -2, 3, -4 \pmod{11}$. 10.45. 3) Воспользуйтесь теоремой Ферма. 10.46. 1) $x\equiv 7, -10 \pmod{23}$; 2) нет решений; 3) $x\equiv -2, 7 \pmod{11}$; 4) $x\equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod 7$. 10.47. 1) $a=2+10k$, 2) $a_1=10k$, $a_{2,3}=\pm 4+10k$. 10.48. 1) 6; 2) $p-1$; 3) 8. 10.49. 1) $\varphi(m)$; 2) $\frac{p-1}{2}$; 3) $\frac{p-1}{2}$. 10.51. 1) $x=48k \pmod{1152}$, где $k=0, 1, 2\ldots, 23$; 2) $x=40k \pmod{1600}$, где $k=0, 1, 2, \ldots, 39$. 10.53. 1) $x\equiv 5 \pmod 7$; 2) $x\equiv 6 \pmod 9$; 3) $x\equiv 4 \pmod{11}$; 4) $x\equiv 2 \pmod{23}$; 5) $x\equiv 28 \pmod{119}$; 6) $x\equiv 29 \pmod{201}$; 7) $x\equiv 45, 146, 247, 348 \pmod{404}$; 8) $x\equiv 17, 96, 175, 254, 333 \pmod{395}$; 9) $x\equiv 35, 124, 213, 302, 391, 480 \pmod{534}$; 10) $x\equiv 29, 123, 217, 311, 405, 499, 593, 687, 781 \pmod{846}$; 11) $x\equiv 92, 221, 350, 479, 608, 737, 866 \pmod{906}$; 12) $x\equiv 72, 285, 498 \pmod{639}$. 10.55. 1) $x\equiv a-b \pmod{ab}$; 2) $x\equiv a+b \pmod{ab}$; 3) $x\equiv (a-b)^{\varphi(ab)-1} \pmod{ab}$; 4) $x\equiv (a-b)(a+b)^{\varphi(ab)-1} \pmod{ab}$. 10.56. Чтобы найти элемент, обратный $\bar{a}\in \mathbf{Z}_{30}^{*}$, надо решить сравнение $ax\equiv 1 \pmod{30}$. $\bar{1}^{-1}=\bar{1}$, $\bar{7}^{-1}=\overline{13}$, $\overline{13}^{-1}=\bar{7}$, $\overline{11}^{-1}=\overline{11}$, $\overline{17}^{-1}=\overline{23}$, $\overline{23}^{-1}=\overline{17}$, $\overline{19}^{-1}=\overline{19}$. 10.57. 1) $\bar{x}=\overline{11}$; 2) $\bar{x}=\bar{5}$; 3) $\bar{x}=\overline{23}$; 4) $\bar{x}=\bar{5}$; 5) $\bar{x}=\overline{11}$; 6) $\bar{x}=\bar{5}$; 7) $\bar{x}=\overline{19}$. 10.58. 1) Нет решений; 2) $\bar{x}=\overline{23}$; 3) $\bar{x}_1=\bar{2}$, $\bar{x}_2=\bar{7}$, $\bar{x}_3=\overline{12}$, $\bar{x}_4=\overline{17}$, $\bar{x}_5=\overline{22}$, $\bar{x}_6=\overline{27}$; 4) $\bar{x}_1=\bar{3}$, $\bar{x}_2=\bar{9}$, $\bar{x}_3=\overline{15}$, $\bar{x}_4=\overline{21}$, $\bar{x}_5=\overline{27}$. 10.59. 2) Воспользуйтесь п. 1 и результатом задачи 8.44.1; 3) воспользуйтесь п. 1 и результатом задачи 8.46; 4) воспользуйтесь п. 3; 5) воспользуйтесь п. 3 и теоремой Эйлера; 6) воспользуйтесь результатом задачи 8.48.1. 10.60. 1) 2; 2) 20; 3) 2; 4) 4; 5) 8; 6) 16; 7) 6; 8) 15. 10.61. 30. 10.62. 1) 1 и 2; 2) 1, 2, 3, 6. 10.63. 2. 10.64. 1) $x=4k$, $k\in \mathbf{N}$; 2) $x=2k$, $k\in \mathbf{N}$. 10.66. 2) Воспользуйтесь п. 1 и результатом задачи 10.59.5. 10.69. 1) $\bar{3}$, $\bar{5}$; 2) $\bar{2}$, $\bar{5}$; 3) $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, $\bar{8}$. 10.70. Воспользуйтесь результатом задачи 10.59.6. 10.72. Воспользовавшись результатом задачи 10.70, получим: 1) 10, 5, 11, 14, 7. 12, 6; 2) 13, 14, 15, 3. 10. 10.73. 2, 6, 11, 7;

$$p = 3, \quad q = 2.$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	4	2	9	5	11	3	8
1	10	7	6							

J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5
1	10	7								

10.74. Воспользуйтесь результатами задачи 10.68. **10.78.** 1) $t = 0$, $s = 28$; 2) $t = 0$, $s = 2$; 3) $t = 0$, $s = 16$; 4) $t = 0$, $s = 48$; 5) $t = 0$, $s = 104$: 6) $t = 2$, $s = 1$; 7) $t = 2$, $s = 18$: 8) $t = 4$, $s = 16$; 9) $t = 4$, $s = 2$. **10.79.** 1) $b_1 = 11$, $b_2 = 33$, $b_3 = 99$; 2) $b_1 = 27$, $b_2 = 37$, $b_3 = 111$, $b_4 = 333$, $b_5 = 999$. **10.82.** 1) $x \equiv 50 \pmod{83}$; 2) $x \equiv 52 \pmod{73}$; 3) $x \equiv 4, 7 \pmod{11}$ 4); $x \equiv 17 \pmod{41}$; 5) $x \equiv 30, 13, 7, 29, 3 \pmod{41}$; 6) $x \equiv 23, 36 \pmod{59}$; 7) $x \equiv 19, 10, 2 \pmod{31}$; 8) $x \equiv 18, 71, 57 \pmod{73}$. **10.83.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.81, а затем проиндексируйте сравнение $a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod{p}$. **10.84.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.83. **10.85.** Докажите, что если $1 < k,\ l \leqslant \frac{p-1}{2}$, то $k^2 \not\equiv l^2 \pmod{p}$, и воспользуйтесь результатом задачи 10.84. **10.86.** 1) 1, 3, 4, 9, 10, 12: 2) 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16. **10.87.** 1) $x \equiv \pm 5 \pmod{17}$; 2) $x \equiv \pm 8 \pmod{27}$; 3) нет решений; 4) $x \equiv \pm 11 \pmod{37}$; 5) нет решений. **10.88.** В каждом из случаев — одно решение: 1) $x \equiv 0 \pmod{p}$; 2) $x \equiv a \pmod{p}$. **10.90.** 1) $x \equiv 12, 16 \pmod{17}$; 2) $x \equiv 5, 7 \pmod{17}$; 3) нет решений; 4) $x \equiv 2$, 5) $\pmod{37}$; 5) нет решений 6) $x \equiv 1, 11 \pmod{23}$. **10.91.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.84. **10.92.** Воспользуйтесь результатом задачи 10.84. **10.95.** Значения $\sqrt[3]{\bar 1}$ — это корни уравнений $\bar x^3 - \bar 1 = \bar 0$. Разложите левую часть этого уравнения на множители. **10.96.** 1) $x \equiv 1, 46, 56 \pmod{103}$; 2) $x \equiv 1 \pmod{107}$.

11

11.1. 1) $f(x) = x$; 2) $f(x) = 12 - \frac{17}{2} x + \frac{3}{2} x^2$; 3) $f(x) = -2 + 6x - 2x^2$. **11.3.** Аналогично задаче 11.2. **11.5.** 1) $p = q = 1$; 2) $p = -1$, $q = 0$; 3) $p = -1$, $q = 0$; 4) $p = q = 1$. **11.6.** $a_1 = -1$, $b_1 = 0$; $a_2 = 1$, $b_2 = \pm\sqrt{2}$. **11.11.** 1) $\bar x^6 + \bar 9 \bar x^4 + \bar 2 \bar x - \bar 1$; 2) $\bar x^{17} + \bar a$; 3) $\bar x^{19} + \bar 2 \bar a \bar x^{18} + \bar a^2 \bar x^{17} + \bar a \bar x^2 + \bar 2 \bar a^2 \bar x + \bar a^3$; 4) $\bar x^{51} + \bar 3 \bar a \bar x^{34} + \bar 3 \bar a^2 \bar x^{17} + \bar a^3$. **11.14.** 1) $x^3 - 3x^2 + 11x - 13$, 46; 2) $2x^3 + 5x^2 + 15x + 68$, 269; 3) $x^2 - (3+4i)x - 4(1-7i)$, $128 - 96i$; 4) $3x^4 - (4-3i)x^3 + (3-7i)x^2 + (4+10i)x - 3(5+6i)$, $20 - 9i$; 5) $2x^4 + (2+4i)x^3 - 8(1-i)x^2 - 8(3+i)x - 7(1+8i)$, $105 - 70i$. **11.15.** 1) -30; 2) $-134 + 17i$; 3) -5. **11.16.** 1) $(x-2)^4 - 18(x-2) - 30$; 2) $(x-2+i)^5 + (10-9i)(x-2+i)^4 + (14-72i)(x-2+i)^3 - (75+182i)(x-2+i)^2 - (207+154i)(x-2+i) - (134+17i)$; 3) $(x-1+i)^5 + (5-5i)(x-1+i)^4 - (1+18i)(x-1+i)^3 - (17+12i)(x-1+i)^2 - (9-3i)(x-1+i) - 5$. **11.17.** 1) 3; 2) 3; 3) 4; 4) 3. **11.19.** 1) $p = -5$,

$q=3$; 2) $p=-3$, $q=3$; 3) $p=3$, $q=-4$. **11.21.** 1) $n \vdots 3$; 2) n—нечетное число, кратное 3; 3) $n \not\vdots 3$; 4) $n \vdots p$. **11.23.** 1) $f(x)=(x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$; 2) $f(x)=(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 3) $f(x)=(x-3)(x+2)\left(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)$; 4) $f(x)=(x-2)(x+1)\left(x-\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{19}}{2}\right)$; 5) $f(x)=(x-2)(x+3)\left(x+\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)\left(x+\frac{1-i\sqrt{15}}{2}\right)$; 6) $f(x)=(x-2)(x+2)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$. **11.27.** 1) $x^4-4x^3+5x^2+x+1=(x^2-2x-3)(x^2-2x+4)+(3x+11)$; 2) $5x^4-x^2+6=(x^2+3x+2)(5x^2-15x+34)+(-72x-62)$; 3) $2x^2-3x+1=(x^3+4)\cdot 0+(2x^2-3x+1)$; 4) $x^3-2x^2+3x-4=(3x^2-2x+1)\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{16}{9}x-\frac{32}{9}\right)$.

11.28. 1) $-4x+6$; 2) $-x$; 3) 2; 4) 1. **11.29.** x. **11.30.** $-x^2-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}$. **11.31.** $\frac{(a-b)w+(b-c)a+(c-a)v}{(a-b)(b-c)(c-a)}x^2+\frac{(a^2-b^2)w+(b^2-c^2)u+(c^2-a^2)v}{(a-b)(b-c)(c-a)}\times x-\frac{(a-b)abw+(b-c)bcu+(c-a)acv}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. **11.32.** $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{28}{3}$.
11.33. 1) $a=0$, $q=-1$; 2) $a=-3$, $q=8$; 3) $p=a^3-2a$, $q=a^2-1$, $a\in\mathbb{Q}$; 4) $a=\pm 3$, $q=-8$; 5) $p=2-a^2$, $q=1-a^2$, $a\in\mathbb{Q}$; 6) $p=\frac{a^4-3a^2+1}{a}$, $q=\frac{1-a^2}{a}$, $a\in\mathbb{Q}$, $a\neq 0$. **11.34.** $a=1$, $b=2$, $x_1=1+i\sqrt{5}$; $x_2=1-i\sqrt{5}$. **11.35.** 1) $r^2(x)$; 2) 2; 3) $-6x+1$. **11.37.** 1) НОД $(f, g)=x^2+x-2=-\frac{1}{3}f+\frac{1}{3}(x+1)g$; 2) НОД $(f, g)=x-1=\frac{1}{11}(x^3-x^2+3x+6)f+(-x^3+2x^2-5x-1)g$; 3) НОД $(f, g)=x^2+2x+1=-\frac{1}{4}(9x-11)f+\frac{3}{4}(9x^2+7x+5)g$; 4) НОД $(f, g)=4=f-(x^3-x-1)g$; 5) НОД $(f, g)=x-1=-\frac{1}{4}(45x^3+36x^2+96x+104)f+\frac{1}{4}(45x^4+36x^3-39x^2-4x+27)g$; 6) НОД $(f, g)=x+1=\frac{1}{4586}(18x^4-118x^3+137x^2+285x-819)f+\frac{1}{4586}(18x^4-118x^3+137x^2+267x-737)g$. **11.38.** 1) НОД $(f(x), g(x))=x^3(x+1)$, НОК $(f(x), g(x))=x^3(x+1)^2(x-1)(x-2)(x+3)$; 2) НОД $f(x), g(x))=(x+2)^2(x^3+4)$, НОК $(f(x), g(x))=(x-2)^2(x^6-64)(x^8-256)$; 3) НОД $(f(x), g(x))=(x-2)^3$, НОК $(f(x), g(x))=(x^2-4)^3(x^2+2x+4)$; 4) НОД $(f(x), g(x))=1$, НОК $(f(x), g(x))=(x-1)(x-2)(x+2)^2(x^2-9)$.
11.39. 1) x^3-1; 2) x^d-1, где $d=$ НОД$(m, n)>0$. **11.41.** 1) Воспользуйтесь тем, что F — поле нулевой характеристики; 4) индукцией по k.
11.42. 1) $f(x)=x+1$; 2) $f(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x-\frac{14}{3}$; 3) $f(x)=0$ или $f(x)=\frac{1}{4}x^2+ax+a^2$ при любом $a\in F$. **11.43.** 1) $f(2)=-30$, $f'(2)=-18$, $f''(2)=0$, $f'''(2)=0$, $f^{IV}(2)=24$, 2) $f(2-i)=-134-17i$, $f'(2-i)=-207-154i$, $f''(2-i)=-150-364i$, $f'''(2-i)=84-432i$,

$f^{IV}(2-i)=240-216i$, $f^{V}(2-i)=120$; 3) $f(1-i)=-5$, $f'(1-i)=-9+3i$, $f''(1-i)=-34-12i$, $f'''(1-i)=-6-108i$, $f^{IV}(1-i)=120-120i$, $f^{V}(1-i)=120$. **11.46.** Воспользуйтесь результатом задачи 11.45. **11.47.** Воспользуйтесь результатом задачи 11.45. **11.48.** 1) Воспользуйтесь результатом задачи 11.47; 2) воспользуйтесь п. 1. **11.49.** 1) $(x-1)^3(x+1)$; 2) $(x^2-4)^3(x^2+4)$; 3) $(x^2+1)^2(x^4+1)^3(x^6+1)^5(x^8+1)^7$; 4) x^d-1, где $d=$ НОД (k, l). Воспользуйтесь задачей 11.39. **11.50.** 1) Воспользуйтесь задачей 11.45; 3) воспользуйтесь задачей 11.48.1; 4) воспользуйтесь п. 3; 5) воспользуйтесь задачей 11.47. **11.51.** 1) $p=-3$, $q=3$, $r=-1$; $p=-\frac{8}{3}$, $q=2$, $r=-\frac{1}{3}$; 3) $p=-\frac{1}{3}$, $q=2$, $r=-\frac{1}{3}$; 4) $p=-\frac{2(n-1)}{n-2}$, $q=\frac{2n}{n-3}$, $r=-\frac{n(n-1)}{(n-2)(n-3)}$; 5) $p=-\frac{n(n-1)}{2}$, $q=n(n-2)$, $r=-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. **11.52.** 1) $a=-3$, $k=3$; 2) $a=-4$, $k=2$; 3) $a=4$, $k=2$. **11.53.** 1) $4p^3+27q^2=0$; 2) $q=0$ или $4p^3+27q=0$; 3) $27p^4-256q^3=0$; 4) $q=0$ или $p^2-4q=0$; **11.54.** 1) n — любое; 2) $n=6$; 3) $n=9$. **11.58.** 1) $f(x)=(x+1)^4(x-3)^2$; 2) $f(x)=(x-1)^4(x+1)^2$; 3) $f(x)=(x-1)^4(x^2+1)$; 4) $f(x)=(x^3+x^2-x+3)$. **11.59.** 1) $(x-2)\times(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})$, $(x-2)(x^2+2x+4)$; 2) $(x+2)(x-1+i\sqrt{3})\times(x-1-i\sqrt{3})$, $(x+2)(x^2-2x+4)$; 3) $(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$, $(x-2)(x+2)(x^2+4)$; 4) $(x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-i\sqrt{2})\times(x+\sqrt{2}+i\sqrt{2})$, $(x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$; 5) $(x-\sqrt{3})\times(x+\sqrt{3})\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)\times\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)$, $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-x\sqrt{3}+3)(x^2+x\sqrt{3}+3)$; 6) $(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})\left(x-\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$, $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$; 7) $(x-\sqrt[4]{3})^2(x-i\sqrt[4]{3})^2(x+\sqrt[4]{3})^2(x+i\sqrt[4]{3})^2$, $(x-\sqrt[4]{3})^2(x+\sqrt[4]{3})^2(x^2+\sqrt{3})^2$; 8) $\left(x+\frac{3i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$, $(x^2+3x+3)\left(x+\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$; 9) $(x-3-\sqrt{6})(x-3+\sqrt{6})\times(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})$. **11.60.** 1) $x^4-(1+i)x^3-(1-i)x^2+(1+i)x-i$, x^5-x^4-x+1; 2) $x^3-3(1+2i)x^2-3(3+4i)x+(11-2i)$, $x^6-6x^5+27x^4-68x^3+135x^2-150x+125$; 3) $x^4+6x^3+(15+2i)x^2+(18+6i)x+8+6i$, $x^8+12x^7+66x^6+216x^5+461x^4+660x^3+624x^2+360x+100$. **11.62.** 1) Нет; 2) нет. **11.63.** $b^2-4ac=0$ и $a>0$. **11.65.** 1) -2, $3\pm i\sqrt{6}$; 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $3\pm i\sqrt{5}$; 3) $-2\pm i\sqrt{6}$, $-3\pm i\sqrt{6}$; 4) $1\pm i\sqrt{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$. **11.66.** 1) $\pm 18\sqrt{3}$; 2) -128; 3) 25. **11.67.** 1) $q=0$; 2) $q=0$; 3) $q=\pm\frac{12}{13}p\sqrt{-\frac{p}{13}}$; 4) $p^3+p^2q^2-q^4=0$. **11.68.** 1) p_1 любое, $r_1=q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-1$, $r_2=1$; 2) p_1 любое, $r_1=q_1=0$; $p_2=-1$, $q_2=-1$, $r_2=1$. **11.69.** 1) $p=q=1$; 2) $q=p-1$, $p\neq 0$, $p\neq 1$. **11.70.** $\pm 0{,}5$. **11.71.** $(p^2-2q)(p+q)=pq$. **11.75.** 1) $f(x)=x^3+6x^2+$

$+5x-6$, $x_1=-2$, $x_{2,3}=-2\pm\sqrt{7}$; 2) $f(x)=x^3-18x^2+68x+24$, $x_1=6$, $x_{2,3}=6\pm2\sqrt{10}$. **11.76.** $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$, $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=4$. **11.77.** $a=b=0$. **11.81.** 1) -4, $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{2}{3}$, $2\pm i\sqrt{3}$; 4) $\frac{5}{3}$, $1\pm i\sqrt{5}$; 5) $-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$, $\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})$; 6) $-i$, $-i$, $2i$; 7) $-i$, $-i$, $3+2i$; 8) i, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 9) $-\frac{1}{2}i$, $\frac{5\pm i\sqrt{5}}{2}$. **11.82.** 1) $-1\pm\sqrt{2}$, $\pm i\sqrt{3}$; 2) $\pm\sqrt{6}$, $1\pm i\sqrt{3}$; 3) $1\pm\sqrt{2}$, $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$; 5) $-1\pm i$, $\pm i\sqrt{2}$; 6) $1\pm i$, $\pm i\sqrt{6}$; 7) $\frac{-1\pm2\sqrt{5}}{2}$, $\pm\frac{i\sqrt{7}}{2}$. **11.83.** 1) $\left(x+\frac{5+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{5-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)$, $(x^2+5x+7)\left(x-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)$, $(x^2+5x+7)(x^2-7x+1)$; 2) $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $(x^2-x-1)\times(x^2+2x-2)$; 3) $3(x-1+i)(x-1-i)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\times\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$, $3(x^2-2x+2)\left(x+\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$, $(x^2-2x+2)(3x^2+x-1)$; 4) $5\left(x+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right)\left(x+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)(x+4+\sqrt{17})(x+4-\sqrt{17})$, $(5x^2+4x+1)(x+4+\sqrt{17})(x+4-\sqrt{17})$, $(5x^2+4x+1)(x^2+8x-1)$. **11.84.** 6. **11.86.** 1) 3 действительных корня в интервалах $]-3,-2[$, $]-2,-1[$, $]0,1[$; 2) 1 действительный корень в интервале $]-1,0[$; 3) 2 действительных корня в интервалах $]0,1[$ и $]2,3[$; 4) 2 действительных корня в интервалах $]-1,0[$ и $]0,1[$; 5) 4 действительных корня в интервалах $]-3,-2[$, $]-2,-1[$, $]0,1[$, $]1,2[$; 6) нет действительных корней.

12

12.2. Индукцией по степени h. **12.7.** 1) Над $\mathbf{C}$: $(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)\times(x-i\sqrt{3}y)(x+i\sqrt{3}y)$, над $\mathbf{R}$: $(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)(x^2+3y^2)$, над $\mathbf{Q}$: $(x^2-3y^2)(x^2+3y^2)$; 2) над $\mathbf{C}$, над $\mathbf{R}$ и над $\mathbf{Q}$: $(x^2-3y)(x^2+3y)$; 3) многочлен неприводим над $\mathbf{C}$; 4) над $\mathbf{C}$; $2\left(x+iy+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(x-iy+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$, над $\mathbf{R}$ многочлен неприводим. **12.10.** Многочлен из пп. 2, 3, 5. **12.11.** 1) $x_1^3+x_2^3+x_3^3$; 2) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$; 3) $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3$. **12.14.** 1) $\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2+12\sigma_3$; 2) $\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3$; 3) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3$; 4) $\sigma_1\sigma_2^2-2\sigma_1^2\sigma_3-\sigma_2\sigma_3$; 5) $-\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3$; 6) $\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2$; 7) $\sigma_3^2-\sigma_1^2\sigma_3+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3-\sigma_3$; 8) $\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_2^2+2\sigma_1^2\sigma_3+$

$+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1^4-3\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3-\sigma_1\sigma_2+\sigma_3$. **12.15.** 1) $\sigma_1^2\sigma_2-\sigma_1\sigma_3+\sigma_4$; 2) $\sigma_1^2\sigma_4+\sigma_3^2-4\sigma_2\sigma_4$; 3) $-\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3+16\sigma_4$. **12.16.** 1) $-1,8$; 2) $4,43$; 3) $-0,24$. **12.17.** 1) 0; 2) $-27q$; 3) $\dfrac{2p-3q}{p-q+1}$ **12.18.** 1) $y^3-15y-25=0$; 2) $5y^3+9y^2+6y-125=0$; 3) $5y^3+15y^2-12y+5=0$.

12.19. $\sqrt{p^3-4pq+8r}$. **12.20.** $\dfrac{a_{n-1}^2-2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$, $\dfrac{-a_{n-1}^3+3a_na_{n-1}\times a_{n-2}-3a_n^3a_{n-3}}{a_n^3}$.

12.21. 1) -26: 2) -7; 3) 243; 4) -256; 5) 0. **12.22.** 1) -4; 2) 2; 3) ± 2, $-\dfrac{1}{2}$; 4) -3, $\dfrac{5\pm 3i\sqrt{7}}{4}$; 5) 0,9. **12.23.** 1) $x_1=-1$, $y_1=1$; $x_2=2$, $y_2=0$; $x_3=1$, $y_3=2$; $x_4=1$, $y_4=-1$; 2) $x_{1,2}=2$, $y_{1,2}=-1$, $x_3=-2$, $y_3=1$; $x_4=4$, $y_4=2$; 3) $x_1=1$, $y_1=0$; $x_2=2$, $y_2=1$; $x_3=0$, $y_3=-3$; $x_4=-2$, $y_4=-1$; 4) $x_{1,2}=\pm 2i$; $y_{1,2}=\pm i$; $x_{3,4}=6\pm 2i$, $y_{3,4}=6\pm i$; 5) $x_{1,2}=0$, $y_{1,2}=\pm 1$; $x_3=-1$, $y_3=0$; $x_4=-1$, $y_4=1$; $x_{5,6}=2$, $y_{5,6}=1\pm i\sqrt{2}$.

13

13.1. 1) Подставив в $f(x)$ значение переменной s/t, умножьте затем полученное равенство $f\left(\dfrac{s}{t}\right)$ на t^n; 3) разделите $f(x)$ на $x-k$ с остатком, а затем в равенство $f(x)=(x-k)g(x)+f(k)$ подставьте значение переменной s/t, умножьте полученное равенство на t^n. **13.3.** 1. $x_1=\dfrac{1}{2}$; 2) $x_1=\dfrac{6}{5}$; 3) $x_1=x_2=-\dfrac{3}{2}$; 4) $x_1=x_2=-\dfrac{2}{3}$, $x_3=x_4=\dfrac{3}{2}$; 5) нет; 6) нет; 7) $x_1=x_2=\dfrac{6}{5}$, $x_3=x_4=-\dfrac{1}{3}$, $x_5=-1$; 8) $x_1=x_2=x_3=\dfrac{2}{3}$.
13.4. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются искомые числа. 1) Возможные тройки: 1, 1, 3; -1, -1, 3; 2) возможные тройки: ± 4, $\pm\dfrac{1}{2}$, $\pm\dfrac{3}{2}$ со всевозможными комбинациями знаков. **13.5.** 1) $x_{1,2}=\dfrac{2\pm i\sqrt{2}}{2}$, $x_{3,4}=\pm\dfrac{1}{2}i\sqrt{6}$; 2) $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{1\pm i\sqrt{14}}{3}$; 3) $x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}i$. **13.8.** 1) x, $x+1$, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, $x^4+x^3+x^2+x+1$; 2) x, $x+1$, $x+2$, x^2+1, x^2+x+2, x^2+2x+2. **13.12.** 5) Примените подстановку $x=y+1$; 6—8) Подберите удачную подстановку. **13.18.** 1) $\mathbf{Q}(a)=\mathbf{Q}$; 2) $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{x+y\sqrt{3}\mid x,\ y\in\mathbf{Q}\}$; 3) $\mathbf{Q}(a+bi\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{3})$; 4) $\mathbf{Q}(\sqrt{5})=\{x+y\sqrt{5}\mid x,\ y\in\mathbf{Q}\}$; 5) $\mathbf{Q}(i)=\{x+yi\mid x,\ y\in\mathbf{Q}\}$; 6) $\mathbf{Q}(a+bi)=\mathbf{Q}(i)$; 7) $\mathbf{Q}(i\sqrt{3})=\{x+yi\sqrt{3}\mid x,\ y\in\mathbf{Q}\}$; 8) $\mathbf{Q}(a+bi\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{3})$; 9) $\mathbf{Q}(e)=\left\{\dfrac{f(e)}{g(e)}\,\middle|\, f(x),\ g(x)\in\mathbf{Q}[x]\right\}$; 10) $\mathbf{Q}(\pi)=\left\{\dfrac{f(\pi)}{g(\pi)}\,\middle|\, f(x),\ g(x)\in\mathbf{Q}[x]\right\}$.
13.19. Поля пп. 1, 2, 4, 5. **13.20.** Рассмотрите отображение $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ на $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$: $\varphi(x+y\sqrt{3})=x+y\sqrt{5}$. **13.21.** Докажите, что $i\in\mathbf{R}(a+bi)$.
13.23. 1) 1; 2—8) 2; 9—10) бесконечная. **13.33.** 1) $x_2=1-\sqrt{3}$, $x_3=1+\sqrt{2}$, $x_4=1-\sqrt{2}$; 2) $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=-2$.
13.34. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи 13.33. **13.36.** 1)

$-\frac{2}{47}\sqrt[3]{4}+\frac{5}{47}\sqrt[3]{2}+\frac{11}{47}$; 2) $-\frac{5}{78}\sqrt[3]{25}+\frac{23}{78}\sqrt[3]{5}+\frac{19}{78}$; 3) $\frac{5}{2}\sqrt[3]{49}+$ $+\frac{9}{2}\sqrt[3]{7}+\frac{17}{2}$; 4) $-\frac{1}{7}\sqrt[4]{27}+\frac{2}{7}\sqrt[4]{9}-\frac{1}{7}\sqrt[4]{3}+\frac{1}{7}$; 5) $-\frac{1}{13}\sqrt[4]{8}+$ $+\frac{3}{13}\sqrt[4]{4}+\frac{3}{13}\sqrt[4]{2}+\frac{5}{13}$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{8}+\frac{1}{3}\sqrt[4]{4}+\frac{1}{3}$; 7) $-z^2+2$; 8) $-2z^2-4z+5$; 9) $-\frac{1}{5}\sqrt[6]{2^4}+\frac{1}{5}\sqrt[6]{2^3}+\frac{1}{5}\sqrt[6]{2^2}+\frac{2}{5}\sqrt[6]{2}+\frac{1}{5}$; 10) $\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{4}\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{4}\sqrt{3}+1$.

13.37. 1) $Q(\sqrt[3]{2})=\{a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c \mid a,\ b,\ c\in Q\}$; 2) $Q(\sqrt[4]{2})=\{a\sqrt[4]{8}+$ $+b\sqrt[4]{4}+c\sqrt[4]{2}+d \mid a,\ b,\ c,\ d\in Q\}$; 3) $Q\left(\sqrt{\sqrt[3]{3}-1}\right)=\{a_0t^5+a_1t^4+$ $+a_2t^3+a_3t^2+a_4t+a_5 \mid a_i\in Q\}$, где $t=\sqrt{\sqrt[3]{3}-1}$. **13.38.** x^3-4x^2+ $+9x-11=0$. **13.39.** $\frac{1}{70}(z^5+3z^4+z^3+13z^2-19z+41)$, где $z=\sqrt{\sqrt[3]{5}-2}$.

13.41. 1) Нет; 2) нет; 3) да. **13.48.** 1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$; 3) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{5}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Лекции и задачи по элементарной математике.— М.: Наука, 1974.
2. *Бухштаб А. А.* Теория чисел.— СПб.: Лань, 2008.
3. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— СПб.: Лань, 2004.
4. Венгерские математические олимпиады / Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани.— М.: Мир, 1976.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел.— СПб.: Лань, 2006.
6. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, 1966.
7. *Грибанов В. У., Титов П. И.* Сборник упражнений по теории чисел.— М.: Просвещение, 1964.
8. *Драбкина М. Е.* Логические упражнения по элементарной математике.— Мн.: Выш. школа, 1965.
9. *Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. П.* Математические соревнования. Арифметика и алгебра.— М.: Наука, 1970.
10. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад.— М.: Просвещение, 1967.
11. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре.— СПб.: Лань, 2006.
12. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.
13. *Кудреватов Г. А.* Сборник задач по теории чисел.— М.: Просвещение, 1970.
14. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел.— М.: Высш. школа, 1979.
15. *Куратовский Г., Мостовский А.* Теория множеств.— М.: Мир, 1970.
16. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. —СПб.: Лань, 2008.
17. *Ленг С.* Алгебра.— М.: Мир, 1968.
18. *Ляпин Е. С.* Курс высшей алгебры.— М.: Учпедгиз, 1955.
19. *Ляпин Е. С., Айзенштат А. Я., Лесохин М. М.* Упражнения по теории групп.— М.: Наука, 1967.
20. *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Алгебра и теория чисел.— М.: Просвещение, 1974, ч. 1; 1978, ч. 2.
21. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М.: ГИТТЛ, 1948.
22. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
23. Математические задачи / Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. П. Розенталь, А. Н. Толпыго.— М.: Наука, 1965.
24. *Морозова Е. А., Петраков И. С.* Международная математическая олимпиада.— М.: Просвещение, 1968.
25. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике.— М.: Наука, 1980.
26. *Окунев Л. Я.* Сборник задач по высшей алгебре.— М.: Просвещение, 1964.
27. *Окунев Л. Я.* Высшая алгебра.— М.: Просвещение, 1966.
28. Олимпиады. Алгебра. Комбинаторика / Л. С. Соболев, Д. М. Смирнов, Б. А. Трахтенброт и др.— Новосибирск: Наука, 1979.
29. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. —СПб.: Лань, 2008.

30. *Садовничий В. А., Подколзин А. С.* Задачи студенческих олимпиад по математике.— М.: Наука, 1978.

31. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы / В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; Под редакцией М. И. Сканави. 4-е изд.— М.: Высш. школа, 1980.

32. *Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М.* О математической индукции.— М.: Наука, 1967.

33. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории.— М.: Просвещение, 1968.

34. *Страшевич С., Бровкин Е.* Польские математические олимпиады.— М.: Мир, 1978.

35. *Сушкевич А. К.* Теория чисел.— Харьков: Изд-во ун-та, 1956.

36. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Задачи по высшей алгебре. — СПб.: Лань, 2007.

37. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства.— М.: Наука, 1969.

38. *Шиханович Ю. А.* Введение в современную математику.— М.: Наука, 1965.

39. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. 5-е изд.— М.: Наука, 1976.

40. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении.— М.: ГИТТЛ, 1954.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Высказывания 5
1.2. Множества 6
1.3. Кванторы 8
1.4. Бинарные отношения 11
1.5. Натуральные числа. Метод математической индукции. Соединения 15

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Алгебраическая форма комплексного числа 18
2.2. Тригонометрическая форма комплексного числа 20
2.3. Геометрическая интерпретация комплексного числа . . . 23

3. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

3.1. Матрицы 26
3.2. Определители 29
3.3. Обратимые матрицы 33
3.4. Правило Крамера 36

4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Простейшие свойства. Линейная зависимость 38
4.2. Решение системы линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных 41
4.3. Ранг системы векторов. Ранг матрицы 44
4.4. Изоморфизм, базис, размерность 47
4.5. Подпространство. Однородные системы. Линейные многообразия 50
4.6. Евклидовы пространства 53

5. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.1. Определение и простейшие свойства линейных преобразований 57
5.2. Матрица линейного оператора. Матрица перехода к новому базису 60
5.3. Собственные векторы 62

6. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

6.1. Системы линейных неравенств 65
6.2. Линейное программирование 68

7. ДЕЛИМОСТЬ В КОЛЬЦЕ $\mathbf{Z}$

7.1. Отношение делимости 70
7.2. Деление с остатком 72
7.3. НОД и НОК целых чисел 74
7.4. Конечные цепные дроби 77
7.5. Простые числа 78
7.6. Числовые функции 80
7.7. Систематические числа 82

8. ГРУППЫ

8.1. Алгебраическая операция. Полугруппы 83
8.2. Примеры групп 85
8.3. Простейшие свойства группы 88
8.4. Подгруппы, смежные классы, нормальные подгруппы, гомоморфизмы 90

9. КОЛЬЦА

9.1. Кольцо, подкольцо 94
9.2. Область целостности. Поле 96
9.3. Идеалы коммутативных колец 99
9.4. Гомоморфизмы коммутативных колец 102
9.5. Упорядоченное поле 105

10. СРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕ Z

10.1. Простейшие свойства сравнений 106
10.2. Группа классов вычетов, взаимно-простых с модулем . . . 108
10.3. Сравнения с одним неизвестным 111
10.4. Порядок числа по данному модулю. Первообразные корни. Индексы 112
10.5. Степенные вычеты 114

11. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

11.1. Отношение делимости в кольце многочленов 117
11.2. Деление многочлена на линейный двучлен 118
11.3. Многочлены над полем 119
11.4. Производная многочлена над полем нулевой характеристики. Кратные множители 121
11.5. Многочлены над $\mathbf{C}$ и над $\mathbf{R}$ 123

12. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Многочлены от n переменных 126
12.2. Симметрические многочлены 127
12.3. Результант. Системы алгебраических уравнений 128

13. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

13.1. Многочлены над полем $\mathbf{Q}$ 130
13.2. Простое и конечное расширение поля 132
13.3. Алгебраические числа 133
13.4. Разрешимость задач на построение 136
Решения 137
Ответы и указания 187
Литература 220

Лев Борисович ШНЕПЕРМАН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Учебное пособие

Издание третье, стереотипное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат
78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru
www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

Подписано в печать 10.07.08.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 1/32.
Печать офсетная. Усл. п. л. 11,76. Тираж 2000 экз.

Заказ № 3789

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие
«Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54, www.ippps.ru