

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ



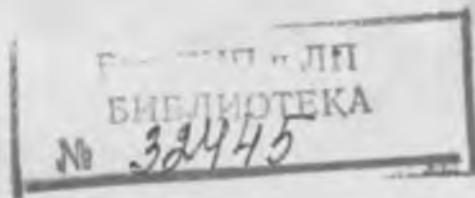
517.5

А-47

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ

32445-32447



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

517.2
Л47
УДК 517.5

Ряды экспонент, Леонтьев А. Ф. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976, 536 стр.

Книга посвящена представлениям аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент (рядами Дирихле). Изложение начинается с классической теории рядов Дирихле. Потом излагаются результаты автора по представлению аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент. Рассматриваемые ряды не всегда сходятся. Приведены способы восстановления функций по коэффициентам их рядов Дирихле. Указана связь с квазианалитическим продолжением.

Книга вполне доступна студентам старших курсов математических факультетов университетов. Она представляет интерес для лиц, работающих в области теории функций. Библи. 86 назв.

Алексей Федорович Леонтьев
РЯДЫ ЭКСПОНЕНТ

М., 1976 г., 536 стр.

Редактор И. Е. Морозова

Техн. редактор К. Ф. Брудно. Корректор В. Я. Строева

Сдано в набор 11.05.76. Подписано к печати 05.10.76. Бумага 60x90¹/₄ тип. № 1.
Физ. печ. л. 33,5. Усл. печ. л. 33,5. Уч.-изд. л. 30,3. Тираж 5000 экз. Т-15173.
Цена книги 2 р. 07 к. Заказ № 167

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 196052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

20203—135
053(02)-76 45-76

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
Глава I. Необходимые сведения из теории целых функций	10
§ 1. Целые функции конечного порядка	10
1. Порядок и тип целой функции (10). 2. Нули целой функции (11). 3. Разложение в бесконечное произведение (11). 4. Оценка модуля функции снизу (17). 5. Целые функции первого порядка и конечного типа (22).	
§ 2. Целые функции конечного уточненного порядка	25
1. Уточненный порядок (25). 2. Плотности (30). 3. Правильно распределенные множества, R-множества (30). 4. Индикатор целой функции (35). 5. Каноническая функция правильно распределенного множества (37). 6. Теоремы об асимптотическом поведении канонической функции (38). 7. Специальные целые функции (48). 8. Квазиполином (51). 9. Специальные бесконечные произведения (57).	
§ 3. Построение целых функций с заданным ростом	65
1. Построение правильно распределенного множества (65). 2. Построение регулярного множества (72). 3. Построение целой функции с данным индикатором (77). 4. Построение регулярного подмножества (80). 5. Построение целой функции с заданным ростом (86). 6. Геометрический смысл условия $\lambda_1(\theta) > 0$ (90).	
§ 4. Функции вполне регулярного роста	99
1. Определение функции вполне регулярного роста. Свойства (99). 2. Функции класса A и вполне регулярного роста (100). 3. Пример функции класса A (106).	
Глава II. Ряды Дирихле с вещественными показателями	111
§ 1. Начальные сведения	111
1. Преобразование Абеля (111). 2. Аналог леммы Абеля (111). 3. О единственности разложения функции в ряд Дирихле (112). 4. Абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда Дирихле (113). 5. Определение абсциссы сходимости в общем случае (116). 6. О росте суммы ряда Дирихле на вертикалях (120). 7. Выражение коэффициентов и показателей через сумму ряда Дирихле (121).	
§ 2. Суммирование ряда Дирихле	125
1. Первый способ суммирования (125). 2. Второй способ суммирования (127). 3. Формула о среднем (128). 4. Суммирование ряда Дирихле в звезде голоморфизма (132). 5. О порядке роста суммы ряда Дирихле на вертикальных прямых (133).	
§ 3. О поведении ряда Дирихле на прямой сходимости	137
1. Обобщение теоремы Абеля (137). 2. О сходимости в точках регулярности на прямой сходимости (141). 3. Об особых точках на прямой сходимости (143). 4. Теоремы Островского о сверхсходимости (149).	
§ 4. Область регулярности суммы измененного ряда Дирихле	152
1. Теорема о продолженности (152). 2. Обобщение теоремы (154). 3. Другое обобщение теоремы о продолженности (161). 4. Ряды Дирихле, у которых показатели имеют конечную верхнюю плотность (164).	

§ 5. Ряды Дирихле с показателями, имеющими конечную плотность	170
1. Формулы для коэффициентов ряда (170). 2. Теоремы об особенностях (174).	
§ 6. Ряды Дирихле, сходящиеся во всей плоскости	175
1. R-порядок и R-тип (176). 2. Максимальный член ряда Дирихле (180). 3. О порядке в полосе (185). 4. О типе в полосе (191).	
Глава III. Ряды Дирихле с комплексными показателями	194
§ 1. Область сходимости	194
1. Выпуклость множества точек абсолютной сходимости ряда (194). 2. Определение области сходимости ряда по коэффициентам (196). 3. Единственность представления рядом Дирихле (199). 4. Ряды Дирихле с показателями, имеющими конечную верхнюю плотность (202).	
§ 2. Случай нулевой плотности	205
1. Вспомогательные леммы (205). 2. Выпуклость области регулярности сумм ряда Дирихле (211).	
§ 3. Целые функции, представимые рядами Дирихле	214
1. Оценка коэффициентов (215). 2. A-порядок суммы ряда Дирихле (216).	
Глава IV. Представление аналитических функций, определенных в замкнутой области, рядами Дирихле в открытой области	222
§ 1. Биортогональные системы функций	222
1. Конструкция биортогональной системы (222). 2. Биортогональные системы в случае кратных корней (227). 3. Поведение биортогональной системы при дополнительном условии на характеристическую функцию (230).	
§ 2. Формулы для коэффициентов. Интерполирующая функция	234
1. Случай простых корней (234). 2. Случай кратных корней (237). 3. Обобщения на функции, непрерывные в замкнутой области (241). 4. Свойства интерполирующей функции (242).	
§ 3. Теоремы единственности	255
1. Первая теорема единственности (255). 2. Вторая теорема единственности (260).	
§ 4. О полноте системы экспонент и биортогональной системы	272
1. Полнота биортогональной системы (272). 2. Неполнота системы экспонент (277).	
§ 5. Формы остаточного члена	281
1. Формула для частной суммы ряда (281). 2. Формулы для остаточного члена (282). 3. Связь с рядом Лагранжа (285).	
§ 6. Теоремы о разложении	286
1. Условия сходимости ряда (287). 2. Условия сходимости ряда к своей функции (289). 3. Разложение в ряд по биортогональной системе (298). 4. Достаточные условия разложимости в случае кратных нулей (300). 5. Асимптотическое поведение интерполирующей функции (310).	
§ 7. Представление аналитических функций в замкнутой области рядами Дирихле	314
1. Построение биортогональной системы (315). 2. Оценка коэффициентов (318). 3. Условия абсолютной сходимости ряда в замкнутой области (320). 4. Условия сходимости ряда к своей функции (322). 5. Случай многоугольной области (327).	

Глава V. Представление рядами Дирихле функций, аналитических в открытой области	337
§ 1. Случай аналитической границы	337
1. Преобразование основной формулы (337). 2. Вспомогательные предложения (345). 3. Доказательство теоремы о разложении (353).	
§ 2. Построение дифференциального оператора бесконечного порядка	358
1. Построение кривых (358). 2. Представление исходной функции в виде суммы двух специальных функций (360). 3. Представление специальной функции в виде суммы других специальных функций (365). 4. Оценка целой функции экспоненциального типа (371). 5. Доказательство теоремы (372).	
§ 3. Случай произвольной границы	380
1. Теоремы о разложении (380). 2. Отсутствие универсального способа (382). 3. Представление аналитической функции в виде суммы периодических (385).	
Глава VI. Восстановление функции по коэффициентам ее ряда Дирихле	387
§ 1. Первый способ восстановления	387
1. Случай регулярности в замкнутой области (387). 2. Случай регулярности в открытой области (388).	
§ 2. Второй способ восстановления	390
1. Постановка задачи (390). 2. Вывод основных формул (393). 3. Случай положительной нижней плотности (396). 4. Случай нулевой нижней плотности. Предварительные сведения (405). 5. Первый подслучай: $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n ^{-1} < \infty$ (410). 6. Второй подслучай, когда $\lambda = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n ^{-1} = \infty$ (412). 7. Пример (416).	
§ 3. Обобщение на функции, непрерывные в замкнутой области	421
1. Постановка задачи (421). 2. Вывод основных формул (421). 3. Исследование функций $\gamma(t, z, \Gamma_n^-)$ и $\gamma(t, z, \Gamma_n^+)$ (428). 4. Другое представление функций $F^-(z)$ и $F^+(z)$ (431). 5. Случай положительной нижней плотности (433).	
§ 4. Случай отрезка	435
1. Обобщение и упрощение задачи (435). 2. Исследование частных рядов (437). 3. Связь функции с частными рядами (443).	
§ 5. Решение уравнения свертки	447
1. Суммируемость ряда к решению (448). 2. Теорема аппроксимации (450).	
Глава VII. Представление целых функций рядами Дирихле	453
§ 1. Конструкция ряда. Интерполирующая функция	453
1. Конструкция ряда (453). 2. Свойства интерполирующей функции (457).	
§ 2. Теорема единственности	463
1. Вспомогательные предложения (463). 2. Доказательство теоремы единственности (466). 3. Пример ряда, сходящегося не к своей функции (469).	
§ 3. Форма и оценка остаточного члена	469
§ 4. Теоремы о разложении в ряд Дирихле	474
1. О сходимости ряда во всей плоскости (474). 2. О сходимости ряда к своей функции (476). 3. Разложение произвольной целой функции в ряд Дирихле (479).	

§ 5. О скорости сходимости ряда Дирихле	481
1. О скорости убывания коэффициентов (482). 2. Усиление теоремы (483). 3. Об одном применении теоремы 7.5.3 (492).	
§ 6. Дополнительные свойства интерполирующей функции	494
Глава VIII. Представление аналитических функций в бесконечных выпуклых областях рядами Дирихле	501
§ 1. Представление аналитических функций в полуплоскости рядами Дирихле	501
1. Конструкция ряда Дирихле для функции, непрерывной в замкнутой полуплоскости (501). 2. Пример целой функции (506). 3. Общий слу- чай (515).	
§ 2. Представление аналитических функций рядами Дирихле в бо- лее общих бесконечных выпуклых областях	521
Литература	532
Дополнение	526
Предметный указатель	535

Ряды экспонент — это ряды Дирихле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad 0 < |\lambda_k| \uparrow \infty. \quad (1)$$

Имеется большая литература, посвященная рядам Дирихле с положительными (отрицательными) показателями λ_k . Такие ряды — непосредственное обобщение степенных рядов. Отметим, например, что если $\lambda_k > 0$, то область сходимости ряда (1) — левая полуплоскость $\operatorname{Re} z < a \leq \infty$, при $z \rightarrow -\infty$ сумма ряда стремится к нулю. Из этого следует, что сумма ряда (1) в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$ не может быть произвольной аналитической функцией, так, она не может тождественно равняться единице.

Ряды с комплексными показателями также изучались, но значительно меньше, чем ряды с вещественными показателями. Отметим, что при условии

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$$

(в дальнейшем оно всегда предполагается выполненным) открытая область сходимости ряда (1) совпадает с открытой областью абсолютной сходимости этого ряда, а последняя всегда выпукла. Если показатели λ_k расположены, например, на двух лучах, то область сходимости есть или угол, или полоса. В этом случае сумма ряда в области сходимости опять не может быть произвольной аналитической функцией. Действительно, пусть ради определенности $\arg \lambda'_k = 0$, $\arg \lambda''_k = \varphi_0$, $0 < \varphi_0 \leq \pi$, $\{\lambda'_k\} \cup \{\lambda''_k\} = \{\lambda_k\}$, и пусть в некоторой области D справедливо разложение (1) для $f(z) \equiv 1$. В области D , поскольку ряд сходится, имеем

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z} = \sum a'_k e^{\lambda'_k z} + \sum a''_k e^{\lambda''_k z} = \sum_1 + \sum_2. \quad (2)$$

Ряд $\sum_1$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$, содержащей область D , ряд $\sum_2$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi_0}) < b$, также содержащей область D . Оба ряда одновременно сходятся в общей части G этих полуплоскостей. При $\varphi_0 < \pi$ область G — угол;

вдоль биссектрисы этого угла при $z \rightarrow \infty$ сумма ряда $f(z) = 1$ должна стремиться к нулю, что невозможно. При $\varphi_0 = \pi$ область G — вертикальная полоса. Из равенства (2) следует, что в этом случае $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — суммы соответственно рядов $\sum_1$ и $\sum_2$ — регулярны во всей плоскости и по модулю ограничены, поэтому они постоянны: $f_1(z) = \alpha$, $f_2(z) = \beta$, причем, поскольку $\alpha + \beta = 1$, одна из этих постоянных не равна нулю. Приходим к рассмотренному уже случаю. Следовательно, в рассматриваемой ситуации функция $f(z) = 1$ не представляется рядом (1).

Приведенные простые соображения постоянно убеждали, что рядами (1) нельзя представлять произвольные аналитические функции. Однако в 1965 году, занимаясь решением дифференциальных уравнений бесконечного порядка, автор обнаружил, что при некоторых $\{\lambda_k\}$ можно указать области D , в которых произвольные аналитические в замкнутой области $\bar{D}$ функции допускают разложения (1). В частности, такие области в виде треугольника можно было указать, когда λ_k определенным образом выбраны на трех лучах.

С этого времени стало развиваться новое направление — представление произвольных аналитических функций рядами экспонент. Поскольку область сходимости ряда (1) выпукла, речь идет о разложении произвольных аналитических функций в ряды (1) в выпуклых областях.

Основное назначение книги — освещение этого нового направления.

Изложение ведется по следующему плану. Для данной выпуклой конечной области D выбирается какая-нибудь целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$, для которой $\bar{D}$ — сопряженная диаграмма. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — нули $L(\lambda)$, и пусть все они простые. Строится система $\{\psi_k(t)\}$, биортогональная к системе экспонент $\{e^{\lambda_k t}\}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda_k t} \psi_m(t) dt = \delta_{k,m},$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$. Функции $f(z)$, аналитической на $\bar{D}$, сопоставляется ряд

$$f(z) \sim \sum_1 a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \psi_k(t) dt.$$

Указываются условия, при которых ряд сходится в D и сходится именно к $f(z)$. Затем рассматривается общий случай, когда $f(z)$ регулярна лишь в области D . Основной результат состоит в том, что функцию $f(z)$, аналитическую в D , всегда можно представить в D рядом (1).

После этого изучается ситуация, когда D — бесконечная выпуклая область. Исследованы случаи, когда D — вся плоскость, D — полуплоскость, D — бесконечная выпуклая область, граница которой состоит из двух лучей и выпуклой дуги, соединяющей начала этих лучей. Показано, что во всех этих случаях функцию $f(z)$, аналитическую в D , можно представить в D рядом (1).

К вопросу о разложении произвольных аналитических функций в ряды экспонент можно подходить и с других позиций. Так, в работах [57], [58] задача о разложении в ряды (1) рассматривается как задача о разложении в ряды по собственным функциям некоторого оператора.

Представления произвольных функций рядами экспонент и связанные с этим вопросы (теоремы единственности, восстановление функции по коэффициентам, если ряд расходится и т. д.) занимают в книге основную часть (главы IV—VIII). Для изложения этого понадобился ряд сведений из теории целых функций. Им мы отвели главу I. (Заметим, что сведения из теории целых функций, имеющиеся в книгах на русском языке, приведены без доказательств.)

При изложении вопросов представимости произвольных аналитических функций рядами экспонент естественно было уделить место (главы II и III) и некоторым известным фактам из теории рядов Дирихле, тем более, что они почти совсем не освещены на русском языке.

Отметим, что важный раздел, посвященный рядам Дирихле, у которых показатели имеют плотность, в книге изложен по-новому и, как нам кажется, значительно короче.

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ
ИЗ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Целые функции конечного порядка*)

1. Порядок и тип целой функции. Целая функция $f(z)$ называется *целой функцией порядка ρ* , если при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|f(z)| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}$$

выполняется при всех z , для которых $|z| > r_0(\varepsilon)$, а неравенство

$$|f(z)| > e^{|z|^{\rho-\varepsilon}}$$

выполняется по крайней мере для одной последовательности $\{z_k\}$ значений z такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$.

Целая функция $f(z)$ называется *целой функцией порядка ρ и типа σ* , если при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|f(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho}$$

выполняется при всех z , для которых $|z| > r_0(\varepsilon)$, а неравенство

$$|f(z)| > e^{(\sigma-\varepsilon)|z|^\rho}$$

выполняется по крайней мере для одной последовательности $\{z_k\}$ значений z такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$. При $\sigma = 0$ функция $f(z)$ называется *целой функцией порядка ρ минимального типа*. Если для целой функции $f(z)$ порядка ρ не имеется конечной постоянной H , удовлетворяющей условию

$$|f(z)| < e^{H|z|^\rho}, \quad |z| > r_0,$$

то $f(z)$ называется *целой функцией порядка ρ максимального типа*.

*) Сведения, которые приводятся без доказательства, можно найти в книгах М. М. Джрбашяна [1], И. И. Ибрагимова [6], Б. Я. Левина [9], А. И. Маркушевича [47].

Из определения порядка и типа следует, что

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}, \quad \sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho},$$

где $M(r)$ — максимум модуля $f(z)$ на окружности $|z| = r$.

Теорема 1.1.1. Если функция $f(z)$ представлена рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k z^k,$$

то ее порядок и тип определяются через коэффициенты c_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) соответственно по формулам

$$\rho = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln k}{\ln \left| \frac{1}{c_k} \right|}, \quad (\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[\rho]{|c_k|}.$$

2. Нули целой функции. Пусть $\{\lambda_k\}$, $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots$, — некоторая последовательность комплексных чисел. Говорят, что эта последовательность имеет *показатель сходимости τ* , если при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^{\tau+\varepsilon}} < \infty, \quad \text{а} \quad \sum_1^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^{\tau-\varepsilon}} = \infty.$$

Обозначим $\{a_k\}$ последовательность нулей целой функции $f(z)$, отличных от начала координат.

Теорема 1.1.2. Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ , то показатель сходимости последовательности $\{a_k\}$ нулей не превосходит ρ . Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ конечного типа σ , то последовательность $\{a_k\}$ ее нулей удовлетворяет следующему более сильному условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|a_k|^\rho} \leq \rho \sigma.$$

3. Разложение в бесконечное произведение. Укажем, каким образом целые функции конечного порядка могут быть представлены в виде бесконечного произведения. Для этого обозначим k наименьшее целое число со свойством: $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^{-k-1} < \infty$.

Такое число k существует, ибо по предыдущему последовательность нулей имеет показатель сходимости, не больший порядка целой функции.

Теорема 1.1.3. Если начало координат является нулем функции $f(z)$ кратности ν , то функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = z^\nu e^{H(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{k} \frac{z^k}{a_n^k}}, \quad (1.1)$$

где $H(z)$ — многочлен, причем $\rho = \max(h, \tau)$. Здесь ρ — порядок целой функции $f(z)$, τ — показатель сходимости последовательности $\{a_n\}$ нулей $f(z)$, h — степень многочлена $H(z)$.

Из этой теоремы вытекает, что если, в частности, $\rho < 1$, то $H(z) = \text{const}$, $k=0$ и, следовательно,

$$f(z) = A z^\nu \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Пусть $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$ ($n \geq 1$), — последовательность комплексных чисел с конечным показателем сходимости τ , k — наименьшее целое число такое, что $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-k-1} < \infty$, $H(z)$ — многочлен степени h . При этих условиях произведение (1.1) сходится и представляет собой целую функцию порядка $\rho = \max(h, \tau)$.

Приведем условия, при которых функция $f(z)$ имеет конечный или бесконечный тип.

Рассмотрим каноническое произведение

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{a_n^2} + \dots + \frac{1}{k} \frac{z^k}{a_n^k}}.$$

Пусть τ — показатель сходимости последовательности $\{a_n\}$, и он конечен. $F(z)$ — целая функция порядка $\rho = \tau$.

Теорема 1.1.4. При нецелом τ каноническое произведение $F(z)$ будет максимального, минимального или нормального (конечного и не равного нулю) типа в зависимости от того, будет ли равна бесконечности, нулю или числу, отличному от нуля и бесконечности, верхняя плотность последовательности $\{a_n\}$:

$$\Delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|a_n|^\rho}.$$

Случай целого ρ требует особого рассмотрения.

Пусть функция $f(z)$, представленная в виде (1.1), есть целая функция целого порядка ρ . Положим

$$\delta_f(r) = \alpha_\rho + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-\rho}, \quad \delta_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |\delta_f(r)|,$$

$$\Delta_f = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|a_n|^\rho}, \quad \gamma_f = \max(\Delta_f, \delta_f).$$

Здесь α_ρ — коэффициент при z^ρ в многочлене $H(z)$.

Вопрос о типе целой функции $f(z)$ решается следующей теоремой Линделёфа.

Теорема 1.1.5. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho} = \infty$, то при $\gamma_f = 0$ функция $f(z)$ — минимального типа, при $0 < \gamma_f < \infty$ — нормального и при $\gamma_f = \infty$ — максимального типа. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho} < \infty$, то тип $f(z)$ равен $|\alpha_\rho|$ — модулю коэффициента при z^ρ в многочлене $H(z)$.

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и a_k ($k=1, 2, \dots$) — ее нули. Мы уже знаем, что показатель сходимости последовательности $\{a_k\}$ не превосходит ρ . Интересно выяснить, когда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-\rho}$ сходится или расходится. Валирон установил следующую теорему (см., например, [67], стр. 32).

Теорема 1.1.6. Если целая функция $f(z)$ порядка $\rho > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-\rho} = \infty$, то

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{1+\rho}} dr = \infty, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

При ρ нецелом верно и обратное: если интеграл расходится, то расходится и соответствующий ряд.

Доказательство первой части теоремы основано на широко известной теореме Иенсена: если $f(z)$ голоморфна в круге $|z| \leq R$ и $f(0) \neq 0$, то

$$N(R) = \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \ln |f(0)|,$$

где $n(t)$ — число нулей $f(z)$ в круге $|z| \leq t$.

Мы предположим, что не нарушит сходности рассуждений, что $f(0) = 1$. Тогда из указанного равенства немедленно вытекает, что

$$N(R) = \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt \leq \ln M(R). \quad (1.2)$$

Кроме этого неравенства нам необходимо будет опереться еще на следующий факт: ряд $\sum |a_k|^{-\alpha}$ и интеграл $\int_0^\infty t^{-\alpha-1} n(t) dt$, $\alpha > 0$, сходятся или расходятся одновременно. Установим его.

Частная сумма ряда равна

$$\int_0^T t^{-\alpha} dn(t) = T^{-\alpha} n(T) + \alpha \int_0^T t^{-\alpha-1} n(t) dt. \quad (1.3)$$

Если ряд сходится, то левая часть ограничена, следовательно, интеграл из правой части ограничен. Значит, сходится интеграл $\int_0^\infty t^{-\alpha-1} n(t) dt$.

Допустим теперь, что сходится интеграл. Учитывая, что $n(t)$ не убывает, имеем

$$\alpha^{-1} (1 - 2^{-\alpha}) T^{-\alpha} n(T) = n(T) \int_T^{2T} t^{-\alpha-1} dt \leq \int_T^{2T} t^{-\alpha-1} n(t) dt \leq \int_0^{2T} t^{-\alpha-1} n(t) dt,$$

в силу чего величина $T^{-\alpha} n(T)$ ограничена. На этом основании левая часть в (1.3) ограничена и, значит, ряд сходится.

Вернемся к первой части теоремы 1.1.6. Допустим, что

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r)}{r^{1+\rho}} dr < \infty.$$

Имеем

$$\int_0^r x^{-\rho-1} n(x) dx = \int_0^r x^{-\rho} dN(x) = r^{-\rho} N(r) + \rho \int_0^r x^{-\rho-1} N(x) dx,$$

откуда, в силу (1.2),

$$\int_0^r x^{-\rho-1} n(x) dx \leq r^{-\rho} \ln M(r) + \rho \int_0^r x^{-\rho-1} \ln M(x) dx.$$

Учтем, что

$$\rho \int_r^\infty x^{-\rho-1} \ln M(x) dx \geq r^{-\rho} \ln M(r).$$

Поэтому

$$\int_0^r x^{-\rho-1} n(x) dx \leq \rho \int_0^\infty x^{-\rho-1} \ln M(x) dx,$$

и, следовательно, ряд $\sum |a_k|^{-\rho}$ сходится. Значит, если указанный ряд расходится, то нужный интеграл расходится.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Имеем

$$f(z) = e^{P(z)} \prod_{k=1}^\infty G\left(\frac{z}{a_k}, \rho\right), \quad \rho = [\rho], \quad \rho < \rho < \rho + 1,$$

где $P(z)$ — многочлен степени, меньшей ρ , $[\rho]$ — целая часть ρ и

$$G(u, \rho) = (1 - u) \exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^\rho}{\rho}\right).$$

Известна оценка

$$\ln |G(u, \rho)| < \begin{cases} A_\rho \frac{|u|^{\rho+1}}{1+|u|}, & \rho > 0, \\ \ln(1+|u|), & \rho = 0, \end{cases}$$

в силу которой (см. [9], стр. 22)

$$\ln M(r) < \max_{|z|=r} |P(z)| + K_\rho \left\{ r^\rho \int_0^r t^{-\rho-1} n(t) dt + r^{\rho+1} \int_r^\infty t^{-\rho-2} n(t) dt \right\}. \quad (1.4)$$

Здесь A_ρ и K_ρ — некоторые постоянные, причем вторая постоянная определена и при $\rho = 0$.

Положим

$$J_1(r) = r^\rho \int_0^r t^{-\rho-1} n(t) dt, \quad J_2(r) = r^{\rho+1} \int_r^\infty t^{-\rho-2} n(t) dt.$$

Допустим, что ряд $\sum_1^\infty |a_k|^{-\rho}$ сходится. Имеем

$$\begin{aligned} \int_R^\infty r^{-\rho-1} J_2(r) dr &= \int_R^\infty r^{\rho-\rho} dr \int_r^\infty t^{-\rho-2} n(t) dt = \\ &= \int_R^\infty t^{-\rho-2} n(t) dt \int_R^t r^{\rho-\rho} dr \leq (p-\rho+1)^{-1} \int_R^\infty t^{-\rho-1} n(t) dt \leq \\ &\leq (p-\rho+1)^{-1} \int_0^\infty t^{-\rho-1} n(t) dt < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^R r^{-\rho-1} J_1(r) dr &= \int_0^R r^{\rho-\rho-1} dr \int_0^r t^{-\rho-1} n(t) dt = \\ &= \int_0^R t^{-\rho-1} n(t) dt \int_t^R r^{\rho-\rho-1} dr \leq (p-\rho)^{-1} \int_0^R t^{-\rho-1} n(t) dt \leq \\ &\leq (p-\rho)^{-1} \int_0^\infty t^{-\rho-1} n(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

В силу этих неравенств, на основании (1.4) заключаем, что

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r)}{r^{1+\rho}} dr < \infty.$$

Отсюда следует, что если рассматриваемый интеграл расходится, то и соответствующий ряд должен расходиться. Теорема доказана.

Рассмотрим функцию

$$L(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda^k}{\lambda_n^2}\right), \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

Для нее

$$M(r) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. Для расходимости интеграла

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r)}{r^2} dr$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд $\sum_1^\infty \lambda_n^{-1}$.

Действительно, если ряд расходится, то $L(\lambda)$ — целая функция порядка $\rho=1$ и по теореме 1.1.6 интеграл расходится. Пусть теперь известно, что интеграл расходится. Тогда $L(\lambda)$ — целая функция порядка $\rho=1$. Сразу теоремой 1.1.6 воспользоваться нельзя, ибо порядок — целое число. Положим

$$L_1(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n}\right), \quad \mu_n = \lambda_n^2, \quad M_1(r) = \max_{|\lambda|=r} |L_1(\lambda)|.$$

Функция $L_1(\lambda)$ — целая порядка $\rho=1/2$, причем

$$M_1(r) = M(\sqrt{r}).$$

Имеем

$$\int_1^\infty \frac{\ln M_1(r)}{r^{1+\frac{1}{2}}} dr = \int_1^\infty \frac{\ln M(\sqrt{r})}{r^{1+\frac{1}{2}}} dr = 2 \int_1^\infty \frac{\ln M(r)}{r^2} dr = \infty.$$

В силу этого и на основании теоремы,

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-1} = \sum_{n=1}^\infty \mu_n^{-\frac{1}{2}} = \infty.$$

Все доказано.

4. Оценка модуля функции снизу. При исследовании целых функций часто используется следующая оценка модуля аналитической функции снизу.

Теорема 1.1.7. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| \leq 2eR$ ($R > 0$), $f(0) = 1$. Пусть η — положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $|z| \leq R$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, меньшей $4\eta R$,

$$\ln |f(z)| > -H(\eta) \ln M(2eR),$$

где

$$M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|, \quad H(\eta) = 2 + \ln \frac{3e}{2\eta}.$$

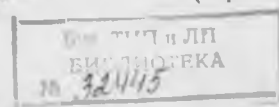
Воспользуемся этой оценкой для доказательства следующей теоремы М. Картрайт [69].

Теорема 1.1.8. Пусть $\{a_n\}$ ($a_n \neq 0$) — последовательность комплексных чисел с показателем сходимости $\tau=1$. Если плотность

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|a_n|} = 0,$$

то функция

$$f(z) = e^{az} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \quad (1.5)$$



есть целая функция первого порядка, тип σ которой равен

$$\sigma = \delta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| a + \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-1} \right|.$$

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что всегда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|a_k|^{\rho}} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho}},$$

где $n(r)$ — число точек a_m в круге $|z| \leq r$. Действительно, возьмем достаточно большое произвольное $r > 0$ и обозначим через $m = m(r)$ целое число такое, что

$$|a_m| \leq r < |a_{m+1}|.$$

Имеем

$$\frac{m}{m+1} \cdot \frac{m+1}{|a_{m+1}|^{\rho}} = \frac{m}{|a_{m+1}|^{\rho}} < \frac{n(r)}{r^{\rho}} \leq \frac{m}{|a_m|^{\rho}},$$

откуда все и следует.

Доказательство теоремы. Убедимся сначала, что

$$\ln |(1-u)e^u| \leq 6 \frac{|u|^2}{1+|u|}. \quad (1.6)$$

При $|u| \leq 1/2$ имеем

$$\ln |(1-u)e^u| = \operatorname{Re} \{ \ln(1-u) + u \} =$$

$$= \operatorname{Re} \left(- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{u^k}{k} \right) \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|u|^k}{k} < \frac{|u|^2}{2(1-|u|)} \leq |u|^2 < 6 \frac{|u|^2}{1+|u|}.$$

При $|u| > 1/2$, в силу неравенства $\ln(1+|u|) \leq |u|$, находим

$$\ln |(1-u)e^u| \leq 2|u| < 2|u| \frac{3|u|}{1+|u|} = 6 \frac{|u|^2}{1+|u|}.$$

Во всех случаях, следовательно, справедливо (1.6).

Функция (1.5) — целая функция первого порядка. Имеем

$$f(z) = e^{\delta(R)z} f_R(z),$$

$$\delta(R) = a + \sum_{|a_k| \leq R} a_k^{-1}, \quad (1.7)$$

$$f_R(z) = \prod_{|a_k| \leq R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \prod_{|a_k| > R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}.$$

Положим

$$M_R(r) = \max_{|z|=r} |f_R(z)|, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Покажем сначала, что $\sigma \leq \delta$. Возьмем число β , $0 < \beta < |a_1|$, и заметим, что $n(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \beta$. Имеем при $|z| = R$

$$\begin{aligned} \ln \left| \prod_{|a_k| \leq R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \right| &\leq \sum_{|a_k| \leq R} \ln \left(1 + \frac{R}{|a_k|}\right) = \\ &= \int_{\beta}^R \ln \left(1 + \frac{R}{t}\right) dn(t) = n(t) \ln \left(1 + \frac{R}{t}\right) \Big|_{t=\beta}^R + R \int_{\beta}^R \frac{n(t) dt}{t(t+R)} = \\ &= n(R) \ln 2 + R \int_{\beta}^R \frac{n(t) dt}{t(t+R)} < n(R) \ln 2 + \int_{\beta}^R \frac{n(t) dt}{t}. \end{aligned}$$

На основании оценки (1.6) имеем далее

$$\begin{aligned} \ln \left| \prod_{|a_k| > R} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}} \right| &\leq 6 \sum_{|a_k| > R} \frac{R^2}{|a_k|(|a_k|+R)} = \\ &= 6R^2 \int_R^{\infty} \frac{dn(t)}{t(t+R)} = 6R^2 \int_R^{\infty} \frac{n(t)}{t(t+R)} dt + 6R^2 \int_R^{\infty} \frac{(2t+R)n(t) dt}{t^2(t+R)^2} < \\ &< -3n(R) + 18R^2 \int_R^{\infty} \frac{n(t) dt}{t^2(t+R)^2} < -3n(R) + 18R^2 \int_R^{\infty} \frac{n(t) dt}{t^3}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\ln M_R(R) < \int_{\beta}^R \frac{n(t) dt}{t} + 18R^2 \int_R^{\infty} \frac{n(t) dt}{t^3}.$$

По условию $\Delta = 0$. Поэтому, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$n(t) < \varepsilon t, \quad t \geq r_0(\varepsilon).$$

В силу этого при $R > r_0$

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^R \frac{n(t) dt}{t} &= \int_{\beta}^{r_0} \frac{n(t) dt}{t} + \int_{r_0}^R \frac{n(t) dt}{t} < \int_{\beta}^{r_0} \frac{n(t) dt}{t} + \varepsilon R, \\ \int_R^{\infty} \frac{n(t) dt}{t^3} &< \varepsilon \int_R^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{\varepsilon}{R}, \end{aligned}$$

в силу чего

$$\ln M_R(R) < 24\varepsilon R, \quad R > R_1(\varepsilon),$$

и, значит,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln M_R(R)}{R} = 0. \quad (1.8)$$

На основании представления (1.7)

$$\frac{\ln M(R)}{R} \leq |\delta(R)| + \frac{\ln M_D(R)}{R}.$$

Отсюда, принимая во внимание (1.8), получаем $\sigma \leq \delta$.

Покажем теперь, что $\delta \leq \sigma$. Для этого оценим функцию $f_R(z)$ снизу. Мы воспользуемся при этом теоремой 1.1.7. Положим в этой теореме $\eta = \frac{3}{2}e^{-4}$. Тогда в круге $|z| \leq r = R/2e$, но вне исключительных кружков с общей суммой диаметров, меньшей $12e^{-4}r$, имеем

$$\ln |f_R(z)| > -H\left(\frac{3}{2}e^{-4}\right) \ln M_R(R) = -7 \ln M_R(R).$$

Так как $12e^{-4} < 1/2$, то между $r/2$ и r найдется r_1 такое, что окружность $|z| = r_1$ не пересекает исключительные кружки. Поэтому

$$\ln |f_R(z)| > -7 \ln M_R(R). \quad (1.9)$$

Из представления (1.7) находим

$$\operatorname{Re} [\delta(R)z] = \ln |f(z)| - \ln |f_R(z)|.$$

Отсюда, учитывая (1.9), получаем

$$\operatorname{Re} [\delta(R)z] < \ln |f(z)| + 7 \ln M_R(R), \quad |z| = r_1.$$

Выберем на окружности $|z| = r_1$ точку z так, чтобы число $\delta(R)z$ было действительным и положительным. Тогда

$$|\delta(R)| < \frac{\ln M(r_1)}{r_1} + 7 \frac{\ln M_R(R)}{r_1}.$$

Но $r_1 > (4e)^{-1}R$ и поэтому, в силу (1.8),

$$\frac{\ln M_R(R)}{r_1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$\delta = \lim_{R \rightarrow \infty} |\delta(R)| \leq \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r_1)}{r_1} \leq \sigma.$$

Установленные соотношения $\sigma \leq \delta$ и $\delta \leq \sigma$ показывают, что $\sigma = \delta$.

Пользуясь оценкой модуля аналитической функции снизу, докажем еще следующую теорему.

Теорема 1.1.9. Пусть $f(z)$ — целая функция, растущая не быстрее функции конечного порядка ρ и конечного типа. Пусть, далее, $q > 1$ — фиксированное число и $G: \psi_0 < \arg z < \psi_1$ — фиксированный угол. Имеется число $h > 0$ и окружности $|z| = r_k \uparrow \infty$, причем $r_k < qr_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots$), на которых

$$\ln |f(z)| > -h|z|^\rho, \quad |z| = r_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Имеются далее отрезки $l_k: r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$, $\psi_0 < \arg z = \varphi_k < \psi_1$, на которых также

$$\ln |f(z)| > -h|z|^\rho, \quad z \in l_k \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Если в рассматриваемом угле функция $f(z)$ не обращается в нуль, то в любом меньшем угле $\psi_0 < \gamma_0 \leq \arg z \leq \gamma_1 < \psi_1$,

$$\ln |f(z)| > -h|z|^\rho, \quad |z| \geq r_1.$$

Доказательство. Возьмем числа

$$R_1 > 0, R_2 = q_1 R_1, \dots, R_k = q_1 R_{k-1}, \dots, q_1 = \sqrt{q}.$$

В теореме 1.1.7 положим $R = R_k$ и $\eta < (q_1 - 1)/8q_1$. Тогда в круге $|z| \leq R_k$, но вне исключительных кружков с общей суммой диаметров, меньшей $8\eta R_k$,

$$\ln |f(z)| > -H(\eta) \ln M(2eR_k).$$

Так как

$$8\eta R_k < (q_1 - 1)R_{k-1}R_k = R_k - R_{k-1},$$

то имеется окружность $|z| = \bar{r}_k$, $R_{k-1} < \bar{r}_k < R_k$, на которой

$$\ln |f(z)| > -H(\eta) \ln M(2eR_k), \quad |z| = \bar{r}_k.$$

По условию

$$M(r) < e^{\rho r^p}, \quad r > \rho_0, \quad 0 < p < \infty. \quad (1.10)$$

Следовательно,

$$\ln |f(z)| > -p(2e)^p H(\eta) R_k^p, \quad |z| = \bar{r}_k, \quad k \geq k_0.$$

Учитывая, что $R_k < q_1 \bar{r}_k$, получим

$$\ln |f(z)| > -p(2eq_1)^p H(\eta) \bar{r}_k^p, \quad |z| = \bar{r}_k, \quad k \geq k_0.$$

Положим $r_k = \bar{r}_{k+k_0}$ ($k = 1, 2, \dots$). Имеем

$$\ln |f(z)| > -h_1 r_k^p, \quad |z| = r_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad h_1 = p(2eq_1)^p H(\eta).$$

Осталось заметить, что

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{\bar{r}_{k_0+k+1}}{\bar{r}_{k_0+k}} < \frac{R_{k_0+k+1}}{R_{k_0+k-1}} = q^2 = q.$$

Первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части положим в теореме 1.1.7 $R = r_k$ и $\eta < (\psi_1 - \psi_0)/8q$. По этой теореме в круге $|z| \leq r_k$, но вне исключительных кружков общей суммой диаметров, меньшей $8\eta r_k$,

$$\ln |f(z)| > -H(\eta) \ln M(2er_k).$$

Поскольку

$$8\eta r_k < 8\eta q r_{k-1} = (\psi_1 - \psi_0) r_{k-1},$$

найдется отрезок l_k : $r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$, $\psi_0 < \arg z = \varphi_k < \psi_1$, на котором имеет место указанная оценка. Так как для точек z этого отрезка

$$|z| \geq r_k/q,$$

то, учитывая (1.10), получим

$$\ln |f(z)| > -h_2 |z|^p, \quad z \in l_k \quad (k=2, 3, \dots), \quad h_2 = p(2eq)^p H(\eta).$$

В качестве h можно взять число $h = \max(h_1, h_2)$. Вторая часть теоремы доказана.

Докажем третью. По доказанному (если в качестве исходного угла взять угол $\psi_0 < \arg z < \psi_1$) найдется отрезок l'_k : $r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$, $\psi_0 < \arg z = \varphi'_k < \psi_1$, на котором

$$\ln |f(z)| > -h |z|.$$

Точно так же найдется отрезок l''_k : $r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$, $\gamma_1 < \arg z = \varphi''_k < \psi_1$, на котором имеет место то же неравенство (число h можно считать одним и тем же). Пусть E_k — область, ограниченная дугами окружностей $|z| = r_{k-1}$, $|z| = r_k$ и отрезками лучей $\arg z = \gamma_0$, $\arg z = \gamma_1$, а Γ_k — замкнутый контур, составленный из отрезков l'_k , l''_k и дуг окружностей $|z| = r_{k-1}$, $|z| = r_k$. Так как внутри Γ_k функция $f(z)$ не обращается в нуль, то для $z \in E_k$

$$\ln |f(z)| \geq \min_{t \in \Gamma_k} \ln |f(t)| > -hr_k = -h \frac{r_k}{|z|} |z|.$$

Но $\frac{r_k}{|z|} \leq \frac{r_k}{r_{k-1}} \leq q$. Поэтому

$$\ln |f(z)| > -hq |z|, \quad \gamma_0 \leq \arg z \leq \gamma_1, \quad |z| \geq r_1.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если $f(z)$ растет не быстрее целой функции порядка p минимального типа, то в теореме в качестве h можно взять любое фиксированное положительное число (поскольку в этом случае в оценке (1.10) число $p > 0$ — любое). Более того, поскольку $p > 0$ — любое, можно утверждать, что на окружностях $|z| = r_k$ и отрезках l_k выполняется оценка

$$\ln |f(z)| > -\varepsilon |z|^p,$$

если $k > k_0(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — любое.

5. Целые функции первого порядка и конечного типа. В качестве характеристики роста целой функции порядка p конечного типа σ по лучам, выходящим из начала координат, вводится функция

$$h(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^p},$$

которая называется *индикатрисой роста* функции $f(z)$. Из самого определения следует, что $h(\varphi)$ — периодическая функция с периодом 2π и что $h(\varphi) \leq \sigma$. Отметим следующие два свойства функции $h(\varphi)$:

1) $h(\varphi)$ непрерывна при любом φ и ее наибольшее значение равно типу σ целой функции $f(z)$;

2) по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $r_0(\varepsilon)$, что при всех $r > r_0(\varepsilon)$ и любых φ выполняется неравенство

$$\ln |f(re^{i\varphi})| < [h(\varphi) + \varepsilon] r^p.$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

— целая функция первого порядка, т. е. порядка $p=1$, и типа σ . Рост этой функции по разным направлениям тесно связан с расположением особых точек функции

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

(легко усмотреть в силу п. 1, что ряд в правой части сходится при $|z| > \sigma$), называемой *функцией, ассоциированной по Борелю с целой функцией $f(z)$* . Чтобы сформулировать относящийся сюда результат, дадим сначала определение опорной функции выпуклого множества.

Ограниченное множество D называется *выпуклым* множеством, если оно содержит вместе со своими двумя любыми точками все точки соединяющего их отрезка. Пусть $\bar{D}$ — замкнутое выпуклое множество. Возьмем точку $z = (x + iy) \in \bar{D}$. Спроектируем радиус-вектор точки z на луч, идущий из начала под углом φ к положительной части действительной оси. Проекция радиуса-вектора точки z на рассматриваемый луч равна

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}).$$

Максимум этого выражения, когда z изменяется в $\bar{D}$, обозначим $K(\varphi)$. Получаем, что для произвольной точки z из $\bar{D}$

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - K(\varphi) \leq 0,$$

причем хотя бы для одной точки $\bar{D}$ имеет место знак равенства. Следовательно, множество $\bar{D}$ лежит по одну сторону от прямой

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = K(\varphi)$$

и имеет с ней по крайней мере хоть одну общую точку. Эта прямая называется *опорной прямой*, а функция $K(\varphi)$ — *опорной функцией* выпуклого множества $\bar{D}$.

Имеет место следующая теорема Поля.

Теорема 1.1.10. Индикатриса роста $h(\varphi)$ целой функции $f(z)$ первого порядка конечного типа и опорная функция наименьшего выпуклого замкнутого множества, содержащего все особые точки функции $\gamma(z)$, ассоциированной по Борелю с $f(z)$, связаны соотношением

$$h(\varphi) = K(-\varphi).$$

Целая функция $f(z)$ первого порядка конечного типа выражается через ассоциированную $\gamma(z)$ по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{zt} dt,$$

где C — замкнутый контур, содержащий внутри себя все особые точки $\gamma(t)$.

Пусть $\bar{D}$ — замкнутое выпуклое множество. Всегда можно построить функцию $\gamma(t)$ вида

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{k+1}},$$

которая регулярна вне $\bar{D}$ и для которой все точки границы $\partial\bar{D}$ являются особыми. У функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

индикатриса роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$, где $K(\varphi)$ — опорная функция множества $\bar{D}$. Таким образом, по выпуклому множеству $\bar{D}$ всегда можно построить целую функцию экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi) = K(-\varphi)$.

Ассоциированная функция $\gamma(z)$ выражается через целую функцию $f(z)$ по формуле

$$\gamma(z) = \int_0^{\infty + i0} f(t) e^{-zt} dt.$$

Здесь интегрирование происходит по лучу, выходящему из начала под углом φ к положительной части действительной оси. Интеграл сходится в полуплоскости

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) > K(\varphi),$$

где $K(\varphi)$ — опорная функция наименьшего замкнутого выпуклого множества $\bar{D}$, содержащего все особые точки функции $\gamma(z)$,

Когда угол φ изменяется в пределах от нуля до 2π , в это время указанная полуплоскость опишет внешность множества $\bar{D}$. Таким образом, с помощью данного интеграла можно определить функцию $\gamma(z)$ во всех точках, лежащих вне множества $\bar{D}$.

§ 2. Целые функции конечного уточненного порядка *)

1. Уточненный порядок. Понятие уточненного порядка ввел Валирон. Уточненным порядком называется функция $\rho(r)$ ($r > 0$), удовлетворяющая условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

Если для целой функции $f(z)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_1(r)}{r^{\rho(r)}} = \sigma \neq 0, \infty, \quad M_1(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

то $\rho(r)$ называется уточненным порядком целой функции $f(z)$, а σ — типом этой функции при уточненном порядке $\rho(r)$.

Теорема 1.2.1. Если $n(r)$ — число нулей функции $f(z)$ типа σ при уточненном порядке $\rho(r)$ в круге $|z| = r$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} \leq \sigma.$$

Отметим некоторые свойства уточненного порядка.

1) При $\rho > 0$ функция $r^{\rho(r)}$ монотонно возрастает для всех достаточно больших r .

Пусть $r = \varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$. В силу монотонности последней, функция $\varphi(t)$ существует.

Теорема 1.2.2. Тип σ целой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

уточненного порядка $\rho(r)$ определяется равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = (\sigma \rho)^{1/\rho}.$$

В случае $\rho(r) = r$ имеем $\varphi(t) = t^{1/\rho}$ и это равенство, следовательно, совпадает с уже известной нам формулой (см. теорему 1.1.1).

*) Все сведения, которые мы будем приводить в дальнейшем без доказательства, взяты из книги Б. Я. Левина [9].

2) Функция $r^{\rho(r)}$ есть медленно растущая функция. При этом функция $L(r)$ ($r > 0$) называется *медленно растущей*, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(kr)}{L(r)} = 1$$

равномерно на любом интервале $0 < a \leq k \leq b < \infty$.

3) При $r \rightarrow \infty$ и $0 < a \leq k \leq b < \infty$ равномерно относительно k выполняется неравенство

$$(1 - \varepsilon) k^{\rho(r)} < (kr)^{\rho(kr)} < (1 + \varepsilon) k^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое.

При фиксированном конечном $\beta > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\beta t)}{\varphi(t)} = \beta^{1/\rho},$$

где $r = \varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$.

4) Для всякой положительной при $r > 0$ функции $\varphi(r)$, удовлетворяющей условию

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(r)}{\ln r} < \infty,$$

можно так подобрать уточненный порядок $\rho(r)$, что для всех положительных значений r

$$\varphi(r) \leq r^{\rho(r)}$$

и для некоторой стремящейся к бесконечности последовательности значений r_n ($n = 1, 2, \dots$)

$$\varphi(r_n) = r_n^{\rho(r_n)}.$$

Из последнего свойства вытекает, что всякая целая функция обычного конечного порядка есть целая функция некоторого уточненного порядка.

Действительно, пусть

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} < \infty.$$

Роль $\varphi(r)$ здесь играет функция $\ln M_f(r)$. По свойству 4) имеется уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\ln M_f(r) \leq r^{\rho(r)}, \quad r > 0,$$

$$\ln M_f(r_n) = r_n^{\rho(r_n)} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad r_n \uparrow \infty.$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho(r)}} = 1$$

и, значит, $f(z)$ — целая функция уточненного порядка $\rho(r)$, причем ее тип $\sigma = 1$ при этом порядке.

5) Пусть $\alpha(r)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \alpha(r) \downarrow 0, \quad \alpha(r) > \beta / \ln r, \quad \beta > 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Существует уточненный порядок

$$\rho(r) = \rho - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r},$$

$$\psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

такой, что

$$\alpha(r) r^{\rho} < r^{\rho(r)}, \quad r > r_0.$$

Для доказательства положим

$$x = \ln r, \quad y = -\ln \alpha(r) = \alpha_1(x).$$

Из условий следует, что

$$\alpha_1(x) \uparrow \infty,$$

$$0 < \frac{\alpha_1(x)}{x} = \frac{\ln \frac{1}{\alpha(r)}}{\ln r} < \frac{\ln \frac{\ln r}{\beta}}{\ln r} = \frac{\ln \frac{x}{\beta}}{x} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Построим непрерывно дифференцируемую функцию $\psi(x)$ такую, что

$$\psi(x) < \alpha_1(x), \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Для этого на кривой $y = \alpha_1(x)$ возьмем точки A_n с абсциссами $x = n$ ($n = 1, 2, \dots$). Из точки A_n ($n = 1, 2, \dots$) проведем горизонтальный луч направо, он пересечет прямую $x = (n+1)$ в некоторой точке B_n . Отрезок $B_n B_{n+1}$ лежит под отрезком $A_{n+1} B_{n+1}$. Точки $B_1, B_2, \dots$ соединим последовательно отрезками. Получим ломаную линию L . Она лежит под кривой $y = \alpha_1(x)$. Построим другую ломаную L_1 следующим способом. Отрезок $B_1 B_2$ — первое звено ломаной L_1 . Чтобы указать второе звено ломаной, проведем через точки B_1 и B_2 прямую l_1 . В силу условия $\frac{\alpha_1(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, над прямой l_1 может лежать лишь конечное число точек из совокупности $\{B_n\}$. Пусть B_{p_1} , $p_1 > 2$ — первая точка, лежащая под l_1 . Отрезок $B_2 B_{p_1}$ — второе звено ломаной L_1 .

Для нахождения третьего звена проведем через точки B_2 и B_{p_1} прямую l_2 . Над ней может лежать лишь конечное число точек из $\{B_n\}$. Пусть B_{p_2} , $p_2 > p_1$ — первая точка, лежащая под l_2 . Отрезок $B_{p_1} B_{p_2}$ — третье звено ломаной L_1 . Указанный процесс можно продолжать далее. Получаемые вновь звенья будут иметь меньший наклон, чем предыдущие звенья. В результате

будет построена ломаная L_1 . Вблизи вершин B_{p_k} ломаную L_1 округлим. Получим кривую $y = \psi(x)$, обладающую свойствами

$$\psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \psi(x) < \alpha_1(x).$$

Имеем

$$-\psi(\ln r) > -\alpha_1(\ln r) = \ln \alpha(r),$$

откуда

$$\alpha(r) < e^{-\psi(\ln r)},$$

$$\alpha(r)r^\rho < r^\rho e^{-\psi(\ln r)} = r^{\frac{\psi(\ln r)}{\ln r}} = r^{\rho(r)}.$$

Осталось убедиться, что $\rho(r)$ — уточненный порядок. Имеем $\rho(r) \rightarrow \rho$ при $r \rightarrow \infty$, ибо $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Далее,

$$r\rho'(r) \ln r = -\psi'(\ln r) + \frac{\psi(\ln r)}{\ln r} \rightarrow 0,$$

ибо еще и $\psi'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Все доказано.

6) Пусть $q(r)$ — положительная возрастающая функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln q(r)}{r} = 0.$$

Существует уточненный порядок

$$\rho(r) = 1 - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r},$$

$$\psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

такой, что

$$q(r) < \exp[r\rho(r)], \quad r > r_0.$$

Для доказательства положим

$$\alpha(r) = \max_{t \geq r} \max \left(\frac{\ln q(t)}{t}, \frac{1}{\ln t} \right).$$

Очевидно, $0 < \alpha(r) \downarrow 0$, $\alpha(r) \geq \frac{1}{\ln r}$. По свойству 5) имеется уточненный порядок нужного качества, удовлетворяющий условию

$$r\alpha(r) < r^\rho(r), \quad r > r_0.$$

Так как $q(r) \leq \exp[r\alpha(r)]$, то отсюда и следует нужное свойство.

7) Пусть $\{\alpha_n\}_1^\infty$ — возрастающая до бесконечности последовательность положительных чисел, причем при больших n имеем

$\alpha_n < \ln n$. Каково бы ни было $\rho > 0$, существует уточненный порядок

$$\rho(r) = \rho + \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}, \quad \psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

такой, что

$$\rho_n \geq \frac{n^{1/\rho}}{\alpha_n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где ρ_n — корень уравнения $r^{\rho(r)} = n$.

Докажем это утверждение. Положим

$$r'_n = \frac{n^{1/\rho}}{\alpha_n}, \quad r_n = \max_{k \leq n} r'_k, \quad x_n = \ln r_n, \quad y_n = \rho \ln \alpha_n.$$

Ясно, что $x_n \uparrow \infty$, $y_n \uparrow \infty$, $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через M_n ($n = 1, 2, \dots$) точку с координатами x_n, y_n . Образует ломаную L следующим способом. Через M_1 и M_2 проводим прямую l_0 . Участок $M_1 M_2$ этой прямой — первое звено L . Над прямой l_0 лежит не более конечного числа точек из $\{M_n\}$. Пусть M_{k_1} ($k_1 > 2$) — точка с наименьшим номером, лежащая под l_0 . Через M_2 и M_{k_1} проводим прямую l_1 . Ее участок $M_2 M_{k_1}$ — второе звено ломаной L . Над l_1 лежит не более конечного числа точек из $\{M_n\}$. Пусть M_{k_2} ($k_2 > k_1$) — точка с наименьшим номером, лежащая под l_1 . Через M_{k_1} и M_{k_2} проведем прямую l_2 . Ее участок $M_{k_1} M_{k_2}$ — третье звено ломаной L . Этот процесс может быть продолжен и далее. Наклон звеньев постоянно будет уменьшаться. Получим ломаную L . Около вершин эту ломаную немного продеформируем так, чтобы она стала гладкой кривой Γ . Пусть $y = \psi(x)$ — уравнение кривой Γ . Кривая Γ обладает свойствами: все точки M_k лежат на Γ или над Γ , $\psi(x) \uparrow \infty$, $\psi'(x) \downarrow 0$, $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Искомый уточненный порядок $\rho(r)$ есть

$$\rho(r) = \rho + \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}.$$

В самом деле, $\rho(r) \rightarrow \rho$, $r\rho'(r) \ln r = \psi'(\ln r) - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Осталось показать, что $\rho_k \geq r'_k$. Имеем

$$(r'_k)^\rho(r'_k) = (r'_k)^{\rho + \frac{\psi(\ln r'_k)}{\ln r'_k}}.$$

Но по построению кривой Γ

$$\psi(\ln r'_k) \leq \psi(\ln r_k) = \psi(x_k) \leq y_k = \rho \ln \alpha_k = \rho \left(\frac{1}{\rho} \ln k - \ln r'_k \right).$$

Поэтому

$$(r'_k)^{\rho} (r'_k)^{\frac{\ln \alpha_k}{\ln r'_k}} \leq (r'_k)^{\rho + \frac{\ln k - \rho \ln r'_k}{\ln r'_k}} = k.$$

Так как функция $r^{\rho(r)}$ — возрастающая и $\rho_k^{\rho(r_k)} = k$, то $\rho_k \geq r'_k$, что и требовалось доказать.

Свойства 5) — 7) установлены в работах [23] и [25].

2. Плотности. Пусть A — некоторое счетное множество точек плоскости с единственной предельной точкой в бесконечности. Обозначим через $n(r)$ число точек множества A , лежащих в круге $|z| < r$, а через $n(r, \theta, \vartheta)$ — число точек из этого множества, лежащих в секторе $|z| < r$, $\vartheta < \arg z \leq \theta$. Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок. Если существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = \Delta,$$

будем говорить, что множество A имеет плотность Δ при показателе $\rho(r)$. Множество A имеет угловую плотность $\Delta(\theta, \vartheta)$ при показателе $\rho(r)$, если для всех θ, ϑ , за исключением, быть может, счетного множества, существует

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \theta, \vartheta)}{r^{\rho(r)}} = \Delta(\theta, \vartheta).$$

Равенство

$$\Delta(\theta) - \Delta(\vartheta) = \Delta(\theta, \vartheta)$$

определяет с точностью до аддитивного слагаемого некоторую неубывающую функцию $\Delta(\theta)$.

3. Правильно распределенные множества, R -множества. Множество A , имеющее угловую плотность при показателе $\rho(r)$, при ρ нецелом называется *правильно распределенным* при показателе $\rho(r)$. Множество $A = \{a_n\}$, имеющее угловую плотность при показателе $\rho(r)$, при ρ целом называется *правильно распределенным* при показателе $\rho(r)$, если существует конечный предел

$$\delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left\{ c + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_n| < r} a_n^{-\rho} \right\} \quad (L(r) = r^{\rho(r) - \rho}) \quad (2.1)$$

при каком-нибудь значении константы c .

Правильно распределенное множество $A = \{a_n\}$ называется *регулярным* или *R -множеством*, если при некотором $d > 0$

$$|a_{n+1}| - |a_n| > d |a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$$

или если все a_n лежат в конечном числе неперекрывающихся углов $\varphi'_j \leq \arg z \leq \varphi''_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и для точек $a_{n,j} \in A$ из j -го угла ($j = 1, 2, \dots, m$)

$$|a_{n+1,j}| - |a_{n,j}| > d |a_{n,j}|^{1-\rho(|a_{n,j}|)}.$$

При этом кружки

$$|z - a_{n,j}| < \bar{d} |a_{n,j}|^{1-\rho(|a_{n,j}|)}, \quad \bar{d} > 0,$$

называются *исключительными кружками* (C_R -кружками) множества $A = \{a_n\}$.

Докажем следующую теорему (она принадлежит автору, частный случай ее содержится в работе [24]).

Теорема 1.2.3. Пусть $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0$, — уточненный порядок и $\{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность, удовлетворяющая условиям: имеется предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{\tau}} = \tau, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (2.2)$$

и

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > d \lambda_n^{1-\rho(\lambda_n)}, \quad d > 0. \quad (2.3)$$

Пусть, далее, $\rho_1(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \rho_1$, — другой уточненный порядок и τ_1 — положительное число, причем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\tau_1} r^{\rho(r) - \rho_1(r)} > 1. \quad (2.4)$$

При этих условиях имеется подпоследовательность $\{\mu_n = \lambda_{m_n}\}$ последовательности $\{\lambda_n\}$ со свойствами: существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n^{\tau_1}} = \tau_1,$$

и

$$\mu_{n+1} - \mu_n > d_1 \mu_n^{1-\rho(\mu_n)}, \quad d_1 > 0. \quad (2.5)$$

Доказательство. Положим

$$f(x) = x^{\rho(x)}, \quad f_1(x) = x^{\rho_1(x)}.$$

Функции, обратные этим функциям, обозначим соответственно $\Phi(t)$ и $\Phi_1(t)$. Положим, далее,

$$F(x) = [\Phi(x)]^{\rho}, [\Phi_1(x)] = f_1[\Phi(x)].$$

Изучим сначала, как ведут себя производные этих функций при больших значениях аргумента. Имеем

$$f'(x) = x^{\rho(x)} \left\{ \rho'(x) \ln x + \frac{\rho(x)}{x} \right\} = x^{\rho(x)-1} \{ x \rho'(x) \ln x + \rho(x) \}.$$

Из определения уточненного порядка следует, что выражение в фигурных скобках стремится к ρ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$f'(x) \approx \rho \frac{f(x)}{x}, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

(во всем дальнейшем знак $\approx$ означает, что отношение левой части к правой стремится к единице, когда аргумент стремится к бесконечности).

Отсюда вытекает немедленно, что

$$\varphi'(t) \approx \frac{\varphi(t)}{t\rho}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Производные от $f_1(x)$ и $\varphi_1(t)$ ведут себя также. Рассмотрим производную от $F(x)$. Имеем

$$F'(x) = f'_1[\varphi(x)] \varphi'(x).$$

В силу (2.6) и (2.7), находим

$$F'(x) \approx \rho_1 \frac{f_1[\varphi(x)]}{\varphi(x)} \frac{\varphi(x)}{\rho x}$$

или окончательно

$$F'(x) \approx \frac{\rho_1}{\rho} \frac{F(x)}{x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Убедимся теперь в том, что

$$\frac{\varphi(v_n)}{\varphi(u_n)} \rightarrow 1, \quad \text{если } u_n \rightarrow \infty, \quad v_n \rightarrow \infty, \quad 1 < \frac{v_n}{u_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Имеем

$$0 < \varphi(v_n) - \varphi(u_n) = (v_n - u_n) \varphi'(\eta), \quad u_n < \eta < v_n,$$

откуда

$$\varphi(v_n) \left\{ 1 - (v_n - u_n) \frac{\varphi'(\eta)}{\varphi(v_n)} \right\} = \varphi(u_n).$$

В силу (2.7), при больших n

$$0 < \frac{\varphi'(\eta)}{\varphi(v_n)} < \frac{2\varphi'(\eta)}{\eta\rho\varphi(v_n)} < \frac{2\varphi(v_n)}{\eta\rho\varphi(v_n)} < \frac{2}{\rho u_n},$$

и потому

$$1 < \frac{\varphi(v_n)}{\varphi(u_n)} < \frac{1}{1 - \frac{2}{\rho} \left(\frac{v_n}{u_n} - 1 \right)}.$$

При $n \rightarrow \infty$ правая часть стремится к единице. Свойство (2.9) установлено.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы. Положим

$$r_n = \varphi_1\left(\frac{n}{\tau_1}\right), \quad m_n = [\tau r_n^{\rho}(r_n)],$$

где $[a]$ означает целую часть числа a .

На основании (2.9)

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Находим

$$m_n = \tau f(r_n) - q_n, \quad 0 \leq q_n < 1.$$

Убедимся, что числа m_n различны (во всяком случае при больших номерах n). Для этого оценим разность

$$m_{n+1} - m_n = \tau [f(r_{n+1}) - f(r_n)] - q_{n+1} + q_n.$$

Имеем

$$m_{n+1} - m_n > \tau [f(r_{n+1}) - f(r_n)] - 1. \quad (2.11)$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках. Получаем

$$f(r_{n+1}) - f(r_n) = (r_{n+1} - r_n) f'(\eta), \quad r_n < \eta < r_{n+1},$$

откуда, согласно (2.6), (2.10) и свойству 3) уточненного порядка,

$$f(r_{n+1}) - f(r_n) \approx \rho (r_{n+1} - r_n) \frac{f(r_n)}{r_n}. \quad (2.12)$$

Далее,

$$r_{n+1} - r_n = \varphi_1\left(\frac{n+1}{\tau_1}\right) - \varphi_1\left(\frac{n}{\tau_1}\right) = \frac{1}{\tau_1} \varphi'_1(\eta), \quad \frac{n}{\tau_1} < \eta < \frac{n+1}{\tau_1},$$

откуда, согласно (2.7) и (2.9),

$$r_{n+1} - r_n \approx \frac{1}{\tau_1} \frac{\varphi_1\left(\frac{n}{\tau_1}\right)}{\left(\frac{n}{\tau_1}\right) \rho_1} = \frac{r_n}{n \rho_1}. \quad (2.13)$$

На основании (2.12) и (2.13), приняв во внимание равенство

$$\frac{n}{\tau_1} = r_n^{\rho_1(r_n)} \left(r_n = \varphi_1\left(\frac{n}{\tau_1}\right) \right),$$

получим

$$\tau [f(r_{n+1}) - f(r_n)] \approx \frac{\tau}{\tau_1} r_n^{\rho(r_n) - \rho_1(r_n)}.$$

Правая часть, в силу условия (2.4), при больших n больше $1 + 2\beta$, $\beta > 0$. Следовательно, на основании (2.11), при больших n

$$m_{n+1} - m_n > \beta, \quad n > n_0.$$

Числа m_n , таким образом, различны.

Для дальнейшего полезно отметить, что

$$m_{n+1} - m_n > \gamma r_n^{\rho(r_n) - \rho_1(r_n)}, \quad n > n_1, \quad \gamma = \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{\tau}{\tau_1}. \quad (2.14)$$

Положим теперь $\mu_n = \lambda_{m_n}$ и докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n^{\rho_1(\mu_n)}} = \tau_1. \quad (2.15)$$

Согласно (2.2),

$$\mu_n^{(v)}(\mu_n) = F\left(\frac{m_n}{\tau + e_n}\right), \quad e_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Положим

$$\alpha_n = \frac{m_n}{\tau + e_n}, \quad \beta_n = r_n^0(r_n) = f(r_n).$$

Очевидно,

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Сравним $F(\alpha_n)$ и $F(\beta_n)$. Имеем

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) = (\beta_n - \alpha_n) F'(\eta),$$

где η лежит между α_n и β_n . На основании (2.8) и (2.16)

$$F'(\eta) \approx \frac{\rho_1}{\rho} \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n},$$

в силу чего при больших n

$$|(\beta_n - \alpha_n) F'(\eta)| < 2 \frac{\rho_1}{\rho} \left| \frac{\beta_n}{\alpha_n} - 1 \right| |F(\alpha_n)| = o\{F(\alpha_n)\}.$$

Значит,

$$\frac{F(\beta_n)}{F(\alpha_n)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Подсчитаем $F(\beta_n)$. Поскольку

$$\varphi(\beta_n) = \varphi(r_n^0(r_n)) = r_n,$$

то

$$F(\beta_n) = r_n^{\rho_1(r_n)}.$$

Но $r_n = \varphi_1\left(\frac{n}{\tau_1}\right)$. Следовательно,

$$F(\beta_n) = \frac{n}{\tau_1}.$$

Отсюда

$$\frac{\mu_n^{\rho_1}(\mu_n)}{\left(\frac{n}{\tau_1}\right)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и надо было показать.

Получим, наконец, неравенство (2.5). Имеем

$$r_n = \varphi_1\left(\frac{n}{\tau_1}\right), \quad \mu_n = \varphi_1\left(\frac{n}{\tau_1 + \delta_n}\right), \quad \delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

(последнее равенство вытекает из (2.15)). Отсюда, на основании (2.9),

$$\frac{r_n}{\mu_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Принимая во внимание (2.10), далее найдем

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Учитывая последнее соображение и свойство 3) уточненного порядка, из условия (2.3) для больших n получим

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \lambda_{m_{n+1}} - \lambda_{m_n} > \frac{d}{2} (m_{n+1} - m_n) \mu_n^{1-\rho}(\mu_n),$$

или, согласно (2.14),

$$\mu_{n+1} - \mu_n > \frac{yd}{2} r_n^0(r_n)^{-\rho_1(r_n)} \mu_n^{1-\rho}(\mu_n).$$

На основании (2.17) правая часть без числового множителя асимптотически равна $\mu_n^{1-\rho_1}(\mu_n)$. Таким образом, для больших n

$$\mu_{n+1} - \mu_n > \frac{yd}{3} \mu_n^{1-\rho_1}(\mu_n).$$

Все доказано.

З а м е ч а н и е. Если λ_n удовлетворяют условию

$$\frac{n}{\lambda_n^{\rho}(\lambda_n)} = \tau \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то имеет место (2.3) при некотором $d > 0$. Действительно, в этом случае $\lambda_n = \varphi\left(\frac{n}{\tau}\right)$, и потому

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = \varphi\left(\frac{n+1}{\tau}\right) - \varphi\left(\frac{n}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau} \varphi'(\eta), \quad \frac{n}{\tau} < \eta < \frac{n+1}{\tau}.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.7), получаем, что при больших n

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \frac{1}{2\tau\rho} \frac{\varphi\left(\frac{n}{\tau}\right)}{\left(\frac{n}{\tau}\right)} = \frac{1}{2\tau\rho} \lambda_n^{1-\rho}(\lambda_n).$$

4. Индикатор целой функции. Индикатор или индикатриса роста целой функции $f(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ определяется формулой

$$h(\theta) = h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}(r)}.$$

Индикатор — непрерывная периодическая функция с периодом 2π . Характерным свойством индикатора является тригонометрическая выпуклость. Тригонометрически выпуклая функция — это

функция, удовлетворяющая неравенству

$$h(\theta_1) \sin \rho(\theta_2 - \theta_3) + h(\theta_2) \sin \rho(\theta_3 - \theta_1) + h(\theta_3) \sin \rho(\theta_1 - \theta_2) \leq 0$$

при $\theta_3 - \theta_1 < \pi/\rho$, $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$.

Положим

$$s(\theta) = h'(\theta) + \rho^2 \int_{\theta}^{\theta_0} h(\varphi) d\varphi. \quad (2.18)$$

Теорема 1.2.4. Для того чтобы функция $h(\theta)$ была тригонометрически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы функция $s(\theta)$ была неубывающей и при ρ целом удовлетворяла бы еще условию

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\psi} ds(\psi) = 0. \quad (2.19)$$

При ρ нецелом

$$h(\theta) = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) ds(\psi), \quad (2.20)$$

при ρ целом

$$h(\theta) = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - \psi) \sin \rho(\theta - \psi) ds(\psi) + A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta. \quad (2.21)$$

При целом ρ функцию $s(\psi)$ можно равномерно приблизить с любой точностью $\varepsilon > 0$ кусочно-постоянной функцией $\tilde{s}(\psi)$ с конечным числом скачков, причем скачки функции $\Delta(\psi) = \tilde{s}(\psi)/2\pi\rho$ выражаются рациональными числами и

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\psi} d\tilde{s}(\psi) = 0.$$

В случае $\rho(r) = 1$ функция $s(\psi)$ имеет простой геометрический смысл. Пусть $\bar{D}$ — замкнутое выпуклое множество с опорной функцией $K(\varphi) = h(-\varphi)$. Тогда $s(\psi)$ — длина дуги границы $\partial\bar{D}$ от некоторой фиксированной точки до точки опоры опорной прямой l_ψ (прямая l_ψ перпендикулярна лучу $\arg z = \psi$ и соприкасается с множеством $\bar{D}$). Имея это в виду, функция $\tilde{s}(\psi)$ строится следующим образом. В кривую $\partial\bar{D}$ впишем ломаную L так, чтобы ее длина отличалась от длины $\partial\bar{D}$ меньше чем на ε и чтобы длина дуги $\partial\bar{D}$ между соседними вершинами L

(если эта дуга не совпадает со звеном ломаной) была меньше ε . Сдвигая незначительно вершины ломаной, можно добиться того, что длины ее звеньев, поделенные на 2π , будут выражаться рациональными числами. Пусть $\tilde{s}(\psi)$ — функция, соответствующая ломаной L (отсчет дуги на L и $\partial\bar{D}$ будем вести от одной и той же точки $\partial\bar{D}$). Эта функция и есть искомое приближение.

Замечание. Рассмотрим выпуклую область D_0 специального вида. Пусть D — бесконечная выпуклая область, граница которой состоит из лучей l_1, l_2 и дуги γ , соединяющей начала этих лучей. Допустим, что l_1 и l_2 наклонены к вещественной оси под углом, соответственно равным ψ_0 и $-\psi_0$, причем $0 \leq \psi_0 < \pi/2$. Правее γ проведем вертикальную прямую l . Она отсечет от D конечную выпуклую область, которую мы и обозначим D_0 . Граница D_0 состоит из дуги γ , отрезков лучей l_1 и l_2 и вертикального отрезка l_0 прямой l . Заметим, что перпендикуляр, опущенный из начала координат на луч l_1 (или его продолжение), образует с вещественной осью угол $(\psi_0 + \pi/2)$. Пусть $A = r_0 e^{i\psi_0}$, $B = r_0 e^{-i\psi_0}$ — концы отрезка l_0 . Будем отсчитывать дугу кривой $\partial\bar{D}_0$ от точки B . Видим, что

$$s(\psi) = 0, \quad -(\psi_0 + \frac{\pi}{2}) < \psi < 0,$$

$$s(\psi) = q_0, \quad 0 < \psi < \psi_0 + \frac{\pi}{2},$$

где q_0 — длина отрезка l_0 .

Допустим, что $q_0/2\pi$ — рациональное число. В этом случае в качестве вершин ломаной L возьмем точки A и B и отсчет дуги L будем вести от вершины B . Тогда имеем

$$\tilde{s}(\psi) = 0, \quad -(\psi_0 + \frac{\pi}{2}) < \psi < 0,$$

$$\tilde{s}(\psi) = q_0, \quad 0 < \psi < \psi_0 + \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, у функции $\tilde{s}(\psi)$ скачки будут в точке $\psi = 0$ и в точках ψ_j , $|\psi_j| \geq \psi_0 + \pi/2$.

5. Каноническая функция правильно распределенного множества. Пусть $A = \{a_k\}$ — правильно распределенное множество при показателе $\rho(r)$. Положим

$$G(u, \rho) = (1 - u) \exp \left(u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^\rho}{\rho} \right).$$

Каноническая функция правильно распределенного множества $A = \{a_k\}$ определяется формулой

$$f(z, A) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}, \rho\right), \quad \rho = [\rho],$$

при ρ нецелом и формулой

$$f(z, A) = e^{cz^\rho} \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}, \rho\right)$$

при ρ целом. Здесь c — постоянная, фигурирующая в выражении (2.1) п. 3.

6. Теоремы об асимптотическом поведении канонической функции. Сформулированные ниже результаты принадлежат Б. Я. Левину и А. Флюгеру.

Назовем линейной плотностью множества кружков C_j ($j = 1, 2, \dots$) комплексной плоскости предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sum r_j$$

где r_j — радиус кружка C_j , а $\sum$ означает суммирование по всем кружкам, центры которых находятся в круге $|z| < r$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.5. Пусть $A = \{a_k\}$ — правильно распределенное множество при показателе $\rho(r)$. Вне некоторого множества кружков нулевой линейной плотности каноническая функция $f(z, A)$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\ln |f(re^{i\theta}, A)| \approx H(\theta) r^{\rho(r)}.$$

Здесь

$$H(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) d\Delta(\psi) \quad (2.22)$$

при ρ нецелом и

$$H(\theta) = - \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\psi - \theta) \sin \rho(\psi - \theta) d\Delta(\psi) + \tau_1 \cos \rho(\theta - \theta_1) \quad (2.23)$$

при ρ целом, причем τ_1 и θ_1 таковы, что

$$\tau_1 e^{-i\theta_1} = \delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left\{ c + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-\rho} \right\}. \quad (2.24)$$

а функция $\Delta(\psi)$ характеризует распределение нулей a_k (см. п. 2).

Если в угле $\alpha < \theta < \beta$ нет точек множества A , то указанное асимптотическое равенство имеет место всюду в меньшем угле $\alpha + \eta \leq \theta \leq \beta - \eta$, где $\eta > 0$ — любое.

Заметим, что в этой теореме не указывается, как расположены исключительные кружки, вне которых выполняется асимптотика. В случае, когда правильно распределенное множество $A = \{a_k\}$ является регулярным, за исключительные кружки

можно взять C_R -кружки множества $A = \{a_k\}$. Напомним, что C_R -кружки — это кружки

$$|z - a_k| < \bar{d} |a_k|^{1-\rho} (|a_k|), \quad \bar{d} > 0.$$

Итак, верна

Теорема 1.2.6. Пусть $A = \{a_k\}$ — регулярное множество при показателе $\rho(r)$. Вне исключительных C_R -кружков каноническая функция $f(z, A)$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\ln |f(re^{i\theta}, A)| \approx H(\theta) r^{\rho(r)}, \quad (2.25)$$

где $H(\theta)$ имеет вид (2.22) при ρ нецелом и вид (2.23) при ρ целом. Если $a_k = r_k e^{i\varphi_k}$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |f'(a_k)| > [H(\varphi_k) - \varepsilon] r_k^{\rho(r_k)}, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

Докажем вторую часть теоремы. Выбираем $\bar{d}$ столь малым, чтобы исключительные кружки не пересекались. Имеем

$$\left| \frac{1}{f'(a_k)} \right| \leq \max_{|z - a_k| = \rho_k} \left| \frac{z - a_k}{f(z)} \right|, \quad \rho_k = \bar{d} a_k^{1-\rho} (|a_k|).$$

Отсюда, в силу (2.25), учитывая, что

$$\frac{\rho_k}{a_k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

получаем

$$\left| \frac{1}{f'(a_k)} \right| < e^{[-H(\varphi_k) + \varepsilon] r_k^{\rho(r_k)}}, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

Для функции $f(z, A)$ с правильно распределенным множеством нулей $\{a_k\}$ всегда

$$H(\theta) = h_f(\theta),$$

где $h_f(\theta)$ — индикатриса роста $f(z, A)$ при показателе $\rho(r)$.

Замечание. Пусть $A = \{a_k\}$ — регулярное множество при показателе $\rho(r)$ и

$$C_k: |z - a_k| < \rho_k, \quad \rho_k = \bar{d} |a_k|^{1-\rho} (|a_k|), \quad \bar{d} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

— исключительные кружки. При малом $\bar{d}$ исключительные кружки (когда k велико) не пересекаются. Утверждаем, что если $\rho_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то асимптотическое равенство (2.25) имеет место в действительности вне кружков с центрами в a_k радиуса γ , где $\gamma > 0$ — любая фиксированная постоянная. Докажем это.

Кружок C_k виден из начала координат под углом, который стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из непрерывности индикатора $h(\theta)$ вытекает, что

$$\sup |h(\theta_2) - h(\theta_1)| = \delta_k,$$

$$z_j = |z_j| e^{i\theta_j} \in C_k \quad (j=1, 2), \quad \delta_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$\sup \left| \frac{z_j}{z_1} \right| = 1 + \delta'_k,$$

$$z_j \in C_k \quad (j=1, 2), \quad \delta'_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$\frac{z - a_k}{f(z, A)}.$$

Она регулярна в кружке C_k . По принципу максимума модуля аналитической функции для $z \in C_k$

$$\left| \frac{z - a_k}{f(z, A)} \right| \leq \max_{|t - a_k| = \rho_k} \left| \frac{t - a_k}{f(t, A)} \right| = \frac{\rho_k}{|f(t_0, A)|}, \quad |t_0 - a_k| = \rho_k. \quad (2.26)$$

Из (2.25) получаем, что вне исключительных кружков при $r > r_0(\varepsilon)$

$$\ln |f(re^{i\theta}, A)| > [h(\theta) - \varepsilon] r^{\rho(r)},$$

в частности,

$$\ln |f(r_0 e^{i\theta_0}, A)| > [h(\theta_0) - \varepsilon] r_0^{\rho(r_0)},$$

$$r_0 e^{i\theta_0} = t_0, \quad k > K(\varepsilon).$$

Из (2.26) находим

$$|f(z, A)| \geq \frac{|z - a_k|}{\rho_k} \exp \{ [h(\theta_0) - \varepsilon] r_0^{\rho(r_0)} \},$$

$$z \in C_k, \quad k > K(\varepsilon).$$

Для $z = re^{i\theta} \in C_k$

$$h(\theta) < h(\theta_0) + \delta_k, \quad \frac{r^{\rho(r)}}{r_0^{\rho(r_0)}} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty$$

в силу свойства 3) уточненного порядка, поскольку $\frac{r}{r_0} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, $\rho_k < |a_k| < 2r$. Следовательно,

$$|f(z, A)| > \exp \{ [h(\theta) - 2\varepsilon] r^{\rho(r)} \},$$

$$\forall < |z - a_k| < \rho_k, \quad k > K_1(\varepsilon).$$

Неравенство

$$|f(z, A)| < \exp \{ [h(\theta) + \varepsilon] r^{\rho(r)} \}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

всегда верно. Из всего этого вытекает, что асимптотическое равенство (2.25) выполняется при $r > r_0(\varepsilon)$ всюду вне кружков $|z - a_k| < \gamma$.

Следствие 1. Пусть $A = \{a_k\}$ — правильно распределенное множество при показателе $\rho(r)$, $f(z, A)$ — каноническая функция этого множества, $h(\theta)$ — индикатор функции $f(z, A)$. Тогда именуется окружности $|z| = r_k$,

$$r_k \uparrow \infty, \quad \frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty,$$

на которых

$$\ln |f(re^{i\theta}, A)| > [h(\theta) - \varepsilon] r^{\rho(r)}, \quad r = r_k, \quad k > K(\varepsilon).$$

Докажем это. По теореме 1.2.5 вне множества кружков C_k нулевой линейной плотности имеем

$$\ln |f(re^{i\theta}, A)| > [h(\theta) - \varepsilon] r^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon). \quad (2.27)$$

Пусть r_k — радиус C_k , λ_k — центр C_k . Поскольку множество кружков C_k имеет нулевую линейную плотность, то

$$\frac{1}{r} \sum_{|\lambda_k| \leq r} r_k = \delta(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Надо оценить сумму диаметров кружков C_k , которые имеют общие точки с кругом $|z| \leq r$ (центры некоторых из этих кружков могут не лежать в круге $|z| \leq r$).

Положим в формуле (2.28) $r = |\lambda_k|$. Тогда получим

$$\frac{r_k}{|\lambda_k|} \leq \delta(|\lambda_k|), \quad \frac{r_k}{|\lambda_k| - r_k} < \frac{|\lambda_k| \delta(|\lambda_k|)}{|\lambda_k| (1 - \delta(|\lambda_k|))} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Левая часть во втором неравенстве есть отношение радиуса кружка к расстоянию от начала до ближайшей к началу точки кружка. Выводим отсюда, что если r_m — радиус кружка, который имеет общие точки с кругом $|z| \leq r$, то

$$r_m < \frac{1}{2} r, \quad r > r_0.$$

Следовательно, кружки C_k , имеющие общие точки с кругом $|z| \leq r$, полностью лежат в круге $|z| < 2r$, и потому, на основании (2.28), сумма их диаметров меньше

$$4r\delta(2r) \leq r\delta_1(r),$$

где

$$\delta_1(r) = \max_{t \geq r} 4\delta(2t), \quad \delta_1(r) \downarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Возьмем последовательность радиусов $\{R_k\}$, где $R_1 > 0$ задаем произвольно, а

$$R_{k+1} = q_k R_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad q_k = \frac{1}{1 - 2\delta_1(R_k)}.$$

Ширина кольца $R_k < |z| < R_{k+1}$ равна

$$(q_k - 1) R_k = \frac{2\delta_1(R_k) R_k}{1 - 2\delta_1(R_k)} \geq \frac{2\delta_1(R_{k+1}) R_k}{1 - 2\delta_1(R_k)} = 2\delta_1(R_{k+1}) R_{k+1},$$

а сумма диаметров исключительных кружков C_k , имеющих общие точки с кругом $|z| \leq R_{k+1}$, меньше $R_{k+1} \delta_1(R_{k+1})$. Поэтому существует окружность $|z| = r_k$, $R_k < r_k < R_{k+1}$, которая не пересекается с исключительными кружками и на которой, следовательно, выполняется оценка (2.27). Имеем

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} < \frac{R_{k+2}}{R_k} = q_k q_{k+1} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Утверждение полностью доказано.

З а м е ч а н и е 1. В случае, когда $A = \{a_k\}$ — регулярное множество такое, что

$$|a_{k+1}| - |a_k| > d |a_k|^{1-\rho} (|a_k|) \quad (k > k_0),$$

в качестве окружностей $|z| = r_k$ можно взять окружности

$$|z| = r_k = \frac{|a_k| + |a_{k+1}|}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Они не пересекаются с исключительными кружками

$$|z - a_m| < d |a_m|^{1-\rho} (|a_m|),$$

если d — достаточно мало.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $A = \{a_k\}$ — правильно распределенное множество. Спроектируем исключительные кружки на действительную ось по правилу: точке $re^{i\varphi}$ приводим в соответствие на действительной оси точку r . Получим некоторое открытое множество. Пусть (ρ', ρ'') — какой-нибудь смежный интервал этого множества. При некотором k будем иметь

$$r_k \leq \rho' < \rho'' \leq r_{k+1},$$

где r_k — числа, введенные выше. Отсюда следует, что

$$\frac{\rho''}{\rho'} \rightarrow 1, \quad \rho' \rightarrow \infty.$$

На окружностях $|z| = \rho'$ и $|z| = \rho''$ имеет место оценка (2.27). Замечание состоит в том, что если в кольце $\rho' < |z| < \rho''$ нет точек из множества $A = \{a_k\}$, то оценка (2.27) имеет место и в этом кольце.

Пусть в указанном кольце нет точек из $\{a_k\}$. Мы уже видели, что сумма диаметров исключительных кружков, имеющих общие точки с кругом $|z| < \rho''$, меньше $\rho'' \delta_1(\rho'') < 2\rho' \delta_1(\rho')$ при большем ρ' , где $\delta_1(r) \downarrow 0$. Отсюда следует, что в каждом криволинейном четырехугольнике

$$\rho' \leq |z| \leq \rho'', \quad \varphi_0 \leq \arg z \leq \varphi_0 + 2\delta_1(\rho'),$$

имеется отрезок $\rho' \leq |z| \leq \rho''$, $\arg z = \varphi_0$, который не пересекается с исключительными кружками. В силу этого факта кольцо $\rho' < |z| < \rho''$ разобьется на конечное число четырехугольников указанного вида, стороны которых не пересекаются с исключительными кружками. На сторонах имеет место оценка (2.27). Длина любой стороны, лежащей на окружности $|z| = \rho'$, не превосходит $4\rho' \delta_1(\rho')$. Пусть K — один из указанных четырехугольников, а Γ — его граница. Поскольку в K нет точек из $\{a_k\}$, то для $z \in K$

$$|f(z, A)| \geq \min_{t \in \Gamma} |f(t, A)|.$$

В пределах любого K колебание функции $h(\theta) r^{\rho(\theta)}$ не более ε , когда $\rho' > r_0(\varepsilon)$. Следовательно, в силу (2.27)

$$|f(z, A)| > [h(\theta) - 2\varepsilon] r^{\rho(\theta)}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

когда $z = re^{i\theta}$ лежит в K . Это же неравенство выполняется и во всех других четырехугольниках. Оно выполняется во всем кольце $\rho' \leq |z| \leq \rho''$.

Итак, мы показали, что если в кольце $\rho' < |z| < \rho''$ нет точек из $\{a_k\}$, то оценка (2.27) выполняется и в этом кольце.

На этом основании без ущерба можно выбросить из множества исключительных кружков те кружки, которые проектируются на интервал (ρ', ρ'') . Поэтому впредь можно считать, что если (ρ', ρ'') — смежный интервал, то в кольце $\rho' < |z| < \rho''$ имеется по крайней мере одна точка из $A = \{a_k\}$.

С л е д с т в и е 2. Пусть $A = \{a_k\}$ — правильно распределенное множество при показателе $\rho(r) \equiv 1$, $f(z, A)$ — каноническая функция этого множества, $h(\theta)$ — индикатор функции $f(z, A)$. Тогда имеются число $\rho > 0$ и числа r_k ,

$$0 < r_k \uparrow \infty, \quad \frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty,$$

такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |f(re^{i\theta}, A)| > [h(\theta) - \varepsilon] r, \quad r_k - \rho \leq r \leq r_k + \rho, \quad k > K(\varepsilon).$$

Пусть $n(r)$ — число точек a_k в круге $|z| \leq r$. Поскольку A — правильно распределенное множество, существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} = \Delta = \Delta(2\pi) - \Delta(0).$$

Отсюда $n(r) = \Delta r + \varepsilon(r)r$, причем $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Положим

$$\varepsilon_1(r) = \max_{t \geq r} \left[\frac{1}{t}, \max \varepsilon(t) \right], \quad \varepsilon_1(r) \downarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Число точек a_k в кольце $r < |z| \leq R$ равно

$$n(R) - n(r) = \Delta(R - r) + \varepsilon(R)R - \varepsilon(r)r \leq \Delta(R - r) + 2\varepsilon_1(R)R.$$

При рассмотрении следствия 1 мы видели, что сумма диаметров исключительных кружков, которые имеют общие точки с кругом $|z| \leq R$, меньше $R\delta_1(R)$, где $\delta_1(R) \downarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Возьмем последовательность чисел $\{R_k\}$, где $R_1 > 0$ выбрано произвольно, а

$$R_{k+1} = q_k R_k \quad (k \geq 1),$$

$$q_k = \max \left(\frac{1}{1 - 2\delta_1(R_k)}, 1 + \varepsilon_1(R_k) \right).$$

Из условия

$$q_k \geq \frac{1}{1 - 2\delta_1(R_k)}$$

получаем

$$q_k \delta_1(R_k) \leq \frac{q_k - 1}{2}.$$

Отсюда вытекает, что сумма диаметров исключительных кружков, которые имеют общие точки с кругом $|z_k| \leq R_{k+1}$, меньше

$$R_{k+1} \delta_1(R_{k+1}) < q_k R_k \delta_1(R_k) < \frac{q_k - 1}{2} R_k.$$

Ширина кольца $R_k < |z| \leq R_{k+1}$ равна $(q_k - 1)R_k$. Следовательно, половина интервала (R_k, R_{k+1}) действительной оси (половина в смысле меры) свободна от точек множества Ω -проекции исключительных кружков на действительную ось. Так как каждому смежному интервалу (ρ', ρ'') множества Ω можно сопоставить хотя бы одну точку a_k из кольца $\rho' < |z| < \rho''$ (см. замечание 2), то число смежных интервалов в (R_k, R_{k+1}) не более чем $n(R_{k+1}) - n(R_k)$. Точки интервала (R_k, R_{k+1}) , которые не принадлежат Ω , образуют множество G_k . Оно состоит из интервалов, некоторые из которых могут вырождаться в отдельные точки. Число этих интервалов не более чем $n(R_{k+1}) - n(R_k) + 2$.

Так как мера G_k больше чем $\frac{q_k - 1}{2} R_k$, то один из интервалов,

назовем его (ρ_k, ρ_{k+1}) , имеет длину

$$s_k \geq \frac{\frac{q_k - 1}{2} R_k}{n(R_{k+1}) - n(R_k) + 2} > \frac{\frac{q_k - 1}{2} R_k}{2 + \Delta(R_{k+1} - R_k) + 2\varepsilon_1(R_k)R_{k+1}} = \frac{1}{\frac{2}{R_k} + \Delta(q_k - 1) + 2\varepsilon_1(R_k)q_k}.$$

Поскольку

$$\varepsilon_1(R_k) \leq q_k - 1,$$

$$\frac{1}{R_k} \leq \varepsilon_1(R_k) \leq (q_k - 1), \quad q_k < 2, \quad k > k_0,$$

то

$$s_k > \frac{1}{2} \frac{q_k - 1}{(6 + \Delta)(q_k - 1)} = \frac{1}{2(6 + \Delta)}.$$

Положим

$$r_k = \frac{\rho_k + \rho_{k+1}}{2}, \quad \rho = \frac{1}{4(\Delta + 6)}.$$

В кольце $\rho_k \leq |z| \leq \rho_{k+1}$ нет исключительных кружков, и там имеет место оценка (2.27). Осталось добавить, что

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Все доказано.

Следствие 3. Пусть $A = \{a_k\}$ — правильно распределенное множество при показателе $\rho(r)$, $f(z, A)$ — каноническая функция этого множества, $h(\theta)$ — индикатор функции $f(z, A)$. Каков бы ни был угол $G: \psi_0 \leq \arg z < \psi_1$, имеется в G бесконечный непрерывный путь Γ , составленный из дуг окружностей $|z| = r_k$, $r_k \uparrow \infty$, и отрезков $l_k: \arg z = \varphi_k$, $\psi_0 < \varphi_k < \psi_1$, $r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$ ($k \geq k_0$), на котором

$$|\ln |f(re^{i\theta}, A)| > [h(\theta) - \varepsilon]r^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Для доказательства в качестве окружностей $|z| = r_k$ возьмем окружности из следствия 1. Осталось доказать наличие в кольце $r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$ соответствующего отрезка l_k .

Вне множества кружков C_k нулевой линейной плотности имеется оценка (2.27). При доказательстве следствия 1 было установлено, что сумма диаметров кружков C_k , имеющих общие точки с кругом $|z| \leq r$, меньше $r\delta_1(r)$, где $\delta_1(r) \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Значит, сумма диаметров кружков C_k , имеющих общие точки с кольцом $r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$, меньше

$$r_k \delta_1(r_k) = r_{k-1} \frac{r_k}{r_{k-1}} \delta_1(r_k).$$

Но $\frac{r_k}{r_{k-1}} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ и потому

$$\frac{r_k}{r_{k-1}} \delta_1(r_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

В силу этого кружки C_k не могут пересекаться с каждым отрезком $I: \arg z = \varphi, r_{k-1} \leq |z| \leq r_k$.

7. Специальные целые функции. Рассмотрим некоторые часто используемые функции, у которых нули расположены на конечном числе лучей, причем множество нулей — правильно распределенное.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.6'. Пусть множество $A = \{a_k\}$ точек на положительном луче имеет плотность

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\rho(r)}$$

при уточненном порядке $\rho(r)$, причем ρ — нецелое, и пусть

$$f(z, A) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}, \rho\right) \quad (\rho < \rho < \rho + 1).$$

Тогда при $z = re^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta}, A)|}{r^\rho(r)} = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\theta - \pi), \quad (2.29)$$

причем стремление к пределу равномерно в любом интервале $0 < \eta < \theta < 2\pi - \eta$.

Предположим дополнительно, что

$$a_{k+1} - a_k > d a_k^{1-\rho(a_k)}, \quad k > k_0, \quad d > 0.$$

Тогда $A = \{a_k\}$ — регулярное множество и соотношение (2.29) выполняется всюду вне исключительных кружков

$$|z - a_k| < \bar{d} a_k^{1-\rho(a_k)}, \quad \bar{d} > 0,$$

причем выполняется равномерно.

Рассмотрим теперь случай, когда нули располагаются на конечном числе лучей. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.7. Пусть множество $A = \{a_k\}$ точек на положительном луче имеет плотность

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\bar{\rho}}(r)}$$

при уточненном порядке $\rho(r)$, и пусть m — целое число, большее ρ . Положим

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{a_k^m}\right). \quad (2.30)$$

Тогда при $z = re^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi/m$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\bar{\rho}}(r)} = \frac{\pi \Delta}{\sin \frac{\pi \rho}{m}} \cos \rho\left(\theta - \frac{\pi}{m}\right), \quad (2.31)$$

причем стремление к пределу равномерно в любом интервале $0 < \eta < \theta < \frac{2\pi}{m} - \eta$.

Соотношение (2.31) получим на основании (2.29). Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right), \quad b_k = a_k^m, \quad m > \rho.$$

Пусть $\bar{n}(r)$ — число точек b_k в круге $|z| \leq r$. Имеем $\bar{n}(r) = n\left(r^{\frac{1}{m}}\right)$. Положим

$$\bar{\rho}(r) = \frac{1}{m} \rho\left(r^{\frac{1}{m}}\right).$$

Легко проверить, что $\bar{\rho}(r)$ — уточненный порядок, причем

$$\bar{\rho}(r) \rightarrow \bar{\rho} = \frac{\rho}{m} < 1, \quad r \rightarrow \infty.$$

Поскольку

$$\frac{\bar{n}(r)}{r^{\bar{\rho}}(r)} = \frac{n(R)}{R^{\bar{\rho}}(R)}, \quad R = r^{\frac{1}{m}},$$

то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\bar{n}(r)}{r^{\bar{\rho}}(r)} = \Delta.$$

На основании (2.29) $(\Phi(z) = f(z, \bar{A})$ при $\bar{A} = \{b_k\})$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Phi(re^{i\theta})|}{r^{\bar{\rho}}(r)} = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \bar{\rho}} \cos \bar{\rho}(\theta - \pi), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Но $f(z) = \Phi(z^m)$. Поэтому получаем искомый результат:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\bar{\rho}}(r)} = \frac{\pi \Delta}{\sin \frac{\pi \rho}{m}} \cos \rho\left(\theta - \frac{\pi}{m}\right), \quad 0 < \theta < \frac{2\pi}{m}.$$

Пусть $H(\theta)$ — индикатор функции $f(z)$. Имеем

$$H(\theta) = \frac{\pi\Delta}{\sin \frac{\pi\rho}{m}} \cos \rho \left(\theta - \frac{\pi}{m} \right), \quad 0 < \theta < \frac{2\pi}{m}.$$

Поскольку $f(z)$ — целая функция от z^m , то значения индикатора $H(\theta)$ в углах $\frac{2\pi}{m}k < \theta < \frac{2\pi}{m}(k+1)$ повторяются. Отсюда

$$\sigma = \max_{\theta} H(\theta) = \frac{\pi\Delta}{\sin \frac{\pi\rho}{m}}, \quad \min_{\theta} H(\theta) = H(0) = \pi\Delta \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m}.$$

Видим, что если $m > 2\rho$, то индикатор $H(\theta)$ всюду положителен.

Предположим, что

$$a_{k+1} - a_k > d a_k^{1-\rho(a_k)}, \quad k > k_0, \quad d > 0. \quad (2.32)$$

При этом условии множество нулей функции $f(z)$ становится регулярным множеством. Условие (2.32) заведомо будет выполняться (см. замечание в конце п. 3), если a_k выбрать с условием

$$\frac{k}{a_k^{\rho(a_k)}} = \Delta.$$

При условии (2.32) вне исключительных кружков

$$\left| z - a_k e^{\frac{2\pi i}{m}s} \right| < d a_k^{1-\rho(a_k)} \quad (s=0, 1, \dots, m-1, k > k_0)$$

имеем

$$\ln |f(re^{i\theta})| > [H(\theta) - \varepsilon] r^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon). \quad (2.33)$$

Положим

$$r_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} \quad (k=1, 2, \dots).$$

При малом d окружности $|z|=r_k$ не пересекаются с исключительными кружками. Поэтому можно утверждать, что неравенство (2.33) выполняется, в частности, на окружностях $|z|=r_k$.

В том случае, когда радиусы исключительных кружков стремятся к бесконечности, т. е. когда

$$a_k^{1-\rho(a_k)} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

неравенство (2.33) выполняется в действительности (см. замечание к теореме 1.2.5) вне кружков постоянного радиуса с центрами в нулях $f(z)$.

В заключение оценим при условии (2.32) модуль производной $f'(z)$ в нулях $f(z)$. Очевидно, достаточно это сделать в точках a_k . Выбираем d столь малым, чтобы исключительные кружки не пересекались.

Имеем

$$\left| \frac{1}{f'(a_k)} \right| \leq \max_{|z-a_k|=\rho_k} \left| \frac{z-a_k}{f(z)} \right|, \quad \rho_k = d a_k^{1-\rho(a_k)}.$$

Отсюда, в силу (2.33), учитывая, что

$$\frac{\rho_k}{a_k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

получаем

$$\left| \frac{1}{f'(a_k)} \right| < e^{[-H(0)+2\sigma] a_k^{\rho(a_k)}}, \quad k > k_0(\varepsilon). \quad (2.34)$$

Имеем далее

$$\left| \frac{1}{f'(a_k)} \right| \geq \min_{|z-a_k|=\rho_k} \left| \frac{z-a_k}{f(z)} \right|.$$

Так как

$$\ln |f(re^{i\theta})| < [H(\theta) + \varepsilon] r^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

то

$$\left| \frac{1}{f'(a_k)} \right| > e^{[-H(0)-2\sigma] a_k^{\rho(a_k)}}, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

На основании этого неравенства и неравенства (2.34) находим:

Теорема 1.2.8. В условиях теоремы 1.2.7 при дополнительном условии (2.32)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \frac{1}{f'(a_k)} \right|}{a_k^{\rho(a_k)}} = -\pi\Delta \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m}. \quad (2.35)$$

Множество E_0 точек интервала $(0, \infty)$ называется *множеством нулевой относительной меры*, если при любом $r > 0$ множество $E_0 \cap [0, r]$ измеримо и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{mes} E_0 \cap [0, r]}{r} = 0.$$

Покажем, что точки a_k ($k \geq 1$) на $(0, \infty)$ можно всегда выбрать так, что множество $A = \{a_k\}$ будет иметь плотность Δ при уточненном порядке $\rho(r)$, будет выполняться условие (2.32) и все точки a_k будут лежать вне данного множества E_0 нулевой относительной меры.

Пусть E_1 — множество, получаемое из $(0, \infty)$ удалением множества E_0 , и $E(t)$ — характеристическая функция множества E_1 (она равна единице в точках E_1 и равна нулю в точках E_0). Пусть затем $r = \varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$.

обозначим через b_k ($k \geq 1$) наименьшие числа, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^{b_1} E(t) dt = \varphi\left(\frac{1}{\Delta}\right), \quad \int_{b_k}^{b_{k+1}} E(t) dt = \varphi\left(\frac{k+1}{\Delta}\right) - \varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right) \quad (k \geq 1).$$

Имеем

$$b_{k+1} - b_k \geq \varphi\left(\frac{k+1}{\Delta}\right) - \varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right) \quad (k \geq 1), \quad \int_0^{b_k} E(t) dt = \varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right) \quad (k \geq 1).$$

В любой близости от b_k и слева от b_k имеются точки из множества E_1 . Имея это в виду, выберем в E_1 точки a_k ($k \geq 1$) так, чтобы выполнялись условия: $a_k < b_k$, $(b_k - a_k) \downarrow 0$. Получаем

$$a_{k+1} - a_k > \varphi\left(\frac{k+1}{\Delta}\right) - \varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right) \quad (k \geq 1),$$

$$\varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right) = b_k [1 + o(1)] = a_k [1 + o(1)].$$

Отсюда

$$\frac{k}{\Delta} \approx a_k^{\rho(a_k)}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k^{\rho(a_k)}} = \Delta.$$

Проверим условие (2.32). Имеем

$$\varphi\left(\frac{k+1}{\Delta}\right) - \varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta} \varphi'(\eta), \quad \frac{k}{\Delta} < \eta < \frac{k+1}{\Delta},$$

откуда, согласно асимптотическому равенству (2.7), находим

$$\varphi\left(\frac{k+1}{\Delta}\right) - \varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right) \approx \frac{1}{\Delta \rho} \frac{\varphi\left(\frac{k}{\Delta}\right)}{\left(\frac{k}{\Delta}\right)}.$$

Следовательно, при больших k

$$a_{k+1} - a_k > \frac{1}{2\rho\Delta} a_k^{1-\rho(a_k)}.$$

Это доказано.

Особую роль в рядах Дирихле играет функция

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right), \quad 0 < \lambda_k \uparrow \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \tau < \infty. \quad (2.36)$$

Укажем следующие ее свойства (все они вытекают из предыдущего рассмотрения, надо только учесть, что в данном случае $\rho(r) = 1$).

Теорема 1.2.9. Верны утверждения:

1) для $z = re^{i\theta}$, $\theta \neq 0, \pi$, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r} = \pi \tau |\sin \theta|; \quad (2.37)$$

2) имеются число $\rho > 0$ и числа r_k , $r_k \uparrow \infty$, $\frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \ln |L(re^{i\theta})| &> [\pi \tau |\sin \theta| - \varepsilon] r, \\ r_k - \rho &\leq r \leq r_k + \rho, \quad k > K(\varepsilon); \end{aligned} \quad (2.38)$$

3) если дополнительно известно, что

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.39)$$

то в качестве чисел r_k из (2.38) можно взять числа

$$r_k = \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

4) при условии (2.39)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = 0. \quad (2.40)$$

Заметим, что утверждение 2) получено из следствия 2 п. 6.

Из утверждения 1) следует, что наименьшее выпуклое замкнутое множество $\bar{D}$, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, ассоциированной по Борелю с $L(z)$, есть вертикальный замкнутый отрезок длины $2\pi\tau$ с серединой в начале координат.

8. Квазиполином. Квазиполиномом называют функцию

$$P(z) = \sum_{j=1}^s A_j e^{\gamma_j z}, \quad A_j \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (2.41)$$

Это — функция первого порядка нормального типа. Ассоциированная с ней по Борелю функция $\gamma(t)$ имеет вид

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^s \frac{A_j}{t - \gamma_j}. \quad (2.42)$$

Наименьшее выпуклое замкнутое множество $\bar{D}$, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, есть многоугольник; его вершины находятся в точках из $\{\gamma_j\}$. Предположим, что все γ_j ($j = 1, 2, \dots, s$) — вершины многоугольника $\bar{D}$.

Нетрудно видеть, что

$$|P(re^{i\theta})| < A e^{h(\theta)r},$$

где

$$A = |A_1| + \dots + |A_s|,$$

$$h(\varphi) = \max |y_j| \cos(\varphi + \psi_j), \quad \psi_j = \arg y_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (2.43)$$

Очевидно, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, где $K(\varphi)$ — опорная функция $\bar{D}$.

Будем изучать расположение нулей квазиполинома $P(z)$. В процессе этого изучения получим оценку снизу для $|P(z)|$.

Если максимум в (2.43) достигается только для одного j , то при больших $|z|$ в некотором угле с биссектрисой $\arg z = \varphi$ у $P(z)$ нет нулей.

Пусть теперь

$$h(\varphi) = |y_\nu| \cos(\varphi + \psi_\nu) = |y_\mu| \cos(\varphi + \psi_\mu).$$

В этом случае прямая, соединяющая y_ν и y_μ , есть сторона многоугольника $\bar{D}$, и она перпендикулярна лучу $\arg z = -\varphi$. Пусть $\arg z = -\alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, s$) — луч, перпендикулярный стороне $[y_k, y_{k+1}]$ ($y_{s+1} = y_1$). Вне углов $|\arg z - \alpha_k| < \delta$, $\delta > 0$, при больших $|z|$ у $P(z)$ нет нулей и при некотором $B > 0$

$$|P(z)| > B e^{h(\varphi)r}, \quad (2.44)$$

$$z = r e^{i\varphi} \notin \{|\arg(z - \alpha_k)| < \delta\}, \quad |z| > r_0.$$

Пусть теперь z лежит в угле $|\arg z - \alpha_k| < \delta$. Положим $z = \omega e^{i\alpha_k}$. Тогда

$$P(z) = P_1(\omega) = \sum_{j=1}^s A_j e^{y_j' \omega}, \quad y_j' = y_j e^{i\alpha_k},$$

причем соответствующие y_k' и y_{k+1}' лежат на вертикали и среди точек y_j' они самые правые. Углу $|\arg z - \alpha_k| < \delta$ плоскости z соответствует угол $|\arg \omega| < \delta$ в плоскости ω . Положим еще

$$\delta_k = \frac{y_k' + y_{k+1}'}{2}, \quad y_j'' = y_j' - \delta_k, \quad P_2(\omega) = e^{-\delta_k \omega} P_1(\omega).$$

Получим

$$P_2(\omega) = \sum_{j=1}^s A_j e^{y_j'' \omega}.$$

Точки y_k'' и y_{k+1}'' лежат на мнимой оси, и если $y_k'' = -i\beta_k$, $\beta_k > 0$, то $y_{k+1}'' = i\beta_k$, остальные точки лежат левее мнимой оси.

Пусть $\omega = t + q$. Имеем

$$P_2(\omega) = P_3(t) = A_k e^{y_k'' t} e^{y_k'' q} + A_{k+1} e^{y_{k+1}'' t} e^{y_{k+1}'' q} + Q(t),$$

где $Q(t)$ — квазиполином с показателями из левой полуплоскости. Величину $q = q_k$ подберем так, чтобы выполнялось условие

$$A_k e^{y_k'' q} = -A_{k+1} e^{y_{k+1}'' q}$$

или

$$A_k e^{-i\beta_k q} = -A_{k+1} e^{i\beta_k q}.$$

При таком выборе будем иметь

$$P_3(t) = B_k \sin \beta_k t + Q(t), \quad (2.45)$$

где $B_k \neq 0$ и при малом $\delta > 0$ в угле $|\arg t| < \delta$

$$|Q(t)| < e^{-\delta|t|}. \quad (2.46)$$

Из представления

$$|\sin \beta_k t| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \beta_k \eta + \sin^2 \beta_k \xi} \quad (t = \xi + i\eta)$$

видно, что вне прямоугольников $G_m^{(k)}$: $|\xi - \frac{\pi m}{\beta_k}| < \varepsilon$, $|\eta| < \varepsilon$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеем

$$|\sin \beta_k t| > C_1 > 0.$$

Отсюда, согласно (2.45) и (2.46), заключаем, что вдали от начала нули $P_3(t)$ из угла $|\arg t| < \delta$ все лежат в указанных прямоугольниках, причем в каждом прямоугольнике будет только один нуль. Пусть t_m — нуль $P_3(t)$ из прямоугольника $G_m^{(k)}$. Имеем при больших m

$$t_m = \frac{\pi}{\beta_k} m + \varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < \varepsilon.$$

Так как

$$B_k \sin(\pi m + \beta_k \varepsilon_m) + Q(t_m) = 0,$$

то

$$|B_k| |\sin(\beta_k \varepsilon_m)| = |Q(t_m)|,$$

и следовательно,

$$|\varepsilon_m| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0, \quad m > m_0.$$

Итак,

$$t_m = \frac{\pi}{\beta_k} m + \varepsilon_m, \quad |\varepsilon_m| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0, \quad m > m_0. \quad (2.47)$$

Расстояние между этими нулями больше $\pi/2\beta_k$ при больших m . Вне прямоугольников $G_m^{(k)}$

$$|\sin \beta_k t| > C_2 e^{\beta_k |\eta|}, \quad C_2 > 0.$$

Поэтому, в силу (2.45) и (2.46), в угле $|\arg t| < \delta$, когда $|t|$ велик и t лежит вне $G_m^{(k)}$,

$$|P_3(t)| > C_3 e^{\beta_k |\eta|}, \quad C_3 > 0.$$

Отсюда имеем

$$|P(z)| > C_3 |e^{\delta_k \omega}| e^{\beta_k |\eta|}.$$

где

$$A = |A_1| + \dots + |A_s|, \\ h(\varphi) = \max |y_j| \cos(\varphi + \psi_j), \quad \psi_j = \arg y_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (2.43)$$

Очевидно, $h(\varphi) = K(-\varphi)$, где $K(\varphi)$ — опорная функция $\bar{D}$.

Будем изучать расположение нулей квазиполинома $P(z)$. В процессе этого изучения получим оценку снизу для $|P(z)|$.

Если максимум в (2.43) достигается только для одного j , то при больших $|z|$ в некотором угле с биссектрисой $\arg z = \varphi$ у $P(z)$ нет нулей.

Пусть теперь

$$h(\varphi) = |y_\nu| \cos(\varphi + \psi_\nu) = |y_\mu| \cos(\varphi + \psi_\mu).$$

В этом случае прямая, соединяющая y_ν и y_μ , есть сторона многоугольника $\bar{D}$, и она перпендикулярна лучу $\arg z = -\varphi$. Пусть $\arg z = -\alpha_k$ ($k = 1, 2, \dots, s$) — луч, перпендикулярный стороне $[y_k, y_{k+1}]$ ($y_{s+1} = y_1$). Вне углов $|\arg z - \alpha_k| < \delta$, $\delta > 0$, при больших $|z|$ у $P(z)$ нет нулей и при некотором $B > 0$

$$|P(z)| > B e^{h(\varphi)r}, \quad (2.44)$$

$$z = re^{i\varphi} \notin \{|\arg(z - \alpha_k)| < \delta\}, \quad |z| > r_0.$$

Пусть теперь z лежит в угле $|\arg z - \alpha_k| < \delta$. Положим $z = we^{i\alpha_k}$. Тогда

$$P(z) = P_1(w) = \sum_{j=1}^s A_j e^{y_j' w}, \quad y_j' = y_j e^{i\alpha_k},$$

причем соответствующие y_k' и y_{k+1}' лежат на вертикали и среди точек y_j' они самые правые. Углу $|\arg z - \alpha_k| < \delta$ плоскости z соответствует угол $|\arg w| < \delta$ в плоскости w . Положим еще

$$\delta_k = \frac{y_k' + y_{k+1}'}{2}, \quad y_j'' = y_j' - \delta_k, \quad P_2(w) = e^{-\delta_k w} P_1(w).$$

Получим

$$P_2(w) = \sum_{j=1}^s A_j e^{y_j'' w}.$$

Точки y_k'' и y_{k+1}'' лежат на мнимой оси, и если $y_k'' = -i\beta_k$, $\beta_k > 0$, то $y_{k+1}'' = i\beta_k$, остальные точки лежат левее мнимой оси.

Пусть $w = t + q$. Имеем

$$P_2(w) = P_3(t) = A_k e^{y_k'' q} e^{y_k'' t} + A_{k+1} e^{y_{k+1}'' q} e^{y_{k+1}'' t} + Q(t),$$

где $Q(t)$ — квазиполином с показателями из левой полуплоскости. Величину $q = q_k$ подберем так, чтобы выполнялось условие

$$A_k e^{y_k'' q} = -A_{k+1} e^{y_{k+1}'' q}$$

или

$$A_k e^{-i\beta_k q} = -A_{k+1} e^{i\beta_k q}.$$

При таком выборе будем иметь

$$P_3(t) = B_k \sin \beta_k t + Q(t), \quad (2.45)$$

где $B_k \neq 0$ и при малом $\delta > 0$ в угле $|\arg t| < \delta$

$$|Q(t)| < e^{-\delta|t|}. \quad (2.46)$$

Из представления

$$|\sin \beta_k t| = \sqrt{\sinh^2 \beta_k \eta + \sin^2 \beta_k \xi} \quad (t = \xi + i\eta)$$

видно, что вне прямоугольников $G_m^{(k)}$: $\left| \xi - \frac{m\pi}{\beta_k} \right| < \varepsilon$, $|\eta| < \varepsilon$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеем

$$|\sin \beta_k t| > C_1 > 0.$$

Отсюда, согласно (2.45) и (2.46), заключаем, что вдали от начала нули $P_3(t)$ из угла $|\arg t| < \delta$ все лежат в указанных прямоугольниках, причем в каждом прямоугольнике будет только один нуль. Пусть t_m — нуль $P_3(t)$ из прямоугольника $G_m^{(k)}$. Имеем при больших m

$$t_m = \frac{\pi}{\beta_k} m + e_m, \quad |e_m| < \varepsilon.$$

Так как

$$B_k \sin(\pi m + \beta_k e_m) + Q(t_m) = 0,$$

то

$$|B_k| |\sin(\beta_k e_m)| = |Q(t_m)|,$$

и следовательно,

$$|e_m| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0, \quad m > m_0.$$

Итак,

$$t_m = \frac{\pi}{\beta_k} m + e_m, \quad |e_m| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0, \quad m > m_0. \quad (2.47)$$

Расстояние между этими нулями больше $\pi/2\beta_k$ при больших m . Вне прямоугольников $G_m^{(k)}$

$$|\sin \beta_k t| > C_2 e^{\beta_k |\eta|}, \quad C_2 > 0.$$

Поэтому, в силу (2.45) и (2.46), в угле $|\arg t| < \delta$, когда $|t|$ велик и t лежит вне $G_m^{(k)}$,

$$|P_3(t)| > C_3 e^{\beta_k |\eta|}, \quad C_3 > 0.$$

Отсюда имеем

$$|P(z)| > C_3 |e^{\delta_k w}| e^{\beta_k |\eta|}.$$

Пусть $\Gamma_m^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, s; m=1, 2, \dots$) — прямоугольники, получаемые из $G_m^{(k)}$ сдвигом на вектор q , а затем поворотом на угол α_k . Так как

$$\delta_k = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} e^{i\alpha_k}, \quad \beta_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{2i} e^{i\alpha_k}, \quad (2.48)$$

$$e^{\beta_k | \eta |} = |e^{-i\beta_k \eta}| \quad \text{при } \eta > 0,$$

то

$$|e^{\delta_k \eta}| e^{\beta_k | \eta |} = |e^{y_k e^{i\alpha_k} \eta - y_{k+1} \eta}| = |e^{y_k z - y_{k+1} \eta}| = |e^{-y_{k+1} \eta}| e^{\delta_k | \eta |}.$$

Аналогично, в случае $\eta < 0$

$$|e^{\delta_k \eta}| e^{\beta_k | \eta |} = |e^{y_{k+1} z - y_k \eta}| = |e^{-y_k \eta}| e^{\delta_k | \eta |}.$$

Значит,

$$|P(z)| > C_4 e^{\delta_k | \eta |} |z|, \quad C_4 > 0,$$

для больших $|z|$ в угле $|\arg z - \alpha_k| < \delta_0 < \delta$ и вне прямоугольников $\Gamma_m^{(k)}$ (меньший угол пришлось взять из-за сдвига). Учитывая (2.44), окончательно получаем

$$|P(z)| > C e^{\delta | \eta |} |z|, \quad |z| > r_0,$$

$$C > 0, \quad z = r e^{i\varphi} \notin \Gamma_m^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots, s; m=1, 2, \dots). \quad (2.49)$$

Это — искомая оценка снизу.

Пусть $z_m^{(k)}$ — нуль $P(z)$, лежащий в прямоугольнике $\Gamma_m^{(k)}$, когда m велико; он соответствует нулю t_m квазиполинома $P_3(t)$ из прямоугольника $G_m^{(k)}$. Имеем

$$z = w e^{i\alpha_k} = (t + q) e^{i\alpha_k} = (t + q_k) e^{i\alpha_k} \quad (q = q_k).$$

Отсюда, на основании (2.47), получаем

$$z_m^{(k)} = (t_m + q_k) e^{i\alpha_k} = \left(\frac{\pi}{\beta_k} m + q_k + \varepsilon_m^{(k)} \right) e^{i\alpha_k}$$

или, принимая во внимание (2.48),

$$z_m^{(k)} = \frac{2\pi m i}{y_{k+1} - y_k} + q_k e^{i\alpha_k} + \varepsilon_m^{(k)} e^{i\alpha_k}, \quad |\varepsilon_m^{(k)}| < e^{-q_0 m}. \quad (2.50)$$

Используя (2.49), легко убедиться в том, что имеются кольцевые области, где имеет место аналогичная оценка.

Возьмем $\varepsilon_0 > 0$. Окружность радиуса ε_0 с центром в нуле $z_m^{(k)}$ квазиполинома $P(z)$ обозначим $C_m^{(k)}$. При малом $\varepsilon > 0$ прямоугольник $\Gamma_m^{(k)}$ будет лежать внутри $C_m^{(k)}$. Следовательно, вне $C_m^{(k)}$,

когда $|z| > r_0$, выполняется оценка (2.49). Из (2.50) видно, что если мы возьмем кольцо

$$\Gamma: R_1 \leq |z| \leq R_2, \quad R_2 - R_1 = \alpha,$$

фиксированной ширины α , то число окружностей $C_m^{(k)}$, имеющих с ним общие точки, не превосходит некоторого фиксированного числа $N(\alpha)$, не зависящего от R_1 . Уменьшив ε_0 , число окружностей $C_m^{(k)}$ при этом не увеличится. Имея это в виду, выберем ε_0 так, чтобы выполнялось условие

$$2\varepsilon_0 N(\alpha) < \frac{\alpha}{2},$$

означающее, что сумма диаметров окружностей $C_m^{(k)}$, имеющих общие точки с кольцом Γ , меньше $\alpha/2$. В силу такого выбора ε_0 в кольце Γ найдется кольцо Γ_0 ширины, не меньшей $2\rho = \frac{\alpha}{2(N(\alpha) + 1)}$, которое не имеет общих точек с окружностями $C_m^{(k)}$. Пусть $|z| = \rho$ — средняя окружность из кольца Γ_0 . Видим, что в кольце Γ_0 : $\rho - \rho \leq |z| \leq \rho + \rho$ имеет место оценка (2.49). Пусть ρ_k — соответствующее число, когда $R_1 = k\alpha$, $R_2 = (k+1)\alpha$. Имеем

$$|P(re^{i\varphi})| > C e^{\delta | \eta |},$$

$$\rho_k - \rho \leq r \leq \rho_k + \rho, \quad k > k_0, \quad \rho_{k+1} - \rho_k < 2\alpha, \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

В заключение оценим снизу производную $P'(z)$ в нулях $P(z)$, иными словами, оценим снизу $|P'(z_m^{(k)})|$.

Имеем

$$P'(z) = \sum_{j=1}^n \gamma_j A_j e^{\gamma_j z}.$$

Для $P'(z)$ величины β_k будут те же, что и для $P(z)$, но сдвиг $\bar{q}$ будет иной, он определится из равенства

$$\gamma_k A_k e^{-i\beta_k \bar{q}} = -\gamma_{k+1} A_{k+1} e^{i\beta_k \bar{q}}.$$

Получаем

$$e^{2\beta_k (\bar{q} - q)} = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \neq 1,$$

откуда

$$\bar{q} - q \neq \frac{\pi m}{\beta_k} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Обозначим $\Gamma_m^{(k)}$ соответствующие прямоугольники для $P'(z)$. Они получаются из прямоугольников $G_m^{(k)}$ сдвигом на вектор $\bar{q}$, а затем поворотом на угол α_k . Так как $\bar{q} - q \neq \pi m / \beta_k$, то при малом ε (входит в определение $G_m^{(k)}$) прямоугольники из совокупности $\{\Gamma_m^{(k)}\}$ не будут пересекаться с прямоугольниками из

совокупности $\{\tilde{\Gamma}_m^{(k)}\}$. Поэтому в прямоугольниках $\Gamma_m^{(k)}$ будет верна оценка

$$|P'(z)| > Ce^{h(\varphi)|z|}, \quad |z| > r_0.$$

В частности, получим

$$|P'(z_m^{(k)})| > Ce^{h(\varphi_m^{(k)})|z_m^{(k)}|}, \\ z_m^{(k)} = |z_m^{(k)}|e^{i\varphi_m^{(k)}}, \quad m > m_0.$$

Итак, относительно квазиполинома (2.41) можно утверждать следующее (см. [34]).

Теорема 1.2.10. Пусть $P(z)$ — квазиполином,

$$P(z) = \sum_{j=1}^s A_j e^{\gamma_j z},$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ — вершины выпуклого многоугольника $\bar{D}$. Тогда

- 1) вдали от начала координат все нули $P(z)$ — простые;
- 2) вдали от начала координат нули $P(z)$, обозначим их $z_m^{(k)}$, имеют вид

$$z_m^{(k)} = \frac{2\pi i}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} + \rho_k + \delta_m^{(k)}, \quad |\delta_m^{(k)}| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0 \\ (k = 1, 2, \dots, s; m > m_0),$$

где ρ_k — некоторые фиксированные числа;

3) вдали от начала координат расстояния между нулями больше $\beta > 0$;

4) имеет место оценка

$$|P(re^{i\varphi})| \leq Ae^{h(\varphi)r}, \quad h(\varphi) = K(-\varphi),$$

где $K(\varphi)$ — опорная функция многоугольника $\bar{D}$;

5) вне окружностей радиуса $\varrho_0 = 0$ с центрами в нулях $P(z)$ выполняется оценка

$$|P(re^{i\varphi})| > Be^{h(\varphi)r}, \quad r > r_0;$$

6) имеются числа $p > 0$ и $\rho_k \uparrow \infty$, $\rho_{k+1} - \rho_k < 2\alpha$ (α — любое фиксированное число) такие, что

$$|P(re^{i\varphi})| \geq Be^{h(\varphi)r}, \quad \rho_k - p \leq r \leq \rho_{k+1} + p, \quad k > k_0;$$

между соседними окружностями $|z| = \rho_k$ и $|z| = \rho_{k+1}$ лежит не более фиксированного числа нулей;

7) если λ_k ($k \geq 1$) — нули $P(z)$, $|\lambda_k| \uparrow \infty$, то

$$|P'(\lambda_k)| \geq Ce^{h(\varphi_k)|\lambda_k|}, \quad \lambda_k = |\lambda_k|e^{i\varphi_k}, \quad k > k_0.$$

Для дальнейшего нам понадобится знать, как расположены нули следующего специального квазиполинома:

$$P(z) = e^{\gamma_1 z} - e^{\gamma_2 z} + \dots + (-1)^{s-1} e^{\gamma_s z}. \quad (2.51)$$

Воспользуемся формулой (2.50) и тем, что $q = q_k$ находится из условия

$$e^{2i\beta_k q} = -\frac{A_k}{A_{k+1}}, \quad \beta_k = \frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{2i} e^{i\alpha_k}.$$

В случаях, когда $k < s$ или $k = s$ и s — четное, имеем

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = -1,$$

и потому можно взять $q_k = 0$. В этих случаях, следовательно,

$$z_m^{(k)} = \frac{2\pi i}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} m + \varepsilon_m^{(k)}, \quad m \geq N, \quad (2.52) \\ |\varepsilon_m^{(k)}| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0$$

(вместо $\varepsilon_m^{(k)} e^{i\alpha_k}$ мы записали $\varepsilon_m^{(k)}$).

В случае $k = s$, когда s — нечетное, имеем

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{A_s}{A_1} = 1,$$

и потому можно взять

$$q_s = \frac{\pi}{2\beta_s} = \frac{\pi i}{\gamma_1 - \gamma_s} e^{-i\alpha_s}.$$

В этом случае

$$z_m^{(s)} = \frac{2\pi i}{\gamma_1 - \gamma_s} \left(m + \frac{1}{2}\right) + \varepsilon_m^{(s)}, \quad m \geq N, \quad |\varepsilon_m^{(s)}| < e^{-q_0 m}. \quad (2.53)$$

9. Специальные бесконечные произведения. Рассмотрим выпуклый многоугольник $\bar{D}$ с вершинами в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Опорную функцию его обозначим $K(\varphi)$ и положим $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Пусть при четном p

$$\omega_m^{(k)} = \frac{2\pi i}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} m \quad (m = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, p), \quad \gamma_{p+1} = \gamma_1, \quad (2.54)$$

а при нечетном p

$$\omega_m^{(k)} = \frac{2\pi i}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} m \quad (m = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, p-1), \\ \omega_m^{(p)} = \frac{2\pi i}{\gamma_1 - \gamma_p} \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.55)$$

Положим

$$Q(z) = z^{p/2} e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{w_m^{(p)}}\right), \quad \text{если } p \text{ четное,} \quad (2.56)$$

$$Q(z) = z^{(p-1)/2} e^{\gamma z} \left(1 - \frac{z}{w_0^{(p)}}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{w_m^{(p)}}\right), \quad \text{если } p \text{ нечетное.} \quad (2.57)$$

Теорема 1.2.11. При подходящем γ функция $Q(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|Q(re^{i\varphi})| < Ae^{h(\varphi)r}, \quad (2.58)$$

кроме того, вне кружков постоянного радиуса с центрами в нулях функции $Q(z)$ имеем

$$|Q(re^{i\varphi})| > Be^{h(\varphi)r}, \quad B > 0. \quad (2.59)$$

Доказательство будет основано на сравнении $Q(z)$ с квази-полиномом

$$P(z) = e^{\gamma_1 z} - e^{\gamma_2 z} + \dots + (-1)^{p-1} e^{\gamma_p z}. \quad (2.60)$$

Нам потребуется разложение $P(z)$ в бесконечное произведение. Расположение нулей $P(z)$ было выяснено в конце предыдущего пункта.

В случаях, когда $k < p$ или $k = p$ и p четное, нули $z_m^{(k)}$ имеют вид

$$z_m^{(k)} = \frac{2\pi i}{\gamma_{k+1} - \gamma_k} m + e_m^{(k)}, \quad m \geq N, \quad |e_m^{(k)}| < e^{-q_0 m}, \quad q_0 > 0. \quad (2.61)$$

В случае $k = p$, когда p нечетное,

$$z_m^{(p)} = \frac{2\pi i}{\gamma_1 - \gamma_p} \left(m + \frac{1}{2}\right) + e_m^{(p)}, \quad |e_m^{(p)}| < e^{-q_0 m}, \quad m \geq N. \quad (2.62)$$

Положим

$$s_m = \frac{1}{z_m^{(1)}} + \frac{1}{z_m^{(2)}} + \dots + \frac{1}{z_m^{(p)}}.$$

При четном p

$$s_m = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\pi m i} + \dots + \frac{\gamma_1 - \gamma_p}{2\pi m i} + e'_m, \quad |e'_m| < e^{-q_1 m}, \quad 0 < q_1 < q_0.$$

При нечетном p

$$s_m = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\pi m i} + \dots + \frac{\gamma_p - \gamma_{p-1}}{2\pi m i} + \frac{\gamma_1 - \gamma_p}{2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right) i} + e'_m = O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

В силу этого

$$P(z) = e^{\gamma z} P_1(z) \prod_{m=N}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{z_m^{(p)}}\right),$$

где $P_1(z)$ — многочлен, степень которого будет определена несколько ниже.

Введем точки (2.54) и (2.55) и положим

$$Q(z) = e^{\gamma z} P_1(z) \prod_{m=N}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{w_m^{(p)}}\right), \quad (2.63)$$

где γ и $P_1(z)$ — те же.

Оценим отношение

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \prod_{m=1}^N \prod_{k=1}^p \frac{1 - \frac{z}{z_m^{(k)}}}{1 - \frac{z}{w_m^{(k)}}}.$$

вне кружков фиксированного радиуса ρ_0 с центрами в точках $w_m^{(k)}$. Поскольку

$$\left| \frac{z}{w_{m+1}^{(k)}} - \frac{z}{w_m^{(k)}} \right| = \frac{2\pi}{|\gamma_{k+1} - \gamma_k|},$$

будем считать, что

$$\rho_0 < \frac{1}{2} \min_k \frac{2\pi}{\gamma_{k+1} - \gamma_k}.$$

При таком выборе кружки не будут перекрываться.

Имеем

$$\frac{1 - \frac{z}{z_m^{(k)}}}{1 - \frac{z}{w_m^{(k)}}} = 1 - (z_m^{(k)} - w_m^{(k)}) \frac{z}{z_m^{(k)}(z - w_m^{(k)})}.$$

В силу (2.61) и (2.62),

$$|z_m^{(k)} - w_m^{(k)}| = |e_m^{(k)}| < e^{-q_0 m}.$$

Оценим

$$A(z) = \left| \frac{z}{z_m^{(k)}(z - w_m^{(k)})} \right|.$$

Если $|z| > 2|w_m^{(k)}|$, то $|z - w_m^{(k)}| \geq |z| - |w_m^{(k)}| > |z|/2$ и

$$A(z) < \frac{2}{|z_m^{(k)}|} < 1.$$

Если $|z| \leq 2|\omega_m^{(k)}|$, то

$$A(z) \leq \frac{2|\omega_m^{(k)}|}{\rho_0|\omega_m^{(k)}|} < \frac{3}{\rho_0}.$$

В обоих случаях $A(z) < \alpha = \max\left(1, \frac{3}{\rho_0}\right)$. Следовательно,

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| < \prod_{m=N}^{\infty} (1 + \alpha e^{-q_m})^p = C \quad (2.64)$$

вне указанных кружков.

Также покажем, что вне кружков $K_m^{(k)}$ радиуса ρ_0 с центрами в точках $z_m^{(k)}$ (если N велико, а $m \geq N$, то эти кружки не перекрываются) будет

$$\left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right| < C_1.$$

Отсюда

$$|Q(z)| < C_1 |P(z)| < C_2 e^{h(\varphi)r}, \quad z = re^{i\varphi} \notin K_m^{(k)}. \quad (2.65)$$

Убедимся, что это неравенство (может быть, с другим C_2) выполняется всюду. Для этого воспользуемся оценкой

$$|h(\varphi_1)r_1 - h(\varphi_2)r_2| \leq |z_1 - z_2| \max_{z \in \bar{D}} |z|, \quad z_j = r_j e^{i\varphi_j} \quad (j=1,2). \quad (2.66)$$

Она устанавливается так. Имеем

$$h(\varphi_1)r_1 - h(\varphi_2)r_2 = r_1 \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_1}) - r_2 \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_2}).$$

Пусть первый максимум достигается в точке z_0 . Тогда

$$\begin{aligned} h(\varphi_1)r_1 - h(\varphi_2)r_2 &\leq r_1 \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_1}) - r_2 \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_2}) = \\ &= \operatorname{Re}[z_0(z_1 - z_2)] \leq |z_1 - z_2| \max_{z \in \bar{D}} |z|. \end{aligned}$$

Аналогичное неравенство получим для $h(\varphi_2)r_2 - h(\varphi_1)r_1$, что вместе и дает (2.66).

Пусть $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0} \in K_m^{(k)}$. На основании принципа максимума модуля

$$|Q(z_0)| \leq \max_{|z - \omega_m^{(k)}| = \rho_0} |Q(z)| = |Q(z_1)|, \quad z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad |z_1 - \omega_m^{(k)}| = \rho_0.$$

Отсюда, в силу (2.65),

$$|Q(z_0)| < C_2 e^{h(\varphi)r_1} = C_2 e^{h(\varphi)r_1 - h(\varphi_0)r_0} e^{h(\varphi_0)r_0}.$$

Но, на основании (2.66),

$$h(\varphi_1)r_1 - h(\varphi_0)r_0 \leq |z_1 - z_0| \max_{z \in \bar{D}} |z| \leq 2\rho_0 \max_{z \in \bar{D}} |z| = a.$$

Поэтому

$$|Q(z_0)| < C_2 e^{h(\varphi_0)r_0}, \quad C_3 = C_2 e^a.$$

Неравенство

$$|Q(z)| < C_3 e^{h(\varphi)r} \quad (2.67)$$

теперь доказано всюду.

Из (2.64) находим, что

$$|Q(z)| > C^{-1} |P(z)| \quad (2.68)$$

вне кружков $K_m^{(k)}$ с центрами в точках $\omega_m^{(k)}$. Возьмем кружки радиуса $\rho_1 < \rho_0$ с центрами в $z_m^{(k)}$. При больших m они содержатся в кружках $K_m^{(k)}$, кроме того, вне их, согласно теореме 1.2.10, выполняется оценка

$$|P(z)| > C_4 e^{h(\varphi)r}.$$

Отсюда, в силу (2.68), получаем, что

$$|Q(re^{i\varphi})| > C_5 e^{h(\varphi)r}, \quad z = re^{i\varphi} \notin K_m^{(k)}, \quad |z| > R_0. \quad (2.69)$$

Подсчитаем теперь, чему равна степень многочлена $P_1(z)$ в представлении (2.63).

Пусть p — четное. Имеем

$$Q(z)Q(-z) = P_1(z)P_1(-z) \prod_{k=1}^p \frac{\sin \frac{y_{k+1} - y_k}{2i} z}{z \prod_{m=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z^2}{(\omega_m^{(k)})^2}\right)}.$$

В знаменателе стоит многочлен степени $2(N-1)p + p = 2Np - p$; обозначим его $R(z)$. Получаем

$$\frac{R(z)}{P_1(z)P_1(-z)} = \frac{\prod_{k=1}^p \sin \frac{y_{k+1} - y_k}{2i} z}{Q(z)Q(-z)}. \quad (2.70)$$

Индикатриса роста функции $Q(z)$ есть $h(\varphi)$, индикатриса роста функции $Q(-z)$ тогда равна $h(\varphi + \pi)$. В силу (2.69), индикатриса $Q(z)Q(-z)$ есть $H(\varphi) = h(\varphi) + h(\varphi + \pi)$. Из (2.70) следует, что индикатриса числителя из правой части (2.70) тоже есть $H(\varphi)$. Если $h_k(\varphi)$ — индикатриса $\sin \frac{y_{k+1} - y_k}{2i} z$, то

$$h_1(\varphi) + \dots + h_p(\varphi) = H(\varphi).$$

Возьмем луч l , имеющий направление, отличное от направлений прямых, на которых лежат нули $Q(z)$ и $Q(-z)$. На луче l при больших $|z|$

$$C_6 e^{H(\varphi)r} < \left| \prod_{k=1}^p \sin \frac{y_{k+1} - y_k}{2i} z \right| \leq e^{H(\varphi)r}.$$

Отсюда, на основании (2.70) и неравенств (2.67), (2.69), следует, что на луче l при больших $|z|$

$$0 < C_7 < \left| \frac{R(z)}{P_1(z)P_1(-z)} \right| < C_8.$$

Значит, степень многочлена $P_1(z)P_1(-z)$ равна степени многочлена $R(z)$. Следовательно, степень многочлена $P_1(z)$ равна $Np - p/2$. В представлении (2.63) вместо $P_1(z)$ возьмем многочлен той же степени

$$z^{p/2} \prod_{m=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p)}}\right).$$

Получим функцию (2.56), которая удовлетворяет условиям (2.58) и (2.59).

Пусть теперь p — нечетное. В этом случае

$$Q(z)Q(-z) =$$

$$= P_1(z)P_1(-z) \prod_{k=1}^{p-1} \frac{\sin \frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{2l} z}{z \prod_{m=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z^2}{(\tilde{w}_m^{(k)})^2}\right)} \cdot \prod_{m=0}^{N-1} \frac{\cos \frac{\gamma_1 - \gamma_p}{2l} z}{\left(1 - \frac{z^2}{(\tilde{w}_m^{(p)})^2}\right)}.$$

Степень многочлена, стоящего в знаменателе, равна $2(N-1) \times \times (p-1) + (p-1) + 2N = 2Np - (p-1)$. Рассуждая, как и выше, получим, что степень $P_1(z)$ равна $Np - (p-1)/2$. Заменяя в (2.63) многочлен $P_1(z)$ многочленом той же степени

$$z^{(p-1)/2} \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_1^{(1)}}\right) \prod_{m=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p)}}\right),$$

получим функцию (2.57) со свойствами (2.58) и (2.59). Теорема доказана.

Для дальнейшего наряду с функцией (2.57) нам потребуется функция

$$Q_1(z) = z^{(p-1)/2} e^{\gamma_2 z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p-1)}}\right) \left(1 - \frac{z}{\tilde{w}_m}\right), \quad (2.71)$$

где $\tilde{w}_m = \frac{2\pi i}{\gamma_1 - \gamma_p} m$.

Теорема 1.2.12. Функция $Q_1(z)$ удовлетворяет условию

$$|Q_1(re^{i\varphi})| < Ae^{h(\varphi)r},$$

кроме того, вне кружков постоянного радиуса с центрами в ну-

лях функции $Q_1(z)$ имеем

$$|Q_1(re^{i\varphi})| > Be^{h(\varphi)r/r}.$$

Для доказательства рассмотрим отношение

$$\left| \frac{Q_1(z)}{Q(z)} \right| = \frac{1}{\left| 1 - \frac{z}{\tilde{w}_0^{(p)}} \right|} \prod_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1 - \frac{z}{\tilde{w}_m}}{1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p)}}} \right|.$$

Так как

$$\left| \frac{z}{\tilde{w}_m} \right| < \left| \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p)}} \right| \quad (m \geq 1),$$

то из геометрических соображений заключаем (рассматривая $|1 - \alpha|$ как расстояние от точки 1 до точки α), что

$$\left| 1 - \frac{z}{\tilde{w}_m} \right| < \left| 1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p)}} \right|$$

в полуплоскости D_1 : $\operatorname{Re} \left(\frac{z}{\tilde{w}_m} \right) \leq 0$ (она не зависит от m). В этой полуплоскости, следовательно,

$$\left| \frac{Q_1(z)}{Q(z)} \right| < 1, \quad z \in D_1.$$

В силу получаемого из тех же соображений неравенства

$$\left| 1 - \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p)}} \right| < \left| 1 - \frac{z}{\tilde{w}_m} \right|,$$

получим

$$\left| \frac{Q(z)}{Q_1(z)} \right| < \left| 1 - \frac{z}{\tilde{w}_0^{(p)}} \right|, \quad z \in D_1. \quad (2.72)$$

В полуплоскости D_2 : $\operatorname{Re} \left(\frac{z}{\tilde{w}_m} \right) > 0$ рассматриваемое отношение представим в виде

$$\left| \frac{Q_1(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{\sin \frac{\gamma_1 - \gamma_p}{2l} z}{\cos \frac{\gamma_1 - \gamma_p}{2l} z} \right| \left| \frac{1 + \frac{z}{\tilde{w}_0^{(p)}}}{z} \right| \prod_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1 + \frac{z}{\tilde{w}_m^{(p)}}}{1 + \frac{z}{\tilde{w}_m}} \right|.$$

В D_2 бесконечное произведение меньше единицы. Вне кружков с центрами в нулях $Q(z)$ постоянного радиуса первое отношение ограничено. Значит, вне этих кружков в D_2 ограничена левая часть.

С учетом предыдущего всюду вне кружков

$$|Q_1(z)| < C|Q(z)|,$$

откуда, в силу (2.58),

$$|Q_1(re^{i\varphi})| < C_1 e^{h(\varphi)r}.$$

Это неравенство (вообще говоря, с другим C_1) будет выполняться и внутри кружков (доказательство то же, что и выше). Первая часть теоремы установлена.

Далее, имеем

$$\left| \frac{Q(z)}{Q_1(z)} \right| = |z| \left| \frac{\cos \frac{\gamma_1 - \gamma_p}{2i} z}{\sin \frac{\gamma_1 - \gamma_p}{2i} z} \right| \prod_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1 + \frac{z}{\gamma_m}}{1 + \frac{z}{\gamma_m^{(p)}}} \right|.$$

Бесконечное произведение в D_2 меньше единицы. Вне кружков K_m с центрами в γ_m первое отношение ограничено. Значит, вне этих кружков в D_2 левая часть есть $O(|z|)$. С учетом (2.72) видим, что вне кружков K_m $|Q(z)| < C_2 |z| |Q_1(z)|$, $z \notin K_m$. В силу (2.59), вне кружков K_m и вне кружков $K_m^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, p$) с центрами в нулях $Q(z)$ имеем

$$|Q_1(re^{i\varphi})| > C_3 \frac{e^{h(\varphi)r}}{r}. \quad (2.73)$$

Рассмотрим кружок $K_m^{(p)}$ с центром в $\gamma_m^{(p)} = \frac{2\pi i}{\gamma_1 - \gamma_p} \left(m + \frac{1}{2} \right)$. Если радиус его мал, то он не пересекается с кружками K_m . В кружке $K_m^{(p)}$ функция $Q(z)$ не обращается в нуль, на его границе она удовлетворяет условию (2.73). Из этого следует, что неравенство (2.73) (возможно, с другим C_3) будет выполняться и в кружке $K_m^{(p)}$ (надо использовать свойство (2.66) и то, что минимум в $K_m^{(p)}$ функции $|Q_1(z)|$ достигается на границе). Значит, неравенство (2.73) выполняется всюду вне кружков с центрами в нулях $Q_1(z)$. Теорема доказана полностью.

Теоремы 1.2.11—1.2.12 взяты из работы [37].

Теорема 1.2.13. Пусть λ_k — нули функции $Q(z)$ из теоремы 1.2.11, отличные от начала координат, μ_k — нули функции $Q_1(z)$ из теоремы 1.2.12, также отличные от начала координат. Тогда

$$|Q'(\lambda_k)| > K e^{h(\varphi_k)r_k}, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k \geq 1,$$

$$|Q'(\mu_k)| > \frac{K_1 e^{h(\varphi_k)\rho_k}}{\rho_k}, \quad \mu_k = \rho_k e^{i\varphi_k}, \quad k \geq 1.$$

Установим первое неравенство, другое доказывается аналогично. Возьмем число ρ_0 столь малое, чтобы кружки радиуса ρ_0 с центрами в λ_k ($k \geq 1$) не пересекались. Имеем

$$\left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right| \leq \max_{|z-\lambda_k|=\rho_0} \left| \frac{z-\lambda_k}{Q(z)} \right| = \frac{\rho_0}{|Q(z_0)|}, \quad |z_0 - \lambda_k| = \rho_0.$$

Отсюда, в силу (2.59), получаем (при $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$)

$$\left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right| \leq \frac{\rho_0}{B} e^{-h(\varphi_0)r_0} = \frac{\rho_0}{B} e^{h(\varphi_k)r_k - h(\varphi_0)r_0} e^{-h(\varphi_k)r_k}.$$

На основании (2.66)

$$h(\varphi_k)r_k - h(\varphi_0)r_0 \leq |\lambda_k - z_0| \max_{z \in \bar{D}} |z| = \rho_0 \max_{z \in \bar{D}} |z|,$$

в силу чего

$$\left| \frac{1}{Q'(\lambda_k)} \right| < C e^{-h(\varphi_k)r_k},$$

где C — константа. Отсюда вытекает искомое неравенство.

§ 3. Построение целых функций с заданным ростом

Здесь будут доказаны теоремы, относящиеся к построению целых функций с заданным ростом при больших $|z|$. Они являются уточнением соответствующих теорем из работы [25].

В работе [9], стр. 124, доказана теорема: каково бы ни было $\rho > 0$ и какова бы ни была тригонометрически выпуклая при этом ρ периодическая функция $h(\theta)$ с периодом 2π , существует целая функция порядка ρ с индикатором $h(\theta)$, причем эта функция является канонической функцией некоторого правильно распределенного множества при показателе ρ .

Отметим, что в этой теореме у построенной функции нули — кратные. Наша ближайшая цель — сконструировать подобную функцию с простыми нулями.

1. Построение правильно распределенного множества. Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\Delta(\psi)$ — неубывающая функция на $[0, 2\pi]$, $\Delta(0) = 0$, причем при целом ρ

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\psi} d\Delta(\psi) = 0.$$

Требуется построить правильно распределенное множество при показателе $\rho(r)$ с угловой плотностью $\Delta(\theta, \vartheta) = \Delta(\theta) - \Delta(\vartheta)$.

Приближим функцию $\Delta(\psi)$ равномерно с точностью ε_m ($\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$) кусочно постоянной функцией $\Delta_m(\psi)$ ($m=1, 2, \dots$) с конечным числом скачков, причем подберем $\Delta_m(\psi)$ так, чтобы скачки $\Delta_{m,j}$ ($j=1, 2, \dots, s_m$) выражались рациональными числами. Точки скачков обозначим $\psi_{m,j}$ ($j=1, 2, \dots, s_m$). В случае целого ρ подберем $\Delta_m(\psi)$ еще и так (см. п. 4 из § 2), чтобы удовлетворялось условие

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\psi} d\Delta_m(\psi) = 0. \quad (3.1)$$

Пусть d_m — общий знаменатель дробей $\Delta_{m,j}$, он не обязательно — наименьший. Уточним в целях дальнейшего выбор d_m . Пусть

$$\min_j \Delta_{m,j} = \frac{1}{q_m}.$$

Потребуем, чтобы было

$$d_m > q_m^2, \quad d_{m+1} > 2d_m, \quad d_{m+1} \leq d_m^2. \quad (3.2)$$

Первым двум условиям удовлетворить легко. Покажем, как удовлетворить третьему условию. Допустим, что при некотором m имеем $d_{m+1} > d_m^2$. Возьмем ряд чисел

$$\alpha_1 = d_m, \quad \alpha_2 = \alpha_1^2, \quad \alpha_3 = \alpha_2^2, \dots$$

Ясно, что найдется число $\alpha_k > d_{m+1}$. Имея это в виду, к ситуации, когда имеется функция $\Delta_m(\psi)$ и величины $\Delta_{m,j}$, d_m , мы добавим ситуацию, когда имеется функция $\Delta_m(\psi)$ и величины $\Delta_{m,j}$, α_k ($s=2, \dots, k-1$). Считая эти ситуации различными, проделав указанную процедуру для всех m , при которых $d_{m+1} > d_m^2$, и произведя соответствующие переобозначения, в результате получим, что функции $\Delta_m(\psi)$ имеют скачки $\Delta_{m,j}$ в точках $\psi_{m,j}$, причем общие знаменатели d_m (они не являются наименьшими) дробей $\Delta_{m,j}$ удовлетворяют всем трем указанным выше условиям.

Пусть $r_{m,p}$ — числа, определяемые из условия:

$$r_{m,0} = 0, \quad r_{m,p}^{(r_{m,p})} = p d_m \quad (p=1, 2, \dots).$$

В кольце $r_{m,p-1} < |z| \leq r_{m,p}$ ($p \geq 1$) возьмем $d_m \Delta_m$ ($\Delta_m = \Delta_m(2\pi)$) точек $a_{m,p}^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, d_m \Delta_m$), из них $d_m \Delta_{m,1}$ точек на луче $\arg z = \psi_{m,1}$, $d_m \Delta_{m,2}$ точек — на луче $\arg z = \psi_{m,2}$, ..., $d_m \Delta_{m,s_m}$ точек — на луче $\arg z = \psi_{m,s_m}$. Совокупность всех этих точек $a_{m,p}^{(k)}$ при фиксированном m и всевозможных $p \geq 1$ и $k=1, 2, \dots, d_m \Delta_m$ обозначим A_m .

Положим

$$r_m = d_m^{k,p} \quad (m=1, 2, \dots).$$

Числа r_m удовлетворяют условиям

$$r_{m+1}^{p/2} > 2r_m^{p/2}, \quad r_m^{p/2} > (m+1)d_{m+1} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (3.3)$$

Действительно, во-первых,

$$r_{m+1}^{p/2} = d_{m+1}^3 \geq 8d_m^3 > 2r_m^{p/2},$$

во-вторых,

$$r_m^{p/2} = d_m^3 = d_m d_m^2 \geq d_m d_{m+1} > (m+1)d_{m+1}.$$

Пусть B_m — совокупность точек из A_m , содержащихся в кольце

$$K_m: r_{m-1} < |z| \leq r_m \quad (m=2, 3, \dots).$$

Положим

$$A = \cup B_m.$$

Лемма 1.3.1. Множество A — правильно распределенное множество при показателе $\rho(r)$ с угловой плотностью $\Delta(\psi)$.

Убедимся сначала, что множество A обладает угловой плотностью. Пусть $n_m(r, \psi)$ — число точек из множества A_m в секторе $|z| \leq r$, $0 < \arg z \leq \psi$. Имеем

$$n_m(r, \psi) = \left[\frac{r^{\rho(r)}}{d_m} \right] d_m \sum_{0 < \psi_{m,j} < \psi} \Delta_{m,j} + \bar{n}_m(r, \psi),$$

где $\bar{n}_m(r, \psi)$ — число точек из A_m в области

$$\max_{r_{m,p} \leq r} r_{m,p} < |z| \leq r, \quad 0 < \arg z \leq \psi.$$

Очевидно, $\bar{n}_m(r, \psi) < d_m \Delta_m$. В силу этого

$$n_m(r, \psi) = \Delta_m(\psi) r^{\rho(r)} + c_m(r, \psi), \quad (3.4)$$

где

$$|c_m(r, \psi)| < d_m \Delta_m. \quad (3.5)$$

Пусть $n(r, \psi)$ — число точек из множества A в секторе $|z| \leq r$, $0 < \arg z \leq \psi$. Если $r_m < r \leq r_{m+1}$, то при натуральном $\tau < m$

$$n(r, \psi) = n(r_\tau, \psi) + \sum_{k=\tau+1}^m [n_k(r_k, \psi) - n_k(r_{k-1}, \psi)] + n_{m+1}(r, \psi) - n_{m+1}(r_m, \psi).$$

При заданном $\varepsilon > 0$ подберем τ так, чтобы при $k > \tau$ было

$$\Delta(\psi) - \varepsilon < \Delta_k(\psi) < \Delta(\psi) + \varepsilon, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.$$

В силу (3.4) и (3.5) при $k > \tau$

$$n_k(r_k, \psi) - n_k(r_{k-1}, \psi) < (\Delta(\psi) + \varepsilon) (r_k^{\rho(r_k)} - r_{k-1}^{\rho(r_{k-1})}) + 2d_k \Delta_k,$$

$$n_{m+1}(r, \psi) - n_{m+1}(r_m, \psi) < (\Delta(\psi) + \varepsilon) (r^{\rho(r)} - r_m^{\rho(r_m)}) + 2d_{m+1} \Delta_{m+1}.$$

Отсюда

$$n(r, \psi) < n(r_\tau, \psi) + (\Delta(\psi) + \varepsilon) \{r^{\rho(r)} - r_\tau^{\rho(r_\tau)}\} + 2(\Delta + \varepsilon) \sum_{k=\tau+1}^{m+1} d_k.$$

На основании (3.3)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \psi)}{r^{\rho(r)}} \leq \Delta(\psi) + \varepsilon.$$

Аналогично получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \psi)}{r^\rho(r)} \geq \Delta(\psi) - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \psi)}{r^\rho(r)} = \Delta(\psi).$$

В случае нецелого ρ лемма доказана.

В случае целого ρ надо еще показать, что при некотором c существует предел

$$\delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left\{ c + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_v| \leq r} a_v^{-\rho} \right\} \quad (L(r) = r^\rho(r) - \rho). \quad (3.6)$$

Предварительно отметим некоторые неравенства. Пусть $E_{m, \rho}$ — кольцо $r_{m, \rho-1} < |z| \leq r_{m, \rho}$. Имеем

$$\begin{aligned} B &= \sum_{a_{m, \rho}^{(k)} \in E_{m, \rho}} (a_{m, \rho}^{(k)})^{-\rho} = \sum_{j=1}^{x_m} \sum_{\arg a_{m, \rho}^{(k)} = \psi_{m, j}} |a_{m, \rho}^{(k)}|^{-\rho} e^{-i\rho\psi_{m, j}} = \\ &= \sum_{j=1}^{x_m} \sum_{\arg a_{m, \rho}^{(k)} = \psi_{m, j}} [r_{m, \rho}^{-\rho} e^{-i\rho\psi_{m, j}} + (|a_{m, \rho}^{(k)}|^{-\rho} - r_{m, \rho}^{-\rho}) e^{-i\rho\psi_{m, j}}] = \\ &= r_{m, \rho}^{-\rho} \sum_{j=1}^{x_m} \Delta_{m, j} e^{-i\rho\psi_{m, j}} + \sum_{j=1}^{x_m} \sum_{\arg a_{m, \rho}^{(k)} = \psi_{m, j}} (|a_{m, \rho}^{(k)}|^{-\rho} - r_{m, \rho}^{-\rho}) e^{-i\rho\psi_{m, j}}. \end{aligned}$$

Первая сумма, на основании (3.1), равна нулю. Поэтому

$$\begin{aligned} |B| &\leq \sum_{j=1}^{x_m} \sum_{\arg a_{m, \rho}^{(k)} = \psi_{m, j}} (|a_{m, \rho}^{(k)}|^{-\rho} - r_{m, \rho}^{-\rho}) < \\ &< \Delta_m d_m (r_{m, \rho-1}^{-\rho} - r_{m, \rho}^{-\rho}) < 2 \Delta_m (r_{m, \rho-1}^{-\rho} - r_{m, \rho}^{-\rho}). \end{aligned}$$

Итак, при больших m

$$\left| \sum_{a_{m, \rho}^{(k)} \in E_{m, \rho}} (a_{m, \rho}^{(k)})^{-\rho} \right| < 2 \Delta_m (r_{m, \rho-1}^{-\rho} - r_{m, \rho}^{-\rho}), \quad m \geq m_0. \quad (3.7)$$

Пусть $B_{m, \rho}$ — часть кольца $E_{m, \rho}$. Имеем

$$\left| \sum_{a_{m, \rho}^{(k)} \in B_{m, \rho} \subset E_{m, \rho}} (a_{m, \rho}^{(k)})^{-\rho} \right| < 2 \Delta_m r_{m, \rho-1}^{-\rho}, \quad m \geq m_0. \quad (3.8)$$

Неравенства (3.7) и (3.8) преобразуем, когда $E_{m, \rho}$ или $B_{m, \rho}$ входят в кольцо K_m . Имеем

$$\begin{aligned} d_m(r_{m, \rho-1}^{-\rho} - r_{m, \rho}^{-\rho}) &= d_m(r_{m, \rho-1}^{-\rho/2} - r_{m, \rho}^{-\rho/2})(r_{m, \rho-1}^{-\rho/2} + r_{m, \rho}^{-\rho/2}) < \\ &< \frac{2\Delta_m}{r_{m-1}^{-\rho/2}} (r_{m, \rho-1}^{-\rho/2} - r_{m, \rho}^{-\rho/2}). \end{aligned}$$

В силу условия (3.3), первый множитель меньше единицы. Поэтому из (3.7) находим

$$\left| \sum_{a_{m, \rho}^{(k)} \in E_{m, \rho}} (a_{m, \rho}^{(k)})^{-\rho} \right| < 2\Delta(r_{m, \rho-1}^{-\rho/2} - r_{m, \rho}^{-\rho/2}), \quad m \geq m_0. \quad (3.9)$$

Из (3.8), в силу (3.3), аналогичным образом получаем

$$\left| \sum_{a_{m, \rho}^{(k)} \in B_{m, \rho} \subset E_{m, \rho}} (a_{m, \rho}^{(k)})^{-\rho} \right| < 2\Delta r_{m, \rho-1}^{-\rho/2}, \quad m \geq m_0. \quad (3.10)$$

На основании неравенств (3.9) и (3.10) убедимся, что при некотором c действительно будет существовать предел (3.6).

Элементы множества A будем обозначать a_k . Положим

$$f(r) = \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-\rho}$$

и оценим $|f(R_2) - f(R_1)|$ при $R_1 < R_2$. Пусть E — кольцо $R_1 < |z| \leq R_2$, E_1 — совокупность колец $E_{m, \rho}$, обладающих свойством: $E_{m, \rho}$ целиком содержится в кольце K_m и $E_{m, \rho}$ целиком содержится в кольце E . Этими кольцами $E_{m, \rho}$ пусть будут кольца E_{m_i, ρ_i} ($i = 1, 2, \dots$). Будем считать, что они расположены в порядке расширения. На основании (3.9)

$$\left| \sum_{a_k \in E_1} a_k^{-\rho} \right| < 2\Delta \sum_i (r_{m_i, \rho_i-1}^{-\rho/2} - r_{m_i, \rho_i}^{-\rho/2}) < 2\Delta R_1^{-\rho/2}. \quad (3.11)$$

Рассмотрим множество $E_2 = E \setminus E_1$. Оно состоит из частей $B_{m, \rho} \subset E_{m, \rho}$; по крайней мере одна из окружностей, ограничивающих $B_{m, \rho}$, есть либо $|z| = R_1$, либо $|z| = R_2$, либо $|z| = r_k$, $R_1 < r_k < R_2$. Согласно (3.10), в первом случае

$$\left| \sum_{a_k \in B_{m, \rho}} a_k^{-\rho} \right| < 2\Delta r_{m, \rho-1}^{-\rho/2} < 4\Delta r_{m, \rho}^{-\rho/2} < 4\Delta R_1^{-\rho/2},$$

во втором случае

$$\left| \sum_{a_k \in B_{m, \rho}} a_k^{-\rho} \right| < 4\Delta r_{m, \rho}^{-\rho/2} < 4\Delta R_1^{-\rho/2},$$

в третьем случае

$$\left| \sum_{a_k \in B_{m, \rho}} a_k^{-\rho} \right| < 4\Delta r_{m, \rho}^{-\rho/2} < 4\Delta r_k^{-\rho/2}.$$

Мы здесь использовали то обстоятельство (см. ниже лемму 1.3.2), что при $m \geq m_0$

$$r_{m, p-1}^{-\rho/2} < 2r_{m, p}^{-\rho/2}.$$

В силу полученных выше оценок и оценки (3.11) получаем

$$|f(R_2) - f(R_1)| = \left| \sum_{a_k \in R} a_k^{-\rho} \right| < 10 \Delta R_1^{-\rho/2} + 4 \Delta \sum_{R_1 < r_k < R_2} r_k^{-\rho/2}.$$

Но, на основании (3.3),

$$\sum_{R_1 < r_k < R_2} r_k^{-\rho/2} < \sum_{R_1 < r_k} r_k^{-\rho/2} < R_1^{-\rho/2} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} = 2R_1^{-\rho/2}.$$

Поэтому окончательно

$$|f(R_2) - f(R_1)| < 18 \Delta R_1^{-\rho/2}. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что существует конечный предел $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r)$. Обозначим его — ρc . Имеем

$$\varphi(r) = c + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| < r} a_k^{-\rho} = -\frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| > r} a_k^{-\rho}.$$

Согласно (3.12)

$$|\varphi(r)| < 18 \frac{\Delta}{\rho} r^{-\rho/2}.$$

Учтем теперь, что $\frac{1}{L(r)} < r^e$, где $e > 0$ — любое. Значит,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{L(r)} = 0. \quad (3.13)$$

Этим доказано, что A — правильно распределенное множество. В случае $\rho(r) \equiv \rho$ имеем $L(r) \equiv 1$ и в качестве c можно взять любое число. Лемма доказана.

Для дальнейшего нам полезно отметить ряд фактов относительно поведения величин $r_{m, p}$ при больших m (величины $r_{m, p}$ и r_{m-1} были введены ранее).

Лемма 1.3.2. Пусть $r_{m, p-1} \geq r_{m-1}$. Тогда

$$1) \rho > \sqrt{d_m};$$

$$2) 1 < \frac{r_{m, p}}{r_{m, p-1}} < \frac{1}{1 - \frac{2}{\rho(p-1)}} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty;$$

$$3) \alpha_m \frac{r_{m, p-1}}{\rho p} < r_{m, p} - r_{m, p-1} < \beta_m \frac{r_{m, p}}{\rho(p-1)},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 1.$$

Установим первое утверждение. Имеем по определению

$$r_{m, p}^{\rho} = \rho d_m.$$

При больших m величина $\rho(r_{m, p}) > \rho/2$, поэтому

$$r_{m-1}^{\rho/2} < \rho d_m$$

или, поскольку $r_{m-1} = (d_{m-1})^{\rho/2}$,

$$d_{m-1}^{\rho/2} < \rho d_m.$$

Отсюда, учитывая неравенство $d_m \geq \sqrt{d_{m-1}}$, далее находим $d_m^{\rho/2} < \rho d_m$, в силу чего $\rho > \sqrt{d_m}$.

Переходим ко второму утверждению. Имеем

$$d_m = r_{m, p}^{\rho} - r_{m, p-1}^{\rho}.$$

По теореме о среднем при $r_1 < r$

$$r^{\rho}(r) - r^{\rho}(r_1) = (r - r_1) \eta^{\rho}(\eta) \left(\rho'(\eta) \ln \eta + \frac{\rho(\eta)}{\eta} \right), \quad r_1 < \eta < r.$$

В силу этого

$$d_m = (r_{m, p} - r_{m, p-1}) \eta^{\rho}(\eta) \left(\rho'(\eta) \ln \eta + \frac{\rho(\eta)}{\eta} \right), \quad r_{m, p-1} < \eta < r_{m, p},$$

откуда

$$r_{m, p} - r_{m, p-1} = \frac{\eta d_m}{\eta^{\rho}(\eta) \left(\rho'(\eta) \ln \eta + \frac{\rho(\eta)}{\eta} \right)}. \quad (3.14)$$

При больших m величина η велика, $\eta \rho'(\eta) \ln \eta$ мало, а $\rho(\eta)$ близка к ρ . Следовательно,

$$r_{m, p} - r_{m, p-1} < \frac{2d_m r_{m, p}}{\rho r_{m, p-1}^{\rho} (r_{m, p-1})} = \frac{2d_m r_{m, p}}{\rho(p-1)d_m} = \frac{2r_{m, p}}{\rho(p-1)},$$

откуда

$$\frac{r_{m, p}}{r_{m, p-1}} < \frac{1}{1 - \frac{2}{\rho(p-1)}}.$$

Осталось доказать третье утверждение. Из (3.14) находим

$$\frac{r_{m, p-1} d_m}{r_{m, p}^{\rho} (r_{m, p}) \left(\eta \rho'(\eta) \ln \eta + \rho(\eta) \right)} < r_{m, p} - r_{m, p-1} < \frac{r_{m, p} d_m}{r_{m, p-1}^{\rho} (r_{m, p-1}) \left(\eta \rho'(\eta) \ln \eta + \rho(\eta) \right)},$$

где $\eta > r_{m, p-1} \geq r_{m-1}$. Отсюда, учитывая, что

$$r_{m, p}^{\rho} = \rho d_m, \quad r_{m, p-1}^{\rho} = (p-1) d_m,$$

получаем требуемое.

2. Построение регулярного множества. Перейдем к построению регулярного множества $B = \{b_k\}$ с угловой плотностью $\Delta(\psi)$ при показателе $\rho(r)$, причем ради приложений потребуем, чтобы точки $|b_k|$ лежали вне данного множества E_0 нулевой относительной меры. При этом множество E_0 , лежащее на положительной части вещественной оси, называется *множеством нулевой относительной меры*, если при любом $r > 0$ множество $E_0 \cap [0, r]$ измеримо и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } E_0 \cap [0, r]}{r} = 0.$$

Множество B будет получено из построенного в предыдущем пункте множества A путем удаления из A некоторого множества точек с нулевой плотностью при показателе $\rho(r)$ и размещения специальным образом оставшихся точек из множества A (точки множества A на лучах $\arg z = \psi_{m, l}$ в кольцах $E_{m, p}$ располагались произвольно).

Лемма 1.3.3. Пусть E_0 — множество нулевой относительной меры и G — объединение колец $E_{m, p}$, удовлетворяющих условию: $E_{m, p}$ целиком содержится в кольце K_m и

$$\text{mes } E_0 \cap (r_{m, p-1}, r_{m, p}] \geq \frac{1}{2} (r_{m, p} - r_{m, p-1})$$

или $E_{m, p}$ пересекается с кольцом K_m , но не содержится целиком в K_m . Пусть, далее, $n_0(r)$ — число точек из множества A , которые лежат в пересечении G с кругом $|z| \leq r$. При этих условиях

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_0(r)}{r^{\rho(r)}} = 0.$$

Для доказательства обозначим через G_0 пересечение G с положительной частью вещественной оси. Убедимся, что G_0 — множество нулевой относительной меры. Множество G_0 состоит из интервалов $(r_{m, p-1}, r_{m, p}]$. Одни из этих интервалов целиком содержатся в интервале $r_{m-1} < |z| \leq r_m$, другие удовлетворяют условию: либо $r_{m, p-1} < r_{m-1} < r_{m, p}$, либо $r_{m, p-1} < r_m < r_{m, p}$. Первые интервалы образуют множество G'_0 , вторые — множество G''_0 . Очевидно, $G'_0 \cup G''_0 = G_0$.

По условию леммы

$$\text{mes } G'_0 \cap [0, r] \leq 2 \text{mes } E_0 \cap [0, r] + (r - r_{k, q-1}),$$

где $r_{k, q-1}$ — левый конец интервала $(r_{k, q-1}, r_{k, q})$ из G'_0 , который содержит точку r (если такого интервала нет, второе слагаемое в правой части отсутствует). В силу леммы 1.3.2,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r - r_{k, q-1}}{r} = 0.$$

Поэтому G'_0 — множество нулевой относительной меры. Рассмотрим множество G''_0 . Если интервал $(r_{m, p-1}, r_{m, p}]$ принадлежит G''_0 , то, согласно лемме 1.3.2, его длина удовлетворяет условию

$$r_{m, p} - r_{m, p-1} < \frac{2}{p} \frac{r_{m, p}}{p} < \frac{3}{p} \frac{r_m}{p}, \quad p > \sqrt{d_m}, \quad m > m_0.$$

Заметим, что $\sqrt{d_m} = r_m^{p/12}$ и, согласно (3.3),

$$r_{m+1} > 2^{2/p} r_m.$$

Получаем, что

$$\text{mes } G''_0 \cap [0, r] < \frac{6}{p} \sum_{r_{m, p} \leq r} r_m^{1-p/12} + (r - r_{k, q-1}).$$

Второе слагаемое добавляется тогда, когда имеется интервал $(r_{k, q-1}, r_{k, q})$ из G''_0 такой, что

$$r_{k, q-1} < r_k < r < r_{k, q}.$$

Имеем

$$\tilde{K}_r = \sum_{r_{m, p} \leq r} r_m^{1-p/12} = \sum_{r_{m, p} \leq r} \frac{r_m^{1-\alpha}}{r_m^{p/12-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \min(1, p/12),$$

откуда

$$\tilde{K}_r < r^{1-\alpha} \sum_{r_{m, p} \leq r} \frac{1}{r_m^{p/12-\alpha}} < r^{1-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_m^{\beta}}, \quad \beta = \frac{p}{12} - \alpha.$$

Ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r_m^{\beta}}$ сходится, ибо $r_{m+1} > q r_m$, $q > 1$. Из всего этого находим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } G''_0 \cap [0, r]}{r} = 0.$$

Мы доказали, таким образом, что множество G_0 имеет нулевую относительную меру.

Теперь займемся оценкой величины $n_0(r)$. В кольце $E_{m, p}$ содержится не более $d_m \Delta_m$ точек из множества A . Величины Δ_m ограничены: $\Delta_m < \mu$. По определению

$$r_m^{\rho(r_{m, p})} = p d_m,$$

откуда

$$d_m = r_m^{\rho(r_{m, p})-1} \frac{r_{m, p}}{p}.$$

По лемме 1.3.2 при больших m

$$\frac{r_{m, p}}{p} < 2\rho(r_{m, p} - r_{m, p-1}).$$

Отсюда получаем

$$d_m < 2\rho r_{m,p}^{(\rho(r_m,p)-1)} (r_{m,p} - r_{m,p-1}).$$

В силу неравенства

$$\int_{x_1}^{x_2} t^{\rho(t)-1} dt > (x_2 - x_1) \frac{x_1^{\rho(x_1)}}{x_2} > \frac{1}{2} (x_2 - x_1) x_2^{\rho(x_2)-1},$$

справедливого, когда x_2/x_1 близко к единице, имеем далее при больших m

$$d_m < 2\rho \int_{r_{m,p-1}}^{r_{m,p}} t^{\rho(t)-1} dt.$$

На основании этого

$$n_0(r) < 4\rho \int_{E_r} t^{\rho(t)-1} dt + \mu d_s, \quad E_r = G_0 \cap [0, r].$$

Слагаемое d_s надо добавлять в том случае, когда имеется интервал $(r_{s,p-1}, r_{s,p}]$ из G_0 , удовлетворяющий условию: $r_{s,p-1} < r < r_{s,p}$. Заметим, что при больших r

$$d_s = \frac{1}{\rho} r_{s,p}^{\rho(r_{s,p})} < \frac{2}{\rho} r^{\rho(r)}, \quad \rho > \sqrt{d_s}.$$

При $r \rightarrow \infty$ величина $r_{s,p} \rightarrow \infty$, в силу чего d_s , а значит, и ρ стремится к ∞ . Поэтому $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d_s}{r^{\rho(r)}} = 0$.

Оценим интеграл. Пусть $\rho > 1$ (выше было иное ρ) и $q > 1$ таковы, что $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{q} = 1$ и $(\rho - 1)\rho + 1 > 0$. Согласно неравенству Гельдера,

$$\int_{E_r} t^{\rho(t)-1} dt \leq \left(\int_{E_r} t^{[(\rho(t)-1)\rho] dt} \right)^{\frac{1}{\rho}} \left(\int_{E_r} dt \right)^{\frac{1}{q}} < (\text{mes } E_r)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r t^{[(\rho(t)-1)\rho] dt} \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Интегрируя далее по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^r t^{\rho(t)-1} dt &= \frac{1}{(\rho-1)\rho+1} t^{[(\rho(t)-1)\rho+1]} \Big|_0^r - \\ &- \frac{\rho}{(\rho-1)\rho+1} \int_0^r t^{[(\rho(t)-1)\rho]} [(\rho(t)-\rho) + t\rho'(t) \ln t] dt. \end{aligned}$$

Выражение в квадратной скобке стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Поэтому при больших r имеем

$$\int_0^r t^{[(\rho(t)-1)\rho] dt} < \frac{2}{(\rho-1)\rho+1} r^{[(\rho(r)-1)\rho+1]}.$$

Учитывая, что $\text{mes } E_r = e_r r$, где $e_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{E_r} t^{\rho(t)-1} dt < C(e_r)^{\frac{1}{q}} r^{\rho(r)},$$

где C — постоянная. На основании этого

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_0(r)}{r^{\rho(r)}} = 0.$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к построению искомого регулярного множества B . Из множества A из леммы 1.3.1 удалим точки, лежащие в множестве G из леммы 1.3.3. Получим множество, которое обозначим B . Исключенные точки по лемме 1.3.3 образуют множество нулевой плотности при показателе $\rho(r)$. Поэтому множество B имеет ту же угловую плотность, что и множество A , т. е. имеет плотность $\Delta(\psi)$ при показателе $\rho(r)$.

Каждая точка из B принадлежит некоторому $E_{m,p}$. Это кольцо $E_{m,p}$ обладает тем свойством, что оно содержится целиком в кольце K_m и

$$\text{mes } E_0 \cap (r_{m,p-1}, r_{m,p}] < \frac{1}{2} (r_{m,p} - r_{m,p-1}).$$

В рассматриваемом кольце $E_{m,p}$ содержится $d_m \Delta_m$ точек из B . Это — точки $a_{m,p}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, d_m \Delta_m$). Из них $d_m \Delta_{m,1}$ точек лежат на луче $\arg z = \psi_{m,1}$, $d_m \Delta_{m,2}$ точек — на луче $\arg z = \psi_{m,2}$, $\dots$, $d_m \Delta_{m,s_m}$ точек — на луче $\arg z = \psi_{m,s_m}$.

Множество B — правильно распределенное множество. Это очевидно в случае, когда ρ — нецелое число. Пусть теперь ρ — целое число. Верны формулы (3.9) и (3.10). Из них вытекает неравенство (3.12), где

$$f(r) = \sum_{|b_k| \leq r} b_k^{-\rho},$$

а b_k ($k = 1, 2, \dots$) — элементы множества B . На основании (3.12) существует предел $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r)$. Обозначим его — ρc . Имеем

$$\varphi(r) = c + \frac{1}{\rho} \sum_{|b_k| \leq r} b_k^{-\rho} = -\frac{1}{\rho} \sum_{|b_k| > r} b_k^{-\rho}.$$

В силу (3.12) выполняется условие (3.13). Но это и означает, что B — правильно распределенное множество.

Убедимся теперь, что при специальном выборе точек $a_{m,p}^{(k)}$ в кольце $E_{m,p}$ множество B будет регулярным множеством.

Удалим из интервала $[0, \infty)$ множество E_0 , получим некоторое множество, которое обозначим K_0 . Имеем

$$\text{mes } K_0 \cap (r_{m,p-1}, r_{m,p}] > \frac{1}{2}(r_{m,p} - r_{m,p-1}).$$

Пусть $E(t)$ — характеристическая функция множества K_0 , т. е. функция, которая равна единице в точках K_0 и равна нулю в остальных точках. Очевидно, функция

$$\int_{r_{m,p-1}}^t E(t) dt$$

является неубывающей непрерывной функцией. Имея это в виду, обозначим α_k ($k=1, 2, \dots, d_m \Delta_m$) наибольшие числа, удовлетворяющие условию

$$\int_{r_{m,p-1}}^{\alpha_1} E(t) dt = \frac{r_{m,p} - r_{m,p-1}}{3\Delta_m d_m} = \delta_{m,p},$$

$$\int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} E(t) dt = \delta_{m,p} \quad (k=2, \dots, d_m \Delta_m).$$

Имеем

$$\alpha_1 - r_{m,p-1} \geq \delta_{m,p}, \quad \alpha_k - \alpha_{k-1} \geq \delta_{m,p} \quad (k=2, \dots, d_m \Delta_m).$$

Из очевидного равенства

$$\int_{r_{m,p-1}}^{\alpha_{d_m \Delta_m}} E(t) dt = \frac{r_{m,p} - r_{m,p-1}}{3}, \quad s = d_m \Delta_m,$$

поскольку

$$\int_{r_{m,p-1}}^{r_{m,p}} E(t) dt = \text{mes } K_0 \cap (r_{m,p-1}, r_{m,p}] > \frac{1}{2}(r_{m,p} - r_{m,p-1}),$$

усматриваем, что $\alpha_k < r_{m,p} - \delta_{m,p}$. В любой близости от α_k и справа от α_k найдется точка β_k из множества K_0 . Выберем

точки β_k ($k=1, 2, \dots, d_m \Delta_m$) так, чтобы выполнялись условия

$$\beta_1 - r_{m,p-1} \geq \delta_{m,p}, \quad \beta_k - \beta_{k-1} \geq \delta_{m,p} \quad (k=2, \dots, d_m \Delta_m),$$

$$\beta_s < r_{m,p} - \delta_{m,p}, \quad s = d_m \Delta_m.$$

После этого положим

$$|a_{m,p}^{(k)}| = \beta_k \quad (k=1, 2, \dots, d_m \Delta_m),$$

причем первые из $a_{m,p}^{(k)}$ в количестве $d_m \Delta_{m,1}$ штук расположим на луче $\arg z = \psi_{m,1}$ и т. д.

При указанном выборе точек $a_{m,p}^{(k)}$ множество B становится уже регулярным множеством, т. е. его точки b_k удовлетворяют при некотором $d > 0$ условию

$$|b_{k+1}| - |b_k| > d |b_k|^{1-\rho} (|b_k|).$$

Действительно, пусть b_k лежит в кольце $E_{m,p}$. Тогда $b_k = a_{m,p}^{(k)}$ при некотором k ($1 \leq k \leq d_m \Delta_m$). Если $k < d_m \Delta_m$, то $b_{k+1} = a_{m,p}^{(k+1)}$. Если же $k = d_m \Delta_m$, то b_{k+1} лежит в другом кольце $E_{v,q}$.

В обоих случаях

$$|b_{k+1}| - |b_k| \geq \frac{r_{m,p} - r_{m,p-1}}{3\Delta_m d_m},$$

откуда, согласно лемме 2,

$$|b_{k+1}| - |b_k| > \frac{\alpha_m}{3} \frac{r_{m,p-1}}{\rho d_m \Delta_m} = \frac{\alpha_m}{3} \frac{r_{m,p-1}}{\rho \Delta_m r_{m,p}^\rho} > \frac{1}{4\rho \Delta} |b_k|^{1-\rho} (|b_k|).$$

Мы получили следующую теорему.

Теорема 1.3.1. Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\Delta(\psi)$ — неубывающая функция на $[0, 2\pi]$, $\Delta(0) = 0$, причем при целом ρ

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\psi} d\Delta(\psi) = 0.$$

Пусть затем E_0 — множество на $[0, \infty)$, имеющее нулевую относительную меру. Тогда имеется регулярное множество $B = \{b_k\}$ с угловой плотностью $\Delta(\psi)$ при показателе $\rho(r)$, его точки удовлетворяют условию

$$|b_{k+1}| - |b_k| > d |b_k|^{1-\rho} (|b_k|), \quad d > 0 (k \geq 1),$$

и $|b_k|$ лежат вне множества E_0 .

3. Построение целой функции с данным индикатором. Пусть $h(\theta)$ — периодическая с периодом 2π и тригонометрически

выпуклая функция при показателе ρ . Ее можно представить (см. § 2, п. 4) при нецелом ρ формулой (2.20)

$$h(\theta) = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) ds(\psi),$$

а при целом ρ формулой (2.21)

$$h(\theta) = -\frac{1}{2\pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - \psi) \sin \rho(\theta - \psi) ds(\psi) + A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta,$$

где $s(\theta) = h'_+(\theta) + \rho^2 \int h(\varphi) d\varphi$ и при целом ρ удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\rho\varphi} ds(\varphi) = 0.$$

Положим

$$\Delta(\theta) = \frac{s(\theta)}{2\pi\rho}. \quad (3.15)$$

По функции $\Delta(\theta)$ и показателю $\rho(r)$, согласно только что доказанной теореме, находим регулярное множество $B = \{b_k\}$ с угловой плотностью $\Delta(\theta)$ при показателе $\rho(r)$. Пусть $f(z, B)$ — каноническая функция множества B . По теореме об асимптотическом поведении канонической функции (см. § 2, п. 6) функция $f(z, B)$ имеет индикатор $H(\theta)$, который при нецелом ρ имеет вид (2.22)

$$H(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) d\Delta(\psi),$$

а при целом ρ — вид (2.23)

$$H(\theta) = - \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\psi - \theta) \sin \rho(\psi - \theta) d\Delta(\psi) + \tau_f \cos \rho(\theta - \theta_f),$$

причем τ_f и θ_f удовлетворяют условию (2.24)

$$\tau_f e^{-i\rho\theta_f} = \delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left\{ c + \frac{1}{\rho} \sum_{|b_k| < r} b_k^{-\rho} \right\} \quad (L(r) = r^{\rho(r)-\rho}).$$

При нецелом ρ , в силу выбора (3.15), имеем $H(\theta) = h(\theta)$. Таким образом, получаем следующую теорему *):

*) Эта теорема при $\rho(r) = \rho$ и теорема 1.3.2 доказаны В. Х. Мусоном в его диссертации «О представлении функций рядами $\sum c_k f(\lambda_k z)$ », Москва, 1966.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, причем $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$ — не-целое число, и $h(\theta)$ — периодическая с периодом 2π и тригонометрически выпуклая функция при показателе ρ . Тогда имеется целая функция порядка $\rho(r)$ с индикатором $h(\theta)$. Эта функция является канонической функцией некоторого регулярного множества $B = \{b_k\}$, удовлетворяющего условиям: точки $|b_k|$ ($k \geq 1$) лежат вне заданного множества E_0 нулевой относительной меры и при некотором $d > 0$

$$|b_{k+1}| - |b_k| > d |b_k|^{1-\rho} (|b_k|), \quad k \geq 1.$$

При целом ρ получим $H(\theta) = h(\theta)$, если выполняется условие

$$A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta = \operatorname{Re} \tau_f e^{i\rho(\theta - \theta_f)}, \quad (3.16)$$

или, согласно (2.24), условие

$$A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\rho\theta} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left[c + \frac{1}{\rho} \sum_{|b_k| < r} b_k^{-\rho} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

При некоторых $\rho(r)$ предел в правой части существует для единственного c . В таком случае равенство (3.17) не всегда осуществимо. По этой причине ограничимся ситуацией, когда $\rho(r) \equiv \rho$. Тогда $L(r) \equiv 1$ и указанный предел существует при любом c . Имея это в виду, подберем c так, чтобы условие (3.17) выполнялось. Тогда функция $f(z, B)$ будет иметь индикатор $h(\theta)$ при порядке $\rho(r)$. Мы доказали теорему.

Теорема 1.3.2. Пусть ρ — целое число и $h(\theta)$ — периодическая с периодом 2π и тригонометрически выпуклая функция при показателе ρ . Тогда имеется целая функция порядка ρ с индикатором $h(\theta)$. Эта функция является канонической функцией некоторого регулярного множества $B = \{b_k\}$, удовлетворяющего условиям: точки $|b_k|$ ($k \geq 1$) лежат вне заданного множества E_0 нулевой относительной меры и при некотором $d > 0$

$$|b_{k+1}| - |b_k| > d |b_k|^{1-\rho} \quad (k \geq 1).$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.3.4. Пусть $A = \{a_k\}$ — множество из § 3, п. 1, M — объединение каких-то колец $E_{m,p}$ ($E_{m,p}$ имеет общие точки с кольцом K_m), M_0 — пересечение M с положительной частью вещественной оси, $n_0(r)$ — число точек a_k , лежащих в пересечении M с кругом $|z| \leq r$. Если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_0(r)}{r^{\rho(r)}} = 0, \quad \rho(r) \equiv \rho,$$

то множество M_0 имеет нулевую относительную меру.

В кольце $E_{m,p}$ содержится $d_m \Delta_m$ точек из множества A . Имеем

$$d_m = r_{m,p}^{p-1} \frac{r_{m,p}}{p},$$

откуда, в силу леммы 1.3.2,

$$d_m > \frac{p}{2} r_{m,p}^{p-1} (r_{m,p} - r_{m,p-1}) > \frac{p}{3} \int_{r_{m,p-1}}^{r_{m,p}} t^{p-1} dt$$

и, значит,

$$\int_{r_{m,p-1}}^{r_{m,p}} t^{p-1} dt < \frac{3}{p} d_m = \frac{3}{p \Delta_m} \Delta_m d_m < \frac{4}{p \Delta} \Delta_m d_m.$$

Отсюда получаем

$$\int_{M_r} t^{p-1} dt < \frac{4}{p \Delta} n_0(r), \quad M_r = M_0 \cap [0, r].$$

В силу неравенства Гельдера (здесь p не то, что выше),

$$\int_{M_r} dt = \int_{M_r} t^{\alpha} t^{-\alpha} dt \leq \left(\int_{M_r} t^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{M_r} t^{-\alpha q} dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Выберем α столь малым по абсолютной величине, при подходящем p , чтобы было $\alpha p = p - 1$, $\alpha q < 1$. Тогда

$$\int_{M_r} dt \leq \left(\int_{M_r} t^{p-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{M_r} t^{-\alpha q} dt \right)^{\frac{1}{q}} < e_r r^{\frac{p}{p} - \frac{\alpha q + 1}{q}} = e_r \cdot r,$$

где $e_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Это и означает, что M_0 имеет нулевую относительную меру.

4. Построение регулярного подмножества. Будем обозначать A_0 множество A из леммы 1.3.1, когда $\rho(r) \equiv \rho$. В этом же случае B_0 будет обозначать множество B из теоремы 1.3.1. Речь пойдет о построении регулярного подмножества C_0 множества B_0 .

Лемма 1.3.5. Пусть задан уточненный порядок

$$\rho(r) = \rho - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}, \quad 0 < \psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

и пусть $\Delta(\theta)$ — прежняя угловая плотность. Существует регулярное подмножество C_0 множества B_0 с угловой плотностью $\Delta(\theta)$ при показателе $\rho(r)$.

Поскольку $\Delta(\psi)$ — прежняя функция, величины $\Delta_m(\psi)$, $\Delta_{m,j}$, $\psi_{m,j}$, d_m и r_m в последующем — те же, что и всюду выше. Условимся о следующем: под $r_{m,p}$ будем понимать величины, удовлетворяющие условию $r_{m,p}^p = p d_m$ (они участвуют в построении множества A_0), под $\bar{r}_{m,p}$ — величины, удовлетворяющие условию

$$\bar{r}_{m,p}^p(\bar{r}_{m,p}) = p d_m, \quad p \geq 0,$$

где $\rho(r)$ — указанный в лемме уточненный порядок.

Отметим соотношение

$$L(r) = r^{p(r)-p} = r^{-\frac{\psi(\ln r)}{\ln r}} = e^{-\psi(\ln r)} \downarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Из него следует, что в кольце $E_{m,p}$: $\bar{r}_{m,p-1} < |z| \leq \bar{r}_{m,p}$ содержится много колец $E_{m,q}$: $r_{m,q-1} < |z| \leq r_{m,q}$. В самом деле, число колец $E_{m,q}$, целиком содержащихся в кольце $\bar{E}_{m,p}$, обозначим $q_{m,p}$. Имеем $q_{m,p} = q_2 - q_1$, где q_1 и q_2 удовлетворяют условиям:

$$r_{m,q_1-1} < \bar{r}_{m,p-1} \leq r_{m,q} < r_{m,q_1} \leq \bar{r}_{m,p} < r_{m,q_1+1}.$$

Возводя в степень p , отсюда получим

$$(q_1 - 1) d_m < \frac{(p-1) d_m}{L(\bar{r}_{m,p-1})}, \quad \frac{p d_m}{L(\bar{r}_{m,p})} < (q_2 + 1) d_m.$$

Следовательно,

$$q_1 - 1 < \frac{p-1}{L(\bar{r}_{m,p-1})}, \quad q_2 + 1 > \frac{p}{L(\bar{r}_{m,p})},$$

откуда, учитывая (3.18),

$$q_{m,p} + 2 > \frac{1}{L(\bar{r}_{m,p})} \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad \bar{r}_{m,p} > r_{m-1}. \quad (3.19)$$

Найдем оценку сверху для $q_{m,p}$. Имеем

$$q_{m,p} = \frac{r_{m,q_1}^p - r_{m,q_1-1}^p}{d_m} < \frac{\bar{r}_{m,p}^p - \bar{r}_{m,p-1}^p}{d_m} = \frac{\bar{r}_{m,p} - \bar{r}_{m,p-1}}{d_m} \rho \eta^{p-1},$$

где $\bar{r}_{m,p-1} < \eta < \bar{r}_{m,p}$. Отсюда, на основании леммы 1.3.2,

$$q_{m,p} < 2\beta_m \frac{\bar{r}_{m,p}}{\rho p d_m} \rho \bar{r}_{m,p-1}^{p-1} = 2\beta_m \frac{1}{L(\bar{r}_{m,p})}.$$

Таким образом, при больших m

$$q_{m,p} < \frac{3}{L(\bar{r}_{m,p})}. \quad (3.20)$$

Для дальнейшего нам понадобится оценка снизу для $L(\bar{r}_{m,p})$. Поскольку $\bar{r}_{m,p} \leq r_m = d_m^{1/p}$, а $L(r)$ при больших r больше $r^{-\delta}$,

где $\delta > 0$ — любое, то при больших m и любом $\varepsilon > 0$

$$L(\bar{r}_{m,p}) > d_m^{-\varepsilon}, \quad r_{m-1} < \bar{r}_{m,p} \leq r_m. \quad (3.21)$$

Перейдем к построению множества C_0 . Пусть $A = \{a_k\}$ — множество из § 3, п. 1, сконструированное посредством $\Delta(\psi)$ и уточненного порядка $\rho(r)$ из настоящей леммы. Множество C_0 получится, если удалить из A некоторые точки, а оставшиеся точки выбрать из множества B_0 . Отметим, что в конструкции множества A участвуют кольца $\tilde{E}_{m,p}$, в каждом из них содержится $d_m \Delta_m$ точек из A .

В кольце $\tilde{E}_{m,p}$ содержится, как мы уже отмечали, $q_{m,p}$ колец $E_{m,q}$. Можно считать, что все точки из A , лежащие в $\tilde{E}_{m,p}$, находятся именно в этих кольцах $E_{m,q}$. Пусть P — объединение следующих колец $\tilde{E}_{m,p}$: более половины колец $E_{m,q}$, принадлежащих $\tilde{E}_{m,p}$, не содержат точек множества B_0 . Пересечение P с $[0, \infty)$ обозначим P_0 . Утверждаем, что относительная мера множества P_0 равна нулю. Пусть G — объединение колец $E_{m,q}$, не содержащих точек множества B_0 . Из построения множества B_0 усматриваем, что $E_{m,q}$ тогда не содержит точек из B_0 , когда

$$\text{mes } E_0 \cap (r_{m,q-1}, r_{m,q}) \geq \frac{1}{2} (r_{m,q} - r_{m,q-1}).$$

По лемме 1.3.3 множество лежащих в G точек из A_0 имеет нулевую плотность при показателе ρ . Теперь отметим, что количество точек из A_0 , которые лежат в пересечении P с кругом $|z| \leq r$, не больше удвоенного количества точек из A_0 , которые находятся в пересечении G с тем же кругом $|z| \leq r$. Следовательно, множество точек из A_0 , находящихся в P , имеет нулевую плотность при показателе ρ . Отсюда по лемме 1.3.4 заключаем, что множество P_0 имеет нулевую относительную меру.

Из того, что P_0 имеет нулевую относительную меру, выводим (см. доказательство леммы 1.3.3), что множество точек из A , лежащих в P , имеет нулевую плотность при показателе $\rho(r)$.

Удалим из A точки, которые лежат в P . Получим некоторое множество C_0 . Оно является правильно распределенным множеством с угловой плотностью $\Delta(\psi)$ при показателе $\rho(r)$. Все точки C_0 выберем из множества B_0 . Напомним, что в каждом кольце $\tilde{E}_{m,p}$, содержащем точки C_0 , более половины лежащих в нем колец $E_{m,q}$ имеют точки из B_0 (если $E_{m,q}$ имеет точки из B_0 , то оно имеет их $d_m \Delta_m$ штук).

Рассмотрим какое-нибудь кольцо $E_{m,q} \subset \tilde{E}_{m,p}$, в котором есть точки из B_0 . На луче $l_{m,j}$ ($\arg z = \psi_{m,j}$) в $E_{m,q}$ лежат

из B_0 точки, число которых равно $\Delta_m d_m$, они находятся друг от друга на расстоянии, не меньшем $\delta_{m,q} = (r_{m,q} - r_{m,q-1}) / (3 \Delta_m d_m)$. Для краткости обозначим на короткое время эти точки α_k ($k = 1, \dots, \Delta_m d_m$). Среди чисел $(q_{m,p} - \gamma) / 3$ ($\gamma = 0, 1, 2$) по крайней мере одно есть целое. Обозначим его $\bar{q}_{m,p}$. Пусть β_s — те точки α_k , номера которых кратны числу $\bar{q}_{m,p}$. Число точек β_s (исключая первую и последнюю) не меньше

$$\alpha_{m,j} = \frac{\Delta_m d_m}{\bar{q}_{m,p}} - 3 \geq 3 \frac{\Delta_m d_m}{q_{m,p}} - 3. \quad (3.22)$$

В силу (3.20) и (3.21),

$$\alpha_{m,j} > \frac{\Delta_m d_m}{d_m^{\frac{1}{2}}} - 3.$$

Но

$$\Delta_m d_m \geq \frac{1}{\sqrt{m}} d_m \geq \sqrt{d_m}, \quad (3.23)$$

в силу чего

$$\alpha_{m,j} > d_m^{\frac{1}{2}} - 3 > d_m^{\frac{1}{2}}$$

при достаточно малом ε и больших m . Значит, $\alpha_{m,j} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Точки вида β_s выбираем на каждом луче $l_{m,j}$ и в каждом кольце $E_{m,q}$, в котором имеются точки из B_0 . Такие точки (кроме первой и последней, которые всегда опускаем) будем называть точками типа K .

В кольце $\tilde{E}_{m,p}$ содержится $q_{m,p}$ колец $E_{m,q}$, из них более половины имеют точки из B_0 . Следовательно, на луче $l_{m,j}$ в $\tilde{E}_{m,p}$ число точек типа K будет не меньше (учитывая (3.22))

$$\alpha_{m,j} \frac{q_{m,p}}{2} \geq \left(3 \frac{\Delta_m d_m}{q_{m,p}} - 3 \right) \frac{q_{m,p}}{2} > \frac{3}{2} \Delta_m d_m - 2 q_{m,p}.$$

Первое слагаемое в правой части, в силу (3.23), больше $d_m^{\frac{1}{2}}$, а $2 q_{m,p}$ на основании (3.20) и (3.21), меньше $6 d_m^{\frac{1}{2}}$. Поэтому при больших m

$$\alpha_{m,j} \frac{q_{m,p}}{2} > \frac{1}{3} \Delta_m d_m. \quad (3.24)$$

Теперь уже все готово для конструкции искомого множества C_0 . Пусть $\tilde{E}_{m,p}$ — кольцо, в котором имеются точки из C_0 , их там $\Delta_m d_m$ штук, на луче $l_{m,j}$ этих точек — $\Delta_m d_m$ штук, и они расположены на этом луче совершенно произвольно. На луче $l_{m,j}$ ($j = 1, 2, \dots, s_m$) в кольце $\tilde{E}_{m,p}$ выбираем в качестве точек множества C_0 точки типа K в количестве $\Delta_m d_m$

штук. Такое количество точек, согласно неравенству (3.24), найдется. Указанную операцию производим в каждом кольце $\bar{E}_{m,p}$, где имеются точки из C_0 . В результате получаем множество C_0 , состоящее целиком из точек множества B_0 . Убедимся, что это множество — регулярное множество при показателе $\rho(r)$. То, что оно — правильно распределенное множество с угловой плотностью $\Delta(\psi)$ при показателе $\rho(r)$, уже доказано. Нам осталось оценить расстояние между соседними точками из C_0 . Точки множества C_0 обозначим c_k ($k \geq 1$).

Возьмем точку c_k . Она является точкой типа K и принадлежит некоторому кольцу $E_{m,q}$. В кольце $E_{m,q}$ последовательные точки типа K расположены друг от друга на расстоянии, не меньшем $\bar{q}_{m,p} \delta_{m,q}$. Поэтому, если $c_{k+1} \in E_{m,q}$, то

$$|c_{k+1}| - |c_k| \geq \bar{q}_{m,p} \delta_{m,q}. \quad (3.25)$$

Допустим теперь, что точка c_{k+1} не принадлежит $E_{m,q}$. Из способа образования точек типа K вытекает, что в $E_{m,q}$ найдется точка a , удовлетворяющая условию

$$|a| - |c_k| \geq \bar{q}_{m,p} \delta_{m,q}$$

(вспомним, что первая и последняя из точек β_k не включены в состав точек типа K). Отсюда следует, что оценка (3.25) имеет место и в этом случае (учитываем, что $|c_{k+1}| > |a|$).

Итак, оценка (3.25) выполняется в общем случае.

Из оценки (3.25), на основании (3.19), получаем

$$|c_{k+1}| - |c_k| > \frac{\delta_{m,q}}{4L(\bar{r}_{m,p})} = \frac{r_{m,q} - r_{m,q-1}}{12\Delta_m d_m L(\bar{r}_{m,p})}.$$

Принимая во внимание лемму 1.3.2, имеем

$$\frac{r_{m,q} - r_{m,q-1}}{d_m} > \alpha_m \frac{r_{m,q-1}}{\rho q d_m} = \alpha_m \frac{r_{m,q-1}}{\rho r_{m,q}^p}, \quad \alpha_m \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Учитывая еще, что

$$\bar{r}_{m,p-1} < r_{m,q-1} < |c_k| < r_{m,q} < \bar{r}_{m,p}$$

и что, согласно лемме 1.3.2,

$$\frac{\bar{r}_{m,p}}{\bar{r}_{m,p-1}} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty,$$

а также используя неравенство $L(|c_k|) > L(\bar{r}_{m,p})$, получаем

$$|c_{k+1}| - |c_k| > \frac{1}{13\rho\Delta} \frac{|c_k|}{|c_k|^p L(|c_k|)} = \frac{1}{13\rho\Delta} |c_k|^{1-p} (|c_k|), \quad k > k_0,$$

что и надо было показать.

Итак, множество C_0 — регулярное множество с угловой плотностью $\Delta(\psi)$ при показателе $\rho(r)$.

Пусть $f(z, C_0)$ — каноническая функция множества C_0 . По теореме об асимптотическом поведении канонической функции функция $f(z, C_0)$ имеет индикатор $H(\theta)$ (при показателе $\rho(r)$), который при нецелом ρ имеет форму (2.22), а при целом ρ — форму (2.23), где τ_j и θ_j находятся из соотношения

$$\tau_j e^{-i\rho\theta_j} = \delta_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left\{ c_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{|c_k| \leq r} c_k^{-\rho} \right\} \quad (L(r) = r^{\rho(\rho-1)}), \quad (3.26)$$

Согласно п. 1 (см. равенство (3.13)), величина $\delta_0 = 0$ (так как $L(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то для c_0 имеется единственное значение, именно, то, при котором $\delta_0 = 0$). Поэтому $\tau_j = 0$ и, значит,

$$H(\theta) = - \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\psi - \theta) \sin \rho(\psi - \theta) d\Delta(\psi). \quad (3.27)$$

Пусть (как и в п. 3) нам наперед задана периодическая с периодом 2π и тригонометрически выпуклая функция $h(\theta)$ при показателе ρ . Ее можно представить при нецелом ρ в форме (2.20), а при целом ρ — в форме (2.21). Пусть выполнено (3.15). Тогда при нецелом ρ будем иметь

$$h(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \psi - \pi) d\Delta(\psi), \quad (3.28)$$

а при целом ρ

$$h(\theta) = - \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\psi - \theta) \sin \rho(\psi - \theta) d\Delta(\psi) + A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta. \quad (3.29)$$

Видим, что индикатор канонической функции $f(z, C_0)$ равен $h(\theta)$ при нецелом ρ и, вообще говоря, не равен, согласно (3.27), $h(\theta)$ при целом ρ . Имея это в виду, введем функцию $h_1(\theta)$. Пусть

$$h_1(\theta) = h(\theta)$$

при нецелом ρ ,

$$h_1(\theta) = - \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\psi - \theta) \sin \rho(\psi - \theta) d\Delta(\psi) \quad (3.30)$$

при целом ρ .

Индикатор канонической функции $f(z, C_0)$ всегда равен $h_1(\theta)$. Заметим, что функция $h_1(\theta)$ принципиально определяется по функции $h(\theta)$. Действительно, по формуле (2.18) находим $s(\theta)$,

а по формуле (3.15) — угловую плотность $\Delta(\theta)$. Но тогда становится известной и функция $h_1(\theta)$. В случае $h(\theta) = \text{const}$ всегда $h_1(\theta) = h(\theta)$.

5. Построение целой функции с заданным ростом. Пусть $h(\theta)$ — периодическая с периодом 2π и тригонометрически выпуклая функция при показателе ρ . Она представляется при нецелом ρ в форме (3.28), а при целом ρ — в форме (3.29). Положим $h_1(\theta) = h(\theta)$, если ρ — нецелое, и определим $h_1(\theta)$ формулой (3.30), если ρ — целое.

Теорема 1.3.3. Пусть E_0 — множество на $(0, \infty)$ с нулевой относительной мерой, $h(\theta)$ — периодическая с периодом 2π и тригонометрически выпуклая функция при показателе $\rho > 0$, причем $h_1(\theta) > 0$ при всех θ . Пусть, далее, $\varphi(r)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \varphi(r) \uparrow \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(r)}{r^\rho} = 0.$$

Тогда существует целая функция $f(z)$ порядка ρ с индикатором $h(\theta)$, которая имеет следующую оценку сверху:

$$|f(re^{i\theta})| < M \frac{\varphi(r)}{\varphi(r)}, \quad r > 0. \quad (3.31)$$

Эта функция есть каноническая функция некоторого регулярного множества $\{d_k\}$ (оно зависит от $\varphi(r)$) при показателе ρ ; множество $\{d_k\}$ является подмножеством уже не зависящего от $\varphi(r)$ регулярного множества $B_0 = \{b_k\}$ при показателе ρ . Точки $|b_k|$ ($k \geq 1$) лежат вне множества E_0 .

Доказательство. Пусть $f(z, B_0)$ — функция из п. 3, а $f(z, C_0)$ — функция из п. 4. Первая функция определяется заданием $h(\theta)$, а вторая — заданием $h(\theta)$ и заданием уточненного порядка $\rho(r)$. Покажем, что при подходящем выборе $\rho(r)$ функция

$$f(z) = \frac{f(z, B_0)}{f(z, C_0)} \quad (3.32)$$

будет искомой.

Начнем с выбора уточненного порядка $\rho(r)$. Обозначим

$$\max_{\theta} \max \left(\frac{\ln |f(re^{i\theta}, A_0)|}{r^\rho} - h(\theta), \frac{1}{\ln r} \right) = \bar{e}_1(r), \quad \max_{t \geq r} \bar{e}_1(t) = e_1(r).$$

Очевидно, $e_1(r) \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Пусть, далее,

$$\max_{|\theta_2 - \theta_1| < r^{-\rho/2}} |h(\theta_2) - h(\theta_1)| = e_2(r).$$

Здесь $e_2(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

В формулировке теоремы участвует функция $h_1(\theta) > 0$. Пусть $h = \max |h(\theta)|$, и пусть h_2 — число, удовлетворяющее условию $0 < h_2 < \min h_1(\theta)$.

Положим

$$e(r) = \frac{1}{h_2} \left\{ \left[e_1 \left(\frac{r}{2} \right) + e_2(r) \right] (1 + r^{-\rho/2}) + h r^{-\rho/2} + \frac{\ln \varphi(r)}{r^\rho} \right\},$$

где $\varphi(r)$ — функция из доказываемой теоремы. Имеем $0 < e(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$e(r) > \frac{1}{h_2} e_1 \left(\frac{r}{2} \right) \geq \frac{1}{h_2} e_1(r) \geq \frac{1}{h_2 \ln r}.$$

Введем функцию

$$\alpha(r) = \max_{t \geq r} e(t).$$

Она удовлетворяет условиям

$$0 < \alpha(r) \downarrow 0, \quad \alpha(r) \geq \frac{1}{h_2 \ln r}.$$

По свойству 5) уточненного порядка (см. § 2, п. 1) существует уточненный порядок

$$\rho(r) = \rho - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}, \quad \psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

такой, что

$$\alpha(r) r^\rho < r^{\rho(r)}, \quad r > r_0. \quad (3.33)$$

Этот уточненный порядок мы и примем за искомый.

Имея уточненный порядок $\rho(r)$ и функцию $h(\theta)$, строим, как это было сделано в предыдущем пункте, функцию $f(z, C_0)$. Она имеет индикатор $h_1(\theta)$ при порядке $\rho(r)$. Множество C_0 — подмножество множества B_0 . Множество B_0 — регулярное при показателе ρ , множество C_0 — регулярное при показателе $\rho(r)$.

Рассмотрим функцию (3.32). Она целая. Ее нули образуют последовательность $\{d_k\} = \{b_k\} \setminus \{c_k\}$. Пусть $n_0(r)$ — число точек из $\{c_k\}$ в круге $|z| \leq r$. Имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_0(r)}{r^{\rho(r)}} < \infty.$$

Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_0(r)}{r^\rho} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_0(r)}{r^{\rho(r)}} L(r) = 0,$$

ибо $L(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, множество $\{d_k\}$ имеет при показателе ρ ту же угловую плотность, что и $\{b_k\}$, т. е. $\Delta(\theta)$. При целом ρ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ c + \frac{1}{\rho} \sum_{|b_k| \leq r} b_k^{-\rho} \right\} = \delta,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ c_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{|c_k| \leq r} c_k^{-\rho} \right\} = 0$$

(предел (3.26) равен нулю, а $L(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$). Отсюда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ (c - c_0) + \frac{1}{\rho} \sum_{|d_k| \leq r} d_k^\rho \right\} = 0. \quad (3.34)$$

Значит, множество $\{d_k\}$ — правильно распределенное множество при показателе ρ , и потому $f(z) = f(z, \{d_k\})$. Из (3.34) следует, что у $f(z)$ индикатор тот же, что и у $f(z, B_0)$, т. е. равен $h(\theta)$.

Множество $\{d_k\}$ — регулярное множество при показателе ρ . В самом деле, мы только что убедились в том, что оно правильно распределенное множество при показателе ρ . Кроме того, верно неравенство

$$|d_{k+1}| - |d_k| > d |d_k|^{1-\rho}, \quad d > 0,$$

ибо $\{d_k\}$ принадлежит регулярному множеству B_0 при показателе ρ .

Покажем, что для функции $f(z)$ имеет место оценка (3.31). Рассмотрим кружки

$$K_k: |z - c_k| < d |c_k|^{1-\rho} (|c_k|) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.35)$$

Вне этих кружков при больших r

$$|f(re^{i\theta}, C_0)| > e^{(h_1(\theta) - \varepsilon)r^\rho(r)} > e^{h_1(r)\rho(r)},$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое и $0 < h_2 < \min_{\theta} h_1(\theta)$. Так как

$$|f(re^{i\theta}, B_0)| < e^{(h_1(\theta) + \varepsilon)r^\rho(r)},$$

то, значит, вне кружков (3.35)

$$|f(re^{i\theta})| < e^{h_1(\theta)\rho} \frac{e^{\varepsilon(r)\rho}}{e^{h_2(r)\rho}}, \quad (3.36)$$

Теперь получим оценку внутри кружков (3.35). Пусть $z = re^{i\theta}$ лежит в кружке (3.35). Имеем

$$|f(re^{i\theta})| \leq \max_{t \in \Gamma_k} |f(t)| = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma_k,$$

где Γ_k — граница кружка K_k . Пусть $t_0 = re^{i\theta_0}$. На основании (3.36)

$$|f(re^{i\theta})| < e^{h_1(\theta_0)\rho} \frac{e^{\varepsilon_1(r_0)\rho}}{e^{h_2(r_0)\rho}}, \quad (3.37)$$

Правую часть (3.37) надо оценить выражением, в котором бы участвовали не r_0 , θ_0 , а r , θ .

Пусть

$$r_1 = \min_{z \in \Gamma_k} |z|, \quad r_2 = \max_{z \in \Gamma_k} |z|.$$

Имеем

$$r_2 - r_1 = 2d |c_k|^{1-\rho} (|c_k|),$$

откуда

$$\frac{r_2}{r_1} - 1 = 2d \frac{|c_k|^{1-\rho} (|c_k|)}{r_1} < 2d \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{|c_k|^\rho (|c_k|)} = 2d \frac{r_2}{r_1} e_k.$$

Очевидно, $e_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда $\frac{r_2}{r_1} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Имеем, далее,

$$r_2^\rho - r_1^\rho = \rho(r_2 - r_1) \eta^{\rho-1}, \quad r_1 < \eta < r_2,$$

откуда

$$r_2^\rho - r_1^\rho < 2\rho d |c_k|^{1-\rho} (|c_k|) \frac{r_2^\rho}{r_1} < 3\rho d \frac{r_2^\rho}{|c_k|^\rho (|c_k|)} < 4\rho d \frac{r_1^\rho}{r_1^{\rho(r_1)}} < r_1^{\rho/2},$$

ибо $\frac{r_2}{r_1} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ и $\rho(r_1) > \rho/2$. Таким образом,

$$r_2^\rho < r_1^\rho (1 + r_1^{\rho/2}). \quad (3.38)$$

Нам надо оценить еще $r_2^{\rho(r_2)} - r_1^{\rho(r_2)}$. Получаем

$$r_2^{\rho(r_2)} - r_1^{\rho(r_2)} = (r_2 - r_1) \eta^{\rho(r_2)-1} \{ \eta^{\rho'}(\eta) \ln \eta + \rho(\eta) \},$$

$$r_1 < \eta < r_2.$$

Выражение в фигурной скобке стремится к ρ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому

$$r_2^{\rho(r_2)} - r_1^{\rho(r_2)} < 2\rho \frac{r_2^{\rho(r_2)}}{r_1} (r_2 - r_1) = 4\rho d \frac{r_2^{\rho(r_2)}}{r_1} |c_k|^{1-\rho} (|c_k|) =$$

$$= 4\rho d \frac{|c_k|}{r_1} \frac{r_2^{\rho(r_2)}}{|c_k|^\rho (|c_k|)}.$$

Правая часть этого соотношения при больших k не превосходит $5\rho d$. Следовательно,

$$r_2^{\rho(r_2)} - r_1^{\rho(r_2)} < 5\rho d. \quad (3.39)$$

На основании (3.38) и (3.39) имеем

$$r_0^\rho < r^\rho (1 + r^{-\rho/2}), \quad r_0^{\rho(r_0)} > r^{\rho(r)} - 5\rho d. \quad (3.40)$$

Осталось оценить $h(\theta_0)$ через $h(\theta)$. Обозначим $2\theta_k$ угол, под которым кружок K_k виден из начала координат. Имеем

$$|\theta - \theta_0| \leq 2\theta_k, \quad \frac{2}{\pi} \theta_k < \sin \theta_k, \quad \sin \theta_k = d |c_k|^{-\rho} (|c_k|).$$

Отсюда

$$|\theta - \theta_0| < \pi d |c_k|^{-\rho} (|c_k|) < \frac{2\pi d}{r^{\rho(r)}} < r^{-\rho/2}.$$

Значит,

$$|h(\theta) - h(\theta_0)| \leq \max_{|\varphi - \theta_0| \leq r^{-\rho/2}} |h(\varphi) - h(\theta_0)| = e_2(r)$$

и

$$h(\theta_0) < h(\theta) + e_2(r). \quad (3.41)$$

Из (3.37), на основании (3.40) и (3.41), получаем

$$|f(re^{i\theta})| < M e^{h(\theta)r^\rho} \frac{e^{\delta(r)r^\rho}}{e^{h_2 r^\rho}}, \quad (3.42)$$

где

$$M = e^{2\varphi h_1}, \quad \delta(r) = \left[e_1\left(\frac{r}{2}\right) + e_2(r) \right] (1 + r^{-\rho/2}) + h r^{-\rho/2}.$$

Оценка (3.42) хуже оценки (3.36). Поэтому можно утверждать, что оценка (3.42) имеет место всюду при больших r .

На основании (3.33)

$$h_2 r^\rho > h_2 \alpha(r) r^\rho > \left\{ \left[e_1\left(\frac{r}{2}\right) + e_2(r) \right] (1 + r^{-\rho/2}) + h r^{-\rho/2} + \frac{\ln \varphi(r)}{r^\rho} \right\} r^\rho = \left\{ \delta(r) + \frac{\ln \varphi(r)}{r^\rho} \right\} r^\rho.$$

Следовательно,

$$e^{h_2 r^\rho} > e^{\delta(r)r^\rho} \varphi(r).$$

В силу этого, из (3.42) окончательно получаем

$$|f(re^{i\theta})| < M \frac{e^{h(\theta)r^\rho}}{\varphi(r)}, \quad r > r_0.$$

Последнее неравенство при подходящем M будет выполняться при $r > 0$. Теорема доказана.

При использовании доказанной теоремы надо уметь определять, когда $h_1(\theta) > 0$. В случае $\rho = 1$ можно указать эквивалентное ему геометрическое условие. Оно заключается в следующем.

Пусть $\bar{D}$ — замкнутое выпуклое множество с опорной функцией $K(\theta) = h(\theta)$. Тогда условие $h_1(\theta) > 0$ эквивалентно тому, что множество $\bar{D}$ имеет внутренние точки. В частности, условие $h_1(\theta) > 0$ будет иметь место, если $h(\theta) > 0$ при всех θ .

Доказательству этой эквивалентности посвящен следующий пункт.

6. Геометрический смысл условия $h_1(\theta) > 0$. Имеет место следующая теорема М. Картрайт [69].

Теорема 1.3.4. Пусть ρ — целое число, $A = \{a_k\}$ — правильно распределенное множество при показателе ρ , в силу

чего, в частности, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(c + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-\rho} \right) = \delta.$$

Положим

$$f(z, A) = e^{cz^\rho} \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}, \rho\right).$$

Пусть $h(\varphi)$ — индикатор функции $f(z, A)$. При этих условиях

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) e^{i\rho\varphi} d\varphi = \delta.$$

Доказательство*). Положим

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}, \rho\right)$$

и докажем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |\Pi(Re^{i\varphi})|}{R^\rho} e^{i\rho\varphi} d\varphi = \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| \leq R} \left(\bar{a}_k^{-\rho} - \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} \right). \quad (3.43)$$

Здесь $R > \theta$ — любое, лишь бы на окружности $|z| = R$ не было нулей функции $\Pi(z)$. Обозначим

$$T_{\pm} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \ln \Pi(t) \left(\frac{t^{\rho-1}}{R^{2\rho}} \pm \frac{1}{t^{\rho+1}} \right) dt.$$

Полагая $t = Re^{i\varphi}$, получим

$$T_{\pm} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln \Pi(Re^{i\varphi})}{R^\rho} \left\{ \cos \rho\varphi \pm i \sin \rho\varphi \right\} d\varphi. \quad (3.44)$$

С другой стороны, путем интегрирования по частям придем к выражению

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= \frac{1}{2\pi i \rho} \ln \Pi(Re^{i\varphi}) \left(\frac{t^\rho}{R^{2\rho}} \mp \frac{1}{t^\rho} \right) \Big|_{|t|=R} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i \rho} \int_{|t|=R} \frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)} \left(\pm \frac{1}{t^\rho} - \frac{t^\rho}{R^{2\rho}} \right) dt = \\ &= \left\{ \frac{0}{\rho R^\rho} \right\} + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| \leq R} \left(\pm a_k^{-\rho} - \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

*) Приводимое доказательство принадлежит А. Пфлюгеру [76].

где n — число точек a_k в круге $|z| < R$. При подсчете подстановки было использовано то соображение, что функция $\ln \Pi(t)$ имеет в начале координат нуль порядка не меньше $(\rho + 1)$. При подсчете интеграла по теореме о вычетах было использовано аналогичное соображение: функция $\Pi'(t)$ в начале координат имеет нуль порядка не меньше ρ .

Правые части в (3.44) и (3.45) равны. Отсюда, в частности, получаем

$$\operatorname{Re} T_+ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |\Pi(Re^{i\varphi})|}{R^\rho} \cos \rho\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \sum_{|a_k| < R} \left(a_k^{-\rho} - \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} \right),$$

$$\operatorname{Im} T_- = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |\Pi(Re^{i\varphi})|}{R^\rho} \sin \rho\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \sum_{|a_k| < R} \left(-a_k^{-\rho} - \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} \right).$$

Умножив теперь второе равенство на i и сложив с первым, найдем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |\Pi(Re^{i\varphi})|}{R^\rho} e^{i\rho\varphi} \, d\varphi = \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| < R} \left(\bar{a}_k^{-\rho} - \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} \right).$$

Равенство (3.43) установлено.

Теперь убедимся в том, что

$$\sum_{|a_k| < R} \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} d\Delta(\theta) + o(1), \quad R \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

где $\Delta(\theta)$ — угловая плотность множества $\{a_k\}$.

Пусть сначала $0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots$ — последовательность точек на положительной части вещественной оси, причем числовая функция $n(r)$ (число точек r_k в круге $|z| \leq r$) удовлетворяет условию

$$n(r) = d_0 r^\rho + o(r^\rho).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r_k \leq R} r_k^\rho &= \int_0^R t^\rho \, dn(t) = R^\rho n(R) - \rho \int_0^R t^{\rho-1} n(t) \, dt = \\ &= \frac{1}{2} d_0 R^{2\rho} + o(R^{2\rho}), \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

При той же числовой функции $n(r)$ пусть теперь точки $z_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ расположены в угле $|\arg z - \theta| \leq \delta$. В силу неравенства

$$|e^{i\rho\varphi_\nu} - e^{i\rho\theta}| \leq \rho |\varphi_\nu - \theta| \leq \rho\delta,$$

получаем тогда

$$\sum_{|z_\nu| < R} z_\nu^\rho = \frac{1}{2} d_0 R^{2\rho} e^{i\rho\theta} + O(d_0 \delta R^{2\rho}) + o(R^{2\rho}), \quad (3.47)$$

$$|\arg z_\nu - \theta| \leq \delta.$$

Рассмотрим множество $\{a_k\}$. Разобьем плоскость на n углов с вершинами в начале координат раствора меньше δ . Стороны углов — лучи $\arg z = \theta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Выберем их так, чтобы в каждом угле множество $\{a_k\}$ имело плотность. Если угол имеет стороны $\arg z = \theta_j$ и $\arg z = \theta_{j+1}$, то плотность множества $\{a_k\}$ в нем равна $d_0 = \Delta(\theta_{j+1}) - \Delta(\theta_j)$.

На основании (3.47)

$$\sum_{|a_k| < R} a_k^\rho = \frac{1}{2} R^{2\rho} \sum_j e^{i\rho\theta_j} [\Delta(\theta_{j+1}) - \Delta(\theta_j)] + O(\delta \Delta R^{2\rho}) + o(n R^{2\rho}),$$

где $\Delta = \Delta(2\pi) - \Delta(0)$. Отсюда

$$\sum_{|a_k| < R} a_k^\rho = \frac{1}{2} R^{2\rho} \int_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} d\Delta(\theta) + O(\delta \Delta R^{2\rho}) + o(n R^{2\rho}).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем δ столь малым, чтобы второй член в правой части равенства был по модулю меньше $\varepsilon R^{2\rho}$. Выбрав так δ и зафиксировав n , возьмем теперь R_0 столь большим, чтобы последний член в правой части равенства был меньше $\varepsilon R^{2\rho}$ при $R > R_0$. В результате получим, что

$$\left| \sum_{|a_k| < R} \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} d\Delta(\theta) \right| < 2\varepsilon, \quad R > R_0.$$

Тем самым соотношение (3.46) установлено.

С помощью соотношений (3.43) и (3.46) уже нетрудно доказать теорему. По условию множество $\{a_k\}$ — правильно распределенное множество. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} d\Delta(\theta) = 0$$

и, значит, в силу (3.46),

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|a_k| < R} \frac{a_k^\rho}{R^{2\rho}} = 0.$$

На основании этого из (3.43) получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |\Pi(Re^{i\varphi})|}{R^\rho} e^{i\rho\varphi} d\varphi = \frac{1}{\rho} \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{|a_k| \leq R} \bar{a}_k^{-\rho} \quad (3.48)$$

(предел правой части существует, поэтому предел левой существует, и они равны). Имеем далее

$$f(z, A) = e^{cz} \Pi(z).$$

Прямой подсчет показывает, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |\varphi(Re^{i\varphi})|}{R^\rho} e^{i\rho\varphi} d\varphi = \bar{c}, \quad \varphi(z) = e^{cz}.$$

Сложив это равенство с равенством (3.48), получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\ln |f(Re^{i\varphi}, A)|}{R^\rho} e^{i\rho\varphi} d\varphi = \bar{\delta}. \quad (3.49)$$

Имеются окружности $|z| = R_k$, $0 < R_k \uparrow \infty$, на которых (см. § 2, п. 6, следствие 1) равномерно относительно φ

$$\frac{\ln |f(Re^{i\varphi}, A)|}{R^\rho} \rightarrow h(\varphi), \quad R = R_k, \quad k \rightarrow \infty.$$

Пусть в соотношении (3.49) $R \rightarrow \infty$, принимая значения R_k . Тогда левая часть в (3.49) будет равна

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) e^{i\rho\varphi} d\varphi$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) e^{i\rho\varphi} d\varphi = \bar{\delta}.$$

Теорема доказана.

На основании этой теоремы выясним в случае $\rho = 1$ геометрический смысл условия $h_1(\theta) > 0$.

Пусть $h(\theta)$ — тригонометрически выпуклая при показателе ρ периодическая функция с периодом 2π . По теореме 1.3.2 имеется целая функция порядка ρ с индикатором $h(\theta)$, причем эта функция является канонической функцией $f(z, A)$ некоторого регулярного множества $\Lambda = \{a_k\}$ при показателе ρ . По

теореме 1.3.4 тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) e^{i\rho\theta} d\theta = \bar{\delta}. \quad \bar{\delta} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[c + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| < r} a_k^{-\rho} \right]. \quad (3.50)$$

Заметим, что, в силу (3.29) и (3.30),

$$h(\theta) = h_1(\theta) + A \cos \rho\theta + B \sin \rho\theta = h_1(\theta) + \tau_1 \cos \rho(\theta - \theta_1),$$

причем, согласно (3.16) и (2.24),

$$\tau_1 e^{-i\rho\theta_1} = \bar{\delta}.$$

Функция $h(\theta)$ имеет всюду производную слева $h'(\theta - 0)$, производную справа $h'(\theta + 0)$, имеет почти всюду производную $h'(\theta)$. Положим

$$h'(\theta) = \frac{h'(\theta - 0) + h'(\theta + 0)}{2}, \quad z(\theta) = \left[h(\theta) + \frac{i}{\rho} h'(\theta) \right] e^{i\rho\theta}. \quad (3.51)$$

На основании (3.50)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(\theta) d\theta = \bar{\delta}. \quad (3.52)$$

Предположим теперь, что $\rho = 1$. Проведем прямые

$$l_\theta: x \cos \theta + y \sin \theta - h(\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (3.53)$$

Они огибают некоторое ограниченное выпуклое множество $\bar{E}$, которое называется *индикаторной диаграммой* данной функции $f(z, A)$. Прямая (3.53) является опорной прямой множества $\bar{E}$. Она соприкасается с $\bar{E}$ как раз в точке $z(\theta)$. При наличии разрыва у $h'(\theta)$ в точке θ точка $z(\theta)$ является серединой отрезка с концами $z(\theta - 0)$ и $z(\theta + 0)$. В случае, если $\bar{E}$ — многоугольник, точки $z(\theta)$ есть вершины многоугольника и середины его сторон. В случае, если каждая опорная прямая соприкасается с $\bar{E}$ только в одной точке, точка $z(\theta)$ при изменении θ от 0 до 2π описывает всю границу множества $\bar{E}$. В общем случае точки $z(\theta)$ образуют некоторое множество Γ на границе $\bar{E}$. Сосредоточим на множестве Γ массу величины 2π . Формула (3.52) показывает, что $\bar{\delta}$ — центр тяжести множества Γ .

Отсюда следует, что в том случае, когда множество $\bar{E}$ имеет внутренние точки ($\bar{E}$ отлично от точки и отрезка), точка $\bar{\delta}$ лежит строго внутри $\bar{E}$. Докажем это. Ясно, что точка $\bar{\delta}$ не может лежать вне $\bar{E}$. Надо, следовательно, показать, что $\bar{\delta}$ не совпадает ни с одной граничной точкой множества $\bar{E}$. Пусть a_0 —

какая-нибудь граничная точка множества $\bar{E}$. Не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что эта точка совпадает с началом координат, а выпуклое множество $\bar{E}$ лежит в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Положим

$$z(\theta) = r_\theta e^{i\psi_\theta}.$$

Возьмем точку $z(0) = r_0 e^{i\psi_0}$. Это — точка, в которой правая вертикальная опорная прямая l_0 соприкасается с $\bar{E}$. Ясно, что $|\psi_0| < \pi/2$.

Рассмотрим опорную прямую l_θ при малом θ , $0 < \theta < \pi/2$. Пусть $\bar{l}_\theta$ — прямая, параллельная l_0 и проходящая через точку $z(0)$, A_0 — точка пересечения $\bar{l}_\theta$ с мнимой осью. Поскольку множество $\bar{E}$ — ограниченное, точка A_0 при малом θ лежит выше множества $\bar{E}$. Из этого следует, что при малом θ опорная прямая l_θ пересекается с мнимой осью в точке, не принадлежащей $\bar{E}$. Значит, при малых $\theta > 0$ имеем $0 < \psi_\theta < \pi/2$. Пусть θ_0 — одно из таких θ . Имеем $0 < \theta_0 < \pi/2$, $r_{\theta_0} > 0$. Точка $z(\theta)$ с $0 \leq \theta \leq \theta_0$ лежит правее точки $z(\theta_0)$. Поэтому

$$r_\theta \cos \psi_\theta \geq r_{\theta_0} \cos \psi_{\theta_0}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0.$$

Отсюда, учитывая еще, что при любых θ выполняется неравенство $|\psi_\theta| \leq \pi/2$, получаем

$$\operatorname{Re} \bar{\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} z(\theta) d\theta \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta_0} r_\theta \cos \psi_\theta d\theta \geq \theta_0 r_{\theta_0} \cos \psi_{\theta_0} > 0.$$

Следовательно, точка $\bar{\delta}$ отлична от начала координат.

Мы показали в итоге, что в случае, когда $\bar{E}$ имеет внутренние точки, точка $\bar{\delta}$ — внутренняя точка множества $\bar{E}$.

Исходя из того, что $\bar{\delta}$ — внутренняя точка $\bar{E}$, покажем, что $h_1(\theta) > 0$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z, A) e^{-\delta z}, \quad \delta = \tau_f e^{-i\theta_f}.$$

Для нее индикатор равен

$$h(\theta) - \tau_f \cos(\theta - \theta_f) = h_1(\theta),$$

соответствующая величина δ , обозначим ее δ_1 , равна

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ c_1 + \sum_{|a_v| < r} a_v^{-1} \right\} = 0, \quad c_1 = c - \delta,$$

индикаторная диаграмма $\bar{E}_1$ получается из $\bar{E}$ сдвигом на вектор $-\delta$. Согласно формуле (3.52),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_1(\theta) d\theta = \bar{\delta}_1 = 0, \quad z_1(\theta) = [h_1(\theta) + i h_1'(\theta)] e^{i\theta}.$$

иными словами, центр тяжести соответствующего множества Γ_1 находится в начале координат. Значит, начало координат является внутренней точкой множества $\bar{E}_1$. Отсюда получаем, что

$$h_1(\theta) > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (3.54)$$

Обратно, если выполняется условие (3.54), то у множества $\bar{E}_1$ (следовательно, и у множества $\bar{E}$) имеются внутренние точки. Таким образом,

Теорема 1.3.5. Для того чтобы выполнялось условие (3.54), необходимо и достаточно, чтобы индикаторная диаграмма $\bar{E}$, построенная с помощью функции $h(\theta)$, имела внутренние точки.

Эта теорема отмечена в работе [25].

Обратим внимание на следующий факт. Индикаторная диаграмма $\bar{E}$ имеет опорную функцию $h(\theta)$. Ранее мы рассматривали постоянно ограниченное выпуклое замкнутое множество $\bar{D}$ с опорной функцией $K(\theta) = h(-\theta)$. Множество $\bar{D}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности функции $y(t)$, ассоциированной по Борелю с $f(z, A)$. Множества $\bar{D}$ и $\bar{E}$ симметричны относительно вещественной оси. Поэтому, если $\bar{E}$ имеет внутренние точки, то и $\bar{D}$ имеет внутренние точки, и наоборот. К этому еще добавим, что вместо задания $h(\theta)$ можно задавать $\bar{D}$ как произвольное замкнутое выпуклое ограниченное множество. По этому множеству будет определяться однозначно функция $h(\theta)$.

В свете этих фактов теорему 1.3.3 в случае $p=1$ можно сформулировать и в следующем виде.

Теорема 1.3.6. Пусть $\bar{D}$ — ограниченная замкнутая выпуклая область, имеющая внутренние точки, $K(\theta)$ — ее опорная функция, $h(\theta) = K(-\theta)$. Пусть, далее, $\varphi(r)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \varphi(r) \uparrow \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(r)}{r} = 0.$$

Тогда существует целая функция $f(z)$ первого порядка с индикатором $h(\theta)$, которая имеет следующую оценку сверху:

$$|f(re^{i\theta})| < M \frac{e^{h(\theta)r}}{\varphi(r)}, \quad r > 0.$$

Эта функция есть каноническая функция некоторого регулярного множества $\{d_k\}$ (оно зависит от $\varphi(r)$) при показателе $\rho=1$; множество $\{d_k\}$ является подмножеством уже не зависящего от $\varphi(r)$ регулярного множества $B=\{b_k\}$ при показателе $\rho=1$. Точки $|b_k| (k \geq 1)$ лежат вне заданного множества E_0 нулевой относительной меры. Если $d_k = r_k e^{i\theta_k}$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |f'(d_k)| > [h(\theta_k) - \varepsilon] r_k, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

Последнее заключение следует из второй части теоремы 1.2.6.

Замечание. Рассмотрим выпуклую область D_0 специального вида, описанную в замечании после теоремы 1.2.4. Она ограничена дугой γ , отрезками лучей l_1 и l_2 (эти лучи наклонены к вещественной оси под углами ψ_0 и $-\psi_0$, $0 < \psi_0 < \pi/2$) и вертикальным отрезком l_0 длины q_0 , причем $q_0/2\pi$ — рациональное число. Пусть $s(\psi)$ — функция, соответствующая области D_0 и $\Delta(\psi) = s(\psi)/2\pi$. Согласно указанному замечанию функцию $\Delta(\psi)$ можно приблизить (см. п. 4 из § 2) равномерно с точностью до $q_m (q_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty)$ кусочно постоянной функцией $\Delta_m(\psi)$ с конечным числом скачков, причем скачки будут выражаться рациональными числами, и они будут в точке $\psi=0$ и в точках $\psi_{m,j}$, $|\psi_{m,j}| \geq \psi_0 + \pi/2$. Из этого будет следовать, если проследить процесс построения регулярного множества B_0 , что в множестве B_0 не будет точек, лежащих в углах $0 < |\arg z| < \psi_0 + \pi/2$. Следовательно, в ситуации, когда область $\bar{D}$ есть область $\bar{D}_0$, можно считать, что функция $f(z)$ из теоремы 1.3.6 не имеет нулей в углах $0 < |\arg z| < \psi_0 + \pi/2$. То, что $q_0/2\pi$ — рациональное число, для окончательного ответа не существенно. Действительно, пусть q_0 имеет произвольное значение. Подберем $\alpha > 0$ так, чтобы число $q_0/2\pi\alpha$ было рациональным. Область, которая получается из $\bar{D}_0$ преобразованием подобия с коэффициентом $1/\alpha$, обозначим $\bar{D}_1$. Она имеет такой же вид, как и область $\bar{D}_0$, но у нее вертикальная часть границы есть отрезок длины $q_1 = q_0/\alpha$, причем $q_1/2\pi$ — рациональное число. Соответствующую области $\bar{D}_1$ целую функцию обозначим $f_1(z)$. Она не имеет нулей в углах $0 < |\arg z| < \psi_0 + \pi/2$. Пусть $\gamma_1(z)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f_1(z)$. Имеем

$$\gamma_1(t) = \int_0^\infty f_1(z) e^{-zt} dz.$$

Отсюда

$$\gamma_0(t) = \gamma_1\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \alpha \int_0^\infty f_1(\alpha z) e^{-zt} dz.$$

Наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности $\gamma_0(t)$, есть $\bar{D}_0$. Следовательно, функция $f_0(z) = \alpha f_1(\alpha z)$ будет иметь нужную индикатрису роста $h_0(\varphi)$, она обладает всеми свойствами, указанными в теореме 1.3.6. Кроме того она не имеет нулей в углах $0 < |\arg z| < \psi_0 + \pi/2$.

§ 4. Функции вполне регулярного роста

1. Определение функции вполне регулярного роста. Свойства. Относительной мерой множества E положительных чисел называется предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } E^r}{r},$$

где E^r — пересечение E с интервалом $(0, r)$.

Целая функция уточненного порядка $\rho(r)$ называется *целой функцией вполне регулярного роста*, если можно указать такое множество E_0 нулевой относительной меры, что при $r \notin E_0$ и $r \rightarrow \infty$ функция

$$\frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}}$$

равномерно стремится к $h_1(\theta)$.

Имеет место следующая основная теорема, принадлежащая А. Пфлюгеру.

Теорема 1.4.1. Если целая функция $f(z)$ уточненного порядка $\rho(r)$ является функцией вполне регулярного роста, то для всех значений θ и $\theta (\theta < \theta)$, за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\frac{1}{2\pi\rho} s(\theta, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \theta, \theta)}{r^{\rho(r)}},$$

причем

$$s(\theta, \theta) = h_1'(\theta) - h_1'(\theta) + \rho^2 \int_0^\theta h_1(\varphi) d\varphi.$$

Исключительное счетное множество может состоять лишь из точек, в которых $h_1'(\theta + 0) \neq h_1'(\theta - 0)$. В случае целого ρ , кроме того, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{L(r)} \left\{ c_\rho + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_k| \leq r} a_k^{-\rho} \right\}.$$

где a_k — нули $f(z)$, отличные от начала координат, c_p — коэффициент при z^p в многочлене $P(z)$ представления

$$f(z) = z^{m_p} e^{P(z)} \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}, p\right), \quad P(z) = c_p z^p + \dots + c_0.$$

Заметим, что функция $h_f(\theta)$ может не иметь производной самое большее в счетном числе точек.

Мы видим, что множество нулей $A = \{a_k\}$ функции $f(z)$ вполне регулярного роста является правильно распределенным. При этом функция $f(z)$ отличается от канонической функции $f(z, A)$ множества A только множителем $z^{m_p} Q(z)$, где $Q(z)$ — многочлен степени, меньшей p . Этот множитель не влияет на индикатор, так что у $f(z)$ и $f(z, A)$ одинаковые индикаторы при порядке $p(r)$.

Можно высказать следующее утверждение.

Теорема 1.4.2. Для того чтобы целая функция $f(z)$ указанного порядка $p(r)$ была функцией вполне регулярного роста, необходимо и достаточно, чтобы множество ее корней было правильно распределенным.

Замечание. Поскольку функция вполне регулярного роста отличается от соответствующей канонической функции $f(z, A)$ не существенным в смысле роста множителем $z^{m_p} Q(z)$ (степень $Q(z)$ меньше p), то для функции вполне регулярного роста верны теоремы 1.2.5 и 1.2.6, а также следствия из них и замечания (см. § 2, п. 6).

Отметим еще следующую теорему.

Теорема 1.4.3. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — целые функции порядка $p(r)$ с индикаторами $h(\theta)$ и $H(\theta)$, причем одна из этих функций вполне регулярного роста, то индикатор произведения $f(z)\varphi(z)$ равен сумме $h(\theta) + H(\theta)$.

2. Функции класса A и вполне регулярного роста. Говорят, что целая функция $f(z)$ принадлежит классу A , если выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} \right| < \infty,$$

где a_k — нули $f(z)$.

Имеется ряд условий, принадлежащих М. Картрайт, Б. Я. Левину и А. Пфлюгеру, при которых целая функция $f(z)$ является функцией класса A и вполне регулярного роста при порядке $p(r) \equiv 1$. Отметим эти условия в виде следующей сводной теоремы.

Теорема 1.4.4. Если целая функция $f(z)$ экспоненциального типа удовлетворяет какому-нибудь из условий:

а) существует интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{1+x^2} dx$$

и

$$h_f(0) = h_f(\pi) = 0;$$

б) существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |f(x)|}{1+x^2} dx;$$

в)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |f(x)|}{1+x^2} dx < \infty;$$

г) $|f(x)|$ ограничен на вещественной оси;

д) $|f(x)| \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$,

то

1) функция $f(z)$ — класса A , вполне регулярного роста при порядке $p(r) \equiv 1$ и ее индикаторная диаграмма есть отрезок мнимой оси;

2) все корни функции $f(z)$, за исключением, быть может, множества нулевой плотности, лежат внутри сколь угодно малых углов $|\arg z| < \varepsilon$ и $|\arg z - \pi| < \varepsilon$, причем плотность

$$\Delta_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_i(t)}{t} \quad (i=1,2)$$

множества нулей внутри каждого из этих углов равна $d/2\pi$, где d — длина индикаторной диаграммы.

В условиях теоремы существует предел

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E_0}} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r} = h_f(\varphi),$$

где E_0 — некоторое множество нулей относительной меры. Докажем, что

Теорема 1.4.5. Для почти всех φ существует обычный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r} = h_f(\varphi). \quad (4.1)$$

Возьмем угол $0 < \alpha < \varphi < \beta < \pi$ (или симметричный угол из нижней полуплоскости) и обозначим b_k ($k=1, 2, \dots$) нули $f(z)$

из этого угла. Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|b_k|} < \infty.$$

Положим

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right).$$

Это — целая функция нулевого типа при порядке $\rho = 1$. Рассмотрим функцию

$$K(z) = \frac{f(z)}{F(z)}.$$

Функция $K(z)$, как и $f(z)$, — функция вполне регулярного роста и имеет ту же индикатрису роста, что и $f(z)$. В угле (α, β) она, кроме того, не имеет нулей. Поэтому существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |K(re^{i\varphi})|}{r} = h_f(\varphi), \quad \alpha < \varphi < \beta.$$

Для доказательства (4.1) достаточно доказать, что для почти всех φ имеется предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(re^{i\varphi})|}{r} = 0.$$

Доказательство последнего факта принадлежит Альфорсу и Хейнсу [63], установившим даже несколько более сильное утверждение.

Поскольку очевидно, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |F_1(re^{i\varphi})|}{r} = 0, \quad \alpha < \varphi < \beta, \quad F_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right).$$

то достаточно доказать, что для почти всех φ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |B(re^{i\varphi})|}{r} = 0, \quad B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - z/b_k}{1 + z/b_k}.$$

Переходя от верхней полуплоскости к правой, докажем, что для почти всех φ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |B(re^{i\varphi})|}{r} = 0, \quad B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - z/a_k}{1 + z/a_k}, \quad (4.2)$$

где $a_k (k=1, 2, \dots)$ расположена в угле $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \varphi < \beta < \frac{\pi}{2}$

и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-1} < \infty$.

Убедимся сначала, что

$$h_0(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |B(re^{i\varphi})|}{r}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

— измеримая функция. Положим

$$h_k(\varphi) = \min_{k < r < k+1} \frac{\ln |B(re^{i\varphi})|}{r} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Функция $h_k(\varphi)$ непрерывна на $[-\pi/2, \pi/2]$ кроме, может быть, конечного числа точек, в которых она обращается в $-\infty$. Поэтому $h_k(\varphi)$ — измеримая функция. Имеем

$$h_0(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(\varphi).$$

Известно (см., например, [56], стр. 87), что нижний предел последовательности измеримых функций, имеющих почти всюду конечные значения, есть измеримая функция. Следовательно, $h_0(\varphi)$ — измеримая функция. Поскольку

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |B(re^{i\varphi})|}{r} = 0,$$

надо показать, что измеримое множество, где $h_0(\varphi) < 0$, имеет меру нуль. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что измеримое множество, где $h_0(\varphi) \leq -2\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — любое), имеет меру нуль.

Пусть δ ($0 < \delta < 1$) — фиксированное число и $E(\delta, \varepsilon)$ — множество значений θ таких, что $h_0(\theta) \leq -2\varepsilon$ и $\cos \theta > \delta$. Если $\theta \in E(\delta, \varepsilon)$, то имеется бесконечно много точек $r_k e^{i\theta}$ ($0 < r_k \uparrow \infty$), удовлетворяющих условию

$$\ln |B(r_k e^{i\theta})| < -\varepsilon r_k,$$

откуда

$$\ln |B(r_k e^{i\theta})| < -\varepsilon x_k, \quad x_k = \operatorname{Re}(r_k e^{i\theta}). \quad (4.3)$$

Основываясь на (4.3), мы и покажем, что $\operatorname{mes} E(\delta, \varepsilon) = 0$.

Предварительно установим несколько соотношений. Положим

$$g(z, s) = \ln \left| \frac{z+s}{z-s} \right|, \quad \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} s > 0.$$

Функция

$$\varphi(z) = \frac{z+s}{z-s}$$

отображает правую полуплоскость на внешность единичного круга. Поэтому $g(z, s) \geq 0$. Имеют место следующие соотношения:

$$1) \quad g(\lambda z, \lambda s) = g(z, s) = g\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{s}\right), \quad \lambda > 0,$$

$$2) \quad g(z, s) \leq g(e^{i\theta} z, e^{i\theta} s), \quad \theta = \arg z, \quad \varphi = \arg s,$$

3) если $z = x + iy = re^{i\theta}$, $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $s = \rho e^{i\varphi}$, то при $r > r_0$, $x > \delta r$, $0 < \delta < 1$,

$$\frac{g(z, s)}{g(z_0, s)} \leq C(\delta) \frac{x}{x_0} \{g(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) + 1\},$$

где $C(\delta)$ зависит только от δ .

Соотношение 1) очевидно. Для вывода 2) запишем равенство

$$\left| \frac{re^{i\theta} + \rho e^{i\varphi}}{re^{i\theta} - \rho e^{i\varphi}} \right|^2 = \frac{r^2 + 2\rho r \cos(\theta + \varphi) + \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + \rho^2}$$

(чтобы получить $|a|^2$, надо a умножить на $\bar{a}$). Положим $r/\rho = t$. Тогда правая часть равенства может быть переписана в виде

$$\frac{t + t^{-1} + 2 \cos(\theta + \varphi)}{t + t^{-1} - 2 \cos(\theta - \varphi)} = 1 + \frac{4 \cos \theta \cos \varphi}{t + t^{-1} - 2 \cos(\theta - \varphi)}.$$

Второе слагаемое в правой части имеет наибольшее значение, если $(t + t^{-1})$ имеет наименьшее значение, т. е. при $t = 1$ или $r = \rho$. По свойству 1), таким образом,

$$g(z, s) \leq g(re^{i\theta}, \rho e^{i\varphi}) = g(e^{i\theta}, e^{i\varphi}).$$

Докажем 3). Достаточно рассмотреть случай $|s| \geq |z_0|$, ибо при $|s| < |z_0| \leq |z|$ надо применить 3) к функциям $g\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{s}\right)$ и учесть 1).

Когда $|s| \geq |z_0|$, имеем

$$g(z_0, s) = -\frac{1}{2} \ln \left\{ 1 - \frac{4x_0 u}{|z_0 + s|^2} \right\} \geq \frac{2x_0 u}{|z_0 + s|^2} \geq \frac{x_0 u}{2|s|^2}, \quad (4.4)$$

$$s = u + iv,$$

$$g(z, s) = \frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \frac{4xu}{|z - s|^2} \right\} \leq \frac{2xu}{|z - s|^2}. \quad (4.5)$$

Если $|z - s| \geq \delta \frac{|s|}{2}$, неравенство (4.5) дает

$$g(z, s) \leq 8 \frac{xu}{\delta^2 |s|^2}$$

и, значит,

$$g(z, s) \leq \frac{8xu}{\delta^2 |s|^2} [g(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) + 1]. \quad (4.6)$$

Если $|z - s| < \delta \frac{|s|}{2}$ или $|z^{-1} - s^{-1}| < \frac{1}{2} \frac{\delta}{|z|}$, имеем

$$\frac{u}{|s|^2} \geq \frac{x}{|z|^2} - \frac{\delta}{2|z|} \geq \frac{\delta|z|}{|z|^2} - \frac{\delta}{2|z|} \geq \frac{\delta^2}{2x},$$

откуда, основываясь на 2), усматриваем, что неравенство (4.6) имеет место и в этом случае.

Из неравенств (4.4) и (4.6) вытекает соотношение 3).

Перейдем к доказательству того, что $\text{mes } E(\delta, \epsilon) = 0$. Предположим противное: $\text{mes } E(\delta, \epsilon) = m > 0$. Введем функцию $\omega(\theta)$, которая равна $1/m$ при $\theta \in E(\delta, \epsilon)$ и равна нулю для остальных θ . Очевидно,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \omega(\theta) d\theta = 1.$$

Пусть $\theta \in E(\delta, \epsilon)$. Согласно (4.3),

$$-\ln |B(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} g(z, a_n) > \epsilon x, \quad z = r_k e^{i\theta} \quad (k \geq 1).$$

В силу 3),

$$g(z, a_n) \leq C(\delta) g(z_0, a_n) \frac{x}{x_0} \{g(e^{i\theta}, e^{i\varphi_n}) + 1\},$$

$$r = r_k > r_0, \quad \varphi_n = \arg a_n.$$

Кроме того,

$$g(e^{i\theta}, e^{i\varphi_n}) = \ln \left| \frac{e^{i\theta} + e^{-i\varphi_n}}{e^{i\theta} - e^{i\varphi_n}} \right| \leq \ln \frac{2}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi_n}|}.$$

Поэтому получаем

$$\epsilon x_0 < C(\delta) \sum_{n=1}^{\infty} g(z_0, a_n) \ln \frac{2e}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi_n}|}. \quad (4.7)$$

Умножим обе части на $\omega(\theta) d\theta$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Будем иметь

$$\epsilon x_0 < C(\delta) \sum_{n=1}^{\infty} g(z_0, a_n) \left\{ \ln(2e) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi_n}|} \omega(\theta) d\theta \right\},$$

откуда

$$\epsilon x_0 < C(\delta) \{-\ln |B(z_0)|\} \left\{ \ln(2e) + \sup_{\theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi}|} \omega(\theta) d\theta \right\}. \quad (4.8)$$

Здесь θ — произвольная точка из $E(\delta, \epsilon)$, а z_0 — произвольная точка из правой полуплоскости. В угле $\beta < \theta < \pi/2$ нет точек a_n .

Поэтому

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{\ln |B(r_0 e^{i\theta_0})|}{r_0} = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\ln |B(r_0 e^{i\theta_0})|}{x_0} = 0, \quad \beta < \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Пусть в (4.8) точка $z_0 \rightarrow \infty$ по лучу $\arg z = \theta_0$. Получим, что

$$\sup_{\varphi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi}|} \omega(\theta) d\theta = \infty.$$

Но это невозможно, ибо при $m > 0$ указанная верхняя грань не превосходит

$$\frac{1}{m} \sup_{\varphi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{i\varphi}|} d\theta < \infty.$$

Следовательно, $m = \text{mes } E(\delta, \varepsilon) = 0$. В силу произвольности ε и δ заключаем, что почти всюду имеет место равенство (4.2). Все доказано.

3. Пример функции класса A . Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_a^b e^{izt} d\sigma(t), \quad (4.9)$$

где $[a, b]$ — интервал вещественной оси и $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Функция $F(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, и она по модулю ограничена на вещественной оси. Следовательно, $F(z)$ — из класса A и вполне регулярного роста. Ее индикаторная диаграмма — отрезок мнимой оси. Постараемся определить концы этого отрезка.

Функция $\sigma(t)$ может иметь на $[a, b]$ счетное множество точек разрыва. Само значение $\sigma(a)$ функции $\sigma(t)$ во внутренней точке разрыва a никакого значения на величину интеграла (4.9) не оказывает. Поэтому мы можем значения $\sigma(a)$ функции $\sigma(t)$ во внутренних точках разрыва a назначать по своему усмотрению. Будем считать, что $\sigma(a)$ равно пределу $\sigma(t)$ при стремлении t к a слева. При этом условии пусть $[a_1, b_1]$ — наименьший интервал, содержащийся в $[a, b]$ и обладающий свойством: функция $\sigma(t)$ постоянна в $[a, a_1]$ и постоянна в $[b_1, b]$. Если подобного интервала $(b_1, b]$ не найдется, считаем $b_1 = b$. Так же может быть, что $a_1 = a$.

Если $a_1 = b_1$, то $F(z) = Ae^{iza}$. Этот случай нас не интересует. Будем предполагать, что $a_1 < b_1$. При $b_1 < b$ функцию $\sigma(t)$

в точке b_1 изменим, положив ее равной пределу $\sigma(t)$ при стремлении t к b_1 справа. Имеем

$$F(z) = \int_{a_1}^{b_1} e^{izt} d\sigma(t).$$

Точки a_1 и b_1 обладают свойством: в любых окрестностях этих точек функция $\sigma(t)$ не является постоянной.

В силу сказанного, будем предполагать, что уже точки a и b обладают тем свойством, что в любых их окрестностях $\sigma(t)$ не постоянна. При этом условии *наименьшее выпуклое замкнутое множество $\bar{D}$, содержащее все особенности функции, ассоциированной по Борелю с $F(z)$, есть вертикальный отрезок мнимой оси $[ia, ib]$ (индикаторная диаграмма $F(z)$ симметрична с $\bar{D}$ относительно вещественной оси)*. Это — теорема Поля (см. [67], стр. 109). Докажем ее.

Поскольку $a < b$, функция $F(z)$ имеет бесконечно много нулей. Действительно, если бы она не имела бесконечно много нулей, то она имела бы вид

$$F(z) = e^{az} P(z),$$

где a вещественно и $P(z)$ — многочлен. Из ограниченности $|F(z)|$ на вещественной оси выводим, что $P(z) = A = \text{const}$. Следовательно,

$$F(z) = \int_a^b e^{izt} d\sigma_1(t),$$

где $\sigma_1(t)$ всюду постоянна кроме точки $t = a$, в которой имеет скачок A . Вычитая из (4.9) последнее равенство, получим

$$\int_a^b e^{izt} [d\sigma(t) - d\sigma_1(t)] = \int_a^b e^{izt} d[\sigma(t) - \sigma_1(t)] = 0.$$

Значит, $\sigma(t) - \sigma_1(t) = \text{const}$, чего не может быть.

Пусть z_0 — какой-нибудь нуль $F(z)$. Запишем

$$F(z) = \int_a^b e^{t(z-z_0)} e^{iz_0 t} d\sigma(t).$$

Положим

$$v(t) = - \int_a^z e^{t(z-\eta)} d\sigma(\eta).$$

все корни функции $F(z)$, за исключением, быть может, множества нулевой плотности, лежат внутри сколь угодно малых углов $|\arg z| < \varepsilon$ и $|\arg z - \pi| < \varepsilon$, причем плотность

$$\Delta_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_i(t)}{t} \quad (i=1,2)$$

множества нулей внутри каждого из углов равна $\frac{b-a}{2\pi}$; имеются число $\rho > 0$ и числа r_k , $0 < r_k \uparrow \infty$, $\frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |F(re^{i\theta})| > [h_F(\theta) - \varepsilon]r, \quad r_k - \rho \leq r \leq r_k + \rho, \quad k > K(\varepsilon).$$

РЯДЫ ДИРИХЛЕ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ *)

§ 1. Начальные сведения

1. Преобразование Абеля. При исследовании вопроса о сходимости рядов Дирихле используют следующую формулу:

$$\sum_{n=p}^q A_n B_n = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) C_n + B_q C_q, \quad (1.1)$$

где A_n и B_n — любые величины, $C_n = A_p + \dots + A_n$.

Чтобы доказать (1.1), отметим равенства

$$A_p = C_p, \quad A_n = C_n - C_{n-1} \quad \text{при } n > p.$$

В силу этого

$$\sum_{n=p}^q A_n B_n = B_p C_p + B_{p+1} (C_{p+1} - C_p) + \dots + B_q (C_q - C_{q-1}).$$

Раскрывая скобки и группируя иначе члены, получим искомую формулу

$$\sum_{n=p}^q A_n B_n = (B_p - B_{p+1}) C_p + \\ + (B_{p+1} - B_{p+2}) C_{p+1} + \dots + (B_{q-1} - B_q) C_{q-1} + B_q C_q,$$

которая и называется *преобразованием Абеля*.

2. Аналог леммы Абеля. Будем рассматривать ряд Дирихле

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad (1.2)$$

у которого показатели λ_n положительны, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Покажем, что если ряд (1.2) сходится в точке z_0 , то он сходится (вообще говоря, не абсолютно) в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0;$$

*) Некоторые простые сведения, излагаемые здесь, содержатся в книгах И. Ибрагимова [6], С. Мандельброята [45], А. И. Маркушевича [47]. Значительная же часть сведений содержится в монографии В. Бернштейна [65]. Существенный раздел, посвященный рядам Дирихле с показателями, имеющими плотность, дается в новом изложении.

в каждом секторе

$$|\arg(z - z_0)| \leq \theta < \pi/2 \quad (1.3)$$

он сходится равномерно.

Для доказательства применим к выражению

$$\sum_{n=p}^q a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=p}^q a_n e^{-\lambda_n z_0} \cdot e^{-\lambda_n (z-z_0)}$$

преобразование Абеля (1.1) с

$$A_n = a_n e^{-\lambda_n z_0}, \quad B_n = e^{-\lambda_n (z-z_0)}.$$

Имеем

$$B_n - B_{n+1} = (z - z_0) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-(z-z_0)\lambda} d\lambda,$$

откуда, полагая $z = x + iy$, получим

$$|B_n - B_{n+1}| \leq |z - z_0| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-(x-x_0)\lambda} d\lambda = \\ = \frac{|z - z_0|}{x - x_0} [e^{-(x-x_0)\lambda_n} - e^{-(x-x_0)\lambda_{n+1}}].$$

По условию ряд (1.2) сходится в точке z_0 . Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что при любых n и p , удовлетворяющих условию

$$n > p > N,$$

будет

$$|C_n| = \sum_{m=p}^n A_m < \varepsilon.$$

Используя формулу (1.1), в случае, когда z находится в секторе (1.3), будем иметь

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \varepsilon \frac{|z - z_0|}{x - x_0} e^{-(x-x_0)\lambda_p} \leq \frac{\varepsilon}{\cos \theta} e^{-(x-x_0)\lambda_p}, \quad (1.4)$$

что доказывает равномерную сходимость ряда в секторе (1.3). Из этого, конечно, следует, что ряд (1.2) сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$ и в этой полуплоскости его сумма $f(z)$ — аналитическая.

3. О единственности разложения функции в ряд Дирихле. Положим

$$K = \max_n \left| \sum_{h=2}^n a_h e^{-\lambda_h z_0} \right|.$$

Подобно тому, как получили (1.4), найдем, что в секторе (1.3)

$$\left| \sum_{n=2}^q a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \frac{K}{\cos \theta} e^{-(x-x_0)\lambda_2},$$

откуда

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \frac{K}{\cos \theta} e^{-(x-x_0)\lambda_2}.$$

На основании этого в секторе (1.3)

$$|f(z)| \leq |a_1 e^{-\lambda_1 z}| + \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \right| < |a_1| e^{-\lambda_1 x} + \frac{K}{\cos \theta} e^{-(x-x_0)\lambda_2} = \\ = e^{-\lambda_1 x} \left[|a_1| + \frac{K}{\cos \theta} e^{x_0 \lambda_2} e^{-x(\lambda_2 - \lambda_1)} \right]$$

и одновременно

$$|f(z)| > |a_1 e^{-\lambda_1 z}| - \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \right| > e^{-\lambda_1 x} \left[|a_1| - \frac{K}{\cos \theta} e^{x_0 \lambda_2} e^{-x(\lambda_2 - \lambda_1)} \right].$$

Выражение в квадратных скобках из первого неравенства при больших x меньше $3|a_1|/2$, а из второго — больше $|a_1|/2$. Следовательно, в секторе (1.3) при больших x сумма ряда Дирихле удовлетворяет неравенству

$$\frac{|a_1|}{2} e^{-\lambda_1 x} < |f(z)| < \frac{3|a_1|}{2} e^{-\lambda_1 x}, \quad (1.5)$$

Воспользуемся (1.5) для доказательства единственности разложения функции в ряд Дирихле. Если бы одновременно имели

$$f(z) = \sum_1 a_n e^{-\lambda_n z}, \quad f(z) = \sum_2 b_n e^{-\lambda_n z},$$

причем, например, $b_1 \neq a_1$, то для ряда, представляющего разность двух указанных рядов, согласно (1.5), получили бы

$$0 > \frac{|b_1 - a_1|}{2} e^{-\lambda_1 x},$$

что невозможно.

4. Абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости ряда Дирихле. Из предыдущего следует, что ряд Дирихле или всюду сходится, или всюду расходится, или существует такая конечная величина c , что ряд Дирихле сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > c$ и расходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) < c$. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > c$ называется *полуплоскостью сходимости*, прямая $\operatorname{Re}(z) = c$ — *прямой сходимости*, а величина c — *абсциссой*

сходимости ряда Дирихле. Если ряд сходится всюду, полагают $c = -\infty$, а если ряд всюду расходится, полагают $c = +\infty$.

В отличие от ряда Тейлора, где круг сходимости совпадает с кругом абсолютной сходимости, у ряда Дирихле полуплоскость сходимости, вообще говоря, не совпадает с полуплоскостью абсолютной сходимости.

Если ряд (1.2) абсолютно сходится в точке z_0 , то из неравенств

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| \leq |a_n e^{-\lambda_n z_0}|, \quad \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$$

следует, что ряд абсолютно и равномерно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$. Следовательно, ряд Дирихле или сходится абсолютно во всей плоскости, или нигде не сходится абсолютно, или существует такая величина a , что ряд абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$ и не сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a$. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$ называется *полуплоскостью абсолютной сходимости*, прямая $\operatorname{Re} z = a$ — *прямой абсолютной сходимости* и величина a — *абсциссой абсолютной сходимости* ряда Дирихле. Если ряд всюду сходится абсолютно, полагают $a = -\infty$, если он нигде не сходится абсолютно, полагают $a = +\infty$.

Ряд

$$\sum (-1)^n e^{-\lambda_n z}, \quad \lambda_n = \ln \ln n,$$

сходится как знакопеременный ряд при $z = x > 0$ и расходится в точке $z = 0$, поэтому его абсцисса сходимости $c = 0$. Поскольку при любом $x > 0$ и достаточно больших n

$$|e^{-\lambda_n x}| = \frac{1}{(\ln n)^x} > \frac{1}{n},$$

абсцисса абсолютной сходимости $a = +\infty$.

Между абсциссами a и c , очевидно, выполняется соотношение

$$c \leq a.$$

Если $a < +\infty$, то при любом $\varepsilon > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > a + \varepsilon$ ряд сходится равномерно. Нижнюю грань r множества чисел a таких, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$ ряд сходится равномерно, назовем *абсциссой равномерной сходимости* ряда Дирихле. Имеем $r \leq a$. Вместе с тем, очевидно, $c \leq r$. Поэтому окончательно имеем

$$c \leq r \leq a.$$

Теорема 2.1.1. Если существует конечный верхний предел

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}, \quad (1.6)$$

то

$$a - c \leq L.$$

В самом деле, пусть ряд Дирихле сходится в точке z_0 , покажем, что он абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0 + L$. Положим $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0 + L + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Выберем положительное $\varepsilon_1 < \varepsilon$. В силу (1.6),

$$\lambda_n > \ln n \frac{1}{L + \varepsilon_1}, \quad n > N,$$

и потому при $n > N$

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| = |a_n e^{-\lambda_n z_0} e^{-\lambda_n (z - z_0)}| < < |a_n e^{-\lambda_n z_0}| e^{-\lambda_n (L + \varepsilon)} < M \frac{1}{n^\mu}, \quad \mu = \frac{L + \varepsilon}{L + \varepsilon_1} > 1.$$

Отсюда и вытекает требуемое.

Граница L для разности $a - c$ является точкой в том смысле, что существуют ряды, для которых эта разность в точности равна L . Например, для ряда

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n^x} = \sum (-1)^n e^{-\ln n x} \\ L = 1, \quad c = 0, \quad a = 1.$$

Следствие. В случае $L = 0$ абсциссы простой и абсолютной сходимости совпадают.

Валирон [86] доказал утверждение.

Теорема 2.1.2. В случае $L = 0$ абсцисса сходимости ряда может быть вычислена по формуле

$$a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) аналогична формуле Коши — Адамара для определения радиуса сходимости рядов Тейлора.

Положим

$$\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} \quad (1.8)$$

и покажем, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$ ряд сходится, а в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \alpha$ — расходится.

Пусть $\operatorname{Re} z = \alpha + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), и пусть положительные числа ε_1 и ε_2 таковы, что $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и $\varepsilon_2 < \varepsilon - \varepsilon_1$. Из условия (1.8) и условия $L = 0$ следует, что при больших n

$$|a_n| < e^{(\alpha + \varepsilon_1) \lambda_n}, \quad \lambda_n > \ln(n^{1/\varepsilon_2}),$$

и потому

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| < |e^{(\alpha + \varepsilon_1 - \beta) \lambda_n}| = e^{-(\beta - \varepsilon_1) \lambda_n} < \frac{1}{n^\mu}, \quad \mu = \frac{\beta - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 1.$$

Ряд в точке z сходится.

Пусть теперь $\operatorname{Re} z = \alpha - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), и пусть положительное $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Из (1.8) вытекает, что для некоторых номеров n_k ($k = 1, 2, \dots$)

$$|a_{n_k}| > e^{(\alpha - \varepsilon_1) \lambda_{n_k}},$$

в силу чего

$$|a_{n_k} e^{-\lambda_{n_k} z}| > |e^{(\alpha - \varepsilon_1 - \varepsilon) \lambda_{n_k}}| > e^{(\varepsilon - \varepsilon_1) \lambda_{n_k}} > 1,$$

и ряд в точке z расходится.

5. Определение абсциссы сходимости в общем случае. Если величина (1.6) отлична от нуля, абсцисса сходимости не будет определяться по формуле (1.7).

Если величина

$$\beta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \sum_{\nu=1}^n a_\nu \right| \quad (1.9)$$

положительна, то абсцисса сходимости $\sigma = \beta$; если же $\beta \leq 0$, то можно сказать только, что $\sigma \leq 0$ (см. [68]).

В самом деле, пусть ряд (1.2) сходится в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, причем $x_0 > 0$. Воспользуемся преобразованием Абеля (1.1), положив в нем

$$p = 1, \quad A_n = a_n e^{-\lambda_n z_0}, \quad B_n = e^{\lambda_n z_0}.$$

Так как

$$|C_n| = \left| \sum_{m=1}^n a_m e^{-\lambda_m z_0} \right| < K,$$

где K — постоянная, а

$$B_n - B_{n+1} = z_0 \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} e^{\lambda z_0} d\lambda,$$

в силу чего

$$|B_n - B_{n+1}| \leq |z_0| \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} e^{\lambda x_0} d\lambda = \frac{|z_0|}{x_0} (e^{x_0 \lambda_{n+1}} - e^{x_0 \lambda_n}),$$

то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^q a_n \right| &< \frac{K |z_0|}{x_0} \sum_{n=1}^q (e^{x_0 \lambda_{n+1}} - e^{x_0 \lambda_n}) + K e^{\lambda_q x_0} = \\ &= \frac{K |z_0|}{x_0} (e^{x_0 \lambda_q} - e^{x_0 \lambda_1}) + K e^{\lambda_q x_0} \end{aligned}$$

и, поскольку $|z_0| \geq x_0 > 0$,

$$\left| \sum_{n=1}^q a_n \right| < 2K \frac{|z_0|}{x_0} e^{\lambda_q x_0}.$$

Отсюда следует, что величина β , определяемая по формуле (1.9), будет удовлетворять неравенству $\beta \leq x_0$, откуда, в частности, вытекает, что если $\beta = +\infty$, то ряд расходится всюду.

Пусть теперь величина $\beta < \infty$. Положим $\beta_1 = \beta$, если $\beta \geq 0$, и $\beta_1 = 0$, если $\beta < 0$. Убедимся, что если $\operatorname{Re} z \geq \beta_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то ряд в точке z сходится.

Пусть положительное $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Из (1.9) находим

$$\left| \sum_{\nu=1}^n a_\nu \right| < K e^{(\beta_1 + \varepsilon_1) \lambda_n}, \quad (1.10)$$

где K — некоторая постоянная и n — любое. Используем преобразование Абеля (1.1), положив

$$A_n = a_n, \quad B_n = e^{-\lambda_n z}.$$

В силу (1.10),

$$|C_n| = \left| \sum_{m=p}^n A_m \right| < 2K e^{(\beta_1 + \varepsilon_1) \lambda_n}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |B_n - B_{n+1}| &= \\ &= \left| z \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda z} d\lambda \right| \leq |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda x} d\lambda = \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q a_n e^{-\lambda_n z} \right| &< \\ &< 2K \frac{|z|}{x} \sum_{n=p}^{q-1} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}) e^{(\beta_1 + \varepsilon_1) \lambda_n} + 2K e^{-(x - \beta_1 - \varepsilon_1) \lambda_q}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}) e^{(\beta_1 + \varepsilon_1) \lambda_n} &= \\ &= x \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda x} d\lambda \cdot e^{(\beta_1 + \varepsilon_1) \lambda_n} < x \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-(x - \beta_1 - \varepsilon_1) \lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

и потому

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n e^{-\lambda_n z} \right| < 2K |z| \int_{\lambda_p}^{\lambda_q} e^{-(x-\beta_1-\varepsilon_1)\lambda} d\lambda + 2K e^{-(x-\beta_1-\varepsilon_1)\lambda_q} = \\ = \frac{2K |z|}{x-\beta_1-\varepsilon_1} (e^{-(x-\beta_1-\varepsilon_1)\lambda_p} - e^{-(x-\beta_1-\varepsilon_1)\lambda_q}) + 2K e^{-(x-\beta_1-\varepsilon_1)\lambda_q}. \quad (1.11)$$

Отсюда, поскольку $x - \beta_1 - \varepsilon_1 \geq \alpha - \varepsilon_1 > 0$, видим, что ряд в точке z сходится. Итак, мы показали, что если $\beta = +\infty$, то $c = +\infty$; если $\beta < \infty$, то ряд сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \max(\beta, 0)$. Кроме того, мы показали, что если ряд сходится в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ с $x_0 > 0$, то $\beta \leq x_0$. Отсюда и следует, что если $\beta > 0$, то $c = \beta$, а если $\beta \leq 0$, то $c \leq 0$.

Рассмотрим особо случай, когда $\beta \leq 0$. При этом, как мы уже отмечали, $c \leq 0$. Если ряд в точке $z=0$ расходится, то $c=0$. Пусть теперь ряд в точке $z=0$, т. е. ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

сходится. В этом случае (см. [77] и [70]) абсцисса сходимости $c = \alpha$, где

$$\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \sum_{n=1}^m a_m \right|. \quad (1.12)$$

Пусть $\alpha < 0$. Покажем, что если $\operatorname{Re} z = \alpha + \varepsilon < 0$, $\varepsilon > 0$, то ряд в точке z сходится. Воспользуемся преобразованием Абеля в форме

$$\sum_{n=p}^q A_n B_n = \sum_{n=p+1}^q (B_n - B_{n+1}) D_n + B_p D_p, \quad (1.13)$$

где $D_n = A_n + A_{n+1} + \dots + A_q$, оно устанавливается совершенно так же, как и преобразование (1.1).

Положим $A_n = a_n$, $B_n = e^{-\lambda_n z}$. Пусть положительное $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Из (1.12) находим

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| < K e^{(\alpha + \varepsilon_1) \lambda_n},$$

где n — любое и K — постоянная, откуда, поскольку $\alpha + \varepsilon_1 < 0$,

$$|D_n| < 2K e^{(\alpha + \varepsilon_1) \lambda_n}.$$

Наряду с этим отметим, что

$$|B_n - B_{n+1}| = \left| z \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} e^{-\lambda z} d\lambda \right| \leq |z| \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} e^{-\lambda x} d\lambda = \\ = \frac{|z|}{-x} (e^{-x \lambda_n} - e^{-x \lambda_{n+1}}).$$

Тогда, в силу формулы (1.13),

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n e^{-\lambda_n z} \right| < \\ < 2K \frac{|z|}{-x} \sum_{n=p+1}^q (e^{-x \lambda_n} - e^{-x \lambda_{n+1}}) e^{(\alpha + \varepsilon_1) \lambda_n} + 2K e^{-(x - \alpha - \varepsilon_1) \lambda_p}$$

или, так как

$$(e^{-x \lambda_n} - e^{-x \lambda_{n+1}}) e^{(\alpha + \varepsilon_1) \lambda_n} = \\ = e^{(\alpha + \varepsilon_1) \lambda_n} (-x) \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} e^{-x \lambda} d\lambda < (-x) \int_{\lambda_{n+1}}^{\lambda_n} e^{-(x - \alpha - \varepsilon_1) \lambda} d\lambda$$

(здесь учитывается, что $\alpha + \varepsilon_1 < 0$), получаем

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n e^{-\lambda_n z} \right| < 2K |z| \int_{\lambda_p}^{\lambda_q} e^{-(x - \alpha - \varepsilon_1) \lambda} d\lambda + 2K e^{-(x - \alpha - \varepsilon_1) \lambda_p} = \\ = 2K \frac{|z|}{x - \alpha - \varepsilon_1} (e^{-(x - \alpha - \varepsilon_1) \lambda_p} - e^{-(x - \alpha - \varepsilon_1) \lambda_q}) + 2K e^{-(x - \alpha - \varepsilon_1) \lambda_p}. \quad (1.14)$$

Отсюда, поскольку $x - \alpha - \varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_1 > 0$, вытекает, что ряд в точке z сходится.

Предположим теперь, что ряд сходится в точке $z = x < 0$. Положим

$$r_n = a_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} x} + a_{n+2} e^{-\lambda_{n+2} x} + \dots,$$

откуда

$$a_n = (r_{n-1} - r_n) e^{\lambda_n x}$$

и

$$R_n = a_n + a_{n+1} + \dots = (r_{n-1} - r_n) e^{\lambda_n x} + (r_n - r_{n+1}) e^{\lambda_{n+1} x} + \dots \\ = r_{n-1} e^{\lambda_n x} + r_n (e^{\lambda_{n+1} x} - e^{\lambda_n x}) + r_{n+1} (e^{\lambda_{n+2} x} - e^{\lambda_{n+1} x}) + \dots$$

Пусть $K = \max_{n \geq 0} |r_n|$. Так как $x < 0$, то

$$|R_n| < K e^{\lambda_n x} + K (e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_{n+1} x} + e^{\lambda_{n+1} x} - e^{\lambda_{n+2} x} + \dots) = 2K e^{\lambda_n x}.$$

Отсюда видно, что величина $\alpha \leq x$. Итак, мы показали, что если $\alpha < 0$, то ряд сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \alpha$; если ряд сходится в точке $x < 0$, то $\alpha \leq x$. Отсюда и следует, что абсцисса сходимости $c = \alpha$.

Нетрудно видеть, что полуплоскость абсолютной сходимости ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

совпадает с полуплоскостью сходимости ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n x}.$$

На этом основании абсцисса абсолютной сходимости ряда может быть вычислена по указанным выше формулам с заменой в них a_n на $|a_n|$.

Предположим, что абсцисса c сходимости ряда Дирихле меньше бесконечности. Сумма $f(z)$ ряда Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$ — аналитическая функция. Может случиться, что $f(z)$ является аналитической функцией в большей полуплоскости. В связи с этим вводится понятие абсциссы голоморфизма суммы ряда Дирихле. Абсциссой голоморфизма g суммы $f(z)$ ряда Дирихле называется нижняя грань множества чисел γ таких, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \gamma$ функция $f(z)$ — аналитическая. Очевидно, в полуплоскости $\operatorname{Re} z > g$ функция $f(z)$ регулярна, а в полуплоскости $\operatorname{Re} z > g - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) при любом ε она имеет особенности. Всегда $g \leq c$.

6. О росте суммы ряда Дирихле на вертикалях. Если у ряда Дирихле абсцисса абсолютной сходимости есть α , то в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \alpha$, $\alpha > a$, сумма ряда ограничена. Интересно выяснить, как ведет себя сумма ряда в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \beta$, $\beta > c$, где c — абсцисса простой сходимости ряда Дирихле.

Теорема 2.1.3. Если ряд сходится в точке β , то в полуплоскости $\operatorname{Re} z = x \geq \beta + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, для всех q равномерно выполняется

$$\sum_1^q a_n e^{-\lambda_n z} = o(|y|). \quad (1.15)$$

Не нарушая общности рассуждений, допустим, что $\beta = 0$. Тогда

$$|a_n| < K, \quad \left| \sum_m^x a_n \right| < K$$

при любых m и s . Пусть $1 < p < q$. Имеем

$$\sum_1^q a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_1^{p-1} a_n e^{-\lambda_n z} + \sum_p^q a_n e^{-\lambda_n z} = S_1 + S_2.$$

Так как $|e^{-\lambda_n z}| < 1$ при $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon$, то $|S_1| < Kp$. Для оценки S_2 воспользуемся преобразованием Абеля (1.1), положив в нем

$$A_n = a_n, \quad B_n = e^{-\lambda_n z}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |B_n - B_{n+1}| &= \\ &= \left| z \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda z} d\lambda \right| < |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda x} d\lambda = \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}). \end{aligned}$$

Кроме того, как уже говорили, $|C_n| < K$. Поэтому, в силу (1.1),

$$\begin{aligned} |S_2| &< K \frac{|z|}{x} \sum_p^{q-1} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}) + K e^{-\lambda_q x} = \\ &= K \frac{|z|}{x} (e^{-\lambda_p x} - e^{-\lambda_q x}) + K e^{-\lambda_q x} < K \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} e^{-\lambda_p x}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sum_1^q a_n e^{-\lambda_n z} = O(p) + O(y e^{-\lambda_p x}), \quad (1.16)$$

если $p < q$. С другой стороны, очевидно, что

$$\sum_1^q a_n e^{-\lambda_n z} = O(p),$$

если $p \geq q$. Таким образом, можно считать, что соотношение (1.16) верно при любом p . Беря в качестве p , например, целую часть $\sqrt{|y|}$ и замечая, что при $y \rightarrow \infty$

$$e^{-\lambda_p x} \rightarrow 0,$$

видим, что, действительно,

$$\sum_1^q a_n e^{-\lambda_n z} = o(|y|).$$

В частности,

$$\sum_1^q a_n e^{-\lambda_n z} = o(|y|).$$

7. Выражение коэффициентов и показателей через сумму ряда Дирихле.

Теорема 2.1.4. Если ряд Дирихле сходится в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и

$$c_0 > 0, \quad c_0 > x_0, \quad \lambda_n < \omega < \lambda_{n+1},$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} f(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z} = \sum_{v=1}^n a_v.$$

Будем опираться на тот хорошо известный факт, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{\alpha z} \frac{dz}{z} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha < 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Положим

$$g(z) = e^{\omega z} \left\{ f(z) - \sum_{v=1}^n a_v e^{-\lambda_v z} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \omega)z} = \sum_{v=1}^{\infty} b_v e^{-\mu_v z},$$

где $b_v = a_{n+v}$, $\mu_v = \lambda_{n+v} - \omega$. Имеем $\mu_1 = \lambda_{n+1} - \omega > 0$. Убедемся в том, что

$$\int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} g(z) \frac{dz}{z} = 0. \quad (1.18)$$

С этой целью рассмотрим прямоугольник с вершинами в точках

$$c_0 - iT_1, \quad c_0 + iT_2, \quad \gamma + iT_2, \quad \gamma - iT_1,$$

где $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ и $\gamma > c_0$. Интеграл по периметру этого прямоугольника от функции $g(z)/z$ равен нулю, поэтому

$$\int_{c_0-iT_1}^{c_0+iT_2} g(z) \frac{dz}{z} = \int_{c_0-iT_1}^{\gamma-iT_1} g(z) \frac{dz}{z} - \int_{c_0+iT_2}^{\gamma+iT_2} g(z) \frac{dz}{z} + \int_{\gamma-iT_1}^{\gamma+iT_2} g(z) \frac{dz}{z} = I_1 + I_2 + I_3. \quad (1.19)$$

Рассмотрим интеграл I_2 . Имеем

$$g(z) = e^{-\mu_0 z} h(z), \quad 0 < \mu_0 < \mu_1,$$

где $h(z)$ — сумма ряда Дирихле с положительными показателями. На основании результата п. 6 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое T , что для $z = x + iT_2$, где $x \geq c_0$, $T_2 > T$, будет выполняться $|h(z)| < \varepsilon T_2$. Пусть $T_2 > T$. Тогда при любом $\gamma > c$

$$|I_2| < \frac{\varepsilon T_2}{\sqrt{c_0^2 + T_2^2}} \int_0^\infty e^{-\mu_0 x} dx < \frac{\varepsilon}{\mu_0}, \quad T_2 > T.$$

Аналогичным образом покажем, что

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{\mu_0}, \quad T_1 > T.$$

Зафиксируем T_1 и T_2 и рассмотрим интеграл I_3 . Функция $g(z)$ как сумма ряда Дирихле с $\mu_1 > 0$ ограничена в любом секторе

$|\arg(z - z_0)| \leq \theta < \pi/2$, в частности, ограничена в горизонтальной полуполосе. Поэтому при $\gamma \rightarrow +\infty$ интеграл $I_3 \rightarrow 0$ и при больших γ он будет по модулю меньше ε/μ_0 . В силу сказанного, из (1.19) находим

$$\left| \int_{c_0-iT_1}^{c_0+iT_2} g(z) \frac{dz}{z} \right| < \frac{3\varepsilon}{\mu_0}, \quad T_1 > T, \quad T_2 > T.$$

Это и означает, что интеграл (1.18) существует и равен нулю.

Заменяя в (1.18) функцию $g(z)$ ее выражением и принимая во внимание (1.17), получим искомым результат

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{\omega z} f(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \sum_{v=1}^n a_v e^{(\omega - \lambda_v)z} \frac{dz}{z} = \sum_{v=1}^n a_v,$$

ибо $\omega - \lambda_v > 0$.

Выбирая подходящим образом ω , можно последовательно определить $a_1, a_2, \dots$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \frac{r!}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} f(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z^{1+r}},$$

где r — целое положительное число и по-прежнему $c_0 > 0$, $c_0 > x_0$, $\lambda_n < \omega < \lambda_{n+1}$. Имеем в виду (1.15), можно записать

$$I = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{r!}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{\omega z} \left(\sum_{v=1}^q a_v e^{-\lambda_v z} \right) \frac{dz}{z^{1+r}} = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^q \frac{r!}{2\pi i} a_v \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{(\omega - \lambda_v)z} \frac{dz}{z^{1+r}}.$$

Но

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{\alpha z} \frac{dz}{z^{1+r}} = \begin{cases} \alpha^r & \text{при } \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha < 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Поэтому

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} e^{\omega z} f(z) \frac{dz}{z^{1+r}} = \sum_{v=1}^n (\omega - \lambda_v)^r a_v. \quad (1.21)$$

Отсюда, зная $f(z)$ и находя, пользуясь теоремой 2.1.4, a_v , можно определить последовательно показатели λ_v .

Теорема 2.1.5. Если у ряда Дирихле абсцисса абсолютной сходимости $a < \infty$, коэффициенты ряда могут быть вычислены по формуле

$$a_k e^{-\lambda_k x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{i_0}^T f(x + iy) e^{\lambda_k y} dy \quad (k \geq 1), \quad x > a, \quad (1.22)$$

где i_0 — фиксированное число.

Для доказательства запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{i_0}^T f(z) e^{\lambda_k z} dy &= \frac{1}{T} \int_{i_0}^T \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{(\lambda_k - \lambda_m) z} \right) dy = \\ &= \frac{1}{T} \int_{i_0}^T \left(\sum_{m=1}^{k-1} a_m e^{(\lambda_k - \lambda_m) z} \right) dy + \frac{1}{T} \int_{i_0}^T a_k dy + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{i_0}^T \left(\sum_{m=k+1}^N a_m e^{(\lambda_k - \lambda_m) z} \right) dy + \frac{1}{T} \int_{i_0}^T \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} a_m e^{(\lambda_k - \lambda_m) z} \right) dy = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Имеем

$$\left| \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m e^{(\lambda_k - \lambda_m) z} \right| \leq e^{\lambda_k x} \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| e^{-\lambda_m x} < \varepsilon,$$

если N велико. Отсюда при больших T

$$|I_4| \leq \varepsilon \frac{T - i_0}{T} < 2\varepsilon.$$

Далее, если γ вещественна и $\gamma \neq 0$,

$$\frac{1}{T} \int_{i_0}^T e^{\gamma y} dy = e^{\gamma x} \frac{1}{T} \frac{e^{\gamma i T} - e^{\gamma i i_0}}{\gamma i} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

В силу этого, выражения I_1 и I_3 стремятся к нулю при $T \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$a_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{i_0}^T f(z) e^{\lambda_k z} dy,$$

откуда и вытекает формула (1.22).

Теорема 2.1.6. Положим

$$M(x) = \sup_{-\infty < y < \infty} |f(x + iy)|, \quad x > a.$$

Тогда

$$|a_k| \leq M(x) e^{\lambda_k x}, \quad k \geq 1. \quad (1.23)$$

Неравенства (1.23) вытекают из формулы (1.22) и являются аналогом неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда.

Формулы (1.23) имеют многие применения. В частности, из них сразу следует аналог теоремы Лиувилля: если ряд (1.1) сходится абсолютно во всей плоскости и $M(x) \leq A e^{a|x|}$, то

$$f(z) = \sum_{\lambda_k \in \mathbb{R}} a_k e^{-\lambda_k z}.$$

§ 2. Суммирование ряда Дирихле

1. Первый способ суммирования. В отличие от ряда Тейлора на прямой сходимости ряда Дирихле не всегда имеются особые точки функции $f(z)$ — суммы ряда. Функция $f(z)$ может оказаться аналитической в полуплоскости, большей полуплоскости сходимости ряда. Возникает вопрос: как, зная коэффициенты ряда a_n , определить $f(z)$ в этой большей полуплоскости.

Предположим, что сумма $f(z)$ ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$, может быть аналитически продолжена в полуплоскость $\operatorname{Re} z > \rho$, $\rho < c$, и в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \rho$ удовлетворяет неравенству

$$|f(z)| < M(e) |y|^k, \quad |y| \geq 1. \quad (2.1)$$

Такая ситуация может иметь место в действительности. Рассмотрим, например, ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-\lambda_k z}.$$

где $\lambda_{2k-1} = 2k$, $\lambda_{2k} = \lambda_{2k-1} + e^{-\lambda_{2k-1}^2}$. Абсцисса сходимости ряда $c = 0$. Запишем $f(z)$ в ином виде:

$$f(z) = (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) + \dots + (e^{-\lambda_{2k-1} z} - e^{-\lambda_{2k} z}) + \dots$$

Имеем при $\operatorname{Re} z = x \geq -\gamma$, $\gamma > 0$,

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda_{2k-1} z} - e^{-\lambda_{2k} z}| &= \\ &= \left| z \int_{\lambda_{2k}}^{\lambda_{2k-1}} e^{-\lambda z} d\lambda \right| \leq |z| \int_{\lambda_{2k}}^{\lambda_{2k-1}} e^{-\lambda x} d\lambda \leq |z| \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} e^{\gamma \lambda} d\lambda \leq \\ &\leq |z| (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) e^{\gamma \lambda_{2k}} = |z| e^{-\lambda_{2k-1}^2} e^{\gamma \lambda_{2k}} < |z| e^{-4k^2 + 3\gamma k}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|f(z)| < |z| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-4k^2 + 3\gamma k} = M(\gamma) |z|, \quad \operatorname{Re} z \geq \gamma.$$

Функция $f(z)$ регулярна, следовательно, во всей плоскости и в любой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \gamma$ она ведет себя при больших $|y|$ как $O(|y|)$ (в секторе $\arg(z - z_0) \leq \theta < \pi/2$, $\operatorname{Re} z_0 > c$, она ограничена).

Вернемся к функции $f(z)$ со свойством (2.1). Пусть $\operatorname{Re} z_0 > c$. Имеем

$$\varphi(z) = f(z + z_0) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{-\lambda_v z_0} e^{-\lambda_v z}. \quad (2.2)$$

Абсцисса сходимости ряда (2.2) равна $c - x_0 < 0$. Пусть $c < c_0 < x_0$ и $c_1 = c_0 - x_0$.

Рассмотрим при $r > k$ интеграл

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_L \varphi(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z^{1+r}}$$

по контуру прямоугольника с вершинами в точках

$$c_1 + iT, c_1 - iT, 1 - iT, 1 + iT.$$

Он равен

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_L \varphi(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z^{1+r}} = \omega^r f(z_0) + C_r' \omega^{r-1} f'(z_0) + \dots + C_r^r f^{(r)}(z_0).$$

В силу оценки (1.15), интегралы по горизонтальным сторонам стремятся к 0 при $T \rightarrow \infty$. Поэтому в пределе получим

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \varphi(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z^{1+r}} = -\frac{r!}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \varphi(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z^{1+r}} + \omega^r f(z_0) + C_r^1 \omega^{r-1} f'(z_0) + \dots + C_r^r f^{(r)}(z_0).$$

Интеграл в правой части написанного соотношения, согласно формуле (1.21) и с учетом (2.2), равен

$$\sum_{\lambda_v < \omega} (\omega - \lambda_v)^r a_v e^{-\lambda_v z_0}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^r} \sum_{\lambda_v < \omega} (\omega - \lambda_v)^r a_v e^{-\lambda_v z_0} &= f(z_0) + C_r^1 \frac{f'(z_0)}{\omega} + \dots + C_r^r \frac{f^{(r)}(z_0)}{\omega^r} + \\ &+ \frac{r!}{2\pi i \omega^r} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} f(z) e^{\omega(z-z_0)} \frac{dz}{(z-z_0)^{1+r}}, \quad (2.3) \end{aligned}$$

Здесь $c < c_0 < x_0$. На основании оценки (2.1) можно интеграл в правой части заменить интегралом от той же функции по пути

($\rho + \varepsilon - i\infty$, $\rho + \varepsilon + i\infty$), а z_0 считать любым, удовлетворяющим условию $\operatorname{Re} z_0 > \rho + \varepsilon$. Пусть $\omega \rightarrow \infty$. В пределе получим

$$f(z_0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega^r} \sum_{\lambda_v < \omega} (\omega - \lambda_v)^r a_v e^{-\lambda_v z_0}.$$

Это представление имеет место для всех z_0 таких, что $\operatorname{Re} z_0 > \rho$. На него можно смотреть как на один из методов суммирования ряда Дирихле.

2. Второй способ суммирования. В предыдущем исследовании мы исходили из формулы (1.20). Сейчас будем исходить из формулы

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \frac{e^{az} dz}{z(z+1)\dots(z+r)} = \begin{cases} (1-e^{-a})^r, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a \leq 0. \end{cases}$$

Здесь c_0 — любое положительное число.

В силу этой формулы получим (подобно тому, как это делали в п. 1, опираясь на свойство (1.15)), что если ряд Дирихле сходится в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и $c_0 > 0$, $c_0 > x_0$, то

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \frac{f(z) e^{z\omega} dz}{z(z+1)\dots(z+r)} = \sum_{\lambda_v < \omega} a_v (1 - e^{-\lambda_v \omega})^r. \quad (2.4)$$

Предположим теперь, что сумма $f(z)$ ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$, аналитически продолжена в полуплоскость $\operatorname{Re} z > \rho$ и в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \rho + \varepsilon$ удовлетворяет неравенству (2.1). Пусть $\operatorname{Re} z_0 > c$. Рассмотрим функцию (2.2). Абсцисса сходимости ряда (2.2) равна $c - x_0 < 0$. Пусть $c < c_0 < x_0$, причем $-1 < c_1 = c_0 - x_0$. Рассмотрим

$$\frac{r!}{2\pi i} \int_L \varphi(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z(z+1)\dots(z+r)},$$

где $r > k$, L — контур прямоугольника с вершинами в точках $c_1 + iT$, $c_1 - iT$, $1 - iT$, $1 + iT$. Поскольку $c_1 > -1$, интеграл равен вычету в начале, т. е. $\varphi(0) = f(z_0)$. В силу оценки (1.15), интегралы по горизонтальным сторонам стремятся к 0 при $T \rightarrow \infty$. В пределе при $T \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} \frac{r!}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \varphi(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z(z+1)\dots(z+r)} &= \\ &= -\frac{r!}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \varphi(z) e^{\omega z} \frac{dz}{z(z+1)\dots(z+r)} + f(z_0). \end{aligned}$$

Интеграл в правой части равенства, согласно формуле (2.4) и с учетом (2.2), равен

$$\sum_{\lambda_v < \omega} a_v e^{-\lambda_v x_0} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r.$$

Следовательно,

$$f(z_0) = \sum_{\lambda_v < \omega} a_v e^{-\lambda_v x_0} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + \\ + \frac{r!}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(z) e^{\omega(z-z_0)} \frac{dz}{(z-z_0)(z-z_0+1)\dots(z-z_0+r)}. \quad (2.5)$$

Напомним, что здесь $c < c_0 < x_0$ и $x_0 - c_0 < 1$.

На основании оценки (2.1) интеграл в правой части (2.5) не изменится, если прямую интегрирования $\operatorname{Re} z = c_0$ сдвинем влево, но так, чтобы были соблюдены условия: $c_0 > \rho$, $x_0 - c_0 < 1$. Изменив, таким образом, путь интегрирования, приблизим затем точку z_0 к прямой интегрирования. После этого снова сдвинем прямую интегрирования влево и т. д. В результате получим, что, какова бы ни была точка z_0 из полуплоскости $\operatorname{Re} z > \rho$, будет верно соотношение (2.5), где $\rho < c_0 < x_0$ и $x_0 - c_0 < 1$. В полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \rho + \varepsilon$, как видно из (2.5),

$$f(z) = \sum_{\lambda_v < \omega} a_v e^{-\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + O(e^{-\delta \omega}), \quad (2.6)$$

$$\operatorname{Re} z \geq \rho + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда уже следует, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \rho$

$$f(z) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_v < \omega} a_v e^{-\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r, \quad r > k.$$

3. Формула о среднем. Предположим, что ряды

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

$$g(z) = \sum_1^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$$

сходятся в некоторой полуплоскости, а функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны и ограничены в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \beta$: $|f(z)| \leq M$, $|g(z)| \leq M_1$. При $x \geq \beta + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, согласно (2.6), имеем

$$f(x+iy) = \sum_{\lambda_v < \omega} a_v e^{-\lambda_v(x+iy)} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + O(e^{-\delta \omega}),$$

$$g(x+iy) = \sum_{\lambda_v < \omega} b_v e^{-\lambda_v(x+iy)} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + O(e^{-\delta \omega}).$$

Перемножим эти равенства и от произведения возьмем интеграл по переменному y в пределах от $-T$ до T . Так как (при действительном $\mu \neq 0$)

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{\mu(x+iy)} dy = \frac{e^{\mu x}}{i2T\mu} [e^{\mu iT} - e^{-\mu iT}] \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty,$$

то

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+iy) g(x-iy) dy = \\ = \sum_{\lambda_v < \omega} a_v b_v e^{-2\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + A(\omega, T) + O(e^{-\delta \omega}), \quad (2.7)$$

где при фиксированном ω величина $A(\omega, T)$ будет сколь угодно малой, если T будет велико: $T > T_0(\omega)$.

Взяв в качестве $g(z)$ функцию, определяемую рядом

$$g(z) = \sum_1^{\infty} \bar{a}_v e^{-\lambda_v z}$$

(очевидно, $g(x-iy) = \overline{f(x+iy)}$), получим

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x+iy)|^2 dy = \\ = \sum_{\lambda_v < \omega} |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + A(\omega, T) + O(e^{-\delta \omega}).$$

Отсюда, так как $|f(x+iy)| \leq M$, находим

$$\sum_{\lambda_v < \omega} |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r \leq M^2 - A(\omega, T) + O(e^{-\delta \omega}). \quad (2.8)$$

Рассмотрим частную сумму

$$\sum_{v=1}^m |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x}.$$

При достаточно большом ω

$$\sum_{v=1}^m |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} < \sum_{\lambda_v < \omega} |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + \varepsilon, \quad O(e^{-\delta \omega}) < \varepsilon,$$

а при достаточно большом T

$$|A(\omega, T)| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\sum_{v=1}^m |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} < M^2 + 3\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ любое, следовательно,

$$\sum_{v=1}^m |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} \leq M^2$$

и, далее,

$$\sum_1^\infty |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} \leq M^2, \quad x > \beta.$$

Аналогично получим, что

$$\sum_1^\infty |b_v|^2 e^{-2\lambda_v x} \leq M_1^2.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство Коши

$$(\sum |a_v b_v|)^2 \leq \sum |a_v|^2 \sum |b_v|^2,$$

закключаем, что сходится ряд

$$\sum_1^\infty |a_v b_v| e^{-2\lambda_v x}.$$

Теперь вернемся к равенству (2.7). Пусть p — некоторое положительное число. Имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\lambda_v < \omega} a_v b_v e^{-2\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r = \\ &= \sum_{\lambda_v < p} a_v b_v e^{-2\lambda_v x} (1 - e^{\lambda_v - \omega})^r + \sum_{p < \lambda_v < \omega} = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Величина S_2 , в силу неравенства

$$|S_2| < \sum_{p < \lambda_v} |a_v b_v| e^{-2\lambda_v x} < \varepsilon,$$

мала при большом p (p фиксируем), S_1 при большом ω мало отличается от суммы

$$\sum_{\lambda_v < p} a_v b_v e^{-2\lambda_v x},$$

а последняя мало отличается от суммы

$$\sum_1^\infty a_v b_v e^{-2\lambda_v x}. \quad (2.9)$$

В результате видим, что при больших ω величина I мало отличается от (2.9).

В правой части равенства (2.7) два последних члена малы при большом ω и большом T , зависящем от ω . Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что при больших T интеграл

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+iy) g(x-iy) dy$$

мало отличается от (2.9). Следовательно,

$$\sum_{v=1}^\infty a_v b_v e^{-2\lambda_v x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+iy) g(x-iy) dy. \quad (2.10)$$

Здесь $x > \beta$, причем число β определяется тем, что в полуплоскости $x > \beta$ функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны и ограничены.

Из (2.10) получаем формулу о среднем:

$$\sum_{v=1}^\infty |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x+iy)|^2 dy, \quad x > \beta. \quad (2.11)$$

Из формулы (2.10), полагая $g(z) = e^{-\lambda_n z}$ ($b_v = 0$ при $v \neq n$), найдем, кроме того,

$$a_n e^{-\lambda_n x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{\lambda_n iy} f(x+iy) dy, \quad x > \beta.$$

Обозначим q нижнюю грань чисел β таких, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \beta$ функция $f(z)$ ограничена. Величину q можно назвать абсциссой ограниченности функции $f(z)$.

Покажем, что разность между абсциссой абсолютной сходимости ряда и абсциссой ограниченности суммы ряда $f(z)$ не превосходит $L/2$:

$$a - q \leq L/2, \quad (2.12)$$

где

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}.$$

Для этого убедимся в том, что если $x > q$, то в точке $z = x + iL/2 + \varepsilon$ ряд абсолютно сходится. Имеем

$$\sum_1^\infty a_v e^{-\lambda_v z} = \sum_1^\infty a_v e^{-\lambda_v x} \cdot e^{-\lambda_v (iL/2 + \varepsilon)},$$

откуда, на основании неравенства Коши,

$$\left(\sum_1^\infty |a_v e^{-\lambda_v z}| \right)^2 \leq \sum_1^\infty |a_v|^2 e^{-2\lambda_v x} \sum_1^\infty e^{-\lambda_v (L + 2\varepsilon)}.$$

Первый ряд в правой части неравенства сходится в силу (2.11). Второй ряд также сходится. В самом деле, из (2.12) находим

$$\lambda_n > \frac{\ln n}{L + \varepsilon}, \quad n > N,$$

в силу чего

$$e^{-\lambda_n(L+2\varepsilon)} < \exp\left(-\frac{L+2\varepsilon}{L+\varepsilon} \ln n\right) = \frac{1}{n^\mu}, \quad \mu = \frac{L+2\varepsilon}{L+\varepsilon} > 1.$$

Нетрудно видеть, что абсцисса r равномерной сходимости ряда Дирихле больше или равна абсциссе ограниченности функции $f(z)$. Поэтому можно отметить, что

$$a - \frac{L}{2} \leq q \leq r \leq a.$$

Отсюда видим, что если $L=0$, то

$$q = r = a.$$

4. Суммирование ряда Дирихле в звезде голоморфизма. Пусть у ряда

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$$

абсцисса сходимости $c < +\infty$. Из полуплоскости $\operatorname{Re} s > c$ будем продолжать функцию $f(s)$ справа налево по прямым, параллельным действительной оси. Пусть $s_0 = \sigma_0 + it_0$ — первая особая точка, встретившаяся при указанном продолжении вдоль прямой $\operatorname{Im} s = t_0$. Выбросим из плоскости полупрямую $\sigma \leq \sigma_0$, $t = t_0$. Указанную операцию проделаем для каждого t_0 . Оставшуюся область назовем *звездой голоморфизма функции $f(s)$* .

Введем функции

$$\varphi_\alpha(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n e^{-\lambda_n s}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)} \quad (\alpha > 0). \quad (2.13)$$

Они являются целыми функциями. Действительно, воспользуемся тождеством Абеля (1.1), положим в нем

$$A_n = a_n e^{-\lambda_n \sigma_0}, \quad B_n = \frac{e^{-\lambda_n(\sigma - \sigma_0)}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)},$$

где $\sigma_0 > c$. Имеем для $\sigma < \sigma_0$

$$\sum_{n=p}^q \frac{a_n e^{-\lambda_n \sigma}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)} = \sum_{n=p}^{q-1} \left(\frac{e^{\lambda_n(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)} - \frac{e^{\lambda_{n+1}(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_{n+1} + 1)} \right) C_n + \frac{e^{\lambda_q(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_q + 1)} C_q,$$

где

$$C_n = \sum_{m=p}^n a_m e^{-\lambda_m \sigma_0}.$$

При больших n выражения в круглых скобках положительны. Кроме того, при $p > N(\varepsilon)$

$$|C_n| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $p > N$

$$\left| \sum_{n=p}^q \frac{a_n e^{-\lambda_n \sigma}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)} \right| < \varepsilon \left\{ \sum_{n=p}^{q-1} \left(\frac{e^{\lambda_n(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)} - \frac{e^{\lambda_{n+1}(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_{n+1} + 1)} \right) + \frac{e^{\lambda_q(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_q + 1)} \right\} = \varepsilon \frac{e^{\lambda_p(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_p + 1)}.$$

Поскольку при больших p

$$\frac{e^{\lambda_p(\sigma_0 - \sigma)}}{\Gamma(\alpha \lambda_p + 1)} < 1,$$

правая часть меньше ε . Это и доказывает, что ряд (2.13) в точке $s = \sigma$ сходится. Здесь σ — любое действительное число. Значит, ряд (2.13) сходится во всей плоскости и определяет собой целую функцию.

Имеет место следующее (см. [79]).

Теорема 2.2.1. В любой ограниченной замкнутой части звезды голоморфизма функции $f(s)$ равномерно

$$f(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\alpha(s).$$

Будем исходить из равенства (см., например, [54])

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)} = \frac{1}{2\pi i} \int l e^{\tau} \tau^{-\alpha \lambda_n - 1} d\tau,$$

где l — бесконечная петля, которую получим, если будем идти из $-\infty$ по отрицательной части действительной оси до точки $\tau_0 < 0$, затем из точки τ_0 по окружности (против часовой стрелки) с центром в начале до точки τ_0 и, наконец, из точки τ_0 по отрицательной части действительной оси в $-\infty$. У переменного τ аргумент при этом будет изменяться от $-\pi$ до $+\pi$.

Имеем

$$\frac{a_n e^{-\lambda_n \sigma}}{\Gamma(\alpha \lambda_n + 1)} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\tau} a_n e^{-(\alpha \ln \tau + \sigma) \lambda_n} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\tau} a_n e^{-z \lambda_n} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Пусть $\operatorname{Re} s > c$. Так как $\operatorname{Re}(\ln \tau) = \ln |\tau| \geq 0$, то

$$\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} s > c, \quad \operatorname{Im} s - \alpha \pi \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} s + \alpha \pi. \quad (2.14)$$

При фиксированном s и $\tau \in I$ точка z изменяется в области, в которой исходный ряд сходится равномерно. Поэтому получаем

$$\varphi_\alpha(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_I e^\tau f(z) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{2\pi i} \int_I e^\tau f(\alpha \ln \tau + s) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.15)$$

Представление (2.15), полученное в предположении $\operatorname{Re} s > c$, имеет место при малых α во всей звезде голоморфности D функции $f(s)$. В самом деле, пусть E — ограниченное замкнутое множество из области D и μ — расстояние от E до границы D . При $\alpha < \mu/2\pi$, в силу неравенств (2.14), точка $z = \alpha \ln \tau + s$ лежит в звезде D , находится от границы D на расстоянии $\mu/2$, при $|\tau| > \rho$ точка z лежит в области

$$\operatorname{Re} z > p > c, \quad |\operatorname{Im} z| < q$$

(где p и q — некоторые числа), в которой ряд Дирихле сходится равномерно. Поэтому найдется такое число M , что при $\tau \in I$, $s \in E$

$$|f(z)| \leq M. \quad (2.16)$$

Следовательно, интеграл (2.15) сходится для $s \in E$ и, кроме того, поскольку

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_I e^\tau f(z) \frac{d\tau}{\tau} \right| \leq \frac{M}{2\pi} \int_I |e^\tau| |d\tau| < M_1,$$

он представляет собой аналитическую функцию и потому равен $\varphi_\alpha(s)$.

Теперь запишем

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_I e^\tau f(s) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Вычитая из этого равенства (2.15), получим

$$f(s) - \varphi_\alpha(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_I e^\tau [f(s) - f(z)] \frac{d\tau}{\tau}, \quad s \in E.$$

Пусть ρ — достаточно большое положительное число. Запишем

$$\begin{aligned} f(s) - \varphi_\alpha(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho}^{(0)} e^\tau [f(s) - f(z)] \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho}^{-\rho} e^\tau [f(s) - f(z)] \frac{d\tau}{\tau} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho}^{-\infty} e^\tau [f(s) - f(z)] \frac{d\tau}{\tau} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

В силу (2.16), при любых $\alpha < \mu/2\pi$, когда ρ достаточно велико,

$$|I_2| < \varepsilon, \quad |I_3| < \varepsilon.$$

Фиксируем ρ . В интеграле I_1 при $\alpha < \delta$

$$|f(s) - f(z)| = |f(s) - f(\alpha \ln \tau + s)| < \varepsilon_1, \quad s \in E,$$

и потому

$$|I_1| < \varepsilon.$$

В итоге при $0 < \alpha < \delta$

$$|f(s) - \varphi_\alpha(s)| < 3\varepsilon,$$

т. е. равномерно в E

$$f(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\alpha(s).$$

5. О порядке роста суммы ряда Дирихле на вертикальных прямых. Пусть функция $f(s)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > g$. Величину

$$\mu(\sigma) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(\sigma + it)|}{\ln |t|}, \quad \sigma > g,$$

назовем *порядком функции $f(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = \sigma = \text{const}$* . На основании результатов из § 1, п. 6, можно утверждать, что в полуплоскости сходимости ряда $\sigma > c$ порядок $\mu(\sigma) \leq 1$.

Положив $L(t) = \max_{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2} |f(\sigma + it)|$, назовем величину

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\ln L(t)}{\ln |t|}$$

порядком $f(s)$ в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$.

Отметим некоторые свойства функции $\mu(\sigma)$. При этом будем опираться на следующую теорему Фрагмена — Линделёфа (см., например [55], стр. 207). Если функция $\varphi(s)$ регулярна в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ и равна там $O(e^{k_1|t|})$ для всякого положительного ε и если

$$\varphi(\sigma_1 + it) = O(|t|^{k_1}), \quad \varphi(\sigma_2 + it) = O(|t|^{k_2}),$$

то равномерно при $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$

$$\varphi(\sigma + it) = O(|t|^{k(\sigma)}),$$

где $k(\sigma)$ есть линейная функция от σ , принимающая при $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$ значения k_1, k_2 .

Предположим, что $f(s)$ в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ имеет конечный порядок. Положим $\mu(\sigma_1) = \mu_1, \mu(\sigma_2) = \mu_2$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$

$$f(\sigma_1 + it) = O(|t|^{\mu_1 + \varepsilon}), \quad f(\sigma_2 + it) = O(|t|^{\mu_2 + \varepsilon}).$$

По теореме Фрагмена — Линделёфа

$$f(\sigma + it) = O(|t|^{\mu(\sigma)}), \quad \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2,$$

где

$$k(\sigma) = \frac{(\sigma_2 - \sigma)(\mu_1 + \varepsilon) + (\sigma - \sigma_1)(\mu_2 + \varepsilon)}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ в пределе получим

$$\mu(\sigma) \leq \frac{(\sigma_2 - \sigma)\mu_1 + (\sigma - \sigma_1)\mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2.$$

Это неравенство означает, что функция $\mu(\sigma)$ выпукла.

Пользуясь выпуклостью, покажем, что $\mu(\sigma)$ — непрерывная функция. Для этого запишем полученное условие выпуклости в виде

$$\mu(\sigma) \leq \frac{\sigma'_2 - \sigma}{\sigma'_2 - \sigma'_1} \mu(\sigma'_1) + \frac{(\sigma - \sigma'_1)}{\sigma'_2 - \sigma'_1} \mu(\sigma'_2), \quad (2.17)$$

где $\sigma_1 \leq \sigma'_1 < \sigma < \sigma'_2 \leq \sigma_2$. Из (2.17) находим, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow \sigma'_1} \mu(\sigma) = \mu(\sigma'_1 + 0) \leq \mu(\sigma'_1),$$

или, поскольку в качестве σ'_1 можно взять σ ,

$$\mu(\sigma + 0) \leq \mu(\sigma).$$

Далее, при $\sigma'_2 \rightarrow \sigma$ из (2.17) получим

$$\mu(\sigma) \leq \mu(\sigma + 0).$$

Следовательно, $\mu(\sigma + 0) = \mu(\sigma)$. Таким же образом найдем, что $\mu(\sigma - 0) = \mu(\sigma)$. Значит, $\mu(\sigma - 0) = \mu(\sigma) = \mu(\sigma + 0)$ и функция $\mu(\sigma)$ непрерывна.

Из выпуклости функции $\mu(\sigma)$ и ее ограниченности при $\sigma > c$: $\mu(\sigma) \leq 1$ следует, что $\mu(\sigma)$ — невозрастающая функция. Покажем, что она не может быть отрицательной. Достаточно показать, что она не может быть отрицательной при $\sigma > c$. Допустим противное: $\mu(c_0) < 0$, $c_0 > c$. Имеем (см. § 1, п. 7)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_0 - i\infty}^{c_0 + i\infty} f(z) e^{z\omega} \frac{dz}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \lambda_n < \omega < \lambda_{n+1}.$$

Левая часть равенства, поскольку при больших $|t|$

$$|f(c_0 + it)| < e^{-\mu_1 |t|}, \quad \mu_1 > 0,$$

непрерывна относительно ω на всей действительной оси. Следовательно, правая часть должна изменяться непрерывно при переходе от $\omega < \lambda_{n+1}$ к $\omega > \lambda_{n+1}$. Но это может быть только тогда, когда все $a_n = 0$. Таким образом, если не все $a_n = 0$, то $\mu(\sigma) \geq 0$.

§ 3. О поведении ряда Дирихле на прямой сходимости

1. Обобщение теоремы Абеля. Пусть ряд Дирихле $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ сходится в точке s_0 . Тогда, как мы видели, он сходится и притом равномерно в секторе

$$|\arg(s - s_0)| \leq \theta < \pi/2. \quad (3.1)$$

Теорема 2.3.1. Когда s находится в секторе (3.1),

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = f(s_0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} f(s) - f(s_0) &= \\ &= \left(\sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_{n=1}^N a_n e^{-\lambda_n s_0} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s_0} = \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Из сходимости ряда в точке s_0 и из равномерной сходимости ряда в секторе (3.1) следует, что по $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что будем иметь

$$|I_3| < \varepsilon, \quad |I_2| < \varepsilon,$$

причем второе неравенство имеет место при всех s из сектора (3.1). Число N фиксируем. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $|s - s_0| < \delta$ было $|I_1| < \varepsilon$. В результате получим, что, когда s лежит в секторе (3.1) и $|s - s_0| < \delta$,

$$|f(s) - f(s_0)| < 3\varepsilon,$$

что и надо было показать.

Установим теперь теорему, являющуюся обращением предыдущего результата (см. [81]).

Теорема 2.3.2. Пусть ряд Дирихле сходится в полуплоскости $\text{Re } s > 0$, и пусть $f(s) \rightarrow A$, когда $s \rightarrow 0$ по положительной части действительной оси. Для того чтобы сходил ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (3.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$S_q = a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + \dots + a_q \lambda_q = o(\lambda_q). \quad (3.3)$$

Если это условие выполняется, сумма ряда (3.2) равна A .

Пусть ряд (3.2) сходится.
Запишем

$$S_q = \sum_{k=1}^{q-1} a_k \lambda_k + \sum_{k=p}^q a_k \lambda_k.$$

Для оценки второй суммы воспользуемся тождеством Абеля (1.1), положим

$$A_k = a_k, \quad B_k = \lambda_k, \quad C_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_k.$$

Имеем $|C_k| < \varepsilon$ при большом p . Поэтому

$$\left| \sum_{k=p}^q a_k \lambda_k \right| = \left| \sum_{k=p}^{q-1} C_k (B_k - B_{k+1}) + C_q B_q \right| \leq \\ \leq \varepsilon \sum_{k=p}^{q-1} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| + \varepsilon \lambda_q = \varepsilon (2\lambda_q - \lambda_p)$$

и

$$\left| \frac{S_q}{\lambda_q} \right| < \frac{1}{\lambda_q} \left| \sum_{k=1}^p a_k \lambda_k \right| + 2\varepsilon.$$

При фиксированном p и $q > N$ правая часть будет меньше 3ε . Следовательно,

$$\frac{S_q}{\lambda_q} \rightarrow 0 \quad \text{при } q \rightarrow \infty.$$

Пусть теперь выполняется условие (3.3). Введем функцию $S(x)$, равную нулю при $x < \lambda_1$ и равную S_n для $\lambda_n \leq x < \lambda_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Рассмотрим сумму

$$K_q = \sum_{n=1}^q a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \sum_{n=1}^q \lambda_n a_n \frac{e^{-\lambda_n \sigma}}{\lambda_n}$$

и применим к ней тождество Абеля, положив

$$A_n = \lambda_n a_n, \quad B_n = \frac{e^{-\lambda_n \sigma}}{\lambda_n}.$$

Получим

$$\sum_{n=1}^q a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \sum_{n=1}^{q-1} S_n \left(\frac{e^{-\lambda_n \sigma}}{\lambda_n} - \frac{e^{-\lambda_{n+1} \sigma}}{\lambda_{n+1}} \right) + S_q \frac{e^{-\lambda_q \sigma}}{\lambda_q}.$$

Теперь, учитывая, что

$$\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \left(\frac{\sigma e^{-t\sigma}}{t} + \frac{e^{-t\sigma}}{t^2} \right) dt = \left[-\frac{e^{-t\sigma}}{t} \right]_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} = \frac{e^{-\lambda_n \sigma}}{\lambda_n} - \frac{e^{-\lambda_{n+1} \sigma}}{\lambda_{n+1}},$$

находим

$$K_q = \sum_{n=1}^{q-1} S_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \left(\frac{\sigma e^{-t\sigma}}{t} + \frac{e^{-t\sigma}}{t^2} \right) dt + \frac{S_q}{\lambda_q} e^{-\lambda_q \sigma} = \\ = \int_0^{\lambda_q} S(t) e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt + \frac{S_q}{\lambda_q} e^{-\lambda_q \sigma}. \quad (3.4)$$

В силу (3.3), при $\sigma > 0$ последний член правой части равенства стремится к нулю при $q \rightarrow \infty$. Следовательно, устремив q в ∞ , найдем в пределе

$$f(\sigma) = \int_0^{\infty} S(t) e^{-\sigma t} \left(\frac{\sigma}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt, \quad (3.5)$$

причем интеграл в правой части, на основании (3.3), сходится (абсолютно).

Положим теперь в формуле (3.4) $\sigma = 0$, получим

$$\sum_{n=1}^q a_n = \int_0^{\lambda_q} S(t) \frac{dt}{t} + o(1). \quad (3.6)$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что разность между (3.6) и (3.5) стремится к нулю при $\sigma = \frac{1}{\lambda_q} \rightarrow 0$.

Покажем сначала, что интегралы

$$I_1(\sigma) = \int_{\lambda_q}^{\infty} S(t) e^{-\sigma t} \frac{dt}{t^2}$$

и

$$I_2(\sigma) = \int_0^{\lambda_q} S(t) e^{-\sigma t} \frac{\sigma}{t} dt$$

стремятся к нулю при $\sigma = \frac{1}{\lambda_q} \rightarrow 0$, так что

$$A = \lim_{q \rightarrow \infty} f(\sigma) = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda_q} S(t) e^{-\sigma t} \frac{dt}{t^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda_q}. \quad (3.7)$$

В силу (3.3), имеем при больших q для любого $\varepsilon > 0$

$$|I_1(\sigma)| \leq \int_{\lambda_q}^{\infty} \left| \frac{S(t)}{t} \right| e^{-\sigma t} \frac{dt}{t} < \varepsilon \int_{\lambda_q}^{\infty} e^{-\sigma t} \frac{dt}{t} < \frac{\varepsilon}{\lambda_q} \int_{\lambda_q}^{\infty} e^{-\sigma t} dt < \varepsilon.$$

Чтобы оценить $I_2(\sigma)$, запишем

$$I_2(\sigma) = \int_0^p S(t) e^{-\sigma t} \frac{\sigma}{t} dt + \int_p^\infty \frac{S(t)}{t} e^{-\sigma t} d(\sigma t),$$

где p — достаточно большое фиксированное положительное число. Имеем

$$\left| \int_p^\infty \frac{S(t)}{t} e^{-\sigma t} d(\sigma t) \right| < \varepsilon \int_p^\infty e^{-\sigma t} d(\sigma t) < \varepsilon$$

и, далее, при больших q

$$\left| \int_0^p \frac{S(t)}{t} e^{-\sigma t} \sigma dt \right| < K \int_0^p e^{-\sigma t} \sigma dt < K \int_0^p \sigma dt = K p \sigma = \frac{K p}{\lambda_q} < \varepsilon,$$

так что $|I_2(\sigma)| < 2\varepsilon$. Поэтому соотношение (3.7) действительно имеет место.

Чтобы показать, что сходится ряд (3.2) и сходится именно к A , надо показать, согласно (3.6) и (3.7), что разность

$$I_q = \int_0^{\lambda_q} S(t) e^{-\sigma t} \frac{dt}{t^2} - \int_0^{\lambda_q} S(t) \frac{dt}{t^2} = \int_0^{\lambda_q} S(t) [e^{-\sigma t} - 1] \frac{dt}{t^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda_q},$$

стремится к нулю при $q \rightarrow \infty$. Но для $\sigma = 1/\lambda_q$ и $0 \leq t \leq \lambda_q$ имеем $0 \leq \sigma t \leq 1$ и потому

$$|e^{-\sigma t} - 1| \leq L \sigma t,$$

где L — некоторая постоянная. Значит, при фиксированном большом p и большом q

$$\begin{aligned} L^{-1} |I_q| &< \sigma \int_0^{\lambda_q} \left| \frac{S(t)}{t} \right| dt = \sigma \int_0^p \left| \frac{S(t)}{t} \right| dt + \sigma \int_p^{\lambda_q} \left| \frac{S(t)}{t} \right| dt < \\ &< \sigma K p + \sigma \varepsilon \lambda_q = \frac{K p}{\lambda_q} + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что условие (3.3) выполняется, если

$$a_n = o \left\{ \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right\}.$$

Положив здесь $\lambda_n = n$, получим хорошо известную теорему Таубера для степенных рядов: если $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = A,$$

то ряд

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots$$

сходится и его сумма равна A .

2. О сходимости в точках регулярности на прямой сходимости. В случае ряда Тейлора имеет место следующая теорема Фату: если $a_n = o(1)$ и функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.8)$$

регулярна в точке $x=1$, то ряд (3.8) в точке $x=1$ сходится.

Для ряда Дирихле получается аналогичное утверждение — теорема Рисса.

Теорема 2.3.3. Если абсцисса сходимости ряда Дирихле равна нулю и

$$\sum_1^q a_n = o(1),$$

то ряд Дирихле сходится в каждой точке прямой $\sigma=0$, в которой $f(s)$ регулярна, причем сходимость — равномерная на всяком отрезке $\tau \leq t \leq \tau'$ прямой $\sigma=0$, на котором $f(s)$ регулярна.

Для доказательства возьмем прямоугольник $-\alpha \leq \sigma \leq \alpha$, $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$, в котором $f(s)$ регулярна, и рассмотрим функцию

$$g_q(s) = e^{\lambda_q s} (s - i\tau_1)(s - i\tau_2) \left[f(s) - \sum_1^q a_n e^{-\lambda_n s} \right].$$

Покажем, что на сторонах прямоугольника $|g_q(s)|$ равномерно стремится к нулю при $q \rightarrow \infty$.

Пусть $\sigma > 0$. Имеем

$$f(s) - \sum_1^q a_n e^{-\lambda_n s} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=q+1}^p a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Положив $A_n = a_n$, $B_n = e^{-\lambda_n s}$, $C_n = A_{q+1} + \dots + A_n$, согласно тождеству Абеля, получим

$$\sum_{n=q+1}^p a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=q+1}^{p-1} C_n (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + C_p e^{-\lambda_p s}.$$

По условию при больших q

$$|C_n| = |(a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_q)| < \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| &= \left| s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda s} d\lambda \right| \leq |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda \sigma} d\lambda = \\ &= \frac{|s|}{\sigma} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Поэтому

$$\left| \sum_{q+1}^p a_n e^{-\lambda_n s} \right| < e \frac{|s|}{\sigma} e^{-\lambda_{q+1} \sigma}$$

и

$$\left| f(s) - \sum_1^q a_n e^{-\lambda_n s} \right| < e \frac{|s|}{\sigma} e^{-\lambda_{q+1} \sigma}.$$

В силу этой оценки, при $\sigma > 0$ получаем

$$|g_q(s)| \leq e \frac{|s - i\tau_1| |s - i\tau_2| |s|}{\sigma}.$$

На стороне $\sigma = \alpha$, $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$ отношение $|s|/\sigma$ ограничено и, следовательно,

$$|g_q(s)| < A e, \quad (3.10)$$

где A не зависит от q и ε . На верхней стороне: $0 < \sigma \leq \alpha$, $t = \tau_2$

$$\frac{|s - i\tau_2|}{\sigma} = 1$$

и потому верно при некотором A неравенство (3.10). Аналогично обстоит дело на нижней стороне.

Пусть теперь $\sigma < 0$. Возьмем достаточно большое положительное число p . Имеем в прямоугольнике

$$\left| f(s) - \sum_1^q a_n e^{-\lambda_n s} \right| = \left| f(s) - \sum_1^{p-1} a_n e^{-\lambda_n s} - \sum_p^q a_n e^{-\lambda_n s} \right| \leq M + \left| \sum_p^q a_n e^{-\lambda_n s} \right|,$$

где M — постоянная. В силу тождества Абеля,

$$\begin{aligned} \sum_p^q a_n e^{-\lambda_n s} &= \sum_p^{q-1} C_n (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + C_q e^{-\lambda_q s}, \\ C_n &= a_p + \dots + a_n, \end{aligned}$$

откуда, на основании (3.9) и того, что

$$|C_n| = |(a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_{p-1})| < \varepsilon,$$

получаем

$$\left| \sum_p^q a_n e^{-\lambda_n s} \right| < 2\varepsilon \frac{|s|}{\sigma} e^{-\lambda_q \sigma}.$$

Таким образом, для функции $g_q(s)$ находим оценку

$$|g_q(s)| < |s - i\tau_1| |s - i\tau_2| M e^{\lambda_q \sigma} + 2\varepsilon \frac{|s - i\tau_1| |s - i\tau_2| |s|}{|\sigma|}.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства мало при больших q , второе слагаемое — меньше $A\varepsilon$ на сторонах прямоугольника при $\sigma < 0$, где A — некоторая постоянная, не зависящая ни от q , ни от ε (в этом убеждаемся так же, как и выше в аналогичном случае). Следовательно, на сторонах прямоугольника при больших q

$$|g_q(s)| \leq B\varepsilon.$$

Это неравенство будет выполняться тогда и внутри прямоугольника, в частности, на интервале $\sigma = 0$, $\tau_1 \leq t_2 \leq \tau_2$. Но на этом интервале оно имеет вид

$$|(t - t_1)(t - t_2)| \left| f(it) - \sum_1^q a_n e^{-\lambda_n it} \right| < B\varepsilon.$$

Отсюда видно, что на меньшем интервале $\sigma = 0$, $t_1 < t \leq t \leq \tau' < t_2$ равномерно

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sum_1^q a_n e^{-\lambda_n it} = f(it),$$

что и надо было показать.

3. Об особых точках на прямой сходимости.

Теорема 2.3.4. Если коэффициенты a_n ряда Дирихле действительны и неотрицательны, то точка $s = c$, где c — абсцисса сходимости ряда, есть особая для суммы ряда $f(s)$.

Не нарушая общности рассуждений, можно предположить $c = 0$. Сделав такое предположение, допустим противное, что в точке $s = 0$ функция $f(s)$ регулярна. Запишем для $f(s)$ ряд Тейлора по степеням $(s - 1)$:

$$f(s) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(s-1)^v}{v!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-s)^v}{v!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^v e^{-\lambda_n} \right).$$

Его радиус сходимости больше единицы. Пусть $s_1 < 0$ и точка $s = s_1$ лежит в круге сходимости. Имеем

$$f(s_1) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1-s_1)^v}{v!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^v e^{-\lambda_n}.$$

В двойном ряде справа все члены неотрицательны. В силу этого можно изменить порядок суммирования:

$$f(s_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1-s_1)^v}{v!} \lambda_n^v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s_1}.$$

Таким образом, ряд Дирихле сходится в точке $s = s_1 < 0$, что невозможно, ибо абсцисса сходимости $c = 0$. Значит, точка $s = 0$ есть особая для $f(s)$.

Утверждение теоремы остается верным и при более слабых ограничениях на a_n .

Теорема 2.3.5. Если

$$a_n = |a_n| e^{i\psi_n}, \quad |\psi_n| < \psi < \pi/2,$$

то точка $s = c$, где c — абсцисса сходимости ряда, есть особая для суммы ряда $f(s)$.

Как и выше, рассматриваем равенство

$$f(s_1) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1-s_1)^v}{v!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^v e^{-\lambda_n} \right) \quad (3.11)$$

(ряд справа сходится). Пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. Очевидно,

$$|a_n| \leq \alpha_n / \cos \psi.$$

Ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1-s_1)^v}{v!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n^v e^{-\lambda_n} \right),$$

составленный из действительных частей членов сходящегося ряда (3.11), сходится. Поэтому сходится ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1-s_1)^v}{v!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\cos \psi} \lambda_n^v e^{-\lambda_n} \quad (3.12)$$

(его члены отличаются от членов предыдущего ряда на постоянный множитель $1/\cos \psi$). У двойного ряда (3.12) все члены неотрицательны. Следовательно, двойной ряд (3.11) сходится абсолютно и в нем можно изменить порядок суммирования.

В результате получим, что исходный ряд Дирихле сходится в точке $s_1 < 0$, что невозможно.

Точка $s = c$ будет особой и тогда, когда при $n \rightarrow \infty$ угол ψ_n стремится к $\pm \pi/2$, но не очень быстро. Верно утверждение (см. [66]):

Теорема 2.3.6. Если в ряде

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (3.13)$$

$$\operatorname{Re} a_n \geq 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos \psi_n} = 1, \quad \psi_n = \arg a_n, \quad (3.14)$$

то точка $s = c$ — особая для $f(s)$.

Для доказательства положим $a'_n = \operatorname{Re} a_n$,

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-\lambda_n s}.$$

Пусть c' — абсцисса сходимости последнего ряда, c'' — абсцисса абсолютной сходимости исходного ряда (3.13). Возьмем точку s_0 , $\operatorname{Re} s_0 = \sigma_0 > c'$ и точку $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_0 + c')$. По $\varepsilon > 0$ найдется $n_0(\varepsilon)$ такое, что для $q > p > n_0$

$$\sum_{n=p}^q a'_n e^{-\lambda_n \sigma_1} < \varepsilon.$$

В силу (3.14), при $n \geq n_1$

$$\cos \psi_n > e^{-(\sigma_0 - \sigma_1) \lambda_n}.$$

Поэтому для $q > p \geq n_1 + n_0$

$$\sum_{n=p}^q |a_n e^{-\lambda_n s_0}| = \sum_{n=p}^q \frac{a'_n}{\cos \psi_n} e^{-\lambda_n \sigma_0} \leq \sum_{n=p}^q a'_n e^{-\lambda_n \sigma_1} < \varepsilon.$$

Следовательно, ряд (3.13) абсолютно сходится для $s = s_0$, а потому $c'' \leq c'$. Но для всякого ряда $c' \leq c \leq c''$. Поэтому

$$c' = c = c''.$$

Теперь отметим, что

$$|f^{(m)}(c+1)| \geq |g^{(m)}(c+1)|.$$

Для функции $g(s)$, поскольку $a'_n \geq 0$, точка $s = c' = c$ — особая. Следовательно, радиус R сходимости ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} (s-c-1)^m \frac{f^{(m)}(c+1)}{m!}$$

меньше или равен единице. Меньше единицы он быть не может, ибо $f(s)$ регулярен при $\operatorname{Re} s > c$. Значит, $R=1$ и точка c — особая для $f(s)$.

4. Теоремы Островского о сверхсходимости. Пусть у ряда Дирихле абсцисса сходимости $c=0$. Покажем, что в любой ограниченной части полуплоскости $\operatorname{Re} s > \rho > 0$ при достаточно больших p и любом $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \right| < e^{-(\rho-\varepsilon)\lambda_{p+1}}, \quad (3.15)$$

а в любой ограниченной части полуплоскости $\operatorname{Re} s > -\rho$ при достаточно больших p и любом $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{n=1}^p a_n e^{-\lambda_n s} \right| < e^{(\rho+\varepsilon)\lambda_p}. \quad (3.16)$$

Чтобы доказать (3.15), оценим сумму

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s_1} e^{-\lambda_n (s-s_1)}, \quad s_1 > 0, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

воспользовавшись тождеством Абеля и положив

$$A_n = a_n e^{-\lambda_n s_1}, \quad B_n = e^{-\lambda_n (s-s_1)}, \quad C_n = A_{p+1} + \dots + A_n.$$

Так как

$$\begin{aligned} |B_n - B_{n+1}| &= \left| (s-s_1) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda (s-s_1)} d\lambda \right| \leq |s-s_1| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda (\sigma-\varepsilon_1)} d\lambda = \\ &= \frac{|s-s_1|}{\sigma-\varepsilon_1} (e^{-\lambda_n (\sigma-\varepsilon_1)} - e^{-\lambda_{n+1} (\sigma-\varepsilon_1)}) \quad (\operatorname{Re} s = \sigma) \end{aligned}$$

и при больших p , кроме того, $|C_n| < 1$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \right| &< \frac{|s-s_1|}{\sigma-\varepsilon_1} \sum_{p+1}^{\infty} (e^{-\lambda_n (\sigma-\varepsilon_1)} - e^{-\lambda_{n+1} (\sigma-\varepsilon_1)}) + \\ &+ e^{-\lambda_p (\sigma-\varepsilon_1)} < \frac{|s-s_1|}{\sigma-\varepsilon_1} e^{-\lambda_{p+1} (\sigma-\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства, когда s изменяется в ограниченной части полуплоскости $\sigma > \rho$, меньше $e^{-\lambda_{p+1} (\rho-\varepsilon)}$ при больших p , что и доказывает соотношение (3.15).

Чтобы доказать (3.16), опять воспользуемся тождеством Абеля для оценки суммы

$$\sum_{n=1}^p a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^p a_n e^{-\lambda_n s_1} e^{-\lambda_n (s-s_1)}, \quad s_1 > 0, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

положив

$$A_n = a_n e^{-\lambda_n s_1}, \quad B_n = e^{-\lambda_n (s-s_1)}, \quad C_n = A_1 + \dots + A_n.$$

Так как

$$|C_n| \leq K,$$

где K — некоторая постоянная, и при $\sigma \geq -\rho$

$$\begin{aligned} |B_n - B_{n+1}| &\leq |s-s_1| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda (\sigma-\varepsilon_1)} d\lambda \leq |s-s_1| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{\lambda (\rho+\varepsilon_1)} d\lambda = \\ &= \frac{|s-s_1|}{\rho+\varepsilon_1} (e^{\lambda_{n+1} (\rho+\varepsilon_1)} - e^{\lambda_n (\rho+\varepsilon_1)}), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^p a_n e^{-\lambda_n s} \right| &< K \frac{|s-s_1|}{\rho+\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{p-1} (e^{\lambda_{n+1} (\rho+\varepsilon_1)} - e^{\lambda_n (\rho+\varepsilon_1)}) + \\ &+ K e^{\lambda_p (\rho+\varepsilon_1)} < K \left(\frac{|s-s_1|}{\rho+\varepsilon_1} + 1 \right) e^{\lambda_p (\rho+\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

При больших p , когда s изменяется в ограниченной части полуплоскости $\sigma \geq -\rho$, правая часть последнего неравенства меньше $e^{\lambda_p (\rho+\varepsilon)}$. Тем самым неравенство (3.16) установлено.

Теперь установим следующую известную теорему Островского.

Теорема 2.3.7. Если показатели λ_n ряда Дирихле $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ таковы, что для бесконечного множества значений n_v индекса n

$$\lambda_{n_v+1} - \lambda_{n_v} > \vartheta \lambda_{n_v}, \quad (3.17)$$

где ϑ — фиксированное положительное число, то последовательность частных сумм порядков n_v

$$S_{n_v}(s) = \sum_{n=1}^{n_v} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (v=1, 2, \dots)$$

сходится равномерно в достаточно малой окрестности каждой точки прямой сходимости ряда Дирихле, в которой сумма ряда $f(s)$ регулярна.

Не нарушая общности рассуждений, допустим, что абсцисса сходимости ряда $c=0$. Допустим далее (это опять не нарушит общности рассуждений), что точка прямой сходимости, в которой функция $f(s)$ регулярна, есть точка $s=0$. Надо показать, что

указанная последовательность частных сумм равномерно сходится в некоторой окрестности начала.

Возьмем точку α , $0 < \alpha < 1$, и проведем три окружности C_1 , C_2 , C_3 с центром в точке α и с радиусами, соответственно равными $r_1 = \alpha - \alpha^2$, $r_2 = \alpha + \alpha^2$, $r_3 = \alpha + \alpha^2$. Число α выберем столь малым, чтобы функция $f(s)$ была регулярна внутри большей окружности C_3 и на ней самой.

Рассмотрим функцию

$$R_{n_v}(s) = f(s) - \sum_{m=1}^{n_v} a_m e^{-\lambda_m s} = f(s) - S_{n_v}(s).$$

Максимумы ее модуля на окружностях C_1 , C_2 , C_3 обозначим соответственно M'_v , M''_v , M'''_v . Воспользуемся теоремой Адамара о трех кругах (см., например, [55], стр. 198), в которой дается оценка максимума модуля функции на средней окружности через оценки на крайних окружностях:

$$M''_v \ln \frac{r_3}{r_1} \leq M'_v \ln \frac{r_3}{r_2} \cdot M'''_v \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Логарифмируя, получим

$$\ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \ln M''_v \leq \ln \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \ln M'_v + \ln \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha} \ln M'''_v. \quad (3.18)$$

Пусть D — некоторая область, содержащая начало, в которой $f(s)$ регулярна и M — максимум модуля $f(s)$ в этой области. При малых α окружность C_3 лежит в области D . Имея это в виду, на основании неравенства

$$|R_{n_v}(s)| \leq |f(s)| + |S_{n_v}(s)|$$

и соотношения (3.16), выводим (для точек окружности C_3 , очевидно, $\sigma \geq -\alpha^2$, поэтому в (3.16) надо положить $\rho = \alpha^2$; кроме того, пусть там $\epsilon = \alpha^2$), что при больших v

$$M'''_v \leq M + e^{\alpha^2(1+\alpha)\lambda_{n_v}} < 2e^{\alpha^2(1+\alpha)\lambda_{n_v}}.$$

Отсюда

$$\ln M'''_v < \ln 2 + \alpha^2(1+\alpha)\lambda_{n_v}.$$

Внутри C_1

$$R_{n_v}(s) = \sum_{m=n_v+1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s},$$

и потому, в силу соотношения (3.15) (для точек C_1 , очевидно, $\sigma \geq \alpha^2$, поэтому в (3.15) надо положить $\rho = \alpha^2$; кроме того, пусть $\epsilon = \alpha^2$), при больших v будет

$$M'_v \leq e^{-\alpha^2(1-\alpha)\lambda_{n_v}+1}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие (3.17), найдем

$$\ln M'_v < -\alpha^2(1-\alpha)(1+\theta)\lambda_{n_v}.$$

На основании полученных оценок и неравенства (3.18), будем иметь

$$\ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \ln M''_v \leq \leq \alpha^2 \left[(1+\alpha) \ln \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha} - (1-\alpha)(1+\theta) \ln \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \right] \lambda_{n_v} + \ln 2 \ln \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Поскольку

$$\ln \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha} = \ln(1+\alpha^2) - \ln(1-\alpha) = \alpha + \dots,$$

$$\ln \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} = \ln(1+\alpha) - \ln(1+\alpha^2) = \alpha + \dots,$$

то выражение в квадратных скобках, как функция α , имеет в окрестности $\alpha=0$ разложение $-\theta\alpha + \dots$. Следовательно, при малых α оно меньше $-\frac{\theta}{2}\alpha$ и

$$\ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \ln M''_v < -\frac{\theta}{2} \alpha^3 \lambda_{n_v} + \ln 2 \ln \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha}.$$

Отсюда видно, что при $v \rightarrow \infty$ правая часть стремится к $-\infty$ и потому

$$M''_v \rightarrow 0.$$

Значит, последовательность $\{S_{n_v}(s)\}$ в круге C_2 равномерно сходится к функции $f(s)$, что и доказывает теорему.

Для степенных рядов имеет место и обратная теорема Островского (см., например, [2], стр. 391): если у степенного ряда

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ с радиусом сходимости R имеется подпоследовательность частных сумм, которая равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки z_0 , $|z_0| \geq R$, то данный степенной ряд может быть представлен суммой ряда с радиусом сходимости, большим R , и лакунарного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{\lambda_k}, \quad \lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k} > \theta \lambda_{n_k} \quad (k=1, 2, \dots), \quad \theta > 0.$$

Для рядов Дирихле эта теорема неверна. В самом деле, рассмотрим ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-\lambda_n s},$$

где

$$\lambda_{2n-1} = 2n, \quad \lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} + e^{-\lambda_{2n-1}^2}.$$

Его абсцисса сходимости $\sigma = 0$. В § 2, п. 1 мы видели, что последовательность частных сумм ряда четных порядков сходится во всей плоскости. Если бы данный ряд можно было представить в виде суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

с абсциссой сходимости $\sigma < 0$ и лакунарного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\lambda_n s},$$

у которого для номеров n , заключенных в границах

$$n_k < n < n_{k+1}, \quad \lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} > \theta \lambda_{n_k} \quad (k=1, 2, \dots), \quad \theta > 0,$$

коэффициенты $\beta_n = 0$, то для указанных номеров имели бы

$$a_n = (-1)^{n-1}.$$

Но это невозможно, ибо, поскольку абсцисса сходимости первого ряда $\sigma < 0$, коэффициенты a_n должны стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теперь сформулируем и докажем другую теорему Островского.

Теорема 2.3.8. Если для бесконечного множества значений n_v индекса n имеем

$$\lambda_{n_v+1} - \lambda_{n_v} > \theta_v \lambda_{n_v}, \quad (3.19)$$

где

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \theta_v = +\infty,$$

то последовательность частных сумм ряда Дирихле порядков n_v

$$S_{n_v}(s) = \sum_{n=1}^{n_v} a_n e^{-\lambda_n s} \quad (v=1, 2, \dots)$$

сходится равномерно в любой ограниченной замкнутой части области существования функции $f(s)$. Эта область, следовательно, — односвязна.

Доказательство будет опираться не на теорему Адамара о трех кругах, а на более общую теорему (см., например, [2], стр. 375): если C_1, C_2, C_3 — непрерывные замкнутые кривые, причем C_2 лежит внутри C_3 , а C_1 — внутри C_2 и $f(s)$ — функция, аналитическая в односвязной области, содержащей большую

кривую C_3 , то имеются такие положительные числа γ_1 и γ_3 , $\gamma_1 + \gamma_3 = 1$, не зависящие от $f(s)$, что

$$M_2 \leq M_1^{\gamma_1} M_3^{\gamma_3}, \quad (3.20)$$

где M_v ($v=1, 2, 3$) — максимум модуля $f(s)$ на кривой C_v .

Предположим, что абсцисса сходимости ряда Дирихле $\sigma = 0$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что последовательность $\{S_{n_v}(s)\}$ равномерно сходится в достаточно малой окрестности каждой точки s_0 , принадлежащей области G существования $f(s)$. Итак, пусть $s_0 \in G$ и $\operatorname{Re} s_0 \leq 0$. Проведем замкнутую кривую C_2 , обладающую свойствами: кривая C_2 и ее внутренность лежат в области G , точка s_0 лежит внутри кривой C_2 , внутри кривой есть точки из полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Теперь проведем замкнутую кривую C_1 так, чтобы она целиком лежала в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ и находилась внутри кривой C_2 . Наконец, возьмем замкнутую кривую C_3 , которая охватывает кривую C_2 и внутри которой функция $f(s)$ — аналитическая. Пусть $-\rho$ — нижняя грань $\operatorname{Re} s$, когда s пробегает кривую C_3 , а α — нижняя грань $\operatorname{Re} s$, когда s пробегает кривую C_1 , и пусть M'_v, M''_v и M'''_v — максимумы модуля соответственно на C_1, C_2, C_3 функции

$$R_{n_v}(s) = f(s) - S_{n_v}(s).$$

Согласно (3.15), поскольку на окружности C_1

$$R_{n_v}(s) = \sum_{m=n_v+1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s},$$

имеем

$$M'_v < e^{-(\alpha-\varepsilon)\lambda_{n_v}+1},$$

откуда, полагая $\varepsilon = \alpha/2$ и учитывая условие (3.19),

$$\ln M'_v < -\frac{\alpha}{2}(1+\theta_v)\lambda_{n_v}.$$

Чтобы оценить M'''_v , обозначим M максимум модуля $f(s)$ на кривой C_3 . Тогда, на основании (3.16), будем иметь при больших v

$$M'''_v < M + e^{(\rho+\varepsilon)\lambda_{n_v}} < 2e^{(\rho+\varepsilon)\lambda_{n_v}},$$

или, положив $\varepsilon = \rho$,

$$\ln M'''_v < \ln 2 + 2\rho\lambda_{n_v}.$$

Воспользовавшись соотношением (3.20), находим

$$\ln M''_v < \left[-\frac{\alpha}{2}\gamma_1(1+\theta_v) + 2\rho\gamma_3\right]\lambda_{n_v} + \gamma_3 \ln 2.$$

Выражение в квадратных скобках при $v \rightarrow \infty$ стремится к $-\infty$. Поэтому

$$\lim_{v \rightarrow \infty} M_v^* = 0.$$

Следовательно, последовательность $\{S_{n_v}(s)\}$ на кривой C_2 , а потому и внутри C_2 , в частности, в некоторой окрестности точки s_0 , сходится равномерно к $f(s)$. Отсюда вытекает, что она равномерно сходится в любой ограниченной замкнутой части области G . Из этого далее следует, что область G — односвязна.

§ 4. Область регулярности суммы измененного ряда Дирихле

1. Теорема о продолжаемости. Пусть ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_1 a_n e^{-\lambda_n s} \quad (4.1)$$

имеет абсциссу сходимости $c < +\infty$, и пусть $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа

$$|\varphi(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad |z| > r_0(\varepsilon). \quad (4.2)$$

Выясним, где сходится ряд

$$F(s) = \sum_1 a_n \varphi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} \quad (4.3)$$

и где регулярна функция $F(s)$.

Чтобы ответить на эти вопросы, обозначим $\gamma(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с целой функцией $\varphi(z)$ (см. гл. I, § 1, п. 5). Если

$$\varphi(z) = \sum_0 \frac{a_n}{n!} z^n,$$

то

$$\gamma(t) = \sum_0 \frac{a_n}{t^{n+1}},$$

причем при условии (4.2) последний ряд сходится вне круга $|z| \leq \sigma$. Имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma+\varepsilon} \gamma(t) e^{tz} dt.$$

Рассмотрим функцию

$$F_1(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma+\varepsilon} f(s-t) \gamma(t) dt,$$

где $f(s)$ — сумма ряда (4.1) и точка s взята из полуплоскости $\operatorname{Re} s > c + \sigma + \varepsilon$. При фиксированном s и $|t| = \sigma + \varepsilon$ точка $u = s - t$ лежит на окружности R_σ радиуса $\sigma + \varepsilon$ с центром в точке s . Окружность R_σ лежит в полуплоскости сходимости ряда

$$\sum_1 a_n e^{-\lambda_n u},$$

на ней ряд сходится равномерно. Интегрируя почленно и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma+\varepsilon} \gamma(t) e^{\lambda_n t} dt = \varphi(\lambda_n),$$

получим

$$F_1(s) = \sum_1 a_n \varphi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} = F(s).$$

Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c + \sigma + \varepsilon$ ряд (4.3) сходится и его сумма $F(s)$ связана с суммой исходного ряда $f(s)$ соотношением

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma+\varepsilon} f(s-t) \gamma(t) dt. \quad (4.4)$$

Предположим, что имеется кривая l с началом в точке s_0 , $\operatorname{Re} s_0 > c + \sigma$, обладающая тем свойством, что у функции $f(s)$, если ее аналитически продолжить, нет особых точек в любом замкнутом круге радиуса σ с центром на кривой l . Из представления (4.4), где за ε можно взять любое сколь угодно малое положительное число, видно, что функцию $F(s)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой l . В этом и заключается теорема Крамера:

Теорема 2.4.1. Если абсцисса сходимости ряда (4.1) $c < \infty$, функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (4.2), то ряд (4.3) сходится во всяком случае в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c + \sigma$ и его сумма $F(s)$ аналитически продолжима из этой полуплоскости вдоль всякой кривой l , обладающей свойством: в любом замкнутом круге радиуса σ с центром на кривой l у $f(s)$ нет особых точек.

При $\sigma = 0$ функция $F(s)$ продолжима по всем кривым, по которым продолжима функция $f(s)$. Можно предположить, что в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c$ функция $f(s)$ задается не рядом Дирихле, а в форме

$$f(s) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{m_h} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (4.1')$$

где $\{m_h\}$ — некоторая последовательность целых положительных чисел, причем сходимость — равномерная в любой ограниченной

замкнутой части из полуплоскости $\operatorname{Re} s > c$. Функция $F(s)$ при этом определяется формулой

$$F(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n \varphi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}. \quad (4.3')$$

Функции $f(s)$ и $F(s)$, очевидно, связаны соотношением (4.4), поэтому относительно них будет верно следующее утверждение.

Теорема 2.4.2. Если последовательность (4.1') сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c$, функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию (4.2), то последовательность (4.3') сходится во всяком случае в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c + \sigma$ и функция $F(s)$ аналитически продолжима из этой полуплоскости вдоль всякой кривой l , обладающей свойством: в любом замкнутом круге радиуса σ с центром на кривой l у $f(s)$ нет особых точек.

2. Обобщение теоремы. Пусть по-прежнему выполняется условие (4.2). Введем функцию

$$h(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\varphi})|}{r}$$

— индикатрису роста функции $\varphi(z)$. Очевидно, $h(\varphi) \leq \sigma$. Если σ — наименьшее число, при котором выполняется условие (4.2), то при некоторых φ будет $h(\varphi) = \sigma$.

Рассмотрим, с другой стороны, наименьшее выпуклое замкнутое множество I плоскости, содержащее все особые точки ассоциированной функции $\gamma(t)$. Точку границы множества I , которая не является внутренней точкой прямолинейного отрезка границы, будем называть *крайней точкой* множества I . Если I — отрезок, то концы его и только они — крайние точки I . Если I — круг $|t| \leq R$, то все точки окружности $|t| = R$ — крайние точки I . Нетрудно видеть, что каждая крайняя точка I есть особая точка функции $\gamma(t)$. Возьмем луч $\arg t = \varphi$. Проведем вдали от начала прямую, перпендикулярную этому лучу, и будем ее двигать, не изменяя направления, до тех пор, пока она не соприкоснется с множеством I . Расстояние от прямой, когда она соприкасается с множеством I , до начала координат обозначим $K(\varphi)$ (если прямая пересекает продолжение луча $\arg t = \varphi$, считаем $K(\varphi) < 0$). Указанная прямая имеет уравнение

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = K(\varphi).$$

Это — опорная прямая множества I . На каждой опорной прямой лежит по крайней мере одна особая точка $\gamma(t)$. Функция $K(\varphi)$ называется *опорной функцией* множества I . Опорную функцию можно было бы определить еще и так:

$$K(\varphi) = \sup_{t \in I} \operatorname{Re}(te^{-i\varphi}).$$

Между опорной функцией множества I и индикатрисой роста целой функции $\varphi(z)$ имеется связь

$$K(\varphi) = h(-\varphi).$$

Множество I точнее характеризует расположение особых точек функции $\gamma(t)$, чем круг $|t| \leq \sigma$. В формуле (4.4) вместо контура $|t| = \sigma + \varepsilon$ можно взять замкнутую кривую L , охватывающую множество I . В силу этого можно получить (что и сделано Полна) уточнение теоремы Крамера.

Пусть L_ε — замкнутая кривая, охватывающая множество I , каждая точка которой отстоит от I меньше чем на ε . Имеем

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varepsilon} f(s-t) \gamma(t) dt. \quad (4.5)$$

Функцию $f(s)$ из полуплоскости сходимости ряда (4.1) будем аналитически продолжать за прямую сходимости. Чтобы продолженная функция была однозначной, проведем в случае необходимости разрезы. Область, в которой функция $f(t)$ оказалась аналитической и однозначной, обозначим D . В зависимости от разрезов область D может меняться. Множество, состоящее из особых точек функции $f(t)$, точек указанных разрезов и точек, внешних по отношению к D , обозначим S . Пусть $S + I$ — множество точек $(t_1 + it_2)$, где $t_1 \in S$, $t_2 \in I$. Если, например, S — прямая $\operatorname{Re} t = c$, а I — круг $|t| \leq 1$, то $S + I$ — вертикальная полоса $c - 1 \leq \operatorname{Re} t \leq c + 1$. Не следует смешивать введенное здесь понятие суммы с понятием суммы в теории множеств. Пусть E — дополнение к множеству $S + I$. Множество E — открытое. Оно в общем случае может состоять из нескольких связанных компонент — областей. Одна из них содержит полуплоскость $\operatorname{Re} s > c + \sigma$. Если, например, S — множество точек $2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), а I — круг $|t| \leq \pi$, то множество $S + I$ состоит из точек, принадлежащих кругам радиуса π с центрами в точках $2k\pi i$. В этом случае E состоит из двух областей: левой и правой.левой области принадлежит полуплоскость $\operatorname{Re} s < -\pi$, а правой — полуплоскость $\operatorname{Re} s > \pi$. Пусть G — ограниченная область, лежащая в E . Очевидно, число $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь малым, что функция $f(u)$ будет аналитической на множестве $G - L_\varepsilon$ (каждая точка u этого множества имеет вид $u = s - t$, где $s \in G$, а $t \in L_\varepsilon$). Отсюда, в силу (4.5), заключаем, что функция $F(s)$ в области G — аналитическая. Если G лежит в той компоненте множества E , которая содержит полуплоскость $\operatorname{Re} s > c + \sigma$, то функция $F(s)$, определенная формулой (4.5) в области G , есть аналитическое продолжение функции, определенной рядом (4.3). В других компонентах множества E

функция (4.5) регулярна, но вообще не есть аналитическое продолжение функции (4.3).

Приведем пример. Пусть

$$f(s) = \frac{1}{1-e^{-s}} = 1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots \quad (4.6)$$

Ряд сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Особые точки $f(s)$ — это полюсы $2k\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Совокупность этих точек и есть множество S . Пусть затем

$$\varphi(z) = \frac{\sin \pi z}{z}.$$

Для этой функции индикатриса $h(\varphi) = \pi |\sin \varphi|$. Поэтому множество I — вертикальный замкнутый отрезок длины 2π с центром в начале. Тогда множество $S+I$ — мнимая ось, а множество E состоит из двух компонент: левой полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$ и правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. В правой полуплоскости, в силу (4.6),

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} f(s-t) \gamma(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} \gamma(t) e^{nt} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) e^{-ns} = \varphi(0) = \pi, \end{aligned}$$

ибо $\varphi(n) = 0$ при $n = 1, 2, \dots$, а в левой полуплоскости, в силу равенства

$$f(s) = \frac{1}{1-e^{-s}} = -\frac{e^s}{1-e^s} = -e^s - e^{2s} - \dots,$$

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} -\varphi(-n) e^{ns} = 0.$$

Таким образом, в разных компонентах мы имеем разные аналитические функции.

Сформулируем полученный результат (теорема Крамера — Поля).

Теорема 2.4.3. Пусть S — множество особых точек функции $f(s)$ (определенной рядом (4.1)), включая внешние точки по отношению к области регулярности и разрезам, которые надо провести, чтобы функция $f(s)$ была однозначной. Пусть затем I — наименьшее выпуклое множество, содержащее все особые точки функции $\gamma(t)$, ассоциированной с целой функцией экспоненциального типа $\varphi(z)$, и E — дополнение к множеству $S+I$. Если D — та связная компонента E , которая содержит полуплоскость $\operatorname{Re} s > c + \sigma$

(σ — тип функции $\varphi(z)$), то в этой области D функция $F(s)$, определенная рядом (4.3), — аналитическая.

Можно было бы предположить, что функция $f(s)$ определяется в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c$ не рядом (4.1), а в форме (4.1'). При этом функция $F(s)$ определится по формуле (4.3'). Сформулированная теорема будет верна и в этом случае.

Интересно выяснить, при каких условиях можно утверждать, что те или иные точки границы области D будут особыми для функции $F(s)$. Имеет место следующая теорема Поля.

Теорема 2.4.4. Пусть s_0 — полюс или существенно особая точка $f(s)$ и j — крайняя точка множества I . Пусть затем S_0 — множество S без точки s_0 . Если точка $\xi = s_0 + j$ принадлежит границе области D из предыдущей теоремы, но не принадлежит множеству $S_0 + I$, то точка ξ — особая точка $F(s)$.

Докажем эту теорему. По условию точка s_0 — изолированная точка множества S . Поэтому множество S_0 и множество $S_0 + I$ — замкнутые. Точка ξ не принадлежит множеству $S_0 + I$. Следовательно, вокруг точки ξ можно провести круг, не содержащий точек из $S_0 + I$. Точка ξ — граничная точка множества E . По условию она — граничная точка именно области D .

Разложим $f(s)$ в ряд Лорана в окрестности точки s_0 :

$$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m A_m}{(s-s_0)^{m+1}} + h_2(s) = h_1(s) + h_2(s).$$

Здесь $h_2(s)$ регулярна в точке s_0 , а $h_1(s)$ регулярна всюду вне s_0 . Имеем

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} h_1(s-t) \gamma(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} h_2(s-t) \gamma(t) dt = \\ &= F_1(s) + F_2(s). \end{aligned}$$

Функция $h_2(s)$ регулярна вне множества S_0 . По предыдущему функция $F_2(s)$ регулярна в каждой компоненте дополнения E_0 к множеству $S_0 + I$. Точка ξ принадлежит E_0 . Поэтому $F_2(s)$ регулярна в точке ξ . Рассмотрим теперь функцию $F_1(s)$. Так как у $h_1(s)$ единственная особая точка s_0 , то $F_1(s)$ регулярна всюду в дополнении к $s_0 + I$, т. е. всюду вне множества $s_0 + I$. Пусть фиксированная точка s лежит вне $s_0 + I$. Число ε выберем столь малым, чтобы точка $u = s - t$, $t \in L_s$, удовлетворяла условию $|u - s_0| > \delta > 0$. Имеем

$$h_1(u) = h_1(s-t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m A_m}{(s-t-s_0)^{m+1}}.$$

Ряд, когда $t \in L_a$, сходится равномерно. Поэтому

$$F_1(s) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_m \frac{1}{2\pi i} \int_{L_a} \frac{\gamma(t)}{(s-t-s_0)^{m+1}} dt.$$

При малом ε точка $\alpha = s - s_0$ лежит вне контура L_a . Пусть C — контур, содержащий и L_a и точку α . Имеем

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma(t) dt}{(\alpha - t)^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_a} \frac{\gamma(t) dt}{(\alpha - t)^{m+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\gamma(t) dt}{(\alpha - t)^{m+1}}.$$

Последний интеграл берется по окружности малого радиуса с центром в точке α и, следовательно, равен $(-1)^{m+1} \frac{\gamma^{(m)}(\alpha)}{m!}$. Поэтому

$$F_1(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} \gamma^{(m)}(s - s_0).$$

Для доказательства теоремы надо показать, что точка $\xi = s_0 + j$ является особой для $F_1(s)$, или что точка j — особая для функции

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} \gamma^{(m)}(z). \quad (4.7)$$

Рассмотрим случай, когда s_0 — полюс для $f(s)$ порядка p . Тогда $A_m = 0$ при $m \geq p$ и

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{A_m}{m!} \gamma^{(m)}(z).$$

Тогда j — крайняя точка множества I , она поэтому особая для $\gamma(z)$. Но тогда она особая и для $\Phi(z)$ и, следовательно, в случае полюса теорема установлена.

Случай, когда s_0 — существенно особая точка, более сложен.

Известно, что $\gamma(z)$ выражается через целую функцию $\varphi(z)$ по формуле

$$\gamma(z) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-zt} dt.$$

Интегрирование происходит по лучу $\arg t = \varphi$ и интеграл, в силу условия

$$|\varphi(t)| < e^{h(\varphi + \varepsilon)|t|}, \quad |t| > r_0(\varepsilon),$$

сходится в полуплоскости

$$|z| \cos(\varphi + \psi) > h(\varphi), \quad \psi = \arg z,$$

ограниченной прямой, перпендикулярной лучу $\arg t = -\varphi$ и отстоящей от начала на расстояние $h(\varphi)$. Имеем

$$\gamma^{(m)}(z) = \int_0^{\infty} (-t)^m \varphi(t) e^{-zt} dt,$$

в силу чего

$$\sum_{m=0}^k \frac{A_m}{m!} \gamma^{(m)}(z) = \int_0^{\infty} \Phi_k(t) \varphi(t) e^{-zt} dt,$$

где

$$\Phi_k(t) = \sum_{m=0}^k \frac{A_m}{m!} (-t)^m.$$

Образуем функцию

$$\bar{\Phi}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} (-t)^m.$$

Так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|A_m|} = 0$$

(A_m — коэффициенты разложения $f(s)$ в ряд Лорана в окрестности точки s_0), то функция $\bar{\Phi}(t)$ — целая не выше первого порядка минимального типа. Если A_m заменить на $|A_m|$, то все равно получим функцию не выше первого порядка минимального типа. Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|A_m|}{m!} |t|^m < e^{\varepsilon|t|}, \quad |t| > r_0(\varepsilon). \quad (4.8)$$

Запишем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{\Phi}(t) \varphi(t) e^{-zt} dt - \sum_{m=0}^k \frac{A_m}{m!} \gamma^{(m)}(z) &= \int_0^{\infty} [\bar{\Phi}(t) - \Phi_k(t)] \varphi(t) e^{-zt} dt = \\ &= \int_0^a [\bar{\Phi}(t) - \Phi_k(t)] \varphi(t) e^{-zt} dt + \int_a^{\infty} [\bar{\Phi}(t) - \Phi_k(t)] \varphi(t) e^{-zt} dt. \end{aligned}$$

На основании (4.8) выберем a так далеко от начала, чтобы второй интеграл в правой части был по модулю меньше $\varepsilon/2$ при всех $k=0, 1, \dots$. После этого, поскольку на $[0, a]$ равномерно $\Phi_k(t) \rightarrow \bar{\Phi}(t)$ при $k \rightarrow \infty$, выберем N столь большим, чтобы первый интеграл при $k > N$ был меньше $\varepsilon/2$. В результате левая

часть по модулю при $k > N$ будет меньше ε . Это значит, имея в виду (4.7), что

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}(t) \varphi(t) e^{-zt} dt.$$

Значит, функция $\Phi(z)$ есть ассоциированная по Борелю с целой функцией $\bar{\Phi}(t)\varphi(t)$. Но известно, что индикатриса роста произведения двух функций $\bar{\Phi}(t)$ и $\varphi(t)$, из которых первая — не выше первого порядка минимального типа, и другая — первого порядка конечного типа, совпадает с индикатрисой роста $\varphi(z)$. Поэтому наименьшее выпуклое множество, содержащее все особые точки $\Phi(z)$, совпадает с множеством I . Следовательно, точка j — крайняя точка множества I , есть особая точка функции $\Phi(z)$.

Тот факт, что крайняя точка множества I есть особая точка для функции (4.7), может быть использован также для доказательства следующей теоремы Полна.

Теорема 2.4.5. Пусть целая функция $\varphi(z)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Если функция

$$f(s) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n s}$$

может быть продолжена из точки s_0 , принадлежащей полуплоскости сходимости ряда, до точки s_1 по разным кривым C_1 и C_2 и внутри области D , ограниченной этими кривыми, она имеет особые точки, то функция

$$F(s) = \sum_n a_n \varphi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}$$

(которая по доказанному продолжима по кривым C_1 и C_2) также имеет особые точки внутри области D .

Имеем (см. (4.5))

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varepsilon} f(s-t) \gamma(t) dt,$$

где, поскольку функция $\gamma(t)$ регулярна всюду кроме $t=0$, в качестве контура интегрирования берем окружность $|t|=\varepsilon$ малого радиуса ε . Положим

$$\gamma(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{t^{m+1}}$$

и заметим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|A_m|} = 0.$$

Подставив вместо функции $\gamma(t)$ ее выражение в форме ряда, получим

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} j^{(m)}(s).$$

Функцию $f(s)$ представим в виде суммы двух функций $\gamma_1(s)$ и $\gamma_2(s)$, из которых первая будет регулярна вне области D , а вторая — внутри области D . С этой целью обозначим L замкнутый контур, состоящий из C_1 и C_2 , и L_1 — замкнутый контур, начинающийся и оканчивающийся в точке s_1 , такой, что в области D_1 между L и L_1 у $f(s)$ нет особых точек. Пусть L лежит, ради определенности, внутри L_1 . Для $z \in D_1$ имеем

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t-s} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{f(t) dt}{t-s} = \gamma_1(s) + \gamma_2(s).$$

Функция $\gamma_2(s)$ регулярна внутри L_1 , функция $\gamma_1(s)$ регулярна всюду вне L , внутри L у $\gamma_1(s)$ есть особые точки (отличные от s_1). Проведем вертикальную прямую так, чтобы справа от нее у $\gamma_1(s)$ не было особых точек, а на самой прямой была хотя бы одна особая точка. Пусть j — самая верхняя особая точка $\gamma_1(s)$ на указанной прямой, она лежит внутри L , в ней функция $\gamma_2(s)$ — регулярная. Пусть I — наименьшее выпуклое множество, содержащее особые точки $\gamma_1(s)$. Точка j для I — крайняя точка. Имеем

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} \gamma_1^{(m)}(s) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} \gamma_2^{(m)}(s) = F_1(s) + F_2(s).$$

Функция $F_1(s)$ так же определяется через $\gamma_1(s)$, как и функция (4.7) через $\gamma(s)$. Поэтому точка j — крайняя точка множества I , есть особая для $F_1(s)$. В точке j , с другой стороны, функция $F_2(s)$ — аналитическая. Следовательно, точка j для функции $F(s)$ — особая. Это и доказывает теорему.

Следствие. Если в условиях теоремы область существования функции $F(s)$ — односвязная, то и область существования функции $f(s)$ также односвязная.

Если бы область существования $f(s)$ была неодносвязной, то можно было бы провести от точки s_0 из полуплоскости сходимости до некоторой точки s_1 такие кривые C_1 и C_2 , что вдоль них функция $f(s)$ продолжима, а в области D между ними имелись особые точки. Но тогда по доказанному в области D имела бы особые точки и функция $F(s)$; ее область существования, следовательно, не была бы односвязной, что невозможно.

3. Другое обобщение теоремы о продолжаемости. Это обобщение состоит в том, что в формуле (4.3) функцию $\varphi(z)$

предполагают не целой, а аналитической и экспоненциального типа в угле

$$-\alpha_1 \leq \arg z \leq \alpha_2 \quad (0 < \alpha_1 \leq \pi/2, 0 < \alpha_2 \leq \pi/2). \quad (4.9)$$

Его рассмотрел Зула в случае

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon|z|}, \quad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Однако, как показал В. Бернштейн, это обобщение можно рассмотреть и в общем случае, когда в угле (4.9)

$$|\varphi(z)| < e^{(\sigma + \varepsilon)|z|}, \quad |z| > r_0(\varepsilon). \quad (4.10)$$

Итак, пусть в угле (4.9) выполняется условие (4.10). Введем индикатрису роста

$$h(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(re^{i\varphi})|}{r}, \quad \alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_2.$$

Функцию $\gamma(z)$, ассоциированную с $\varphi(z)$, определим формулой

$$\gamma(z) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-zt} dt.$$

Интеграл берется по лучу $\arg t = \varphi$, он сходится в полуплоскости

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi > h(\varphi),$$

ограниченной прямой, перпендикулярной лучу $\arg t = -\varphi$ и отстоящей от начала на расстояние $h(\varphi)$. На граничной прямой (опорной прямой) у $\gamma(z)$ есть хотя бы одна особая точка. При изменении φ в пределах от $-\alpha_1$ до α_2 указанная полуплоскость опишет некоторую область D ; в ней функция $\gamma(z)$ — аналитическая. Дополнением к ней будет выпуклое замкнутое множество I , в отличие от предыдущего оно простирается теперь до бесконечности. Любая крайняя точка I есть особая для функции $\gamma(z)$. Вдоль любого направления ψ из области D :

$$-\alpha_1 - \frac{\pi}{2} < \psi < \alpha_2 + \frac{\pi}{2}, \quad (4.11)$$

функция $\gamma(z)$ при больших $|z|$ по модулю меньше $A/|z|$, где A — постоянная. Пусть L — бесконечная кривая, охватывающая множество I , одна ветвь которой уходит в бесконечность по направлению ψ_1 , близкому к $-\alpha_1 - \pi/2$, а другая — по направлению ψ_2 , близкому к $\alpha_2 + \pi/2$. Имеет место формула (обращение)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \gamma(z) e^{zt} dz$$

в угле $-\psi_1 + \pi/2 < \arg t < \psi_2 - \pi/2$.

Пусть

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s},$$

и пусть s лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} s > c + \sigma$. Рассмотрим функцию

$$F_1(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \gamma(t) f(s-t) dt, \quad (4.12)$$

где L — вышеописанный контур. В конечной фиксированной части его можно считать расположенным вблизи множества I . Когда s фиксировано, причем $\operatorname{Re} s > c + \sigma$, а $t \in L$, переменное $u = s - t$ пробегает бесконечный контур L_1 , расположенный в полуплоскости $\operatorname{Re} u > c$, ветви которого уходят в бесконечность по направлениям ω_1 и $-\omega_2$, причем $0 < \omega_1 < \pi/2$, $0 < \omega_2 < \pi/2$. На контуре L , следовательно, при больших $|t|$

$$|f(s-t)| < B e^{-\lambda_1 |s-t|} < B_1 e^{-\lambda_1 |t|},$$

где (при фиксированном s) B и B_1 — постоянные. На L , кроме того, $|\gamma(t)| < A/|t|$. Поэтому интеграл (4.12) сходится. При больших $|u|$, $|u| > u_0$, имеем (см. § 1, п. 2) при любых k (u_0 не зависит от k), когда $u \in L_1$,

$$\left| \sum_k a_n e^{-\lambda_n u} \right| < B e^{-\lambda_k |u|} < B e^{-\lambda_1 |u|} < B_1 e^{-\lambda_1 |t|}.$$

Имея это в виду и то, что ряд (4.1) сходится равномерно, получим из (4.12)

$$F_1(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} \frac{1}{2\pi i} \int_L \gamma(t) e^{\lambda_n t} dt = \sum_1^\infty a_n \varphi(\lambda_n) e^{-\lambda_n s} = F(s).$$

Итак, функцию $F(s)$, определяемую рядом (4.3), и в рассматриваемом случае можно представить интегралом прежней формы

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(s-t) \gamma(t) dt.$$

Используя это интегральное представление, можно дословно повторить рассуждения п. 2 и убедиться в том, что доказанные там две теоремы верны и в новом случае. Надо только иметь в виду следующее. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(t) dt}{(\alpha - t)^{m+1}},$$

где α лежит вне L , равен по-прежнему $\frac{(-1)^m}{m!} \gamma^{(m)}(\alpha)$. В самом деле, проведем окружность $|t| = R$, часть ее, внешнюю к L ,

обозначим C_R , а часть L , лежащую внутри $|t|=R$, обозначим L_R . Пусть Γ_R — замкнутый контур, состоящий из C_R и L_R (он проходит по часовой стрелке). Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\gamma(t) dt}{(a-t)^{m+1}} = (-1)^m \frac{\gamma^{(m)}(a)}{m!};$$

с другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\gamma(t) dt}{(a-t)^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{\gamma(t) dt}{(a-t)^{m+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{\gamma(t) dt}{(a-t)^{m+1}}.$$

Остается заметить, что при $R \rightarrow \infty$ первый интеграл в правой части стремится к нулю, а второй интеграл — к интегралу по контуру L .

Надо иметь в виду также то, что если имеются две функции $\Phi(z)$ и $\varphi(z)$, из которых первая — целая функция не выше первого порядка минимального типа, а вторая — экспоненциального типа в угле, то индикатриса роста произведения $\Phi(z)\varphi(z)$ равна индикатрисе функции $\varphi(z)$.

4. Ряды Дирихле, у которых показатели имеют конечную верхнюю плотность. Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

у которого показатели имеют конечную верхнюю плотность

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

Наряду с верхней плотностью D введем усредненную верхнюю плотность (см. [44], стр. 59)

$$D^* = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda D(x) dx, \quad D(x) = \frac{N(x)}{x},$$

где $N(\lambda)$ — число чисел λ_n , меньших λ . Убедимся, что

$$D^* \leq D \leq eD^*. \quad (4.13)$$

Поскольку при $\lambda_n < \lambda \leq \lambda_{n+1}$ функция $D(\lambda)$ равна n/λ ,

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} D(\lambda) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = D,$$

откуда $D^* \leq D$. Теперь заметим, что $D(\lambda) \geq n/\lambda$ при $\lambda > \lambda_n$, в силу чего

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda D(x) dx \geq \frac{1}{\lambda} \left[\int_0^{\lambda_n} D(x) dx + n \ln \frac{\lambda}{\lambda_n} \right].$$

Положим $\lambda = e\lambda_n$. Тогда

$$\bar{D}(e\lambda_n) \geq \frac{1}{e} \bar{D}(\lambda_n) + \frac{n}{e\lambda_n} \geq \frac{n}{e\lambda_n}$$

и, следовательно,

$$D^* = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{D}(\lambda) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{D}(e\lambda_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e\lambda_n} = \frac{D}{e}.$$

В силу (4.13), величины D и D^* равны нулю, конечны ($\neq 0$) или бесконечны одновременно. Положим

$$\Lambda(r) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Имеет место оценка (см. [44], стр. 69)

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \Lambda(r)}{r} \leq \pi D^*. \quad (4.14)$$

Для доказательства запишем

$$\ln \Lambda(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2}\right) = \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) dN(\lambda).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\ln \Lambda(r) = N(\lambda) \ln \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) \Big|_0^\infty + 2r^2 \int_0^\infty \frac{D(\lambda)}{\lambda^2 + r^2} d\lambda. \quad (4.15)$$

Подстановка равна нулю, ибо $N(0) = 0$ и $N(\lambda) \ln \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Последнее верно потому, что при больших λ величина $N(\lambda) < (D + \varepsilon)\lambda$, $\varepsilon > 0$. Интеграл из (4.15) возьмем по частям, будем иметь

$$\ln \Lambda(r) = -2r^2 \int_0^\infty \lambda \bar{D}(\lambda) d\lambda \left(\frac{1}{\lambda^2 + r^2} \right).$$

В силу этого

$$\frac{\ln \Lambda(r)}{r} = -2r \int_0^x \lambda \bar{D}(\lambda) d\lambda \left(\frac{1}{\lambda^2 + r^2} \right) - 2r \int_x^\infty \lambda \bar{D}(\lambda) d\lambda \left(\frac{1}{\lambda^2 + r^2} \right) \leq \\ \leq \max_{0 \leq \lambda \leq x} \bar{D}(\lambda) \int_0^x \frac{4r\lambda^2 d\lambda}{(\lambda^2 + r^2)^2} + \sup_{\lambda \geq x} \bar{D}(\lambda) \int_x^\infty \frac{4r\lambda^2 d\lambda}{(\lambda^2 + r^2)^2}.$$

Первый интеграл из правой части не превосходит $4x^3/r^3$, а второй — не превосходит π . Возьмем $\varepsilon > 0$. Выберем фиксированное x столь большим, чтобы было $\sup_{\lambda \geq x} \bar{D}(\lambda) < D^* + \varepsilon$. После этого выберем R так, чтобы при $r > R$ выполнялось неравенство

$$\frac{4x^3}{r^3} \max_{0 \leq \lambda \leq x} \bar{D}(\lambda) < \varepsilon.$$

Это можно сделать, ибо второй множитель ограничен. Таким образом,

$$\frac{\ln \Lambda(r)}{r} < \varepsilon + \pi(D^* + \varepsilon), \quad r > R,$$

откуда и следует (4.14).

Положим

$$L(z) = \prod_1 \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right).$$

В силу (4.14), $L(z)$ — целая функция из класса $[1, \pi D^*]$, т. е. растет не быстрее целой функции первого порядка конечного типа πD^* .

Введем функцию

$$L_k(z) = \prod_{n \neq k} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right).$$

Она из класса $[1, \pi D^*]$. Пусть $\gamma_k(\xi)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_k(z)$. Эта функция регулярна вне круга $|\xi| \leq \pi D^*$. Известно уже, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = \pi D^* + \varepsilon} f(s - \xi) \gamma_k(\xi) d\xi = F(s),$$

где

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L_k(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}.$$

В рассматриваемом случае $L_k(\lambda_n) = 0$ при всех $n \neq k$. Поэтому $F(s) = a_k L_k(\lambda_k) e^{-\lambda_k s}$ и, следовательно,

$$a_k L_k(\lambda_k) e^{-\lambda_k s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = \pi D^* + \varepsilon} f(s - \xi) \gamma_k(\xi) d\xi. \quad (4.16)$$

Когда ξ пробегает окружность $|\xi| = \pi D^* + \varepsilon$, переменная $u = s - \xi$ пробегает окружность C_s радиуса $(\pi D^* + \varepsilon)$ с центром в точке s . Предполагаем, что функция $f(u)$ регулярна внутри окружности C_s и на ней самой.

Формула (4.16) дает возможность оценить коэффициенты a_k ряда, если известна оценка суммы ряда $f(u)$ в круге C_s . Так как

$$|L_k(z)| \leq \prod_1 \left(1 + \frac{|z|^2}{\lambda_n^2} \right) < e^{(\pi D^* + \varepsilon)|z|}, \quad |z| > r_0(\varepsilon),$$

причем (это очень существенно) правая часть не зависит от k , то вне круга $|\xi| < \pi D^* + \varepsilon$ имеем

$$|\gamma_k(\xi)| \leq K_\varepsilon,$$

где постоянная K_ε не зависит от k .

Пусть

$$M_{s,\varepsilon} = \max_{|u-s| \leq \pi D^* + \varepsilon} |f(u)|.$$

Из (4.16) находим

$$|a_k| \leq \frac{(\pi D^* + \varepsilon) K_\varepsilon M_{s,\varepsilon}}{|L_k(\lambda_k)|} e^{\lambda_k s} \quad (s = \sigma + it). \quad (4.17)$$

Допустим, что имеется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в горизонтальной полосе D_{ε_0} : $|\operatorname{Im}(t - t_0)| \leq \pi D^* + \varepsilon_0$ ширины $2(\pi D^* + \varepsilon_0)$ у $f(s)$ нет особых точек. Предполагаем, что $f(s) \neq 0$, т. е. для некоторого k коэффициент $a_k \neq 0$. Из (4.17) видно тогда, что при стремлении s вдоль прямой $\operatorname{Im} t = \operatorname{Im} t_0$ к $-\infty$, при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$M_{s,\varepsilon} \rightarrow \infty.$$

Положим

$$f_\sigma(\xi) = f[(\sigma + it_0) - \xi], \quad \sigma + it_0 = s,$$

и заметим, что

$$M_{s,\varepsilon} = \max_{|\xi| \leq \pi D^* + \varepsilon} |f_\sigma(\xi)| = M'_{\sigma,\varepsilon}.$$

Нам предстоит рассмотреть семейство функций $\{f_\sigma(\xi)\}$. Предварительно напомним некоторые сведения относительно нормальных семейств аналитических функций (см. [48]). Бесконечное семейство $\{f(z)\}$ функций, регулярных в области B , называется нормальным в области B , если из каждой последовательности функций этого семейства можно выделить подпоследовательность,

равномерно сходящуюся внутри B к регулярной функции или к ∞ . Семейство называется *нормальным в точке* $z_0 \in B$, если оно нормально в некоторой окрестности этой точки. Если семейство нормально в области B , то оно нормально в каждой точке $z_0 \in B$. Обратно, если семейство $\{f(z)\}$ функций, регулярных в B , нормально в каждой точке $z_0 \in B$, то оно нормально в области B . Отметим следующий основной признак нормальности: если семейство $\{f(z)\}$ функций, регулярных в области B , таково, что существуют два различных конечных значения a и b , которые не принимает в B ни одна функция семейства, то семейство $\{f(z)\}$ нормально в B .

Вернемся к семейству $\{f_\sigma(\xi)\}$. Существуют две возможности: 1) в каждой точке круга $|\xi| \leq \pi D^*$ семейство нормально, 2) имеется хотя бы одна точка ξ_0 круга $|\xi| \leq \pi D^*$, в которой семейство не нормально. В случае 1) семейство будет нормальным в некотором круге $|\xi| < \pi D^* + \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 > 0$ (ибо если семейство нормально в точке, то оно нормально и в некоторой окрестности этой точки). Следовательно, из каждой последовательности функций из $\{f_\sigma(\xi)\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри $|\xi| < \pi D^* + \varepsilon_1$ к регулярной функции или к ∞ . Так как при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$, $M_{\sigma, \varepsilon} \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow -\infty$, то эта подпоследовательность не может сходиться к регулярной функции, она сходится к ∞ . Из этого вытекает, что в полосе D_0 : $|\operatorname{Im}(t - t_0)| \leq \pi D^*$ равномерно при $\sigma \rightarrow -\infty$ функция $f(s) \rightarrow \infty$. В самом деле, если бы это было не так, то нашлись бы такое число N и такие точки $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ из полосы D_0 ($\sigma_n = \operatorname{Re} s_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$), что выполнялось бы условие

$$|f(s_n)| \leq N.$$

Но тогда из последовательности функций $\{f_{\sigma_n}(\xi)\}$ нельзя было бы выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к ∞ (так как каждая функция последовательности в некоторой точке круга $|\xi| \leq \pi D^*$ по модулю меньше N), что невозможно.

Итак, в случае 1) в полосе D_0 функция $f(s)$ равномерно при $\sigma \rightarrow -\infty$ стремится к ∞ .

В случае 2) утверждаем, что прямая $\operatorname{Im} s = t_0 - \operatorname{Im} \xi_0 = \mu_0$ является для функции $f(s)$ *прямой Жулиа*: в любой полосе $|\operatorname{Im}(t - \mu_0)| < \varepsilon$ функция $f(s)$ принимает бесконечно много раз каждое значение, за исключением, быть может, одного. Допустим противное: имеются два различных значения a и b такие, что каждое из них функция $f(s)$ либо не принимает, либо принимает лишь в конечном числе точек полосы $|\operatorname{Im}(t - \mu_0)| < \varepsilon$. Тогда найдется число σ_0 такое, что при $\sigma \leq \sigma_0$ функция $f(s)$ в полосе $|\operatorname{Im}(t - \mu_0)| < \varepsilon$ не принимает значений a и b . Следовательно, при больших $-\sigma$ каждая функция семейства $\{f_\sigma(\xi)\}$ в окрестности $|\xi - \xi_0| < \varepsilon$ точки ξ_0 не принимает значений a и b .

Это семейство поэтому — нормальное в указанной окрестности, что невозможно, ибо семейство $\{f_\sigma(\xi)\}$ в точке ξ_0 не является нормальным.

Два разобранных случая были рассмотрены в предположении, что имеется такое $\varepsilon_0 > 0$, что в полосе D_{ε_0} функция $f(s)$ — регулярная. Если такое предположение нельзя сделать, то, значит, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в полосе D_ε у функции $f(s)$ есть особые точки. Таким образом, приходим к следующей теореме Мандельброта [44].

Теорема 2.4.6. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty,$$

то функция

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

или 1) при любом $\varepsilon > 0$ в полосе $|\operatorname{Im}(t - t_0)| < \pi D^* + \varepsilon$ имеет особые точки, или 2) в полосе $|\operatorname{Im}(t - t_0)| \leq \pi D^*$ либо равномерно стремится при $\sigma \rightarrow -\infty$ к ∞ , либо обладает по крайней мере одной прямой Жулиа.

Допустим теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0. \quad (4.18)$$

Покажем, что у функции $f(s)$ имеются особые точки в определенной окрестности каждой точки прямой сходимости. С этой целью обратимся к формуле (4.17). Надо оценить знаменатель $L_h(\lambda_k)$. При условии (4.18) имеем (см. [44], стр. 68)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \frac{1}{L_h(\lambda_k)} \right|}{\lambda_k} \leq 3 [3 - \ln(hD)] D. \quad (4.19)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $D \leq 1/h$ так, что $hD \leq 1$.

Из (4.19) находим

$$\left| \frac{1}{L_h(\lambda_k)} \right| < e^{(\beta + \varepsilon) \lambda_k}, \quad k > K(\varepsilon), \quad \beta = 3 [3 - \ln(hD)] D. \quad (4.20)$$

Предположим, что у функции $f(u)$ нет особых точек в замкнутом круге радиуса $(\pi D^* + \beta)$ с центром в точке $s_0 = \sigma_0 + it_0$ на прямой сходимости ряда $\operatorname{Re} s = c$. Пусть $s = \sigma + it_0$ — такая точка этого круга, что она лежит на одной горизонтали с точкой s_0 , $\sigma_0 - \sigma = \beta + \delta$, $\delta > 0$, функция $f(u)$ регулярна в круге с центром в точке s радиуса $\pi D^* + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Из формулы (4.17), согласно (4.20), получим

$$\ln |a_k| < \ln |(\pi D^* + \varepsilon) K_\varepsilon M_{\varepsilon, \varepsilon}| + (\sigma + \beta + \varepsilon) \lambda_k, \quad k > K(\varepsilon),$$

и, следовательно,

$$c = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k} \leq \sigma + \beta = \sigma_0 - \delta < c,$$

что невозможно. Значит, в круге радиуса $(\pi D^* + \beta)$ с центром в точке s_0 у функции $f(u)$ есть особые точки. Мы получили теорему Островского (см., например, [44]).

Теорема 2.4.7. При условии (4.18) функция

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

в каждом замкнутом круге радиуса

$$\pi D^* + 3[3 - \ln(hD)] D$$

с центром в точке на прямой сходимости ряда имеет хотя бы одну особую точку.

§ 5. Ряды Дирихле с показателями, имеющими конечную плотность

Мы говорим, что последовательность $\{\lambda_k\}$, $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, имеет плотность σ , если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \sigma.$$

Здесь будут изучены ряды Дирихле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}, \quad (5.1)$$

у которых показатели образуют последовательность, имеющую конечную плотность σ .

1. Формулы для коэффициентов ряда. Рассмотрим функцию

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Это — целая функция экспоненциального типа. Она обладает следующими свойствами (теорема 1.2.9):

1) для $\lambda = re^{i\varphi}$, $\varphi \neq 0, \pi$, существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} = \pi \sigma |\sin \varphi|; \quad (5.2)$$

2) имеются числа $\rho > 0$ и r_k , $r_k \uparrow \infty$, $\frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > (\pi \sigma |\sin \varphi| - \varepsilon) r, \quad (5.3)$$

$$r_k - \rho \leq r \leq r_k + \rho, \quad k > K(\varepsilon);$$

3) при дополнительном условии

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0, \quad (5.4)$$

в качестве чисел r_k можно взять числа

$$r_k = \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2} \quad (k \geq 1);$$

4) при условии (5.4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = 0. \quad (5.5)$$

Из (5.2) следует, что индикатриса роста $h(\varphi)$ функции $L(\lambda)$ равна $\pi \sigma |\sin \varphi|$. Отсюда далее следует, что особенности функции $\gamma(t)$, ассоциированной по Борелю с $L(\lambda)$, расположены на вертикальном отрезке I длины $2\pi \sigma$ с серединой в начале координат.

Наряду с рядом (5.1) введем ряд

$$F(z) = f(-z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}. \quad (5.6)$$

Пусть ряд (5.1) сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$. Тогда ряд (5.6) сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a_1 = -a$. Имея это в виду, рассмотрим функцию

$$\omega(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha \mu} \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu \eta} d\eta \right) dt, \quad (5.7)$$

где C — замкнутый контур, охватывающий отрезок I , α — параметр. Когда η пробегает отрезок от 0 до t , точка $(t - \eta)$ также пробегает этот отрезок. Поэтому $(t + \alpha - \eta) \in C_\alpha$, где C_α — смещение C на вектор α . Считаем, что α лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z < a_1$. Если ширину C взять достаточно малой, то C_α будет лежать в этой полуплоскости.

Утверждаем, что

$$a_k = \frac{\omega(\lambda_k, \alpha, F)}{L'(\lambda_k)} \quad (k \geq 1). \quad (5.8)$$

Для доказательства подсчитаем

$$\omega(\lambda_k, \alpha, \Phi), \quad \Phi(z) = e^{\lambda_k z}.$$

Имеем

$$\int_0^t \Phi(t + \alpha - \eta) e^{\lambda_k \eta} d\eta = \int_0^t e^{\lambda(t + \alpha - \eta)} e^{\lambda_k \eta} d\eta = e^{\alpha \lambda} \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda_k t}}{\lambda - \lambda_k},$$

в силу чего

$$\omega(\lambda_k, \alpha, \Phi) = e^{\alpha(\lambda - \lambda_k)} \frac{L(\lambda) - L(\lambda_k)}{\lambda - \lambda_k}.$$

Отсюда для $\Phi_m(z) = e^{k m^2}$

$$\omega(\lambda_k, \alpha, \Phi_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ L'(\lambda_k), & k = m. \end{cases}$$

На основании этого сразу вытекает (5.8).

Предположим, что функция $f(z)$ аналитически продолжается из полуплоскости сходимости ряда (5.1) справа налево в канал $b \leq \operatorname{Re} z \leq a$, $\alpha \leq \operatorname{Im} z \leq \beta$, $\beta - \alpha > 2\pi\sigma$. Тогда функция (5.6) будет аналитически продолжаться из полуплоскости $\operatorname{Re} z < a_1$, слева направо в канал K : $a_1 \leq \operatorname{Re} z \leq b_1 = -b$, $a_1 \leq \operatorname{Im} z \leq \beta_1$, $\beta_1 - \alpha_1 > 2\pi\sigma$. Из формулы (5.7) видно, что $\omega(\mu, \alpha, F)$, как функция α , будет аналитической для α из полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha < a_1$ и на средней линии

$$l: a_1 \leq \operatorname{Re} z \leq b_1, \quad \operatorname{Im} z = \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}$$

канала K . Отсюда, в силу (5.8), получаем

$$a_k = \frac{\omega(\lambda_k, \alpha, F)}{L'(\lambda_k)} \quad (k \geq 1), \quad \alpha \in l. \quad (5.9)$$

Пусть r_k — числа из (5.3), и пусть $m_k (k \geq 1)$ — целое число, удовлетворяющее условию

$$\lambda_{m_k} < r_k, \quad \lambda_{m_k+1} > r_k.$$

На основании формул (5.9) установим следующее утверждение.

Теорема 2.5.1. Пусть функция (5.1) аналитически продолжается из полуплоскости сходимости ряда (5.1) в канал $b \leq \operatorname{Re} z \leq a$, $\alpha \leq \operatorname{Im} z \leq \beta$, $\beta - \alpha > 2\pi\sigma$. Тогда $f(z)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} z > b$ и в этой полуплоскости представляется в виде

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{m_k} a_v e^{-\lambda_v z}.$$

Для доказательства рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\mu, \alpha, F) e^{-\mu z}}{L(\mu)} d\mu, \quad \alpha \in l,$$

где Γ — граница угла $|\arg \mu| < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_1(\mu, \alpha, F) e^{-\mu(z+\alpha)}}{L(\mu)} d\mu, \quad (5.10)$$

где

$$\omega_1(\mu, \alpha, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta \right) dt.$$

При данном $\varepsilon > 0$ контур C можно выбрать столь близким к l , что получим

$$|\omega_1(\mu, \alpha, F)| < A(\varepsilon) e^{(\pi\sigma |\sin \varphi| + \varepsilon) |\mu|}, \quad \mu = |\mu| e^{i\varphi}. \quad (5.11)$$

На основании (5.2) отсюда следует

$$\left| \frac{\omega_1(\mu, \alpha, F)}{L(\mu)} \right| < B(\varepsilon) e^{2\varepsilon |\mu|}, \quad \mu \in \Gamma. \quad (5.12)$$

В силу (5.3), оценка (5.12) имеет место также на окружностях $|\mu| = r_k$.

Из (5.12) вытекает, что интеграл (5.10) сходится и представляет собой аналитическую функцию в угле

$$|\arg(z + \alpha)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0.$$

Пусть Γ_k — конечный замкнутый контур, ограниченный дугой $|\mu| = r_k$, $|\arg \mu| \leq \varphi_0$ и частью Γ , отсекаемой окружностью $|\mu| = r_k$, а $\tilde{\Gamma}_k$ — бесконечный контур, ограниченный той же дугой (но проходимой в другом направлении) и другой частью Γ . В силу (5.9), имеем

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, F) e^{-\mu z}}{L(\mu)} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_k} \frac{\omega_1(\mu, \alpha, F) e^{-\mu(z+\alpha)}}{L(\mu)} d\mu = \\ &= \sum_{v=1}^{m_k} a_v e^{-\lambda_v z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_k} \frac{\omega_1(\mu, \alpha, F) e^{-\mu(z+\alpha)}}{L(\mu)} d\mu. \end{aligned}$$

На $\tilde{\Gamma}_k$ имеет место оценка (5.12). Пусть $z + \alpha = \rho e^{i\psi}$, и пусть $\rho \geq \delta > 0$, $|\psi| \leq \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \delta_1$, $\delta_1 > 0$. Тогда

$$|e^{-\mu(z+\alpha)}| = e^{-|\mu| \rho \cos(\varphi + \psi)} < e^{-(\delta \sin \delta_1) |\mu|}$$

и, значит,

$$\left| \frac{\omega_1(\mu, \alpha, F) e^{-\mu(z+\alpha)}}{L(\mu)} \right| < B(\varepsilon) e^{-(\delta \sin \delta_1 - 2\varepsilon) |\mu|},$$

При малом $\varepsilon > 0$ выражение $(\delta \sin \delta_1 - 2\varepsilon)$ положительно. Следовательно, интеграл по контуру $\bar{\Gamma}_k$ при $k \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Получаем

$$\Phi(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{m_k} a_\nu e^{-\lambda_\nu z}. \quad (5.13)$$

Поскольку числа δ , δ_1 и φ_0 — любые, а в качестве α можно взять самую правую точку средней линии l , заключаем, что представление (5.13) имеет место в полуплоскости $\operatorname{Re} z > b$. В силу (5.1) имеем $\Phi(z) = f(z)$. Утверждение доказано.

2. Теоремы об особенностях. Величина

$$\delta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right|$$

называется индексом конденсации последовательности $\{\lambda_k\}$. Имеет место следующая теорема (см. [65]).

Теорема 2.5.2. Разность между абсциссой сходимости a ряда (5.1) и абсциссой голоморфизма g суммы ряда не превосходит индекса конденсации последовательности $\{\lambda_k\}$: $a - g \leq \delta$.

На основании (5.9) и (5.11) имеем

$$|a_k| \leq A(e) e^{\varepsilon_1 k} \frac{e^{-\alpha \lambda_k}}{L'(\lambda_k)}, \quad \alpha = -g - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Отсюда

$$a = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k} \leq -\alpha + \delta$$

или $a - g \leq \delta + \varepsilon_1$. Так как $\varepsilon_1 > 0$ — любое, то $a - g \leq \delta$.

Отметим другую теорему В. Бернштейна.

Теорема 2.5.3. В полуплоскости голоморфизма $\operatorname{Re} z > g$ функция (5.1) представляется в виде

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{m_k} a_\nu e^{-\lambda_\nu z};$$

если $g > -\infty$, то в каждом замкнутом отрезке длины $2\pi\sigma$ прямой голоморфизма у функции $f(z)$ имеется по крайней мере одна особая точка.

Эта теорема — непосредственное следствие утверждения из п. 1.

Отметим частные случаи.

Теорема В. Бернштейна. Если $\delta = 0$, в частности, если выполняется условие (5.4), то каждый отрезок длины $2\pi\sigma$ прямой сходимости содержит по меньшей мере одну особую точку суммы ряда.

Теорема Карлсона и Ландау. Если $\sigma = 0$ и выполняется условие (5.4), то прямая сходимости ряда является естественной границей для суммы ряда.

Теорема Полна. Если $\sigma = 0$, то ряд (5.1) определяет собой или целую функцию или функцию, область существования которой есть полуплоскость.

§ 6. Ряды Дирихле, сходящиеся во всей плоскости

Займемся изучением целых функций

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (6.1)$$

определенных всюду сходящимися рядами Дирихле. Во всем дальнейшем будем предполагать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty. \quad (6.2)$$

В силу этого условия ряд (6.1), поскольку он сходится во всей плоскости, сходится во всей плоскости абсолютно. Положим

$$M(\sigma) = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(\sigma + it)|.$$

Теорема 2.6.1. Выражение $\ln M(\sigma)$ является выпуклой функцией от σ (см. [71]).

Для доказательства воспользуемся следующей теоремой Фрагмена — Линделёфа: пусть функция $F(s)$ регулярна и ограничена в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. Если на граничных прямых этой полосы $|F(s)| \leq M$, то и внутри полосы $|F(s)| \leq M$.

Выберем число a так, чтобы было

$$M(\sigma_1) e^{a\sigma_1} = M(\sigma_2) e^{a\sigma_2}. \quad (6.3)$$

Отсюда находим

$$e^a = M(\sigma_1)^{-\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}} M(\sigma_2)^{\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2}}. \quad (6.4)$$

Возьмем функцию $f(s) e^{as}$ и применим к ней теорему Фрагмена — Линделёфа. Учитывая (6.3), получим

$$M(\sigma) e^{a\sigma} \leq M(\sigma_1) e^{a\sigma_1},$$

откуда, имея в виду (6.4), найдем

$$M(\sigma) \leq M(\sigma_1) e^{a(\sigma_1 - \sigma)} = \\ = M(\sigma_1) M(\sigma_1)^{-\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}} M(\sigma_2)^{\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}} = M(\sigma_1)^{\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}} M(\sigma_2)^{\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}},$$

что и надо было показать.

Из выпуклости следует (см. § 2, п. 5), что $\ln M(\sigma)$, а следовательно, и $M(\sigma)$ — непрерывные функции. Убедимся в том, что $M(\sigma)$ — убывающая функция от σ . Имеем при $\sigma > 0$

$$M(\sigma) \leq e^{-\lambda_1 \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-(\lambda_n - \lambda_1) \sigma} \leq e^{-\lambda_1 \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

откуда заключаем, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \ln M(\sigma) = -\infty.$$

Следовательно, в силу выпуклости $\ln M(\sigma)$, функция $\ln M(\sigma)$, а потому и функция $M(\sigma)$ убывают.

Посредством величины $M(\sigma)$ определим понятие R -порядка и R -типа функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле.

1. R -порядок и R -тип. R -порядком целой функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (6.1), будем называть величину

$$\rho = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma)}{-\sigma}. \quad (6.5)$$

Эта величина была введена Риттом [80]. Ее не надо смешивать с обычным порядком целой функции. Так, для функции e^{-s} обычный порядок (порядок в классическом смысле) равен единице, а R -порядок равен нулю.

Теорема 2.6.2. R -порядок целой функции (6.1) вычисляется по формуле

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n} = -\frac{1}{\rho}. \quad (6.6)$$

Допустим, что R -порядок функции $f(s)$ конечен, и докажем, что тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n} \leq -\frac{1}{\rho}. \quad (6.7)$$

Имеем (см. формулу (1.22)) при любом σ

$$a_n e^{-\lambda_n \sigma} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\sigma + iy) e^{\lambda_n iy} dy,$$

откуда находим

$$|a_n e^{-\lambda_n \sigma}| \leq M(\sigma),$$

или

$$|a_n| \leq M(\sigma) e^{\lambda_n \sigma}. \quad (6.8)$$

Обратимся теперь к выражению (6.5). Из него, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, получаем для больших $(-\sigma)$

$$\ln M(\sigma) < e^{-(\rho + \varepsilon)\sigma}.$$

Следовательно, в силу (6.8), можно утверждать, что при больших $(-\sigma)$

$$\ln |a_n| < \ln M(\sigma) + \lambda_n \sigma < e^{-(\rho + \varepsilon)\sigma} + \lambda_n \sigma.$$

Правая часть этого неравенства имеет минимум при

$$\sigma = \sigma_0 = -\frac{1}{\rho + \varepsilon} \ln \frac{\lambda_n}{\rho + \varepsilon},$$

причем величина σ_0 стремится к $-\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Заменяя в вышеуказанном неравенстве σ на σ_0 (при больших n это можно сделать), получим, что при больших n

$$\ln |a_n| < \frac{\lambda_n}{\rho + \varepsilon} \left(1 - \ln \frac{\lambda_n}{\rho + \varepsilon}\right),$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n \ln \lambda_n} \leq -\frac{1}{\rho + \varepsilon}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то, следовательно, верно (6.7).

Покажем теперь, что если выполняется соотношение (6.6) при $\rho < \infty$, то R -порядок функции $f(s)$ не превосходит ρ . Из (6.6) при любом $\varepsilon > 0$ находим для $n > 0$

$$|a_n| < B(\varepsilon) e^{-\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\rho + \varepsilon}},$$

где $B(\varepsilon)$ — некоторая постоянная, зависящая от ε . В силу этого получаем

$$M(\sigma) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} < B(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\rho + \varepsilon} - \lambda_n \sigma}.$$

Так как

$$-\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\rho + \varepsilon} = -\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\rho + 2\varepsilon} - a \lambda_n \ln \lambda_n, \quad a = \frac{\varepsilon}{(\rho + \varepsilon)(\rho + 2\varepsilon)},$$

то

$$M(\sigma) < B(\varepsilon) \max_{n \geq 1} \left\{ e^{-\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{\rho + 2\varepsilon} - \lambda_n \sigma} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a \lambda_k \ln \lambda_k}.$$

Поскольку, в силу условия (6.2), $\lambda_k > b \ln k$, где $b > 0$, то

$$\sum_{k=2}^{\infty} e^{-a \lambda_k \ln \lambda_k} < \sum_{k=2}^{\infty} e^{-ab \ln k \cdot \ln \lambda_k} = \sum_{k=2}^{\infty} k^{-ab \ln \lambda_k} < \infty.$$

Поэтому

$$M(\sigma) < C(\varepsilon) \max_{n \geq 1} \left\{ e^{-\delta \lambda_n \ln \lambda_n - \lambda_n \sigma} \right\} \leq C(\varepsilon) \max_{x \geq 1} \left\{ e^{-\delta x \ln x - \sigma x} \right\},$$

где $\delta = 1/(\rho + 2\varepsilon)$. Указанный максимум достигается в точке

$$x = e^{1 - \frac{\sigma}{\delta}}$$

и равен

$$\exp\left(\delta e^{-\left(1+\frac{\sigma}{\delta}\right)}\right).$$

Таким образом,

$$\ln M(\sigma) \leq \ln C(\varepsilon) + \delta e^{-\left(1+\frac{\sigma}{\delta}\right)} < e^{-\left(\frac{1}{\delta}+\varepsilon\right)\sigma},$$

откуда, так как $\delta = 1/(\rho + 2\varepsilon)$ и ε — любое, получаем, что

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\ln \ln M(\sigma)}{-\sigma} \leq \rho.$$

Из двух установленных утверждений следует искомая формула (6.6).

Формула (6.6) для определения R -порядка может иметь место, конечно, и в ряде случаев, когда не выполняется условие (6.2). В [84] показано, что эта формула справедлива, в частности, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln N(x)}{x \ln x} = 0, \quad N(x) = \sum_{|x| \leq \lambda_n < x} 1.$$

Предположим, что функция $f(s)$ имеет R -порядок, равный ρ , причем $0 < \rho < \infty$. Положим

$$\tau = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\ln M(\sigma)}{e^{-\rho\sigma}}. \quad (6.9)$$

Величину τ назовем R -типом функции $f(s)$.

Теорема 2.6.3. Если выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H = 0,$$

то R -тип вычисляется по формуле

$$(\tau e \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_n^{\frac{1}{\rho}}} |a_n|^{\frac{1}{\lambda_n}},$$

или

$$\tau = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{e \rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}. \quad (6.10)$$

Положим

$$q = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{e \rho} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}}.$$

Убедимся сначала в том, что если R -тип функции $f(s)$ есть τ , то величина $q \leq \tau$. Из (6.9), принимая во внимание неравенство (6.8), выводим, что при больших $(-\sigma)$

$$\ln |a_n| \leq \ln M(\sigma) + \lambda_n \sigma < (\tau + \varepsilon) e^{-\rho\sigma} + \lambda_n \sigma.$$

Правая часть имеет минимум при

$$\sigma = \sigma_0 = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{\lambda_n}{\rho(\tau + \varepsilon)}$$

(когда $n \rightarrow \infty$, то величина σ_0 стремится к $-\infty$), и он равен

$$\frac{\lambda_n}{\rho} \left(1 - \ln \frac{\lambda_n}{\rho(\tau + \varepsilon)}\right).$$

Поэтому при больших n

$$|a_n| < e^{\frac{\lambda_n}{\rho}} \left[\frac{\rho(\tau + \varepsilon)}{\lambda_n} \right]^{\frac{\lambda_n}{\rho}},$$

или

$$\frac{\lambda_n}{\rho e} |a_n|^{\frac{\rho}{\lambda_n}} < \tau + \varepsilon,$$

откуда $q \leq \tau$.

Покажем теперь, что если $q = \tau$, т. е. если выполняется (6.10), то R -тип функции $f(s)$ не превосходит τ . Из (6.10) при любом $\varepsilon > 0$ для всех $n > 0$ находим

$$|a_n| < B(\varepsilon) \left[\frac{(\tau + \varepsilon) e \rho}{\lambda_n} \right]^{\frac{\lambda_n}{\rho}},$$

где $B(\varepsilon)$ — некоторая постоянная. Отсюда

$$M(\sigma) \leq \sum_1^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} < B(\varepsilon) \sum_1^{\infty} e^{\frac{\lambda_n}{\rho} \ln \frac{(\tau + \varepsilon) e \rho}{\lambda_n} - \lambda_n \sigma}.$$

Так как

$$\frac{\lambda_n}{\rho} \ln \frac{(\tau + \varepsilon) e \rho}{\lambda_n} = \frac{\lambda_n}{\rho} \ln \frac{(\tau + 2\varepsilon) e \rho}{\lambda_n} - \delta \lambda_n, \quad \delta = \frac{1}{\rho} \ln \frac{\tau + 2\varepsilon}{\tau + \varepsilon},$$

то

$$M(\sigma) \leq B(\varepsilon) \max_{n \geq 1} \left\{ e^{\frac{\lambda_n}{\rho} \ln \frac{(\tau + 2\varepsilon) e \rho}{\lambda_n} - \lambda_n \delta} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta \lambda_k}.$$

Из условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$$

находим, что при больших k

$$\lambda_k > \frac{2}{\delta} \ln k,$$

в силу чего

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta \lambda_k} < \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2 \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Таким образом,

$$M(\sigma) \leq C(\sigma) \max_{x>1} \left\{ e^{\frac{x}{\sigma} \ln \frac{(\tau+2e)\sigma}{x} - x\sigma} \right\}.$$

Указанный максимум достигается в точке

$$x = x_0 = (\tau + 2e) e^{-\sigma},$$

и он равен

$$\exp[(\tau + 2e) e^{-\sigma}].$$

Поэтому при больших $(-\sigma)$

$$\ln M(\sigma) < (\tau + 3e) e^{-\sigma}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\ln M(\sigma)}{e^{-\sigma}} \leq \tau,$$

т. е. R -тип функции $f(s)$ меньше или равен τ . Из всех этих рассуждений и следует, что R -тип вычисляется по формуле (6.10).

2. Максимальный член ряда Дирихле. Для ряда (6.1) введем величину

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 1} (|a_n| e^{-\lambda_n \sigma}),$$

она называется *максимальным членом ряда*. Так как при $n \rightarrow \infty$

$$a_n e^{-\lambda_n \sigma} \rightarrow 0,$$

то найдется номер $n(\sigma)$ такой, что

$$\mu(\sigma) = |a_{n(\sigma)}| e^{-\lambda_{n(\sigma)} \sigma}.$$

Если последнее равенство выполняется для нескольких номеров, то $n(\sigma)$ обозначает наибольший из них. Номер $n(\sigma)$ будем называть *центральный индекс*. Задача заключается в том, чтобы получить для максимального члена формулу, аналогичную формуле для максимального члена в ряде Тейлора.

Отметим на плоскости точки P_n с координатами $(\lambda_n, -\ln |a_n|)$. Если для некоторого n коэффициент $a_n = 0$, то будем считать, что ордината точки P_n равна $+\infty$. Ряд (6.1) сходится во всей плоскости. Поэтому имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = -\infty.$$

Значит, при больших n точки P_n будут находиться над осью абсцисс и углы, под которыми они видны из начала, стремятся к $\pi/2$. Имея это в виду, построим следующим образом так называемый *выпуклый полигон Ньютона* L . Через точку P_1 (можно считать $a_1 \neq 0$) проведем вертикально вниз луч и будем его вращать вокруг P_1 против часовой стрелки до тех пор, пока

он не соприкоснется с какой-либо из точек $\{P_n\}$. Пусть этот луч в момент соприкосновения занимает положение луча l_1 . На луче l_1 лежит точка P_1 и еще по крайней мере одна точка из $\{P_n\}$. Наиболее дальней от P_1 точкой из $\{P_n\}$, лежащей на l_1 , пусть будет точка P_{n_1} . Участок l_1 от точки P_1 до точки P_{n_1} есть первое звено искомого полигона (ломаной) Ньютона. Чтобы получить второе звено, возьмем луч, выходящий из точки P_{n_1} и расположенный в направлении l_1 , и будем его вращать против часовой стрелки до соприкосновения с точками из $\{P_n\}$. В момент соприкосновения пусть он займет положение l_2 . Участок l_2 от точки P_{n_1} до точки P_{n_2} , наиболее далекой от P_{n_1} , есть второе звено полигона Ньютона. Аналогичным образом строятся и другие звенья полигона Ньютона. Отметим, что с ростом номера звена угол наклона звена стремится к $\pi/2$.

Ординату точки полигона Ньютона L с абсциссой λ_n обозначим G_n . Для бесконечного множества значений n , в частности, для $n = n_i$ ($i = 1, 2, \dots$) имеем

$$G_n = -\ln |a_n|.$$

Точка P_n лежит либо на полигоне L (точка P_{n_i} обязательно лежит на полигоне), либо над ним.

Проведем прямую l с угловым коэффициентом $(-\sigma)$ так, чтобы она соприкасалась с L , но не пересекала его. Пусть она соприкасается с L в точке $P_{n(\sigma)}$ с абсциссой $\lambda_{n(\sigma)}$ (если соприкосновение происходит не в одной точке, берем за $\lambda_{n(\sigma)}$ наибольшую абсциссу). Убедимся в том, что $n(\sigma)$ есть центральный индекс. Пусть $m > n = n(\sigma)$. Так как точка P_m лежит на или выше полигона L , то, положив $-\ln |a_m| = \theta_m$, имеем

$$-\sigma \leq \frac{G_m - G_n}{\lambda_m - \lambda_n} \leq \frac{\theta_m - \theta_n}{\lambda_m - \lambda_n}, \quad G_n = \theta_n,$$

откуда

$$-(\lambda_m - \lambda_n) \sigma \leq -\ln |a_m| + \ln |a_n|,$$

или

$$|a_m| e^{-\lambda_m \sigma} \leq |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}. \quad (6.11)$$

Пусть теперь $m < n$. Тогда

$$\frac{\theta_n - \theta_m}{\lambda_n - \lambda_m} \leq \frac{G_n - G_m}{\lambda_n - \lambda_m} \leq -\sigma,$$

откуда находим

$$|a_m| e^{-\lambda_m \sigma} \leq |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Это неравенство и неравенство (6.11) показывают, что $|a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$ — максимальный член ряда Дирихле, а его номер $n = n(\sigma)$ есть, следовательно, центральный индекс.

Если угловой коэффициент $(-\sigma)$ прямой l удовлетворяет условию

$$-\sigma < \frac{G_2 - G_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

то прямая l соприкасается с полигоном L в точке P_1 ; следовательно, центральный индекс $n(\sigma)$ равен единице и максимальный член есть

$$|a_1| e^{-\lambda_1 \sigma} = e^{-G_1} e^{-\lambda_1 \sigma}.$$

Таким образом,

$$\ln \mu(\sigma) = -\lambda_1 \sigma - G_1, \quad -\sigma < \frac{G_2 - G_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Покажем, что

$$\ln \mu(\sigma) = A + \int_{\frac{G_1 - G_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}^{-\sigma} \lambda_{n(t)} dt, \quad -\sigma \geq \frac{G_2 - G_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (6.12)$$

где A — некоторая постоянная.

Пусть точки P_{n_i} с координатами (λ_{n_i}, G_{n_i}) — вершины полигона L (очевидно, $n_1 = 1$). Угловой коэффициент звена, соединяющего точки P_{n_i} и $P_{n_{i+1}}$, равен

$$R_i = \frac{G_{n_{i+1}} - G_{n_i}}{\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i}}.$$

Когда угловой коэффициент $(-\sigma)$ прямой l изменяется в пределах

$$R_{i-1} \leq -\sigma < R_i, \quad (6.13)$$

прямая l соприкасается с полигоном L в точке P_{n_i} ; следовательно, для таких $(-\sigma)$ центральный индекс

$$n(\sigma) = n_i = \text{const.}$$

Обозначим k наибольшее целое число, удовлетворяющее условию

$$R_k < (-\sigma). \quad (6.14)$$

Так как

$$-\sigma > \frac{G_2 - G_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{G_{n_2} - G_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} = R_1,$$

то $k \geq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{-\sigma} \lambda_{n(t)} dt &= \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \lambda_{n(t)} dt + \int_{R_2}^{R_3} \lambda_{n(t)} dt + \dots + \int_{R_{k-1}}^{R_k} \lambda_{n(t)} dt + \int_{R_k}^{-\sigma} \lambda_{n(t)} dt = \\ &= (R_2 - R_1) \lambda_{n_2} + (R_3 - R_2) \lambda_{n_3} + \dots + (R_k - R_{k-1}) \lambda_{n_k} + \\ &+ (-\sigma + R_k) \lambda_{n_{k+1}} = -R_1 \lambda_{n_2} + R_2 (\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}) + R_3 (\lambda_{n_3} - \lambda_{n_2}) + \dots \\ &\dots + R_k (\lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k+1}}) - \sigma \lambda_{n_{k+1}} = \\ &= -R_1 \lambda_{n_2} - (G_{n_2} - G_{n_1}) - (G_{n_3} - G_{n_2}) - \dots \\ &\dots - (G_{n_{k+1}} - G_{n_k}) - \sigma \lambda_{n_{k+1}} = -R_1 \lambda_{n_2} + G_{n_2} - G_{n_{k+1}} - \sigma \lambda_{n_{k+1}} = \\ &= -\frac{G_{n_1} \lambda_{n_2} + G_{n_2} \lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}} + \ln |a_{n_{k+1}} e^{-\sigma \lambda_{n_{k+1}}}|, \end{aligned}$$

ибо

$$G_{n_{k+1}} = -\ln |a_{n_{k+1}}|.$$

Положив

$$A = \frac{G_{n_1} \lambda_{n_2} + G_{n_2} \lambda_{n_1}}{\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1}},$$

получим

$$A + \int_{R_1}^{-\sigma} \lambda_{n(t)} dt = \ln |a_{n_{k+1}} e^{-\sigma \lambda_{n_{k+1}}}|.$$

При условии (6.14) центральный индекс равен n_{k+1} . Следовательно, правая часть последнего равенства есть логарифм максимального члена. Формула (6.12) тем самым установлена.

Из формулы (6.12) видно, что функция $\ln \mu(\sigma)$ — непрерывная функция от $(-\sigma)$; на участке (6.13) она линейна, график ее на этом участке — прямая линия с угловым коэффициентом λ_{n_i} (при возрастании i этот угловой коэффициент увеличивается). Следовательно, $\ln \mu(\sigma)$ — выпуклая возрастающая функция от $(-\sigma)$.

Сравним теперь между собой величины $M(\sigma)$ и $\mu(\sigma)$. В силу (6.8), при любом n имеем

$$|a_n e^{-\lambda_n \sigma}| \leq M(\sigma),$$

откуда получаем

$$\mu(\sigma) \leq M(\sigma).$$

Выведем неравенство в другую сторону. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое число. Из условия (6.2) находим

$$\ln n < \left(H + \frac{\varepsilon}{2}\right) \lambda_n, \quad n > N(\varepsilon).$$

В силу этого,

$$\begin{aligned} M(\sigma) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} = \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| e^{-(\sigma-H-\varepsilon) \lambda_n} e^{-\lambda_n (H+\varepsilon)} < \\ &< N(\varepsilon) \mu(\sigma) + \mu(\sigma-H-\varepsilon) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \\ \alpha &= \frac{H+\varepsilon}{H+\frac{\varepsilon}{2}} > 1, \end{aligned}$$

или, так как $\mu(\sigma)$ — возрастающая функция от $(-\sigma)$,

$$M(\sigma) < K\mu(\sigma-H-\varepsilon),$$

где K — некоторая постоянная, зависящая от ε . Из формулы (6.12) выводим, что при больших $(-\sigma)$

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma-H-2\varepsilon) &= \ln \mu(\sigma-H-\varepsilon) + \int_{-\sigma-H-\varepsilon}^{-\sigma-H-2\varepsilon} \lambda_n(t) dt > \\ &> \ln \mu(\sigma-H-\varepsilon) + \ln K = \ln K\mu(\sigma-H-\varepsilon), \end{aligned}$$

откуда

$$\mu(\sigma-H-2\varepsilon) > K\mu(\sigma-H-\varepsilon)$$

и, следовательно, при больших $(-\sigma)$

$$M(\sigma) < \mu(\sigma-H-2\varepsilon).$$

Итак, мы установили следующее.

Теорема 2.6.4. Имеет место соотношение

$$\mu(\sigma) \leq M(\sigma);$$

с другой стороны, если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty,$$

то при любом $\varepsilon > 0$

$$M(\sigma) < \mu(\sigma-H-\varepsilon), \quad -\sigma > N(\varepsilon). \quad (6.15)$$

3. О порядке в полосе. Допустим, что показатели всюду сходящегося ряда Дирихле $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ имеют конечную верхнюю плотность $D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n}$. В плоскости комплексного переменного $s = \sigma + it$ возьмем полосу $S(a, t_0)$: $|t - t_0| \leq a$. Положим

$$M_s(\sigma) = \max_{|t-t_0| \leq a} |f(\sigma + it)|.$$

Величину

$$\rho_s = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\ln M_s(\sigma)}{-\sigma}$$

будем называть R -порядком функции $f(s)$ в полосе $S(a, t_0)$. Доказано (см. [73], а также [44], стр. 255), что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0, \quad (6.16)$$

то R -порядок функции $f(s)$ в полосе $S(a, t_0)$ при $a > \pi D^*$, где D^* — усредненная верхняя плотность последовательности $\{\lambda_n\}$, равен R -порядку $f(s)$ во всей плоскости.

Имеет место более сильное утверждение (см. [12]).

Теорема 2.6.5. Пусть $\{\lambda_n\}$ имеет усредненную верхнюю плотность D^* . Положим

$$q = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n \ln \lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right|, \quad L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2} \right). \quad (6.17)$$

Порядок ρ_s функции

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

в полосе $S(a, t_0)$ при $a > \pi D^*$ и R -порядок ρ этой функции связаны соотношением

$$\frac{1}{\rho + q} \leq \rho_s \leq \rho. \quad (6.18)$$

Для доказательства допустим, что функция $f(s)$ имеет порядок ρ_s в полосе $S(a, t_0)$, $a > \pi D^*$. Тогда

$$|f(\sigma + it)| < \exp^{-(\rho_s + \varepsilon_1)\sigma}, \quad |t - t_0| \leq a, \quad -\sigma > \sigma_0(\varepsilon_1). \quad (6.19)$$

Воспользуемся неравенством (4.17)

$$|a_h| < \frac{(\pi D^* + \varepsilon) K_\varepsilon e^{\lambda_h \sigma}}{|L_h(\lambda_h)|} \max_{|u-s| \leq \pi D^* + \varepsilon} |f(u)| \quad (s = \sigma + it),$$

где

$$L_h(\lambda) = \prod_{m \neq h} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} \right).$$

Будем считать, что в этом неравенстве $s = \sigma + it_0$ не столь мало, что круг $|u - s| \leq \pi D^* + \varepsilon$ лежит в полосе $S(a, t_0)$. На основании (6.19)

$$|a_k| < \frac{(\pi D^* + \varepsilon) K_\varepsilon}{|L_k(\lambda_k)|} \exp[e^{-(\rho_s + \varepsilon_1)\sigma} + \lambda_k \sigma], \quad -\sigma > \sigma_0(\varepsilon_1).$$

Функция

$$\exp[e^{-(\rho_s + \varepsilon_1)\sigma} + \lambda_k \sigma]$$

при $\sigma = \sigma_0 = -\frac{1}{\rho_s + \varepsilon_1} \ln \frac{\lambda_k}{\rho_s + \varepsilon_1}$ имеет минимум, равный

$$\exp\left[\frac{\lambda_k}{\rho_s + \varepsilon_1} - \frac{\lambda_k}{\rho_s + \varepsilon_1} \ln \frac{\lambda_k}{\rho_s + \varepsilon_1}\right] = \exp\left[-\frac{\lambda_k}{\rho_s + \varepsilon_1} \ln \lambda_k + O(\lambda_k)\right].$$

Поэтому

$$|a_k| < \frac{(\pi D^* + \varepsilon) K_\varepsilon}{|L_k(\lambda_k)|} \exp\left[-\frac{\lambda_k}{\rho_s + \varepsilon_1} \ln \lambda_k + O(\lambda_k)\right].$$

Отсюда, в силу формулы (6.6),

$$-\frac{1}{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k \ln \lambda_k} \leq q_1 - \frac{1}{\rho_s}, \quad q_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k \ln \lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L_k(\lambda_k)} \right|.$$

Отметим, что

$$L_k(\lambda_k) = -\frac{1}{2} \lambda_k L'(\lambda_k).$$

Следовательно, $q_1 = q$ и $\rho_s \geq 1/(\frac{1}{\rho} + q)$. Теорема доказана.

При условии (6.16) имеем неравенство (4.19)

$$\frac{1}{|L_k(\lambda_k)|} < e^{(\beta + \varepsilon)\lambda_k}, \quad k > K(\varepsilon), \quad \beta = 3[3 - \ln(hD)]D.$$

Кроме того,

$$|L_k(\lambda_k)| < \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k^2}{\lambda_m^2}\right) < e^{(\pi D^* + \varepsilon)\lambda_k}, \quad k > k_0(\varepsilon),$$

откуда

$$\left| \frac{1}{L_k(\lambda_k)} \right| > e^{-(\pi D^* + \varepsilon)\lambda_k}.$$

В силу полученных неравенств $q_1 = q = 0$. Следовательно, $\rho_s = \rho$.

В доказанной теореме нет нужды предполагать, что S — обязательно горизонтальная полоса. Пусть K — криволинейная полоса, описываемая кругом радиуса $\pi D^* + \varepsilon$ при движении центра вдоль кривой C , простирающейся к $\operatorname{Re} s = -\infty$. Рассуждениями, аналогичными проводимым выше, можно убедиться, что порядок в K и порядок в плоскости связаны соотношением (6.18). При условии (6.16) порядки равны, это отмечено в [84].

Границы для порядка ρ_s , устанавливаемые соотношением (6.18), не могут быть улучшены. Если $t_0 = 0$, а коэффициенты a_k положительны, то, очевидно, $\rho_s = \rho$.

Неулучшаемость другой границы устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2.6.6. Пусть $\{\lambda_k\}$ имеет усредненную верхнюю плотность D^* . Тогда существуют функция

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k s},$$

для которой порядок ρ_s в полосе $S(a, t_0)$ при $a > \pi D^* + \varepsilon$ и R -порядок ρ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\frac{1}{\rho} + q} = \rho_s,$$

где величина q определена формулой (6.17).

Вспользуемся теоремой 1.1.7 об оценке аналитической функции снизу: пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| \leq 2eR$, $f(0) = 1$ и h — произвольное положительное число, не превышающее $3e/2$. Тогда внутри круга $|z| \leq R$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, меньшей $4hR$,

$$\ln |f(z)| > -H(h) \ln M(2eR), \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (6.20)$$

при

$$H(h) = 2 + \ln \frac{3e}{2h}. \quad (6.21)$$

Предположим, что $f(z)$ — целая функция (в дальнейшем в качестве $f(z)$ будет взята функция $L(z)$). Возьмем систему положительных чисел $\{R_n\}$ такую, что

$$R_n = R_{n-1} \left(1 + \frac{18}{\ln R_{n-1}}\right) \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (6.22)$$

Число R_1 — произвольное, но достаточно большое. Очевидно, что $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. В указанной теореме положим $R = R_n$, $h = \frac{1}{\ln R_n}$. Так как сумма диаметров исключительных кружков меньше $8hR$, то в кольце

$$R_n - \frac{8}{\ln R_n} R_n \leq |z| \leq R_n \quad (6.23)$$

найдется окружность $|z| = \rho_n$, на которой выполняется неравенство (6.20)

$$\ln |f(z)| > -H(h) \ln M(2eR), \quad |z| = \rho_n,$$

где $H(h) = 2 + \ln \left(\frac{3e}{2} \ln R_n\right)$.

Покажем, что левая часть неравенства (6.23) больше R_{n-1} . Имеем

$$\begin{aligned} R_n - \frac{8}{\ln R_n} R_n &> R_n - \frac{8}{\ln R_{n-1}} R_n = \\ &= R_{n-1} + \frac{16}{\ln R_{n-1}} R_{n-1} - \frac{8}{\ln R_{n-1}} \left(R_{n-1} + \frac{16}{\ln R_{n-1}} R_{n-1} \right) = \\ &= R_{n-1} + \frac{8}{\ln R_{n-1}} R_{n-1} \left(1 - \frac{16}{\ln R_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Число R_1 (оно было до сих пор произвольным) выберем согласно условию: $\ln R_1 > 16$. Тогда получим

$$R_n - \frac{8}{\ln R_n} R_n > R_{n-1}.$$

Отсюда $R_{n-1} \leq \rho_n \leq R_n$. Так как, в силу соотношения (6.22), $R_n < 2R_{n-1}$ и $\rho_n < 2R_{n-1}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} &< \frac{R_{n+1}}{R_{n-1}} = \left(1 + \frac{16}{\ln R_n} \right) \left(1 + \frac{16}{\ln R_{n-1}} \right) \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{16}{\ln \rho_n} \right) \left(1 + \frac{16}{\ln \frac{\rho_n}{2}} \right) < 1 + \frac{\beta}{\ln \rho_n}, \end{aligned}$$

где β — некоторая постоянная. На окружности $|z| = \rho_n$

$$\ln |f(z)| > -H_n \ln M(4e\rho_n), \quad |z| = \rho_n, \quad (6.24)$$

где

$$H_n = 2 + \ln(3e \ln \rho_n). \quad (6.25)$$

Полученный результат отметим в виде леммы.

Лемма. Пусть $f(z)$ — целая функция. Существует последовательность окружностей $|z| = \rho_n$ ($n = 1, 2, \dots$), причем $\rho_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$,

$$\rho_{n+1} < \left(1 + \frac{\beta}{\ln \rho_n} \right) \rho_n,$$

на которой имеет место оценка (6.24), где величина H_n определяется формулой (6.25).

Приступим теперь к построению примера ряда Дирихле, для суммы которого выполняется условие

$$\frac{1}{\frac{1}{\rho} + q} = \rho_s.$$

Пусть в лемме роль функции $f(z)$ играет функция $L(z)$. Обозначим Γ_n замкнутый контур, ограниченный дугами окружностей $|z| = \rho_{n-1}$ и $|z| = \rho_n$ и отрезками лучей $\arg z = \pm \pi/4$ (дуги

окружностей расположены справа от мнимой оси). Заметим, что на лучах $\arg z = \pm \pi/4$

$$|L(z)| = \left| \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \pm \frac{i|z|^2}{\lambda_n^2} \right) \right| \geq 1.$$

Внутри некоторых Γ_n может совсем не быть точек из $\{\lambda_m\}$. Пусть $\Gamma_{p_1}, \Gamma_{p_2}, \dots, \Gamma_{p_n}, \dots$ — те контуры, внутри каждого из которых лежит хотя бы одна точка из последовательности $\{\lambda_m\}$, и пусть

$$\lambda_{m_{n-1}+1}, \lambda_{m_{n-1}+2}, \dots, \lambda_{m_n} \quad (6.26)$$

— точки из $\{\lambda_m\}$, лежащие внутри Γ_{p_n} , т. е. на интервале $(\rho_{p_n-1}, \rho_{p_n})$. Положим

$$\alpha_{m_{n-1}+1} = \dots = \alpha_{m_n} = \lambda_{m_n}^{-\left(\frac{1}{\rho} + q\right) \lambda_{m_n}},$$

где величина q определена формулой (6.17), и рассмотрим ряд

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{L'(\lambda_k)} e^{s \lambda_k^2}. \quad (6.27)$$

Убедимся сначала, что R -порядок функции $f(s)$ равен ρ . Для этого заметим, что если $m_{n-1} < k \leq m_n$, то

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{\rho} + q\right) &= \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_k \ln \lambda_k} \leq \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_k \ln \lambda_k} \leq \\ &\leq \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_{m_{n-1}+1} \ln \lambda_{m_{n-1}+1}} = -\left(\frac{1}{\rho} + q\right) \frac{\lambda_{m_n}}{\lambda_{m_{n-1}+1}} \frac{\ln \lambda_{m_n}}{\ln \lambda_{m_{n-1}+1}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_k \ln \lambda_k} = -\left(\frac{1}{\rho} + q\right),$$

так как

$$1 < \frac{\lambda_{m_n}}{\lambda_{m_{n-1}+1}} < \frac{\rho_{p_n}}{\rho_{p_n-1}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Имея это в виду, подсчитаем порядок ρ^* функции (6.27) по формуле (6.6). Получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho^*} &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k \ln \lambda_k} \ln \left| \frac{\alpha_k}{L'(\lambda_k)} \right| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \alpha_k}{\lambda_k \ln \lambda_k} + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k \ln \lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = -\frac{1}{\rho} - q + q = -\frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho^* = \rho$. Теперь определим порядок ρ_S функции $f(s)$ в полосе S . Для этого сумму членов ряда (6.27), соответствующих показателям λ_k из группы (6.26), представим в виде

$$A_n = \lambda_{m_n}^{-\left(\frac{1}{\rho} + q\right)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho n}} \frac{e^{-s\xi} d\xi}{L(\xi)}. \quad (6.28)$$

На контуре Γ_n , согласно лемме и соотношению

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln M(r) \leq \pi D^*, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |L(z)|,$$

имеем

$$\left| \frac{1}{L(\xi)} \right| < \exp(\mu H_n \rho_n), \quad \mu > 4\pi e D^*. \quad (6.29)$$

Пусть $s = \sigma + it$ изменяется в полосе $S(a, t_0)$, и пусть $\sigma < 0$. Тогда при $\xi \in \Gamma_n$ (пусть $\xi = \xi_1 + i\xi_2$) имеем

$$\operatorname{Re}(-s\xi) = -\sigma\xi_1 + t\xi_2 \leq -\sigma\rho_n + T\rho_n,$$

где T — фиксированное число. Отсюда и из оценки (6.29), согласно формуле (6.28), получим

$$|A_n| < \rho_{\rho_n} e^{(\mu H_{\rho_n} + T)\rho_{\rho_n}} \lambda_{m_n}^{-\left(\frac{1}{\rho} + q\right)} \lambda_{m_n} e^{-\sigma\rho_{\rho_n}} = \gamma_n e^{-\sigma\rho_{\rho_n}}, \quad (6.30)$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-\sigma\rho_{\rho_n}}.$$

R -порядок функции $\Phi(s)$ обозначим ρ^* . Имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho^*} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma_h}{\rho_{\rho_h} \ln \rho_{\rho_h}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\ln \rho_{\rho_h} + (\mu H_{\rho_h} + T)\rho_{\rho_h} - \left(\frac{1}{\rho} + q\right) \lambda_{m_h} \ln \lambda_{m_h} \right] \frac{1}{\rho_{\rho_h} \ln \rho_{\rho_h}}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношение (6.25) и то, что $\frac{\rho_{\rho_h}}{\lambda_{m_h}} \rightarrow 1$ при $h \rightarrow \infty$, получим, что

$$-\frac{1}{\rho^*} = -\left(\frac{1}{\rho} + q\right).$$

В полосе S , согласно неравенству (6.30), $|f(\sigma + it)| \leq \Phi(\sigma)$. Поэтому $\rho_S \leq \rho^* = 1/\left(\frac{1}{\rho} + q\right)$. Но по уже доказанному порядок ρ_S

не может быть меньше величины $1/\left(\frac{1}{\rho} + q\right)$. Следовательно,

$$\rho_S = 1/\left(\frac{1}{\rho} + q\right).$$

Искомый пример построен.

Из доказанных теорем как следствие получаем:

Теорема 2.6.7. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет усредненную верхнюю плотность D^* . Для того чтобы R -порядок в полосе $S(a, t_0)$ при $a > \pi D^*$ был равен R -порядку (во всей плоскости) для любой функции

$$f(s) = \sum_k a_k e^{-\lambda_k s} \quad (6.31)$$

(предполагается, что ряд сходится во всей плоскости, а последовательность показателей $\{\lambda_k\}$ фиксирована), необходимо и достаточно, чтобы последовательность показателей $\{\lambda_k\}$ удовлетворяла условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k \ln \lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = 0. \quad (6.32)$$

4. О типе в полосе. В [53] установлено соотношение между типом функции (6.31) в горизонтальной полосе $S(a, t_0)$ и типом во всей плоскости. Если ρ_S — R -порядок $f(s)$ в полосе $S(a, t_0)$, то по определению R -тип $f(s)$ в полосе есть

$$\alpha_S = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \frac{\ln M_S(\sigma)}{e^{-\rho_S \sigma}}.$$

Теорема 2.6.8. Пусть $\{\lambda_k\}$ имеет усредненную верхнюю плотность D^* и

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| < \infty. \quad (6.33)$$

Тогда R -тип α_S функции (6.31) в полосе $S(a, t_0)$ при $a > \pi D^*$ и R -тип α этой функции связаны соотношением

$$\alpha_S \leq \alpha \leq \alpha_S \exp[(\delta + h(\pi))\rho], \quad (6.34)$$

где $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$, а ρ — R -порядок функции (6.31).

При доказательстве, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $t_0 = 0$. Левая часть соотношения (6.34) очевидна. Докажем его правую часть. Запишем равенства (4.16)

$$a_k L_k(\lambda_k) e^{-\lambda_k s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = \pi D^* + \varepsilon} f(s - \xi) \gamma_k(\xi) d\xi, \quad (6.35)$$

где $\gamma_k(\xi)$ — функция, ассоциированная по Борелю с

$$L_k(\lambda) = \prod_{m \neq k} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2}\right).$$

Нетрудно доказать, что

$$|L_k(re^{i\varphi})| < e^{[h(\varphi) + \varepsilon]r}, \quad r > r_0(\varepsilon), \quad (6.36)$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от k . Отсюда, учитывая еще, что $h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \leq \pi D^*$ (см. неравенство (4.14)), следует, что все особенности $\gamma_k(\xi)$ содержатся в прямоугольнике

$$-h(\pi) \leq \operatorname{Re} \xi \leq h(0), \quad |\operatorname{Im} \xi| \leq \pi D^*.$$

Пусть C_ε — граница прямоугольника

$$-\varepsilon - h(\pi) \leq \operatorname{Re} \xi \leq h(0) + \varepsilon, \quad |\operatorname{Im} \xi| \leq \pi D^* + \varepsilon.$$

В формуле (6.35) в качестве контура интегрирования можно взять контур C_ε . Учтем еще, что

$$L_k(\lambda_k) = -\frac{\lambda_k}{2} L'(\lambda_k).$$

Получим

$$a_k \lambda_k L'(\lambda_k) = -2e^{\lambda_k^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \gamma_k(\xi) f(s - \xi) d\xi. \quad (6.37)$$

Из формулы обращения

$$\gamma_k(\xi) = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} L_k(\lambda) e^{-\lambda \xi} d\lambda,$$

на основании (6.36), выводим, что на C_ε

$$|\gamma_k(\xi)| < N, \quad \xi \in C_\varepsilon,$$

где N не зависит от k . В силу этого, из (6.37) получаем

$$|a_k \lambda_k L'(\lambda_k)| \leq A e^{\lambda_k^2} \max_{\xi \in C_\varepsilon} |f(s - \xi)|.$$

Заметим, что условие (6.33) влечет за собой выполнение условия (6.32). Поэтому порядок $\rho_S = \rho$. Имеем

$$|f(\sigma + it)| < \exp[(\alpha_S + \varepsilon_0)e^{-\rho\sigma}], \quad \sigma < \sigma(\varepsilon_0), \quad |t| \leq \alpha,$$

на основании этого

$$|a_k \lambda_k L'(\lambda_k)| \leq A \exp[(\alpha_S + \varepsilon_0)e^{-(\sigma - h(\pi) - \varepsilon)\rho} + \lambda_k \sigma], \quad \sigma < \sigma(\varepsilon_0). \quad (6.38)$$

Минимум правой части достигается при

$$\sigma = \sigma_0 = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{\lambda_k}{\rho(\alpha_S + \varepsilon_0)} + h(\pi) + \varepsilon.$$

Правая часть при больших k будет меньше $\sigma(\varepsilon_0)$. На этом основании в (6.38) можно подставить вместо σ величину σ_0 . Сделав это, получим

$$|a_k \lambda_k L'(\lambda_k)| \leq A \exp \left[\frac{\lambda_k}{\rho} - \frac{\lambda_k}{\rho} \ln \frac{\lambda_k}{\rho(\alpha_S + \varepsilon_0)} + \lambda_k h(\pi) + \lambda_k \varepsilon \right], \quad k > k_0.$$

Отсюда, на основании формулы (6.10), будем иметь

$$(a \rho)^{1/\rho} \leq \exp \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \ln \rho \alpha_S + h(\pi) + \delta \right].$$

Следовательно, $\alpha \leq \alpha_S \exp[(h(\pi) + \delta)\rho]$. Соотношение (6.34) установлено.

Если последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет плотность D , то $h(\varphi) = \pi D |\sin \varphi|$ и $h(\pi) = 0$. Тогда

$$\alpha_S \leq \alpha \leq \alpha_S e^{\delta \rho}. \quad (6.39)$$

Следующее утверждение (его доказательство см. в [53]) показывает, что соотношение (6.39) является точным: для произвольных конечных неотрицательных чисел D и δ существуют такие последовательность $\{\lambda_k\}$, имеющая плотность D и индекс конденсации δ , и функция (6.31), что имеет место равенство

$$\alpha = \alpha_S e^{\delta \rho}.$$

В случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет плотность и $\delta = 0$, имеем $\alpha = \alpha_S$.

РЯДЫ ДИРИХЛЕ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В этой главе будем рассматривать ряды Дирихле, показатели которых, вообще говоря, комплексные и удовлетворяют условию

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

§ 1. Область сходимости

1. Выпуклость множества точек абсолютной сходимости ряда. Имеет место (см. [72])

Теорема 3.1.1. Множество M точек абсолютной сходимости ряда

$$f(z) = \sum_1 a_k e^{-\lambda_k z}, \quad 0 < |\lambda_k| \uparrow \infty, \quad (1.1)$$

выпукло.

Доказательство основано на неравенстве

$$a^x b^{1-x} < a + b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.2)$$

Пусть, например, $a \leq b$. Тогда

$$a^x b^{1-x} \leq b^x b^{1-x} = b < a + b.$$

Переходим к доказательству теоремы. Требуется доказать, что если ряд (1.1) абсолютно сходится в точках z_1 и z_2 , то он абсолютно сходится всюду на соединяющем эти точки отрезке. Итак, пусть ряд абсолютно сходится в точках z_1 и z_2 . Положим

$$|a_k e^{-\lambda_k z_1}| = A_k, \quad |a_k e^{-\lambda_k z_2}| = B_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Произвольная точка z отрезка с концами z_1 и z_2 представляется в виде

$$z = \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Имеем

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| = A_k^\alpha B_k^{1-\alpha} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда, на основании неравенства (1.2), получаем

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| < A_k + B_k, \quad (1.3)$$

в силу чего

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k z}| < \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k z_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k z_2}| < \infty.$$

Теорема доказана.

Пусть D — открытая область, состоящая из внутренних точек множества M . Область D — выпуклая. Докажем, что внутри области D ряд (1.1) сходится равномерно. Для этого достаточно доказать, что ряд (1.1) равномерно сходится в достаточно малой окрестности каждой точки z_0 из области D .

Итак, пусть $z_0 \in D$. Возьмем треугольник Δ в области D , который покрывает точку z_0 . Пусть z_1, z_2, z_3 — его вершины. На сторонах треугольника, в силу неравенства (1.3), имеем

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| < \sum_{j=1}^3 |a_k e^{-\lambda_k z_j}| \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Это неравенство, на основании принципа максимума модуля аналитической функции, справедливо также внутри треугольника Δ . Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k z}| < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^3 |a_k e^{-\lambda_k z_j}| \right), \quad z \in \Delta,$$

и потому ряд (1.1) в треугольнике Δ сходится равномерно. Из равномерной сходимости ряда следует, что сумма $f(z)$ ряда (1.1) в области D — аналитическая функция.

Область простой сходимости ряда (1.1), вообще говоря, шире области абсолютной сходимости ряда. Рассмотрим случай, когда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = H < \infty. \quad (1.4)$$

Справедливо утверждение:

Теорема 3.1.2. Пусть ряд (1.1) сходится в области D . Если точка $z_0 \in D$ такова, что она удалена от границы D на расстояние, большее H , то в ней ряд (1.1) сходится абсолютно.

Для доказательства возьмем в области D круг

$$K: |z - z_0| \leq \rho_0, \quad \rho_0 > H,$$

и опишем около него многоугольник так, чтобы этот многоугольник еще целиком лежал в области D . Пусть $z_1, z_2, \dots, z_m$ — вершина многоугольника. На основании (1.3) на сторонах многоугольника имеем

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| \leq \sum_{j=1}^m |a_k e^{-\lambda_k z_j}|.$$

Из сходимости ряда (1.1) в точках $z_1, \dots, z_m$ следует, что

$$\sum_{j=1}^m |a_k e^{-\lambda_k z_j}| \leq M \quad (k \geq 1),$$

где M — некоторая постоянная. Следовательно, на границе многоугольника

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| \leq M \quad (k \geq 1). \quad (1.5)$$

Это неравенство (на основании принципа максимума модуля) выполняется внутри многоугольника, в частности, на окружности $|z - z_0| = \rho_0$. Запишем

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| = |a_k e^{-\lambda_k z_0}| |e^{-\lambda_k (z - z_0)}|.$$

Пусть $\arg \lambda_k = \varphi_k$. Возьмем на окружности $|z - z_0| = \rho_0$ точку a_k , удовлетворяющую условию: $\arg(a_k - z_0) = \pi - \varphi_k$. Имеем

$$-\lambda_k(a_k - z_0) = |\lambda_k(a_k - z_0)| = \rho_0 |\lambda_k|.$$

В силу (1.5), получаем

$$|a_k e^{-\lambda_k a_k}| = |a_k e^{-\lambda_k z_0}| e^{\rho_0 |\lambda_k|} \leq M,$$

отсюда

$$|a_k e^{-\lambda_k z_0}| \leq M e^{-\rho_0 |\lambda_k|}. \quad (1.6)$$

Воспользуемся условием (1.4). Из него находим

$$|\lambda_k| > \frac{1}{H + \varepsilon} \ln k, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

На этом основании, согласно (1.6), получаем

$$|a_k e^{-\lambda_k z_0}| \leq M k^{-\frac{\rho_0}{H + \varepsilon}}, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

При малом $\varepsilon > 0$ величина $\frac{\rho_0}{H + \varepsilon} > 1$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{-\lambda_k z_0}| < \infty.$$

Утверждение доказано.

Следствие 1. Если ряд (1.1) сходится во всей плоскости то при условии (1.4) он сходится в ней абсолютно.

Следствие 2. При $H = 0$ открытая область сходимости ряда (1.1) совпадает с открытой областью абсолютной сходимости ряда. В этом случае открытая область сходимости ряда (1.1) — выпуклая область.

2. Определение области сходимости ряда по коэффициентам. Возникает вопрос об определении области сходимости ряда (1.1) в зависимости от коэффициентов ряда (этот вопрос обсуждался

в [72] и в [39], [40]). Мы будем следовать в изложении работе [40], ограничившись случаем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = H < \infty. \quad (1.7)$$

Положим

$$k(\psi, \alpha) = \overline{\lim}_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \psi - \alpha \leq \arg \lambda_k \leq \psi + \alpha}} \frac{\ln |a_k|}{|\lambda_k|}, \quad 0 \leq \psi < 2\pi, \alpha > 0$$

(если коэффициентов a_k , соответствующих λ_k из указанного угла, не более конечного числа, то по определению $k(\psi, \alpha) = -\infty$). При уменьшении α величина $k(\psi, \alpha)$ не возрастает. Поэтому существует предел

$$k(\psi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} k(\psi, \alpha).$$

Положим, далее,

$$m(\psi, \alpha) = \overline{\lim}_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \psi - \alpha \leq \arg \lambda_k \leq \psi + \alpha}} \frac{\ln(k |a_k|)}{|\lambda_k|}, \quad m(\psi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} m(\psi, \alpha)$$

(как и выше, в случае, когда коэффициентов a_k , соответствующих λ_k из указанного угла, не более конечного числа, полагаем $m(\psi, \alpha) = -\infty$). В силу условия (1.7), очевидно,

$$k(\psi) \leq m(\psi) \leq k(\psi) + H. \quad (1.8)$$

Теорема 3.1.3. Ряд (1.1) сходится абсолютно в области G , точки которой $z = x + iy$ удовлетворяют при любом φ неравенству

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - m(\varphi) > 0; \quad (1.9)$$

если при некотором ψ

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - k(\psi) < 0, \quad (1.10)$$

то в точке $z = x + iy$ ряд (1.1) расходится.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $z = x + iy$ — фиксированная точка из области G . Возьмем произвольное, но фиксированное ψ из интервала $[0, 2\pi]$. Имеем

$$x \cos \psi - y \sin \psi - m(\psi) > 0.$$

Из определения величины $m(\psi)$ следует, что при некотором достаточно малом α_0 еще будет выполняться неравенство

$$x \cos \psi - y \sin \psi - m(\psi, \alpha_0) > 0.$$

В силу непрерывности функции $x \cos \varphi - y \sin \varphi$ как функции φ , имеется $\alpha_1 > 0$ такое, что

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - m(\psi, \alpha_0) > 0, \quad \psi - \alpha_1 \leq \varphi \leq \psi + \alpha_1.$$

Положив $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1)$, получим

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - m(\psi, \alpha) > 0, \quad \psi - \alpha \leq \varphi \leq \psi + \alpha. \quad (1.11)$$

ибо $m(\psi, \alpha) \leq m(\psi, \alpha_0)$. Исходя из (1.11), покажем, что ряд, составленный из членов ряда (1.1), соответствующих λ_k из угла $(\psi - \alpha, \psi + \alpha)$, абсолютно сходится в рассматриваемой точке $z \in G$. Пусть $\psi - \alpha \leq \arg \lambda_k \leq \psi + \alpha$. Имеем, положив $\lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}$,

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| = \exp \{-r_k(x \cos \varphi_k - y \sin \varphi_k) + \ln |a_k|\}.$$

Согласно (1.11), найдется $\delta > 0$ такое, что

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi \geq m(\psi, \alpha) + \delta, \quad \psi - \alpha \leq \varphi \leq \psi + \alpha,$$

в частности,

$$x \cos \varphi_k - y \sin \varphi_k \geq m(\psi, \alpha) + \delta, \quad \psi - \alpha \leq \varphi_k \leq \psi + \alpha.$$

Поэтому

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| \leq \exp \{-r_k[m(\psi, \alpha) + \delta] + \ln |a_k|\}.$$

Согласно определению величины $m(\psi, \alpha)$, по $\varepsilon > 0$ отыщется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\ln |a_k| < [m(\psi, \alpha) + \varepsilon] r_k - \ln k, \quad k > N(\varepsilon), \quad \psi - \alpha \leq \varphi_k \leq \psi + \alpha.$$

В силу этого,

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| < \exp \{-r_k(\delta - \varepsilon) - \ln k\}, \quad k > N(\varepsilon).$$

Число ε выберем с условием: $\varepsilon < \delta$. Из (1.7) находим $r_k > \mu \ln k$, где μ — некоторая положительная постоянная. Следовательно,

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| < \frac{1}{k^q},$$

$$q = 1 + \mu(\delta - \varepsilon) > 1, \quad \psi - \alpha \leq \varphi_k \leq \psi + \alpha,$$

и значит, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \quad (1.12)$$

абсолютно сходится.

Произвольной точке ψ из отрезка $[0, 2\pi]$ привели в соответствие интервал $(\psi - \alpha, \psi + \alpha)$, обладающий тем свойством, что ряд (1.12) абсолютно сходится. По теореме о конечном покрытии имеется конечное число таких интервалов, которые покрывают весь отрезок $[0, 2\pi]$. Отсюда следует, что ряд (1.1) в точке z сходится абсолютно.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть при некотором ψ выполняется соотношение (1.10). Из непрерывности функ-

ции $x \cos \varphi - y \sin \varphi$ следует, что имеются $\alpha > 0$ и $q > 0$, удовлетворяющие условию

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - k(\psi) < -q, \quad \psi - \alpha \leq \varphi \leq \psi + \alpha,$$

откуда

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi < k(\psi, \alpha) - q, \quad \psi - \alpha \leq \varphi \leq \psi + \alpha, \quad (1.13)$$

ибо $k(\psi) \leq k(\psi, \alpha)$. Из определения величины $k(\psi, \alpha)$ (в силу (1.13), она больше $-\infty$, ее можно считать меньше $+\infty$, ибо при $k(\psi, \alpha) = +\infty$ расходимость ряда (1.1) очевидна) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ имеется бесконечно много значений $k_1, k_2, \dots$ индекса k со свойством

$$|a_k| > \exp \{[k(\psi, \alpha) - \varepsilon] |\lambda_k|\},$$

$$\psi - \alpha \leq \arg \lambda_k = \varphi_k \leq \psi + \alpha, \quad k = k_1, k_2, \dots$$

В силу этого и неравенства (1.13), для $k = k_1, k_2, \dots$ имеем

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| = |a_k| \exp \{-r_k(x \cos \varphi_k - y \sin \varphi_k)\} > e^{(q-\varepsilon)r_k} > 1,$$

если выбрать $\varepsilon < q$. Значит, ряд (1.1) в точке z расходится. Теорема доказана.

В случае $H=0$, на основании (1.8), величины $k(\varphi)$ и $m(\varphi)$ совпадают. В этом случае точки z , для каждой из которых при некотором ψ выполняется соотношение (1.10), образуют внешность замкнутого множества $\bar{G}$. Следовательно, вне $\bar{G}$ ряд (1.1) расходится. Таким образом, снова приходим к следствию 2 из теоремы 3.1.2.

3. Единственность представления рядом Дирихле. В отличие от рядов Дирихле с действительными показателями сумма ряда Дирихле с комплексными показателями может быть равна нулю, в то время как не все коэффициенты ряда равны нулю. Чтобы в этом убедиться, отметим следующий факт.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, удовлетворяющая условию: имеются окружности $|\lambda| = r_k, r_k \uparrow \infty$, на которых

$$\ln |L(\lambda)| > [H(\varphi) - \varepsilon] |\lambda|, \quad |\lambda| = r_k, \quad \varphi = \arg \lambda, \quad k > K(\varepsilon), \quad (1.14)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое, а $H(\varphi)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π . Тогда в каждой точке $z = x + iy$ такой, что

$$\operatorname{Re}(e^{iz}) < H(\varphi) \quad (1.15)$$

при любом $\varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi$, верно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_\nu| < r_k} \frac{e^{-\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)} = 0. \quad (1.16)$$

Доказательство этого факта основывается на равенстве

$$\sum_{|\lambda_v| < r_k} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r_k} \frac{e^{\lambda z}}{L(\lambda)} d\lambda. \quad (1.17)$$

Пусть точка z удовлетворяет условию (1.15) при любом φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$. Из непрерывности функции $H(\varphi)$ вытекает наличие положительного δ такого, что при всех φ будет выполняться неравенство

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi} z) \leq H(\varphi) - \delta.$$

На основании этого неравенства и оценки (1.14) имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r_k} \frac{e^{\lambda z}}{L(\lambda)} d\lambda \right| < r_k e^{(H(\varphi) - \delta)r_k}.$$

Взяв $\varepsilon < \delta$, видим, что выражение (1.17) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Воспользуемся доказанным фактом для построения ряда Дирихле, который сходится абсолютно в данной выпуклой области и сумма которого в этой области равна нулю.

Пусть D — конечная открытая выпуклая область, $K(\varphi)$ — ее опорная функция. Обозначим $L(\lambda)$ целую функцию экспоненциального типа вполне регулярного роста со следующими свойствами: ее индикатриса роста $h(\varphi)$ равна $K(-\varphi)$, все ее нули, пусть они будут $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, — простые, причем $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$, на окружностях $|\lambda| = r_k = \frac{|\lambda_k| + |\lambda_{k+1}|}{2}$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$\ln |L(\lambda)| > [h(\varphi) - \varepsilon] |\lambda|, \quad |\lambda| = r_k, \quad \varphi = \arg \lambda, \quad k > K(\varepsilon).$$

Такая функция существует в силу теорем 1.2.6 и 1.3.2. Для нее неравенство (1.15) приобретает вид

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi} z) < h(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

или

$$\operatorname{Re}(e^{-i\varphi} z) < K(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (1.18)$$

Условие (1.18) выполняется для всех точек z из области D и только для них. В силу (1.16), имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} = 0, \quad z \in D. \quad (1.19)$$

Поскольку λ_k — нули целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$ и, следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0$. Поэтому ряд (1.19), сходясь в области D , сходится в ней абсолютно.

Простой пример ряда Дирихле со свойством (1.19) получим, если в качестве $L(\lambda)$ возьмем, например, функцию

$$L(z) = \frac{\sin az \sin b iz}{z^2}, \quad a > 0, b > 0.$$

Областью D в этом случае будет прямоугольник $|\operatorname{Re} z| < b$, $|\operatorname{Im} z| < a$.

В ситуации, когда сумма ряда Дирихле равна нулю, а его коэффициенты не все равны нулю, нельзя ставить вопрос о получении формул, выражающих коэффициенты ряда через сумму ряда, ибо нет единственности. Оказывается, однако, что в случае, когда область сходимости ряда Дирихле является большой (в определенном смысле), имеет место единственность разложения, и можно указать формулы для коэффициентов.

Теорема 3.1.4. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с простыми нулями в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$,

$$L_v(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \quad (v = 1, 2, \dots),$$

$\gamma_v(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_v(\lambda)$ (она регулярна вне $\bar{D}$).

Если ряд

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z} \quad (1.20)$$

сходится в области $G \supset \bar{D}$, то

$$a_v = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \gamma_v(t) f(t) dt \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (1.21)$$

где $\bar{C}$ — охватывающий $\bar{D}$ замкнутый контур, на котором и внутри которого функция $f(t)$ регулярна.

Для доказательства заметим сначала, что ряд (1.20) в области G сходится абсолютно (поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$ и потому $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = 0$), а внутри G равномерно. На основании этого

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \gamma_k(t) f(t) dt = \sum_{v=1}^{\infty} a_v \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \gamma_k(t) e^{\lambda_v t} dt = \sum_{v=1}^{\infty} a_v L_k(\lambda_v).$$

Но

$$L_k(\lambda_v) = \begin{cases} 0, & v \neq k, \\ L'(\lambda_k), & v = k. \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_k(t) f(t) dt = a_k L'(\lambda_k),$$

откуда и следует искомая формула (1.21).

Из формулы (1.21) вытекает, что если $f(z) = 0$, то все $a_v = 0$ ($v = 1, 2, \dots$).

4. Ряды Дирихле с показателями, имеющими конечную верхнюю плотность. Будем предполагать, что последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность σ . Пусть σ^* — усредненная верхняя плотность этой последовательности. Допустим, что область G абсолютной сходимости ряда (1.1) содержит в себе замкнутый круг радиуса $\pi\sigma^*$. Центр этого круга обозначим z_0 . Определим область G^* . Область G^* принадлежит точке z_0 и всякая точка z , обладающая свойством: точку z можно соединить с точкой z_0 ломаной линией, каждая точка которой удалена от особых точек функции $f(z)$ — суммы ряда (1.1), на расстояние, большее $\pi\sigma^*$.

Имеет место следующее (см. [10]).

Теорема 3.1.5. В области G^* имеет место представление

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{n-1} a_v L_{n,\infty}(\lambda_v) e^{-\lambda_v z}, \quad (1.22)$$

$$L_{n,\infty}(\lambda) = \prod_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad z \in G^*,$$

причем сходимость внутри G^* — равномерная. Область G^* — однолиственная и односвязная.

Для доказательства положим

$$L_{n,\infty}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} \lambda^k \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$L_{n,\infty}(D)y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(n)} y^{(k)}(z) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.23)$$

Отметим следующие свойства ряда (1.23):

1) если $y(z)$ регулярна в круге $|z-a| \leq \rho$, $\rho > \pi\sigma^*$, то ряд (1.23) равномерно сходится в круге $|z-a| < \rho - \pi\sigma^* - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, причем

$$|L_{n,\infty}(D)y(z)| < A(\varepsilon) \max_{|t-a| \leq \rho} |y(t)|, \quad |z-a| < \rho - \pi\sigma^* - \varepsilon,$$

где $A(\varepsilon)$ — постоянная, не зависящая от $y(z)$;

2) если $y(z)$ регулярна в круге $|z-a| \leq \rho$, $\rho > \pi\sigma^*$, то в круге $|z-a| < \rho - \pi\sigma^* - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, равномерно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,\infty}(D)y(z) = y(z);$$

3) если последовательность $\{y_m(z)\}$ функций, аналитических в круге $|z-a| \leq \rho$, $\rho > \pi\sigma^*$, равномерно сходится в этом круге к $y(z)$, то в круге $|z-a| < \rho - \pi\sigma^* - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, равномерно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} L_{n,\infty}(y_m) = L_{n,\infty}(y).$$

Выведем эти свойства. Имеем (см. неравенство (4.14) из гл. II)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_n|^2}\right) \leq \pi\sigma^*.$$

Отсюда, если положить

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_n|^2}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v r^v,$$

следует, что при любом $\varepsilon_1 > 0$

$$b_k < B(\varepsilon_1) \left(\frac{\pi\sigma^* \varepsilon + \varepsilon_1}{k}\right)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Но $|b_k^{(n)}| \leq b_k$. Поэтому

$$|b_k^{(n)}| < B(\varepsilon_1) \left(\frac{\pi\sigma^* \varepsilon + \varepsilon_1}{k}\right)^k \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Из неравенств Коши, далее, следует, что если функция $y(z)$ регулярна в круге $|z-a| \leq \rho$, то

$$|y^{(k)}(z)| \leq \frac{k! \rho}{(\pi\sigma^* + \varepsilon)^{k+1}} \max_{|t-a| \leq \rho} |y(t)|, \quad |z-a| < \rho - \pi\sigma^* - \varepsilon.$$

Отсюда

$$|b_k^{(n)} y^{(k)}(z)| < B(\varepsilon_1) \frac{k! \rho (\pi\sigma^* + \varepsilon_1)^k}{k^k (\pi\sigma^* + \varepsilon)^{k+1}} \max_{|t-a| \leq \rho} |y(t)| \quad (1.24)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k^{(n)} y^{(k)}(z)| < A(\varepsilon) \max_{|t-a| \leq \rho} |y(t)|, \quad |z-a| < \rho - \pi\sigma^* - \varepsilon,$$

где

$$A(\varepsilon) = B(\varepsilon_1) \rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! (\pi\sigma^* + \varepsilon_1)^k}{k^k (\pi\sigma^* + \varepsilon)^{k+1}}.$$

При малом ε_1 ряд справа сходится. Свойство 1) установлено. Из свойства 1) сразу вытекает свойство 3). Установим свойство 2). Имеем

$$L_{n,\infty}(y) - y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)} y^{(k)}(z) = \sum_{k=1}^K b_k^{(n)} y^{(k)}(z) + \sum_{k=K+1}^{\infty} b_k^{(n)} y^{(k)}(z).$$

На основании (1.24) выберем K столь большим, чтобы было

$$\left| \sum_{k=K+1}^{\infty} b_k^{(n)} y^{(k)}(z) \right| < \varepsilon, \quad |z - a| < \rho - \rho^* - \varepsilon.$$

Выбранное K не зависит от n , фиксируем его. Обратимся к первой сумме. Поскольку в ограниченной области равномерно

$$L_{n,\infty}(\lambda) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

то при любом фиксированном $k > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_k^{(n)} = 0.$$

Вследствие этого первая сумма по модулю будет меньше ε , если $n > N(\varepsilon)$. В итоге

$$|L_{n,\infty}(y) - y(z)| < 2\varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \quad |z - a| < \rho - \rho^* - \varepsilon,$$

что и надо было показать.

Перейдем к доказательству теоремы. В силу свойства 1) функция $L_{n,\infty}(D)f(z)$ является аналитической во всей области G^* . По свойству 3) в окрестности точки z_0

$$\begin{aligned} L_{n,\infty}(D)f(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} L_{n,\infty}(D) \left(\sum_{v=1}^m a_v e^{-\lambda_v z} \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^m a_v L_{n,\infty}(\lambda_v) e^{-\lambda_v z} = \sum_{v=1}^{n-1} a_v L_{n,\infty}(\lambda_v) e^{-\lambda_v z}, \end{aligned}$$

ибо $L_{n,\infty}(\lambda_v) = 0$ при $v \geq n$. Поэтому во всей области G^*

$$L_{n,\infty}(D)f(z) = \sum_{v=1}^{n-1} a_v L_{n,\infty}(\lambda_v) e^{-\lambda_v z}, \quad z \in G^*.$$

По свойству 3) внутри области G^* равномерно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,\infty}(D)f(z) = f(z).$$

На основании этого в области G^* имеет место искомое представление

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{n-1} a_v L_{n,\infty}(\lambda_v) e^{-\lambda_v z}, \quad z \in G^*,$$

причем сходимость внутри G^* является равномерной. Из представления (1.22) сразу вытекает, что область G^* однолистка и односвязна. Однолистность совсем очевидна. Пусть Γ — замкнутый контур, лежащий в G^* . Из равномерной сходимости последовательности

$$\sum_{v=1}^{n-1} a_v L_v(\lambda_v) e^{-\lambda_v z} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

на Γ следует равномерная сходимость ее внутри Γ . Поэтому внутренность Γ принадлежит G^* , а это и означает, что G^* — односвязная область.

§ 2. Случай нулевой плотности

В случае $\sigma = 0$ область G^* совпадает с областью существования функции $f(z)$. Поэтому при $\sigma = 0$ область существования функции $f(z)$ односвязна. Оказывается, имеет место более сильное утверждение, принадлежащее Полю (см. [78]).

Теорема 3.2.1. Если плотность σ равна нулю, то область существования функции $f(z)$ — суммы ряда (1.1), выпукла.

Эту теорему получим как следствие следующей (см. [11]).

Теорема 3.2.2. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma = 0,$$

$\{P_n(z)\}$ — последовательность полиномов Дирихле

$$P_n(z) = \sum_{v=1}^n a_v e^{-\lambda_v z} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.1)$$

G — множество, состоящее из точек, в достаточно малой окрестности каждой из которых эта последовательность ограничена. Тогда любая связная компонента D множества G является выпуклой областью.

Приступим к доказательству этого утверждения.

1. Вспомогательные леммы.

Лемма 3.2.1. Пусть D — невыпуклая область. Тогда через некоторую граничную точку ξ области D можно провести окружность C так, что ее некоторая дуга (α, β) будет иметь с границей области D только одну общую точку $\xi \neq \alpha, \beta$, будет лежать, кроме точки ξ , в области D и будет обращена своей выпуклостью внутрь области D .

Поскольку область D не выпукла, в ней найдутся такие две точки α_1 и β_1 , что не все точки соединяющего их прямолинейного отрезка $[\alpha_1, \beta_1]$ будут принадлежать D . На этом отрезке, следовательно, будет находиться по крайней мере хотя одна

границная точка области D . Одну из этих точек обозначим γ . Точки α_1 и β_1 , как принадлежащие связанному открытому множеству D , соединим ломаной l_1 , целиком расположенной внутри D .

Ломаная l_1 может пересекать отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ в нескольких точках. Пусть α_2 — ближайшая к точке γ точка пересечения l_1 с отрезком $[\alpha_1, \gamma]$, а β_2 — ближайшая к точке γ точка пересечения той же ломаной с отрезком $[\gamma, \beta_1]$. Точки α_2 и β_2 различны, ибо между ними лежит не принадлежащая области D ее границная точка γ . Часть ломаной l_1 , которая лежит между точками α_2 и β_2 , обозначим l_2 . Ломаная l_2 целиком расположена в области D и пересекает отрезок $[\alpha_2, \beta_2]$ только в его концах. Обозначим δ одну из точек пересечения перпендикуляра, восстановленного в точке γ к отрезку $[\alpha_2, \beta_2]$, с ломаной l_2 . Поскольку точка γ как границная точка не лежит на l_2 , точка δ отлична от γ и не лежит, кроме того, на прямой $[\alpha_2, \beta_2]$.

Будем двигаться от точки δ по ломаной l_2 в разных направлениях до первой встречи с прямой (а не с отрезком) $\alpha\beta_2$. Пусть α_3 — первая точка встречи ломаной l_2 с указанной прямой при движении от точки δ по ломаной l_2 в одну сторону, а β_3 — первая точка встречи рассматриваемых ломаной и прямой при движении от точки δ по ломаной l_2 в другую сторону. Очевидно, отрезок $[\alpha_3, \beta_3]$ содержит в себе старый отрезок $[\alpha_2, \beta_2]$, а следовательно, содержит внутри себя граничную точку γ области D .

Ту часть ломаной l_2 , которая расположена между точками α_3 и β_3 , обозначим l_3 . Ломаная l_3 обладает тем свойством, что она расположена внутри области D , пересекает отрезок $[\alpha_3, \beta_3]$ только в его концах и находится целиком по одну сторону от прямой $\alpha_3\beta_3$. В точках α_3 и β_3 восстановим перпендикуляры к соединяющему их отрезку. На этих перпендикулярах с той стороны от прямой $\alpha_3\beta_3$, с которой не расположена ломаная l_3 , возьмем на равных расстояниях от точек α_3 и β_3 близкие к ним из области D точки α_4 и β_4 . Обозначим L ломаную, которая состоит из отрезка $[\alpha_4, \alpha_3]$, ломаной l_3 и отрезка $[\beta_3, \beta_4]$. Эта ломаная расположена в области D , пересекает отрезок $[\alpha_4, \beta_4]$ только в его концах и находится целиком по одну сторону от прямой, проходящей через точки α_4 и β_4 . Кроме того, граничная точка γ области D теперь находится строго внутри замкнутой области D_1 , ограниченной кривой L и отрезком $[\alpha_4, \beta_4]$.

Пусть M — множество тех граничных точек области D , которые принадлежат замкнутой области D_1 . Множество M замкнутое и не пустое: ему принадлежит, например, точка γ . В середине отрезка $[\alpha_4, \beta_4]$ восстановим перпендикуляр. На этом перпендикуляре с той стороны от прямой $\alpha_4\beta_4$, с которой не лежит точка γ , возьмем столь далекую точку a , чтобы выполнялось условие

$$|a - \gamma| > |a - \alpha_4|, \quad |a - \gamma| > |a - \beta_4|.$$

Обозначим теперь ρ верхнюю грань расстояний от точки a до точек множества M . Поскольку множество M замкнуто и ограничено, в нем найдется по крайней мере одна точка ξ , расстояние которой до точки a будет в точности равно ρ . Это расстояние не меньше $|a - \gamma|$, следовательно, оно больше расстояний $|a - \alpha_4|$ и $|a - \beta_4|$.

Проведем окружность K с центром в точке a радиуса ρ . Она пройдет через точку ξ . Поскольку множество M лежит в области D_1 , ограниченной ломаной L и отрезком $[\alpha_4, \beta_4]$, и радиус окружности K больше расстояния от центра до точек отрезка $[\alpha_4, \beta_4]$, окружность K обязательно пересечет ломаную L по крайней мере в двух точках. Пусть a_1 — первая точка встречи окружности K с ломаной L при движении по этой окружности от точки ξ в одну сторону, а b_1 — первая точка встречи указанных окружностей и ломаной при движении по окружности от точки ξ в другую сторону. Часть ломаной L , лежащую между точками a_1 и b_1 , обозначим для краткости L_1 . Заметим, что все точки области, ограниченной ломаной L_1 и дугой (a_1, b_1) окружности K , находятся внутри области D . Кроме того, дуга (a_1, b_1) обращена своей выпуклостью в сторону кривой L_1 .

Теперь на прямой, проходящей через точки a и ξ , возьмем в направлении от точки ξ к точке a некоторую точку b так, чтобы было $|a - \xi| < |b - \xi|$. С центром в точке b проведем окружность S радиуса $|b - \xi|$. Эта окружность пройдет через точку ξ . Первую точку встречи окружности S с ломаной L_1 при движении по S от точки ξ в одном направлении обозначим α , а первую точку встречи S и L_1 при движении по S от ξ в другом направлении обозначим β . Все точки замкнутой области, ограниченной дугой (α, β) окружности S и частью ломаной L_1 , заключенной между точками α и β , принадлежат, за исключением единственной точки ξ , области D . Лемма доказана.

Лемма 3.2.2. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \lambda^n$$

— целая функция, растущая не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Если последовательность функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$, аналитических в некоторой окрестности точки z_0 , ограничена в окрестности $|z - z_0| < \varepsilon$, то в окрестности $|z - z_0| < \varepsilon_1 < \varepsilon$ ограничена последовательность

$$\varphi(D)\varphi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \varphi_m^{(n)}(z) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Лемма следует из оценки

$$|\varphi(D)y(z)| < A \max_{|t-z_0| \leq \rho} |y(t)|, \quad |z-z_0| < \rho_1 < \rho$$

(A — постоянная, не зависящая от $y(z)$), которая получается так же, как и соответствующая оценка из § 1, п. 4, если учесть, что, каково бы ни было $\delta > 0$,

$$|a_n| < \delta^n, \quad n > N(\delta).$$

Для дальнейшего изложения полезно следующее определение.

Будем говорить, что последовательность целых функций $\{F_k(z)\}$ имеет порядок ρ и тип σ , если

$$|F_k(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho} \quad (k=1, 2, \dots), \quad |z| > r_0(\varepsilon),$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от k , и если неравенство

$$|F_k(z)| < e^{(\sigma-\varepsilon)|z|^\rho}$$

не выполняется при всех k и $|z| > r_1$, каково бы ни было r_1 .

Лемма 3.2.3. Пусть целые функции

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{n!} z^n \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

принадлежат классу $[1, \sigma_1]$ (т. е. растут не быстрее целой функции первого порядка типа σ_1). Для того чтобы последовательность $\{F_k(z)\}$ имела порядок $\rho=1$ и тип $\sigma \geq \sigma_1$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций

$$\gamma_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{z^{n+1}} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

ассоциированных по Борелю с $F_k(z)$ (и аналитических по крайней мере при $|z| > \sigma_1$), была ограниченной при $|z| > \sigma + \varepsilon$ и не была ограниченной при $|z| > \sigma - \varepsilon$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Пусть последовательность (2.2) при любом $\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет условию

$$|F_k(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon_1)|z|}, \quad |z| \geq r_0(\varepsilon_1). \quad (2.4)$$

Запишем неравенство Коши для коэффициентов:

$$|a_{k,n}| \leq \frac{n! M_k(r)}{r^n}, \quad M_k(r) = \max_{|z|=r} |F_k(z)|.$$

Положим здесь $r = n/(\sigma + \varepsilon_1)$. При $n > (\sigma + \varepsilon_1)r_0(\varepsilon_1) = n_0(\varepsilon_1)$ это r будет больше $r_0(\varepsilon_1)$. Поэтому, на основании (2.4), получим

$$|a_{k,n}| < \frac{n!}{n^n} (\sigma + \varepsilon_1)^n e^n, \quad n > n_0(\varepsilon_1).$$

Отсюда, так как $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$ при $n \rightarrow \infty$, далее найдем

$$|a_{k,n}| < (\sigma + 2\varepsilon_1)^n, \quad n > n_1(\varepsilon_1). \quad (2.5)$$

Здесь n_1 зависит от ε_1 , но не зависит от k . Чтобы оценить $|a_{k,n}|$ при $n \leq n_1$, запишем

$$|a_{k,n}| \leq \frac{n! M_k(r_0)}{r_0^n} < n! \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)r_0}}{r_0^n}.$$

Правая часть этого неравенства при $n \leq n_1(\varepsilon_1)$ является ограниченной. Поэтому будет ограниченной при таких n и левая часть. Имея это в виду и принимая во внимание неравенство (2.5), получим, что при любых k и n

$$|a_{k,n}| < A(\varepsilon_1)(\sigma + 2\varepsilon_1)^n. \quad (2.6)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное число. Возьмем ε_1 , $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon/2$. В силу неравенства (2.6) для функции (2.3) получим оценку:

$$|\gamma_k(z)| < \frac{A(\varepsilon_1)}{\sigma + \varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma + 2\varepsilon_1}{\sigma + \varepsilon} \right)^n = B(\varepsilon), \quad |z| > \sigma + \varepsilon.$$

Таким образом, если выполняется условие (2.4), то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при $|z| > \sigma + \varepsilon$ последовательность (2.3) является ограниченной:

$$|\gamma_k(z)| < B(\varepsilon), \quad |z| > \sigma + \varepsilon. \quad (2.7)$$

Покажем, что имеет место и обратное утверждение. С этой целью допустим, что удовлетворяется условие (2.7). Имеем

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma+2\varepsilon} \gamma_k(t) e^{zt} dt.$$

Отсюда, согласно (2.7), найдем

$$|F_k(z)| < B(\varepsilon)(\sigma + 2\varepsilon) e^{(\sigma+2\varepsilon)|z|} < e^{(\sigma+3\varepsilon)|z|}, \quad |z| > r_1(\varepsilon),$$

где r_1 от k не зависит. Если теперь положить $3\varepsilon = \varepsilon_1$, то и получим неравенство (2.4).

Остается показать, что последовательность (2.3) не будет ограниченной при $|z| > \sigma - \varepsilon$. Допустим противное, т. е. что она ограничена при $|z| > \sigma_0 = \sigma - \varepsilon$, $\varepsilon_0 > 0$. По доказанному отсюда будет вытекать справедливость при любом $\varepsilon_1 > 0$ неравенства

$$|F_k(z)| < e^{(\sigma_0+\varepsilon_1)|z|}, \quad |z| > r_0(\varepsilon_1),$$

что, однако, невозможно, ибо тип последовательности (2.2) равен $\sigma > \sigma_0$.

Итак, если последовательность (2.2) имеет порядок $\rho = 1$ и тип σ , то последовательность (2.3) ограничена, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при $|z| > \sigma + \varepsilon$ и не ограничена при $|z| > \sigma - \varepsilon$. Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

Лемма 3.2.4. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция из класса $[1, 0]$. Каково бы ни было $\delta_0 > 0$, имеется система окружностей $|z| = r_m \uparrow \infty$ такая, что

$$\frac{r_{m+1}}{r_m} < 1 + \delta_0 \quad (m \geq 1)$$

и

$$\left| \frac{1}{\varphi(z)} \right| < e^{\varepsilon|z|}, \quad |z| = r_m, \quad m > m_0(\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое.

Эта лемма — частный случай теоремы 1.1.9 (см. замечание после этой теоремы).

Лемма 3.2.5. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция из класса $[1, 0]$. Если последовательность $\{F_k(z)\}$ имеет порядок $\rho = 1$ и тип σ , то и последовательность $\{\varphi(z)F_k(z)\}$ имеет порядок $\rho = 1$ и тип σ .

Так как

$$|\varphi(z)| < e^{\varepsilon|z|}, \quad |F_k(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad |z| > r_0(\varepsilon),$$

то

$$|\varphi(z)F_k(z)| < e^{(\sigma+2\varepsilon)|z|} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Осталось показать, что неравенство

$$|\varphi(z)F_k(z)| < e^{\sigma|z|}, \quad |z| > r_0 \quad (2.8)$$

(r_0 не зависит от k) не выполняется ни при каком $\sigma_1 < \sigma$ и $r_0 > 0$. Допустим противное, т. е. что имеет место неравенство (2.8) при некоторых $\sigma_1 < \sigma$ и r_0 . По лемме 3.2.4 найдется система окружностей $|z| = r_m \uparrow \infty$ такая, что $\frac{r_{m+1}}{r_m} < 1 + \delta_0$ и

$$\left| \frac{1}{\varphi(z)} \right| < e^{\varepsilon|z|}, \quad |z| = r_m, \quad m > m_0(\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое. Отсюда, принимая во внимание условие (2.8), получим

$$|F_k(z)| = \left| \frac{1}{\varphi(z)} \right| |\varphi(z)F_k(z)| < e^{(\sigma_1+\varepsilon)|z|}, \quad |z| = r_m, \quad m \geq m_1(\varepsilon). \quad (2.9)$$

Пусть z — произвольная точка из области $|z| > r_m$. Обозначим s число, удовлетворяющее условию $r_s \leq |z| \leq r_{s+1}$. В силу (2.9), имеем

$$|F_k(z)| \leq \max_{|t|=r_{s+1}} |F_k(t)| < e^{(\sigma_1+\varepsilon)r_{s+1}}.$$

Отсюда, так как $r_{s+1} < (1 + \delta_0)r_s \leq (1 + \delta_0)|z|$, получим

$$|F_k(z)| < e^{(\sigma_1+\varepsilon)(1+\delta_0)|z|}, \quad |z| > r_m = r(\varepsilon).$$

Число $\delta_0 > 0$ до сих пор было произвольным. Выберем его теперь так, чтобы выполнялось неравенство $\sigma_1(1 + \delta_0) < \sigma$. При малом ε тогда будем иметь $(\sigma_1 + \varepsilon)(1 + \delta_0) < \sigma$. Значит, последовательность $\{F_k(z)\}$ имеет тип, меньший σ . Это противоречит условию леммы. Следовательно, неравенство (2.8) не может выполняться при $\sigma_1 < \sigma$, что и доказывает лемму.

2. Выпуклость области регулярности суммы ряда Дирихле. Приступим к непосредственному доказательству теоремы. По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = 0$. Положим

$$\varphi(\lambda) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \lambda^k.$$

Эта функция из класса $[1, 0]$. Имеем

$$\varphi(D)P_n(z) = \varphi(D) \left(\sum_{v=1}^n a_{n,v} v e^{-\lambda_v z} \right) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.10)$$

Пусть G — множество точек, в некоторой окрестности каждой из которых последовательность $\{P_n(z)\}$ ограничена, E — связная компонента G . Надо доказать, что область E выпукла.

Для краткости изложения условимся в дальнейшем говорить, что последовательность функций обладает свойством O в точке z_0 , если она ограничена в некоторой окрестности точки z_0 , и обладает свойством O на множестве, если она обладает свойством O в каждой точке этого множества.

Допустим противное, т. е. что область E не является выпуклой. Из этого будет вытекать, согласно лемме 3.2.1, что через некоторую граничную точку ξ области E можно провести такую окружность C , что ее некоторая дуга (α, β) будет иметь с границей области E только одну общую точку $\xi \neq \alpha, \beta$, будет лежать, за исключением точки ξ , в E и будет обращена своей выпуклостью внутрь области E . Точки α и β соединим в области E кривыми L_1 и L_2 . Пусть при этом L_2 лежит в области, ограниченной кривой L_1 и дугой (α, β) окружности C . Когда точка z находится в области E_1 , ограниченной кривыми L_1 и L_2 , по формуле Коши имеем

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{P_n(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{P_n(t) dt}{t-z} = P_{n,1}(z) + P_{n,2}(z).$$

Функции $P_{n,1}(z)$ ($n = 1, 2, \dots$) являются аналитическими всюду вне L_1 . Последовательность $\{P_{n,1}(z)\}$, поскольку $\{P_n(z)\}$ ограничена на L_1 , обладает свойством O всюду вне L_1 ; в частности,

она обладает свойством O в точке ξ . Аналогично, функции $P_{n,2}(z)$ ($n=1, 2, \dots$) регулярны вне L_2 , последовательность $\{P_{n,2}(z)\}$ обладает свойством O всюду вне L_2 и, в частности, в точке ξ . Следует заметить, что при этом в точку ξ мы приходим из области E_1 разными путями: при рассмотрении функции $P_{n,1}(z)$ в точку ξ приходим путем, непременно пересекающим кривую L_2 , при рассмотрении функций $P_{n,2}(z)$ в точку ξ приходим путем, не пересекающим L_2 . Если функции $P_{n,2}(z)$ аналитически продолжить из области E_1 через кривую L_2 , то может оказаться, что в точке ξ последовательность $\{P_{n,2}(z)\}$ не обладает свойством O . Покажем, что в рассматриваемом случае это на самом деле имеет место.

Предварительно заметим, что после аналитического продолжения через L_2 функции $P_{n,2}(z)$ будут регулярными вне прямолинейного отрезка $[\alpha, \beta]$. В самом деле, регулярность этих функций вне замкнутой кривой, состоящей из L_2 и отрезка $[\alpha, \beta]$, следует непосредственно из их конструкции, а регулярность $P_{n,2}(z)$ в области, ограниченной кривой L_1 и отрезком $[\alpha, \beta]$, следует из равенства

$$P_{n,2}(z) = P_n(z) - P_{n,1}(z), \quad (2.11)$$

поскольку $P_n(z)$ — целые функции, а функции $P_{n,1}(z)$ в рассматриваемой области являются аналитическими. Теперь убедимся в том, что последовательность $\{P_{n,2}(z)\}$ обладает свойством O всюду вне окружности C , а в точке ξ свойством O не обладает. Из самой конструкции функций $P_{n,2}(z)$ следует, что последовательность $\{P_{n,2}(z)\}$ обладает свойством O вне кривой, состоящей из L_2 и той дуги (α, β) окружности C , которая не содержит точки ξ . Из равенства (2.11) (принимая во внимание, что последовательность $\{P_n(z)\}$ обладает свойством O в области E , а последовательность $\{P_{n,1}(z)\}$ — в области, ограниченной кривой L_3 , состоящей из L_1 и той дуги (α, β) окружности C , которая содержит точку ξ) далее вытекает, что последовательность $\{P_{n,2}(z)\}$ обладает свойством O внутри кривой L_3 . Следовательно, последовательность $\{P_{n,2}(z)\}$ обладает свойством O всюду вне окружности C . В точке ξ она этим свойством не обладает. Это видно из равенства (2.11), если учесть, что в точке ξ последовательность $\{P_n(z)\}$ свойством O не обладает (точка ξ — граничная для области E), а последовательность $\{P_{n,1}(z)\}$ обладает.

Проведем через точку ξ окружность C_1 , касательную к окружности C в точке ξ и охватывающую C . Пусть радиус окружности C_1 равен σ , а ее центр находится в точке a . Принимая во внимание, что функции $P_{n,2}(z)$ регулярны вне прямолинейного отрезка $[\alpha, \beta]$, можно утверждать, что они являются регулярными при $|z-a| > \sigma_1$, где $\sigma_1 < \sigma$, причем, как видно из самой их формы, они при $z \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. В силу

этого их можно представить в виде

$$P_{n,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{(z-a)^{k+1}}, \quad |z-a| > \sigma_1 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.12)$$

Заметим теперь, что, согласно вышесказанному, последовательность (2.12) обладает свойством O всюду вне окружности C_1 и во всех точках C_1 , отличных от ξ .

Рассмотрим последовательность $\{\varphi(D)P_{n,2}(z)\}$. По лемме 3.2.2 она обладает свойством O вне C_1 и во всех точках C_1 , отличных от ξ . Покажем, что в точке ξ она этим свойством не обладает. С этой целью введем функции

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{k!} z^k \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.13)$$

ассоциированные по Борелю с функциями (2.12). Так как функции (2.12) регулярны при $|z-a| > \sigma_1$, то функции $F_n(z)$ принадлежат классу $[1, \sigma_1]$. Поскольку последовательность (2.12) ограничена при $|z-a| > \sigma + \varepsilon$ и не ограничена при $|z-a| > \sigma - \varepsilon$ (ибо в точке ξ она не обладает свойством O), то, в силу леммы 3.2.3, последовательность (2.13) имеет порядок $\rho=1$ и тип σ . Запишем теперь известное представление одной из ассоциированных функций через другую:

$$P_{n,2}(z) = \int_0^{\infty} F_n(t) e^{-(z-a)t} dt.$$

Имеем

$$\varphi(D)P_{n,2}(z) = \int_0^{\infty} \varphi(-t) F_n(t) e^{-(z-a)t} dt,$$

откуда заключаем, что если

$$\varphi(-t) F_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{n,k}}{k!} t^k \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.14)$$

то

$$\varphi(D)P_{n,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{n,k}}{(z-a)^{k+1}} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.15)$$

Так как $\varphi(-t) \in [1, 0]$, а $F_n(t) \in [1, \sigma_1]$, то функции (2.14) принадлежат классу $[1, \sigma_1]$. Поскольку $\varphi(-t) \in [1, 0]$, а последовательность $\{F_n(t)\}$ имеет порядок $\rho=1$ и тип σ , то, в силу леммы 3.2.5, последовательность (2.14) имеет порядок $\rho=1$ и тип σ . Отсюда, на основании леммы 3.2.3, заключаем, что

последовательность (2.15) ограничена при $|z - a| > \sigma + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ любое) и не ограничена при $|z - a| > \sigma - \varepsilon$. Принимая во внимание, что во всех точках окружности, отличных от ξ , последовательность (2.15) обладает свойством O , выводим теперь, что эта последовательность в точке ξ свойством O не обладает.

После этого уже не трудно прийти к противоречию. В самом деле, имеем

$$\varphi(D)P_{n,1}(z) + \varphi(D)P_{n,2}(z) = \varphi(D)P_n(z) = 0 \quad (2.16)$$

в силу (2.10). В точке ξ последовательность $\{P_{n,1}(z)\}$, а, значит, и последовательность $\{\varphi(D)P_{n,1}(z)\}$ обладают свойством O . Тогда, в силу равенства (2.16), этим свойством в точке ξ должна обладать и последовательность (2.15). Тем самым получено противоречие, состоящее в том, что последовательность (2.15) в точке ξ одновременно обладает свойством O и не обладает им. Следовательно, предположение о том, что область E не выпукла, неверно. Значит, область E является выпуклой. Теорема доказана.

Следствие. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = 0,$$

и пусть G — множество точек, в достаточно малой окрестности каждой из которых последовательность (2.1) сходится равномерно. Тогда любая связная компонента множества G является выпуклой областью.

Отсюда легко получить теорему Поля. В самом деле, мы видели, что, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = 0$, последовательность

$$\sum_{v=1}^{n-1} a_v L_n(\lambda_v) e^{-\lambda_v z} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

сходится равномерно к функции $f(z)$ — сумме ряда (1.1) во всей ее области существования D . Область D — максимальная область, в некоторой окрестности каждой точки которой последовательность (2.17) сходится равномерно. Следовательно, область D выпукла.

В работах [41], [42] исследовались ряды Дирихле, комплексные показатели которых обладают угловой плотностью.

§ 3. Целые функции, представимые рядами Дирихле

Будем рассматривать ряды Дирихле

$$f(z) = \sum_k a_k e^{-\lambda_k z}, \quad (3.1)$$

сходящиеся во всей плоскости.

1. Оценка коэффициентов. Могут существовать ряды Дирихле, сходящиеся во всей плоскости, сумма которых равна нулю. Ясно, что в таких случаях должно выполняться условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = \infty.$$

Будем предполагать, чтобы заведомо находиться в условиях единственности, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = D < \infty.$$

В этом случае для коэффициентов ряда Дирихле имеется простая формула. Именно, пусть

$$L(\lambda) = \prod_1 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_v^2}\right), \quad L_v(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \quad (v=1, 2, \dots).$$

Эти функции — из класса $[1, \pi D^*]$, где D^* — усредненная верхняя плотность $\{\lambda_m\}$. Пусть $\gamma_v(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_v(\lambda)$. Она регулярна вне круга $|t| \leq \pi D^*$. Согласно формуле (1.21), имеем

$$a_v = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R > \pi D^*} \gamma_v(t) f(t) dt \quad (v=1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

Это и есть искомая формула для коэффициентов.

Заметим, что

$$|L_v(\lambda)| < \frac{1}{|\lambda_1|} \left(1 + \frac{|\lambda_1|}{|\lambda|}\right) \prod_1 \left(1 + \left|\frac{\lambda}{\lambda_v}\right|^2\right) < e^{(\pi D^* + \varepsilon)|\lambda|},$$

$$|\lambda| > r_0(\varepsilon),$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от v . Поэтому

$$|\gamma_v(t)| < A(R), \quad |t| \geq R > \pi D^*,$$

где $A(R)$ не зависит от v . Имея это в виду, из формулы (3.2) получаем

$$|a_v| < \frac{A(R)R}{|L'(\lambda_v)|} \max_{|t|=R > \pi D^*} |f(t)|. \quad (3.3)$$

Применим формулу (3.3) к функции

$$f(z - \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k \eta} e^{-\lambda_k z}.$$

Учитывая, что

$$\max_{|t|=R} |f(t - \eta)| \leq \max_{|u|=|\eta|+R} |f(u)|,$$

получим

$$|a_v| < \frac{A(R)R}{|L'(\lambda_v)|} |e^{-\lambda_v \eta}| \max_{|u|=|\eta|+R} |f(u)| \quad (v=1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

На основании формулы (3.4) немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3.1. Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = D < \infty,$$

и пусть ряд

$$f(z) = \sum_1^\infty a_v e^{-\lambda_v z}$$

сходится во всей плоскости. Если

$$|f(z)| < e^{a|z|}, \quad 0 \leq a < \infty, \quad |z| > r_0,$$

то

$$f(z) = \sum_{|\lambda_v| \leq a} a_v e^{-\lambda_v z}.$$

В самом деле, согласно (3.4), имеем

$$|a_v| < \frac{A(R)R}{|L'(\lambda_v)|} \frac{e^{aR} e^{a|\eta|}}{|e^{-\lambda_v \eta}|}, \quad R + |\eta| > r_0.$$

Пусть η лежит на луче: $\arg \eta = -\arg \lambda_v$. Видим, что когда $\eta \rightarrow \infty$ вдоль этого луча, причем $|\lambda_v| > a$, правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Значит, для таких v имеем $a_v = 0$, что и надо было показать.

2. **A-порядок суммы ряда Дирихле.** Назовем **A-порядком** функции $f(z)$ величину

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r}, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Определим **A-порядок** функции $f(z)$ через коэффициенты a_k ряда (3.1).

В предположении, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k| \ln |\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = 0, \quad (3.5)$$

$$L(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right).$$

установлена формула (см. [3])

$$\kappa = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k| \ln |\lambda_k|}{\ln \left| \frac{1}{a_k} \right|}. \quad (3.6)$$

Она может быть получена из следующего результата (см. [12]).

Пусть

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k| \ln |\lambda_k|}{\ln \left| \frac{1}{a_k} \right|}, \quad q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k| \ln |\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right|,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = D < \infty.$$

Теорема 3.3.2. **A-порядок** κ функции (3.1) удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\frac{1}{\rho} + q} \leq \kappa \leq \rho.$$

Предположим, что $f(z)$ имеет **A-порядок**, равный κ . Тогда

$$|f(z)| < \exp [e^{(\kappa+\varepsilon)|z|}], \quad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Отсюда, в силу неравенства (3.4), получим

$$|a_v| < \frac{A(R)R}{|L'(\lambda_v)|} \exp [e^{(\kappa+\varepsilon)(|\eta|+R)} - \operatorname{Re}(\lambda_v \eta)], \quad |\eta| + R > r_0(\varepsilon).$$

Пусть η лежит на луче $\arg \eta = -\arg \lambda_v$. Тогда $\operatorname{Re}(\lambda_v \eta) = |\lambda_v| |\eta| = |\lambda_v| (|\eta| + R) - |\lambda_v| R$. Имея это в виду и полагая $|\eta| + R = x$, получим

$$|a_v| < A(R)R \frac{e^{|\lambda_v|R}}{|L'(\lambda_v)|} \exp [e^{(\kappa+\varepsilon)x} - |\lambda_v|x], \quad x > r_0(\varepsilon). \quad (3.7)$$

Правая часть как функция x имеет минимум при

$$x = x_0 = \frac{1}{\kappa + \varepsilon} \ln \frac{|\lambda_v|}{\kappa + \varepsilon}.$$

Значение x_0 будет больше $r_0(\varepsilon)$, если v будет больше некоторого v_0 . Полагая в (3.7) $x = x_0$, получим

$$|a_v| < A(R)R \frac{e^{|\lambda_v|R}}{|L'(\lambda_v)|} \exp \left[\frac{1}{\kappa + \varepsilon} - \frac{|\lambda_v|}{\kappa + \varepsilon} \ln \frac{|\lambda_v|}{\kappa + \varepsilon} \right], \quad v > v_0.$$

Отсюда

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_v|}{|\lambda_v| \ln |\lambda_v|} \leq q - \frac{1}{\kappa}.$$

Но левая часть, как легко видеть, равна $-1/p$. Таким образом, $-\frac{1}{p} \leq q - \frac{1}{\kappa}$, откуда

$$\kappa \geq \frac{1}{\frac{1}{p} + q}.$$

Осталось показать, что $\kappa \leq p$. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$F(z) = \sum_1 |a_k| e^{|\lambda_k| z}.$$

Имеем

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq M^*(r) = \max_{\operatorname{Re} z=r} |F(z)| = F(r).$$

Отсюда вытекает, что λ -порядок функции $f(z)$ не превосходит R -порядка функции $F(z)$. Но R -порядок p функции $F(z)$ подсчитывается по формуле (6.6) гл. II, причем эту формулу можно записать также в виде

$$p = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_k| \ln |\lambda_k|}{\ln \left| \frac{1}{a_k} \right|}.$$

Следовательно, $\kappa \leq p$. Теорема полностью доказана.

Дополнением к этой теореме служит следующая

Теорема 3.3.3. Для данной последовательности $\{\lambda_k\}$ с $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty$ существует функция $f(z)$ вида (3.1), для которой λ -порядок κ равен

$$\left(\frac{1}{p} + q \right)^{-1}.$$

Вспользуемся известной леммой (см. гл. II, § 6, п. 3): пусть $F(z)$ — целая функция. Тогда существует последовательность окружностей $|z| = \rho_k \uparrow \infty$,

$$\rho_{k+1} < \left(1 + \frac{\beta}{\ln \rho_k} \right) \rho_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

на которых имеет место оценка

$$\ln |F(z)| > -H_n \ln M(4e\rho_n), \quad |z| = \rho_n, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|,$$

где $H_n = 2 + \ln(3e \ln \rho_n)$.

В качестве функции $F(z)$ возьмем функцию $L(z)$. Так как

$$|L(z)| \leq \prod_1 \left(1 + \frac{r^2}{|\lambda_v|^2} \right) < e^{(nD^2 + \epsilon)r}, \quad r > r_0(\epsilon),$$

то

$$\ln |L(z)| > -\mu H_n \rho_n, \quad \mu > 4\pi e D^2, \quad |z| = \rho_n, \quad n > n_0. \quad (3.8)$$

Обозначим Γ_n контур, составленный из окружностей $|z| = \rho_{n-1}$, $|z| = \rho_n$, причем на Γ_n выбрано направление обхода, при котором внутренность кольца, ограниченного указанными окружностями, остается слева. Пусть $\Gamma_{\rho_1}, \Gamma_{\rho_2}, \dots, \Gamma_{\rho_n}, \dots$ — те контуры, внутри каждого из которых лежит хотя бы одна точка из последовательности $\{\lambda_m\}$. Пусть

$$\lambda_{m_{n-1}+1}, \lambda_{m_{n-1}+2}, \dots, \lambda_{m_n} \quad (3.9)$$

— точки из $\{\lambda_k\}$, лежащие внутри Γ_{ρ_n} . Положим

$$a_{m_{n-1}+1} = \dots = a_{m_n} = |\lambda_{m_n}|^{-\left(\frac{1}{p} + q\right)} |\lambda_{m_n}|^{\lambda_{m_n}} = c_n \quad (3.10)$$

и рассмотрим ряд

$$I(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{L'(\lambda_k)} e^{-\lambda_k z}. \quad (3.11)$$

Из выбора (3.10) следует, что этот ряд всюду сходится. Сумму членов ряда (3.11), соответствующих λ_k из группы (3.9), обозначим A_n . Имеем

$$A_n = c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho_n}} \frac{e^{-z\xi} d\xi}{L(\xi)}.$$

Отсюда, на основании (3.8), получаем

$$|A_n| < 2c_n \rho_n \exp(\mu H_n \rho_n) e^{|z| \rho_n}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = 2 \sum_1 c_n \rho_n \exp(\mu H_n \rho_n) e^{-z \rho_n}.$$

Положим $v_n = \rho_n$. Так как $v_n \geq |\lambda_{m_n}| \geq |\lambda_n|$, то последовательность $\{v_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n} < \infty.$$

На основании этого λ -порядок функции $\Phi(z)$ (обозначим его κ_1), согласно уже доказанной теореме, удовлетворяет условию

$$\kappa_1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n \ln v_n}{\ln [(v_n c_n)^{-1} \exp(-\mu H_n v_n)]}.$$

Знаменатель дроби, учитывая (3.10), равен

$$-\ln v_n + \left(\frac{1}{p} + q\right) |\lambda_{m_n}| \ln |\lambda_{m_n}| - \mu H_{p_n} v_n.$$

Так как

$$1 < \frac{v_n}{\lambda_{m_n}} = \frac{\rho_{p_n}}{\lambda_{m_n}} < \frac{\rho_{p_n}}{\rho_{p_n-1}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{H_{p_n}}{\ln v_n} = \frac{2 + \ln(3e \ln v_n)}{\ln v_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\kappa_1 \leq \frac{1}{\frac{1}{p} + q}.$$

Согласно неравенству (3.12),

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \max_{|z|=r} |\Phi(z)|.$$

Поэтому порядок κ функции $f(z)$ не больше κ_1 и, значит,

$$\kappa \leq \left(\frac{1}{p} + q\right)^{-1}.$$

Но κ не может быть меньше $\left(\frac{1}{p} + q\right)^{-1}$. Следовательно,

$$\kappa = \frac{1}{\frac{1}{p} + q}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 3.3.2 следует, что если $q=0$, то порядок κ подсчитывается по формуле (3.6). Из теорем 3.3.2 и 3.3.3, как следствие, вытекает далее следующее более сильное утверждение.

Теорема 3.3.4. Пусть последовательность показателей $\{\lambda_m\}$ имеет конечную верхнюю плотность. Для того чтобы Λ -порядок любой функции

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

(предполагается, что ряд сходится во всей плоскости, а последовательность $\{\lambda_k\}$ фиксирована) вычислялся по формуле (3.6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.5).

В заключение выясним, как связаны между собой Λ -порядок и R -порядок функции

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}, \quad \lambda_k > 0,$$

когда показатели λ_k положительны и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = D < \infty$. R -порядок ρ всегда (при $D < \infty$) вычисляется по формуле

$$\rho = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k \ln \lambda_k}{\ln \left| \frac{1}{a_k} \right|}.$$

Λ -порядок вычисляется всегда по той же формуле лишь при условии $q=0$. Таким образом, при $q=0$ имеем $\kappa=\rho$, при $q>0$ имеются функции, для которых $\kappa < \rho$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ, РЯДАМИ ДИРИХЛЕ В ОТКРЫТОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе будет получено представление рядами Дирихле в конечной выпуклой области произвольных функций, которые аналитичны в замкнутой области или аналитичны в открытой области и непрерывны в замкнутой области *).

§ 1. Биортогональные системы функций

1. Конструкция биортогональной системы. Возьмем систему функций

$$e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \dots, e^{\lambda_n z}, \dots, \quad (1.1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — различные комплексные числа, причем $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$. Требуется найти функции $\psi_\nu(z)$ ($\nu = 1, 2, \dots$), аналитические вне некоторого круга и обладающие свойством

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda_\mu t} \psi_\nu(t) dt = \delta_{\mu, \nu} \quad (\mu = 1, 2, \dots; \nu = 1, 2, \dots), \quad (1.2)$$

где C — окружность, на которой и вне которой все функции $\psi_\nu(t)$ — аналитические, и

$$\delta_{\mu, \nu} = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{при } \mu = \nu. \end{cases}$$

Ясно, что у каждой функции $\psi_\nu(t)$ должны быть особенности внутри C .

Если биортогональная система $\{\psi_\nu(t)\}$ в смысле (1.2) имеется, то должно выполняться условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma < \infty. \quad (1.3)$$

Действительно, рассмотрим функцию

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \psi_1(t) dt.$$

*) Здесь будут изложены результаты из работ [14], [16], [17], [20], [23], [25], [32], [34], [36].

Это — целая функция экспоненциального типа, не равная тождественно нулю. В силу (1.2), точки $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ являются для нее нулями. Поэтому должно выполняться условие (1.3).

Условие (1.3) является не только необходимым, но и достаточным для существования биортогональной системы $\{\psi_\nu(t)\}$. Приступим к построению функций $\psi_\nu(t)$.

Пусть $L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа, для которой $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — простые нули (кроме этих нулей, у $L(\lambda)$ могут быть и другие нули). В качестве $L(\lambda)$ можно, например, взять функцию

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right),$$

если $|\lambda_1| > 0$, или функцию

$$\lambda \prod_{\nu=2}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right),$$

если $\lambda_1 = 0$ (штрих у знака произведения означает, что в произведении все скобки различны). То, что эти произведения изображают целые функции экспоненциального типа, следует из условия (1.3).

Положим

$$L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \lambda^n, \quad (1.4)$$

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^{n+1}}.$$

Функция $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$. Если $L(\lambda)$ имеет тип σ , то ряд (1.4) сходится при $|t| > \sigma$. Обозначим $\bar{D}$ наименьшее замкнутое выпуклое множество, которое содержит в себе все особенности функции $\gamma(t)$.

Пусть C — замкнутый контур, охватывающий множество $\bar{D}$. Имеем

$$L(\bar{\lambda}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{\lambda t} dt.$$

Отметим равенство

$$L(\lambda_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{\lambda_\nu t} dt = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (1.5)$$

Следующий способ построения биортогональной системы основан на методе интегрирования по частям.

Запишем равенство

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{(\lambda-\lambda_v)t} e^{\lambda_v t} \gamma(t) dt$$

и положим

$$v_v(t) = \int_a^t e^{\lambda_v \xi} \gamma(\xi) d\xi,$$

где a — точка контура C . Функция $v_v(t)$ регулярна вне $\bar{D}$ и там, в силу (1.5), однозначна. Имеем

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} e^{(\lambda-\lambda_v)t} v_v(t)|_C - \frac{(\lambda-\lambda_v)}{2\pi i} \int_C e^{(\lambda-\lambda_v)t} v_v(t) dt.$$

В силу однозначности на C функции $v_v(t)$, подстановка равна нулю. Поэтому

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_v) \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} [-e^{-\lambda_v t} v_v(t)] dt \quad (1.6)$$

или

$$\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v) L'(\lambda_v)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \psi_v(t, a) dt, \quad (1.7)$$

где

$$\psi_v(t, a) = -\frac{1}{L'(\lambda_v)} e^{-\lambda_v t} v_v(t) = -\frac{1}{L'(\lambda_v)} e^{-\lambda_v t} \int_a^t e^{\lambda_v \xi} \gamma(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

Функции $\psi_v(t, a)$ регулярны и однозначны вне $\bar{D}$. Из равенства (1.7) следует

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \psi_v(t, a) dt = \delta_{\lambda, \lambda_v}.$$

Следовательно, система $\{\psi_v(t, a)\}$ биортогональна к системе (1.1). Полезно отметить следующее: из формулы (1.8) следует, что функции $\psi_v(t, a)$ регулярны вне $\bar{D}$ и что их аналитически можно продолжить внутрь $\bar{D}$ по любому пути, по которому аналитически продолжается функция $\gamma(t)$.

Возьмем вне $\bar{D}$ какую-нибудь точку b . Из (1.8) получаем

$$\psi_v(t, b) - \psi_v(t, a) = \frac{1}{L'(\lambda_v)} e^{-\lambda_v t} \int_a^b e^{\lambda_v \xi} \gamma(\xi) d\xi = C_v(a, b) e^{-\lambda_v t}, \quad (1.9)$$

где $C_v(a, b)$ — постоянная. Функции $\psi_v(t, b)$ и $\psi_v(t, a)$ отличаются друг от друга на целую функцию. Пусть в (1.9) $b \rightarrow \infty$

по направлению φ из полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda_v \xi) < 0$. Тогда

$$\psi_v(t, \infty) - \psi_v(t, a) = C_v(a, \infty) e^{-\lambda_v t}, \quad (1.10)$$

причем

$$\psi_v(t, \infty) = -\frac{1}{L'(\lambda_v)} e^{-\lambda_v t} \int_{\infty e^{i\varphi}}^t e^{\lambda_v \xi} \gamma(\xi) d\xi. \quad (1.11)$$

Из (1.10) следует, что функции $\psi_v(t, \infty)$ регулярны там же, где регулярны функции $\psi_v(t, a)$. В силу (1.7),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \psi_v(t, \infty) dt = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_v) (\lambda - \lambda_v)}. \quad (1.12)$$

Убедимся, что $\psi_v(t, \infty) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. На основании (1.11)

$$\psi_v(t, \infty) = -\frac{1}{L'(\lambda_v)} \int_{\infty e^{i\varphi}}^t e^{\lambda_v (\xi-t)} \gamma(\xi) d\xi.$$

Положив $\xi - t = \eta$, получим

$$\psi_v(t, \infty) = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \int_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{\lambda_v \eta} \gamma(t + \eta) d\eta. \quad (1.13)$$

Будем считать, что в (1.13) интегрирование происходит по лучу l_φ : $\arg \eta = \varphi$. Когда η пробегает луч l_φ , переменная $t + \eta$ пробегает луч $l_\varphi(t)$, выходящий из точки t под углом φ к действительной оси. Чтобы интеграл (1.13) имел смысл, необходимо потребовать, чтобы луч $l_\varphi(t)$ лежал вне множества $\bar{D}$. Точки t , для которых последнее условие выполняется, образуют область E_φ — внешность полуполосы, ограниченной двумя лучами, касающимися множества $\bar{D}$ и направленными под углом $(\pi + \varphi)$ к действительной оси, и частью границы множества $\bar{D}$, обращенной в сторону направления φ . Когда луч l_φ будет поворачиваться, оставаясь в полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda_v \eta) < 0$, область E_φ опишет всю внешность множества $\bar{D}$.

Возьмем достаточно большое положительное R . Точки t , для которых лучи $l_\varphi(t)$ лежат вне круга $|\eta| \leq R$, образуют область $E_\varphi(R)$ — внешность полуполосы шириной $2R$ и ограниченной со стороны направления φ полуокружностью. Для таких t выражение $\gamma(t + \eta)$ по модулю мало и, значит, функция $\psi_v(t, \infty)$, в силу (1.13), также по модулю мала. Поворачивая луч l_φ , убедимся, что функция $\psi_v(t, \infty)$ по модулю мала всюду вне круга $|t| \leq R$. Это и означает, что $\psi_v(t, \infty) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Учитывая этот факт и представление (1.12), заключаем, что $\psi_v(t, \infty)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией экспоненциального типа

$$L_v(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_v)(\lambda - \lambda_v)}.$$

Отсюда для $\psi_v(t, \infty)$ получаем новое представление

$$\psi_v(t, \infty) = \int_0^\infty L_v(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda. \quad (1.14)$$

Из (1.12) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \psi_v(t, \infty) dt = \delta_{\mu, \nu}, \quad (1.15)$$

т. е. система $\{\psi_v(t, \infty)\}$, как и система $\{\psi_v(t, a)\}$, биортогональна к системе (1.1). В дальнейшем в качестве системы, биортогональной к системе (1.1), чаще всего будем брать систему $\{\psi_v(t, \infty)\}$. Для простоты функцию $\psi_v(t, \infty)$ будем обозначать $\psi_v(t)$ ($v = 1, 2, \dots$).

Используя представление (1.14), можно получить асимптотику $\psi_v(t)$ при больших v . Имеем

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_v} = - \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{\lambda_v^{m+1}} + \frac{1}{\lambda - \lambda_v} \left(\frac{\lambda}{\lambda_v} \right)^{k+1}.$$

В силу этого, находим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda &= - \sum_{m=0}^k \frac{1}{\lambda_v^{m+1}} \int_0^\infty \lambda^m L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{\lambda_v^{k+1}} \int_0^\infty \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda - \lambda_v} L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Поскольку

$$\gamma(t) = \int_0^\infty L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda,$$

то

$$\int_0^\infty \lambda^m L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda = (-1)^m \gamma^{(m)}(t).$$

Оценим последний интеграл в соотношении (1.16). Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$. Нетрудно убедиться, что при

фиксированном k

$$\left| \lambda^{k+1} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| < A(e) e^{(h(\varphi) + \varepsilon)|\lambda|}, \quad \varphi = \arg \lambda,$$

где $\varepsilon > 0$ — любое, а $A(e)$ не зависит от v . На основании этого неравенства заключаем, что на замкнутом множестве F , лежащем вне $\bar{D}$, интеграл

$$J_v(t) = \int_0^\infty \lambda^{k+1} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda,$$

представляющий собой функцию, ассоциированную с целой функцией

$$\lambda^{k+1} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v},$$

ограничен:

$$|J_v(t)| < C, \quad t \in F,$$

где C не зависит от v . В силу всего сказанного, из (1.16) находим при больших $|\lambda_v|$

$$\int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda = - \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\lambda_v^{m+1}} \gamma^{(m)}(t) + O\left(\frac{1}{\lambda_v^{k+1}}\right), \quad t \in F. \quad (1.17)$$

На основании этого получаем искомую асимптотику

$$\psi_v(t) = - \frac{1}{L'(\lambda_v)} \left\{ \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\lambda_v^{m+1}} \gamma^{(m)}(t) + O\left(\frac{1}{\lambda_v^{k+1}}\right) \right\}, \quad (1.18)$$

$$t \in F, \quad \lambda_v \rightarrow \infty.$$

Из представления (1.18) видно, что во всякой точке t , в которой $\gamma(t) \neq 0$, при больших v асимптотически

$$\psi_v(t) \approx - \frac{1}{\lambda_v L'(\lambda_v)} \gamma(t).$$

2. Биортогональные системы в случае кратных корней. Вместо системы (1.1) рассмотрим более общую систему

$$e^{\lambda_v z}, z e^{\lambda_v z}, \dots, z^{m_v-1} e^{\lambda_v z} \quad (v = 1, 2, \dots). \quad (1.19)$$

Введем последовательность чисел $\{\mu_n\}$ по такому правилу:

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{m_1} = \lambda_1, \quad \mu_{m_1+1} = \dots = \mu_{m_1+m_2} = \lambda_2, \dots$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\mu_n|} < \infty.$$

Тогда найдется целая функция экспоненциального типа $L(\lambda)$, которая в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ будет иметь нули порядков, соответственно равных $m_1, m_2, \dots$. Пусть, как и выше, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, C — замкнутый контур, охватывающий множество $\bar{D}$.

Требуется построить систему функций, биортогональную к системе (1.19). Обозначим $A_{v,k}(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с целой функцией

$$\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^{k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots, m_v - 1).$$

Положим, далее,

$$M_v(\mu) = \frac{(\mu - \lambda_v)^{m_v}}{L(\mu)}.$$

Утверждаем, что искомой биортогональной системой будет система функций

$$\psi_{v,k}(t) = \frac{1}{k! (m_v - k - 1)!} \sum_{q=0}^{m_v-k-1} q! C_{m_v-k-1}^q [M_v(\mu)]_{\mu=\lambda_v}^{(m_v-k-q-1)} A_{v,q}(t). \quad (1.20)$$

Иными словами, имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C t^s e^{\lambda p t} \psi_{v,k}(t) dt = \begin{cases} 0, & p \neq v, \\ 0, & p = v, \quad s \neq k, \\ 1, & p = v, \quad s = k. \end{cases}$$

Для доказательства подсчитаем левую часть равенства. Обозначив ее для краткости A , запишем

$$A = \frac{1}{k! (m_v - k - 1)!} \sum_{q=0}^{m_v-k-1} C_{m_v-k-1}^q \times \\ \times [M_v(\mu)]_{\mu=\lambda_v}^{(m_v-k-q-1)} q! \frac{1}{2\pi i} \int_C t^s e^{\lambda p t} A_{v,q}(t) dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C t^s e^{\lambda t} A_{v,q}(t) dt = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^{q+1}},$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C t^s e^{\lambda p t} A_{v,q}(t) dt = \left[\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^{q+1}} \right]_{\lambda=\lambda_p}^{(s)}.$$

Но

$$q! \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^{q+1}} = \left[\frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} \right]_{\mu=\lambda_v}^{(q)}.$$

Поэтому

$$q! \frac{1}{2\pi i} \int_C t^s e^{\lambda p t} A_{v,q}(t) dt = \left\{ \left[\frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} \right]_{\mu=\lambda_v}^{(q)} \right\}_{\lambda=\lambda_p}^{(s)} = \\ = \left\{ \left[\frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} \right]_{\lambda=\lambda_p}^{(s)} \right\}_{\mu=\lambda_v}^{(q)} = \left\{ s! \frac{L(\mu)}{(\mu - \lambda_p)^{s+1}} \right\}_{\mu=\lambda_v}^{(q)}.$$

В силу этого,

$$A = \frac{s!}{k! (m_v - k - 1)!} \sum_{q=0}^{m_v-k-1} C_{m_v-k-1}^q [M_v(\mu)]_{\mu=\lambda_v}^{(m_v-k-q-1)} \left[\frac{L(\mu)}{(\mu - \lambda_p)^{s+1}} \right]_{\mu=\lambda_v}^{(q)} = \\ = \frac{s!}{k! (m_v - k - 1)!} [M_v(\mu)]_{\mu=\lambda_v}^{(m_v-k-1)} = \\ = \frac{s!}{k! (m_v - k - 1)!} \left[\frac{(\mu - \lambda_v)^{m_v}}{(\mu - \lambda_p)^{s+1}} \right]_{\mu=\lambda_v}^{(m_v-k-1)} = \begin{cases} 0, & p \neq v, \\ 0, & p = v, \quad s \neq k, \\ 1, & p = v, \quad s = k, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что

$$\psi_{v, m_v-1}(t) = \frac{1}{(m_v - 1)!} M_v(\lambda_v) A_{v,0}(t).$$

Здесь

$$A_{v,0}(t) = \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda.$$

В силу формулы (1.17),

$$\psi_{v, m_v-1}(t) = \frac{M_v(\lambda_v)}{(m_v - 1)!} \left[- \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\lambda_v^{m+1}} \gamma^{(m)}(t) + O\left(\frac{1}{\lambda_v^{k+1}}\right) \right], \quad (1.21)$$

$$\lambda_v \rightarrow \infty, \quad t \in F,$$

где F — произвольное замкнутое множество, лежащее вне $\bar{D}$.

Систему (1.20) естественно называть системой, соответствующей случаю кратных корней порождающей эту систему характеристической функции $L(\lambda)$.

3. Поведение биортогональной системы при дополнительном условии на характеристическую функцию. Рассмотрим систему (1.14)

$$\psi_v(t) = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (v = 1, 2, \dots),$$

биортогональную к системе (1.1).

Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$. Из определения индикатрисы следует, что

$$|L(re^{i\varphi})| < e^{h(\varphi) + \varepsilon} r, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Важно отметить, что в написанном неравенстве нельзя отбросить ε . Имея это в виду, наложим на характеристическую функцию дополнительное ограничение

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1, \quad r > 0. \quad (1.22)$$

Из условия (1.22) следует, что функция $\gamma(t) = \int_0^\infty L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda$, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, регулярна вне $\bar{D}$ и непрерывна до границы. В этом случае и функции $\psi_v(t)$, регулярные вне $\bar{D}$, непрерывны до границы множества $\bar{D}$. Получим для них оценку на $\partial\bar{D}$.

Выведем сначала неравенство

$$h(\varphi_1)r_1 - h(\varphi_2)r_2 \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \max_{z \in \bar{D}} |z|, \quad (1.23)$$

$$\lambda_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \lambda_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Пусть $K(\varphi)$ — опорная функция множества $\bar{D}$:

$$K(\varphi) = \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(e^{-i\varphi} z).$$

Известно, что $K(\varphi) = h(-\varphi)$. Таким образом,

$$h(\varphi) = \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(e^{i\varphi} z).$$

В силу этого,

$$h(\varphi_1) = \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(e^{i\varphi_1} z) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi_1} z_1), \quad z_1 \in \bar{D},$$

откуда

$$h(\varphi_1)r_1 = \operatorname{Re}(e^{i\varphi_1} r_1 z_1) = \operatorname{Re}(\lambda_1 z_1).$$

Далее, имеем

$$h(\varphi_2) = \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(e^{i\varphi_2} z).$$

На основании изложенного

$$\begin{aligned} h(\varphi_1)r_1 - h(\varphi_2)r_2 &= \operatorname{Re}(\lambda_1 z_1) - r_2 \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(e^{i\varphi_2} z) \leq \\ &\leq \operatorname{Re}(\lambda_1 z_1) - r_2 \operatorname{Re}(e^{i\varphi_2} z_1) = \operatorname{Re}(\lambda_1 z_1) - \operatorname{Re}(\lambda_2 z_1) = \\ &= \operatorname{Re}[(\lambda_1 - \lambda_2) z_1] \leq |\lambda_1 - \lambda_2| |z_1| \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \max_{z \in \bar{D}} |z|, \end{aligned}$$

что и надо было показать.

Теперь убедимся в том, что

$$|L'(re^{i\varphi})| < B \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r > 0. \quad (1.24)$$

Имеем

$$L'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-\lambda|=1} \frac{L(t) dt}{(t-\lambda)^2},$$

откуда

$$|L'(\lambda)| \leq \max_{|t-\lambda|=1} |L(t)| = |L(t_0)|, \quad |t_0 - \lambda| = 1.$$

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$, $t_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$. При $r > 1$ имеем $r_0 > 0$. Согласно условию (1.22),

$$|L(t_0)| < A \frac{e^{h(\varphi_0)r_0}}{r_0^\mu} = A \left(\frac{r}{r_0}\right)^\mu e^{h(\varphi_0)r_0 - h(\varphi)r} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r > 1.$$

В силу неравенства (1.23),

$$h(\varphi_0)r_0 - h(\varphi)r \leq |t_0 - \lambda| \max_{z \in \bar{D}} |z| = \max_{z \in \bar{D}} |z|.$$

Кроме того, при $r > 2$

$$r_0 \geq r - 1 \geq \frac{r}{2}, \quad \frac{r}{r_1} \leq 2.$$

Поэтому

$$|L'(\lambda)| < A 2^\mu \exp(\max_{z \in \bar{D}} |z|) \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r > 2.$$

При подходящем выборе константы получим отсюда неравенство (1.24).

На основании (1.24) установим неравенство

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| < C \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r \geq 2, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad (1.25)$$

где константа C не зависит от v .

В случае $|\lambda - \lambda_v| \geq 1$ имеем

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| \leq |L(\lambda)|,$$

откуда, на основании условия (1.22), получаем неравенство (1.25) с $C = A$.

Пусть теперь $|\lambda - \lambda_v| < 1$. Поскольку $L(\lambda_v) = 0$,

$$L(\lambda) = L(\lambda) - L(\lambda_v) = \int_{\lambda_v}^{\lambda} L'(t) dt.$$

Будем считать, что интегрирование происходит по прямолинейному отрезку, соединяющему λ_v с λ . Тогда получим

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| \leq |L'(t_0)|, \quad t_0 \in [\lambda_v, \lambda].$$

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$, $t_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$. На основании (1.24)

$$|L'(t_0)| < B \frac{e^{h(\varphi_0)r_0}}{r_0^\mu}$$

или

$$|L'(t_0)| < B \left(\frac{r}{r_0} \right)^\mu e^{h(\varphi_0)r_0 - h(\varphi)r} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}. \quad (1.26)$$

Будем считать, что $r \geq 2$. При этом условии

$$r_0 \geq r - 1 \geq \frac{r}{2}, \quad \frac{r}{r_0} < 2.$$

В силу неравенства (1.23), имеем, далее,

$$h(\varphi_0)r_0 - h(\varphi)r \leq |t_0 - \lambda| \max_{z \in \bar{D}} |z| < \max_{z \in \bar{D}} |z|.$$

Поэтому, согласно (1.26), находим

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| < 2^\mu B \exp \left[\max_{z \in \bar{D}} |z| \right] \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r \geq 2.$$

Положим

$$C = \max(A, 2^\mu B \exp \left[\max_{z \in \bar{D}} |z| \right]).$$

При таком C имеет место неравенство (1.25), постоянная C при этом не зависит от v .

Из оценки (1.25), на основании принципа максимума модуля, получаем, что в круге $|\lambda| \leq 2$

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| < \frac{C}{2^\mu} \max_{\varphi} e^{2h(\varphi)} = C_1. \quad (1.27)$$

Постоянная C_1 не зависит от v . Имея это в виду и учитывая неравенство (1.25), заключаем, на основании формулы (1.14), что

$$|\Psi_v(t)| < \frac{A}{|L'(\lambda_v)|}, \quad t \in \partial \bar{D}, \quad (1.28)$$

где A — некоторая постоянная, не зависящая от v , а $\partial \bar{D}$ — граница $\bar{D}$.

При условии, что в неравенстве (1.22) величина $\mu > 3$, для функций $\Psi_v(t)$ можно на границе $\partial \bar{D}$ получить при больших v асимптотику. С этой целью рассмотрим равенство (1.16) при $k=1$:

$$\int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda = -\frac{1}{\lambda_v} \int_0^\infty L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda - \\ - \frac{1}{\lambda_v^2} \int_0^\infty \lambda L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda + \frac{1}{\lambda_v^2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\lambda - \lambda_v} L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda. \quad (1.29)$$

Поскольку $\mu > 3$, на основании (1.22), (1.25) и (1.27) имеем

$$\left| \int_0^\infty \lambda L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda \right| < B, \quad \left| \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\lambda - \lambda_v} L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda \right| < B, \quad t \in \partial \bar{D}, \quad (1.30)$$

где B не зависит от v . Следовательно,

$$\Psi_v(t) = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \left(-\frac{\gamma(t)}{\lambda_v} + \frac{\gamma_v(t)}{\lambda_v^2} \right), \quad |\gamma_v(t)| < 2B, \quad t \in \partial \bar{D}. \quad (1.31)$$

В случае кратных нулей функции $L(\lambda)$, иными словами, в случае системы (1.19), рассмотрим биортогональную систему (1.20). Обратим внимание на то, что функции

$$\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^{q+1}} \quad (q=0, 1, \dots, m_v-1),$$

с которыми ассоциированы по Борелю функции $A_{v,q}(t)$, по доказанному удовлетворяют условию

$$\left| \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^{q+1}} \right| < C_q \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r > 0,$$

где константа C_q не зависит от v (это неравенство доказано (см. (1.25) и (1.27)) для $q=0$, но тогда оно верно для $q=1$ и т. д.). Поэтому функции $A_{v,q}(t)$, а следовательно, и функция $\Psi_{v,k}(t)$ регулярны вне $\bar{D}$ и непрерывны вплоть до границы $\partial \bar{D}$. Используя (1.29) и (1.30), получим, что при $\mu > 3$

$$\Psi_{v, m_v-1}(t) = -\frac{M_v(\lambda_v)}{(m_v-1)!} \left\{ \frac{\gamma(t)}{\lambda_v} + O\left(\frac{1}{\lambda_v^2}\right) \right\}, \quad t \in \partial \bar{D}, \quad v \rightarrow \infty. \quad (1.32)$$

Для выпуклой многоугольной области нетрудно привести примеры функций, удовлетворяющих условию (1.22).

Пусть $\bar{G}$ — выпуклый многоугольник и $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ — его вершины. Рассмотрим квазиполином

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^p A_j e^{\gamma_j \lambda}, \quad A_j \neq 0 \quad (j=1, 2, \dots, p).$$

Для него множество $\bar{D}$ — многоугольник $\bar{G}$, а индикатриса роста равна

$$h(\varphi) = \max | \gamma_j | \cos(\varphi + \psi_j), \quad \psi_j = \arg \gamma_j \quad (j=1, 2, \dots, p),$$

ибо

$$|e^{\gamma_j \lambda}| = \exp[| \gamma_j | \cos(\varphi + \psi_j) | \lambda |], \quad \varphi = \arg \lambda.$$

Непосредственно видно, что

$$|P(re^{i\varphi})| \leq A e^{h(\varphi)r}, \quad A = \sum_{j=1}^p |A_j|.$$

У квазиполинома $P(\lambda)$ имеется бесконечно много нулей. Все они, начиная с некоторого, — простые (см. теорему 1.2.10). Если $P(\lambda)$ поделить на обычный многочлен подходящей степени, нули которого являются нулями $P(\lambda)$, то получим целую функцию экспоненциального типа $L(\lambda)$ со свойством (1.22).

В случае произвольной конечной выпуклой области существования функции $L(\lambda)$ со свойством (1.22) устанавливается теоремой 1.3.6.

§ 2. Формулы для коэффициентов. Интерполирующая функция

1. Случай простых корней. Рассмотрим ряды по функциям системы (1.1). Предполагаем, что $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, имеющая в точках λ_ν ($\nu=1, 2, \dots$) простые нули. С помощью этой функции определена биортогональная система $\{\psi_\nu(t) = \psi_\nu(t, \infty)\}$.

Приведем формулы для определения коэффициентов разложения по системе (1.1). Предположим, что некоторая функция $F(z)$ в открытой области $G \supset \bar{D}$ ($\bar{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$), ассоциированной по Борелю с $L(\lambda)$ представляется равномерно сходящимся рядом

$$F(z) = \sum_{\nu} \alpha_\nu e^{\lambda_\nu z}.$$

Пусть C — замкнутый контур, лежащий в G и охватывающий множество $\bar{D}$. Умножив обе части последнего равенства на $\psi_\nu(z)$

и проинтегрировав по контуру C , на основании биортогональности систем $\{e^{\lambda_\nu z}\}$ и $\{\psi_\nu(z)\}$ получим

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_\nu(t) dt \quad (\nu=1, 2, \dots). \quad (2.1)$$

Формулы (2.1) имеют смысл для любой функции $F(z)$, аналитической на замкнутом множестве $\bar{D}$ (за C надо брать контур, охватывающий $\bar{D}$, внутри которого и на котором $F(z)$ является аналитической функцией). Имея это в виду, произвольной функции $F(z)$, аналитической на $\bar{D}$, сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu e^{\lambda_\nu z}, \quad (2.2)$$

где α_ν определим формулами (2.1).

Получим асимптотику для коэффициента α_ν . Из (2.1), на основании (1.18), имеем

$$\alpha_\nu = -\frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \left\{ \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\lambda_\nu^{m+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \gamma^{(m)}(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}}\right) \right\}.$$

Положим

$$M(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t+z) \gamma(t) dt,$$

где $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, а z лежит в достаточно малой окрестности начала координат. Имеем

$$[M(F)]^{(m)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C F^{(m)}(t+z) \gamma(t) dt = (-1)^m \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t+z) \gamma^{(m)}(t) dt,$$

откуда

$$[M(F)]_0^{(m)} = [M(F)]_{z=0}^{(m)} = (-1)^m \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \gamma^{(m)}(t) dt.$$

В силу этого,

$$\alpha_\nu = -\frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \left\{ \sum_{m=0}^k \frac{[M(F)]_0^{(m)}}{\lambda_\nu^{m+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda_\nu^{k+1}}\right) \right\}. \quad (2.3)$$

Пусть $M(F) \neq 0$, и пусть p — наименьшее целое такое, что $[M(F)]_0^{(p)} \neq 0$. Тогда из (2.3) следует, что при больших ν

$$\alpha_\nu \approx -\frac{[M(F)]_0^{(p)}}{L'(\lambda_\nu) \lambda_\nu^{p+1}}, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

В случае, когда $M(F) = 0$, коэффициенты α_ν убывают быстрее. Из оценки (2.4) следует, что ряд (2.2) не может сходитьсся в какой-либо области $G \supset \bar{D}$. Точнее, существует полуплоскость K

такая, что K не пересекается с $\bar{D}$, граница K имеет общие точки с $\bar{D}$, в полуплоскости K ряд (2.2) расходится.

Пусть $\varphi_v = \arg \lambda_v$ ($v = 1, 2, \dots$), φ_0 — одна из предельных точек $\{\varphi_v\}$, $\{\varphi_{n_v}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к φ_0 , $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$, $K(\varphi)$ — опорная функция множества $\bar{D}$ (прямая, перпендикулярная направлению $\arg z = \varphi$, не пересекает $\bar{D}$, если она отстоит от начала координат на расстоянии, большем $K(\varphi)$, и имеет общие точки с $\bar{D}$, если она отстоит от начала на расстоянии, равном $K(\varphi)$). Напомним, что $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Пусть l_0 — прямая, перпендикулярная направлению $\arg z = -\varphi_0$ и отстоящая от начала на расстоянии, равном $K(-\varphi_0)$.

Утверждаем, что искомая полуплоскость K есть полуплоскость, ограниченная прямой l_0 .

Действительно, поскольку у производной $L'(\lambda)$ индикатриса роста не превосходит $h(\varphi)$, вследствие чего

$$|L'(\lambda_v)| < A(e) \exp\{|h(\varphi_v) + e||\lambda_v|\} \quad (v = 1, 2, \dots)$$

при любом $\varepsilon > 0$, то при больших v

$$|a_v e^{\lambda_v z}| > \frac{1}{2} \left| \frac{[M(F)]_0^{(p)}}{\lambda_v^{p+1}} \right| \exp\{|[z|\cos(\varphi_v + \psi) - h(\varphi_v) - e]|\lambda_v|\},$$

$$\psi = \arg z.$$

Предположим, что z — фиксированная точка из полуплоскости K . При больших $v = n_v$

$$|z|\cos(\varphi_v + \psi) > K(-\varphi_v) + \delta, \quad \delta > 0,$$

и потому

$$|a_v e^{\lambda_v z}| > \frac{1}{2} \left| \frac{[M(F)]_0^{(p)}}{\lambda_v^{p+1}} \right| e^{(\delta - \varepsilon)|\lambda_v|} > 1, \quad v = n_v$$

(выбираем $\varepsilon < \delta$). Ряд (2.2) в точке z расходится, что и надо было доказать.

Преобразуем теперь формулы (2.1) для коэффициентов к другому виду. На основании соотношений (1.8) и (1.10) имеем

$$a_v = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_v(t, a) dt =$$

$$= -\frac{1}{L'(\lambda_v)} \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) e^{-\lambda_v t} \left(\int_a^t e^{\lambda_v \xi} \gamma(\xi) d\xi \right) dt. \quad (2.5)$$

Положим

$$v(t) = \int_a^t F(\eta) e^{-\lambda_v \eta} d\eta, \quad a \in \bar{D}.$$

Функция $v(t)$ регулярна внутри контура C и на самом контуре C . Применив к интегралу (2.5) метод интегрирования по частям, получим

$$a_v L'(\lambda_v) = - \left[\frac{v(t)}{2\pi i} \int_a^t e^{\lambda_v \xi} \gamma(\xi) d\xi \right]_C + \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda_v t} \gamma(t) v(t) dt.$$

Подстановка равна нулю, поскольку на контуре C функции

$$v(t) \text{ и } \int_a^t e^{\lambda_v \xi} \gamma(\xi) d\xi$$

— однозначные. Следовательно,

$$a_v L'(\lambda_v) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_a^t F(\eta) e^{\lambda_v(t-\eta)} d\eta \right) dt,$$

или, окончательно,

$$a_v = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_a^t F(t-\xi) e^{\lambda_v \xi} d\xi \right) dt \quad (v = 1, 2, \dots). \quad (2.6)$$

Введем функцию

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_a^t F(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt. \quad (2.7)$$

Она — целая функция экспоненциального типа. С помощью этой функции формула (2.6) представится в виде

$$a_v = \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)} \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

а общий член ряда (2.2) в виде

$$a_v e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad (2.9)$$

где C_v — окружность с центром в точке λ_v , внутри которой нет нулей $L(\mu)$, кроме λ_v . В силу свойства (2.8), функцию $\omega_L(\mu, F)$ называем *интерполирующей функцией*.

2. Случай кратных корней. При наличии системы (1.19) функции $F(z)$, аналитической на множестве $\bar{D}$, сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_v-1} a_{v,k} z^k e^{\lambda_v z}, \quad (2.10)$$

где

$$a_{v,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_{v,k}(t) dt. \quad (2.11)$$

Функции $\Psi_{\nu, k}(t)$ образуют биортогональную к системе (1.19) систему (1.20).

Не будем приводить асимптотику всех коэффициентов $\alpha_{\nu, k}$ при больших ν , ограничимся лишь асимптотикой коэффициента $\alpha_{\nu, m_{\nu}-1}$. На основании (1.21) имеем

$$\alpha_{\nu, m_{\nu}-1} = -\frac{M_{\nu}(\lambda_{\nu})}{(m_{\nu}-1)!} \left\{ -\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\lambda_{\nu}^{m+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \gamma^{(m)}(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda_{\nu}^{k+1}}\right) \right\}.$$

Интегралы, стоящие справа, уже рассматривались. Окончательно получаем

$$\alpha_{\nu, m_{\nu}-1} = -\frac{M_{\nu}(\lambda_{\nu})}{(m_{\nu}-1)!} \left\{ \sum_{m=0}^k \frac{[M(F)]_0^{(m)}}{\lambda_{\nu}^{m+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda_{\nu}^{k+1}}\right) \right\}. \quad (2.12)$$

В рассматриваемом случае опять введем функцию (2.7). Покажем, что

$$\sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \alpha_{\nu, k} z^k e^{\lambda_{\nu} z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\nu}} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad (2.13)$$

где C_{ν} — окружность с центром в точке λ_{ν} , внутри которой нет нулей $L(\mu)$, отличных от λ_{ν} .

Чтобы доказать равенство (2.13), отметим следующее свойство функции (2.7): если $L(\beta) = 0$, $L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$, $\gamma_1(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_1(\lambda)$, то

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta) \omega_{L_1}(\mu, F) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_1(t) F(t) dt. \quad (2.14)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\int_a^t F(\eta) e^{(\eta-\mu)\eta} d\eta \right) \gamma(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\int_a^t F(\eta) e^{-\eta\mu} e^{(\mu-\beta)\eta} d\eta \right) e^{\beta t} \gamma(t) dt. \end{aligned}$$

Положив

$$v(t) = \int_a^t \gamma(\xi) e^{\beta \xi} d\xi, \quad a \in C,$$

и проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) &= \left[\frac{1}{2\pi i} v(t) \int_a^t F(\eta) e^{-\eta\mu} e^{(\mu-\beta)\eta} d\eta \right] \Big|_C - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[F(t) + (\mu - \beta) \int_a^t F(\eta) e^{(\eta-\mu)\eta} d\eta \right] e^{-\beta t} v(t) dt. \end{aligned}$$

Так как функция $v(t)$ — однозначная на C , то функция, стоящая в первой квадратной скобке, однозначна на контуре C . Поэтому первое слагаемое в правой части равно нулю и, следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) g(t) dt + (\mu - \beta) \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\int_a^t F(t - \eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) g(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$g(t) = -e^{-\beta t} \int_a^t \gamma(\xi) e^{\beta \xi} d\xi.$$

Из формулы (1.6) следует, что функция $g(t)$ отличается от функции $\gamma_1(t)$ на целую функцию. В последнем равенстве поэтому функцию $g(t)$ можно заменить на функцию $\gamma_1(t)$. Этим равенство (2.14) установлено.

Пусть β — нуль $L(\lambda)$ кратности m . Полагая

$$L_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \beta)^k} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

и обозначая $\gamma_k(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $L_k(\lambda)$, на основании (2.14) получим

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) &= (\mu - \beta) \omega_{L_1}(\mu, F) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_1(t) F(t) dt, \\ \omega_{L_1}(\mu, F) &= (\mu - \beta) \omega_{L_2}(\mu, F) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_2(t) F(t) dt, \\ &\dots \dots \dots \\ \omega_{L_{m-1}}(\mu, F) &= (\mu - \beta) \omega_{L_m}(\mu, F) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_m(t) F(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta)^m \omega_{L_m}(\mu, F) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k (\mu - \beta)^k,$$

где c_k — постоянные. В частности, получим

$$[\omega_L(\mu, F)]_{\mu=\beta}^{(n)} = n! \omega_{L_n}(\beta, F), \quad n \leq m. \quad (2.15)$$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы (2.13). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu &= \\ &= \frac{1}{(m_v - 1)!} \frac{d^{m_v-1}}{d\mu^{m_v-1}} \left[\frac{(\mu - \lambda_v)^{m_v}}{L(\mu)} \omega_L(\mu, F) e^{\mu z} \right]_{\mu=\lambda_v} = \\ &= \sum_{k=0}^{m_v-1} z^k e^{\lambda_v z} \left\{ \frac{1}{(m_v - 1)!} C_{m_v-1}^k \left[\frac{(\mu - \lambda_v)^{m_v}}{L(\mu)} \omega_L(\mu, F) \right]_{\mu=\lambda_v}^{m_v-k-1} \right\}. \end{aligned}$$

Выражение в фигурной скобке ради простоты обозначим B . Получаем

$$B = \frac{1}{k! (m_v - k - 1)!} \sum_{q=0}^{m_v-k-1} C_{m_v-k-1}^q [M_v(\mu)]_{\mu=\lambda_v}^{(m_v-k-q-1)} [\omega_L(\mu, F)]_{\mu=\lambda_v}^{(q)},$$

где

$$M_v(\mu) = \frac{(\mu - \lambda_v)^{m_v}}{L(\mu)}.$$

Но, в силу (2.15),

$$[\omega_L(\mu, F)]_{\mu=\lambda_v}^{(q)} = q! \omega_{L_q}(\lambda_v, F), \quad L_q(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^q}.$$

Воспользуемся следующим фактом (установленным при выводе формулы (2.6)).

Если $M(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, $M(\beta) = 0$, $\gamma(t)$ и $\psi(t)$ — функции, ассоциированные по Борелю соответственно с $M(\lambda)$ и $\frac{M(\lambda)}{\lambda - \beta}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_a^t F(t - \xi) e^{\beta \xi} d\xi \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi(t) dt.$$

В силу этого факта,

$$\omega_{L_q}(\lambda_v, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) A_{v,q}(t) dt,$$

где $A_{v,q}(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией

$$\frac{L_q(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^{q+1}}.$$

В итоге

$$B = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_{v,k}(t) dt,$$

где функция $\psi_{v,k}(t)$ определена формулой (1.20). Таким образом, $B = a_{v,k}$ и формула (2.13) установлена.

В силу формулы (2.13), соотношение (2.10) запишется в более простом виде (как и в случае простых корней):

$$F(z) \sim \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu. \quad (2.16)$$

3. Обобщения на функции, непрерывные в замкнутой области. Вернемся снова к системе (1.1), но при условии, что характеристическая функция $L(\lambda)$ удовлетворяет дополнительному условию (1.22)

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1, \quad r > 0.$$

В этом случае функции $\psi_v(t)$, как и функция $\gamma(t)$, регулярны вне $\bar{D}$ и непрерывны вплоть до границы $\partial\bar{D}$. Поэтому здесь от функции $F(z)$, которой мы сопоставляем ряд (2.2), достаточно потребовать, чтобы она была регулярной в D (открытой части $\bar{D}$) и непрерывной в $\bar{D}$. Коэффициенты a_v ряда можно записать в виде (2.8), но, в отличие от формулы (2.7), функция $\omega_L(\mu, F)$ запишется в форме

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\bar{D}} \gamma(t) \left(\int_a^t F(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt. \quad (2.17)$$

В силу (1.28), на основании формулы

$$a_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\bar{D}} F(t) \psi_v(t) dt \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (2.18)$$

получаем

$$|a_v| < \frac{C}{|L'(\lambda_v)|} \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (2.19)$$

где C — постоянная, не зависящая от v .

Когда в неравенстве (1.22) величина $\mu > 3$, для коэффициентов a_v получаем из формулы (2.18), на основании соотношения (1.31), асимптотику

$$a_v = -\frac{1}{L'(\lambda_v)} \left\{ \frac{(M(F))_v}{\lambda_v} + O\left(\frac{1}{\lambda_v^2}\right) \right\}, \quad v \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

В случае кратных нулей, но по-прежнему при условии (1.22) функция $\omega_L(\mu, F)$ имеет вид (2.17). От функции $F(z)$, как и выше, требуем, чтобы она была аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$. Уже отмечалось, что в рассматриваемом случае функции $\psi_{v,k}(t)$ непрерывны вне D . Для коэффициентов $\alpha_{v,k}$ имеем формулы

$$\alpha_{v,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F(t) \psi_{v,k}(t) dt.$$

Вместо (2.20) в этом случае при $\mu > 3$ имеем

$$\alpha_{v,m_v-1} = -\frac{M_v(\lambda_v)}{(m_v-1)!} \left\{ \frac{[M(F)]_0}{\lambda_v} + O\left(\frac{1}{\lambda_v^2}\right) \right\}, \quad v \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

4. Свойства интерполирующей функции. Ввиду важной роли во всем дальнейшем интерполирующей функции

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \right) dt, \quad 0 \in \bar{D}, \quad (2.22)$$

отметим ряд ее свойств.

1) $\omega_L(\mu, A_1 F_1 + A_2 F_2) = A_1 \omega_L(\mu, F_1) + A_2 \omega_L(\mu, F_2)$, где A_1, A_2 — постоянные.

2) Если $L(\lambda) = A_1 L_1(\lambda) + A_2 L_2(\lambda)$, где A_1, A_2 — постоянные, то

$$\omega_L(\mu, F) = A_1 \omega_{L_1}(\mu, F) + A_2 \omega_{L_2}(\mu, F).$$

Свойство 1) очевидно. Свойство 2) также очевидно, принимая во внимание, что если $\gamma_j(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_j(\lambda)$ ($j=1, 2$), то

$$\gamma(t) = A_1 \gamma_1(t) + A_2 \gamma_2(t).$$

3) Для $F(z) = e^{\lambda z}$

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi &= \int_0^t e^{\lambda(t-\xi)} e^{\mu\xi} d\xi = e^{\lambda t} \int_0^t e^{(\mu-\lambda)\xi} d\xi = \\ &= e^{\lambda t} \frac{e^{(\mu-\lambda)t} - 1}{\mu - \lambda} = \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}, \end{aligned}$$

и потому

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{\mu - \lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) (e^{\mu t} - e^{\lambda t}) dt = \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

4) Пусть $\varepsilon > 0$, $\bar{D}_\varepsilon$ — область, заштрихованная кругом радиуса ε , когда его центр описывает область $\bar{D}$, C_ε — граница области $\bar{D}_\varepsilon$, $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$. Тогда

$$|\omega_L(re^{i\varphi}, F)| \leq A_\varepsilon e^{[h(\varphi) + \varepsilon]r} \max_{t \in C_\varepsilon} |F(t)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{C_\varepsilon} |\gamma(t)| |dt|, \quad (2.23)$$

где A_ε — диаметр области $\bar{D}_\varepsilon$.

Для доказательства обозначим $K(\varphi)$ опорную функцию множества $\bar{D}$, а $K_\varepsilon(\varphi)$ — опорную функцию множества $\bar{D}_\varepsilon$. Заметим, что $\bar{D}_\varepsilon$ — выпуклое множество, C_ε — выпуклая кривая. Убедимся, что $K_\varepsilon(\varphi) \leq K(\varphi) + \varepsilon$. Геометрически $K(\varphi)$ — расстояние от начала координат до опорной прямой l к $\bar{D}$ (прямая l соприкасается с $\bar{D}$), $K_\varepsilon(\varphi)$ — расстояние от начала координат до опорной прямой l' к $\bar{D}_\varepsilon$. Прямые l и l' параллельны. На l' имеется хотя бы одна точка $z_0 \in \bar{D}_\varepsilon$. Из конструкции $\bar{D}_\varepsilon$ следует, что имеется точка $z_1 \in \bar{D}$ такая, что $|z_1 - z_0| \leq \varepsilon$. Следовательно, расстояние между прямыми l и l' не больше ε , а это и означает, что $K_\varepsilon(\varphi) \leq K(\varphi) + \varepsilon$.

Переходим к оценке интеграла (2.22), взяв в качестве C кривую C_ε . Заметим, что точка ξ (находясь на отрезке с концами в точках 0 и t) лежит все время в области $\bar{D}_\varepsilon$. Поэтому, положив $\mu = re^{i\varphi}$, имеем

$$\begin{aligned} |e^{\mu\xi}| &\leq \exp[r \max_{\xi \in \bar{D}_\varepsilon} (e^{i\varphi\xi})] = \exp[rK_\varepsilon(-\varphi)] \leq \\ &\leq \exp[(K(-\varphi) + \varepsilon)r] = \exp[(h(\varphi) + \varepsilon)r]. \end{aligned}$$

Отметим далее, что точка $(t - \xi)$ (находясь на отрезке $[0, t]$) также все время лежит в области $\bar{D}_\varepsilon$. Поэтому

$$\left| \int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \right| \leq |t| \max_{u \in \bar{D}_\varepsilon} |F(u)| e^{[h(\varphi) + \varepsilon]r}.$$

Величина $|t|$ не превосходит диаметра области $\bar{D}_\varepsilon$. Отсюда и получаем нужную оценку.

5) Пусть последовательность $\{F_m(z)\}$ функций, аналитических в области $G \supset \bar{D}$, равномерно сходится в этой области к $F(z)$. Тогда в любой ограниченной области равномерно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_L(\mu, F_m) = \omega_L(\mu, F).$$

Это свойство — непосредственное следствие оценки (2.23) и свойства 1).

6) Пусть последовательность целых функций $\{L_m(\lambda)\}$ равномерно сходится в любой ограниченной области к $L(\lambda)$, причем

$$|L_m(re^{i\varphi})| < e^{h(\varphi) + \varepsilon_1 r}, \quad r > r_0(\varepsilon), \quad (2.24)$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от m . Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{L_m}(\mu, F) = \omega_L(\mu, F).$$

Для доказательства обозначим $\gamma_m(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $L_m(\lambda)$. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma(t) - \gamma_m(t) &= \int_0^{\infty} [L(\lambda) - L_m(\lambda)] e^{-\lambda t} d\lambda = \\ &= \int_0^a [L(\lambda) - L_m(\lambda)] e^{-\lambda t} d\lambda + \int_a^{\infty} [L(\lambda) - L_m(\lambda)] e^{-\lambda t} d\lambda = J_1 + J_2, \end{aligned}$$

где $a > 0$. Пусть $a > r_0$. Во втором интеграле (пусть $t = |t|e^{i\varphi}$), в силу (2.24),

$$|L(\lambda) - L_m(\lambda)| e^{-\lambda t} \leq \exp[-(|t| \cos(\varphi + \psi) - h(\varphi) - \varepsilon_0)|\lambda|] \leq e^{-\varepsilon_1 |\lambda|},$$

когда t лежит в полуплоскости

$$K_\varphi: |t| \cos(\varphi + \psi) \geq h(\varphi) + 2\varepsilon_0.$$

Поэтому

$$|J_2| \leq e^{-\varepsilon_1 a} < \varepsilon_1,$$

если a велико. Фиксируем a . Из равномерной сходимости $\{L_m(\lambda)\}$ к $L(\lambda)$ в круге $|\lambda| \leq a$ следует, что

$$|J_1| < \varepsilon_1, \quad m > m_0(\varepsilon_1).$$

Таким образом, в полуплоскости K_φ последовательность $\{\gamma_m(t)\}$ равномерно сходится к $\gamma(t)$. Отсюда вытекает, что $\{\gamma_m(t)\}$ равномерно сходится к $\gamma(t)$ на контуре C_ε . Осталось, на основании (2.23), записать неравенство:

$$\begin{aligned} |\omega_L(\mu, F) - \omega_{L_m}(\mu, F)| &= |\omega_{L-L_m}(\mu, F)| \leq \\ &\leq A_\varepsilon e^{h(\varphi) + \varepsilon_1 r} \max_{t \in C_\varepsilon} |F(t)| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} |\gamma(t) - \gamma_m(t)| |dt|. \end{aligned}$$

7) Пусть $F'(z)$ — производная от $F(z)$. Тогда

$$\omega_L(\mu, F') = \mu \omega_L(\mu, F) - F(0) L(\mu) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t F'(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi &= -F(t - \xi) e^{\mu \xi} \Big|_0^t + \mu \int_0^t F(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi = \\ &= -F(0) e^{\mu t} + F(t) + \mu \int_0^t F(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi, \end{aligned}$$

отсюда и вытекает искомое свойство.

На основании этого свойства заключаем, что если

$$F(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},$$

то при условии

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t) dt = 0$$

функции $F'(z)$ соответствует ряд

$$F'(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n e^{\lambda_n z}.$$

8) Пусть $L(\beta) = 0$, $L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$, $\gamma_1(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_1(\lambda)$. Тогда

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta) \omega_{L_1}(\mu, F) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_1(t) F(t) dt. \quad (2.25)$$

Это свойство было установлено в п. 2. Как следствие получаем следующее свойство.

9) Пусть $L(\beta) = 0$, $L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$. Если $\omega_L(\beta, F) = 0$, то

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{L_1}(\mu, F)}{L_1(\mu)}.$$

Действительно, положим $\mu = \beta$ в (2.25). Получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_1(t) F(t) dt = 0,$$

в силу чего

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta) \omega_{L_1}(\mu, F).$$

Отметим теперь свойство более общее, чем свойство 8).

10) Пусть $L(\lambda) = L_1(\lambda) L_2(\lambda)$, где $L_j(\lambda)$ ($j = 1, 2$) — целая функция экспоненциального типа, $h_j(\varphi)$ — индикатриса роста $L_j(\lambda)$,

причем $h_j(\varphi) \geq 0$ и $h_1(\varphi) + h_2(\varphi) = h(\varphi)$. Положим

$$M_{L_j}(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \gamma_j(t) F(t+z) dt,$$

где C_j — замкнутый контур, охватывающий все особенности функции $\gamma_j(t)$, на котором и внутри которого $F(t)$ — аналитическая функция. Тогда

$$\omega_L(\mu, F) = L_1(\mu) \omega_L(\mu, F) + \omega_L(\mu, \Phi), \quad \Phi(z) = M_L(F). \quad (2.26)$$

Убедимся сначала, что второе слагаемое в правой части имеет смысл. Запишем

$$M_L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \gamma_2(t) F(t+z) dt. \quad (2.27)$$

Пусть $\bar{D}_1$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности $\gamma_1(t)$. Если $z \in \bar{D}_1$, $t \in \bar{D}_2$, то $(t+z) \in \bar{D}$. Действительно, имеем при любом φ

$$\operatorname{Re}[(t+z)e^{-i\varphi}] \leq \max_{t \in \bar{D}_1} (te^{-i\varphi}) + \max_{z \in \bar{D}_2} (ze^{-i\varphi}) =$$

$$= K_2(\varphi) + K_1(\varphi) = h_2(-\varphi) + h_1(-\varphi) = h(-\varphi) = K(\varphi).$$

Это означает, что $(t+z) \in \bar{D}$. Отсюда следует, что если z лежит в области $G_1 \supset \bar{D}_1$, мало отличающейся от $\bar{D}_1$, а t пробегает контур C_2 , который находится вблизи $\bar{D}_2$, то точка $(t+z)$ будет находиться в области регулярности функции $F(z)$ и, следовательно, интеграл (2.27) определен и представляет собой аналитическую функцию $\Phi(z)$ в области G_1 . Для такой функции второй член в правой части (2.26) имеет смысл.

Проверим равенство (2.26) для $F(z) = e^{\lambda z}$. Функция (2.27) равна

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \gamma_2(t) e^{\lambda(t+z)} dt = L_2(\lambda) e^{\lambda z}.$$

В силу этого, принимая во внимание свойство 3), находим, что правая часть (2.26) равна

$$L_1(\mu) \frac{L_2(\lambda) - L_2(\mu)}{\lambda - \mu} + L_2(\lambda) \frac{L_1(\lambda) - L_1(\mu)}{\lambda - \mu} = \\ = \frac{L_1(\lambda) L_2(\lambda) - L_1(\mu) L_2(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

Этому же равна, в силу свойства 3), и левая часть (2.26). Следовательно, для $F(z) = e^{\lambda z}$ равенство (2.26) установлено.

Каждый из членов равенства (2.26) линейно зависит от $F(z)$. Поэтому равенство (2.26) будет иметь место, если в качестве $F(z)$

взять конечную линейную комбинацию экспонент

$$F_m(z) = \sum_{k=1}^m a_{mk} e^{\mu_k z}.$$

Выберем числа $\mu_1, \mu_2, \dots$ так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu_k|} = \infty.$$

При этом условии система $\{e^{\mu_k z}\}$ полна во всей плоскости (см. [1]). Поэтому найдутся такие $F_m(z)$, что в некоторой области $G \supset \bar{D}$ равномерно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(z) = F(z).$$

Из этого будет следовать, что в некоторой области $G_1 \supset \bar{D}$ равномерно при $m \rightarrow \infty$

$$\Phi_m(z) \equiv M_L(F_m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \gamma_2(t) F_m(t+z) dt \rightarrow M_L(F) \equiv \Phi(z).$$

В силу этого,

$$\omega_L(\mu, \Phi_m) \rightarrow \omega_L(\mu, \Phi), \quad m \rightarrow \infty.$$

Кроме того, имеем при $m \rightarrow \infty$

$$\omega_L(\mu, F_m) \rightarrow \omega_L(\mu, F), \quad \omega_L(\mu, F_m) \rightarrow \omega_L(\mu, F).$$

Поэтому (2.26) следует из уже установленного соотношения

$$\omega_L(\mu, F_m) = L_1(\mu) \omega_L(\mu, F_m) + \omega_L(\mu, \Phi_m).$$

Заметим, что вместо ссылки на полноту системы $\{e^{\mu_k z}\}$ можно было сослаться на теорему о том, что в любой выпуклой конечной области функцию можно разложить в ряд Дирихле (доказательство этой теоремы на свойство 10) не опирается и будет приведено дальше).

Из (2.26) следует, что если $M_L(F) = 0$, то

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{L_2}(\mu, F)}{L_2(\mu)}.$$

11) Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$, и пусть функция $F(z)$ регулярна в замкнутом круге $|z| \leq R$, $R = \max_{z \in \bar{D}} |z|$. Тогда

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [F^{(k-1)}(0) + \mu F^{(k-2)}(0) + \dots + \mu^{k-1} F(0)].$$

Для доказательства запишем систему равенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi &= F(0) e^{\mu t} + \int_0^t F'(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi &= [F'(0) + \mu F(0)] e^{\mu t} + \int_0^t F''(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi, \\ &\dots \\ \frac{d^k}{dt^k} \int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi &= \\ &= [F^{(k-1)}(0) + \mu F^{(k-2)}(0) + \dots + \mu^{k-1} F(0)] e^{\mu t} + \int_0^t F^{(k)}(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [F^{(k-1)}(0) + \mu F^{(k-2)}(0) + \dots + \mu^{k-1} F(0)] t^k. \quad (2.28)$$

Левая часть регулярна в некотором замкнутом круге $|t| \leq R_1$, $R_1 > R$. Поэтому ряд справа сходится в этом круге (сходится равномерно). Имея это в виду, возьмем в формуле (2.22) в качестве C окружность $|t| = R_1$, и учтем, что на этой окружности

$$\gamma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e_k}{t^{k+1}}.$$

Отсюда, используя (2.28), получим нужное представление.

12) Пусть β — нуль (кратности m) функции $L(\lambda)$, и пусть $\psi(z) = z^p e^{\lambda z}$, где $0 \leq p < m$. Тогда вычет функции

$$\frac{\omega_L(\mu, \psi)}{L(\mu)} e^{\lambda z}$$

(как функции переменной μ) равен $\psi(z)$ в точке $\mu = \beta$ и равен нулю во всех нулях функции $L(\mu)$, отличных от β .

В силу свойства 3),

$$\omega_L(\mu, e^{\lambda z}) = \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, \psi) &= \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \left[\frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda} \right]_{\lambda=\beta} = \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \left[\frac{L(\mu)}{\mu - \lambda} - \frac{L(\lambda)}{\mu - \lambda} \right]_{\lambda=\beta} = \\ &= \left\{ \frac{p! L(\mu)}{(\mu - \lambda)^{p+1}} - \sum_{j=1}^p C_j^p \frac{(p-j)! L^{(j)}(\lambda)}{(\mu - \lambda)^{p-j+1}} \right\}_{\lambda=\beta} = \frac{p! L(\mu)}{(\mu - \beta)^{p+1}}. \end{aligned}$$

На основании этого

$$\frac{\omega_L(\mu, \psi)}{L(\mu)} = \frac{p!}{(\mu - \beta)^{p+1}}.$$

Остальное очевидно.

Для формулировки следующего свойства соотношение (2.10) удобнее записать в следующем виде:

$$F(z) \sim (L) \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

подчеркнув, что ряд справа сконструирован по определенным формулам именно с помощью функции $L(\lambda)$. Здесь

$$P_v(z) = \sum_{k=0}^{m_v-1} a_{v,k} z^k.$$

13) Пусть функции $F(z)$ соответствует ряд

$$F(z) \sim (L) \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z}.$$

Тогда функции

$$\varphi(z) = F(z) - P_1(z) e^{\lambda_1 z}$$

соответствует ряд

$$\varphi(z) \sim (L_1) \sum_{v=2}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

где

$$L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}.$$

Для доказательства обозначим $P_1(z) e^{\lambda_1 z} = f(z)$. По свойству 12)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\omega_L(\mu, f) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = f(z),$$

где C_1 — окружность с центром в точке λ_1 достаточно малого радиуса. По определению

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = P_1(z) e^{\lambda_1 z} = f(z).$$

Отсюда, так как $\varphi(z) = F(z) - f(z)$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\omega_L(\mu, \varphi) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = 0.$$

Следовательно, $\mu = \lambda_1$ — нуль функции $\omega_L(\mu, \varphi)$ кратности, не меньшей m_1 . Воспользуемся свойством 9). Согласно этому свойству,

$$\frac{\omega_L(\mu, \varphi)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{L_1}(\mu, \varphi)}{L_1(\mu)}.$$

(Заметим, что в точке $\mu = \lambda_1$ функция из левой части равенства регулярна.) Поэтому

$$\frac{\omega_L(\mu, F) - \omega_L(\mu, f)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{L_1}(\mu, \varphi)}{L_1(\mu)},$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega_L(\mu, f) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega_{L_1}(\mu, \varphi) e^{\mu z}}{L_1(\mu)} d\mu,$$

где C_k — окружность с центром в точке $\mu = \lambda_k$ малого радиуса. При $k \neq 1$ второе слагаемое из левой части равно нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega_{L_1}(\mu, \varphi) e^{\mu z}}{L_1(\mu)} d\mu = P_k(z) e^{\lambda_k z} \quad (k \geq 1),$$

при $k=1$ соответствующий интеграл равен нулю. Значит,

$$\varphi(z) \sim (L_1) \sum_{v=2}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z}.$$

Свойство 13) установлено.

14) Пусть функция $L(\lambda)$ имеет вид

$$L(\lambda) = \int_{\partial \bar{D}} e^{\lambda t} d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $\partial \bar{D}$ — границе области $\bar{D}$ (если $\bar{D}$ — отрезок, считаем, что $\partial \bar{D}$ — этот отрезок и интегрирование, следовательно, происходит по нему). Тогда

$$\omega_L(\mu, F) = \int_{\partial \bar{D}} d\sigma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi \right).$$

В рассматриваемом случае

$$\gamma(t) = \int_{\partial \bar{D}} \frac{d\sigma(\eta)}{t-\eta}.$$

Поэтому, положив

$$f(t) = \int_0^t F(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi,$$

имеем

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\partial \bar{D}} \frac{f(t) dt d\sigma(\eta)}{t-\eta} = \int_{\partial \bar{D}} d\sigma(\eta) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{f(t) dt}{t-\eta} \right) = \\ &= \int_{\partial \bar{D}} f(\eta) d\sigma(\eta) = \int_{\partial \bar{D}} d\sigma(\eta) \left(\int_0^\eta F(\eta-\xi) e^{\mu \xi} d\xi \right). \end{aligned}$$

Интерполирующая функция в новой записи имеет смысл, если $F(z)$ регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$. Такой функции приводим в соответствие ряд

$$F(z) \sim (L) \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

где

$$P_v(z) e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu.$$

15) Пусть функция $L(\lambda)$ имеет вид, что и в свойстве 14), и пусть $F(z)$ — функция, регулярная в D и непрерывная в $\bar{D}$. Если

$$F(z) \sim (L) \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

то функции

$$\varphi(z) = F(z) - P_1(z) e^{\lambda_1 z} - P_2(z) e^{\lambda_2 z}$$

соответствует ряд

$$\varphi(z) \sim (M) \sum_{v=3}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

где $M(\lambda)$ имеет вид

$$M(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}$$

и удовлетворяет условию (1.22).

Возьмем аналитическую в $\bar{D}$ функцию, например, многочлен $T_m(z)$. Пусть ему соответствует ряд

$$T_m(z) \sim \sum_{v=1}^m Q_v^{(m)}(z) e^{\lambda_v z}.$$

Согласно свойству 3) (воспользовавшись им дважды),

$$\bar{\varphi}_m(z) = T_m(z) - Q_1^{(m)}(z) e^{\lambda_1 z} - Q_2^{(m)}(z) e^{\lambda_2 z} \sim (M) \sum_{v=1}^m Q_v^{(m)}(z) e^{\lambda_v z}.$$

Это означает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega_M(\mu, \bar{\varphi}_m) e^{\mu z} d\mu}{M(\mu)} = \begin{cases} 0, & k=1, 2, \\ Q_k^{(m)}(z) e^{\lambda_k z}, & k \geq 3. \end{cases} \quad (2.20)$$

Функция $M(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.22), это очевидно. Поэтому функция $\omega_M(\mu, f)$ определена, когда $f(z)$ регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$. Выберем многочлены $T_m(z)$ ($m \geq 1$) так, чтобы на $\bar{D}$ равномерно $T_m(z) \rightarrow F(z)$ при $m \rightarrow \infty$. Из вида функций $\omega_L(\mu, f)$ непосредственно усматриваем, что в любой ограниченной области равномерно при $m \rightarrow \infty$

$$\omega_L(\mu, T_m) \rightarrow \omega_L(\mu, F),$$

в силу чего

$$Q_v^{(m)}(z) e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, T_m) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = P_v(z) e^{\lambda_v z}.$$

Из вида функции $\omega_M(\mu, f)$ (она имеет вид (2.17)) далее усматриваем, что в любой ограниченной области равномерно при $m \rightarrow \infty$

$$\omega_M(\mu, \bar{\varphi}_m) \rightarrow \omega_M(\mu, \varphi).$$

Имея все это в виду, из (2.29) в пределе при $m \rightarrow \infty$ получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\omega_M(\mu, \varphi) e^{\mu z} d\mu}{M(\mu)} = \begin{cases} 0, & k=1, 2, \\ P_k(z) e^{\lambda_k z}, & k \geq 3, \end{cases}$$

что и надо было показать.

Предположим теперь, что функция $L(\lambda)$ удовлетворяет дополнительному условию (1.22)

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1, \quad r > 0. \quad (2.30)$$

При этом условии

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \gamma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt, \quad (2.31)$$

функция $\gamma(t)$ непрерывна на $\partial \bar{D}$ и от функции $F(t)$ требуется, чтобы она была регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$ (если $\bar{D}$ — отрезок, то требуем, чтобы $F(t)$ была лишь непрерывна на $\bar{D}$).

Отметим свойства функции (2.31).

1') $\omega_L(\mu, A_1 F_1 + A_2 F_2) = A_1 \omega_L(\mu, F_1) + A_2 \omega_L(\mu, F_2)$, где A_1 и A_2 — постоянные.

2') Если $L(\lambda) = A_1 L_1(\lambda) + A_2 L_2(\lambda)$, причем $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ удовлетворяют условию вида (2.30), то

$$\omega_L(\mu, F) = A_1 \omega_{L_1}(\mu, F) + A_2 \omega_{L_2}(\mu, F).$$

3') Для $F(z) = e^{\lambda z}$

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}.$$

4') Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$. Тогда

$$|\varphi_L(re^{i\varphi}, F)| \leq A e^{h(\varphi)r} \max_{t \in \bar{D}} |F(t)| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial \bar{D}} |\gamma(t)| |dt|,$$

где A — диаметр области $\bar{D}$.

5') Пусть последовательность $\{F_m(z)\}$ функций, аналитических в D и непрерывных в $\bar{D}$, равномерно сходится в $\bar{D}$ к $F(z)$. Тогда в любой ограниченной области равномерно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_L(\mu, F_m) = \omega_L(\mu, F).$$

6') Пусть последовательность целых функций $\{L_m(\lambda)\}$ равномерно сходится в любой ограниченной области к $L(\lambda)$, причем

$$|L_m(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1 \quad (m \geq 1), \quad (2.32)$$

где A и μ не зависят от m . Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{L_m}(\mu, F) = \omega_L(\mu, F).$$

Свойства 1') — 6') устанавливаются так же, как и соответствующие им свойства 1) — 6). Заметим, что свойство 6') доказывается

по старой схеме, но следует обратить внимание на некоторые тонкости. В старых обозначениях имеем

$$\gamma(t) - \gamma_m(t) = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} [L(\lambda) - L_m(\lambda)] e^{-\lambda t} d\lambda = \\ = \int_0^{\infty e^{i\varphi}} [L(\lambda) - L_m(\lambda)] e^{-\lambda t} d\lambda + \int_{\infty e^{i\varphi}}^{\infty e^{i\varphi}} [L(\lambda) - L_m(\lambda)] e^{-\lambda t} d\lambda = J_1 + J_2.$$

Во втором интеграле, в силу (2.32),

$$|L(\lambda) - L_m(\lambda)| e^{-\lambda t} \leq \frac{A_0}{r^\mu} \exp\{-|t| \cos(\varphi + \psi) + h(\varphi)\} |\lambda| \leq \frac{A_0}{r^\mu},$$

когда t лежит в полуплоскости:

$$K_\varphi: |t| \cos(\varphi + \psi) \geq h(\varphi).$$

Поэтому

$$|J_2| \leq \frac{A_0}{(\mu-1)a^{\mu-1}} < \varepsilon,$$

если a велико. Фиксируем a (оно не зависит от φ). Из равномерной сходимости $\{L_m(\lambda)\}$ к $L(\lambda)$ в круге $|\lambda| \leq a$ следует, что

$$|L(\lambda) - L_m(\lambda)| e^{-\lambda t} \leq \frac{\varepsilon}{a}, \quad m > m_0(\varepsilon), \quad t \in K_\varphi.$$

Для $t \in K_\varphi$ имеем

$$|e^{-\lambda t}| = e^{-|t| \cos(\varphi + \psi)} \leq e^{-h(\varphi)} \leq 1.$$

Получаем $|J_1| \leq \varepsilon$. В результате

$$|\gamma(t) - \gamma_m(t)| \leq 2\varepsilon, \quad m > m_0(\varepsilon)$$

для $t \in K_\varphi$. Заметим, что $m_0(\varepsilon)$ от φ не зависит. Когда φ изменяется в пределах от 0 до 2π , полуплоскость опишет внешность D . Таким образом, на ∂D последовательность $\{\gamma_m(t)\}$ равномерно сходится к $\gamma(t)$. Остальное следует из свойства 4').

7') Пусть производная $F'(z)$ от функции $F(z)$ непрерывна в $\bar{D}$. Тогда

$$\omega_L(\mu, F) = \mu \omega_L(\mu, F) - F(0) L(\mu) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma(t) F(t) dt.$$

8') Пусть $L(\beta) = 0$, $L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$, $\gamma_1(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L_1(\lambda)$. Тогда

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta) \omega_L(\mu, F) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma_1(t) F(t) dt.$$

9') Пусть $L(\beta) = 0$, $L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$. Если $\omega_L(\beta, F) = 0$, то

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_L(\mu, F)}{L_1(\mu)}.$$

Свойства 7') — 9') доказываются как и соответствующие им свойства 7) — 9).

§ 3. Теоремы единственности

Функции $F(z)$, аналитической в $\bar{D}$, сопоставляется ряд (2.10), в котором коэффициенты определены формулами (2.11). Прежде, чем решать вопросы сходимости или суммируемости ряда к функции $F(z)$, выясним, в какой степени коэффициенты этого ряда определяют исходную функцию $F(z)$.

1. Первая теорема единственности. Будем предполагать, что λ_v ($v \geq 1$) — все нули функции $L(\lambda)$.

Теорема 4.3.1. Пусть функция $L(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей, и пусть $F(z)$ — функция, аналитическая в $\bar{D}$. Если все коэффициенты в ряде (2.10)

$$F(z) \sim \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_v-1} a_{vk} z^k e^{\lambda_v z} \quad (3.1)$$

равны нулю, то $F(z) = 0$.

На основании (2.13) все коэффициенты в ряде (3.1) равны нулю в том и только в том случае, когда функция

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} \quad (3.2)$$

— целая. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что если функция (3.2) — целая, то $F(z) = 0$.

Доказательство будет основано на ряде лемм.

Лемма 4.3.1. Пусть

$$L(\lambda) = \lambda^p e^{a\lambda + \beta} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\lambda/\lambda_n}, \quad p \geq 0,$$

и

$$L_n(\lambda) = L(\lambda) \left\{ \frac{\beta}{\lambda} + \alpha + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \right) \right\} \quad (n \geq 1).$$

Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$|L_n(re^{i\varphi})| < e^{h(\varphi) + \varepsilon} r, \quad r > r_0(\varepsilon) \quad (n \geq 1), \quad (3.3)$$

где $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$ и $r_0(\varepsilon)$ не зависит от n .

Имеем

$$L_n(\lambda) = L(\lambda) \left\{ \frac{p}{\lambda} + \alpha + \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} \right\}.$$

Сумму, стоящую справа, разобьем на две:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} &= \\ &= \sum_{|\lambda - \lambda_k| < \frac{1}{2} |\lambda_k|} \frac{1}{\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} + \sum_{|\lambda - \lambda_k| \geq \frac{1}{2} |\lambda_k|} \frac{1}{\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} = \Sigma' + \Sigma'' \end{aligned}$$

(при фиксированном λ в сумме Σ' суммирование осуществляется по тем k , для которых $|\lambda - \lambda_k| < \frac{1}{2} |\lambda_k|$).

Пусть D_n — внешность кругов $|\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda_k|^{-n}$ ($k \geq 1$) и круга $|\lambda| \leq 1$, причем $\sum |\lambda_k|^{-n} < \infty$. Будем считать, что $\lambda \in D_n$. Очевидно неравенство

$$|\Sigma''| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^2} < \infty.$$

В первой сумме $|\lambda_k| - |\lambda| < \frac{1}{2} |\lambda_k|$, откуда $|\lambda_k| < 2|\lambda|$. Учтем еще, что

$$\frac{k}{|\lambda_k|} \leq a < \infty \quad (k \geq 1),$$

в силу чего $k \leq a|\lambda_k|$. Пусть k_0 — наименьшее значение индекса k в сумме Σ' . По предыдущему $k_0 \leq a|\lambda_{k_0}| < 2a|\lambda|$. Для $\lambda \in D_n$

$$\left| \frac{1}{\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} \right| < \frac{1}{|\lambda_1| |\lambda_{k_0}|^{-n}} = \frac{|\lambda_{k_0}|^n}{|\lambda_1|} < \frac{2^n |\lambda|^n}{|\lambda_1|} = b |\lambda|^n,$$

на основании чего получаем

$$|\Sigma'| < k_0 b |\lambda|^n < 2ab |\lambda|^{n+1}.$$

В итоге для $\lambda \in D_n$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{p}{\lambda} + \alpha + \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k(\lambda - \lambda_k)} \right| &\leq \frac{p}{|\lambda|} + \\ &+ |\alpha| + B |\lambda| + 2ab |\lambda|^{n+2} < A |\lambda|^{n+2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|L_n(\lambda)| < A |\lambda|^{n+2} |L(\lambda)|, \quad \lambda \in D_n \quad (n \geq 1). \quad (3.4)$$

Пусть

$$H = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-n},$$

H есть сумма диаметров кружков $|\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda_k|^{-n}$. Возьмем произвольную точку $\bar{\lambda}$, $|\bar{\lambda}| > 2H + 1$. Среди окружностей $|\lambda - \bar{\lambda}| = r$ ($0 < r < 2H$) найдется хотя бы одна (пусть это будет окружность $|\lambda - \bar{\lambda}| = \bar{r}$), которая целиком принадлежит множеству D_n . На основании неравенства (3.4) имеем

$$|L_n(\bar{\lambda})| \leq \max_{|\lambda - \bar{\lambda}| = \bar{r}} |L_n(\lambda)| \leq A (|\bar{\lambda}| + 2H)^{n+2} \max_{|\lambda - \bar{\lambda}| = 2H} |L(\lambda)|.$$

Но

$$\max_{|\lambda - \bar{\lambda}| = 2H} |L(\lambda)| < e^{(h(\bar{\Phi}) + \varepsilon) |\bar{\lambda}|}, \quad |\bar{\lambda}| > r_0(\varepsilon), \quad \bar{\Phi} = \arg \bar{\lambda}.$$

Поэтому

$$|L_n(\bar{\lambda})| < e^{(h(\bar{\Phi}) + 2\varepsilon) |\bar{\lambda}|}, \quad |\bar{\lambda}| > r_1(\varepsilon) \quad (n \geq 1),$$

что и надо было показать. Добавим еще, что в любой ограниченной области равномерно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\lambda) = L'(\lambda).$$

Лемма 4.3.2. Пусть функция (3.2) — целая. Тогда функция

$$\frac{\omega_{L'}(\mu, F)}{L'(\mu)}$$

— тоже целая.

Положим

$$M_0(\lambda) = p \frac{L(\lambda)}{\lambda}, \quad M_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \quad (n \geq 1),$$

$$N_0(\lambda) = \left(\alpha + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \right) L(\lambda).$$

Имеем

$$L_n(\lambda) = M_0(\lambda) + N_0(\lambda) + \sum_{k=1}^n M_k(\lambda).$$

По свойству 9) интерполирующей функции

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{M_k}(\mu, F)}{M_k(\mu)} \quad (k \geq 0).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{N_0}(\mu, F)}{N_0(\mu)}.$$

В силу всего этого,

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{N_0}(\mu, F) + \sum_{k=1}^n \omega_{N_k}(\mu, F)}{N_0(\mu) + \sum_{k=1}^n N_k(\mu)} = \frac{\omega_{L_n}(\mu, F)}{L_n(\mu)}.$$

Воспользуемся теперь леммой 4.3.1. На основании ее и свойства 6) интерполирующей функции получаем

$$\omega_{L_n}(\mu, F) \rightarrow \omega_L(\mu, F), \quad n \rightarrow \infty.$$

В силу этого, из предыдущего равенства в пределе имеем

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_L(\mu, F)}{L'(\mu)}.$$

Значит, справа стоит целая функция.

Лемма 4.3.3. Пусть функция (4.2) — целая. Тогда верны равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C t^k \gamma(t) F(t) dt = 0 \quad (k \geq 0). \quad (3.5)$$

Из условия следует, что все коэффициенты $\alpha_{v,k}$ в (3.1) равны нулю, в частности, равен нулю коэффициент α_{v, m_v-1} . Из асимптотики (2.12) тогда вытекает, что $[M(F)]_0 = 0$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t) dt = 0. \quad (3.6)$$

Пусть $g_k(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L^{(k)}(\lambda)$. По лемме 4.3.2, поскольку функция (3.2) — целая, заключаем последовательно, что функции

$$\frac{\omega_{L'}(\mu, F)}{L'(\mu)}, \quad \frac{\omega_{L''}(\mu, F)}{L''(\mu)}, \dots$$

— целые. Но тогда по только что доказанному

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g_k(t) F(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.7)$$

Из представления

$$L^{(k)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g_k(t) e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^k \gamma(t) e^{\lambda t} dt$$

видно, что функция $g_k(t)$ отличается от функции $t^k \gamma(t)$ на целую функцию. Поэтому из (3.7) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C t^k \gamma(t) F(t) dt = 0 \quad (k \geq 1).$$

Эти равенства вместе с равенством (3.6) — искомые равенства (3.5).

На основе установленных лемм уже нетрудно доказать искомую теорему единственности. Предположим, что все коэффициенты $\alpha_{v,k}$ для функции $F(z)$, аналитической на $\bar{D}$, равны нулю, а $F(z) \not\equiv 0$. Тогда будет целой функцией (3.2) и, в силу леммы 4.3.3, будут выполняться условия (3.5). Из условий (3.5) вытекает, что функция

$$\gamma(t) F(t) = \Phi(t)$$

регулярна внутри контура C . Следовательно, функция

$$\gamma(t) = \frac{\Phi(t)}{F(t)}$$

— рациональная функция с полюсами в нулях $F(t)$ (эти полюсы лежат в $\bar{D}$, ибо вне $\bar{D}$ функция $\gamma(t)$ — аналитическая). Пусть $h_1, h_2, \dots, h_p$ — полюсы $\gamma(t)$. Из представления

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{\lambda t} dt$$

получаем, что $L(\lambda)$ — квазиполином

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^p P_k(\lambda) e^{h_k \lambda}, \quad (3.8)$$

где $P_k(\lambda)$ — обычные многочлены. Представление (3.8) получено, исходя из того, что функция (3.2) — целая.

Пусть λ_v — нуль функции $L(\lambda)$. По свойству 9) интерполирующей функции функция

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L_1(\mu)}, \quad L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v},$$

— целая. Поэтому

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} = \sum_{k=1}^p Q_k(\lambda) e^{h_k \lambda},$$

где $Q_k(\lambda)$ — многочлены. Отсюда

$$L(\lambda) = \sum_{k=1}^p (\lambda - \lambda_v) Q_k(\lambda) e^{h_k \lambda}.$$

На основе этого равенства и равенства (3.8) заключаем, что

$$P_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_v) Q_k(\lambda).$$

Значит, многочлены $P_k(\lambda)$ обращаются в нуль в точке $\lambda = \lambda_v$. Поскольку точек λ_v бесконечно много, то должны иметь $P_k(\lambda) \equiv 0$ ($k = 1, 2, \dots, p$). Но тогда $L(\lambda) \equiv 0$, чего не может быть. Противоречие получили, предположив, что $F(z) \not\equiv 0$. Значит, $F(z) \equiv 0$. Первая теорема единственности установлена.

2. Вторая теорема единственности. Пусть функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.30). В этом случае интерполирующая функция имеет вид (2.31), от функции $F(z)$ требуется лишь, чтобы она была регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$. Коэффициенты в ряде (3.1) определяются в этой ситуации по формулам

$$a_{vk} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \psi_{vk}(t) dt.$$

Здесь $\psi_{vk}(t)$ регулярны вне $\bar{D}$ и непрерывны вплоть до границы. Отметим, что

$$\sum_{k=0}^{m_v-1} a_{vk} z^k e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)},$$

где C_v — окружность с центром в точке λ_v , внутри которой нет нулей $L(\mu)$, отличных от λ_v .

Теорема 4.3.2. Пусть функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.30), и пусть функция $F(z)$ регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$. Если все коэффициенты a_{vk} в ряде (3.1) равны нулю, то $F(z) \equiv 0$.

Для доказательства теоремы, как и в первом случае, достаточно доказать, что если функция (3.2) — целая, то $F(z) \equiv 0$.

Доказательству предположим несколько лемм, аналогичных тем, которые предшествовали доказательству первой теоремы единственности.

Лемма 4.3.1'. Пусть

$$L(\lambda) = \lambda^p e^{n\lambda + \beta} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}, \quad p \geq 0$$

и

$$L_n(\lambda) = L(\lambda) \left\{ \frac{p}{\lambda} + \alpha + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} \right) \right\} \quad (n \geq 1).$$

Если

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > h + 3, \quad \sum_1^\infty |\lambda_k|^{-h} < \infty, \quad (3.9)$$

то

$$|L_n(re^{i\varphi})| < B \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^{\mu-h-2}} \quad (n \geq 1). \quad (3.10)$$

Для $\lambda \in D_h$ (D_h — внешность кругов $|\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda_k|^{-h}$ и круга $|\lambda| \leq 1$) установлена оценка (3.4). Пусть $H = 2 \sum_1^\infty |\lambda_k|^{-h}$. Возьмем произвольную точку $\bar{\lambda}$, $|\bar{\lambda}| > 2H + 1$. Среди окружностей $|\lambda - \bar{\lambda}| = r$ ($0 < r < 2H$) найдется хотя бы одна (пусть это будет окружность $|\lambda - \bar{\lambda}| = \bar{r}$), которая целиком принадлежит D_h . На основании (3.4) имеем

$$|L_n(\bar{\lambda})| \leq \max_{|\lambda - \bar{\lambda}| = \bar{r}} |L_n(\lambda)| \leq A(|\bar{\lambda}| + 2H)^{h+2} \max_{|\lambda - \bar{\lambda}| = 2H} |L(\lambda)| = A(|\bar{\lambda}| + 2H)^{h+2} |L(\lambda_1)|, \quad |\lambda_1 - \bar{\lambda}| = 2H.$$

Воспользуемся неравенством (1.23)

$$h(\varphi_1) |\lambda_1| - h(\bar{\varphi}) |\bar{\lambda}| \leq |\lambda_1 - \bar{\lambda}| \max_{z \in \bar{D}} |z|, \quad \varphi_1 = \arg \lambda_1, \quad \bar{\varphi} = \arg \bar{\lambda}.$$

В силу этого неравенства, из условия (3.9) находим

$$|L(\lambda_1)| < A \frac{e^{h(\varphi_1)|\lambda_1|}}{|\lambda_1|^\mu} \leq A \left| \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1} \right|^\mu \exp(2H \max_{z \in \bar{D}} |z|) \frac{e^{h(\bar{\varphi})|\bar{\lambda}|}}{|\bar{\lambda}|^\mu}.$$

Когда $|\bar{\lambda}| > 4H$, имеем $|\lambda_1| \geq |\bar{\lambda}| - 2H > \frac{1}{2} |\bar{\lambda}|$ и, значит,

$$\left| \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1} \right| < 2, \quad |\bar{\lambda}| + 2H < 2|\bar{\lambda}|.$$

В силу всего этого,

$$|L_n(\bar{\lambda})| < B \frac{e^{h(\bar{\varphi})|\bar{\lambda}|}}{|\bar{\lambda}|^{\mu-h-2}}, \quad |\bar{\lambda}| \geq 4H + 1.$$

При подходящем B это неравенство будет верно при любых $\bar{\lambda}$.

Лемма 4.3.2'. Пусть функция (3.2) — целая, и пусть выполняется условие (3.9). Тогда функция

$$\frac{\omega_{L'}(\mu, F)}{L'(\mu)}$$

— тоже целая.

Доказательство то же, что и доказательство леммы 4.3.2 (с ссылками на свойства 6') и 9') интерполирующей функции).

Лемма 4.3.3'. Пусть функция (3.2) — целая, и пусть выполняется условие (3.9). Тогда верны равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} t^k \gamma(t) F(t) dt = 0 \quad (k \geq 0).$$

Из условия следует, что все коэффициенты a_{vk} в ряде (3.1) равны нулю, в частности, равен нулю коэффициент a_{v, m_v-1} .

Поскольку в условии (3.9) величина $\mu > 3$, из асимптотики (2.21) извлекаем, что $[M(F)]_1 = 0$, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \gamma(t) F(t) dt = 0.$$

Рассмотрим производную $L^{(k)}(\lambda)$. В силу (1.24) она удовлетворяет условию вида (3.9) с тем же μ . Применяя последовательно лемму 4.3.2', получим, что функция

$$\frac{\omega_{L^{(k)}}(\mu, F)}{L^{(k)}(\mu)}$$

— целая. Тогда по доказанному

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g_k(t) F(t) dt = 0 \quad (k \geq 1),$$

где $g_k(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L^{(k)}(\lambda)$. Осталось заметить, что $g_k(t)$ отличается от $t^k \gamma(t)$ на целую функцию. Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству теоремы. Напомним, надо доказать, что если функция (3.2) — целая, то $F(z) \equiv 0$.

Отметим сначала, что при условии (2.30) множество $\bar{D}$ не может свестись к единственной точке. Действительно, в противном случае функция $\gamma(t)$, будучи ограниченной в окрестности точки $0 \in \bar{D}$, была бы аналитической в этой точке, вследствие чего $L(\lambda) \equiv 0$, чего не может быть. Из этого следует, что у $L(\lambda)$ бесконечно много нулей. В противном случае функция $L(\lambda)$ имела бы вид

$$L(\lambda) = P(\lambda) e^{a\lambda},$$

где $P(\lambda)$ — многочлен, и множество $\bar{D}$ свелось бы к единственной точке.

Отметим далее, что в ходе доказательства теоремы, не нарушая общности рассуждений, можно считать в условии (2.30) число μ сколь угодно большим. Действительно, возьмем функцию

$$M(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_k)}.$$

Она удовлетворяет условию

$$|M(re^{i\varphi})| < K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^{\mu+k}}.$$

Кроме того, из условия, что функция (3.2) — целая, получим, воспользовавшись последовательно свойством 9') интерполи-

рующей функции, что функция

$$\frac{\omega_M(\mu, F)}{M(\mu)}$$

— тоже целая. За функцию $L(\lambda)$, следовательно, можно было бы взять функцию $M(\lambda)$, которая удовлетворяет условию (2.30) с показателем в знаменателе $(\mu + k)$; этот показатель за счет большого k можно выбрать сколь угодно большим. Достаточно в последующем считать его большим, чем $h + 4$, где h — из леммы 4.3.1'.

Рассмотрим случай, когда $\bar{D}$ — отрезок (D — пустое множество). Удобнее считать (это не ограничивает общности), что $\bar{D}$ — отрезок мнимой оси $[a, b]$ ($\text{Im } a < \text{Im } b$). Точки a и b — особые для $\gamma(t)$.

Согласно лемме 4.3.3', имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} t^k \gamma(t) F(t) dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Пусть $\gamma^+(t)$ — значение $\gamma(t)$ на одном крае отрезка $[a, b]$, $\gamma^-(t)$ — значение $\gamma(t)$ на другом крае того же отрезка. Получаем

$$\int_a^b t^k [\gamma^+(t) - \gamma^-(t)] F(t) dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Отсюда

$$[\gamma^+(t) - \gamma^-(t)] F(t) = 0, \quad t \in [a, b]. \quad (3.11)$$

Пусть $\gamma_{v,h}(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией

$$\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v)^h} \quad (k = 1, 2, \dots, m_v).$$

Поскольку последнюю можно было бы взять вместо $L(\lambda)$, то, как и выше,

$$[\gamma_{v,h}^+(t) - \gamma_{v,h}^-(t)] F(t) = 0, \quad t \in [a, b] \quad (k = 1, 2, \dots, m_v; v = 1, 2, \dots). \quad (3.12)$$

Допустим противное, что $F(t)$ на $[a, b]$ не равна тождественно нулю. Пусть (a_1, b_1) , $\text{Im } a < \text{Im } a_1 < \text{Im } b_1 < \text{Im } b$ — какой-нибудь интервал, в котором $F(t) \neq 0$. Из (3.11) и (3.12) находим

$$\gamma^+(t) = \gamma^-(t), \quad \gamma_{v,h}^+(t) = \gamma_{v,h}^-(t), \quad t \in (a_1, b_1) \quad (k = 1, 2, \dots, m_v; v = 1, 2, \dots). \quad (3.13)$$

Необходимо показать, что соотношения (3.13) в действительности невозможны.

Функция $L(\lambda)$ имеет вид

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b [\gamma^+(t) - \gamma^-(t)] e^{\lambda t} dt.$$

По теореме 1.4.6 плотность последовательности ее нулей

$$\Delta_L = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r},$$

где $n(r)$ — число нулей $L(\lambda)$ в круге $|\lambda| \leq r$, равна

$$\Delta_L = \frac{|b-a|}{\pi}. \quad (3.14)$$

Обратимся к равенствам (3.13). Из них следует, что функции $\gamma(t)$ и $\gamma_{v,k}(t)$ аналитически продолжаются из левой полуплоскости через интервал (a_1, b_1) в правую полуплоскость и что на любом контуре Γ таком, что отрезок $[a, a_1]$ лежит внутри Γ , а $[b_1, b]$ вне его, эти функции однозначны. Пусть Γ — один из таких контуров. Положим

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t) e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^{b_1} [\gamma^+(t) - \gamma^-(t)] e^{\lambda t} dt. \quad (3.15)$$

Функция $M(\lambda) \neq 0$, ибо точка a — особая для $\gamma(t)$. Покажем, что точки λ_v являются нулями для $M(\lambda)$ кратности, не меньшей m_v .

Имеем

$$\gamma_{v,k}(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda}{(\lambda - \lambda_v)^k}.$$

Отсюда

$$\gamma_{v,k}^+(t) + \lambda_v \gamma_{v,k}(t) = -\gamma_{v,k-1}(t)$$

(при $k=1$ имеем $\gamma_{v,k-1}(t) = \gamma(t)$). Решая уравнение методом вариации произвольного постоянного, получим

$$\gamma_{v,k}(t) = -e^{-\lambda_v t} \int_{t_0}^t \gamma_{v,k-1}(\eta) e^{\lambda_v \eta} d\eta + C e^{-\lambda_v t}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

где C — постоянная (она зависит от v, k и t_0). Из этой формулы видно, поскольку функции $\gamma_{v,k}(t)$ являются однозначными на контуре Γ , что на Γ однозначны функции

$$v_k(t) = \int_{t_0}^t \gamma_{v,k-1}(\eta) e^{\lambda_v \eta} d\eta \quad (k=1, 2, \dots, m_v).$$

Имея это в виду, с помощью метода интегрирования по частям получаем из (3.15)

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t) e^{\lambda_v t} e^{(\lambda - \lambda_v)t} dt = \\ &= v_1(t) e^{(\lambda - \lambda_v)t} \Big|_{\Gamma} - \frac{(\lambda - \lambda_v)}{2\pi i} \int_{\Gamma} v_1(t) e^{(\lambda - \lambda_v)t} dt. \end{aligned}$$

Подстановка равна нулю, в силу однозначности $v_1(t)$ на Γ . Таким образом,

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_v) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} v_{v,1}(t) e^{\lambda t} dt.$$

Аналогичным образом, используя однозначность на Γ функций $v_k(t)$, последовательно найдем

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_v)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} v_{v,k}(t) e^{\lambda t} dt \quad (k=2, \dots, m_v).$$

Значит, λ_v — нуль $M(\lambda)$ кратности, не меньшей m_v ($v=1, 2, \dots$).

Функция $M(\lambda)$ имеет вид (3.15). Особые точки функции, ассоциированной по Борелю с $M(\lambda)$, расположены на отрезке $[a, a_1]$. По теореме 1.4.6 заключаем, что плотность последовательности $\{\lambda_v\}$ (ее обозначили Δ_L) удовлетворяет условию

$$\Delta_L \leq \frac{|a_1 - a|}{\pi}.$$

Но это противоречит равенству (3.14). Следовательно, $F(t) = 0$ на $[a, b]$. Теорема единственности в случае, когда $\bar{D}$ — отрезок, установлена.

Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{D}$ — не отрезок.

Лемма 4.3.4. Пусть функция (3.2) — целая. Тогда при некотором H функция

$$\frac{\omega_L(\mu, f)}{L(\mu)},$$

где

$$f(z) = \int_0^z F(t) dt - H,$$

также целая.

Положим

$$\Phi(z) = \int_0^z F(t) dt, \quad M(\lambda) = \lambda L(\lambda).$$

Функция, ассоциированная по Борелю с $M(\lambda)$, равна $-\gamma'(t)$. Имеем

$$\omega_M(\mu, \Phi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \gamma'(t) \left[\int_0^t \Phi(t-\eta) e^{\mu\eta} d\eta \right] dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \omega_M(\mu, \Phi) = & -\gamma(t) \left(\int_0^t \Phi(t-\eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) \Big|_{\partial \bar{D}} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \gamma(t) \left[\Phi(0) e^{\mu t} + \int_0^t F(t-\eta) e^{\mu\eta} d\eta \right] dt = \omega_L(\mu, F), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\omega_M(\mu, \Phi)}{M(\mu)} = \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)}. \quad (3.16)$$

Функция (3.2) — целая. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = H. \quad (3.17)$$

Здесь C_0 — окружность с центром в начале достаточно малого радиуса, H — постоянная. Подсчитаем $\omega_M(\mu, \Phi_1)$, где $\Phi_1 \equiv H$. Имеем

$$\omega_M(\mu, \Phi_1) = -\frac{H}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \gamma'(t) \left(\int_0^t e^{\mu\eta} d\eta \right) dt = \frac{H}{\mu} (M(\mu) - M(0)) = H \frac{M(\mu)}{\mu}.$$

Положим

$$f(z) = \Phi(z) - H = \int_0^z F(t) dt - H.$$

Получаем

$$\omega_M(\mu, f) = \omega_M(\mu, \Phi) - H \frac{M(\mu)}{\mu}.$$

На основании этого, в силу (3.16),

$$\frac{\omega_M(\mu, f)}{M(\mu)} = \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} - \frac{H}{\mu}. \quad (3.18)$$

Из формулы (3.18) видно, что левая часть регулярна всюду, кроме, быть может, начала координат. На основании (3.17)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\omega_M(\mu, f)}{M(\mu)} e^{\mu z} d\mu = 0,$$

Следовательно, начало координат также — не особая точка для рассматриваемой левой части. Таким образом, функция (3.18) — целая. Осталось воспользоваться свойством 9') интерполирующей функции, положив $\beta = 0$.

Лемма 4.3.5. Пусть функция (3.2) — целая. Если a и b — произвольные угловые точки границы $\partial \bar{D}$ (не являются внутренними точками прямолинейных отрезков, входящих в состав границы $\partial \bar{D}$), то

$$\int_a^b F(t) dt = \int_0^b F(t) dt - H,$$

где H — величина из леммы 4.3.4.

В силу леммы 4.3.4, функция

$$\frac{\omega_L(\mu, f)}{L(\mu)} \quad \left(f(z) = \int_0^z F(t) dt - H \right)$$

— целая. На основании леммы 4.3.3' тогда имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} t^k \Phi(t) dt = 0, \quad \Phi(t) = \gamma(t) f(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Функция $\Phi(t)$ определена на границе $\partial \bar{D}$, непрерывна здесь и имеет непрерывную производную $\Phi'(t)$ ($f(t)$ имеет непрерывную производную по своей конструкции, $\gamma(t)$ имеет непрерывную производную в силу условия (2.30), если считать $\mu > 2$ в этом условии). Поэтому

$$\begin{aligned} |\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \Phi'(t) dt \right| \leq K_1 s(t_1, t_2), \\ K_1 &= \max_{t \in \partial \bar{D}} |\Phi'(t)|, \end{aligned}$$

где $s(t_1, t_2)$ — длина дуги границы между точками t_1 и t_2 . В случае выпуклой области имеется постоянная K_2 (см. замечание ниже) такая, что

$$s(t_1, t_2) \leq K_2 |t_2 - t_1|.$$

Вследствие этого

$$|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| < K |t_2 - t_1|, \quad t_1 \in \partial \bar{D}, \quad t_2 \in \partial \bar{D}. \quad (3.20)$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{\Phi(t) dt}{t - z}, \quad z \in D.$$

Известно (см. [50], стр. 190), что разность значений интегралов типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{\Phi(t) dt}{t - z_1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{\Phi(t) dt}{t - z_2}, \quad z_1 \in D, z_2 \notin \bar{D},$$

стремится к $\Phi(t)$ почти для всех $t \in \partial \bar{D}$, когда z_1 и z_2 стремятся к t по некасательным путям. В силу (3.19), значение интеграла в точке z_2 равно нулю. Таким образом, почти для всех $t \in \partial \bar{D}$

$$\lim_{z \rightarrow t} A(z) = \Phi(t).$$

При условии (3.20) интеграл $A(z)$ представляет собой непрерывную функцию в $\bar{D}$ (см. [50], стр. 197). Следовательно, $A(t) = \Phi(t)$ всюду на границе $\partial \bar{D}$. Итак, имеется функция $A(z)$, аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$, которая на $\partial \bar{D}$ совпадает с $\Phi(t)$.

Пусть a — угловая точка области $\bar{D}$. Она непременно является особой для функции $\gamma(t)$ (она также особая для функций, ассоциированных по Борелю с функциями, которые получают умножением или делением нацело $L(\lambda)$ на многочлен). Покажем, что $f(a) = 0$.

Предположим противное, что $f(a) \neq 0$. Тогда имеется окрестность K точки a такая, что для $t \in K \cap \bar{D}$ функция $f(t) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$\frac{A(t)}{f(t)}.$$

Она регулярна в области $K \cap D$ (части D , примыкающей к точке a) и непрерывна вплоть до дуги $\Gamma = K \cap \partial \bar{D}$. Функция $\gamma(t)$ регулярна вне $\bar{D}$ и непрерывна вплоть до границы. На дуге Γ эти функции совпадают, ибо на $\partial \bar{D}$ всюду $A(t) = \gamma(t) f(t)$. Поэтому первая функция является аналитическим продолжением функции $\gamma(t)$ через дугу Γ внутрь D . Следовательно, точка a — не особая для $\gamma(t)$, чего не может быть. Значит, $f(a) = 0$. Если b — другая угловая точка, то также $f(b) = 0$. Имеем

$$f(a) = \int_a^a F(t) dt - H = 0, \quad f(b) = \int_b^b F(t) dt - H = 0,$$

откуда

$$\int_a^b F(t) dt = \int_b^a F(t) dt = H,$$

что и надо было показать.

Приступим к завершению доказательства теоремы.

Пусть a и b — две какие-нибудь угловые точки области $\bar{D}$. По лемме 4.3.5

$$\int_0^a F(t) dt = \int_0^b F(t) dt = H,$$

откуда

$$\int_a^b F(t) dt = 0.$$

Положим

$$f_1(t) = \int_0^t F(t) dt - H = \int_0^t F(t) dt - \int_0^a F(t) dt = \int_a^t F(t) dt.$$

По лемме 4.3.4 функция

$$\frac{\omega_L(\mu, f_1)}{L(\mu)}$$

— целая. Итак, показано, что если

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)}$$

— целая функция, то функция

$$\frac{\omega_L(\mu, f_1)}{L(\mu)} \left(f_1(t) = \int_a^t F(t) dt \right)$$

— целая и

$$\int_a^b F(t) dt = 0.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получим, что функция

$$\frac{\omega_L(\mu, f_2)}{L(\mu)} \left(f_2(t) = \int_a^t f_1(t) dt \right)$$

— целая и

$$\int_a^b f_1(t) dt = 0,$$

и т. д. Таким образом, имеем

$$\int_a^b f_k(t) dt = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$f_0(t) = F(t), \quad f_k(t) = \int_a^t f_{k-1}(t) dt \quad (k \geq 1).$$

Это равенство запишем в виде

$$\frac{1}{k!} \int_a^b (b-t)^k F(t) dt = 0 \quad (k \geq 0).$$

Здесь интегрирование происходит по прямолинейному отрезку $[a, b]$. Отсюда $F(t) = 0$ на $[a, b]$. Следовательно, $F(t) \equiv 0$. Теорема доказана.¹

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы было использовано неравенство

$$s(t_1, t_2) \leq K_2 |t_2 - t_1|.$$

Установим его. Допустим противное, что неравенство не имеет места. Тогда найдутся пары точек $a_v, b_v \in \partial \bar{D}$ ($v = 1, 2, \dots$) такие, что

$$\frac{s(a_v, b_v)}{|a_v - b_v|} \rightarrow \infty, \quad v \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Очевидно, что при этом $|a_v - b_v| \rightarrow 0$. Можно считать без ограничения общности, что последовательность $\{a_v\}$ имеет предел: $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a \in \partial \bar{D}$. Тогда и $\lim_{v \rightarrow \infty} b_v = a$. Точка a не может быть внутренней точкой какого-либо отрезка, входящего в состав границы, ибо тогда при больших v отношение (3.21) равнялось бы единице. Точка a , следовательно, — угловая точка. Возьмем на $\partial \bar{D}$ близко от a и по обе стороны от a точки A и B . Пусть l_A и l_B — опорные прямые к $\bar{D}$ в точках A и B и γ — угол между l_A и l_B . Угол $\gamma \neq 0$, л. Возьмем произвольные точки A_1 и B_1 на дуге $\bar{AB}$. Пусть C — точка пересечения опорных прямых l_A и l_B , проведенных в точках A_1 и B_1 . Очевидно, точка C лежит внутри угла, образованного прямыми l_A и l_B , и угол A_1CB_1 не меньше γ . Имеем

$$s(A_1, B_1) \leq A_1C + B_1C.$$

Проведем через A_1 и B_1 прямые, параллельные соответственно l_A и l_B , пусть C_1 — точка их пересечения. Очевидно, $A_1C + B_1C \leq A_1C_1 + B_1C_1$. Таким образом,

$$s(A_1, B_1) \leq A_1C_1 + B_1C_1.$$

По теореме синусов из треугольника $A_1B_1C_1$ находим

$$\frac{A_1B_1}{\sin \gamma} = \frac{A_1C_1}{\sin \beta} = \frac{B_1C_1}{\sin \alpha},$$

Отсюда

$$A_1C_1 = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} A_1B_1 \leq \frac{1}{\sin \gamma} A_1B_1,$$

$$B_1C_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} A_1B_1 \leq \frac{1}{\sin \gamma} A_1B_1$$

и, значит,

$$s(A_1, B_1) \leq \frac{2}{\sin \gamma} A_1B_1.$$

Здесь γ не зависит от точек A_1 и B_1 , взятых на дуге $\bar{AB}$. В частности, при больших v

$$s(a_v, b_v) \leq \frac{2}{\sin \gamma} |a_v - b_v|,$$

что противоречит соотношению (3.21). Этим самым нужное неравенство установлено.

Т е о р е м а 4.3.3. Пусть функция $F(z)$ регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$, и пусть ряд (3.1) сконструирован для этой функции с помощью интерполирующей функции

$$\omega_L(\mu, F) = \int_{\partial \bar{D}} d\sigma(t) \left(\int_0^1 F(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi \right),$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $\partial \bar{D}$ (если $\bar{D}$ — отрезок, интегрирование происходит по этому отрезку). Если все коэффициенты в ряде (3.1) равны нулю, то $F(z) \equiv 0$.

Для доказательства воспользуемся свойством 15) интерполирующей функции, согласно которому если

$$F(z) \sim (L) \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

то

$$F(z) - P_1(z) e^{\lambda_1 z} - P_2(z) e^{\lambda_2 z} \sim (M) \sum_{v=3}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

где

$$M(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

По условию $P_v(z) = 0$ ($v \geq 1$). Функция $M(\lambda)$ удовлетворяет условию (2.30). Поэтому

$$F(z) - P_1(z) e^{\lambda_1 z} - P_2(z) e^{\lambda_2 z} = 0,$$

откуда $F(z) = 0$,

§ 4. О полноте системы экспонент и биортогональной системы

1. Полнота биортогональной системы. Имеет место Теорема 4.4.1. Система $\{\psi_{v,k}(t)\}$ функций, определенных формулами (1.20), является полной вне множества $\bar{D}$ в классе функций, аналитических вне $\bar{D}$ и равных нулю в ∞ .

Для доказательства этого утверждения достаточно доказать, что система функций

$$\varphi_{v,k}(z) = \frac{\psi_{v,k}\left(\frac{1}{z}\right)}{z} \quad (k=0, 1, \dots, m_v-1; v=1, 2, \dots)$$

является полной в области E , где E — образ внешности $\bar{D}$ при отображении $z = \frac{1}{t}$.

Вспользуемся следующим критерием полноты:

Для того чтобы система $\{f_k(z)\}$ функций, аналитических в области E , была полна в E , необходимо и достаточно, чтобы из равенств

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \alpha(z) f_k(z) dz = 0 \quad (k=1, 2, \dots),$$

где Γ — замкнутый контур из E и $\alpha(z)$ — функция, аналитическая на Γ и вне Γ , причем $\alpha(\infty) = 0$, следовало $\alpha(z) \equiv 0$.

Пусть имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \alpha(z) \varphi_{v,k}(z) dz = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m_v-1; v=1, 2, \dots).$$

Сделаем замену переменного $z = 1/t$; получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_{v,k}(t) dt = 0 \quad (k=0, 1, \dots, m_v-1; v=1, 2, \dots), \quad (4.1)$$

где $F(t) = \frac{1}{t} \alpha\left(\frac{1}{t}\right)$ и C — образ контура Γ при отображении $t = \frac{1}{z}$. Контур C охватывает множество $\bar{D}$, функция $F(t)$ на C и внутри C является аналитической. Равенства (4.1) означают, что все коэффициенты $a_{v,k}$ ряда (2.10), соответствующего функции $F(t)$, равны нулю. По первой теореме единственности тогда $F(t) \equiv 0$, значит, и $\alpha(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

Заметим, что если какая-то функция $\Phi(t)$, аналитическая в окрестности бесконечно удаленной точки, причем $\Phi(\infty) = 0$,

разлагается в этой окрестности в ряд

$$\Phi(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_v-1} \beta_{v,k} \psi_{v,k}(t), \quad (4.2)$$

сходящийся равномерно, то это разложение — единственное.

Действительно, пусть Γ — окружность достаточно большого радиуса, на которой ряд сходится равномерно. Умножив обе части равенства (4.2) на $t^s e^{\lambda_p t}$ и воспользовавшись биортогональностью систем $\{t^s e^{\lambda_p t}\}$ и $\{\psi_{v,k}(t)\}$, получим

$$\beta_{p,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(t) t^s e^{\lambda_p t} dt,$$

откуда все и следует.

В ситуации (2.30) функции $\psi_{v,k}(t)$ непрерывны вплоть до границы $\partial\bar{D}$. Поэтому естественно ожидать, что система $\{\psi_{v,k}(t)\}$ в этом случае будет полной в замкнутой области $\bar{E}$ — внешности D в пространстве функций, аналитических в E (внешности $\bar{D}$), непрерывных в $\bar{E}$ и обращающихся в нуль в бесконечности. Ограничимся случаем, когда все нули λ_v функции $L(\lambda)$ — простые и когда, следовательно, имеем систему $\{\psi_v(t)\}$.

Теорема 4.4.2. Пусть $\bar{D}$ не является отрезком и у $L(\lambda)$ все нули $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — простые (пусть еще они отличны от начала координат). Тогда при условии (2.30) система $\{\psi_v(t)\}$ полна в метрике C в замкнутой области $\bar{E}$ — внешности D в пространстве функций, аналитических в E , непрерывных в $\bar{E}$ и обращающихся в нуль в бесконечности.

Пространство функций, аналитических в E , непрерывных в $\bar{E}$ и обращающихся в нуль в бесконечности, обозначим $A(\bar{E})$. Для доказательства полноты системы $\{\psi_k(t)\}$ в пространстве $A(\bar{E})$ с нормой

$$\|f\| = \max_{t \in \bar{E}} |f(t)|$$

надо доказать, что если $l(f)$ — линейный функционал в $A(\bar{E})$ и он удовлетворяет условиям

$$l(\psi_k) = 0 \quad (k=1, 2, \dots),$$

то $l(f) = 0$ для каждой функции $f \in A(\bar{E})$.

Функционал $l(f)$ расширим на пространство функций $\psi(t)$, непрерывных на $\partial\bar{D}$, где

$$\|\psi\| = \max_{t \in \partial\bar{D}} |\psi(t)|,$$

В этом пространстве линейный функционал имеет вид

$$I(\psi) = \int_{\partial \bar{D}} \psi(t) d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $\partial \bar{D}$.
Таким образом,

$$I(f) = \int_{\partial \bar{D}} f(t) d\sigma(t), \quad f(t) \in A(\bar{E}). \quad (4.3)$$

Пусть

$$I(\psi_k) = \int_{\partial \bar{D}} \psi_k(t) d\sigma(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (4.4)$$

надо показать, что для каждой $f(t)$ из $A(\bar{E})$

$$I(f) = \int_{\partial \bar{D}} f(t) d\sigma(t) = 0. \quad (4.5)$$

Интегрирование по частям дает

$$I(\psi_k) = \sigma(t) \psi_k(t) |_{\partial \bar{D}} - \int_{\partial \bar{D}} \sigma(t) \psi'_k(t) dt.$$

Подстановка равна нулю. Поэтому

$$I(\psi_k) = - \int_{\partial \bar{D}} \sigma(t) \psi'_k(t) dt = 0.$$

Заметим, что из формулы

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^t \frac{L(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda}{\lambda - \lambda_k},$$

согласно условию (2.30), вытекает, что функция $\psi'_k(t)$ непрерывна в $\bar{E}$. Из этой же формулы следует

$$\psi'_k(t) = - \frac{\gamma(t)}{L'(\lambda_k)} - \lambda_k \psi_k(t). \quad (4.6)$$

На основании этого

$$\frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_{\partial \bar{D}} \sigma(t) \gamma(t) dt + \lambda_k \int_{\partial \bar{D}} \sigma(t) \psi_k(t) dt = 0.$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что первый член в левой части равен нулю. Убедимся в этом. Имеем

$$L(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{c_k}{k!} \lambda^k, \quad \gamma(t) = \sum_0^{\infty} \frac{c_k}{t^{k+1}}.$$

Так как $L(0) \neq 0$, то $c_0 \neq 0$ и, значит,

$$\int_{\partial \bar{D}} \gamma(t) dt \neq 0.$$

Имея это в виду, подберем C так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{\partial \bar{D}} [\sigma(t) + C] \gamma(t) dt = \int_{\partial \bar{D}} \sigma(t) \gamma(t) dt + C \int_{\partial \bar{D}} \gamma(t) dt = 0,$$

и тогда в (4.3) с самого начала вместо $\sigma(t)$ возьмем $\sigma(t) + C$. При таком выборе $\sigma(t)$ получаем

$$\int_{\partial \bar{D}} \sigma(t) \psi_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.7)$$

Заметим, что если $L(0) = 0$, то из формул

$$\frac{1}{L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} \lambda^m, \quad c_0 = 0, \quad \psi_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m^{(k)}}{t^{m+1}}$$

следовало бы, что у функции $\psi_k(t)$ бесконечность есть нуль второго порядка и речь могла идти о полноте системы $\{\psi_k(t)\}$ в пространстве функций, аналитических в E , непрерывных в $\bar{E}$ и имеющих в бесконечности нуль по крайней мере второго порядка.

Равенства (4.7) запишем в виде

$$\int_{\partial \bar{D}} \sigma_1(t) \psi_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \sigma_1(t) = \sigma(t) + \frac{a}{t},$$

где a выберем так, чтобы функция

$$\varphi(t) = \int_a^t \sigma_1(t) dt = \int_a^t \sigma(t) dt + a \int_a^t \frac{dt}{t}, \quad a \in \partial \bar{D},$$

была однозначной на $\partial \bar{D}$. Интегрируя по частям, получим

$$\varphi(t) \psi_k(t) |_{\partial \bar{D}} - \int_{\partial \bar{D}} \varphi(t) \psi'_k(t) dt = 0.$$

Подстановка равна нулю. Учитывая еще (4.6), будем иметь

$$\frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_{\partial \bar{D}} \varphi(t) \gamma(t) dt + \lambda_k \int_{\partial \bar{D}} \varphi(t) \psi_k(t) dt = 0,$$

откуда

$$\int_{\partial \bar{D}} \varphi(t) \psi_k(t) dt = \frac{\mu}{\lambda_k L'(\lambda_k)}, \quad \mu = \int_{\partial \bar{D}} \varphi(t) \gamma(t) dt.$$

Заметим, что если p — константа, то

$$\int_{\partial \bar{D}} p \psi_k(t) dt = -\frac{2\pi i p L(0)}{\lambda_k L'(\lambda_k)}.$$

Положив $p = -\frac{1}{2\pi i L(0)}$, получим

$$\int_{\partial \bar{D}} F(t) \psi_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad F(t) = \varphi(t) + p. \quad (4.8)$$

Имеем

$$F(t_2) - F(t_1) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sigma_1(t) dt,$$

откуда

$$|F(t_2) - F(t_1)| \leq A s(t_1, t_2) \leq K |t_2 - t_1|, \quad (4.9)$$

где $s(t_1, t_2)$ — длина дуги кривой $\partial \bar{D}$ между точками t_1 и t_2 . В силу условия (4.9), функцию $F(t)$ можно представить (см. [50], стр. 197) в виде

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t),$$

где $F_1(t)$ регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$, а $F_2(t)$ регулярна в E , непрерывна в $\bar{E}$, $F_2(\infty) = 0$.

Из условий (4.8) получаем

$$\int_{\partial \bar{D}} F_1(t) \psi_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда, согласно доказанной теореме единственности, заключаем, что $F_1(t) = 0$. Таким образом, функция $F(t) = \varphi(t) + p$ регулярна в E , непрерывна в $\bar{E}$ и $F(\infty) = 0$. На основании этого покажем, что выполняется условие (4.5).

Имеем, поскольку $\varphi(t) = F(t) - p$,

$$\int_{\partial \bar{D}} \frac{\varphi(t)}{t^m} dt = 0 \quad (m \geq 2). \quad (4.10)$$

Напомним, что

$$\varphi(t) = \int_a^t \sigma_1(t) dt, \quad a \in \partial \bar{D}.$$

Запишем равенство

$$\int_{\partial \bar{D}} \frac{\sigma_1(t) dt}{t^{m-1}} = \frac{\varphi(t)}{t^{m-1}} \Big|_{\partial \bar{D}} + (m-1) \int_{\partial \bar{D}} \frac{\varphi(t) dt}{t^m}.$$

Так как подстановка равна нулю и выполняется условие (4.10), то

$$\int_{\partial \bar{D}} \frac{\sigma_1(t) dt}{t^{m-1}} = 0 \quad (m \geq 2),$$

откуда, учитывая, что $\sigma_1(t) = \sigma(t) + \frac{a}{t}$, получаем

$$\int_{\partial \bar{D}} \frac{\sigma(t) dt}{t^{m-1}} = 0 \quad (m \geq 2). \quad (4.11)$$

Рассмотрим, наконец, соотношение

$$\int_{\partial \bar{D}} \frac{d\sigma(t)}{t^k} = \frac{\sigma(t)}{t^k} \Big|_{\partial \bar{D}} + k \int_{\partial \bar{D}} \frac{\sigma(t) dt}{t^{k+1}} \quad (k \geq 1).$$

Из него, в силу (4.11), находим

$$\int_{\partial \bar{D}} \frac{d\sigma(t)}{t^k} = 0 \quad (k \geq 1). \quad (4.12)$$

Функцию $f(t)$ из $A(\bar{E})$ можно с любой точностью приблизить в $\bar{E}$, в частности, на $\partial \bar{D}$ многочленом (без свободного члена) относительно $1/t$. Поэтому, на основании (4.12),

$$\int_{\partial \bar{D}} f(t) d\sigma(t) = 0.$$

Теорема доказана.

2. Неполнота системы экспонент. Установив полноту системы $\{\psi_{\lambda, k}(t)\}$, естественно поставить вопрос о том, не является ли система $\{z^s e^{\lambda_p z^2}\}$ — система (1.19), полной в области D (открытой части $\bar{D}$). Ответ на этот вопрос отрицательный. Именно, будет приведен пример системы $\{e^{\lambda_p z^2}\}$ такой, что соответствующая этой системе область D — не пустая, а система $\{e^{\lambda_p z^2}\}$ не полна в D и ни в какой подобласти области D .

Построение примера будет основано на теореме 1.1.8, которую мы сейчас напомним.

Пусть $\{a_k\}_1^\infty$, $0 < |a_k| \uparrow \infty$, — последовательность точек в комплексной плоскости, $n(r)$ — число этих точек в круге $|z| \leq r$, Δ — верхняя плотность последовательности $\{a_k\}$:

$$\Delta = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r}.$$

Введем функцию

$$f(z) = e^{az^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}.$$

При $\Delta < \infty$ произведение сходится и $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа. Положим

$$\delta(R) = a + \sum_{|a_k| < R} \frac{1}{a_k}, \quad \delta = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} |\delta(R)|$$

и обозначим σ тип $f(z)$ при порядке $\rho = 1$. Теорема 1.1.8 утверждает, что при $\Delta = 0$

$$\sigma = \delta. \quad (4.13)$$

Перейдем к построению примера. Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}_1^\infty$ такую, что

$$\Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n} = \infty$$

($n(t)$ — число ρ_n в круге $|z| \leq t$). Например, при $n \geq 2$ можно положить $\rho_n = n \ln n$. Пусть затем α и β — два фиксированных положительных числа. Теперь будем выбирать числа a_n . Положим

$$a_v = \rho_v \quad (1 \leq v \leq m_1), \quad a_v = i\rho_v \quad (m_1 < v \leq m_2),$$

$$a_v = -\rho_v \quad (m_2 < v \leq m_3), \quad a_v = -i\rho_v \quad (m_3 < v \leq m_4),$$

где целые m_1, m_2, m_3 и m_4 определяются условиями:

$$\sum_{v=1}^m \rho_v^{-1} \leq \alpha, \quad \sum_{v=1}^{m_1+1} \rho_v^{-1} > \alpha; \quad \sum_{v=m_1+1}^m \rho_v^{-1} \leq \beta, \quad \sum_{v=m_1+1}^{m_2+1} \rho_v^{-1} > \beta;$$

$$\sum_{v=1}^m \rho_v^{-1} - \sum_{v=m_1+1}^m \rho_v^{-1} \geq -\alpha, \quad \sum_{v=1}^m \rho_v^{-1} - \sum_{v=m_1+1}^{m_2+1} \rho_v^{-1} < -\alpha;$$

$$\sum_{v=m_1+1}^m \rho_v^{-1} - \sum_{v=m_3+1}^m \rho_v^{-1} \geq -\beta; \quad \sum_{v=m_1+1}^m \rho_v^{-1} - \sum_{v=m_3+1}^{m_4+1} \rho_v^{-1} < -\beta.$$

При таком выборе a_v величина

$$\delta(R) = \sum_{|a_v| < R} \frac{1}{a_v} \quad (4.14)$$

при $R \leq \rho_{m_4}$ все время находится в прямоугольнике Q с вершинами $(\pm \alpha \pm i\beta)$, причем для $R = \rho_{m_1}$ она близка к вершине $(\alpha - i\beta)$, для $R = \rho_{m_3}$ — к $(-\alpha - i\beta)$, для $R = \rho_{m_4}$ — к $(-\alpha + i\beta)$.

Положим, далее,

$$a_v = \rho_v \quad (m_4 < v \leq m_5), \quad a_v = i\rho_v \quad (m_5 < v \leq m_6),$$

$$a_v = -\rho_v \quad (m_6 < v \leq m_7), \quad a_v = -i\rho_v \quad (m_7 < v \leq m_8),$$

где числа m_5, m_6, m_7 и m_8 выберем указанным выше способом таким образом, чтобы величина (4.14) при $R \leq \rho_{m_8}$ находилась

в прямоугольнике Q и была бы близкой для $R = \rho_{m_4}$ к вершине $(\alpha + i\beta)$, для $R = \rho_{m_5}$ — к $(\alpha - i\beta)$, для $R = \rho_{m_6}$ — к $(-\alpha - i\beta)$, для $R = \rho_{m_7}$ — к $(-\alpha + i\beta)$.

Указанный процесс построения a_v продолжим и далее. В результате получим последовательность $\{a_v\}_{v=1}^\infty$. Точки a_v расположены одни на действительной оси, другие на мнимой оси, но всегда $|a_v| = \rho_v$, так что

$$\Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t} = 0$$

($n(t)$ — число a_v в круге $|z| \leq t$). Величина (4.14) при любых R находится в прямоугольнике Q , причем для $R = \rho_{m_s}$ и $s \rightarrow \infty$ она неограниченно приближается к вершинам

$$\alpha + i\beta, \quad \text{если } s = 4k + 1,$$

$$\alpha - i\beta, \quad \text{если } s = 4k + 2,$$

$$-\alpha - i\beta, \quad \text{если } s = 4k + 3,$$

$$-\alpha + i\beta, \quad \text{если } s = 4k.$$

Отсюда следует, что все предельные точки $\delta(R)$ при $R \rightarrow \infty$ лежат в Q , причем вершины Q — предельные точки.

Положим

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}, \quad f_a(z) = e^{az} f(z) = e^{az} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}}.$$

Пусть $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$. Тип σ функции $f(z)$ равен

$$\sigma = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} |\delta(R)| = \delta = |\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Множество $\bar{D}$ лежит поэтому в круге $|t| \leq \sigma$.

Утверждаем, что точки $(\pm \alpha \pm i\beta)$ — особые для $\gamma(t)$.

Рассмотрим функцию $f_a(z)$. Ассоциированная с ней по Борелю функция $\gamma_a(t)$ равна $\gamma(t - a)$. Отсюда следует, что наименьшее замкнутое выпуклое множество $\bar{D}_a$, содержащее все особенности $\gamma_a(t)$, получается из множества $\bar{D}$ сдвигом его на вектор a .

Пусть $a = \alpha + i\beta$. При таком a тип σ_a функции $f_a(z)$ равен

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left| a + \sum_{|a_v| < R} \frac{1}{a_v} \right| = 2|\alpha + i\beta| = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

На окружности $|t| = \sigma_a = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ у $\gamma_a(t)$ имеется по крайней мере одна особенность. С другой стороны, множество $\bar{D}_a$ имеет

с окружностью $|t| = \sigma_a$ единственную общую точку $t = 2(\alpha + i\beta)$. Следовательно, точка $2(\alpha + i\beta)$ — особая для $\gamma_a(t)$. Но тогда точка $(\alpha + i\beta)$ — особая для $\gamma(t)$. Так же доказывается, что другие вершины прямоугольника Q — особые для $\gamma(t)$.

Убедимся, что множество $\bar{D}$ совпадает с прямоугольником Q . Для этого докажем, что у $\gamma(t)$ нет особенностей вне Q . Допустим противное, что некоторая точка $(\xi_0 + i\eta_0)$, где $\xi_0 > \alpha$, $|\eta_0| < \beta$, — особая для $\gamma(t)$. Возьмем положительное a . Точка $t_a = (\xi_0 + a) + i\eta_0$ — особая для $\gamma_a(t)$. С другой стороны, тип σ_a при достаточно большом положительном a равен

$$\sigma_a = |a + (\alpha + i\beta)| = \sqrt{(a + \alpha)^2 + \beta^2} = (a + \alpha) \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{a + \alpha}\right)^2} \approx \approx (a + \alpha) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{a + \alpha}\right)^2\right] = a + \alpha + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{a + \alpha}.$$

При большом a точка t_a будет находиться вне круга $|t| \leq \sigma_a$, ибо $\sigma_a < \xi_0 + a$. Но это невозможно. Аналогичным образом убедимся, что множеству $\bar{D}$ не принадлежат и другие точки, лежащие в круге $|t| \leq \sigma$, но вне прямоугольника Q . Итак, $\bar{D} = Q$.

Осталось убедиться, что система $\{e^{a_k t}\}$ не полна ни в какой области. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{a_k^2}\right).$$

Так как $\Delta = 0$, то эта функция принадлежит классу [1, 0]. Пусть $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $F(z)$. Она регулярна всюду, кроме $t = 0$. Имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \gamma(t) e^{zt} dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho} \gamma(t) e^{a_k t} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Так как $\gamma(t) \neq 0$, то, следовательно, система $\{e^{a_k t}\}$ не полна, например, в круге $|t| < 2\rho$. Но число ρ — произвольное положительное. Значит, рассматриваемая система не полна ни в каком круге.

Приведенный пример показывает, что надо отыскивать дополнительные условия на $L(\lambda)$, при которых произвольные функции, аналитические на $\bar{D}$, разлагаются в ряд по системе $\{e^{a_k t}\}$.

§ 5. Формы остаточного члена

1. Формула для частной суммы ряда. Выведем формулу для частной суммы ряда (2.2). При этом предположим сначала, что λ_v ($v = 1, 2, \dots$) — простые нули функции $L(\lambda)$.

Пусть Γ — замкнутый контур, лежащий в полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через начало координат. Для простоты пусть это — полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Обозначим E область, ограниченную контуром Γ . Предположим, что на Γ функция $L(\lambda)$ не обращается в нуль. Частную сумму ряда (2.2), соответствующую λ_v , лежащим внутри Γ , обозначим $S(z, \Gamma)$. Имеем

$$S(z, \Gamma) = \sum_{\lambda_v \in E} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t) \psi_v(t) dt \right) e^{\lambda_v z} = = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t) \left(\sum_{\lambda_v \in E} \psi_v(t) e^{\lambda_v z} \right) dt. \quad (5.1)$$

Преобразуем круглую скобку, стоящую под знаком интеграла. По формуле (1.13)

$$\psi_v(t) = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \int_0^{+\infty} e^{\lambda_v \eta} \gamma(t + \eta) d\eta, \quad \lambda_v \in E,$$

ибо для точек $\lambda_v \in E$ справедливо условие: $\operatorname{Re} \lambda_v < 0$. Поэтому

$$\sum_{\lambda_v \in E} \psi_v(t) e^{\lambda_v z} = \int_0^{+\infty} \gamma(t + \eta) \left(\sum_{\lambda_v \in E} \frac{e^{\lambda_v (z + \eta)}}{L'(\lambda_v)} \right) d\eta = = \int_0^{+\infty} \gamma(t + \eta) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{(z + \eta)\mu}}{L(\mu)} d\mu \right) d\eta.$$

Учтем теперь, что

$$\gamma(t + \eta) = \int_0^{+\infty} L(\xi) e^{-(t + \eta)\xi} d\xi, \quad \eta \geq 0, \quad \operatorname{Re} t > h(0)$$

($h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$). В силу этого,

$$\sum_{\lambda_v \in E} \psi_v(t) e^{\lambda_v z} = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} L(\xi) e^{-(t + \eta)\xi} d\xi \right\} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu(z + \eta)}}{L(\mu)} d\mu \right) d\eta.$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$\sum_{\lambda_v \in E} \psi_v(t) e^{\lambda_v z} = \int_0^{+\infty} L(\xi) e^{-t\xi} d\xi \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} \left(\int_0^{+\infty} e^{(\mu - \xi)\eta} d\eta \right) \right].$$

Напомним, что $\operatorname{Re} \mu < 0$, $\operatorname{Re} t > h(0)$. Внутренний интеграл равен $\frac{1}{\xi - \mu}$. Таким образом, при $\operatorname{Re} t > h(0)$

$$\sum_{\lambda_v \in E} \psi_v(t) e^{\lambda_v z} = \int_0^{+\infty} \left[L(\xi) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\xi - \mu) L(\mu)} \right] e^{-t\xi} d\xi. \quad (5.2)$$

Функция

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad (5.3)$$

как функция переменной λ , является целой функцией (в этой формуле λ лежит вне Γ). То, что она аналитична вне Γ , очевидно. Для λ , лежащих внутри Γ ,

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} + e^{\lambda z}.$$

Отсюда видно, что эта функция аналитична и внутри Γ (путем малой деформации контура убедимся, что аналитичность имеет место также на Γ). Из формулы (5.3) сразу вытекает, что индикатриса роста функции $\tilde{\Phi}(\lambda, z, \Gamma)$ не превосходит $h(\varphi)$ — индикатрисы роста $L(\lambda)$. Отсюда следует, что функция $\tilde{\gamma}(t, z, \Gamma)$, ассоциированная по Борелю с $\tilde{\Phi}$, регулярна вне $\bar{D}$. Формула (5.2) показывает, что

$$\sum_{\lambda_v \in E} \psi_v(t) e^{\lambda_v z} = \tilde{\gamma}(t, z, \Gamma).$$

Это равенство, установленное при $\operatorname{Re} t > h(0)$, справедливо, в силу свойства единственности, всюду вне $\bar{D}$. Имея это в виду, из (5.1) получаем

$$S(z, \Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t) \tilde{\gamma}(t, z, \Gamma) dt. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) справедлива для любого контура Γ , лежащего в полуплоскости, граница которой проходит через начало координат. Записав эту формулу для нескольких подобных контуров и затем сложив их, получим, что формула (5.4) имеет место для каждого контура Γ , на котором $L(\lambda) \neq 0$. Формула (5.4) — искомая формула. Ее можно записать еще так:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t) \tilde{\gamma}(t, z, \Gamma) dt. \quad (5.5)$$

2. Формулы для остаточного члена. Пользуясь (5.5), получим формулу для остаточного члена разности между $F(z)$ и частной суммой $S(z, \Gamma)$.

Положим

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad (5.6)$$

где λ лежит внутри Γ . Для других λ определим эту функцию как ее аналитическое продолжение. Имеем

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = \tilde{\Phi}(\lambda, z, \Gamma) - e^{\lambda z}.$$

Пусть $\gamma(t, z, \Gamma)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$, как функцией переменной λ . Имеем

$$\gamma(t, z, \Gamma) = \tilde{\gamma}(t, z, \Gamma) - \frac{1}{t - z}.$$

Отсюда для z , лежащих внутри Γ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t) \tilde{\gamma}(t, z, \Gamma) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(t) dt}{t - z} = S(z, \Gamma) - F(z). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt. \quad (5.7)$$

Это и есть формула для остаточного члена. Она является основной для его оценки.

При выводе формул (5.5) и (5.7) предполагалось, что λ_v ($v = 1, 2, \dots$) — простые нули функции $L(\lambda)$. Оказывается, что формулы (5.5) и (5.7) справедливы и в случае кратных корней. В этом можно убедиться путем непосредственной проверки этих формул. Именно, (5.5) и (5.7) легко проверяются для функций вида $F(t) = e^{\lambda t}$. Проверим, например, формулу (5.7). Для $F(t) = e^{\lambda t}$ правая часть в (5.7) равна $-\Phi(\lambda, z, \Gamma)$. Далее, имеем

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

в силу чего, левая часть в (5.7) равна

$$e^{\lambda z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{\mu - \lambda} + \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\mu - \lambda) L(\mu)}.$$

Пусть λ лежит внутри контура Γ . Тогда левая часть (5.7) равна

$$-L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} = -\Phi(\lambda, z, \Gamma).$$

Таким образом, для $F(t) = e^{\lambda t}$ формула (5.7) действительно справедлива. Но тогда она справедлива для любой функции $F(t)$, аналитической на $\bar{D}$, ибо любую такую функцию можно на контуре C аппроксимировать с любой точностью конечными линейными комбинациями экспонент.

В том случае, когда функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| \leq R$, содержащем множество D , формулу (5.7) можно записать еще иначе.

Разложим функцию $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$, как функцию переменной λ , в ряд по степеням λ :

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z) \lambda^k, \quad |\lambda| < \infty.$$

Тогда

$$\gamma(t, z, \Gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! A_k(z)}{t^{k+1}}, \quad |t| > \sigma, \quad \sigma = \max_{z \in \bar{D}} |z|,$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(0) A_k(z)$$

(здесь C — окружность с центром в начале, которая охватывает $\bar{D}$ и внутри которой $F(t)$ — аналитическая функция). Следовательно, формула (5.7) приобретает вид

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = - \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(0) A_k(z). \quad (5.8)$$

Остановимся еще на случае, когда $L(\lambda)$ удовлетворяет дополнительному условию (2.30)

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1. \quad (5.9)$$

Здесь функции $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$ и $\bar{\Phi}(\lambda, z, \Gamma)$, как функции λ , также удовлетворяют условию вида (5.9) с теми же $h(\varphi)$ и μ . Функции $\gamma(t, z, \Gamma)$ и $\bar{\gamma}(t, z, \Gamma)$ будут непрерывны вплоть до границы $\partial\bar{D}$. Тогда формулы (5.5) и (5.7) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\bar{D}} F(t) \bar{\gamma}(t, z, \Gamma) dt, \quad (5.10)$$

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt. \quad (5.11)$$

Здесь $F(z)$ — функция, аналитическая на $\bar{D}$. Но поскольку любую функцию $F(z)$, аналитическую в D и непрерывную в $\bar{D}$, можно аппроксимировать в $\bar{D}$ с любой точностью многочленами, формулы (5.10) и (5.11) справедливы и для таких функций $F(z)$. Формулой (5.11) будем пользоваться при исследовании на разложимость в ряды экспонент функций $F(z)$, аналитических в D и непрерывных в $\bar{D}$.

3. Связь с рядом Лагранжа. Формулы (5.7) и (5.11) имеют связь с разложением целых функций в ряд Лагранжа. Пусть λ_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) — простые нули $L(\lambda)$. Возьмем функцию $F(z) = e^{\lambda z}$ и напомним для нее формулу (5.7)

$$e^{\lambda z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = - \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda z} \gamma(t, z, \Gamma) dt. \quad (5.12)$$

Правая часть равна $-\Phi(\lambda, z, \Gamma)$. Заметим теперь, что

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu &= -L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\mu - \lambda)L(\mu)} = \\ &= L(\lambda) \sum_{\lambda_\nu \in G} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{(\lambda - \lambda_\nu) L'(\lambda_\nu)}, \end{aligned}$$

где G — область, ограниченная контуром Γ . Предполагалось, что λ лежит вне контура Γ . В силу всего этого, формула (5.12) примет вид

$$e^{\lambda z} - \sum_{\lambda_\nu \in G} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)} = -\Phi(\lambda, z, \Gamma). \quad (5.13)$$

Левая и правая части — целые функции от λ . Поэтому равенство (5.13), имеющее место для λ , лежащих вне Γ , имеет место на самом деле для любых λ .

Будем считать в формуле (5.13), что λ — переменное, а z — фиксированное (в формуле (5.12) считалось λ фиксированным). При этом условии левая часть формулы есть разность между функцией $e^{\lambda z}$ и частной суммой ее ряда Лагранжа, соответствующей узлам λ_ν , лежащим в области G . Функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$, следовательно, есть эта разность с противоположным знаком.

Из формулы (5.7) получили формулу (5.13). Покажем, что из формулы (5.13) следует формула (5.7). Функция (5.13) —

целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста, не превосходящей $h(\varphi)$. Пусть $z \in D$. Умножим левую и правую части в (5.13) на $e^{-\lambda z}$ и проинтегрируем по лучу от 0 до ∞ . Получим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda(t-z)} d\lambda = \sum_{\lambda_\nu \in G} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} e^{-\lambda t} d\lambda = - \int_0^\infty \Phi(\lambda, z, \Gamma) e^{-\lambda t} d\lambda$$

или

$$\frac{1}{t-z} - \sum_{\lambda_\nu \in G} \Psi_\nu(t) e^{\lambda_\nu z} = -\gamma(t, z, \Gamma). \quad (5.14)$$

Здесь t лежит вне $\bar{D}$. После этого умножим обе части последнего равенства на $F(t)$ и проинтегрируем по контуру C . Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t) dt}{t-z} - \sum_{\lambda_\nu \in G} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \Psi_\nu(t) F(t) dt \right) e^{\lambda_\nu z} = \\ = - \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt \end{aligned}$$

или

$$F(z) - \sum_{\lambda_\nu \in G} a_\nu e^{\lambda_\nu z} = - \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt.$$

Но эта формула есть формула (5.7). Если бы $L(\lambda)$ удовлетворяла дополнительному условию (2.30), то в качестве C можно было бы взять границу $\partial\bar{D}$ и тогда получилась бы формула (5.11).

На проведенные рассуждения можно смотреть и как на иной вывод формул (5.7) и (5.11) в случае простых нулей $L(\lambda)$.

§ 6. Теоремы о разложении

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$ — ассоциированная с ней по Борелю, $\bar{D}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, D — открытая часть $\bar{D}$. Предполагаем, что D — непустая область и что начало координат принадлежит D . Предполагаем, далее, что все нули функции $L(\lambda)$, обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — простые. Функции $F(z)$, аналитической на $\bar{D}$, сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{L'(\lambda_\nu)} e^{\lambda_\nu z}, \quad (6.1)$$

где

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \right) dt$$

(C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$, на котором и внутри которого $F(z)$ — аналитическая функция. При условии (5.9) за C берем границу $\partial\bar{D}$, а $F(z)$ предполагаем аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$). Речь идет о сходимости ряда (6.1) к функции $F(z)$.

В § 2 было показано, что ряд (6.1) не может сходиться в области $G \supset \bar{D}$, если функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t+z) dt = 0.$$

Далее, из гл. III известно, что открытая область сходимости ряда Дирихле — всегда выпуклая область (при условии $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$, которое заведомо выполняется). Поэтому речь здесь идет о сходимости ряда (6.1) к $F(z)$ в какой-нибудь выпуклой подобласти D_1 области D , в частности, в самой области D .

Отметим, что из сходимости ряда Дирихле в области E при условии $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0$ вытекает (как было установлено в гл. III) его абсолютная сходимость в области E и равномерная — внутри области E .

1. Условия сходимости ряда. Пусть D_1 — выпуклая подобласть области D , $K_1(\varphi)$ — ее опорная функция, $h_1(\varphi) = K_1(-\varphi)$.

Теорема 4.6.1. Для того чтобы ряд (6.1) всегда сходилась в области D_1 (какова бы ни была допустимая функция $F(z)$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\ln |L'(\lambda_k)| > [h_1(\varphi_k) - \varepsilon] r_k, \quad \lambda_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k > k_0(\varepsilon), \quad (6.2)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое.

Докажем необходимость условия (6.2). Возьмем функцию $e^{\lambda z}$ ($\lambda \neq \lambda_k$) и сконструируем для нее ряд (6.1). Имеем (в силу свойства 3) интерполирующей функции)

$$a_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, e^{\lambda z})}{L'(\lambda_k)} = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)},$$

в силу чего искомым ряд имеет вид

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}. \quad (6.3)$$

Он сходится в области D_1 одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} \quad (6.4)$$

и, следовательно, в области D_1 ряд (6.4) сходится.

Рассмотрим сначала случай, когда начало координат принадлежит D_1 . Возьмем число ρ , $0 < \rho < 1$, и обозначим D_2 область — множество точек вида $z = \rho t$, $t \in D_1$. Очевидно, D_2 — выпуклая область и $D_2 \subset \bar{D}_1$. Заметим, что

$$\max_{z \in \bar{D}_1} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = \rho \max_{t \in \bar{D}_1} \operatorname{Re}(te^{i\varphi}) = \rho K_1(-\varphi). \quad (6.5)$$

Ряд (6.4) на множестве $\bar{D}_2$ сходится равномерно. Следовательно, имеется константа C (она зависит от $\bar{D}_2$ или, что то же самое, от параметра ρ) такая, что

$$\left| \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)} \right| \leq C, \quad z \in \bar{D}_2 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Отсюда

$$\left| \frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \right| \leq C |e^{-\lambda_\nu z}| = C \exp\{-\operatorname{Re}(ze^{i\varphi_\nu})|\lambda_\nu|\}.$$

Возьмем в качестве z точку, для которой, в силу (6.5),

$$\operatorname{Re}(ze^{i\varphi_\nu}) = \rho K_1(-\varphi_\nu) = \rho h_1(\varphi_\nu).$$

Тогда получим

$$\left| \frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \right| \leq C \exp\{-\rho h_1(\varphi_\nu)|\lambda_\nu|\}.$$

Чтобы получить (6.2), осталось заметить, что $\rho h_1(\varphi) > h_1(\varphi) - \varepsilon$, если ρ достаточно близко к единице.

В случае, если начало координат не принадлежит D_1 , поступим следующим образом. Возьмем в D_1 точку z_0 и запишем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\lambda_\nu z_0} \frac{e^{\lambda_\nu t}}{L'(\lambda_\nu)}, \quad t = z - z_0. \quad (6.6)$$

Когда z пробегает D_1 , t пробегает область E . Область E содержит начало координат. Пусть $\tilde{K}_1(\varphi)$ — опорная функция E . Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(-\varphi) &= \max_{t \in E} \operatorname{Re}(te^{i\varphi}) = \\ &= \max_{z \in \bar{D}_1} \operatorname{Re}[(z - z_0)e^{i\varphi}] = K_1(-\varphi) - \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi}). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из сходимости ряда (6.6) в E выведем, как и выше, что

$$\left| \frac{e^{\lambda_\nu z_0}}{L'(\lambda_\nu)} \right| < A(e) e^{-[h_1(\varphi_\nu) - \varepsilon]|\lambda_\nu|}, \quad \tilde{h}_1(\varphi) = \tilde{K}_1(-\varphi),$$

откуда

$$\left| \frac{1}{L'(\lambda_\nu)} \right| < A(e) \exp\{[-\tilde{h}_1(\varphi_\nu) - \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_\nu}) + \varepsilon]|\lambda_\nu|\}.$$

Но, в силу (6.7),

$$\tilde{h}_1(\varphi_\nu) + \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_\nu}) = \tilde{K}_1(-\varphi_\nu) + \operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi_\nu}) = K_1(-\varphi_\nu) = h_1(\varphi_\nu).$$

Значит, мы снова получили неравенство (6.2).

Докажем достаточность условия (6.2). Для коэффициентов α_k имеется (см. (2.3) и (2.19)) оценка

$$\alpha_k = O\left(\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда, учитывая (6.2), сразу вытекает сходимость ряда (6.1) в области D_1 .

2. Условия сходимости ряда к своей функции. Сформулируем следующий критерий разложимости.

Теорема 4.6.2. Пусть D_1 — выпуклая подобласть области D . Для того чтобы любая функция $F(z)$, аналитическая в $\bar{D}$ (или аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$ при условии (5.9)), представлялась в D_1 рядом (6.1), необходимо и достаточно, чтобы функция $e^{\lambda z}$, как функция λ , при $z \in D_1$ разлагалась в ряд Лагранжа

$$e^{\lambda z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_\nu} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)}, \quad z \in D_1. \quad (6.8)$$

Необходимость доказывается совсем просто. Пусть любая функция $F(z)$ из рассматриваемого класса представляется в D_1 рядом (6.1). Возьмем функцию $F(z) = e^{\lambda z}$. Для нее соответствующий ряд есть ряд (6.3). Поэтому имеет место представление (6.8).

Докажем достаточность условия (6.8). Ранее было отмечено, что из сходимости ряда (6.8) для $z \in D_1$ вытекает условие (6.2). Отметим еще следующий факт: пусть δ — расстояние от точки $z \in D_1$ до границы ∂D_1 , тогда

$$\operatorname{Re}(\lambda z) \leq [h_1(\varphi) - \delta]|\lambda|, \quad \varphi = \arg \lambda. \quad (6.9)$$

В самом деле, имеем

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \operatorname{Re}(ze^{i\varphi})|\lambda|.$$

Выражение $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi})$ есть проекция вектора z на направление $-\varphi$. Проведем опорную прямую к области D_1 , перпендикулярную направлению $-\varphi$. Поскольку круг радиуса δ с центром в z принадлежит D_1 , точка z отстоит от указанной опорной прямой на расстояние, не меньшее δ . Поэтому

$$\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) \leq K_1(-\varphi) - \delta = h_1(\varphi) - \delta,$$

откуда и следует (6.9).

Пусть Γ_n — замкнутый контур, внутри которого лежат нули $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ функции $L(\lambda)$ и нет других нулей этой функции. На основании (5.13) и (6.8) имеем

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_n) = - \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)}, \quad z \in D_1. \quad (6.10)$$

Нетрудно убедиться, что при любом $v > 0$

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| < B(e) \exp\{[h(\varphi) + e]|\lambda|\}, \quad \varphi = \arg \lambda. \quad (6.11)$$

В силу (6.2) и (6.9), далее, имеем

$$\left| \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} \right| < A(e_1) \exp\{-(\delta - e_1)|\lambda_v|\}, \quad \delta = \rho(z, \partial \bar{D}_1), \quad e_1 > 0.$$

Следовательно, из (6.10) находим

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_n)| < A(e_1) B(e) e^{-(\delta - 2e_1)|\lambda_{n+1}|} e^{[h(\varphi) + e]|\lambda|} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-e_1|\lambda_v|}.$$

Ряд справа сходится, ибо

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty.$$

Из последней оценки выведем, что на кривой C , охватывающей множество $\bar{D}$,

$$|\gamma(t, z, \Gamma_n)| < N(e_1) e^{-(\delta - 2e_1)|\lambda_{n+1}|}. \quad (6.12)$$

Теперь воспользуемся формулой (5.7). Из нее, согласно (6.12) получим

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^n \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)} e^{\lambda_v z} \right| < C(e_1) e^{-(\delta - 2e_1)|\lambda_{n+1}|}, \quad (6.13)$$

$$\delta = \rho(z, \partial \bar{D}_1).$$

Ряд (6.1) сходится в D_1 и сходится к $F(z)$.

В случае, когда $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (5.9), вместо оценки (6.11) имеем оценку (1.25)

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| < C \frac{e^{h(\varphi)}}{r^\mu}, \quad \mu > 1, \quad r \geq 2,$$

где C не зависит от v . Поэтому

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_n)| < A(e_1) C e^{-(\delta - 2e_1)|\lambda_{n+1}|} \frac{e^{h(\varphi)|\lambda|}}{|\lambda|^\mu} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-e_1|\lambda_v|}, \quad (6.14)$$

$$|\lambda| \geq 2.$$

Правая часть при $|\lambda| = 2$, учитывая, что $\max_{\varphi} h(\varphi) < \infty$, не превосходит

$$A_1(e_1) e^{-(\delta - 2e_1)|\lambda_{n+1}|},$$

где $A_1(e_1)$ — постоянная. В силу принципа максимума модуля,

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_n)| \leq A_1(e_1) e^{-(\delta - 2e_1)|\lambda_{n+1}|}, \quad |\lambda| \leq 2.$$

Отсюда и из неравенства (6.14) получим, что имеет место оценка (6.12) на границе $\partial \bar{D}$. Теперь обратимся к (5.11). Из этой формулы, в силу (6.12), получим оценку (6.13). Все доказано.

Согласно установленному критерию вопрос о разложимости $F(z)$ в ряд (6.1) свелся к вопросу о том, когда имеет место представление (6.8). В связи с этим докажем следующую теорему.

Теорема 4.6.3. Пусть D_1 — выпуклая подобласть области D , причем ее опорная функция $K_1(\varphi)$ удовлетворяет условию $K_1(\varphi) > \frac{1}{2} K(\varphi)$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), где $K(\varphi)$ — опорная функция области D . Для того чтобы имело место в D_1 представление (6.8), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} \quad (6.15)$$

сходится в области D_1 и его сумма равна нулю.

Необходимость устанавливается легко. Пусть имеет место равенство (6.8)

$$e^{\lambda z} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v) L'(\lambda_v)} e^{\lambda_v z}, \quad z \in D_1.$$

Дифференцируя его, получим

$$\lambda e^{\lambda z} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\lambda_v L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_v) L'(\lambda_v)} e^{\lambda_v z}, \quad z \in D_1.$$

Умножив первое равенство на λ и вычитая из него второе, будем иметь

$$L(\lambda) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} = 0, \quad z \in D_1.$$

Поскольку $L(\lambda) \neq 0$, то

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} = 0, \quad z \in D_1. \quad (6.16)$$

Докажем теперь достаточность условия (6.16). Из сходимости ряда (6.15) в области D_1 вытекает его абсолютная сходимость в D_1 . При больших v и фиксированном λ

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} \right| < \left| \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} \right|.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)}$$

сходится для $z \in D_1$. Из этого следует, что он (при фиксированном λ) равномерно сходится внутри D_1 .

Положим

$$\varphi(z) = e^{\lambda z} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)}, \quad z \in D_1.$$

Имеем

$$\varphi'(z) = \lambda e^{\lambda z} - L(\lambda) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\lambda_v e^{\lambda_v z}}{(\lambda - \lambda_v) L'(\lambda_v)}, \quad z \in D_1.$$

Умножив первое равенство на λ и вычтя его из второго, получим

$$\varphi'(z) - \lambda \varphi(z) = L(\lambda) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)}.$$

Правая часть, в силу условия (6.16), равна нулю. Следовательно,

$$\varphi'(z) - \lambda \varphi(z) = 0, \quad z \in D_1.$$

Значит,

$$\varphi(z) = C(\lambda) e^{\lambda z}, \quad z \in D_1.$$

В силу этого результата,

$$L(\lambda) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v z}}{(\lambda - \lambda_v) L'(\lambda_v)} = [1 - C(\lambda)] e^{\lambda z}, \quad z \in D_1. \quad (6.17)$$

Убедимся в том, что $C(\lambda) \equiv 0$. Левую часть в равенстве (6.17) обозначим $A_z(\lambda)$. Из оценки (6.11) следует, что

$$|A_z(\lambda)| < B(\varepsilon) \exp\{[h(\varphi) + \varepsilon]|\lambda|\}, \quad (6.18)$$

т. е. $A_z(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, индикатриса роста которой не превосходит $h(\varphi)$. Имеем

$$1 - C(\lambda) = \frac{A_z(\lambda)}{e^{\lambda z}}.$$

Отсюда, в силу (6.18),

$$|1 - C(re^{i\varphi})| < B(\varepsilon) \exp\{[h(\varphi) + \varepsilon - \operatorname{Re}(ze^{i\varphi})]r\}.$$

Так как

$$\max_{z \in \overline{D}_1} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = K_1(-\varphi),$$

выберем фиксированное z из D_1 с условием

$$\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) > K_1(-\varphi) - \varepsilon.$$

На основании этого

$$|1 - C(re^{i\varphi})| < B(\varepsilon) \exp\{[h(\varphi) - K_1(-\varphi) + 2\varepsilon]r\},$$

откуда

$$|C(re^{i\varphi})| < B(\varepsilon) \exp\{[h(\varphi) - K_1(-\varphi) + 2\varepsilon]r\} + 1.$$

Поскольку начало координат принадлежит D , имеем $h(\varphi) > 0$.

По условию $K_1(-\varphi) > \frac{1}{2} K(-\varphi)$. Но $K(-\varphi) = h(\varphi)$. Следовательно,

$$h(\varphi) - K_1(-\varphi) < K_1(-\varphi).$$

Значит, индикатриса роста функции $C(\lambda)$ меньше $K_1(-\varphi)$. Это означает, что наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции, ассоциированной по Борелю с $C(\lambda)$, лежит в области D_1 .

Допустим противное, что $C(\lambda) \neq 0$. Из равенства (6.17) видно, что $C(\lambda_v) = 0$ ($v = 1, 2, \dots$). Пусть λ_1 — нуль $C(\lambda)$ кратности p . Положим

$$C^*(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^p}.$$

Имеем

$$C^*(\lambda_1) \neq 0, \quad C^*(\lambda_v) = 0, \quad v > 1.$$

Обозначим $\gamma^*(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $C^*(\lambda)$. Все ее особенности лежат строго внутри D_1 . Имея это в виду, возьмем замкнутый контур Γ , который охватывает все

особенности $\gamma^*(t)$ и лежит в D_1 . На основании условия (6.16) получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma^*(t) \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v t}}{L'(\lambda_v)} \right) dt = 0.$$

Но левая часть равна

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{L'(\lambda_v)} C^*(\lambda_v) = \frac{C^*(\lambda_1)}{L'(\lambda_1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{L'(\lambda_1)} = 0,$$

что невозможно. Значит, $C(\lambda) \equiv 0$. Но тогда, учитывая (6.17), получаем равенство (6.8), которое и надо было установить. Все доказано.

При выяснении вопроса, когда выполняется условие (6.16), полезна следующая лемма.

Лемма 4.6.1. Пусть $K_1(\varphi)$ — опорная функция выпуклой области $D_1 \subset D$ и $h_1(\varphi) = K_1(-\varphi)$. Если имеется последовательность окружностей $|\lambda| = r_k$, $r_k \uparrow \infty$, такая, что при любом ε

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h_1(\varphi) - \varepsilon]r, \quad r = r_k, \quad k > K(\varepsilon), \quad (6.19)$$

то равномерно внутри области D_1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_v| < r_k} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} = 0, \quad z \in D_1. \quad (6.20)$$

Для доказательства запишем

$$\sum_{|\lambda_v| < r_k} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_k} \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu.$$

Пусть z лежит на замкнутом множестве $\bar{M} \subset D_1$. Тогда, если $\mu = re^{i\varphi}$,

$$|e^{\mu z}| = \exp \{ \operatorname{Re}(ze^{i\varphi})r \} < \exp \{ [K_1(-\varphi) - \delta]r \}, \quad \delta > 0, \quad z \in \bar{M}.$$

Отсюда и из условия (6.19) получаем (учитывая, что $K_1(-\varphi) = h_1(\varphi)$)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_k} \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu \right| < r_k e^{-(\delta-\varepsilon)r_k}, \quad k > K(\varepsilon).$$

Выберем $\varepsilon < \delta$. Тогда видно, что на множестве $\bar{M}$ имеет место равномерный предел (6.20). Лемма установлена.

Заметим, что если условие (6.16) выполняется во всей области D , то функция $L(\lambda)$ является функцией вполне регулярного роста.

Докажем это. На основании предположения имеет место равенство (6.8), из которого получаем

$$\frac{1}{L(\lambda)} = e^{-\lambda z} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_v z}}{(\lambda - \lambda_v) L'(\lambda_v)}, \quad z \in D.$$

Образует кружки

$$K_v: |\lambda - \lambda_v| < |\lambda_v|^{-h}, \quad h > 1 \quad (v \geq 1).$$

Вне этих кружков

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \right| \leq |e^{-\lambda z}| \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|\lambda_v|^h |e^{\lambda_v z}|}{|L'(\lambda_v)|}, \quad z \in D.$$

Спроектируем кружки K_v на положительную часть вещественной оси по правилу: точке $\lambda = re^{i\varphi}$ приводим в соответствие точку r . На вещественной оси получим некоторое множество E_0 .

Поскольку $\sum |\lambda_v|^{-h} < \infty$, мера множества E_0 конечна. Относительная мера множества E_0 равна нулю. Покажем, что

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \right| < e^{[-h(\varphi) + \varepsilon]r}, \quad r > r_0(\varepsilon), \quad r \notin E_0.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и ρ , $0 < \rho < 1$. Пусть D_0 — область, образованная точками z вида $z = \rho t$, $t \in D$. Имеем

$$\begin{aligned} \max_{z \in \bar{D}_0} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) &= \rho \max_{t \in \bar{D}} \operatorname{Re}(te^{i\varphi}) = \\ &= \rho h(\varphi) = h(\varphi) - (1 - \rho)h(\varphi) \geq h(\varphi) - \sigma(1 - \rho). \end{aligned}$$

Выберем ρ с условием: $\sigma(1 - \rho) < \varepsilon$. Тогда

$$\max_{z \in \bar{D}_0} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) > h(\varphi) - \varepsilon.$$

В силу предыдущего, имеем

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \right| < C |e^{-\lambda z}|, \quad z \in \bar{D}_0, \quad r \notin E_0, \quad \lambda = re^{i\varphi},$$

где C — постоянная. Пусть z_0 — точка из $\bar{D}_0$ такая, что $\operatorname{Re}(z_0 e^{i\varphi}) > h(\varphi) - \varepsilon$. Положим в последнем неравенстве $z = z_0$. Получим

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \right| < C e^{[-h(\varphi) + \varepsilon]r}, \quad r \notin E_0.$$

Тогда имеется целая функция $f(z)$ первого порядка с индикатрисой роста $h(0)$, которая имеет следующую оценку сверху:

$$|f(re^{i\theta})| < M \frac{e^{h(0)r}}{r}, \quad r > 0.$$

Эта функция есть каноническая функция некоторого регулярного множества $\{d_k\}$ при показателе $\rho=1$ (оно зависит от $\Phi(r)$); множество $\{d_k\}$ является подмножеством регулярного множества $\{b_k\}$ при показателе $\rho=1$, которое уже не зависит от $\Phi(r)$. Точки $|b_k|$ ($k \geq 1$) лежат вне заданного множества E_0 нулевой относительной меры. Если $d_k = r_k e^{i\theta_k}$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |f'(d_k)| > [h(0_k) - \varepsilon] r_k, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

Функция $f(z)$ из этой теоремы есть функция вполне регулярного роста, и она удовлетворяет условию (6.21). Ее, следовательно, можно взять в качестве $L(\lambda)$, положив, например, $\Phi(r) = r^2$. В силу этого верна теорема.

Теорема 4.6.6. Пусть $\bar{D}$ — ограниченная выпуклая область, имеющая внутренние точки. Пусть затем E_0 — множество на положительной части вещественной оси нулевой относительной меры. Тогда существует зависящая лишь от области $\bar{D}$ последовательность $\{\lambda_k\}$ (λ_k ($k \geq 1$) — нули некоторой целой функции $L(\lambda)$ вполне регулярного роста с индикатрисой роста $h(\Phi)$, $h(\Phi) = K(-\Phi)$, где $K(\Phi)$ — опорная функция множества $\bar{D}$, причем $|\lambda_k|$ ($k \geq 1$) лежат вне множества E_0) такая, что любая функция $F(z)$, аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$, представляется в D рядом

$$F(z) = \sum_1 a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)}, \quad z \in D.$$

В случае многоугольной области $\bar{D}$ в качестве $L(\lambda)$ можно взять функцию

$$L(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}, \quad P(\lambda) = \sum_{j=1}^s A_j e^{\gamma_j \lambda}, \quad (6.23)$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ — вершины многоугольника $\bar{D}$, а $Q(\lambda)$ — многочлен степени, не меньшей 2 (его нули являются нулями $P(\lambda)$). По теореме 1.2.10 у $P(\lambda)$ все нули, начиная с некоторого, — простые. Имея это в виду, подбираем $Q(\lambda)$ так, чтобы у функции (6.23) не было кратных нулей. По той же теореме 1.2.10 функция (6.23) вполне регулярного роста, и она удовлетворяет условию (6.21).

3. Разложение в ряд по биортогональной системе. Предположим, что у функции $L(\lambda)$ все нули простые, она вполне

регулярного роста и удовлетворяет условию (6.21). Иными словами, имеет место ситуация, когда любую функцию $F(z)$, аналитическую в $\bar{D}$, можно разложить в D в ряд Дирихле. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{1}{t-z},$$

где t лежит вне $\bar{D}$. Найдем для нее соответствующий ряд. Пусть $\{\psi_\nu(t)\}$ — система, биортогональная к системе $\{e^{\lambda_\nu z}\}$. Напомним: функции $\psi_\nu(t)$ регулярны вне $\bar{D}$ и обращаются в нуль на бесконечности. Имеем

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu(t) e^{\lambda_\nu z}, \quad z \in D,$$

где

$$\alpha_\nu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_\nu(\eta) d\eta}{t-\eta} \quad (\nu \geq 1).$$

Здесь C — замкнутый контур, охватывающий множество $\bar{D}$, точка t лежит вне этого контура. Возьмем замкнутый контур C_1 , который содержит внутри себя и контур C и точку t . Функция $\psi_\nu(t)$ в бесконечности обращается в нуль. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\psi_\nu(\eta) d\eta}{t-\eta} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_\nu(\eta) d\eta}{t-\eta} + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\psi_\nu(\eta) d\eta}{t-\eta} = 0,$$

где γ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке t . Интеграл по контуру γ равен $-\psi_\nu(t)$. В силу этого, из полученного равенства находим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_\nu(\eta) d\eta}{t-\eta} = \psi_\nu(t).$$

Отсюда

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(t) e^{\lambda_\nu z}, \quad z \in D, \quad t \notin \bar{D}. \quad (6.24)$$

Эту формулу можно было бы также получить из формулы (5.14) на основании оценки (6.12).

Воспользуемся представлением ядра Коши, чтобы получить разложение в ряд по системе $\{\psi_\nu(t)\}$ функций, аналитических в области $\bar{G}$ и обращающихся в нуль в ∞ , где $\bar{G}$ — дополнение D до всей плоскости.

Пусть $\Phi(t)$ — функция, аналитическая на $\bar{G}$, причем $\Phi(\infty) = 0$. Пусть, далее, Γ — замкнутый контур, лежащий в D , на котором

и вне которого $\Phi(t)$ — аналитическая функция. Поскольку $\Phi(\infty) = 0$, то t лежит вне Γ

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(z) dz}{t - z}.$$

Подставив сюда вместо ядра Коши разложение (6.24), получим

$$\Phi(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v \psi_v(t), \quad t \notin \bar{D}, \quad (6.25)$$

где

$$\beta_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(z) e^{\lambda_v z} dz \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Теорема 4.6.7. Пусть у функции $L(\lambda)$ все нули простые, она — функция вполне регулярного роста и удовлетворяет условию (6.21). Обозначим $\{\psi_v(t)\}$ систему, биортогональную к системе $\{e^{\lambda_v z}\}$. Тогда каждую функцию $\Phi(t)$, аналитическую на $\bar{G}$, где $\bar{G}$ — дополнение D до всей плоскости, и обращающуюся в нуль в ∞ , можно в области G представить рядом (6.25).

Теперь несколько слов о сходимости ряда

$$\sum_{v=1}^{\infty} \gamma_v \psi_v(t). \quad (6.26)$$

Пусть $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$. Она регулярна вне $\bar{D}$. Можно утверждать следующее: если ряд (6.26) сходится абсолютно в точке $t_0 \in G$, причем $\gamma(t_0) \neq 0$, то он сходится абсолютно всюду в G и равномерно сходится на любом множестве E , отстоящем на положительном расстоянии от $\bar{D}$.

Действительно, в силу формулы (1.18), получим, что на E

$$|\psi_v(t)| < \frac{A}{|\lambda_v L'(\lambda_v)|},$$

где A — постоянная, а в точке t_0 при больших v

$$|\psi_v(t_0)| > \frac{|\gamma(t_0)|}{2|\lambda_v L'(\lambda_v)|}.$$

Отсюда все и следует.

4. Достаточные условия разложимости в случае кратных нулей.

Ранее предполагалось, что все нули функции $L(\lambda)$ — простые. Кроме того, на область D_1 , в которой устанавливалось разложение в ряд, накладывалось ограничение: $K_1(\varphi) > \frac{1}{2} K(\varphi)$. Приведем достаточные условия разложимости, но без этих ограничений.

Как и выше, считаем, что начало координат — внутренняя точка $\bar{D}$. Отсюда следует, что $h(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\lambda)$ всюду положительна. Верно и обратное заключение: если $h(\varphi) > 0$ всюду, то начало координат — внутренняя точка $\bar{D}$. Пусть D_1 — подобласть D , $K_1(\varphi)$ — ее опорная функция, $h_1(\varphi) = K_1(-\varphi)$. Очевидно, $h_1(\varphi) \leq h(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Теорема 4.6.8. Предположим, что имеются спрямляемые замкнутые кривые Γ_k ($k = 1, 2, \dots$), охватывающие начало координат, со следующими свойствами: 1) с каждым лучом $\arg t = \varphi$ кривая Γ_k пересекается в одной точке, $r_k = \min_{t \in \Gamma_k} |t| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$; 2) если $[a_k(\varphi), b_k(\varphi)]$ ($|a_k(\varphi)| < |b_k(\varphi)|$) — наибольший отрезок луча $\arg t = \varphi$, концевые точки которого удалены от Γ_k на расстояние, равное единице (этот отрезок пересекает Γ_k), то

$$\max_{0 \leq \varphi < 2\pi} \frac{b_k(\varphi)}{a_k(\varphi)} \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty, \quad (6.27)$$

а при условии (5.9)

$$|b_k(\varphi) - a_k(\varphi)| \leq H < \infty; \quad (6.28)$$

3) на кривых Γ_k имеют место оценки

$$|\ln |L(re^{i\varphi})|| > [h_1(\varphi) - \varepsilon_k] r, \quad re^{i\varphi} \in \Gamma_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Пусть $F(z)$ — функция, аналитическая в $\bar{D}$ (аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$ при дополнительном условии (5.9)). Тогда

$$\left| F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\omega_L(\mu, F) \mu^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu \right| < AS_k e^{-(\delta - \delta_k) r_k}, \quad (6.29)$$

$$z \in D_1, \quad \delta = \rho(z, \partial D_1) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где S_k — длина контура Γ_k и $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 4.6.2. Пусть $\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)$ — функция, которая для λ , лежащих внутри Γ_k , определена формулой

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{\lambda \mu} d\mu}{(\mu - \lambda) L(\mu)},$$

а для других λ определена как свое аналитическое продолжение. В условиях теоремы 4.6.8 имеет место оценка

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < B(\varepsilon) S_k e^{-(\delta - \delta_k) r_k} e^{|\lambda| |\varphi|}, \quad \varphi = \arg \lambda, \quad (6.30)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое, $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $z \in D_1$, $\delta = \rho(z, \partial D_1)$, а при условии (5.9) — оценка

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < BS_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} \frac{e^{h(\varphi) |\lambda|}}{|\lambda|^\mu}, \quad |\lambda| \geq 2 \quad (6.31)$$

при том же δ , где $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $z \in D_1$.

Для λ , принадлежащих отрезку $0 \leq |\lambda| \leq |a_k(\varphi)|$, $\arg \lambda = \varphi$, имеем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| \leq J_k |L(\lambda)|, \quad J_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu|.$$

Для λ , лежащих вне Γ_k ,

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\mu - \lambda) L(\mu)} + e^{\lambda z}$$

и, следовательно, для λ из отрезка $|b_k(\varphi)| \leq |\lambda| < \infty$, $\arg \lambda = \varphi$, $|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < J_k |L(\lambda)| + |e^{\lambda z}|$.

Оценим второе слагаемое. В силу (6.9), положив $\varphi = \arg \lambda$, имеем

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{[h(\varphi) - \delta] |\lambda|} = e^{h(\varphi) |\lambda|} e^{-\delta |\lambda|} \leq e^{-\delta r_k} e^{h(\varphi) |\lambda|}.$$

Оценим теперь величину J_k . Так как

$$|e^{\mu z}| \leq e^{[h(\varphi) - \delta] |\mu|}, \quad \varphi = \arg \mu,$$

то, в силу условия леммы, на Γ_k

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| \leq e^{-(\delta - \varepsilon_k) |\mu|}$$

и, значит,

$$J_k \leq S_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k}. \quad (6.32)$$

Таким образом,

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < S_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} |L(\lambda)| + e^{-\delta r_k} e^{h(\varphi) |\lambda|},$$

или, поскольку $h_1(\varphi) \leq h(\varphi)$ и

$$|L(\lambda)| < B(e) e^{[h(\varphi) + \varepsilon] |\lambda|},$$

$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| <$

$$< 2B(e) S_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} e^{[h(\varphi) + \varepsilon] |\lambda|}, \quad \lambda \in [a_k(\varphi), b_k(\varphi)]. \quad (6.33)$$

При условии (5.9)

$$|L(\lambda)| < A \frac{e^{h(\varphi) r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1, \quad (6.34)$$

получим оценку более точную, чем оценка (6.33). При $|\lambda| \geq |b_k(\varphi)|$

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{[h(\varphi) - \delta] |\lambda|} \leq e^{h(\varphi) |\lambda|} e^{-\delta |\lambda|}.$$

Поэтому при таких λ , на основании (6.32),

$$\begin{aligned} |\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| &\leq AS_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} \frac{e^{h(\varphi) |\lambda|}}{|\lambda|^\mu} + e^{h(\varphi) |\lambda|} e^{-\delta |\lambda|} = \\ &= \frac{e^{h(\varphi) |\lambda|}}{|\lambda|^\mu} \{ AS_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} + |\lambda|^\mu e^{-\delta |\lambda|} \}. \end{aligned}$$

Имеем

$$|\lambda|^\mu e^{-\delta |\lambda|} = \exp \left[\left(-\delta + \mu \frac{\ln |\lambda|}{|\lambda|} \right) |\lambda| \right].$$

Положим

$$\mu \max_{|\lambda| \geq r_k} \frac{\ln |\lambda|}{|\lambda|} = \varepsilon'_k, \quad \max(\varepsilon_k, \varepsilon'_k) = \bar{\varepsilon}_k.$$

Очевидно, $\bar{\varepsilon}_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Получаем

$$|\lambda|^\mu e^{-\delta |\lambda|} \leq \exp [(-\delta + \bar{\varepsilon}_k) r_k].$$

В силу этого,

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < 2AS_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} \frac{e^{h(\varphi) |\lambda|}}{|\lambda|^\mu}, \quad \lambda \in [a_k(\varphi), b_k(\varphi)]. \quad (6.35)$$

Ясно, что это неравенство верно при $|\lambda| \leq |a_k(\varphi)|$.

Осталось оценить функцию $\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)$ на отрезке $[a_k(\varphi), b_k(\varphi)]$. Пусть a_k^* и b_k^* — точки луча $\arg \lambda = \varphi$ такие, что $|a_k^*| = |a_k(\varphi)| - 1$, $|b_k^*| = |b_k(\varphi)| + 1$, и E_k — трапеция с осью $a_k^* b_k^*$ такая, что ее боковые стороны лежат на лучах, выходящих из начала координат, а меньшее основание (точка a_k^* — середина его) имеет длину, равную единице. Части контура Γ_k , из которых одна лежит вне трапеции, а другая внутри ее, обозначим соответственно Γ_k^* и Γ_k^* . Для λ , лежащих на отрезке $[a_k, b_k]$ и внутри Γ_k , имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, z, \Gamma_k) &= L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\mu - \lambda) L(\mu)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^*} \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{(\mu - \lambda) L(\mu)} e^{\mu z} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^*} \frac{e^{\mu z} d\mu}{\mu - \lambda} = A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Первые два интеграла имеют смысл для всех λ из $[a_k, b_k]$. В первом интеграле $|\mu - \lambda| \geq \frac{1}{2}$ для таких λ , и потому

$$|A_1| \leq 2 |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k^*} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| < 2J_k |L(\lambda)|, \quad \lambda \in [a_k, b_k]. \quad (6.36)$$

Оценим второй интеграл для $\lambda \in [a_k, b_k]$. Имеем

$$L(\mu) - L(\lambda) = \int_{\lambda}^{\mu} L'(t) dt,$$

откуда

$$\left| \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda} \right| \leq \max_{t \in E_k} |L'(t)| = |L'(t_k)|, \quad t_k \in E_k. \quad (6.37)$$

В силу условия (6.27), заключаем, что $t_k = \lambda + o(\lambda)$ при больших k . Теперь учтем, что индикатриса роста производной $L'(\lambda)$ равна $h(\varphi)$ — индикатрисе роста самой функции $L(\lambda)$. Поэтому

$$|L'(t_k)| < C(e) \exp\{|h(\varphi) + \varepsilon||\lambda|\}.$$

В силу всего этого, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$|A_2| < C(e) \exp\{|h(\varphi) + \varepsilon||\lambda|\} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_k} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| < C(e) J_k e^{h(\varphi) + \varepsilon} |\lambda|. \quad (6.38)$$

При условии (6.34) оценку выражения (6.37) проведем иначе. В этом случае имеет место оценка (1.24)

$$|L'(re^{i\varphi})| < B \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r > 0.$$

Пусть $\psi = \arg t_k$. На основании (1.23)

$$h(\psi)|t_k| \leq h(\varphi)|\lambda| + |t_k - \lambda| \max_{z \in \bar{D}} |z|.$$

Следовательно, поскольку, в силу условия (6.28), второе слагаемое меньше некоторого H_1 , то

$$\left| \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda} \right| < B_1 \frac{e^{h(\varphi)|\lambda|}}{|\lambda|^\mu}.$$

Отсюда

$$|A_2| < B_1 J_k \frac{e^{h(\varphi)|\lambda|}}{|\lambda|^\mu}. \quad (6.39)$$

Рассмотрим, наконец, третий интеграл A_3 . Нижнее основание трапеции E_k равно единице, верхнее основание при больших k , в силу (6.27), близко к единице. Отсюда, поскольку точки a'_k и b'_k удалены от Γ_k на расстояния, не меньшие единицы, заключаем, что кривая Γ_k не пересекает оснований трапеции при больших k . Пусть C_k — часть периметра трапеции,

отсекаемая кривой Γ_k , и лежащая вне Γ_k . Для λ , которые лежат внутри Γ_k на $[a_k, b_k]$, имеем

$$A_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{e^{\mu z}}{\mu - \lambda} d\mu.$$

Теперь правая часть имеет смысл (является аналитической функцией) для всех $\lambda \in [a_k, b_k]$. Здесь $|\mu - \lambda| \geq 1/2$, и потому

$$|A_3| \leq \frac{1}{\pi} \int_{C_k} |e^{\mu z}| |d\mu| \leq d_k \max_{\mu \in C_k} |e^{\mu z}| = d_k |e^{\mu_0 z}|, \quad \mu_0 \in C_k,$$

где d_k — длина контура C_k . В силу условия (6.27), имеем

$$d_k = o(\lambda), \quad \mu_0 = \lambda + o(\lambda),$$

кроме того, на основании (6.9)

$$|e^{\mu_0 z}| \leq e^{h(\varphi_0) - \delta} |\mu_0|, \quad \varphi_0 = \arg \mu_0.$$

Поэтому

$$d_k e^{h(\varphi_0) |\mu_0|} < C(e) e^{h(\varphi) + \varepsilon} |\lambda|.$$

Отметим еще, что

$$|\mu_0| \geq |a'_k| = \left| \frac{a'_k}{b'_k} \right| |b'_k| \geq \left| \frac{a'_k}{b'_k} \right| r_k, \quad \left| \frac{a'_k}{b'_k} \right| \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty,$$

откуда

$$e^{-\delta} |\mu_0| \leq e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k}, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Окончательно получаем

$$|A_3| < C(e) e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} e^{h(\varphi) + \varepsilon} |\lambda|. \quad (6.40)$$

При условии (6.34) воспользуемся неравенством (6.28). Получим, что величины d_k и $|\mu_0 - \lambda|$ — ограниченные. Имеем

$$|A_3| \leq d_k e^{h(\varphi_0) - \delta} |\mu_0|,$$

причем

$$h_1(\varphi_0) |\mu_0| \leq h(\varphi_0) |\mu_0| \leq h(\varphi) |\lambda| + |\mu_0 - \lambda| \max_{z \in \bar{D}} |z|.$$

В силу этого,

$$|A_3| < B_2 e^{h(\varphi) |\lambda|} e^{-\delta |\lambda|} = B_2 |\lambda|^\mu e^{-\delta |\lambda|} \frac{e^{h(\varphi) |\lambda|}}{|\lambda|^\mu}.$$

Но

$$|\lambda|^\mu e^{-\delta |\lambda|} \leq \exp[(-\delta + \varepsilon_k) |\lambda|], \quad \varepsilon_k = \mu \max_{|\lambda| \geq r_k - H} \frac{\ln |\lambda|}{|\lambda|}$$

(H взято из условия (6.28)). Поэтому, поскольку $|\lambda| \geq r_k$, находим

$$|A_3| < B_2 e^{-(\delta - \varepsilon_k) |\lambda|} \frac{e^{h(\varphi) |\lambda|}}{|\lambda|^{\mu}}, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.41)$$

На основании оценок (6.36), (6.38), (6.40), принимая также во внимание оценку (6.32), имеем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < K(\varepsilon) S_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} e^{[h(\varphi) + \varepsilon] |\lambda|}, \quad \lambda \in [a_k, b_k], \quad (6.42)$$

где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В силу (6.36), (6.39), (6.41), далее имеем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < K S_k e^{-(\delta - \varepsilon_k) r_k} \frac{e^{h(\varphi) |\lambda|}}{|\lambda|^{\mu}}, \quad \lambda \in [a_k, b_k]. \quad (6.43)$$

Из (6.33) и (6.42) получаем искомую оценку (6.30), из (6.35) и (6.43) — искомую оценку (6.31). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Имеем

$$\gamma(t, z, \Gamma_k) = \int_0^\infty \Phi(\lambda, z, \Gamma_k) e^{-\lambda t} d\lambda.$$

Отсюда, на основании оценки (6.30), находим, что на контуре C , который охватывает множество $\bar{D}$,

$$|\gamma(t, z, \Gamma_k)| < P S_k e^{-(\delta - \delta_k) r_k}, \quad t \in C.$$

На основании оценки (6.31)

$$|\gamma(t, z, \Gamma_k)| < P S_k e^{-(\delta - \delta_k) r_k}, \quad t \in \partial \bar{D}.$$

Из этих неравенств, основываясь на формуле (5.7) или (5.11), сразу получаем заключение теоремы.

Из теоремы следует, что если при любом $\delta > 0$ выполняется условие

$$S_k e^{-\delta r_k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (6.44)$$

то

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad z \in D_1, \quad (6.45)$$

причем сходимость внутри D_1 — равномерная.

В случае, когда Γ_k — окружность, условия теоремы (6.27) или (6.28), а также условие (6.44), конечно, выполняются.

Заметим, что если $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста, то всегда имеются окружности $|\lambda| = \rho_k$, $\rho_k \uparrow \infty$ (см. следствие 1 из теоремы 1.2.5 и замечание к теореме 1.4.2), на

которых

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r, \quad r = \rho_k, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

В этом случае, следовательно, в области D

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}, \quad z \in D.$$

Предположим, что при условиях теоремы дополнительно известно, что имеет место (6.44) и в каждом кольце между Γ_k и Γ_{k-1} имеется только один нуль — простой нуль функции $L(\lambda)$. Тогда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k z}, \quad z \in D_1. \quad (6.46)$$

Сделаем одно существенное замечание: не всегда имеются кривые Γ_k , которые удовлетворяют условиям теоремы и условию (6.44). В самом деле, когда выполняются условия теоремы и условие (6.44), имеет место в D_1 представление (6.45), которое в случае простых нулей λ_v имеет вид

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_v \in G_k} \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)} e^{\lambda_v z},$$

где G_k — область, ограниченная контуром Γ_k . Из этого, в частности, следует, что система $\{e^{\lambda_v z}\}$ в области D_1 полна. В § 4, п. 2 был приведен пример функции $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_v ($v = 1, 2, \dots$), для которой соответствующая область D — прямоугольник заданных размеров, а нули λ_v таковы, что система $\{e^{\lambda_v z}\}$ не полна ни в какой области. Для такой функции, следовательно, не существует кривых Γ_k с указанными выше свойствами. Тогда возникает вопрос, как можно восстановить функцию $F(z)$, если известны величины

$$\frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)} \quad (v = 1, 2, \dots).$$

В силу теоремы единственности, принципиальная возможность восстановления $F(z)$ по этим величинам имеется.

В заключение приведем достаточные условия представимости функции $F(z)$ именно рядом (6.46).

Теорема 4.6.9. Допустим, что функция $L(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) имеются окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$, на которых

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h_1(\varphi) - \varepsilon_k] r_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty;$$

2) все нули $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ функции $L(\lambda)$ — простые, число нулей в кольце $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ не превосходит некоторого фиксированного числа p , одного и того же для всех $k=2, 3, \dots$;

3) существует постоянная q такая, что $\frac{r_k}{r_{k-1}} < q$ ($k=2, 3, \dots$);

4) $|\lambda_m - \lambda_n| > e^{-\varepsilon r_k}$ ($\varepsilon > 0$ — любое) для любых различных λ_m и λ_n из кольца $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$, $k > K(\varepsilon)$.

Тогда в области D_1 функция $F(z)$, аналитическая в $\bar{D}$ (или аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$ при условии (6.34)), представляется рядом (6.46).

Пусть в кольце $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ расположены $\lambda_{n_{k-1}+1}, \dots, \lambda_{n_k}$. Положим

$$F_k(z) = \sum_{v=r}^k a_v e^{\lambda_v z}, \quad a_v = \frac{m_k(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)},$$

где

$$r = n_{k-1} + 1, \quad s = n_k, \quad s - r + 1 \leq p.$$

В рассматриваемых условиях, согласно теореме 4.6.8,

$$|F_k(z)| < e^{-\frac{\delta}{2} r_{k-1}}, \quad k > K_1(\delta), \quad \delta = \rho(z, \partial D_1). \quad (6.47)$$

Рассмотрим систему равенств

$$\begin{aligned} \sum_{v=r}^s a_v e^{\lambda_v z} &= F_k(z), \\ \sum_{v=r}^s \lambda_v a_v e^{\lambda_v z} &= F_k'(z), \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{v=r}^s \lambda_v^{s-r} a_v e^{\lambda_v z} &= F_k^{(s-r)}(z). \end{aligned}$$

Из нее находим

$$a_v e^{\lambda_v z} = \frac{\Delta_v}{\Delta}, \quad (6.48)$$

где Δ — определитель Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_r & \lambda_{r+1} & \dots & \lambda_s \\ \lambda_r^2 & \lambda_{r+1}^2 & \dots & \lambda_s^2 \\ \lambda_r^{s-r} & \lambda_{r+1}^{s-r} & \dots & \lambda_s^{s-r} \end{vmatrix}.$$

а

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} 1 & \dots & F_k(z) & \dots & 1 \\ \lambda_r & \dots & F_k'(z) & \dots & \lambda_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_r^{s-r} & \dots & F_k^{(s-r)}(z) & \dots & \lambda_s^{s-r} \end{vmatrix}. \quad (6.49)$$

Определитель Δ , представляя собой произведение разностей $(\lambda_m - \lambda_n)$, число которых не превосходит фиксированного числа $\frac{p(p-1)}{2}$, удовлетворяет условию

$$|\Delta| > e^{-\varepsilon r_k}, \quad k > K_1(\varepsilon). \quad (6.50)$$

Оценим определитель Δ_v . Из оценки (6.47), на основании формулы Коши

$$F_k^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|t-z|=\frac{\delta}{2}} \frac{F_k(t) dt}{(t-z)^{m+1}},$$

получаем

$$|F_k^{(m)}(z)| \leq m! \left(\frac{2}{\delta}\right)^m e^{-\frac{\delta}{4} r_{k-1}} < e^{-\frac{\delta}{8} r_{k-1}}, \quad k > K_2(\delta), \quad m \leq p.$$

Отсюда для определителя (6.49) находим оценку

$$|\Delta_v| < B r_k^p e^{-\frac{\delta}{8} r_{k-1}}, \quad \beta \leq \frac{p(p-1)}{2}. \quad (6.51)$$

Так как $r_k < q r_{k-1}$, то, в силу (6.50), (6.51), из равенства (6.48) имеем

$$|a_v e^{\lambda_v z}| < B q^p r_{k-1}^p \exp \left\{ -\left(\frac{\delta}{8} - \varepsilon q\right) r_{k-1} \right\}, \quad n_{k-1} + 1 \leq v \leq n_k. \quad (6.52)$$

При малом ε

$$\frac{\delta}{8} - \varepsilon q > \frac{\delta}{16}.$$

Предполагаем, что в кольце между Γ_{k-1} и Γ_k имеется по крайней мере один нуль функции $L(\lambda)$. Поэтому $r_{k-1} > |\lambda_{k-2}|$. Учтем еще, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} < \infty.$$

В силу изложенного, из оценки (6.52) усматриваем, что при достаточно большом N

$$\sum_{v=N}^{\infty} |a_v e^{\lambda_v z}| < p B q^p \sum_{k=2}^{\infty} r_{k-1}^p \exp \left\{ -\frac{\delta}{16} r_{k-1} \right\} < \infty$$

(в кольце $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ имеется не более p точек из $\{\lambda_k\}$). Значит, ряд сходится. Точка z здесь любая из области D_1 . Все доказано.

5. Асимптотическое поведение интерполирующей функции. Предположим, что функция $F(z)$ является аналитической на множестве $\bar{D}$, причем $\bar{D}$ может быть и отрезком. Получим представление функции

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \right) dt$$

при больших $|\mu|$. Напомним, что здесь C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$, на котором и внутри которого $F(t)$ — аналитическая функция.

Докажем следующую теорему.

Теорема 4.6.10. Пусть функция $F(z)$ регулярна на множестве $\bar{D}$. Возьмем выпуклый многоугольник G , который содержит в себе $\bar{D}$ и удовлетворяет еще условию: на $\bar{G}$ функция $F(z)$ является аналитической. Пусть $\arg z = -\alpha_k$ ($k=1, 2, \dots, p$) перпендикулярны сторонам многоугольника, а l_k ($k=1, 2, \dots, p$) — лучи $\arg z = \alpha_k$ (предполагаем, что переход от луча l_k к лучу l_{k+1} происходит по кратчайшему пути против часовой стрелки). Имеет место представление

$$\omega_L(\mu, F) = A(\mu) L(\mu) - B(\mu),$$

где $A(\mu)$ и $B(\mu)$ — мероморфные функции, полюсы которых асимптотически приближаются к лучам l_k ($k=1, 2, \dots, p$). Вне углов $|\arg(z - \alpha_k)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — любое, при $\mu \rightarrow \infty$

$$A(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\mu^{k+1}}, \quad A_k = F^{(k)}(0) \quad (k=0, 1, \dots),$$

$$B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}, \quad B_k = [M_L(F)]_0^{(k)} \quad (k=0, 1, \dots),$$

где

$$M_L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t+z) dt$$

при достаточно малых $|z|$.

Для доказательства положим

$$M(\mu) = \frac{P(\mu)}{Q(\mu)},$$

где

$$P(\mu) = \sum_{j=1}^p A_j e^{\gamma_j \mu}$$

(γ_j — вершины многоугольника G), а $Q(\mu)$ — многочлен (корни $Q(\mu)$ являются нулями $P(\mu)$), выбранный таким образом, чтобы все нули $M(\mu)$ были простыми. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots$ — нули $M(\mu)$, расположенные в порядке возрастания модулей. В п. 2 было установлено, что функция $M(\mu)$ удовлетворяет условиям разложения в ряд по системе $\{e^{\mu \gamma_j}\}$. Следовательно,

$$F(z) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s z}, \quad z \in G, \quad b_s = \frac{\omega_M(\mu_s, F)}{M'(\mu_s)}. \quad (6.53)$$

При $s \rightarrow \infty$ нули μ_s приближаются к лучам l_k ($\arg \mu_s \rightarrow \alpha_k$ при $s \rightarrow \infty$). Возьмем замкнутый выпуклый контур C так, чтобы он охватывал $\bar{D}$ и содержался бы в многоугольнике G . На C ряд (6.53) сходится равномерно. Поэтому

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \right) dt = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} b_s \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t e^{\mu_s(t-\xi)} e^{\mu\xi} d\xi \right) dt = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \frac{L(\mu) - L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Положим

$$A(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{\mu - \mu_s}, \quad B(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Убедимся, что эти ряды сходятся всюду, кроме точек μ_s ($s=1, 2, \dots$).

Ряд (6.53) равномерно сходится на контуре C . Поэтому

$$|b_s| < |e^{-\mu_s z}|, \quad z \in C, \quad s > s_0.$$

Пусть $K(\varphi)$ — опорная функция множества $\bar{D}$, $K_1(\varphi)$ — опорная функция множества, ограниченного контуром C . Имеем

$$0 \leq K(\varphi) < K_1(\varphi).$$

В силу предыдущего,

$$|b_s| < \exp\{-|\mu_s| \max_{z \in C} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi_s})\} = e^{-|\mu_s| K_1(-\varphi_s)},$$

$$\varphi_s = \arg \mu_s, \quad s > s_0. \quad (6.55)$$

Отсюда видно, что ряд, определяющий функцию $A(\mu)$, сходится всюду, кроме точек $\mu = \mu_s$, и представляет собой мероморфную функцию с простыми полюсами в точках μ_s . Изучим второй ряд. Имеем при больших s

$$|L(\mu_s)| < e^{[K(\varphi_s) + \varepsilon]|\mu_s|} = e^{[K(-\varphi_s) + \varepsilon]|\mu_s|}, \quad s > s_1(\varepsilon).$$

Отсюда, принимая во внимание оценку (6.55), находим

$$|b_s L(\mu_s)| < \exp\{-[K_1(-\varphi_s) - K(-\varphi_s) - \varepsilon]|\mu_s|\}, \quad s > \max(s_0, s_1).$$

При малом ε квадратная скобка больше ε и, значит,

$$|b_s L(\mu_s)| < e^{-\varepsilon|\mu_s|}, \quad s > \max(s_0, s_1). \quad (6.56)$$

Ряд, определяющий функцию $B(\mu)$, сходится всюду, кроме точек $\mu = \mu_s$, и представляет собой мероморфную функцию с простыми полюсами в точках μ_s .

Найдем асимптотику функций $A(\mu)$ и $B(\mu)$ вне углов $|\arg(\mu - \alpha_k)| < \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, p$) при больших $|\mu|$. Поскольку при больших s аргумент μ_s близок к одному из α_k , то вне указанных углов

$$|\mu - \mu_s| > \alpha|\mu|, \quad \alpha > 0, \quad |\mu| > r_0(\varepsilon). \quad (6.57)$$

Имеем

$$\frac{1}{\mu - \mu_s} = \sum_{k=0}^n \frac{\mu_s^k}{\mu^{k+1}} + \left(\frac{\mu_s}{\mu}\right)^{n+1} \frac{1}{\mu - \mu_s}.$$

На основании этого

$$A(\mu) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{\mu^{k+1}} + A_n(\mu),$$

где

$$A_k = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^k, \quad A_n(\mu) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{s=1}^{\infty} b_s \frac{\mu_s^{n+1}}{\mu - \mu_s}.$$

Аналогично получаем

$$B(\mu) = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{\mu^{k+1}} + B_n(\mu),$$

где

$$B_k = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^k L(\mu_s), \quad B_n(\mu) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^{n+1} \frac{L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

В силу (6.55), (6.56) и (6.57), при больших $|\mu|$

$$|A_n(\mu)| < \frac{C_n}{|\mu|^{n+1}}, \quad |B_n(\mu)| < \frac{C'_n}{|\mu|^{n+1}},$$

где C_n и C'_n — некоторые постоянные. Следовательно,

$$A(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\mu^{k+1}}, \quad B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}.$$

Дифференцируя ряд (6.53), получим

$$F^{(k)}(z) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^k e^{\mu_s z},$$

откуда

$$A_k = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^k = F^{(k)}(0) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

На основании (6.53), далее, имеем (при малых $|z|$)

$$M_L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t+z) dt = \sum_{s=1}^{\infty} b_s L(\mu_s) e^{\mu_s z},$$

в силу чего

$$B_k = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^k L(\mu_s) = [M_L(F)]_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Осталось заметить, принимая во внимание (6.54), что

$$\omega_L(\mu, F) = A(\mu)L(\mu) - B(\mu).$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Вместо квазиполинома $P(\mu)$ можно было бы взять при четном p функцию из теоремы 1.2.11, а при нечетном p функцию из теоремы 1.2.12. У этих функций нули расположены в точности на лучах l_k ($k = 1, 2, \dots, p$). Таким образом, в теореме 4.6.10 можно при необходимости считать, что все полюсы функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$ расположены на лучах l_k .

Замечание 2. В некоторых вопросах необходимо иметь оценки функций $A(\mu)$ и $B(\mu)$. Получим их. Для этого найдем оценку для коэффициента b_s из разложения (6.53).

Пусть $\{\psi_s(t)\}$ — система, биортогональная к системе $\{e^{\mu_s z}\}$. Функции $\psi_s(t)$ аналитичны вне многоугольника $\bar{G}$ и непрерывны до границы $\partial\bar{G}$. На $\partial\bar{G}$ выполняется неравенство (1.28)

$$|\psi_s(t)| < \frac{A_0}{|M'(\mu_s)|}, \quad t \in \partial\bar{G}.$$

Имеем

$$b_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} F(t) \psi_s(t) dt \quad (s \geq 1).$$

Отсюда

$$|b_s| < \frac{A_1}{|M'(\mu_s)|} \max_{t \in \partial G} |F(t)| \quad (s \geq 1),$$

где A_1 не зависит от $F(z)$, а зависит от многоугольника G и выбора функции $M(\mu)$. Пусть μ лежит вне углов

$$K_m: |\arg(\mu - \alpha_m)| < \varepsilon \quad (m = 1, 2, \dots, p).$$

При больших $|\mu|$ тогда выполняется условие (6.57). Для таких μ получаем

$$|B(\mu)| \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|b_s L(\mu_s)|}{|\mu - \mu_s|} \leq \frac{A_1}{|\mu|} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{L(\mu_s)}{M'(\mu_s)} \right| \right) \max_{t \in \partial G} |F(t)|.$$

Для $|M'(\mu_s)|$ имеем по теореме 1.2.10 следующую оценку снизу:

$$|M'(\mu_s)| > B e^{[h_1(\varphi_s) - \varepsilon] |\mu_s|}, \quad h_1(\varphi) = K_1(-\varphi).$$

Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{L(\mu_s)}{M'(\mu_s)} \right| < B_1 \sum_{s=1}^{\infty} e^{[h_1(\varphi_s) + 2\varepsilon - h_1(\varphi_s)] |\mu_s|}.$$

При малом $\varepsilon > 0$ выражение в квадратных скобках отрицательно, в силу чего ряд сходится. Поэтому для больших $|\mu|$, когда μ лежит вне углов K_m ,

$$|B(\mu)| < \frac{A}{|\mu|} \max_{t \in \partial G} |F(t)|.$$

Еще проще получается оценка для $A(\mu)$. Она имеет тот же вид:

$$|A(\mu)| < \frac{A}{|\mu|} \max_{t \in \partial G} |F(t)|.$$

Здесь константа A не зависит от $F(t)$, она зависит от многоугольника G , выбора функции $M(\mu)$ и выбора углов K_m .

§ 7. Представление аналитических функций в замкнутой области рядами Дирихле

Пусть начало координат лежит в D . От функции будем требовать, чтобы она была аналитической в D и непрерывной вместе со всеми производными до определенного порядка в $\bar{D}$.

В качестве функции $L(\lambda)$ возьмем функцию вида

$$L(\lambda) = \int_C e^{\lambda t} d\sigma(t), \quad C = \partial \bar{D}, \quad (7.1)$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на C . Пусть $a \in C$. Для общности будем считать, что в (7.1) интегрирование происходит от точки a по контуру C (против часовой стрелки) до точки a , так что в точке a функция $\sigma(t)$ может иметь два значения (одно — до обхода, другое — после обхода).

Возьмем для примера квазиполином

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^p A_j e^{\gamma_j \lambda},$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ — вершины выпуклого многоугольника G . Пусть a — какая-нибудь внутренняя точка на стороне $[\gamma_1, \gamma_2]$. Возьмем функцию $\sigma(t)$. Предположим, что она равна нулю на участке $[a, \gamma_2]$, A_2 — на участке $(\gamma_2, \gamma_3]$, $A_2 + A_3$ — на участке $(\gamma_3, \gamma_4]$, $A_2 + A_3 + \dots + A_p + A_1$ — на участке $(\gamma_p, a]$. Тогда

$$P(\lambda) = \int_{\partial G} e^{\lambda t} d\sigma(t),$$

причем интегрирование надо производить от точки a . Если $A_1 + \dots + A_p = 0$, функция $\sigma(t)$ всюду однозначна и в этом случае безразлично, от какой точки начинать интегрирование.

1. Построение биортогональной системы. В случае (7.1) интерполирующая функция была введена формулой

$$\omega_L(\mu, F) = \int_C d\sigma(t) \left(\int_0^1 F(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi \right).$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — нули $L(\lambda)$, и пусть все они — простые. Тогда функции $F(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)}. \quad (7.2)$$

Нам удобнее коэффициенты a_k определять посредством системы функций, биортогональной к системе $\{e^{\lambda_k z}\}$. Построим эту систему, рассуждения при этом будут аналогичны соответствующим рассуждениям из § 1. Имеем

$$L(\lambda_k) = \int_C e^{\lambda_k t} d\sigma(t) = 0 \quad (k \geq 1). \quad (7.3)$$

Запишем равенство

$$L(\lambda) = \int_C e^{(\lambda - \lambda_k)t} e^{\lambda_k t} d\sigma(t)$$

и положим

$$v_k(t) = \int_{\alpha_k}^t e^{\lambda_k \xi} d\sigma(\xi), \quad \alpha_k \in C.$$

Функция $v_k(t)$ определена на C , однозначна, в силу (7.3), на C и имеет на C ограниченную вариацию. Методом интегрирования по частям находим

$$L(\lambda) = e^{(\lambda - \lambda_k)t} v_k(t) \Big|_C - (\lambda - \lambda_k) \int_C e^{(\lambda - \lambda_k)t} v_k(t) dt.$$

В силу однозначности функции $v_k(t)$, подстановка равна нулю. Поэтому

$$\frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} = \int_C e^{\lambda_k t} \psi_k(t) dt, \quad (7.4)$$

где

$$\psi_k(t) = -\frac{1}{L'(\lambda_k)} e^{-\lambda_k t} \int_{\alpha_k}^t e^{\lambda_k \xi} d\sigma(\xi). \quad (7.5)$$

Функции $\psi_k(t)$ ($k \geq 1$) определены и однозначны на C и имеют ограниченную вариацию на C . Из (7.4) получаем

$$\int_C e^{\lambda_m t} \psi_k(t) dt = \delta_{m,k} \quad (m \geq 1; k \geq 1).$$

Система $\{\psi_k(t)\}$ — искомая биортогональная система.

Функции $F(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, сопоставим ряд

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad (7.6)$$

где

$$a_k = \int_C F(t) \psi_k(t) dt \quad (k \geq 1). \quad (7.7)$$

Убедимся, что ряды (7.2) и (7.6) — одинаковые. Для функции $F(z) = e^{\lambda z}$

$$\frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)} = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)},$$

$$\int_C F(t) \psi_k(t) dt = \int_C e^{\lambda t} \psi_k(t) dt = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)}.$$

и значит, указанные ряды совпадают. В общем случае совпадение рядов вытекает из того, что функцию $F(z)$, аналитическую в D и непрерывную в $\bar{D}$, можно равномерно приблизить в $\bar{D}$ с любой точностью линейными комбинациями экспонент.

Итак, нам предстоит исследовать ряд (7.6), где коэффициенты определены формулой (7.7).

В формуле (7.5) величины α_k ($\alpha_k \in C$) до сих пор были произвольны. Теперь выберем их специальным образом.

Пусть $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, и пусть l_1 — опорная прямая к области $\bar{D}$, перпендикулярная лучу $\arg t = -\varphi_k$, а l_2 — опорная прямая к области $\bar{D}$, перпендикулярная продолжению указанного луча (при повороте на угол φ_k прямые l_1 и l_2 перейдут в вертикальные прямые l'_1 и l'_2 , причем l'_1 будет правее прямой l'_2). За α_k возьмем какую-нибудь точку контура C (если их несколько), лежащую на опорной прямой l_2 . Убедимся, что при таком выборе

$$\left| e^{-\lambda_k t} \int_{\alpha_k}^t e^{\lambda_k \xi} d\sigma(\xi) \right| \leq V \quad (k \geq 1), \quad V = \int_C |d\sigma(\xi)|. \quad (7.8)$$

Пусть β_k — какая-нибудь точка C , лежащая на опорной прямой l_1 . Точки α_k и β_k разделяют контур C на две части C_1 и C_2 (переход от α_k к β_k против часовой стрелки пусть совершается по дуге C_1 , а переход от α_k к β_k по часовой стрелке — по дуге C_2).

Пусть сначала $t \in C_1$. Имеем

$$e^{-\lambda_k t} \int_{\alpha_k}^t e^{\lambda_k \xi} d\sigma(\xi) = \int_{\alpha_k}^t e^{|\lambda_k|(\xi - t)e^{i\varphi_k}} d\sigma(\xi)$$

(точка ξ пробегает путь от α_k до t по дуге C_1 против часовой стрелки). Предположим, что Γ — кривая, получаемая из C поворотом последней на угол φ_k . Очевидно, точка $\alpha_k e^{i\varphi_k}$ (она лежит на прямой l'_2) — самая левая точка Γ , а точка $\beta_k e^{i\varphi_k}$ — самая правая точка Γ . Они делят Γ на нижнюю часть Γ_1 и верхнюю часть Γ_2 . Дуга Γ_1 есть образ C_1 при повороте на угол φ_k . Имея это в виду, рассмотрим выражение

$$(\xi - t) e^{i\varphi_k} = \xi e^{i\varphi_k} - t e^{i\varphi_k} = \xi_1 - t_1.$$

Точки ξ_1 и t_1 лежат на Γ_1 , причем точка ξ_1 лежит левее точки t_1 . Поэтому $0 \geq \operatorname{Re}(\xi_1 - t_1)$, в силу чего

$$\left| \int_{\alpha_k}^t e^{|\lambda_k|(\xi - t)e^{i\varphi_k}} d\sigma(\xi) \right| \leq V.$$

Пусть теперь $t \in C_2$. В силу (7.3), интеграл

$$\int_{\alpha_k}^t e^{\lambda_k \xi} d\sigma(\xi)$$

(точка ξ пробегает путь от α_k до t по дуге C_1 против часовой стрелки) равен аналогичному интегралу, в котором точка ξ пробегает путь от α_k до t по дуге C_2 по часовой стрелке. Поэтому в силу аналогичных рассуждений опять получим оценку (7.8).

Оценка (7.8) полностью установлена.

2. Оценка коэффициентов. Из оценки (7.8), на основании формулы (7.7), получаем

$$|a_k| \leq \frac{V}{|L'(\lambda_k)|} \max_{t \in C} |F(t)|, \quad k \geq 1. \quad (7.9)$$

Оценка для коэффициентов a_k будет лучше, чем оценка (7.9), если допустить, что функция $F(z)$ имеет непрерывную производную $F'(z)$ в $\bar{D}$ и удовлетворяет условию

$$\int_C F(t) d\sigma(t) = 0. \quad (7.10)$$

Чтобы убедиться в этом, установим равенство (для $\lambda_k \neq 0$)

$$\int_C F(t) \psi_k(t) dt = \frac{1}{\lambda_k} \int_C F'(t) \psi_k(t) dt - \frac{1}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \int_C F(t) d\sigma(t). \quad (7.11)$$

Оно легко проверяется для $F(t) = e^{\lambda t}$. В самом деле, левая часть в этом случае имеет вид

$$\int_C e^{\lambda t} \psi_k(t) dt = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}.$$

а правая часть — вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_k} \int_C e^{\lambda t} \psi_k(t) dt - \frac{1}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \int_C e^{\lambda t} d\sigma(t) = \\ = \frac{\lambda}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} - \frac{L(\lambda)}{\lambda_k L'(\lambda_k)}. \end{aligned}$$

Они равны. В общем случае поступим следующим образом. Возьмем какую-нибудь систему $\{e^{\mu_k z}\}$, полную во всей плоскости. Тогда имеются такие $\alpha_{m,k}$ и ρ_m , что равномерно в $\bar{D}$

$$F(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \alpha_{m,k} e^{\mu_k t}, \quad \mu_0 = 0, \alpha_{m,0} = 0. \quad (7.12)$$

Интегрируя от 0 до t , получим, что равномерно в $\bar{D}$

$$F(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \beta_{m,k} e^{\mu_k t}, \quad \beta_{m,0} = F(0) - \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{m,k}}{\mu_k},$$

$$\beta_{m,k} = \frac{\alpha_{m,k}}{\mu_k} \quad (k \geq 1).$$

Формула (7.12) может быть получена теперь из последней формулы путем дифференцирования. На основании этого, учитывая, что (7.11) верно для функций $e^{\mu_k t}$, $k \geq 1$, и функции, тождественно равной единице, заключаем, что (7.11) верно и для функции $F(t)$, имеющей непрерывную производную в $\bar{D}$. Из формулы (7.11), учитывая (7.8) и (7.10), получаем

$$|a_k| \leq \frac{V}{|\lambda_k L'(\lambda_k)|} \max_{t \in C} |F'(t)| \quad (k \geq 1),$$

а учитывая (7.8), но не учитывая (7.10), находим

$$|a_k| \leq \frac{V}{|\lambda_k L'(\lambda_k)|} (\max_{t \in C} |F(t)| + \max_{t \in C} |F'(t)|) \quad (k \geq 1). \quad (7.13)$$

Если функция $F(z)$ имеет две непрерывные производные $F'(z)$ и $F''(z)$ в $\bar{D}$ и удовлетворяет условию (7.10), то по доказанному

$$\int_C F'(t) \psi_k(t) dt = \frac{1}{\lambda_k} \int_C F''(t) \psi_k(t) dt - \frac{1}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \int_C F'(t) d\sigma(t),$$

в силу чего, учитывая (7.11), имеем

$$\int_C F(t) \psi_k(t) dt = \frac{1}{\lambda_k} \int_C F''(t) \psi_k(t) dt - \frac{1}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \int_C F'(t) d\sigma(t)$$

и, значит,

$$|a_k| \leq \frac{V}{|\lambda_k L'(\lambda_k)|} (\max_{t \in C} |F''(t)| + \max_{t \in C} |F'(t)|) \quad (k \geq 1). \quad (7.14)$$

В общем случае получим, что если функция $F(z)$ имеет в $\bar{D}$ непрерывные производные $F^{(s)}(z)$ ($1 \leq s \leq m$), причем

$$\int_C F^{(s)}(t) d\sigma(t) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, m-2), \quad (7.15)$$

то (применяем несколько раз формулу (7.11))

$$\int_C F(t) \psi_k(t) dt = \frac{1}{\lambda_k^m} \int_C F^{(m)}(t) \psi_k(t) dt - \frac{1}{\lambda_k^m L'(\lambda_k)} \int_C F^{(m-1)}(t) d\sigma(t),$$

откуда

$$|a_k| \leq \frac{V}{|\lambda_k^m L'(\lambda_k)|} \left(\max_{t \in C} |F^{(m-1)}(t)| + \max_{t \in C} |F^{(m)}(t)| \right) \quad (\lambda_k \neq 0). \quad (7.16)$$

Теорема 4.7.1. Пусть функция $F(z)$ имеет в $\bar{D}$ непрерывные производные $F^{(s)}(z)$ ($1 \leq s \leq m$), и пусть выполняются условия (7.15). Тогда для коэффициентов ряда (7.6) имеет место оценка (7.16).

3. Условия абсолютной сходимости ряда в замкнутой области.

Теорема 4.7.2. Для того чтобы ряд (7.6) сходилась абсолютно в $\bar{D}$, какова бы ни была функция $F(z)$, аналитическая в D и непрерывная вместе с производными $F'(z)$ и $F''(z)$ в $\bar{D}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_C F(t) d\sigma(t) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \right| < \infty \quad (7.17)$$

(если $\lambda_1 = 0$, суммирование начинается с $k=2$). Если ряд (7.17) вдобавок равномерно сходится в $\bar{D}$, то и ряд (7.6) равномерно сходится в $\bar{D}$.

Достаточность условия (7.17) непосредственно следует из оценки (7.14). Докажем его необходимость. Допустим, что для любой функции $F(z)$, аналитической в D , имеющей две первые производные, непрерывные в $\bar{D}$, и удовлетворяющей условию (7.10), соответствующий ряд (7.6) сходится абсолютно в $\bar{D}$. Возьмем линейную функцию (пусть $L(0) \neq 0$)

$$\varphi(t) = \alpha + t, \quad \alpha = -\frac{L'(0)}{L(0)}.$$

Для нее

$$\int_C \varphi(t) d\sigma(t) = 0$$

и

$$a_k = \int_C (\alpha + t) \psi_k(t) dt \quad (k \geq 1).$$

Согласно (7.4),

$$\int_C \psi_k(t) dt = -\frac{L(0)}{\lambda_k L'(\lambda_k)},$$

$$\int_C t \psi_k(t) dt = \left\{ \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} \right\}_{\lambda=0} = -\frac{L(0) + \lambda_k L'(0)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)}$$

и, значит,

$$a_k = -\frac{L(0)}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \quad (k \geq 1).$$

Поэтому ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{L(0) e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^2 L'(\lambda_k)} \right|$$

сходится в $\bar{D}$. Следовательно, условие (7.17) выполняется. Теорема доказана.

Замечание. Верно утверждение: если какой-либо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}$$

абсолютно сходится в точках $z_1, z_2, \dots, z_m$ границы C , то он абсолютно и равномерно сходится в замкнутом многоугольнике $\bar{P}$ с вершинами в указанных точках.

Из этого следует, что ряд (7.17) равномерно сходится в любом замкнутом многоугольнике, вписанном в кривую C . В том случае, когда $\bar{D}$ — многоугольная область, ряд (7.17) равномерно сходится в $\bar{D}$.

Докажем высказанное утверждение. Сначала убедимся, что из абсолютной сходимости ряда в точках z_1 и z_2 следует его абсолютная и равномерная сходимости на отрезке с концами в z_1 и z_2 . Произвольная точка z этого отрезка представляется в виде

$$z = \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Воспользуемся неравенством

$$a^x b^{1-x} < a + b, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

положив в нем

$$a = |b_k e^{\lambda_k z_1}|, \quad b = |b_k e^{\lambda_k z_2}|, \quad x = \alpha.$$

Будем предполагать, что ряд (7.17) равномерно сходится в $\bar{D}$ и ряд (7.6) сходится к своей функции $F(z)$. Рассмотрим ряд (7.18), соответствующий функции $e^{\lambda z}$. Имеем

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_k} = - \sum_{m=0}^{s-1} \frac{\lambda^m}{\lambda_k^{m+1}} + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \left(\frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^s,$$

в силу чего

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^s L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^{s+1} L'(\lambda_k)} - \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^{m+1} L'(\lambda_k)} \right). \end{aligned}$$

Запишем равенство

$$L'(\lambda_k) \int_C t^n \psi_k(t) dt = \left\{ \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)} \right\}_{\lambda=\lambda_k}^{(n)} = - \sum_{p=0}^n C_p^n \frac{p!}{\lambda_k^{p+1}} L^{(n-p)}(0),$$

из которого, полагая $n=0, 1, \dots, m$, получим систему равенств

$$\begin{aligned} L'(\lambda_k) \int_C \psi_k(t) dt &= - \frac{L(0)}{\lambda_k}, \\ L'(\lambda_k) \int_C t \psi_k(t) dt &= - \frac{L'(0)}{\lambda_k} - \frac{L(0)}{\lambda_k^2}, \\ &\dots \\ L'(\lambda_k) \int_C t^m \psi_k(t) dt &= - \frac{L^{(m)}(0)}{\lambda_k} - \dots - \frac{m! L(0)}{\lambda_k^{m+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\frac{1}{\lambda_k^{m+1} L'(\lambda_k)} = \int_C P_m(t) \psi_k(t) dt,$$

где $P_m(t)$ — многочлен степени m (он не зависит от k). На основании полученного равенства ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^s L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^{s+1} L'(\lambda_k)}$$

соответствует функции

$$e^{\lambda z} + \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) P_m(z).$$

При $s \geq 1$ эта функция удовлетворяет условию (7.10). Тогда, согласно предположению,

$$e^{\lambda z} + \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) P_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^s L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^{s+1} L'(\lambda_k)}, \quad z \in \bar{D}.$$

Вне кружков K_m : $|\lambda - \lambda_m| < \lambda_m^{-h}$, $h > 1$ ($m \geq 1$), при $s \geq h+2$ получаем для $z \in \bar{D}$:

$$\left| e^{\lambda z} + \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) P_m(z) \right| \leq |\lambda^s L(\lambda)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^h}{|\lambda_k^{s+1} L'(\lambda_k)|} \leq C |\lambda^s L(\lambda)|,$$

где C — постоянная. Отсюда выводим

$$|e^{\lambda z}| \leq \sum_{m=0}^{s-1} |\lambda^m L(\lambda) P_m(z)| + C |\lambda^s L(\lambda)| \leq C_1 |\lambda^s L(\lambda)|,$$

$$|\lambda| \geq 1, \quad z \in \bar{D},$$

или

$$|L(\lambda)| \geq C_1^{-1} \left| \frac{e^{\lambda z}}{\lambda^s} \right|.$$

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$. Так как

$$\max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = h(\varphi),$$

то имеется точка $z_0 \in \bar{D}$, в которой $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = h(\varphi)$. Положив в последнем неравенстве $z = z_0$, получим искомую оценку

$$|L(re^{i\varphi})| \geq C_1^{-1} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^s}, \quad r \geq 1, \quad \lambda \notin K_m \quad (m \geq 1).$$

В случае многоугольной области из условия (7.17) вытекает равномерная сходимость ряда (7.17) в $\bar{D}$. Поэтому в указанном случае при условии (7.17) и при том условии, что ряд (7.6) сходится к своей функции $F(z)$, имеет место оценка (7.19).

З а м е ч а н и е 2. Если ряд (7.6) равномерно сходится к своей функции $F(z)$ в замкнутой области $\bar{D}$, то

$$\int_{\bar{D}} F(t) d\sigma(t) = 0.$$

Тогда получим

$$|b_k e^{\lambda_k z}| = a^a b^{1-a} < a + b = |b_k e^{\lambda_k z_1}| + |b_k e^{\lambda_k z_2}|,$$

откуда

$$\sum_{k=n}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z}| < \sum_{k=n}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z_1}| + \sum_{k=n}^{\infty} |b_k e^{\lambda_k z_2}|,$$

и, значит, ряд, составленный из модулей, равномерно сходится на отрезке с концами в z_1 и z_2 . Аналогично установим, что ряд равномерно сходится на всех сторонах многоугольника P , следовательно, он равномерно сходится на всей границе P . Отсюда заключаем, что он равномерно сходится в $\bar{P}$.

Заметим, что условие (7.17) сильнее условия (6.21).

4. Условие сходимости ряда к своей функции. Выясним, при каких дополнительных условиях ряд (7.6) сходится к своей функции $F(z)$.

Теорема 4.7.3. Для того чтобы ряд (7.6) сходилась абсолютно в $\bar{D}$ и сходилась к своей функции $F(z)$, какова бы ни была функция $F(z)$, аналитическая в D , непрерывная с производными $F'(z)$ и $F''(z)$ в $\bar{D}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_{\bar{C}} F(t) d\sigma(t) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $L(\lambda)$ была функцией вполне регулярного роста и выполнялось условие (7.17).

Пусть выполнено условие (7.17), и пусть $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста. Тогда выполнено условие (6.21) и по теореме 4.6.5 имеем

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D.$$

Убедимся, что это равенство имеет место в $\bar{D}$. Возьмем произвольную точку z_0 на границе C , а затем две другие z_1 и z_2 на C так, чтобы они образовывали треугольник $\bar{P}$ (не лежали на одной прямой). Из абсолютной сходимости ряда (7.6) в точках z_0, z_1, z_2 следует (см. замечание к теореме 4.7.2) его равномерная сходимость в $\bar{P}$. Следовательно, сумма ряда (7.6) непрерывна в $\bar{P}$. Поскольку она равна $F(z)$ внутри P , а $F(z)$ непрерывна в $\bar{D}$, в частности, непрерывна в $\bar{P}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z_0} = F(z_0).$$

Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. Пусть ряд (7.6) сходится абсолютно в $\bar{D}$ и сходится к $F(z)$. Тогда выполнено условие (7.17). Надо еще показать, что $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста. Поскольку

$$e^{\lambda z} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}, \quad (7.18)$$

$$1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(0)}{\lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)},$$

то

$$e^{\lambda z} - A \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)}, \quad A = \frac{L(\lambda)}{L(0)}.$$

Имеем

$$\int_{\bar{C}} (e^{\lambda t} - A) d\sigma(t) = 0.$$

Поэтому

$$e^{\lambda z} - A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)}, \quad z \in D$$

(это равенство верно и в $\bar{D}$). Дифференцируя его по z и сокращая на λ , получим

$$e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}, \quad z \in D.$$

Это условие — условие (6.8). По теореме 4.6.2 оно достаточно, чтобы любая функция, аналитическая в $\bar{D}$, разлагалась в D в соответствующий ряд Дирихле. Но тогда по теореме 4.6.4 функция $L(\lambda)$ должна быть функцией вполне регулярного роста. Теорема доказана.

Замечание 1. Покажем, что если ряд (7.17) равномерно сходится в $\bar{D}$ и ряд (7.6) сходится к своей функции $F(z)$ в $\bar{D}$, то вне кружков

$$K_m: |\lambda - \lambda_m| < |\lambda_m|^{-h}, \quad h > 1 \quad (m \geq 1),$$

функция $L(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$|L(re^{i\varphi})| > C \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^s}, \quad (7.19)$$

$$C > 0, \quad s \geq h + 2, \quad h(\varphi) = K(-\varphi), \quad r \geq 1,$$

где $K(\varphi)$ — опорная функция области $\bar{D}$ и s — целое.

Будем предполагать, что ряд (7.17) равномерно сходится в $\bar{D}$ и ряд (7.6) сходится к своей функции $F(z)$. Рассмотрим ряд (7.18), соответствующий функции $e^{\lambda z}$. Имеем

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_k} = - \sum_{m=0}^{s-1} \frac{\lambda^m}{\lambda_k^{m+1}} + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} \left(\frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^s.$$

в силу чего

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^s L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^s L'(\lambda_k)} - \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^{m+1} L'(\lambda_k)} \right).$$

Запишем равенство

$$L'(\lambda_k) \int_C t^n \psi_k(t) dt = \left\{ \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)} \right\}_{\lambda=\lambda_k}^{(n)} = - \sum_{p=0}^n C_p \frac{p!}{\lambda_k^{p+1}} L^{(n-p)}(0),$$

из которого, полагая $n=0, 1, \dots, m$, получим систему равенств

$$\begin{aligned} L'(\lambda_k) \int_C \psi_k(t) dt &= - \frac{L(0)}{\lambda_k}, \\ L'(\lambda_k) \int_C t \psi_k(t) dt &= - \frac{L'(0)}{\lambda_k} - \frac{L(0)}{\lambda_k^2}, \\ &\dots \\ L'(\lambda_k) \int_C t^m \psi_k(t) dt &= - \frac{L^{(m)}(0)}{\lambda_k} - \dots - \frac{m! L(0)}{\lambda_k^{m+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда найдем

$$\frac{1}{\lambda_k^{m+1} L'(\lambda_k)} = \int_C P_m(t) \psi_k(t) dt,$$

где $P_m(t)$ — многочлен степени m (он не зависит от k). На основании полученного равенства ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^s L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^s L'(\lambda_k)}$$

соответствует функции

$$e^{\lambda z} + \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) P_m(z).$$

При $s \geq 1$ эта функция удовлетворяет условию (7.10). Тогда, согласно предположению,

$$e^{\lambda z} + \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) P_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^s L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k^s L'(\lambda_k)}, \quad z \in \bar{D}.$$

Вне кружков K_m : $|\lambda - \lambda_m| < \lambda_m^{-h}$, $h > 1$ ($m \geq 1$), при $s \geq h + 2$ получаем для $z \in \bar{D}$:

$$\left| e^{\lambda z} + \sum_{m=0}^{s-1} \lambda^m L(\lambda) P_m(z) \right| \leq |\lambda^s L(\lambda)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^h}{|\lambda_k L'(\lambda_k)|} \leq C |\lambda^s L(\lambda)|,$$

где C — постоянная. Отсюда выводим

$$|e^{\lambda z}| \leq \sum_{m=0}^{s-1} |\lambda^m L(\lambda) P_m(z)| + C |\lambda^s L(\lambda)| \leq C_1 |\lambda^s L(\lambda)|,$$

$$|\lambda| \geq 1, \quad z \in \bar{D},$$

или

$$|L(\lambda)| \geq C_1^{-1} \left| \frac{e^{\lambda z}}{\lambda^s} \right|.$$

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$. Так как

$$\max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = h(\varphi),$$

то имеется точка $z_0 \in \bar{D}$, в которой $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = h(\varphi)$. Положив в последнем неравенстве $z = z_0$, получим искомую оценку

$$|L(re^{i\varphi})| \geq C_1^{-1} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^s}, \quad r \geq 1, \quad \lambda \notin K_m \quad (m \geq 1).$$

В случае многоугольной области из условия (7.17) вытекает равномерная сходимости ряда (7.17) в $\bar{D}$. Поэтому в указанном случае при условии (7.17) и при том условии, что ряд (7.6) сходится к своей функции $F(z)$, имеет место оценка (7.19).

Замечание 2. Если ряд (7.6) равномерно сходится к своей функции $F(z)$ в замкнутой области $\bar{D}$, то

$$\int_C F(t) d\sigma(t) = 0.$$

Действительно, имеем

$$\int_C F(t) d\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_C e^{\lambda_k t} d\sigma(t) = 0,$$

ибо

$$\int_C e^{\lambda_k t} d\sigma(t) = L(\lambda_k) = 0.$$

Отсюда следует, что условие (7.10), накладываемое на функцию $F(z)$, является необходимым для того, чтобы $F(z)$ можно было представить в $\bar{D}$ равномерно сходящимся в $\bar{D}$ рядом (7.6).

Замечание 3. Пусть функция $F(z)$ регулярна в D , непрерывна и имеет непрерывные производные $F'(z)$ и $F''(z)$ в $\bar{D}$. Положим $\varphi(z) = F(z) - A$, где A — постоянная, которую подберем так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_C \varphi(t) d\sigma(t) = \int_C F(t) d\sigma(t) - AL(0) = 0.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{L(0)} \int_C F(t) d\sigma(t).$$

Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.7.3. Поэтому, если $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста и выполняется условие (7.17), то можно утверждать, что в $\bar{D}$

$$F(z) = A + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in \bar{D}$$

(b_k — коэффициенты разложения функции $\varphi(z)$).

Замечание 4. В случае, когда $\bar{D}$ — выпуклый многоугольник с вершинами $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, в качестве функции $L(\lambda)$ вида (7.1) можно взять квазиполином

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^p A_j e^{\gamma_j \lambda}, \quad A_j \neq 0.$$

Он представляется в форме (7.1). По теореме 1.2.10 его нули $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, начиная с некоторого, простые и выполняется условие

$$\sum \left| \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \right| < \infty, \quad z \in \bar{D}$$

(суммирование происходит по тем k , для которых $L'(\lambda_k) \neq 0$).

Если у $P(\lambda)$ все нули простые, то $P(\lambda)$ уже годится в качестве представителя семейства функций $L(\lambda)$, участвующих в теореме 4.7.3.

Рассмотрим теперь случай, когда у $P(\lambda)$ имеются кратные нули (их конечное число).

Покажем, что если λ_0 — нуль $P(\lambda)$, а μ_0 — произвольное комплексное число, то функция

$$P_1(\lambda) = \frac{\lambda - \mu_0}{\lambda - \lambda_0} P(\lambda) \quad (7.20)$$

также представляется в форме (7.1). Имеем

$$P_1(\lambda) = P(\lambda) + (\lambda_0 - \mu_0) \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Но, как было установлено раньше,

$$\frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = \int_C e^{\lambda t} \psi(t) dt, \quad \psi(t) = -e^{-\lambda_0 t} \int_a^t e^{\lambda_0 \xi} d\sigma(\xi), \quad a \in C.$$

Поэтому

$$P_1(\lambda) = \int_C e^{\lambda t} d\sigma_1(t),$$

где

$$\sigma_1(t) = \sigma(t) + (\lambda_0 - \mu_0) \int_a^t \psi(\xi) d\xi.$$

Очевидно, $\sigma_1(t)$ — функция ограниченной вариации на C . Преобразование вида (7.20) можно применить последовательно несколько раз. Таким путем можно освободиться от всех кратных нулей (также можно освободиться от нуля в начале координат). В результате получим функцию $L(z)$ со всеми необходимыми свойствами.

В случае, когда $\bar{D}$ — выпуклый $2n$ -угольник с вершинами $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$, симметричный относительно начала координат, в качестве $P(\lambda)$ можно взять квазиполином

$$P(\lambda) = \sin h_1 \lambda \cos h_2 \lambda \dots \cos h_n \lambda$$

(в том, что это — квазиполином, можно убедиться, представив $\sin h_1 \lambda$ и $\cos h_i \lambda$ по формуле Эйлера), где

$$h_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2i}, \quad h_2 = \frac{\gamma_3 - \gamma_2}{2i}, \dots, \quad h_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{2i}.$$

5. Случай многоугольной области. Займемся представлением в многоугольной области рядами (7.6) функций, аналитических в D и непрерывных вместе с первой производной в $\bar{D}$.

Пусть $\bar{D}$ — замкнутый выпуклый многоугольник (начало координат лежит внутри D) с вершинами в точках $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ и $L(\lambda)$ — функция вида (7.1), обладающая свойствами:

1) все ее нули (обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \dots$) — простые (они отличны от начала координат);

2) справедлива оценка

$$|L'(\lambda_k)| > Ae^{h(\varphi_k)} |\lambda_k|, \quad \varphi_k = \arg \lambda_k \quad (k \geq 1); \quad (7.21)$$

3) существуют числа $p > 0$ и $r_k \uparrow \infty$ такие, что

$$|L(re^{i\varphi})| > Be^{h(\varphi)r}, \quad r_k - p \leq r \leq r_k + p \quad (k \geq 1),$$

и между окружностями $|\lambda| = r_k$ и $|\lambda| = r_{k+1}$ лежит не более q нулей $L(\lambda)$, где q — фиксированное число.

Теорема 4.7.4. Пусть $F(z)$ — функция, аналитическая внутри многоугольника $\bar{D}$ и непрерывная вместе со своей первой производной в замкнутом многоугольнике $\bar{D}$. Ряд (7.6) сходится к $F(z)$ всюду в многоугольнике $\bar{D}$, за исключением, быть может, его вершин. Он сходится равномерно в замкнутой области $\bar{D}_\varepsilon$, где $\bar{D}_\varepsilon$ получается из $\bar{D}$ удалением ε -окрестностей $|z - \gamma_k| < \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, s$) вершин многоугольника.

Доказательство основывается на нескольких леммах.

Лемма 4.7.1. Для $z \in \bar{D}_\varepsilon$

$$\int_{|\mu|=\rho_m} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| d\mu \leq K_\varepsilon \quad (m \geq 1), \quad \rho_m = r_m + h, \quad |h| \leq p,$$

где K_ε не зависит от m .

Пусть l_1 и l_2 — две смежные стороны многоугольника $\bar{D}$, $\arg \mu = -\beta_j$ — луч, перпендикулярный стороне l_j ($j = 1, 2$), γ — общая вершина сторон l_1 и l_2 . Точку $\bar{D}_\varepsilon$, лежащую на стороне l_j и ближайшую к точке γ , обозначим α_j ($j = 1, 2$). Точка α_j отстоит от γ на расстоянии, равном ε . Имеем

$$\alpha_1 = \gamma + \varepsilon e^{(-\beta_1 - \frac{\pi}{2})i}, \quad \alpha_2 = \gamma + \varepsilon e^{(-\beta_2 - \frac{\pi}{2})i}. \quad (7.22)$$

Пусть $\arg \mu = -\psi_0$ — луч, перпендикулярный прямой, проходящей через точки α_1 и α_2 . Оценим интеграл по дуге $|\mu| = \rho_m$, $\beta_1 \leq \arg \mu \leq \beta_2$. Справедливо неравенство

$$|L(\rho_m e^{i\varphi})| > Be^{h(\varphi)\rho_m}.$$

Но

$$h(\varphi) = K(-\varphi) = \max_{t \in \bar{D}} \operatorname{Re}(te^{i\varphi}).$$

Из геометрических соображений заключаем, что для φ , заключенных в пределах $\beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2$, опорная прямая, перпендикулярная лучу $\arg \mu = -\varphi$, проходит через точку γ , следовательно, максимум достигается в точке γ так, что

$$h(\varphi) = \operatorname{Re}(\gamma e^{i\varphi}), \quad \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2.$$

и

$$|L(\rho_m e^{i\varphi})| > B \exp[\operatorname{Re}(\gamma e^{i\varphi}) \rho_m], \quad \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2. \quad (7.23)$$

Далее, имеем

$$|e^{\mu z}| \leq \exp[|\mu| \max_{z \in \bar{D}_\varepsilon} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi})], \quad \varphi = \arg \mu.$$

Очевидно,

$$\max_{z \in \bar{D}_\varepsilon} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = \tilde{K}(-\varphi), \quad (7.24)$$

где $\tilde{K}(\varphi)$ — опорная функция области $\bar{D}_\varepsilon$. Опять из геометрических соображений заключаем, что опорная прямая к области $\bar{D}_\varepsilon$, перпендикулярная лучу $\arg \mu = -\varphi$, проходит при $\beta_1 \leq \varphi \leq \psi_0$ через точку α_1 , а при $\psi_0 \leq \varphi \leq \beta_2$ — через точку α_2 . Значит, в первом случае максимум в (7.24) достигается в точке α_1 , а во втором — в точке α_2 . В силу этого,

$$|e^{\mu z}| \leq \exp[\operatorname{Re}(\alpha_1 e^{i\varphi}) \rho_m], \quad \beta_1 \leq \varphi \leq \psi_0, \\ |e^{\mu z}| \leq \exp[\operatorname{Re}(\alpha_2 e^{i\varphi}) \rho_m], \quad \psi_0 \leq \varphi \leq \beta_2.$$

Отсюда, принимая во внимание (7.22) и (7.23), получаем

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < \frac{1}{B} \exp[-\varepsilon \rho_m \sin(\varphi - \beta_1)], \quad \beta_1 \leq \varphi \leq \psi_0, \quad (7.25)$$

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < \frac{1}{B} \exp[-\varepsilon \rho_m \sin(\beta_2 - \varphi)], \quad \psi_0 \leq \varphi \leq \beta_2. \quad (7.26)$$

Имеем

$$J = \int_{\substack{|\mu|=\rho_m \\ \beta_1 \leq \arg \mu \leq \beta_2}} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| d\mu = \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_j} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| d\mu,$$

где Γ_1 — дуга $|\mu| = \rho_m$, $\beta_1 \leq \varphi \leq \psi_0$, Γ_2 — дуга $|\mu| = \rho_m$, $\psi_0 \leq \varphi \leq \beta_2$.

При оценке интегралов воспользуемся неравенством

$$\sin \psi \geq \frac{2}{\pi} \psi, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

и оценками (7.25) и (7.26). Имеем

$$\int_{\Gamma_1} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| < \frac{\rho_m}{B} \int_0^{\beta_1} e^{-\rho_m \sin(\varphi - \beta_1)} d\varphi < \frac{\rho_m}{B} \int_0^{\beta_1} e^{-\varepsilon_1 (\varphi - \beta_1) \rho_m} d\varphi = \\ = \frac{1}{B\varepsilon_1} (1 - e^{-\varepsilon_1 (\varphi_0 - \beta_1) \rho_m}) < \frac{1}{B\varepsilon_1},$$

где $\varepsilon_1 = \frac{2}{\pi} \varepsilon$. Такую же оценку получим для второго интеграла. В результате интеграл по дуге $|\mu| = \rho_m$, $\beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2$ оказывается ограниченным. Интеграл по всей окружности $|\mu| = \rho_m$ представляет собой конечную сумму (число слагаемых равно числу вершин многоугольника) интегралов по дугам рассмотренного вида. Поэтому интеграл по всей окружности $|\mu| = \rho_m$ ограничен постоянной K_ε , не зависящей от m .

Лемма 4.7.2. Целая функция (функция переменной λ)

$$L_m(\lambda) = \sum_{|\lambda_h| < r_m} \frac{L(\lambda) e^{\lambda_h z}}{\lambda_h (\lambda - \lambda_h) L'(\lambda_h)} + \frac{L(\lambda)}{\lambda L(0)} - \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}$$

допускает представление

$$L_m(\lambda) = \int_C e^{\lambda t} \Phi_m(t, z) dt, \quad C = \partial \bar{D}, \quad (7.27)$$

где $\Phi_m(t, z)$, как функция t , принадлежит L_2 на C , причем для $z \in \bar{D}_\varepsilon$

$$\left\{ \int_C |\Phi_m(t, z)|^2 |dt| \right\}^{1/2} < \frac{A_\varepsilon}{r_m^\beta}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2} \quad (m \geq 1). \quad (7.28)$$

Сначала оценим $|L_m(\lambda)|$. Имеем

$$L_m(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{|\mu| = r_m} \frac{e^{\mu z}}{\mu (\lambda - \mu) L(\mu)} d\mu, \quad |\lambda| < r_m.$$

Для $|\lambda| \leq r_m$, в силу леммы 4.7.1 (при $z \in \bar{D}_\varepsilon$), получаем

$$|L_m(\lambda)| \leq \frac{|L(\lambda)|}{2\pi \rho (r_m + \rho)} \int_{|\mu| = r_m + \rho} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| < \frac{K(\varepsilon) |L(\lambda)|}{2\pi \rho (r_m + \rho)}.$$

Возьмем β , $0 < \beta < 1/2$. Так как $r_m + \rho = (r_m + \rho)^\beta (r_m + \rho)^{1-\beta} \geq (|\lambda| + \rho)^{1-\beta} r_m^\beta$, то

$$|L_m(\lambda)| < \frac{K(\varepsilon)}{2\pi \rho} \frac{1}{r_m^\beta} \frac{|L(\lambda)|}{(|\lambda| + \rho)^{1-\beta}}, \quad |\lambda| \leq r_m, \quad r \in \bar{D}_\varepsilon. \quad (7.29)$$

Для $|\lambda| \geq r_m$ имеем

$$L_m(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{|\mu| = r_m + \rho} \frac{e^{\mu z} d\mu}{\mu (\lambda - \mu) L(\mu)} - \frac{e^{\lambda z}}{\lambda}.$$

Отсюда, опять в силу леммы (4.7.1), получаем

$$|L_m(\lambda)| \leq \frac{|L(\lambda)|}{2\pi (r_m - \rho) (|\lambda| - r_m + \rho)} \int_{|\mu| = r_m + \rho} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + \\ + \frac{|e^{\lambda z}|}{|\lambda|} \leq \frac{K(\varepsilon)}{2\pi} \frac{|L(\lambda)|}{(r_m - \rho) (|\lambda| - r_m + \rho)} + \frac{|e^{\lambda z}|}{|\lambda|}.$$

Из формулы (7.1) видно, что

$$|L(re^{i\varphi})| < Ae^{h(\varphi)r}.$$

Кроме того, для $z \in \bar{D}$

$$|e^{\lambda z}| \leq \exp[|\lambda| \max_{z \in \bar{D}} \operatorname{Re}(ze^{i\varphi})] = \exp[|\lambda| K(-\varphi)] = e^{h(\varphi)r}.$$

Поэтому

$$|L_m(re^{i\varphi})| \leq e^{h(\varphi)r} \left\{ \frac{B_\varepsilon}{(r_m - \rho) (|\lambda| - r_m + \rho)} + \frac{1}{|\lambda|} \right\}, \\ z \in \bar{D}_\varepsilon, \quad |\lambda| \geq r_m.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|^{1-\beta}} \frac{1}{|\lambda|^\beta} \leq \frac{1}{|\lambda|^{1-\beta}} \frac{1}{r_m^\beta}, \quad |\lambda| \geq r_m.$$

Оценим первое слагаемое в фигурных скобках.

Если $r_m \leq |\lambda| \leq 2r_m$, то

$$\frac{1}{(r_m - \rho) (|\lambda| - r_m + \rho)} \leq \frac{1}{\rho (r_m - \rho)} < \frac{2}{\rho} \frac{1}{r_m^\beta r_m^{1-\beta}} \leq \frac{2 \cdot 2^{1-\beta}}{\rho r_m^\beta |\lambda|^{1-\beta}}, \quad m \geq m_1.$$

Если $|\lambda| \geq 2r_m$, то

$$\frac{1}{(r_m - \rho) (|\lambda| - r_m + \rho)} < \frac{2}{r_m (|\lambda| - \frac{|\lambda|}{2} + \rho)} < \frac{4}{|\lambda| r_m} < \frac{4}{|\lambda|^{1-\beta} r_m^\beta}.$$

Поэтому выражение в фигурных скобках не превосходит величины

$$\frac{C_\varepsilon}{|\lambda|^{1-\beta} r_m^\beta}.$$

На основании этого, учитывая (7.29), получаем

$$|L_m(re^{i\varphi})| < M_e \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^{\beta}(r+\rho)^{1-\beta}}, \quad r \geq 0, m \geq m_0, 0 < \beta < \frac{1}{2}. \quad (7.30)$$

Здесь M_e зависит от β , но не зависит от m , z и r . Получили нужную оценку.

Пусть $\arg \lambda = -\alpha_k$ ($k=1, 2, \dots, s$) — лучи, перпендикулярные сторонам многоугольника $\bar{D}$. Из (7.30) находим

$$e^{-h(\alpha_k)r} |L_m(re^{i\alpha_k})| < \frac{M_e}{(r+\rho)^{1-\beta}} \cdot \frac{1}{r^{\beta}}, \quad 1-\beta > \frac{1}{2},$$

в силу чего функция

$$\psi_k(r) = e^{-h(\alpha_k)r} L_m(re^{i\alpha_k}) \quad (k=1, 2, \dots, s)$$

принадлежит $L^2(0, \infty)$:

$$\int_0^{\infty} |\psi_k(r)|^2 dr < \frac{M_e^2}{r_m^{2\beta}} < \infty. \quad (7.31)$$

На этом основании можно утверждать (см. [9], стр. 502), что функцию $L_m(\lambda)$ можно представить в виде (7.27) с $\varphi_m(t, z) \in L^2(C)$.

Осталось вывести неравенство (7.28). Для этого надо указать, как определяется функция $\varphi_m(t, z)$. Положим

$$\gamma_m(t, z) = \int_0^{\infty} L_m(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda.$$

Обозначим l_k звено многоугольника, которое перпендикулярно лучу $\arg \lambda = -\alpha_k$. Функция $\gamma_m(t, z)$, как функция t , регулярна с той стороны от прямой l (на которой лежит l_k), где нет начала координат. Положим

$$t = \eta + h(\alpha_k) e^{-i\alpha_k} z = \eta + \eta_k.$$

Тогда

$$\gamma_m(\eta + \eta_k, z) = \int_0^{\infty} \psi_k(r) e^{-\lambda \eta} d\lambda.$$

Функция $\gamma_m(\eta + \eta_k, z)$, как функция η , регулярна с одной стороны от прямой $\bar{l}$, проходящей через начало координат и параллельной прямой l . Имеем $\eta = \xi + e e^{-i\alpha_k}$, $e > 0$, где ξ — точка прямой $\bar{l}$. Так как $\psi_k(r) \in L^2(0, \infty)$, то, оказывается, функция $\gamma_m(\eta + \eta_k, z)$ при приближении e к нулю стремится в среднем

квадратично к некоторой функции $\varphi_m(\xi + \eta_k, z) \in L^2(\bar{l})$, причем

$$\int_{\bar{l}} |\varphi_m(\xi + \eta_k, z)|^2 d\xi = \int_0^{\infty} |\psi_k(r)|^2 dr.$$

Когда ξ пробегает $\bar{l}$, то $\xi + \eta_k$ пробегает прямую l . Значит, функция $\varphi_m(t, z) \in L^2(l)$ и

$$\int_l |\varphi_m(t, z)|^2 dt = \int_0^{\infty} |\psi_k(r)|^2 dr.$$

Отсюда, в силу (7.31), следует, что

$$\int_l |\varphi_m(t, z)|^2 dt \leq \int_l |\varphi_m(t, z)|^2 dt < \frac{M_e^2}{r_m^{2\beta}}.$$

Функция $\varphi_m(t, z)$ и есть та функция, которая фигурирует в представлении (7.27) для $t \in l_k$. Оценка (7.28) установлена. Лемма доказана.

Лемма 4.7.3. Пусть функция $F(z)$ регулярна в D и непрерывна вместе со своей первой производной в $\bar{D}$. Если ей соответствует ряд (7.6), то имеет место формула

$$F(z) = \sum_{|\lambda_k| < r_m} a_k e^{\lambda_k z} = - \int_C F'(t) \varphi_m(t, z) dt + \int_C F(t) d\sigma(t) \left\{ \frac{1}{L(0)} + \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \right\}. \quad (7.32)$$

где $\varphi_k(t, z)$ — функция из представления (7.27).

Проверим формулу для $F(z) = e^{\lambda z}$. Для этой функции левая часть в (7.32) равна

$$e^{\lambda z} = \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}. \quad (7.33)$$

Первое слагаемое правой части (7.32), в силу (7.27), равно $(F'(t) = \lambda e^{\lambda t})$

$$e^{\lambda z} = \frac{L(\lambda)}{L(0)} = \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{\lambda L(\lambda) e^{\lambda_k z}}{\lambda_k (\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} = e^{\lambda z} - \frac{L(\lambda)}{L(0)} - L(\lambda) \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)} - \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{L(\lambda) e^{\lambda_k z}}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)},$$

а второе из той же части равно

$$L(\lambda) \left\{ \frac{1}{L(0)} + \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \right\}.$$

Вся правая часть, следовательно, равна (7.33).

Итак, для $F(t) = e^{\lambda t}$ формула (7.32) верна.

В общем случае поступим следующим образом. Возьмем какую-нибудь систему $\{e^{\mu_k z}\}$, полную во всей плоскости. Имеются такие $\alpha_{m,k}$ и ρ_m , что равномерно в $\bar{D}$

$$F'(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\rho_m} \alpha_{m,k} e^{\mu_k t}, \quad \alpha_{m,0} = 0, \quad \mu_0 = 0. \quad (7.34)$$

Интегрируя от 0 до t , получим, что равномерно в $\bar{D}$

$$F(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\rho_m} \beta_{m,k} e^{\mu_k t}, \quad \beta_{m,0} = F(0) - \sum_{k=1}^{\rho_m} \frac{\alpha_{m,k}}{\mu_k},$$

$$\beta_{m,k} = \frac{\alpha_{m,k}}{\mu_k} \quad (k \geq 1).$$

Формула (7.34) может быть получена теперь из последней формулы путем дифференцирования. На основании этого, учитывая, что (7.32) верно для функций $e^{\lambda_k t}$ ($k \geq 1$) и функции, тождественно равной единице, заключаем, что (7.32) верно для $F(t)$, имеющей непрерывную производную в $\bar{D}$.

Теперь уже все имеется для доказательства теоремы. Воспользуемся формулой (7.32). Оценим выражение в фигурных скобках. Имеем

$$\frac{1}{L(0)} + \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_m} \frac{e^{\mu z}}{\mu L(\mu)} d\mu,$$

откуда, в силу леммы 4.7.1, получаем

$$\left| \frac{1}{L(0)} + \sum_{|\lambda_k| < r_m} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \right| \leq \frac{1}{2\pi r_m} \int_{|\mu|=r_m} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| \leq \frac{K(\sigma)}{2\pi r_m}, \quad z \in \bar{D}_\sigma.$$

Далее, на основании леммы 4.7.2 (имеем в виду оценку (7.28)), находим

$$\left| \int_C F'(t) \varphi_m(t, z) dt \right| \leq \left\{ \int_C |F'(t)|^2 |dt| \right\}^{1/2} \left\{ \int_C |\varphi_m(t, z)|^2 |dt| \right\}^{1/2} = O\left(\frac{1}{r_m^\beta}\right).$$

Из всего этого, согласно (7.32), получаем

$$\left| F(z) - \sum_{|\lambda_k| < r_m} a_k e^{\lambda_k z} \right| = O\left(\frac{1}{r_m^\beta}\right), \quad z \in \bar{D}_\sigma, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}. \quad (7.35)$$

Рассмотрим разность

$$F(z) - \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k z}.$$

Пусть m таково, что $r_m < |\lambda_n| < r_{m+1}$. Тогда

$$F(z) - \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k z} = F(z) - \sum_{|\lambda_k| < r_m} a_k e^{\lambda_k z} - \sum_{\substack{|\lambda_k| > r_m \\ k \leq n}} a_k e^{\lambda_k z}.$$

В теореме 4.7.1 установлено, что если $F(z)$ имеет непрерывную производную в $\bar{D}$, то

$$|a_k| \leq \frac{V}{|\lambda_k L'(\lambda_k)|} (\max_{t \in \bar{D}} |F(t)| + \max_{t \in \bar{D}} |F'(t)|), \quad V = \int_C |d\sigma(t)|.$$

Отсюда, на основании (7.21),

$$|a_k e^{\lambda_k z}| = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|}\right), \quad z \in \bar{D}.$$

По условию в кольце между окружностями $|\lambda| = r_m$ и $|\lambda| = r_{m+1}$ лежит не более q (q фиксировано) нулей $L(\lambda)$. Поэтому

$$\left| \sum_{|\lambda_k| > r_m, k \leq n} a_k e^{\lambda_k z} \right| = O\left(\frac{1}{r_m}\right).$$

В силу этого, принимая во внимание (7.35), окончательно получаем

$$\left| F(z) - \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k z} \right| = O\left(\frac{1}{r_m^\beta}\right), \\ 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad z \in \bar{D}_n, \quad r_m < |\lambda_n| < r_{m+1}.$$

Теорема доказана *).

Замечание 1. Если

$$\frac{r_{m+1}}{r_m} < \alpha < \infty \quad (m \geq 1),$$

то

$$\left| F(z) - \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k z} \right| = O\left(\frac{1}{|\lambda_n|^\beta}\right), \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad z \in \bar{D}_n.$$

Замечание 2. В качестве функции $L(\lambda)$, участвующей в теореме 4.7.4, можно взять квазиполином. Если у него окажутся кратные нули (их конечное число), то от них можно избавиться способом, указанным в замечании 4 к теореме 4.7.3.

*) В случае, когда $L(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n \lambda}$, в работе [5] в последнее время получен более сильный результат.

Позже вышла статья Б. Я. Левина, Ю. И. Любарского «Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с ней разложения в ряды экспонент» (Изв. АН СССР, сер. матем. 39, № 3 (1975), 657—702), в которой также рассматривается представление аналитических функций рядами Дирихле в многоугольных областях.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОТКРЫТОЙ ОБЛАСТИ

В предыдущей главе было показано, что если функция $F(z)$ регулярна на $\bar{D}$ или регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$, то она в области D может быть представлена рядом Дирихле. В этой главе речь пойдет о представлении в области D рядами Дирихле функций, аналитических в открытой области D . Будут изложены результаты из работ [25], [26].

§ 1. Случай аналитической границы

1. Преобразование основной формулы. Будем предполагать, что граница $\partial\bar{D}$ области D является правильной аналитической кривой. При этом кривая $z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, называется *правильной аналитической кривой*, если $\lambda(t)$ — аналитическая функция параметра t на $[\alpha, \beta]$ и $\lambda'(t) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ (см., например, [47], стр. 629). Пусть $w = \Phi(z)$ — функция, конформно отображающая внешность $\bar{D}$ на внешность круга $|w| \leq \rho$, причем

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1.$$

Вследствие того, что $\partial\bar{D}$ — правильная аналитическая кривая, функция $w = \Phi(z)$ является аналитической на $\partial\bar{D}$, и она осуществляет конформное отображение внешности некоторой кривой C_1 , лежащей внутри $\partial\bar{D}$, на внешность круга $|w| \leq \rho_1$, где $\rho_1 < \rho$.

В окрестности бесконечно удаленной точки функция $\Phi(z)$ имеет разложение

$$\Phi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \dots,$$

а $[\Phi(z)]^n$ (n — целое неотрицательное число) — разложение вида

$$[\Phi(z)]^n = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} + \frac{\alpha_{-1}^{(n)}}{z} + \dots$$

Многочлены

$$\Phi_n(z) = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + \alpha_0^{(n)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

называются *многочленами Фабера, порожденными кривой $\partial\bar{D}$* .

В рассматриваемом случае функция $w = \Phi(z)$ конформно отображает не только внешность $\partial\bar{D}$ на внешность круга $|w| \leq \rho$, но и внешность кривой C_1 на внешность круга $|w| \leq \rho_1$. Поэтому указанные полиномы одновременно являются полиномами Фабера, порожденными кривой C_1 .

Возьмем какую-нибудь функцию $F(z)$, аналитическую в области D . Поскольку граница этой области $\partial\bar{D}$ есть прообраз окружности $|w| = \rho$ при отображении $w = \Phi(z)$ ($\rho > \rho_1$), то (см., например, [47], стр. 422) в D имеет место разложение

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho}. \quad (1.1)$$

Сходимость внутри D — равномерная.

С помощью представления функции $F(z)$ рядом по полиномам Фабера удастся преобразовать основную формулу (5.7) из гл. IV к виду, которым при некоторых условиях на функцию $L(\lambda)$ можно воспользоваться и тогда, когда $F(z)$ будет только лишь аналитической в D .

Эта основная формула для функции

$$f(z) = f_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n \Phi_n(z) \quad (1.2)$$

имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, f) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt, \quad z \in D, \quad (1.3)$$

где C — замкнутый контур, охватывающий множество $\bar{D}$, а Γ — произвольный замкнутый контур, на котором $L(\mu) \neq 0$. Функция $\gamma(t, z, \Gamma)$, как функция переменного t , регулярна вне $\bar{D}$. Поэтому вне $\bar{D}$

$$\gamma(t, z, \Gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(z, \Gamma) \Phi'_n(t)}{[\Phi(t)]^{n+1}}. \quad (1.4)$$

Сходимость на C последнего ряда — равномерная. На основании соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi_k(t) \frac{\Phi'_n(t) dt}{[\Phi(t)]^{n+1}} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt = \sum_{k=0}^m a_k d_k(z, \Gamma). \quad (1.5)$$

Преобразуем левую часть формулы (1.3). Имеем

$$\omega_L(\mu, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t f(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt.$$

Как уже отмечалось не один раз,

$$\omega_L(\mu, \psi) = \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}, \quad \psi(z) = e^{\lambda z}.$$

Отсюда следует, что если $\gamma_1(\mu, f)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $\frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}$ (как функцией λ), то для $\psi(z) = e^{\lambda z}$

$$\omega_L(\mu, \psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_1(\mu, f) \psi(t) dt.$$

Функция $\gamma_1(\mu, f)$, как функция t , регулярна вне $\bar{D}$. Поскольку система $\{e^{\lambda t}\}$ полна во всей плоскости, последняя формула справедлива для любой функции $\psi(t)$, аналитической внутри C и на C , в частности, справедлива для многочлена $f(t)$. Итак,

$$\omega_L(\mu, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma_1(\mu, f) f(t) dt.$$

Вне $\bar{D}$ имеется представление

$$\gamma_1(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(\mu) \Phi'_k(t)}{[\Phi(t)]^{k+1}} \quad (1.6)$$

(на C сходимость будет равномерной). В силу (1.2) и (1.6), получаем

$$\omega_L(\mu, f) = \sum_{k=0}^m a_k c_k(\mu). \quad (1.7)$$

Формула (1.3), в силу (1.5), приобретает теперь искомый вид

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, f_m) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = -\sum_{k=0}^m a_k d_k(z, \Gamma), \quad (1.8)$$

где $\omega_L(\mu, f_m)$ имеет форму (1.7).

Наша задача — показать, что при определенных условиях на $F(z)$ и $L(\lambda)$ в формуле (1.8) можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$.

Обозначим C_2 прообраз окружности $|w| = \rho_2$, $\rho_1 < \rho_2 < \rho$, при отображении $w = \Phi(z)$. Положим

$$\max \left| \frac{f-z}{\Phi(t)-\Phi(z)} \right| = b, \quad |\Phi(t)| \geq \rho_2, \quad |\Phi(z)| \geq \rho_2. \quad (1.9)$$

Как и выше, $K(\theta)$ — опорная функция множества $\bar{D}$ и $h(\theta) = K(-\theta)$.

Теорема 5.1.1. Пусть $\psi(x)$ — определенная на $[0, \infty)$ кусочно-постоянная неубывающая функция, принимающая лишь целые значения, причем $\psi(x) = 0$ на $[0, 1)$, $\psi(x) \rightarrow \infty$ и $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Положим

$$\varphi(x) = \exp \left\{ \int_1^x \frac{\psi(x)}{x} dx \right\}.$$

Пусть, далее, $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\theta)$, причем

$$|L(re^{i\theta})| \leq A \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)^{\psi(4b\rho r)}}, \quad r \geq 0, \quad (1.10)$$

где величина b определена формулой (1.9). Если коэффициенты ряда (1.1) удовлетворяют условию

$$|a_k| \leq B \frac{\varphi(k)}{(1+k^2)^{\rho k}} \quad (k=0, 1, \dots), \quad (1.11)$$

то

1) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k(\mu) \quad (1.12)$$

равномерно сходится в любой ограниченной области, его сумма (обозначим ее $\omega_L(\mu, F)$) является, следовательно, целой функцией;

2) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k(z, \Gamma) \quad (1.13)$$

равномерно сходится внутри области D ;

3) имеет место формула

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = - \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_k(z, \Gamma); \quad (1.14)$$

4) при дополнительном условии: имеются число $\rho > 0$ и числа ρ_k ($k=1, 2, \dots$), $0 < \rho_k \uparrow \infty$, такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |L(re^{i\theta})| > [h(\theta) - \varepsilon]r, \quad \rho_k - \rho \leq r \leq \rho_k + \rho, \quad k > K(\varepsilon), \quad (1.15)$$

правая часть в (1.14) стремится к нулю, когда $z \in D$, Γ — окружность $|\mu| = \rho_k$ и $k \rightarrow \infty$; следовательно,

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad z \in D$$

(сходимость внутри D — равномерная).

Доказательство этой теоремы будет дано в п. 3. Здесь же мы покажем, что для любой функции (1.1), аналитической в D , найдется своя функция $\psi(x)$ со свойством (1.11).

Лемма 5.1.1. Пусть последовательность чисел $\{a_m\}_1^\infty$ такова, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 1.$$

Имеется на $[0, \infty)$ неотрицательная неубывающая кусочно-постоянная с целочисленными значениями функция $\psi(x)$ такая, что $\psi(x) = 0$ на $[0, 1)$, $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и функция

$$\varphi(x) = \exp \left\{ \int_1^x \frac{\psi(x)}{x} dx \right\}$$

удовлетворяет условию

$$|a_m| \leq \varphi(m) \quad (m=2, 3, \dots).$$

Для доказательства положим

$$\bar{a}_m = \max(1, |a_1|, \dots, |a_m|), \quad q_m = \sqrt[m]{\bar{a}_m}, \\ e_n = \max_{m \geq n} \ln q_m, \quad \beta_n = e^{e_n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Имеем

$$|a_m| \leq \bar{a}_m \quad (m=1, 2, \dots), \quad 1 \leq \bar{a}_m \uparrow, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\bar{a}_m} = 1.$$

В силу этого,

$$1 \leq q_m \rightarrow 1, \quad 0 \leq \ln q_m \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty), \\ 0 \leq e_n \downarrow 0, \quad |a_n| \leq \beta_n \quad (n=1, 2, \dots).$$

Определим на $[0, \infty)$ неубывающую функцию $\psi_1(x)$. В интервале $[0, 1)$ пусть $\psi_1(x) = 0$, в интервале $[1, 2)$ положим $\psi_1(x) = c_1$, где c_1 находится из условия

$$\exp \left\{ \int_1^2 \frac{c_1}{x} dx \right\} = 2^{c_1} = \beta_2.$$

Очевидно, $c_1 \geq 0$. В интервале $[2, 3)$ полагаем $\psi_1(x) = c_2$, где $c_2, c_2 \geq c_1$, — наименьшее такое, что

$$\exp \left\{ \int_1^3 \frac{\psi_1(x)}{x} dx \right\} \geq \beta_3.$$

Пусть $\psi_1(x)$ уже определена в интервале $[1, k)$, причем в $[k-1, k)$ она равна c_{k-1} . В интервале $[k, k+1)$ положим $\psi_1(x) = c_k$, где $c_k, c_k \geq c_{k-1}$, — наименьшее такое, что

$$\exp \left\{ \int_1^{k+1} \frac{\psi_1(x)}{x} dx \right\} \geq \beta_{k+1}.$$

Так определили функцию $\psi_1(x)$ на $[0, \infty)$. Имеем $0 \leq \psi_1(x) \uparrow$ и

$$\exp \left\{ \int_1^k \frac{\psi_1(x)}{x} dx \right\} \geq \beta_k \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Заметим, что если s — точка разрыва $\psi_1(x)$, то

$$\exp \left\{ \int_1^{s+1} \frac{\psi_1(x)}{x} dx \right\} = \beta_{s+1}.$$

Покажем, что

$$\frac{\psi_1(x)}{x} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим два случая в зависимости от того, конечное или бесконечное число точек разрыва у функции $\psi_1(x)$.

В первом случае, начиная с некоторого момента, $\psi_1(x) = \text{const}$, и потому $\frac{\psi_1(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Изучим второй случай. Пусть $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ — точки разрыва функции $\psi_1(x)$, причем $R_1 < R_2 < \dots$. Имеем

$$\exp \left\{ \int_1^{R_k} \frac{\psi_1(x)}{x} dx \right\} \geq \beta_{R_k}, \quad \exp \left\{ \int_1^{R_{k+1}} \frac{\psi_1(x)}{x} dx \right\} = \beta_{R_{k+1}}.$$

Отсюда

$$\exp \left\{ \int_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{\psi_1(x)}{x} dx \right\} \leq \frac{\beta_{R_{k+1}}}{\beta_{R_k}}$$

или

$$\frac{\psi_1(R_k)}{R_k+1} \leq (R_k+1)e_{R_{k+1}} - R_k e_{R_k}.$$

Поскольку $0 \leq e_k \downarrow 0$, то

$$\frac{\psi_1(R_k)}{R_k+1} \leq (R_k+1)e_{R_k} - R_k e_{R_k} = e_{R_k}.$$

На основании этого в интервале $[R_k, R_{k+1})$ при больших k имеем

$$\frac{\psi_1(x)}{x} \leq \frac{\psi_1(R_k)}{R_k} \leq \frac{R_k+1}{R_k} e_{R_k} < 2e_{R_k}.$$

Значит, действительно $\frac{\psi_1(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Теперь построим искомую функцию $\psi(x)$. Пусть p_k — целое число, удовлетворяющее условию $c_k \leq p_k < 1 + c_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Положим $\psi(x) = 0$ в интервале $[0, 1)$ и $\psi(x) = p_k$ в интервале $[k, k+1)$ ($k = 1, 2, \dots$). Имеем

$$0 \leq \psi_1(x) \leq \psi(x) \leq \psi_1(x) + 1, \quad x \geq 0.$$

Функция $\psi(x)$ — неотрицательная, неубывающая, кусочно-постоянная с целочисленными значениями, причем $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и

$$|\alpha_m| \leq \varphi(m) \quad (m = 2, 3, \dots), \quad \varphi(x) = \exp \left\{ \int_1^x \frac{\psi(x)}{x} dx \right\}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = 0.$$

Воспользуемся этой леммой, чтобы для функции (1.1) установить наличие функции $\varphi(x)$ со свойством (1.11). Из условия

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\rho}$$

следует, что

$$a_n = \frac{\bar{a}_n}{(1+n^2)\rho^n} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\bar{a}_n|} \leq 1.$$

Положим

$$\alpha_n = \max(|\bar{\alpha}_n|, n^{\ln n}).$$

Очевидно, $\sqrt[n]{\alpha_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. По лемме имеется на $[0, \infty)$ неотрицательная, неубывающая, кусочно-постоянная с целочисленными значениями функция $\psi(x)$ такая, что $\psi(x) = 0$ на $[0, 1)$, $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и

$$|\bar{\alpha}_n| \leq |\alpha_n| \leq \varphi(n) \quad (n=2, 3, \dots), \quad \varphi(x) = \left\{ \int_1^x \frac{\psi(x)}{x} dx \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\psi(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. В самом деле, при условии $\psi(x) < k$, $x > 0$, мы имели бы $\varphi(x) < x^k$, в силу чего было бы $|\alpha_n| < n^k$, что противоречит выбору α_n .

При подходящем B неравенство $|\alpha_n| < B\varphi(n)$ будет выполняться для $n=0, 1, \dots$. Итак,

$$|\alpha_n| < B \frac{\varphi(n)}{(1+n^2)\rho^n} \quad (n=0, 1, \dots).$$

Осталось выяснить, всегда ли имеется функция $L(\lambda)$, удовлетворяющая условиям (1.10) и (1.15). Положим

$$(1+r^2)\varphi(4bpr) = \varphi_1(r).$$

Функция $\varphi_1(r)$ является возрастающей, причем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \varphi_1(r)}{r} = 0.$$

В силу теорем 1.2.6 (следствие 2) и 1.3.6 имеется функция $L(\lambda)$ экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\theta)$, причем $L(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

1) у $L(\lambda)$ все нули $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — простые, причем $|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| \geq h > 0$ ($k=1, 2, \dots$);

2) при некотором $\rho > 0$ выполняется соотношение (1.15), где

$$\rho_k = \frac{|\lambda_k| + |\lambda_{k+1}|}{2} \quad (k=1, 2, \dots);$$

3) имеет место оценка

$$|L(re^{i\theta})| < A \frac{e^{h(\theta)r}}{\varphi_1(r)}, \quad r \geq 0;$$

4) последовательность $\{\lambda_k\}$ является частью последовательности $\{\mu_k\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu_k|} < \infty$, $\{\mu_k\}$ зависит от области D , но не зависит от функции $\varphi_1(r)$.

5) точки $|\mu_k|$ ($k \geq 1$) лежат вне заданного произвольного множества E_0 нулевой относительной меры.

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 5.1.1.

2. **Вспомогательные предложения.** Установим ряд лемм, которые понадобятся для доказательства теоремы.

Лемма 5.1.2. Пусть $\psi(x)$ — функция, заданная для $x \geq 0$, неотрицательная, неубывающая, принимающая лишь целые значения и имеющая разрывы в точках $R_1, R_2, \dots$ ($R_1 > 0, R_k \uparrow \infty$), в которых она непрерывна справа. Пусть $\psi(x) = n_i$ в промежутке $R_i \leq x < R_{i+1}$ ($i=0, 1, \dots; R_0=0$). Положим

$$\left. \begin{aligned} d_n &= 0, \quad n < n_0 \\ d_{n_i} &= \alpha, \quad \alpha > 0, \\ d_n &= \frac{\alpha}{R_1^{n_1-n_0} R_2^{n_2-n_1} \dots R_{i+1}^{n-n_{i+1}}}, \quad n_i < n \leq n_{i+1} \quad (i=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Пусть, далее,

$$m(r) = \max_{n \geq 0} (d_n r^n), \quad r > 0.$$

Тогда

$$m(r) = m(r_0) \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{\psi(x)}{x} dx \right\}.$$

Доказательство. Пусть $n_i < n \leq n_{i+1}$. Согласно (1.16),

$$d_n r^n = \alpha \left(\frac{r}{R_1} \right)^{n_1-n_0} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n_2-n_1} \dots \left(\frac{r}{R_{i+1}} \right)^{n-n_{i+1}} r^{n_0}. \quad (1.17)$$

Предположим, что r лежит в границах $R_s \leq r < R_{s+1}$. Имеем

$$d_{n_s} r^{n_s} = \alpha \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n_1-n_0} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n_2-n_1} \dots \left(\frac{r}{R_s} \right)^{n_s-n_{s-1}} r^{n_0}. \quad (1.18)$$

Сравним выражения (1.17) и (1.18).

Если $i \geq s$, то в (1.17) входят все множители из выражения (1.18) и, кроме того, множитель

$$\left(\frac{r}{R_{s+1}} \right)^{n_{s+1}-n_s} \dots \left(\frac{r}{R_{i+1}} \right)^{n-n_i}.$$

Так как последний множитель меньше единицы, то $d_n r^n < d_{n_s} r^{n_s}$.

Если $i < s$ и $n < n_s$, то в (1.18) входит множитель

$$\left(\frac{r}{R_{i+1}} \right)^{n_{i+1}-n} \dots \left(\frac{r}{R_s} \right)^{n_s-n_{s-1}},$$

которого нет в (1.17). Поскольку этот множитель не меньше единицы, то $d_n r^n \leq d_{n_s} r^{n_s}$.

Таким образом, $d_n r^n$ имеет наибольшее значение при $n = n_s = \psi(r)$ и, значит,

$$m(r) = d_{\psi(r)} r^{\psi(r)}. \quad (1.19)$$

Отсюда

$$\ln m(r) = \ln d_{\psi(r)} + \psi(r) \ln r.$$

Дифференцируем это равенство по r , считая r изменяющимся в промежутке (R_s, R_{s+1}) . Поскольку в этом промежутке $\psi(r) = \text{const}$, то

$$(\ln m(r))' = \frac{\psi(r)}{r}.$$

Пусть $R_s < r_1 < r_2 < R_{s+1}$. Тогда в результате интегрирования получим

$$\ln m(r_2) - \ln m(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\psi(r)}{r} d(r).$$

Обе части этого равенства — непрерывные функции (непрерывность $m(r)$ установим ниже). Поэтому равенство остается справедливым, если $r_1 = R_s$ или $r_2 = R_{s+1}$, или одновременно $r_1 = R_s$, $r_2 = R_{s+1}$. Отсюда уже вытекает, что какие бы положительные числа r_0 и r мы ни взяли, всегда будет

$$m(r) = m(r_0) \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{\psi(r)}{r} dr \right\}.$$

Для завершения доказательства леммы осталось установить, что $m(r)$ — непрерывная функция. В промежутке $[R_s, R_{s+1})$, в силу (1.19),

$$m(r) = d_{n_s} r^{n_s}.$$

Отсюда уже следует, что в промежутке (R_s, R_{s+1}) функция $m(r)$ непрерывна, а в точке R_s непрерывна справа. Убедимся, что в точке R_s она непрерывна и слева. Имеем

$$m(R_s) = d_{n_s} R_s^{n_s},$$

а для r , $R_{s-1} < r < R_s$, поскольку $\psi(r) = n_{s-1}$,

$$m(r) = d_{n_{s-1}} r^{n_{s-1}}.$$

В силу (1.16),

$$d_{n_s} R_s^{n_s} = \alpha \left(\frac{R_s}{R_1} \right)^{n_1 - n_0} \left(\frac{R_s}{R_2} \right)^{n_2 - n_1} \dots \left(\frac{R_s}{R_{s-1}} \right)^{n_{s-1} - n_{s-2}} \left(\frac{R_s}{R_s} \right)^{n_s - n_{s-1}} R_s^{n_0},$$

$$d_{n_{s-1}} r^{n_{s-1}} = \alpha \left(\frac{r}{R_1} \right)^{n_1 - n_0} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n_2 - n_1} \dots \left(\frac{r}{R_{s-1}} \right)^{n_{s-1} - n_{s-2}} r^{n_0}.$$

Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow R_s} m(r) = m(R_s).$$

Лемма полностью доказана.

Лемма 5.1.3. В условиях леммы 5.1.2 положим

$$k_0 = 1, \quad k_n = R_1^{n_1 - n_0} R_2^{n_2 - n_1} \dots R_{i+1}^{n_{i+1} - n_i}, \quad n_i < n \leq n_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots),$$

причем $n_0 = 0$, $R_1 \geq 1$. Тогда при любых p и q верно соотношение

$$k_p k_q \leq k_{p+q}.$$

Действительно, при $p = 0$ или $q = 0$ соотношение очевидно. Пусть теперь $p > 0$, $q > 0$. Число k_p есть произведение p множителей (считаем, что $R_s^{n_s - n_{s-1}}$ — произведение $(n_s - n_{s-1})$ множителей), число k_q — произведение q множителей, число k_{p+q} — произведение $(p+q)$ множителей, причем первые p множителей — те же, что и в k_p , а остальные множители (их q штук) больше множителей в k_q . Отсюда и следует, что $k_p k_q \leq k_{p+q}$.

Лемма 5.1.4. Пусть C — замкнутая правильная аналитическая кривая, $w = \Phi(z)$ — функция, конформно отображающая внешность C на внешность Γ : $|w| = r$, причем $\Phi(\infty) = \infty$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1$, $z = F(w)$ — функция, обратная $w = \Phi(z)$, $\gamma(z)$ — функция, аналитическая во внешности C ($\gamma(\infty) = 0$), бесконечно дифференцируемая вплоть до границы, при этом

$$|\gamma^{(n)}(z)| < A a^n k_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad z \in C. \quad (1.20)$$

Пусть, далее, числа k_n удовлетворяют условиям: $k_p k_q \leq k_{p+q}$ при любых p и q , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{k_n}{n!}} = \infty. \quad (1.21)$$

Тогда

$$|\{ \gamma[F(w)] \}^{(n)}| \leq AB (2ab)^n k_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad w \in \Gamma, \quad (1.22)$$

где b и B — постоянные, причем b зависит только от кривой C , а B зависит от кривой C , величины a и $\{k_n\}$.

Доказательство. По условию C — замкнутая правильная аналитическая кривая. Из этого следует, что функция $w = \Phi(z)$, конформно отображающая внешность C на внешность Γ , будет конформно отображать внешность некоторой кривой C_1 , лежащей внутри C , на внешность некоторой окружности Γ_1 : $|w| = \rho$, $\rho_1 < \rho$.

Положим

$$\bar{\psi}(w) = \psi[F(w)].$$

Эта функция регулярна вне окружности Γ , причем $\bar{\psi}(\infty) = 0$, и бесконечно дифференцируема вплоть до границы. Для w , лежащих вне Γ ($|w| > \rho$), имеем

$$\bar{\psi}^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\psi}(\bar{w}) d\bar{w}}{(\bar{w} - w)^{n+1}},$$

Отсюда, поскольку $\bar{w} = \Phi(t)$, $t \in C$, $w = \Phi(z)$, получаем

$$\bar{\psi}^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(t) \Phi'(t) dt}{[\Phi(t) - \Phi(z)]^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(t) \rho(z, t) dt}{(t - z)^{n+1}},$$

где

$$\rho(z, t) = \Phi'(t) \left[\frac{t - z}{\Phi(t) - \Phi(z)} \right]^{n+1}.$$

Функция $\rho(z, t)$ как функция t является аналитической на кривой C и вне ее, причем $\rho(z, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В силу этого, функция $\psi(t) \rho(z, t)$ регулярна вне C , непрерывна вплоть до границы и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\bar{\psi}^{(n)}(w) = \{\psi(t) \rho(z, t)\}_{t=z}^{(n)}$$

или

$$\bar{\psi}^{(n)}(w) = \left\{ \sum_{s=0}^n C_n^s \rho^{(s)}(z, t) \psi^{(n-s)}(t) \right\}_{t=z} \quad (1.23)$$

(производные справа берутся по t). Оценим сумму (1.23). Напомним, что функция $w = \Phi(z)$ конформно отображает внешность кривой C_1 , лежащей внутри C , на внешность окружности Γ_1 : $|w| = \rho_1$, $\rho_1 < \rho$. Возьмем число ρ_2 , $\rho_1 < \rho_2 < \rho$. Пусть C_2 — прообраз окружности $|w| = \rho_2$ при отображении $w = \Phi(z)$. Имеем

$$|\Phi'(z)| \leq A_1, \quad \left| \frac{t - z}{\Phi(t) - \Phi(z)} \right| \leq b,$$

когда t и z лежат на C_2 или вне C_2 . Здесь A_1 и b — некоторые постоянные, которые зависят только от кривой C . При указан-

ных t и z имеем оценку

$$|\rho(z, t)| \leq A_1 b^{n+1}.$$

Пусть δ — расстояние между кривыми C_2 и C и l — длина кривой C_2 . Из формулы

$$\frac{d^s \rho(z, t)}{dt^s} = \frac{s!}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\rho(z, \eta) d\eta}{(\eta - t)^{s+1}},$$

где t лежит на C или вне C , находим

$$|\rho^{(s)}(z, t)| \leq A_2 \frac{s! b^n}{\delta^s}, \quad A_2 = \frac{A_1 b l}{\delta}.$$

Согласно условию (1.21), при любом $\varepsilon > 0$

$$s! < A_2(\varepsilon) e^s k_s. \quad (1.24)$$

Поэтому

$$|\rho^{(s)}(z, t)| < A_4 k_s b^n \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^s, \quad A_4 = \frac{A_1 A_2(\varepsilon) b l}{\delta} \quad (s=0, 1, 2, \dots). \quad (1.25)$$

На основании (1.20), (1.25) и того факта, что $k_s k_{n-s} \leq k_n$, из равенства (1.23) выводим

$$|\bar{\psi}^{(n)}(w)| < A A_4 (ab)^n k_n \sum_{s=0}^n C_n^s \left(\frac{\varepsilon}{a\delta}\right)^s.$$

Выберем $\varepsilon = a\delta$. Тогда окончательно получим

$$|\bar{\psi}^{(n)}(w)| \leq AB (2ab)^n k_n, \quad B = A_4 = \frac{A_1 A_2(a\delta) b l}{\delta}.$$

Здесь w — любая точка, лежащая во внешности кривой C . В силу непрерывности, эта оценка имеет место и на кривой C . Заметим, что величина B зависит от кривой C (через A_1), величины a и последовательности $\{k_n\}$, но они считаются фиксированными. Лемма доказана.

Лемма 5.1.5. Пусть выполнены условия леммы 5.1.4, так что имеет место оценка (1.22). Пусть, далее, $f(w)$ — функция, аналитическая на окружности Γ : $|w| = \rho$. Тогда

$$\{f(w) \psi[F(w)]\}^{(n)} \leq AB_1 (4ab)^n k_n \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad w \in \Gamma,$$

где B_1 зависит от кривой C , функции $f(w)$, величины a и последовательности $\{k_n\}$.

Полагая $\bar{\psi}(w) = \psi[F(w)]$, запишем

$$\{f(w) \bar{\psi}(w)\}^{(n)} = \sum_{s=0}^n C_n^s f^{(s)}(w) \bar{\psi}^{(n-s)}(w).$$

Учтем, что при некоторых δ_1 и M

$$|f^{(s)}(w)| \leq M \frac{s!}{\delta_1^s} \quad (s=0, 1, \dots), \quad w \in \Gamma.$$

Воспользовавшись оценкой (1.24), положив в ней $\varepsilon = 2ab\delta_1$ и повторив выкладки, которые проводили в конце доказательства предыдущей леммы, получим требуемый результат.

Лемма 5.1.6. Пусть контуры C и Γ , функции $w = \Phi(z)$ и $z = F(w)$ — те же, что и в лемме 5.1.4, а функции $\psi(x)$ и $m(r)$ — те же, что и в лемме 5.1.2, причем дополнительно предположим, что C — выпуклый контур, $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, $n_0 = 0$ и $R_1 \geq 1$. Обозначим $K(\varphi)$ опорную функцию множества, ограниченного кривой C , и положим $h(\varphi) = K(-\varphi)$. Пусть $M(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, причем

$$|M(re^{i\varphi})| < P \frac{e^{h(\varphi)r}}{(1+r)^2 m(qr)}, \quad r \geq 0, \quad q > 0, \quad (1.26)$$

и $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $M(\lambda)$. Пусть, далее, вне C

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Phi'(t)}{[\Phi(t)]^{n+1}}. \quad (1.27)$$

Тогда

$$|c_n| < KP(1 + \sqrt{n}) \frac{p^n}{m\left(\frac{nq}{4bp}\right)} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где p — радиус окружности Γ , b зависит от контура C , K зависит от контура C , функции $\psi(x)$ и величины q .

Доказательство. Отметим равенство

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty} M(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda,$$

откуда

$$\gamma^{(n)}(t) = (-1)^n \int_0^{\infty} \lambda^n M(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda. \quad (1.28)$$

Пусть в (1.28) интегрирование происходит по лучу $\arg \lambda = \varphi$. В точке t контура C , в которой опорная прямая

$$x \cos(-\varphi) + y \sin(-\varphi) = h(\varphi)$$

соприкасается с контуром C , имеем

$$\operatorname{Re}(te^{i\varphi}) = h(\varphi), \quad \operatorname{Re}(\lambda t) = h(\varphi)|\lambda|.$$

В этой точке, в силу оценки (1.26) и равенства (1.28),

$$|\gamma^{(n)}(t)| < P \int_0^{\infty} \frac{r^n dr}{(1+r)^2 m(qr)}, \quad t \in C.$$

Теперь t — произвольная точка контура C . Имеем

$$|\gamma^{(n)}(t)| < \pi P \max_{r \geq 0} \left(\frac{r^n}{m(qr)} \right) = \frac{\pi P}{q^n} \max_{r \geq 0} \left(\frac{r^n}{m(r)} \right), \quad t \in C.$$

Так как $\max_{n \geq 0} (d_n r^n) = m(r)$, то

$$\frac{r^n}{m(r)} \leq \frac{1}{d_n} = \frac{k_n}{\alpha}$$

(величины d_n введены в лемме 5.1.2, а величины k_n — в лемме 5.1.3). Поэтому

$$|\gamma^{(n)}(t)| < A_1 \frac{k_n}{q^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad A_1 = \frac{\pi P}{\alpha}, \quad t \in C. \quad (1.29)$$

Согласно лемме 5.1.3, имеем $k_n k_m \leq k_{n+m}$ при любых n и m . Убедимся еще в том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{k_n}{n!}} = \infty.$$

По лемме 5.1.2

$$m(r) = m(r_0) \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{\psi(x)}{x} dx \right\}.$$

Так как по условию $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то, следовательно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$m(r) < e^{\varepsilon r}, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $d_n r^n \leq m(r)$ при любых n , находим

$$d_n < \frac{e^{\varepsilon r}}{r^n}, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Положим здесь $r = n/\varepsilon$ (при больших n будет $r > r_0(\varepsilon)$), тогда получим

$$d_n < \left(\frac{\varepsilon e}{n} \right)^n, \quad k_n > \alpha \left(\frac{n}{\varepsilon e} \right)^n, \quad n > N(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{k_n}{n!}} = \infty.$$

Имея в виду неравенство (1.29) и свойства чисел k_n , усматриваем, что выполняются условия леммы 5.1.4. На основании этой леммы получаем

$$|\{ \gamma[F(w)] \}^{(n)}| \leq A_1 B \left(\frac{2b}{q} \right)^n k_n \quad (n=0, 1, \dots), \quad A_1 = \frac{\pi P}{a}, \quad w \in \Gamma, \quad (1.30)$$

где B зависит от контура C , величины q и $\{k_n\}$.
Из (1.27) находим

$$\gamma[F(w)] F'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{w^{n+1}} = \gamma_1(w).$$

По лемме 5.1.5, учитывая (1.30), получаем

$$|\{ \gamma_1(w) \}^{(n)}| \leq A_1 B_1 \left(\frac{4b}{q} \right)^n k_n \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad A_1 = \frac{\pi P}{a}, \quad w \in \Gamma, \quad (1.31)$$

где B_1 зависит от контура C , величины q и $\{k_n\}$.
Рассмотрим функцию

$$M_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma_1(w) e^{w\lambda} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \lambda^n.$$

Интегрируя по частям, находим

$$M_1(\lambda) = \frac{(-1)^n}{2\pi i \lambda^n} \int_{\Gamma} \gamma_1^{(n)}(w) e^{w\lambda} dw.$$

Отсюда, согласно оценке (1.31), будем иметь

$$|M_1(\lambda)| \leq B_2 \left(\frac{4b}{qr} \right)^n k_n e^{r|\lambda|}, \quad |\lambda| = r, \quad B_2 = A_1 B_1 \rho \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Теперь заметим, в силу равенства $k_n = a/d_n$, что

$$\min_{n \geq 0} \left\{ \left(\frac{4b}{qr} \right)^n k_n \right\} = \frac{a}{\max_{n \geq 0} d_n \left(\frac{qr}{4b} \right)^n}.$$

Знаменатель дроби равен $m(qr/4b)$. Поэтому

$$|M_1(\lambda)| \leq \frac{B_2}{m \left(\frac{qr}{4b} \right)} e^{r|\lambda|}, \quad |\lambda| = r, \quad B_2 = aB_1.$$

На основании этого

$$\frac{|c_n|}{n!} \leq B_3 \frac{e^{r^n}}{r^n m \left(\frac{qr}{4b} \right)}, \quad r > 0. \quad (1.32)$$

Положим здесь $r = n/\rho$ ($n \geq 1$) и учтем, что $n! < B_4 \sqrt{n} n^n e^{-n}$. Получим

$$|c_n| \leq B_3 B_4 \sqrt{n} \frac{\rho^n}{m \left(\frac{qn}{4b\rho} \right)}, \quad n \geq 1.$$

Из (1.32) видно, что

$$|c_0| \leq \frac{B_2}{m(0)}.$$

Так как $B_4 > 1$, то окончательно

$$|c_n| \leq B_3 B_4 (1 + \sqrt{n}) \frac{\rho^n}{m \left(\frac{qn}{4b\rho} \right)} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где

$$B_3 = \pi \rho B_1 P.$$

Величина B_1 зависит от контура C , величины q и последовательности $\{k_n\}$. Но поскольку величины k_n определяются функцией $\psi(x)$, можно сказать, что B_1 зависит от контура C , функции $\psi(x)$ и величины q . Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы о разложении. Установим сначала сходимости ряда (1.12). Напомним, что коэффициенты $c_k(\mu)$ являются коэффициентами разложения (1.6), причем функция $\gamma_1(t, \mu)$ как функция t ассоциирована по Борелю с целой функцией

$$F(\mu, \lambda) = \frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

как функцией λ . Функция $F(\mu, \lambda)$ является целой функцией параметра μ . Из представления

$$\gamma_1(t, \mu) = \int_0^\infty F(\mu, \lambda) e^{t\lambda} d\lambda$$

следует, что $\gamma_1(t, \mu)$ — целая функция параметра μ . На этом основании из формулы

$$c_k(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \gamma_1(t, \mu) [\Phi(t)]^k dt,$$

где Γ_1 — окружность достаточно большого радиуса, охватывающая $\bar{D}$, заключаем, что $c_k(\mu)$ ($k=0, 1, \dots$) — целые функции μ . Оценим эти функции. Пусть μ изменяется в круге $|\mu| \leq R$. При $|\lambda| \geq R+1$

$$|F(\mu, \lambda)| \leq |L(\mu)| + |L(\lambda)|,$$

откуда, в силу условия (1.10), получаем

$$|F(\mu, \lambda)| \leq \max_{|\mu|=R} |L(\mu)| + A \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)\varphi(qr)},$$

$$q = 4br, \lambda = re^{i\theta}.$$

Так как $\varphi(r) \geq 1$, то правая часть при $|\lambda| = R+1$ не превосходит величины

$$\max_{|\mu|=R} |L(\mu)| + Ae^{h(R+1)} = M(R), \quad h = \max_{\theta} h(\theta).$$

Той же величины не будет превосходить $|F(\mu, \lambda)|$ и при $|\lambda| < R+1$ в силу принципа максимума модуля. Поэтому при любых λ

$$|F(\mu, \lambda)| < M(R) + A \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)\varphi(qr)} =$$

$$= \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)\varphi(qr)} \left[A + M(R) \frac{(1+r^2)\varphi(qr)}{e^{h(\theta)r}} \right].$$

По условию $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. В силу этого, $\varphi(r)$ растет не быстрее целой функции первого порядка минимального типа. Кроме того, $h(\theta) \geq h_1 > 0$. Следовательно, множитель при $M(R)$ в квадратной скобке ограничен. Получаем

$$|F(\mu, \lambda)| < P(R) \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)\varphi(qr)}, \quad |\mu| \leq R, \lambda = re^{i\theta}.$$

Согласно лемме 5.1.2, функция $\varphi(r)$ отличается от функции $m(r)$ постоянным множителем так, что

$$|F(\mu, \lambda)| < P_1(R) \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)m(qr)}, \quad |\mu| \leq R, r \geq 0.$$

Воспользуемся леммой 5.1.6. На основании этой леммы получаем искомую оценку для $c_n(\mu)$:

$$|c_n(\mu)| < KP_1(R)(1+\sqrt{n}) \frac{r^n}{m\left(\frac{qn}{4br}\right)} \quad (n=0, 1, \dots), \quad |\mu| \leq R. \quad (1.33)$$

Постоянная K не зависит от n и R , а $\frac{qn}{4br} = n$.

Обратимся к оценке (1.11). Ее можно записать в виде

$$|a_n| < B_1 \frac{m(n)}{(1+n^2)r^n} \quad (n=0, 1, \dots) \quad (1.34)$$

Отсюда, учитывая (1.33), получаем

$$|a_n c_n(\mu)| < KB_1 P_1(R) \frac{1+\sqrt{n}}{1+n^2}, \quad |\mu| \leq R.$$

Ряд (1.12) в круге $|\mu| \leq R$ сходится равномерно. Радиус R был взят произвольным. Значит, ряд (1.12) сходится равномерно в любом конечном круге и его сумма — целая функция.

Убедимся теперь, что сходится ряд (1.13) в области D . Рассмотрим целую функцию $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$. Для λ , лежащих вне Γ , имеем

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda z} d\mu}{(\mu - \lambda)L(\mu)} + e^{\lambda z}.$$

Для λ , которые лежат вне Γ и удалены от Γ более чем на единицу,

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| < C |L(\lambda)| + |e^{\lambda z}|, \quad C = \max_{z \in \bar{D}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu|.$$

Пусть δ — расстояние от z до границы $\partial \bar{D}$ области D . Если $\lambda = re^{i\theta}$, то, как мы уже не раз отмечали, $|e^{\lambda z}| \leq e^{h(\theta) - \delta} r$. В силу этого и оценки (1.10) получаем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| < AC \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)\varphi(4br)} + e^{h(\theta) - \delta} r =$$

$$= \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)\varphi(4br)} \left\{ AC + \frac{(1+r^2)\varphi(4br)}{e^{\delta r}} \right\}, \quad r > r_0.$$

Поскольку $\varphi(r)$ растет не быстрее функции первого порядка минимального типа, выражение в фигурных скобках является ограниченной величиной. Таким образом,

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| < A(\delta) \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)\varphi(4br)} < A_1(\delta) \frac{e^{h(\theta)r}}{(1+r^2)m(4br)}.$$

Очевидно, можно считать, что это неравенство имеет место при любых r . В силу леммы 5.1.6, тогда получим

$$|d_n(z, \Gamma)| < K A_1(\delta) (1 + \sqrt{n}) \frac{\rho^n}{m(n)} \quad (n=0, 1, \dots).$$

Отсюда с учетом оценки (1.34) сразу вытекает, что ряд (1.13) равномерно сходится внутри области D .

Установив сходимость рядов (1.12) и (1.13), обратимся к формуле (1.8). Устремив в ней m в бесконечность, в пределе получим формулу (1.14).

Осталось доказать последнее (четвертое) утверждение теоремы, основанное на оценке (1.15).

Пусть Γ_k — окружность $|\mu| = \rho_k$. Имеем

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{e^{\mu} d\mu}{(\mu - \lambda) L(\mu)}, \quad |\lambda| < \rho_k.$$

В кольце $\rho_k - \rho \leq |\mu| \leq \rho_k + \rho$ у функции $L(\mu)$ нет нулей в силу условия (1.15), поэтому

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k+\rho} \frac{e^{\mu} d\mu}{(\mu - \lambda) L(\mu)}, \quad |\lambda| \leq \rho_k,$$

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k-\rho} \frac{e^{\mu} d\mu}{(\mu - \lambda) L(\mu)} + e^{\lambda z}, \quad |\lambda| \geq \rho_k.$$

Пусть δ — расстояние от точки z до границы $\partial\bar{D}$. В силу (1.15), принимая во внимание неравенство $\operatorname{Re}(ze^{i\psi}) \leq h(\psi) - \delta$, получим

$$\left| \frac{e^{\mu}}{L(\mu)} \right| \leq \frac{e^{[h(\psi) - \delta]|\mu|}}{e^{[h(\psi) - \delta]|\mu|}} = e^{-(\delta - \epsilon)|\mu|} \leq e^{-(\delta - \epsilon)(\rho_k - \rho)} < A_1 e^{-(\delta - \epsilon)\rho_k}, \quad (1.37)$$

$$\rho_k - \rho \leq |\mu| \leq \rho_k + \rho, \quad A_1 = e^{\rho\delta}, \quad k > K(\epsilon).$$

Далее, положив $\lambda = re^{i\theta}$, имеем

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{[h(\theta) - \delta]r} = \frac{e^{h(\theta)r}}{e^{\delta r}}, \quad r \geq \rho_k.$$

Отсюда

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| \leq |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\mu|=\rho_k+\rho} \left| \frac{e^{\mu}}{L(\mu)} \right| |d\mu|, \quad |\lambda| \leq \rho_k, \quad (1.35)$$

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| \leq |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\mu|=\rho_k-\rho} \left| \frac{e^{\mu}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + |e^{\lambda z}|, \quad |\lambda| \geq \rho_k. \quad (1.36)$$

При больших r

$$e^{\delta r} > (1 + r^2) \varphi(qr), \quad q = 4b\rho.$$

Поэтому

$$|e^{\lambda z}| < \frac{e^{h(\theta)r}}{(1 + r^2) \varphi(qr)} e^{-(\delta - \epsilon)\rho_k}, \quad |\lambda| \geq \rho_k, \quad k > K_1(\epsilon). \quad (1.38)$$

На основании оценок (1.15), (1.37) и (1.38) из неравенств (1.35) и (1.36) получаем, что при любых λ

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < B \rho_k e^{-(\delta - \epsilon)\rho_k} \frac{e^{h(\theta)r}}{(1 + r^2) \varphi(qr)}, \quad \lambda = re^{i\theta}, \quad k > K_1(\epsilon),$$

где

$$B = 2AA_1 = 2Ae^{\rho\delta}.$$

Выполняются условия леммы 5.1.6 (функция $\varphi(r)$ отличается от $m(r)$ постоянным множителем). В силу этой леммы,

$$|d_n(z, \Gamma_k)| < KB_1 e^{-(\delta - \epsilon)\rho_k} (1 + \sqrt{n}) \frac{\rho^n}{m(n)} \quad (n=0, 1, \dots), \quad k > K_1(\epsilon).$$

Отсюда, учитывая оценку (1.34), находим

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_n(z, \Gamma_k) \right| < KB_1 \rho_k e^{-(\delta - \epsilon)\rho_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{1 + n^3}.$$

Следовательно,

$$\left| F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu \right| < C e^{\rho\delta} \rho_k e^{-(\delta - \epsilon)\rho_k}, \quad k > K(\epsilon).$$

Теорема полностью доказана.

В п. 1 было показано, что для любой функции (1.1), аналитической в D , можно подобрать функции $L(\lambda)$ и $\varphi(r)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы 5.1.1. Отсюда как следствие вытекает

Теорема 5.1.2. Пусть D — выпуклая конечная область, ограниченная правильной аналитической кривой. Тогда любую функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить в D рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)}, \quad z \in D.$$

Показатели λ_k можно при этом выбрать так, что $|\lambda_k|$ ($k \geq 1$) будут лежать вне заданного произвольного множества E_0 нулевой относительной меры.

§ 2. Построение дифференциального оператора бесконечного порядка

Решение вопроса о представлении рядами Дирихле в произвольной конечной выпуклой области D функций $F(z)$, аналитических в D , основано на следующей теореме, которая имеет и самостоятельный интерес.

Теорема 5.2.1. Пусть D — конечная открытая выпуклая область и C — ее граница. Проведем открытые круги радиуса $1/n$ с центрами в точках границы C . Эти круги при $n > n_0$ образуют кольцевую область, внутреннюю границу ее обозначим C_n . Пусть $\{M_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел. Обозначим $A\{M_n\}$ класс функций $F(z)$, аналитических в D и удовлетворяющих условию

$$|F(z)| \leq M_n, \quad z \in C_n, \quad n > n_0. \quad (2.1)$$

Тогда в зависимости от класса $A\{M_n\}$ можно сконструировать целую функцию $M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ с ростом не выше первого порядка минимального типа, которая обладает свойством: для любой $F(z) \in A\{M_n\}$ найдется функция $f(z)$, аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$, такая, что

$$M(D) f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f^{(n)}(z) = F(z), \quad z \in D. \quad (2.2)$$

Доказательству этой теоремы предположим ряд рассуждений и лемм.

1. Построение кривых. Пусть D — конечная открытая выпуклая область, C — ее граница. Проведем круги радиуса $1/n$ с центрами в точках C . При больших n , $n > n_0$, они образуют кольцевую область. Внутреннюю и внешнюю границы этой области обозначим соответственно C_n и C_n^* . Кривые C_n и C_n^* — выпуклые. Выпуклость C_n можно установить так. Пусть $a \in C_n$, $b \in C_n$. Покажем, что отрезок $[a, b]$ лежит внутри C_n или принадлежит C_n . Круг $K(a)$ радиуса $1/n$ с центром в точке a лежит в $\bar{D}$, круг $K(b)$ того же радиуса с центром в точке b также лежит в $\bar{D}$. Наименьшая выпуклая область $\bar{E}$, охватывающая круги $K(a)$ и $K(b)$, лежит в $\bar{D}$. Расстояние от точек отрезка $[a, b]$ до границы области $\bar{E}$ равно $1/n$. Расстояние от этих точек до кривой C не меньше $1/n$. Следовательно, отрезок $[a, b]$ лежит в замкнутой области, ограниченной кривой C_n . Выпуклость C_n^* очевидна.

Из выпуклости кривых C_n и C_n^* следует, что их длины не превосходят периметра квадрата, охватывающего кривую C .

Расстояние от каждой точки кривой C_n до кривой C равно $1/n$. Расстояние от точки кривой C до кривой C_n может оказаться больше $1/n$. Например, если D — треугольник, то расстояние от вершины этого треугольника до кривой C_n больше $1/n$. Покажем, что всегда расстояние от точек C до кривой C_n не превосходит a/n , где a — некоторая постоянная, которая зависит только от области D . Возьмем на кривой C четыре точки a, b, c, d ; пусть они расположены на C в направлении положительного обхода. Эти точки разделяют кривую C на четыре части. Возьмем дугу $\widehat{cd}$, свободную от точек a и b , и на ней произвольную точку e . Образует треугольник abe . Когда точка e будет описывать дугу $\widehat{cd}$, угол aeb будет оставаться больше некоторой положительной величины β . Внутри треугольника abe проведем прямые, параллельные сторонам на расстоянии $1/n$ от сторон. Они образуют треугольник с вершинами a_1, b_1, e_1 , этот треугольник лежит внутри C_n . Расстояние от точки e до точки e_1 не превосходит $1/n \sin \beta/2$. Следовательно, расстояние от точек дуги $\widehat{cd}$ до кривой C_n не превосходит $1/n \sin \beta/2$. Аналогичные рассуждения можно провести относительно точек остальных трех дуг. Выбрав из четырех чисел вида $1/\sin \beta/2$ наибольшее и обозначая его a , получим, что расстояние от точек C до кривой C_n меньше или равно a/n .

Пусть L — замкнутая дуга кривой C . Образует кривые $\Gamma_n(L)$ следующим образом. Обозначим a и b концы дуги L . Предположим, что переход от a к b совершается в положительном направлении. Пусть a_n — ближайшая к точке a точка кривой C_n , b_n — ближайшая к точке b точка той же кривой C_n . Пусть, далее, $K_n(a)$ — окружность с центром в точке a радиуса $\rho(a, a_n)$ (равного расстоянию от a до a_n), $K_n(b)$ — окружность с центром в точке b радиуса $\rho(b, b_n)$. Рассмотрим два случая в зависимости от того, пересекаются $K_n(a)$ и $K_n(b)$ в точке, лежащей на C_n или вне ее, или не пересекаются в подобной точке. В первом случае, когда указанные окружности пересекаются в некоторой точке c , лежащей на C_n или вне ее, контур $\Gamma_n(L)$ состоит из дуги $\widehat{b_n a_n}$ кривой C_n (переход от b_n к a_n по дуге $\widehat{b_n a_n}$ на кривой C_n происходит по часовой стрелке), дуги $\widehat{a_n c}$ окружности $K_n(a)$, проходимой против часовой стрелки, и дуги $\widehat{c b_n}$ окружности $K_n(b)$. Во втором случае обозначим a_n^* точку пересечения окружности $K_n(a)$ с кривой C_n^* , через b_n^* — точку пересечения окружности $K_n(b)$ с той же самой C_n^* . Эти точки, если их выбор неоднозначен, выберем так, чтобы на дуге $\widehat{a_n^* b_n^*}$ кривой C_n^* (дуга проходит в положительном направлении) не было точек окружностей $K_n(a)$ и $K_n(b)$, кроме точек a_n^* и b_n^* .

В этом случае под контуром $\Gamma_n(L)$ будем понимать замкнутую кривую, состоящую из дуги $\widetilde{a_n a_n}$ кривой C_n , дуги $\widetilde{a_n a_n^*}$ окружности $K_n(a)$, проходимой против часовой стрелки, дуги $\widetilde{a_n^* b_n^*}$ кривой C_n^* и дуги $\widetilde{b_n^* b_n}$ окружности $K_n(b)$, проходимой против часовой стрелки. Кривые $\Gamma_n(L)$ охватывают дугу L и при $n \rightarrow \infty$ стягиваются к ней. Длины кривых $\Gamma_n(L)$, каковы бы ни были n и L , ограничены сверху некоторой постоянной μ .

2. Представление исходной функции в виде суммы двух специальных функций. Докажем лемму.

Лемма 5.2.1. Пусть D — конечная выпуклая область и C — ее граница, a и b — две различные фиксированные точки C , K_1 и K_2 — части, на которые точки a и b разбивают кривую C (точки a и b относим и к K_1 и к K_2). Пусть, далее, $F(z)$ — функция из класса $A\{M_n\}$. Тогда имеются функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ со следующими свойствами:

- 1) функция $F_j(z)$ ($j=1, 2$) регулярна вне дуги K_j , причем $F_j(\infty)=0$;
- 2) имеет место оценка

$$|F_j(z)| \leq P_n, \quad z \in \Gamma_n(K_j) \quad (j=1, 2; n > n_0),$$

где числа P_n зависят от $\{M_n\}$, но не зависят от конкретной функции $F(z)$ из класса $A\{M_n\}$;

- 3) в области D

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z).$$

Доказательство. Возьмем положительные числа ε_n , $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\sum \varepsilon_n < 1$. Обозначим через C_n^1 дугу $\widetilde{a_n b_n}$ кривой C_n (о которой речь шла выше), когда за L берется дуга K_1 , через C_n^2 — дугу $\widetilde{b_n a_n}$. Эти две дуги составляют всю кривую C_n . Положим

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z}, \quad z \in G_n, \quad (2.3)$$

где G_n — внутренность кривой C_n . Функция $\psi_n(z)$ является аналитической вне дуги C_n^1 , причем $\psi_n(\infty)=0$. Она допускает аналитическое продолжение из G_n через дугу C_n^1 . В результате этого продолжения получим

$$\psi_n(z) = F(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z}, \quad z \notin \overline{G_n}. \quad (2.4)$$

Последовательность $\{\psi_n(z)\}$ не обязана быть сходящейся. С помощью некоторых добавок получим из нее сходящуюся последовательность.

Имеем

$$\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{F(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{b_{n+1}}^{b_n} \frac{F(t) dt}{t-z}.$$

Эта разность регулярна, во всяком случае, когда

$$|z-a| > |a-a_n|, \quad |z-b| > |b-b_n|.$$

Разлагая ядро Коши в первом интеграле по степеням $(t-a)$ а во втором — по степеням $(t-b)$, получим

$$\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s^{(n)}}{(z-a)^{s+1}} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s^{(n)}}{(z-b)^{s+1}},$$

$$|z-a| > |a-a_n|, \quad |z-b| > |b-b_n|,$$

где

$$A_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_{n+1}}^{a_n} (t-a)^s F(t) dt, \quad B_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b_n}^{b_{n+1}} (t-b)^s F(t) dt.$$

Положим

$$\tau_n(z) = \sum_{s=0}^N \frac{A_s^{(n)}}{(z-a)^{s+1}} + \sum_{s=0}^N \frac{B_s^{(n)}}{(z-b)^{s+1}}. \quad (2.5)$$

Выберем N так, чтобы выполнялось условие

$$|\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) - \tau_n(z)| \leq \varepsilon_n, \quad (2.6)$$

$$|z-a| > \frac{a}{n-1} > |a-a_{n-1}|, \quad |z-b| > \frac{a}{n-1} > |b-b_{n-1}|.$$

Число a выше было выбрано так, что расстояние от точек C до кривой C_n меньше или равно a/n .

Теперь положим

$$\varphi_1(z) = \psi_1(z),$$

$$\varphi_n(z) = \psi_1(z) + \sum_{k=1}^{n-1} [\psi_{k+1}(z) - \psi_k(z) + \tau_k(z)] \quad (n > 1).$$

Очевидно,

$$\varphi_n(z) = \psi_n(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z) \quad (n > 1).$$

Отсюда видно, что функция $\varphi_n(z)$ регулярна вне линии $\Gamma_n(K_1)$, причем $\varphi_n(\infty)=0$. Убедимся, что последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ является сходящейся вне K_1 . Имеем

$$\varphi_n(z) = \varphi_m(z) + \sum_{k=m}^{n-1} [\psi_{k+1}(z) - \psi_k(z) + \tau_k(z)], \quad n > m,$$

откуда, в силу (2.6),

$$|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k, \quad (2.7)$$

$$|z-a| > \frac{\alpha}{m-1} > |a-a_{m-1}|, \quad |z-b| > \frac{\alpha}{m-1} > |b-b_{m-1}|.$$

Значит, действительно $\{\varphi_n(z)\}$ равномерно сходится в любой области, отстоящей на положительном расстоянии от K_1 .

Предельную функцию последовательности $\{\varphi_n(z)\}$ обозначим $F_1(z)$. Функция $F_1(z)$ регулярна вне K_1 и $F_1(\infty)=0$. Функция $F_1(z)$ — искомая.

Чтобы получить вторую функцию $F_2(z)$, положим

$$\Phi_n(z) = F(z) - \varphi_n(z), \quad z \in G_n. \quad (2.8)$$

Имеем

$$\Phi_n(z) = F(z) - \psi_n(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z).$$

Функция $\Phi_n(z)$ допускает аналитическое продолжение из области G_n через дугу C_n^1 . В силу (2.4), после продолжения получим $\Phi_n(z) =$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^2} \frac{F(t) dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z). \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что функция $\Phi_n(z)$ регулярна вне $\Gamma_n(K_2)$ и $\Phi_n(\infty)=0$. На основании (2.7) и (2.8)

$$|\Phi_n(z) - \Phi_m(z)| = |\varphi_n(z) - \varphi_m(z)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k, \quad (2.10)$$

$$|z-a| > \frac{\alpha}{m-1}, \quad |z-b| > \frac{\alpha}{m-1}.$$

Следовательно, последовательность $\{\Phi_n(z)\}$ равномерно сходится в каждой области, отстоящей на положительном расстоянии от K_2 .

Пусть $F_2(z)$ — предельная функция последовательности $\{\Phi_n(z)\}$. Она регулярна вне K_2 и $F_2(\infty)=0$. В силу (2.8),

$$F_1(z) + F_2(z) = F(z), \quad z \in D.$$

Функция $F_2(z)$ — вторая искомая функция.

(Заметим, что конструкция функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ в этой лемме и в следующей лемме взята из [64].)

Нам осталось произвести необходимые оценки. Будем оценивать функции $F_1(z)$ в точках z , удаленных от кривой K_1 на расстояние, большее $\alpha/(m-1)$. Сначала оценим коэффициенты $A_s^{(n)}$ и $B_s^{(n)}$ в формуле (2.5). Напомним, что

$$|F(z)| \leq M_n, \quad z \in C_n.$$

Имеем

$$|A_s^{(n)}| < M_{n+1} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s, \quad |B_s^{(n)}| < M_{n+1} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s,$$

ибо точки $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$ лежат внутри линии C_{n+1} и расстояние от точки a до этих точек не больше α/n . Теперь оценим число N из формулы (2.5). Имеем

$$\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) - \tau_n(z) = \sum_{s=N+1}^{\infty} \frac{A_s^{(n)}}{(z-a)^{s+1}} + \sum_{s=N+1}^{\infty} \frac{B_s^{(n)}}{(z-b)^{s+1}},$$

откуда

$$|\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) - \tau_n(z)| < \frac{2(n-1)M_{n+1}}{\alpha} \sum_{s=N+1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^s = \frac{2(n-1)nM_{n+1}}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N+1}$$

при $|z-a| > \alpha/(n-1)$, $|z-b| > \alpha/(n-1)$. Условие (2.6) будет выполнено, если

$$\frac{2(n-1)nM_{n+1}}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N+1} < \varepsilon_n.$$

В качестве N , на основании этого, выберем число

$$N = N_n = \left[\ln \frac{2(n-1)nM_{n+1}}{\alpha \varepsilon_n} : \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \right].$$

Очевидно, $N_n \uparrow \infty$.

Перейдем к оценке функции $\varphi_n(z)$. Из (2.7) находим

$$|\varphi_n(z)| \leq |\varphi_m(z)| + \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k < |\varphi_m(z)| + 1,$$

$$|z-a| > \frac{\alpha}{m-1}, \quad |z-b| > \frac{\alpha}{m-1}, \quad n > m. \quad (2.11)$$

Далее,

$$\varphi_m(z) = \psi_m(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k(z). \quad (2.12)$$

Оценим функцию $\psi_m(z)$, воспользовавшись представлением (2.3), в области

$$\rho(z, K_1) > \alpha/(m-1).$$

Сначала оценим расстояние от точки z до контура C_m^1 . Пусть t — произвольная точка контура C_m^1 и γ — точка K_1 , ближайшая к точке t . Очевидно, $|\gamma - t| \leq \alpha/m$. Поэтому

$$|z - t| = |(z - \gamma) + (\gamma - t)| \geq |z - \gamma| - |\gamma - t| \geq \frac{\alpha}{m-1} - \frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m(m-1)}.$$

В силу этого, из (2.3) получаем

$$|\psi_m(z)| < \mu \frac{m(m-1)M_m}{\alpha}, \quad \rho(z, K_1) > \frac{\alpha}{m-1} \quad (2.13)$$

(длины контуров C_m^1 не превосходят некоторой фиксированной величины μ).

На основании (2.5), учитывая полученные оценки для коэффициентов, находим для $k \leq m-1$

$$\begin{aligned} |\tau_k(z)| &< \frac{2(m-1)M_{k+1}}{\alpha} \sum_{s=0}^{N_k} \left(\frac{m-1}{k}\right)^s \leq \\ &\leq \frac{2(m-1)M_{k+1}}{\alpha} \sum_{s=0}^{N_k} m^s < \frac{2mM_m}{\alpha} \sum_{s=0}^{N_m} m^s, \\ |z-a| &> \frac{\alpha}{m-1}, \quad |z-b| > \frac{\alpha}{m-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В силу (2.11) — (2.14), получаем

$$\begin{aligned} |\varphi_n(z)| &< \mu \frac{m(m-1)M_m}{\alpha} + \frac{2(m-1)mM_m}{\alpha} \sum_{s=0}^{N_m} m^s + 1, \\ n > m, \quad \rho(z, K_1) &> \frac{\alpha}{m-1}. \end{aligned}$$

Величину, стоящую в правой части неравенства, обозначим Q_{m-1} . Она зависит при фиксированной области D , фиксированном ε_m только от M_m и M_{m+1} . Итак,

$$|\varphi_n(z)| \leq Q_{m-1}, \quad \rho(z, K_1) > \frac{\alpha}{m-1}, \quad n > m.$$

Отсюда

$$F_1(z) \leq Q_m, \quad \rho(z, K_1) > \frac{\alpha}{m}.$$

Можно считать, что α — целое число, не меньшее единицы. Для $m = \alpha n$, где n — целое, получим

$$|F_1(z)| \leq Q_{\alpha n} = P_n, \quad \rho(z, K_1) \geq \frac{1}{n}.$$

Любая точка z кривой $\Gamma_n(K_1)$ удовлетворяет условию $\rho(z, K_1) \geq 1/n$. Поэтому

$$|F_1(z)| \leq P_n, \quad z \in \Gamma_n(K_1).$$

При оценке функции $F_2(z)$ будем отправляться от неравенства

$$|\Phi_n(z)| \leq |\Phi_m(z)| + \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon_k < |\Phi_m(z)| + 1, \quad n > m,$$

вытекающего из (2.10), и равенства (2.9)

$$\Phi_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m^2} \frac{F(t) dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k(z).$$

Для $F_2(z)$ получим ту же оценку

$$|F_2(z)| \leq P_n, \quad z \in \Gamma_n(K_2).$$

Лемма полностью доказана.

3. Представление специальной функции в виде суммы других специальных функций.

Лемма 5.2.2. Пусть D — открытая конечная выпуклая область, C — ее граница, K — фиксированная дуга границы C , отличная от всей кривой C , $F(z)$ — функция, аналитическая и однозначная вне K , причем $F(\infty) = 0$ и

$$|F(z)| \leq P_n, \quad z \in \Gamma_n(K), \quad n > n_0. \quad (2.15)$$

Пусть, далее, s — внутренняя точка дуги K и K_1, K_2 — части, на которые точка s разделяет дугу K . Тогда существуют функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ со следующими свойствами:

1) функция $F_j(z)$ ($j=1, 2$) регулярна вне дуги K_j , причем $F_j(\infty) = 0$;

2) имеет место оценка

$$|F_j(z)| \leq R_n, \quad z \in \Gamma_n(K_j) \quad (j=1, 2; n > n_0),$$

где числа R_n зависят от $\{P_n\}$, но не зависят от конкретной функции $F(z)$ из класса (2.15) и точки $s \in K$;

3) вне дуги K

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z).$$

Доказательство. Возьмем положительные числа e_n , $e_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} e_n < 1$. Пусть a и b — концы дуги K , a и c — концы дуги K_1 , c и b — концы дуги K_2 (точки a, c, b расположены на C против часовой стрелки). Напомним, как образуется контур $\Gamma_n(K_1)$, зная при этом, как образованы кривые C_n и C_n^* . Пусть a_n — ближайшая к точке a точка кривой C_n , c_n — ближайшая к точке c точка кривой C_n , $K_n(a)$ — окружность с центром в точке a радиуса $\rho(a, a_n)$, $K_n(c)$ — окружность с центром в точке c радиуса $\rho(c, c_n)$.

В случае, когда окружности $K_n(a)$ и $K_n(c)$ пересекаются в некоторой точке d , лежащей на C_n^* или вне ее, кривая $\Gamma_n(K_1)$ состоит из дуги $c_n a_n$ кривой C_n , дуги $a_n d$ окружности $K_n(a)$ и дуги $d c_n$ окружности $K_n(c)$.

В противоположном случае обозначим $a_n^* c_n^*$ следующую дугу кривой C_n^* : на этой дуге, исключая концы, нет точек окружностей $K_n(a)$ и $K_n(c)$, в точке a_n^* окружность $K_n(a)$ пересекает кривую C_n^* , в точке c_n^* окружность $K_n(c)$ пересекает кривую C_n^* . Кривая $\Gamma_n(K_1)$ состоит тогда из дуги $c_n a_n$ кривой C_n , дуги $a_n a_n^*$ окружности $K_n(a)$, дуги $a_n^* c_n^*$ кривой C_n^* и дуги $c_n^* c_n$ окружности $K_n(c)$. Точки a и c лежат внутри кривой $\Gamma_n(K_1)$. Аналогично образуется кривая $\Gamma_n(K_2)$.

Обозначим $-C_n^1$ незамкнутую кривую, составленную из дуги $c_n a_n$ кривой C_n , дуги $a_n a_n^*$ окружности $K_n(a)$ и (если имеется дуга $a_n^* c_n^*$) дуги $a_n^* c_n^*$ кривой C_n^* .

Начальная точка дуги $-C_n^1$ есть c_n , конечная, обозначим ее c_n^* , есть либо a_n^* , либо c_n^* . В первом случае окружности $K_n(a)$ и $K_n(c)$ пересекаются в точке d , которая лежит на C_n^* или вне ее. Тогда $|c - a_n^*| \leq |c - c_n|$. Всегда, следовательно, $|c - c_n^*| \leq |c - c_n|$. Кривую, получаемую из $\Gamma_n(K)$ удалением части ее $-C_n^1$, обозначим $-C_n^2$. Пусть C_n^1 и C_n^2 — кривые, отличающиеся соответственно от $-C_n^1$ и $-C_n^2$ только направлением обхода. При $n \rightarrow \infty$ кривая C_n^1 стягивается к дуге K_1 , кривая C_n^2 — к дуге K_2 . Внешность кривой $\Gamma_n(K_1)$ обозначим G_n .

Положим

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z}, \quad z \in G_n. \quad (2.16)$$

Эта функция аналитически продолжается из G_n через контур C_n^1 ; в результате продолжения получим

$$\psi_n(z) = F(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z}, \quad z \notin \bar{G}_n. \quad (2.17)$$

После этого доказательство пойдет по схеме доказательства леммы 5.2.1.

Имеем

$$\begin{aligned} \psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{n+1}^1} \frac{F(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k^{(n)}}{(z-c)^{k+1}}, \quad |z-c| > \frac{n}{n-1} > |c - c_{n-1}|, \end{aligned}$$

где

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{n+1}^1} (t-c)^k F(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} (t-c)^k F(t) dt.$$

Положим

$$\tau_n(z) = \sum_{j=0}^N \frac{A_j^{(n)}}{(z-c)^{j+1}}.$$

Выберем N с условием:

$$|\psi_n(z) - \psi_{n+1}(z) - \tau_n(z)| \leq e_n, \quad |z-c| > \frac{\alpha}{n-1}. \quad (2.18)$$

Теперь положим

$$\varphi_1(z) = \psi_1(z),$$

$$\varphi_n(z) = \psi_1(z) + \sum_{k=1}^{n-1} [\psi_{k+1}(z) - \psi_k(z) + \tau_k(z)] \quad (n > 1).$$

Имеем

$$\varphi_n(z) = \psi_n(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z) \quad (n > 1),$$

откуда видно, что функция $\varphi_n(z)$ регулярна вне контура $\Gamma_n(K_1)$, причем $\varphi_n(\infty) = 0$. Имеем, далее,

$$\varphi_n(z) = \varphi_m(z) + \sum_{k=m}^{n-1} [\psi_{k+1}(z) - \psi_k(z) + \tau_k(z)], \quad n > m,$$

откуда, в силу (2.18),

$$|\Phi_n(z) - \Phi_m(z)| < \sum_{k=m}^{n-1} e_k, \quad |z - c| > \frac{a}{m-1}, \quad n > m. \quad (2.19)$$

Следовательно, последовательность $\{\Phi_n(z)\}$ равномерно сходится в любой области, которая отстоит на положительном расстоянии от дуги K_1 . Предельную функцию обозначим $F_1(z)$. Она регулярна вне K_1 и $F_1(\infty) = 0$.

Положим

$$\Phi_n(z) = F(z) - \Phi_n(z), \quad z \in G_n. \quad (2.20)$$

Имеем

$$\Phi_n(z) = F(z) - \psi_n(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z).$$

Функция $\Phi_n(z)$ аналитически продолжается через контур C_n^1 ; после продолжения, в силу (2.17), она равна

$$\Phi_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z).$$

Для z , лежащих внутри замкнутого контура $\Gamma_n(K)$, верно равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(K)} \frac{F(t) dt}{t-z} = 0,$$

поскольку $F(\infty) = 0$. Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^1} \frac{F(t) dt}{t-z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^2} \frac{F(t) dt}{t-z}$$

и, значит,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n^2} \frac{F(t) dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k(z).$$

Видим, что функция $\Phi_n(z)$ регулярна вне $\Gamma_n(K_2)$ и $\Phi_n(\infty) = 0$. На основании (2.19) и (2.20)

$$|\Phi_n(z) - \Phi_m(z)| = |\Phi_n(z) - \Phi_m(z)| < \sum_{k=m}^{n-1} e_k, \quad |z - c| > \frac{a}{m-1}, \quad n > m, \quad (2.21)$$

откуда заключаем, что $\{\Phi_n(z)\}$ равномерно сходится в каждой области, которая на положительное расстояние удалена от K_2 . Пусть $F_2(z)$ — предельная функция этой последовательности. Она регулярна вне K_2 и $F_2(\infty) = 0$. В силу (2.20), вне дуги K

$$F_1(z) + F_2(z) = F(z).$$

Функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — искомые.

Получим соответствующие оценки. Будем оценивать $F_1(z)$ в точках z , удаленных от K_1 на расстояние, большее $a/(m-1)$.

Имеем, в силу условия (2.15),

$$|A_s^{(n)}| < 2P_{n+1} \left(\frac{a}{n}\right)^s,$$

поскольку точки $c_n, c_{n+1}, c_n^*, c_{n+1}^*$ лежат на линии $\Gamma_n(K)$ или внутри ее и от точки c удалены не более чем на a/n . На основании этой оценки неравенство (2.18) будет обеспечено, если будет выполняться условие

$$\left| \sum_{s=N+1}^{\infty} \frac{A_s^{(n)}}{(z-c)^{s+1}} \right| < \frac{2(n-1)P_{n+1}}{a} \sum_{s=N+1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^s = \frac{2(n-1)P_{n+1}}{a} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{N+1} < e_n$$

для $|z - c| > \frac{a}{n-1}$. Отсюда для N получаем значение

$$N = N_n = \left[\ln \frac{2(n-1)P_{n+1}}{ae_n} : \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \right], \quad N_n \uparrow \infty.$$

Оценим функцию $\Phi_n(z)$. Из (2.19) находим

$$|\Phi_n(z)| < |\Phi_m(z)| + 1, \quad |z - c| > \frac{a}{m-1}, \quad n > m. \quad (2.22)$$

Но

$$\Phi_m(z) = \psi_m(z) + \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k(z). \quad (2.23)$$

Из представления (2.16) получаем

$$|\psi_m(z)| < \mu \frac{m(m-1)}{a} P_m, \quad \rho(z, K_1) > \frac{a}{m-1}, \quad (2.24)$$

поскольку на контуре C_m^1 выполнено условие (2.15) и точки контура C_m^1 удалены от точки z на расстояние, не меньшее $a/m(m-1)$. Последнее утверждение доказывается так. Пусть t — точка контура C_m^1 и γ — точка K_1 , ближайшая к точке t ,

Очевидно, $|\gamma - t| \leq \alpha/m$, и потому

$$|z - t| = |(z - \gamma) + (\gamma - t)| \geq |z - \gamma| - |\gamma - t| \geq \frac{\alpha}{m-1} - \frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m(m-1)}.$$

Для $k \leq m-1$, учитывая оценку для коэффициентов $A_s^{(n)}$, имеем, далее,

$$|\tau_k(z)| < \frac{2(m-1)P_{k+1}}{\alpha} \sum_{s=0}^{N_k} \left(\frac{m-1}{k}\right)^s < \frac{2mP_m}{\alpha} \sum_{s=0}^{N_m} m^s, \quad (2.25)$$

$$|z - c| > \frac{\alpha}{m-1}.$$

В силу (2.22) — (2.25), получаем

$$|\varphi_n(z)| < \mu \frac{m(m-1)P_m}{\alpha} + \frac{2(m-1)mP_m}{\alpha} \sum_{s=0}^{N_m} m^s + 1 = Q_{m-1},$$

$$n > m, \quad \rho(z, K_1) > \frac{\alpha}{m-1}.$$

Отсюда

$$|F_1(z)| \leq Q_m, \quad \rho(z, K_1) \geq \frac{\alpha}{m}.$$

Как и ранее, будем считать, что α — целое, не меньшее единицы. Для $m = \alpha n$ получим

$$|F_1(z)| \leq Q_{\alpha n} = R_n, \quad \rho(z, K_1) \geq 1/n.$$

Любая точка z кривой $\Gamma_n(K_1)$ удовлетворяет условию $\rho(z, K_1) \geq 1/n$. Поэтому

$$|F_1(z)| \leq R_n, \quad z \in \Gamma_n(K_1).$$

Заметим, что R_n не зависит от точки c , которая разделяет дугу K на части K_1 и K_2 .

Оценка функции $F_2(z)$ проводится на основе неравенства

$$|\Phi_n(z)| \leq |\Phi_m(z)| + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k < |\Phi_m(z)| + 1$$

и соотношения

$$\Phi_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_m^2} \frac{F(t) dt}{t-z} - \sum_{k=1}^{m-1} \tau_k(z).$$

Получится, что

$$|F_2(z)| \leq R_n, \quad z \in \Gamma_n(K_2),$$

где R_n — те же, что и выше. Лемма доказана.

4. Оценка целой функции экспоненциального типа.

Лемма 5.2.3. Пусть D — конечная выпуклая область, C — ее граница, K — дуга границы C , отличная от всей кривой C , $F(z)$ — функция, аналитическая и однозначная вне дуги K , причём $F(\infty) = 0$ и

$$|F(z)| \leq R_n, \quad z \in \Gamma_n(K), \quad n > n_0. \quad (2.26)$$

Пусть затем φ_0 — угол, обладающий свойством: луч l_0 : $z = re^{-i\varphi_0}$, $r \geq 0$, перпендикулярен прямой l_1 , проходящей через концы дуги K , и направлен в ту сторону, с которой от прямой l_1 лежит дополнительная дуга $C \setminus K$. Пусть, наконец, h_0 — расстояние от прямой l_1 до начала координат ($h_0 > 0$, если прямая l_1 пересекает луч l_0 , и $h_0 < 0$, если l_1 пересекает продолжение луча l_0) и

$$A = \max_{z \in \Gamma_{n_0}(K)} |z|.$$

При этих условиях целая функция экспоненциального типа

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(K)} F(z) e^{z\lambda} dz, \quad n \geq n_0,$$

имеет вблизи луча $\lambda = re^{i\varphi_0}$, $r \geq 0$, оценку

$$|L(re^{i\varphi_0} + \eta)| < q(r) e^{h_0 r}, \quad |\eta| \leq 1,$$

где

$$q(r) = \mu e^A \min_{n \geq n_0} R_n \exp \frac{ar}{n}$$

(числа α и μ были определены выше).

Доказательство. Длина контура $\Gamma_n(K)$ не превосходит величины μ . Имея это в виду, на основании (2.26), получаем

$$|L(re^{i\varphi_0} + \eta)| \leq \mu e^A R_n \max_{z \in \Gamma_n(K)} \exp\{|z| \cos(\varphi_0 + \psi)\} r, \quad z = |z| e^{i\psi}.$$

Величина $|z| \cos(\varphi_0 + \psi)$ равна проекции вектора z на луч l_0 , который, напомним, перпендикулярен прямой l_1 , проходящей через концы дуги K . Если провести прямую l_2 , параллельную l_1 на расстоянии α/n от нее и с той стороны, с которой не лежит дуга K , то контур $\Gamma_n(K)$ окажется лежащим по одну сторону от l_2 . Поэтому

$$|z| \cos(\varphi_0 + \psi) \leq h_0 + \alpha/n.$$

В силу этого,

$$|L(re^{i\varphi_0} + \eta)| \leq \mu e^A R_n e^{h\varphi} \exp \frac{\alpha r}{n}, \quad n \geq n_0.$$

Левая часть не зависит от n , поэтому

$$|L(re^{i\varphi_0} + \eta)| \leq \mu e^A e^{h\varphi} \min_{n \geq n_0} R_n \exp \frac{\alpha r}{n},$$

что и надо было доказать.

Заметим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln q(r)}{r} = 0.$$

Действительно,

$$\frac{\ln q(r)}{r} \leq \frac{\ln(\mu e^A R_n)}{r} + \frac{\alpha}{n}, \quad n \geq n_0.$$

Второе слагаемое в правой части меньше ε при большом n . Фиксируем такое n , получим, что первое слагаемое меньше ε при достаточно больших r . В результате левая часть становится меньше 2ε при достаточно больших r , что и означает, что она стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

5. Доказательство теоремы. Пусть D — конечная открытая выпуклая область, C — ее граница, $F(z)$ — аналитическая в D функция из класса $A\{M_n\}$. Опишем около C прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Пусть верхнее основание прямоугольника соприкасается с контуром C в точке A_1 , нижнее основание — в точке A_3 , левая боковая сторона — в точке A_2 , правая — в точке A_4 (если соприкосновение происходит по целому отрезку, возьмем в качестве A_k какую-нибудь внутреннюю точку этого отрезка).

По лемме 5.2.1 в области D

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z), \quad z \in D,$$

где $F_1(z)$ регулярна вне дуги $K_1 = \overline{A_1 A_2 A_3}$, $F_2(z)$ регулярна вне дуги $K_2 = \overline{A_3 A_4 A_2}$, причем $F_j(\infty) = 0$ ($j = 1, 2$) и

$$|F_j(z)| \leq P_n, \quad z \in \Gamma_n(K_j) \quad (j = 1, 2; n \geq n_0).$$

Числа P_n зависят только от $\{M_n\}$ (область D здесь и всюду в дальнейшем фиксирована).

По лемме 5.2.2 вне дуги K_j

$$F_j(z) = F_{j1}(z) + F_{j2}(z) \quad (j = 1, 2),$$

где $F_{j1}(z)$ регулярна вне дуги K_{j1} , $F_{j2}(z)$ регулярна вне дуги K_{j2} , причем $F_{jk}(\infty) = 0$ и

$$|F_{jk}(z)| \leq R_n, \quad z \in \Gamma_n(K_{jk}) \quad (j, k = 1, 2; n \geq n_0).$$

Здесь K_{11} — дуга $\overline{A_1 A_2}$, K_{12} — дуга $\overline{A_2 A_3}$, K_{21} — дуга $\overline{A_3 A_4}$, K_{22} — дуга $\overline{A_4 A_1}$, числа R_n зависят только от $\{P_n\}$, а в конечном счете только от $\{M_n\}$.

В итоге имеем

$$F(z) = F_{11}(z) + F_{12}(z) + F_{21}(z) + F_{22}(z), \quad z \in D. \quad (2.27)$$

Каждую функцию $F_{jk}(z)$ будем, согласно лемме 5.2.2, представлять в виде суммы двух функций. Ограничимся рассмотрением первой функции $F_{11}(z)$. Рассуждения с другими функциями будут совершенно аналогичными.

Ради простоты обозначим $\Phi(z) = F_{11}(z)$, $S = K_{11} = \overline{A_1 A_2}$. На дуге S (на ней не лежат точки A_3 и A_4) возьмем произвольную точку A . Она разделит дугу S на две части S_1 и S_2 (S_1 имеет концы в точках A_1 и A , S_2 — в точках A и A_2). По лемме 5.2.2 вне S

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

где $\Phi_j(z)$ регулярна вне дуги S_j , причем $\Phi_j(\infty) = 0$ и

$$|\Phi_j(z)| < Q_n, \quad z \in \Gamma_n(S_j) \quad (j = 1, 2; n \geq n_0).$$

Числа Q_n зависят только от $\{R_n\}$, а в итоге только от последовательности $\{M_n\}$. Напомним, что числа Q_n не зависят от того, какую точку A взять на дуге S . Эти числа будут фигурировать и при рассмотрении остальных функций в равенстве (2.27).

Образуем целые функции экспоненциального типа

$$L_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(S_j)} \Phi_j(z) e^{\lambda z} dz \quad (j = 1, 2; n \geq n_0) \quad (2.28)$$

и воспользуемся леммой 5.2.3. Пусть φ_1 — такой угол, что луч $l_0: z = re^{-i\varphi_1}$, $r \geq 0$, перпендикулярен прямой l_1 , проходящей через точки A_1 и A — концы дуги S_1 , и направлен в ту сторону от l_1 , где лежит дополнительная дуга $\overline{A A_4 A_1}$; h_1 — расстояние от прямой l_1 до начала координат ($h_1 > 0$, если прямая l_1 пересекает луч l_0 , и $h_1 < 0$, если l_1 пересекает продолжение луча l_0). Аналогично, пусть φ_2 — такой угол, что луч $l'_0: z = re^{-i\varphi_2}$, $r \geq 0$, перпендикулярен прямой l'_1 , проходящей через точки A и A_2 — концы дуги S_2 , и направлен в ту сторону от этой прямой, где лежит дополнительная дуга $\overline{A_2 A_4 A}$; h_2 —

расстояние от прямой l'_1 до начала координат. Очевидно, $0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$. По лемме 5.2.3

$$|L_1(re^{i\varphi_1} + \eta)| < q(r)e^{\mu_1 r}, \quad |\eta| \leq 1, \quad r \geq 0, \quad (2.29)$$

где

$$q(r) = B \min_{n \geq n_0} Q_n \exp \frac{\alpha r}{n}, \quad r \geq 0.$$

Здесь B — постоянная, которая зависит только от области D . Поскольку

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln q(r)}{r} = 0,$$

на основании свойства 6) уточненного порядка (см. гл. I, § 2, п. 1) имеется уточненный порядок

$$\rho(r) = 1 - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}, \quad \psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.30)$$

удовлетворяющий условию

$$q(r) < \exp r^{\rho(r)}, \quad r > r_0.$$

Число r_0 будем считать таким, что

$$\frac{\psi(\ln r_0)}{\ln r_0} < 1.$$

Имея это в виду, согласимся считать $\rho(r) = \rho(r_0) > 0$ для $0 \leq r < r_0$. При подходящем выборе постоянной K при всех $r \geq 0$ тогда будем иметь

$$q(r) < K \exp r^{\rho(r)}, \quad r \geq 0. \quad (2.31)$$

Возьмем число $\tau \geq 1$. По теореме 1.2.7 имеется целая функция

$$N(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^k}{\mu_k^k}\right), \quad \mu_k > 0 \quad (k \geq 1)$$

конечного типа при уточненном порядке (2.30), которая вне кружков радиуса 1 с центрами в своих нулях имеет следующую оценку снизу:

$$\ln |N(\lambda)| > (\pi\tau - \varepsilon) |\lambda|^{\rho(|\lambda|)}, \quad |\lambda| > r_0(\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое. Выберем $\varepsilon < 1$. Тогда вне указанных кружков

$$\ln |N(\lambda)| > 2 |\lambda|^{\rho(|\lambda|)}, \quad |\lambda| \geq r_1.$$

При подходящей постоянной $M > 0$ получим неравенство

$$|N(\lambda)| > M(1 + r^2) e^{r^{\rho(r)}}, \quad r = |\lambda|, \quad \left| \lambda - \mu_n e^{\frac{k\pi}{2} i} \right| \geq 1 \quad (2.32)$$

$$(k=0, 1, 2, 3; n=1, 2, \dots).$$

Оно имеет место всюду вне отмеченных кружков. Теперь рассмотрим функции

$$\varphi_j(z) = \int_{\gamma_j} \frac{L_j(\lambda)}{N(\lambda)} e^{-z\lambda} d\lambda \quad (j=1, 2), \quad (2.33)$$

где γ_j — контур, идущий из начала координат в бесконечность. Более точно, контур γ_j устроен следующим образом. Обозначим a точку $(1+i)$, через β_1 — луч, выходящий из a параллельно положительной части действительной оси, через β_2 — луч, выходящий из a параллельно положительной части мнимой оси. В угле между лучами β_1 и β_2 выполняется оценка (2.32). Можно считать (за счет выбора M), что эта оценка выполняется и на отрезке, соединяющем начало координат с точкой a .

Рассмотрим три случая в зависимости от того, будет ли угол φ_j из неравенства (2.29) строго заключен в пределах $0 < \varphi_j < \pi/2$ или он будет равен нулю, или, наконец, он будет равен $\pi/2$.

Пусть сначала $0 < \varphi_j < \pi/2$. При $\varphi_j = \pi/4$ контур γ_j — луч $\lambda = re^{i\varphi_j}$, $r \geq 0$. При $0 < \varphi_j < \pi/4$ контур γ_j идет из начала координат по отрезку в точку a , из точки a идет параллельно действительной оси до точки a_j пересечения луча β_1 с лучом Λ_j : $\lambda = re^{i\varphi_j}$, $r \geq 0$, из точки a_j идет по лучу Λ_j в бесконечность. При $\pi/4 < \varphi_j < \pi/2$ контур γ_j идет из начала координат по отрезку в точку a , из точки a — параллельно мнимой оси до точки b_j пересечения луча β_2 с лучом Λ_j , из точки b_j — по лучу Λ_j в бесконечность.

В случае $\varphi_j = 0$ контур γ_j идет из начала координат по отрезку в точку a , а из точки a — по лучу β_1 в бесконечность.

Наконец, в случае $\varphi_j = \pi/2$ контур γ_j идет из начала координат по отрезку в точку a , а из точки a — по лучу β_2 в бесконечность.

Заметим, что, какова бы ни была точка λ контура γ_j , имеется точка λ^* луча Λ_j , удовлетворяющая условиям

$$|\lambda| = |\lambda^*|, \quad |\lambda - \lambda^*| \leq 1. \quad (2.34)$$

В силу этого и на основании (2.29),

$$|L_I(\lambda)| < q(r) e^{hr}, \quad \lambda \in \gamma_I, \quad r = |\lambda|.$$

Отсюда, учитывая (2.31), далее получим

$$|L_I(\lambda)| < K e^{hr} e^{p(r)}, \quad \lambda \in \gamma_I, \quad r = |\lambda|. \quad (2.35)$$

На контуре γ_I имеется оценка (2.32). В силу этой оценки и оценки (2.35) имеем

$$\left| \frac{L_I(\lambda)}{N(\lambda)} \right| < K_1 \frac{e^{hr}}{1+r^2}, \quad \lambda \in \gamma_I, \quad r = |\lambda|, \quad K_1 = \frac{K}{M}. \quad (2.36)$$

Осталось в интеграле (2.33) оценить показательный множитель. Имея в виду (2.34), запишем

$$e^{-z\lambda} = e^{-z\lambda^*} e^{-z\eta}, \quad |\eta| \leq 1.$$

Учтем, что $|\lambda| = |\lambda^*| = r$, $\arg \lambda^* = \varphi_I$. Если $\arg z = \psi$, то

$$|e^{-z\lambda}| \leq e^{|\lambda|} \exp[-r|z| \cos(\varphi_I + \psi)].$$

На основании (2.36) подынтегральная функция в интеграле (2.33) имеет на всем контуре γ_I оценку

$$\left| \frac{L_I(\lambda)}{N(\lambda)} e^{-z\lambda} \right| < \frac{K_1 e^{|\lambda|}}{1+r^2} \exp\{[h_I - |z| \cos(\varphi_I + \psi)]r\}. \quad (2.37)$$

Выясним, где сходится интеграл и какова его оценка.

Пусть сначала $j=1$. Выражение $|z| \cos(\varphi_I + \psi)$ представляет собой проекцию вектора z на луч l_0 : $\lambda = |\lambda| e^{-i\varphi_I}$. Когда точка z находится в полуплоскости D_1 , расположенной справа от прямой l_1 (прямая l_1 проходит через точки A и A_1), квадратная скобка в (2.37) отрицательна. Следовательно, интеграл (2.33) сходится и представляет собой аналитическую функцию в полуплоскости D_1 , причем

$$|\psi_1(z)| < K_1 e^{|\lambda|} \int_{\gamma_I} \frac{d|\lambda|}{1+r^2}.$$

Интегралы по отрезку от начала координат до точки a и от точки a_I (или b_I) по лучу λ_I не превосходят в сумме

$$\int_0^\infty \frac{dr}{1+r^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл по горизонтальному участку (или вертикальному участку) не превосходит

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2+x^2} < \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

В итоге

$$|\psi_1(z)| < \pi K_1 e^{|\lambda|}, \quad z \in D_1.$$

Аналогично получим, что функция $\psi_2(z)$ является аналитической в полуплоскости D_2 , расположенной справа от прямой l'_1 (эта прямая проходит через точки A и A_2), и там

$$|\psi_2(z)| < \pi K_1 e^{|\lambda|}, \quad z \in D_2.$$

Рассмотрим сумму

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z).$$

Она регулярна в угле $E = D_1 \cap D_2$, и в этом угле

$$|\psi(z)| < 2\pi K_1 e^{|\lambda|}, \quad z \in E. \quad (2.38)$$

Угол E имеет вершину в точке A . Убедимся, что функция $\psi(z)$ не зависит от положения точки A на дуге $A_1 A_2$. С этой целью в представлении (2.33) будем непрерывно деформировать контур γ_I так, чтобы он перешел в луч γ , идущий из начала координат под углом $\pi/4$ к положительной части действительной оси. Поскольку у функции $N(\lambda)$ между контурами γ_I и γ нет нулей, значение интеграла (2.33) при деформации контура меняться не будет. Так как функция $L_I(\lambda)$ — целая экспоненциального типа, а $N(\lambda)$ имеет оценку (2.32), интеграл (2.33) будет сохранять смысл по крайней мере для достаточно больших по модулю z , лежащих в четвертом квадранте. Для таких z

$$\psi_I(z) = \int_{\gamma} \frac{L_I(\lambda)}{N(\lambda)} e^{-z\lambda} d\lambda.$$

Отсюда

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z) = \int_{\gamma} \frac{L_1(\lambda) + L_2(\lambda)}{N(\lambda)} e^{-z\lambda} d\lambda.$$

Но

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) + L_2(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(S_1)} \Phi_1(z) e^{z\lambda} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(S_2)} \Phi_2(z) e^{z\lambda} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(S)} \Phi_1(z) e^{z\lambda} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(S)} \Phi_2(z) e^{z\lambda} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(S)} [\Phi_1(z) + \Phi_2(z)] e^{z\lambda} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n(S)} \Phi(z) e^{z\lambda} dz. \end{aligned}$$

Правая часть не связана с положением точки A на дуге $\widetilde{A_1 A_2}$. Это и доказывает независимость функции $\psi(z)$ от положения точки A .

Из независимости $\psi(z)$ от положения точки A следует, что функция $\psi(z)$ регулярна в любом угле $E = D_1 \cap D_2$ с вершиной в произвольной точке $A \in \widetilde{A_1 A_2}$ и в каждом таком угле имеет оценку (2.38). В объединении указанных углов содержится область D .

Положим

$$P = \max_{z \in \bar{D}} e^{|z|}.$$

Из (2.38) получаем

$$|\psi(z)| < 2\pi PK_1, \quad z \in D. \quad (2.39)$$

Пусть z_0 — некоторая точка области D . Рассмотрим функцию

$$f_{11}(z) = \int_{z_0}^z \psi(z) dz, \quad z \in D,$$

где интегрирование производится по отрезку, соединяющему точки z_0 и z . Из оценки (2.39) следует, что функция $f_{11}(z)$ равномерно непрерывна в области D . Доопределив ее естественным образом на границе, получим функцию $\bar{f}_{11}(z)$, аналитическую в D и непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$.

Положим теперь

$$M(\lambda) = \lambda N(-\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

и докажем, что

$$M(D) \bar{f}_{11}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \bar{f}_{11}^{(n)}(z) = \Phi(z) = F_{11}(z), \quad z \in D.$$

Функция $M(\lambda)$ имеет конечный тип при уточненном порядке (2.30). Так как

$$\frac{r^{\rho(r)}}{r} = e^{-\psi(\ln r)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

то $M(\lambda)$ растет не быстрее целой функции обычного первого порядка минимального типа. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |c_n|} = 0.$$

Отсюда следует, что если $\varphi(z)$ регулярна в окрестности $|z - a| \leq \rho$ и в этой окрестности $|\varphi(z)| \leq K$, в силу чего

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{\rho K}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+1}}, \quad |z - a| \leq \frac{\rho}{2},$$

то

$$|c_n \varphi^{(n)}(z)| < 2A(e) K \left(\frac{2e}{\rho}\right)^n, \quad |z - a| \leq \frac{\rho}{2},$$

каково бы ни было положительное e . Значит, ряд, определяющий $M(D)\varphi$, равномерно сходится в достаточно малой окрестности точки a . Более того,

$$|M(D)\varphi(z)| \leq B \max_{|t-a| \leq \rho} |\varphi(t)|, \quad |z - a| \leq \frac{\rho}{2}. \quad (2.40)$$

Отсюда следует, что оператором $M(D)$ можно действовать на функцию $\bar{f}_{11}(z)$ во всей области D . Пусть

$$N(-\lambda) = \sum_0^{\infty} a_n \lambda^n,$$

тогда

$$M(D) \bar{f}_{11}(z) = \sum_0^{\infty} a_n \bar{f}_{11}^{n+1}(z).$$

Но $\bar{f}_{11}'(z) = \psi(z)$. Поэтому

$$M(D) \bar{f}_{11}(z) = N(-D) \psi(z) = \sum_0^{\infty} a_n \psi^{(n)}(z).$$

В силу линейности оператора,

$$N(-D) \psi(z) = N(-D) \psi_1(z) + N(-D) \psi_2(z).$$

На основании формулы (2.33) получаем

$$N(-D) \psi_j(z) = \int_{\gamma} L_j(\lambda) e^{-z\lambda} d\lambda, \quad z \in D_j \quad (j=1, 2).$$

Правая часть представляет собой функцию, ассоциированную по Борелю с целой функцией $L_1(\lambda)$. В силу (2.28), эта ассоциированная функция равна $\Phi_j(z)$. Таким образом,

$$N(-D)\psi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \Phi(z) = F_{11}(z), \\ z \in E = D_1 \cap D_2.$$

Левая часть регулярна в D , правая часть также регулярна в D . Последнее равенство, установленное в угле E , имеет место во всей области D . Итак,

$$M(D)f_{11}(z) = F_{11}(z), \quad z \in D.$$

Подведем итог. Исходную функцию $F(z)$ из класса $A\{M_n\}$ мы представили в виде (2.27). Далее построили целую функцию $M(\lambda)$, растущую не быстрее функции первого порядка минимального типа. Эта функция для данной фиксированной области D зависит только от последовательности $\{M_n\}$. Отправившись от функции $F_{11}(z)$, мы, наконец, сконструировали функцию $f_{11}(z)$, которая регулярна в D , непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет условию

$$M(D)f_{11}(z) = F_{11}(z), \quad z \in D.$$

Все функции из правой части соотношения (2.27) равноправны между собой. Поэтому, действуя аналогично предыдущему, можно сконструировать функции $f_{12}(z)$, $f_{21}(z)$, $f_{22}(z)$, регулярные в D и непрерывные в $\bar{D}$, для которых

$$M(D)f_{jk}(z) = F_{jk}(z), \quad z \in D,$$

причем, что очень существенно, функция $M(\lambda)$ здесь будет та же самая, что и выше. Положим

$$f(z) = f_{11}(z) + f_{12}(z) + f_{21}(z) + f_{22}(z).$$

Эта функция регулярна в D , непрерывна в $\bar{D}$ и

$$M(D)f(z) = F(z).$$

Теорема доказана.

§ 3. Случай произвольной границы

1. Теоремы о разложении. На основании теоремы 5.2.1 установим следующую теорему о разложении в ряд Дирихле функции $F(z)$, аналитической в произвольной конечной открытой выпуклой области D .

Теорема 5.3.1. Пусть D — конечная выпуклая область, C — ее граница, $K(\varphi)$ — опорная функция D , $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа и вполне регулярного роста со свойствами:

- 1) все нули $L(\lambda)$, обозначим их $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, — простые;
- 2) при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |L'(\lambda_k)| > [h(\varphi_k) - \varepsilon]r,$$

$$\varphi_k = \arg \lambda_k, \quad k > k_0(\varepsilon);$$

- 3) имеет место оценка сверху

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1.$$

Пусть затем $M(\lambda)$ — целая функция с ростом не выше первого порядка минимального типа, о которой речь идет в теореме 5.2.1 и о которой известно следующее: каждой функции $F(z)$ из класса $A\{M_n\}$ соответствует функция $f(z)$, аналитическая в D , непрерывная в $\bar{D}$ и такая, что

$$M(D)f(z) = F(z), \quad z \in D.$$

При этих условиях для функции $F(z)$ из класса $A\{M_n\}$ имеется представление

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{M(\lambda_v) \omega_L(\lambda_v, f)}{L'(\lambda_v)} e^{\lambda_v z}, \quad z \in D,$$

где

$$\omega_L(\mu, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^1 f(t - \xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt.$$

Доказательство совершенно простое. Для функции $f(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, имеем, согласно теореме 4.6.4, разложение

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\omega_L(\lambda_v, f)}{L'(\lambda_v)} e^{\lambda_v z}, \quad z \in D.$$

Ряд равномерно сходится внутри области D . Согласно оценке (2.40)

$$|M(D)\varphi(z)| < B \max_{|t-a| \leq \rho} |\varphi(t)|, \quad |z-a| \leq \rho/2,$$

оператор $M(D)$ обладает свойством: если в окрестности точки a последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ равномерно сходится к $\varphi(z)$, то

в меньшей окрестности

$$M(D) \varphi_n(z) \rightarrow M(D) \varphi(z), \quad n \rightarrow \infty.$$

На основании этого свойства

$$F(z) = M(D) f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{M(\lambda_v) \omega_{\lambda_v}(\lambda_v, f)}{L^v(\lambda_v)} e^{\lambda_v z},$$

ибо

$$M(D) e^{\lambda z} = M(\lambda) e^{\lambda z}.$$

Теорема доказана.

Всякая функция $F(z)$, аналитическая в D , входит в некоторый класс $A\{M_n\}$, например в класс $A\{M_n\}$, где

$$M_n = \max_{z \in C_n} |F(z)| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Кроме того, всегда имеются функции $L(\lambda)$ со свойствами, указанными в теореме. Нули λ_v этой функции можно еще выбрать так, что $|\lambda_v|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры. Поэтому как следствие получается

Теорема 5.3.2. Пусть D — конечная выпуклая область. Тогда имеется последовательность показателей $\{\lambda_v\}$, зависящая только от области D , такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно в D разложить в ряд Дирихле

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z}, \quad z \in D.$$

Показатели λ_v при этом можно выбрать так, что $|\lambda_v|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

2. Отсутствие универсального способа. При доказательстве теоремы 5.2.1 была использована принадлежность функции $F(z)$ к классу $A\{M_n\}$. Возникает вопрос: не существует ли универсальной целой функции $M(\lambda)$ из класса $[1, 0]$ (т. е. с ростом не выше первого порядка минимального типа) такой, что для любой $F(z)$, регулярной в D , найдется функция $f(z)$, регулярная в D и непрерывная в $\bar{D}$, удовлетворяющая условию

$$M(D) f(z) = F(z).$$

На этот вопрос дается отрицательный ответ. Он вытекает из следующего предложения.

Пусть $M(\lambda)$ — целая функция из класса $[1, 0]$ и D — открытая выпуклая конечная область. Тогда имеется последовательность чисел $\{M_n\}$, зависящая только от функции $M(\lambda)$ и области D , которая обладает свойством: для любой функции $f(z)$, регу-

лярной в D и непрерывной в $\bar{D}$, верно соотношение

$$|M(D) f(z)| < M_n \max_{t \in \bar{D}} |f(t)|, \quad z \in C_n, \quad n \geq n_0,$$

где C_n — замкнутые кривые, которые были введены выше. Докажем это. Имеем

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-z)^{m+1}}.$$

Пусть z лежит на линии C_n . Так как

$$|t-z| \geq 1/n, \quad t \in C, \quad z \in C_n,$$

то

$$|f^{(m)}(z)| \leq \mu m! n^{m+1} \max_{t \in C} |f(t)|, \quad z \in C_n, \quad n \geq n_0 \quad (3.1)$$

(длины контуров C_n не превосходят фиксированной величины μ). Пусть

$$M(\lambda) = \sum_0^{\infty} c_m \lambda^m.$$

Поскольку $M(\lambda) \in [1, 0]$, имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m! |c_m|} = 0. \quad (3.2)$$

На основании (3.1) получаем

$$|M(D) f(z)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_m f^{(m)}(z) \right| \leq \mu \left(\sum_{m=0}^{\infty} m! |c_m| n^{m+1} \right) \max_{t \in C} |f(t)|,$$

причем, в силу (3.2),

$$M_n = \mu \sum_{m=0}^{\infty} m! |c_m| n^{m+1} < \infty.$$

Таким образом,

$$|M(D) f(z)| \leq M_n \max_{t \in C} |f(t)|, \quad z \in C_n, \quad (3.3)$$

что и надо было показать.

Приведем пример функции $F(z)$, регулярной в D , для которой

$$|F(z_n)| > n_k M_{n_k}, \quad z_n \in C_{n_k}, \quad n_k \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Здесь M_n — числа из соотношения (3.3). Для этой функции $F(z)$ не найдется регулярной в D и непрерывной в $\bar{D}$ функции $f(z)$

такой, что

$$M(D) f(z) = F(z),$$

ибо соотношения (3.3) и (3.4) несовместимы.

Для построения нужной функции $F(z)$ опишем около области $\bar{D}$ окружность K . Для простоты изложения будем считать, что центр K — в начале координат, а одна из точек соприкосновения с $\bar{D}$ — точка R , $R > 0$. Ясно, что функция, регулярная в $|z| < R$, будет регулярной в области D . Пусть a_n , $0 < a_n \rightarrow R$, $n \geq n_0$, — точка пересечения линии C_n с положительным радиусом.

Положим

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m, \quad (3.5)$$

где

$$b_m = 2 \min_{n \geq n_0} \frac{n P_n}{a_n^m} \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad P_n = \max(M_n, 1, R^n). \quad (3.6)$$

Убедимся сначала, что ряд (3.5) сходится в круге $|z| < R$. Из условия (3.6) заключаем:

$$0 \leq b_m \leq 2 \frac{n P_n}{a_n^m} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

при любом фиксированном n , $n \geq n_0$. Следовательно, радиус сходимости ряда (3.5) не меньше a_n . Но поскольку n — любое, большее чем n_0 , и $a_n \rightarrow R$, то, значит, радиус сходимости не меньше R .

Покажем теперь, что выполняется условие (3.4), если в качестве z_n взять точку a_n . Допустим противное, что

$$F(a_n) \leq n M_n, \quad n \geq n_1. \quad (3.7)$$

Так как

$$|F(z)| \leq F(a_n), \quad |z| \leq a_n,$$

то, в силу неравенств Коши,

$$b_m \leq \frac{F(a_n)}{a_n^m} \leq \frac{n M_n}{a_n^m} \leq \frac{n P_n}{a_n^m} \quad (n \geq n_1; m=0, 1, \dots). \quad (3.8)$$

При фиксированном m и $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n P_n}{a_n^m} \geq \begin{cases} \frac{n R^n}{a_n^m} \geq \frac{n R^n}{R^m} \rightarrow \infty, & R > 1, \\ \frac{n}{R^m} \geq \frac{n}{R^m} \geq n \rightarrow \infty, & R \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому, учитывая определение (3.6), заключаем, что найдется номер n_m такой, что

$$b_m = 2 \frac{n P_n}{a_n^m}, \quad n = n_m \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

Числа n_m не могут быть ограниченными: $n_m \leq N$, ибо тогда радиус сходимости ряда (3.5) был бы меньше R . Следовательно, имеются такие m_k ($k=1, 2, \dots$), что соответствующие им $n_{m_k} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Для $m=m_k$ равенство (3.9) противоречит неравенству (3.8). Полученное противоречие показывает, что не может выполняться условие (3.7), каково бы ни было n_1 . Следовательно, найдутся номера $n_k \rightarrow \infty$, для которых выполняется неравенство (3.4). Функция (3.5) — искомая.

3. Представление аналитической функции в виде суммы периодических.

Теорема 5.3.3. Пусть D — выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$. Тогда функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^p F_k(z), \quad z \in D, \quad (3.10)$$

где $F_k(z)$ — функция, аналитическая в полуплоскости D_k , которая ограничена прямой, проходящей через вершины γ_k и γ_{k+1} (в полуплоскости D_k лежит D), $F_k(z)$ — периодическая функция с периодом, равным $\gamma_{k+1} - \gamma_k$.

При доказательстве воспользуемся теоремой 5.3.1, причем при четном p в качестве $L(\lambda)$ возьмем функцию $Q(\lambda)$ из теоремы 1.2.11, предварительно поделив ее на $\lambda^{p/2}$, а при нечетном p в качестве $L(\lambda)$ возьмем функцию $Q_1(\lambda)$ из теоремы 1.2.12, поделив ее предварительно на

$$\lambda^{\frac{p-1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{w^{(1)}}\right).$$

Напомним, что

$$Q(\lambda) = \lambda^{\frac{p}{2}} e^{\gamma \lambda} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{w_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{w_m^{(p)}}\right),$$

$$w_m^{(n)} = \frac{2\pi i}{\gamma_{n+1} - \gamma_n} m \quad (m=1, 2, \dots; n=1, 2, \dots, p),$$

и

$$Q_1(\lambda) = \lambda^{\frac{p-1}{2}} e^{\gamma \lambda} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{w_m^{(1)}}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{w_m^{(p)}}\right),$$

где $w_m^{(n)}$ имеют тот же вид.

В силу теорем 1.2.11 — 1.2.13, так выбранная функция $L(\lambda)$ обладает всеми нужными свойствами, необходимыми для разложения. Поэтому

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{M(\lambda_{\nu}) \omega_L(\lambda_{\nu}, f)}{L'(\lambda_{\nu})} e^{\lambda_{\nu} z}, \quad z \in D.$$

Этот ряд есть ряд вида

$$\sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{\infty} a^{(k)}_m e^{\frac{m(h)}{m} z}.$$

Внутренняя сумма представляет собой функцию $F_k(z)$, аналитическую в полуплоскости D_k и периодическую с периодом, равным $(\gamma_{k+1} - \gamma_k)$. Имеем

$$F(z) = \sum_{k=1}^p F_k(z).$$

Теорема доказана. Более детально вопрос рассмотрен в [37].

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО КОЭФФИЦИЕНТАМ ЕЕ РЯДА ДИРИХЛЕ

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная с ней по Борелю, $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, причем $0 \in \bar{D}$, $F(z)$ — функция, аналитическая в $\bar{D}$.

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{\mu \xi} d\xi \right) dt,$$

где C — охватывающий $\bar{D}$ замкнутый контур, на котором и внутри которого $F(z)$ — аналитическая функция. Если λ_{ν} ($\nu \geq 1$) — различные нули $L(\lambda)$ и m_{ν} — соответственно их кратности, то функции $F(z)$ сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{\nu}(z) e^{\lambda_{\nu} z},$$

$$P_{\nu}(z) e^{\lambda_{\nu} z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\nu}} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu,$$

где C_{ν} — окружность с центром в точке λ_{ν} , внутри которой нет нулей $L(\mu)$, отличных от λ_{ν} .

Согласно теореме единственности 4.3.1, если известны $P_{\nu}(z)$ ($\nu \geq 1$), то принципиально по этим данным можно восстановить $F(z)$. Задача заключается в выяснении, какими способами можно это сделать.

§ 1. Первый способ восстановления

1. Случай регулярности в замкнутой области. Система функций $\{\psi_{\nu, k}(t)\}$, биортогональная системе $\{t^{\lambda_{\nu}} e^{\lambda_{\nu} t}\}$, по теореме 4.4.1 полна вне $\bar{D}$ в классе функций, аналитических вне $\bar{D}$ и обращающихся в нуль в бесконечности. В силу этого, для фиксированного $z \in \bar{D}$

$$\frac{1}{t-z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^{p_m(z)} \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} a_{\nu, k}^{(m)}(z) \psi_{\nu, k}(t), \quad t \in C, \quad (1.1)$$

причем сходимость на контуре C является равномерной. Имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t) dt}{t-z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{p_m(z)} \sum_{k=0}^{m_v-1} a_{v,k}^{(m)}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_{v,k}(t) dt,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(t) \psi_{v,k}(t) dt = a_{v,k},$$

поскольку

$$P_v(z) = \sum_{k=0}^{m_v-1} a_{v,k} z^k.$$

Поэтому

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{p_m(z)} \sum_{k=0}^{m_v-1} a_{v,k}^{(m)}(z) a_{v,k}, \quad z \in \bar{D}.$$

Теорема 6.1.1. Функция $F(z)$ может быть восстановлена по известным коэффициентам $a_{v,k}$ по формуле

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{p_m(z)} \sum_{k=0}^{m_v-1} a_{v,k}^{(m)}(z) a_{v,k}, \quad z \in \bar{D}, \quad (1.2)$$

где $a_{v,k}^{(m)}(z)$ находятся из представления (1.1).

Этот способ восстановления указан в [49]. Иной способ (его здесь не приводим) предложен в [8].

2. Случай регулярности в открытой области. Пусть функция $L(\lambda)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1. \quad (1.3)$$

Ограничимся случаем, когда нули λ_v ($v \geq 1$) функции $L(\lambda)$ — простые. Функции $F(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, тогда сопоставляется ряд

$$F(z) \sim \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z},$$

где

$$a_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \psi_v(t) dt \quad (v \geq 1).$$

Функции $\psi_v(t)$ образуют систему, биортогональную системе $\{e^{\lambda_v z}\}$. По теореме 4.4.2 (предполагаем, что $\bar{D}$ не есть отрезок) система $\{\psi_v(t)\}$ полна в метрике C в замкнутой области $\bar{E}$ — внешности D в пространстве функций, аналитических в E , не-

прерывных в $\bar{E}$ и обращающихся в нуль в бесконечности. В силу этого, при фиксированном $z \in D$

$$\frac{1}{t-z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{p_m(z)} a_v^{(m)}(z) \psi_v(t), \quad t \in \partial \bar{D}, \quad (1.4)$$

причем сходимость на контуре $\partial \bar{D}$ является равномерной. На основании этого

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{F(t) dt}{t-z} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{p_m(z)} a_v^{(m)}(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \psi_v(t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{p_m(z)} a_v^{(m)}(z) a_v.$$

Теорема 6.1.2. При условии (1.3) функция $F(z)$ может быть восстановлена по известным коэффициентам a_v по формуле

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^{p_m(z)} a_v^{(m)}(z) a_v,$$

где $a_v^{(m)}(z)$ находятся из представления (1.4).

Рассмотрим еще случай, когда

$$\omega_L(\mu, F) = \int_{\partial \bar{D}} d\sigma(t) \left(\int_0^t F(t-\xi) e^{i\mu \xi} d\xi \right),$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $\partial \bar{D}$. Функция $F(z)$ предполагается аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$. Считаем, что $\bar{D}$ не есть отрезок. Допустим, что у $L(\lambda)$ все нули λ_v — простые. Тогда функции $F(z)$ сопоставляется ряд

$$F(z) \sim (L) \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z}, \quad a_v = \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)}. \quad (1.5)$$

Воспользуемся свойством 15) интерполирующей функции (см. гл. IV, § 2, п. 4): если функции $F(z)$ сопоставлен ряд (1.5), то

$$\varphi(z) = F(z) - a_1 e^{\lambda_1 z} - a_2 e^{\lambda_2 z} \sim (M) \sum_{v=3}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z}, \quad (1.6)$$

где

$$M = M(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

Функция $M(\lambda)$ удовлетворяет условию вида (1.3). Допустим, что известны коэффициенты a_v ($v \geq 1$). Отсюда следует, что известны и коэффициенты ряда (1.6). По теореме 6.1.2 можно восстановить указанным в ней способом функцию $\varphi(z)$. Но тогда

$$F(z) = \varphi(z) + a_1 e^{\lambda_1 z} + a_2 e^{\lambda_2 z}.$$

Таким образом, и в этом случае удастся все тем же способом восстановить $F(z)$.

Случай, когда $\bar{D}$ — отрезок, будет изучен ниже.

§ 2. Второй способ восстановления

Другой способ восстановления функции $F(z)$ по известным коэффициентам соответствующего ей ряда Дирихле связан с иной трактовкой самой задачи восстановления (см. [27]). Эта задача решается в случае, когда все нули λ_v функции $L(\lambda)$ вещественны и функция $L(\lambda)$ на вещественной оси имеет вещественные значения. Тогда у функции

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \lambda^k$$

коэффициенты c_k ($k \geq 0$) — вещественные и область $\bar{D}$, определяемая особенностями функции

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{t^{k+1}},$$

симметрична относительно вещественной оси.

1. **Постановка задачи.** Итак, пусть у $L(\lambda)$ все нули λ_v вещественны и $L(\lambda)$ на вещественной оси принимает лишь вещественные значения. В этом случае по теореме 1.1.9 по данному $q > 1$ можно найти $h > 0$ и окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$, $r_k < q r_{k-1}$ ($k \geq 2$) такие, что

$$\ln |L(\lambda)| > -h |\lambda|, \quad |\lambda| = r_k \quad (k \geq 1). \quad (2.1)$$

Это же неравенство при подходящем h , в силу той же теоремы, будет выполняться и в углах

$$\psi_0 \leq |\arg \lambda| \leq \pi - \psi_0, \quad 0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}, \quad |\lambda| \geq r_1.$$

Возьмем функцию $F(z)$, аналитическую в $\bar{D}$. Ей соответствует ряд

$$F(z) \sim \sum_1 P_v(z) e^{\lambda_v z}. \quad (2.2)$$

Положим

$$\begin{aligned} F^+(z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{0 < \lambda_v < r_k} P_v(z) e^{\lambda_v z}, \\ F^-(z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{0 < -\lambda_v < r_k} P_v(z) e^{\lambda_v z}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где r_k взяты из (2.1). Убедимся, что функция $F^-(z)$ регулярна в угле $|\arg(z - \alpha^-)| < \psi_0 < \pi/2$, а функция $F^+(z)$ — в угле $|\arg(z - \alpha^+) - \pi| < \psi_0$, где ψ_0 фиксировано (но произвольно) в границах $0 < \psi_0 < \pi/2$, а вещественные α^- и α^+ , $\alpha^+ < 0 < \alpha^-$, зависят от ψ_0 .

Пусть Γ — граница угла $|\arg \mu| < \psi_0$, $0 < \psi_0 < \pi/2$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)},$$

Для простоты будем считать, что $L(0) \neq 0$ (если $L(0) = 0$, то контур Γ в окрестности начала координат надо немного изменить так, чтобы он не проходил через начало координат). Оценим подынтегральную функцию. Из конструкции функции $\omega_L(\mu, F)$ непосредственно видно (см. также свойство 4) интегрирующей функции), что

$$|\omega_L(\mu, F)| < A_1 e^{\beta_1 |\mu|},$$

где A_1 и β_1 — некоторые постоянные.

Положим $\beta = h + \beta_1$, $z = -z_1$, $\arg z_1 = \varphi$. Видим, учитывая (2.1), что подынтегральная функция на Γ имеет оценку

$$\left| \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} \right| < A e^{(-|\lambda| \cos(\varphi \pm \psi_0) + \beta) |\mu|}$$

(«плюс» берется на верхней части Γ , «минус» — на нижней). На окружностях $|\mu| = r_k$ имеем аналогичную оценку

$$\left| \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} \right| < e^{(-|\lambda| \cos(\varphi + \psi) + \beta) |\mu|}, \quad |\mu| = r_k, \quad \psi = \arg \mu.$$

Обозначим Γ_k конечный замкнутый контур, составленный из дуг окружности $|\mu| = r_k$, $-\psi_0 \leq \arg \mu \leq \psi_0$, и части Γ , расположенной внутри окружности $|\mu| = r_k$. Рассмотрим область изменения z_1 :

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \varepsilon, \quad |z_1| > \frac{2\beta}{\sin \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Когда z_1 лежит в этой области, а μ находится на Γ или внутри Γ , имеем

$$\cos(\varphi + \psi) \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \sin \varepsilon, \quad |z_1| \cos(\varphi + \psi) \geq 2\beta.$$

Отсюда

$$\left| \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} \right| < A e^{-\beta |\mu|}, \quad \mu \in \Gamma_h \text{ или } \mu \in \Gamma. \quad (2.4)$$

В указанной области целиком содержится угол

$$D_1: \left| \arg\left(z_1 - \frac{2\beta}{\sin \varepsilon}\right) \right| < \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \varepsilon.$$

В угле D_1 поэтому выполняется оценка (2.4).

Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_h} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = \sum_{0 < \lambda_v < r_h} P_v(z) e^{\lambda_v z}.$$

В силу оценки (2.4), когда z_1 лежит в угле D_1 , равномерно

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 < \lambda_v < r_h} P_v(z) e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = f(z) = F^+(z).$$

Следовательно, функция $F^+(z)$ регулярна в угле

$$D_0^+: \left| \arg(z - \alpha^+) - \pi \right| < \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \varepsilon, \quad \alpha^+ = -\frac{2\beta}{\sin \varepsilon}$$

(угол D_0^+ симметричен относительно начала координат углу D_1).

Величина $\psi_0 = \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \varepsilon$ за счет выбора ψ_0 и ε может быть сколь угодно близкой к $\pi/2$.

Аналогичным образом можно убедиться, что последовательность

$$\sum_{0 < -\lambda_v < r_h} P_v(z) e^{\lambda_v z} \quad (k=1, 2, \dots)$$

равномерно сходится и, значит, определяет собой аналитическую функцию $F^-(z)$ в угле

$$D_0^-: \left| \arg(z - \alpha^-) \right| < \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \varepsilon, \quad \alpha^- = \frac{2\beta}{\sin \varepsilon}.$$

Задача заключается в том, чтобы восстановить $F(z)$ с помощью функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$.

Решение задачи состоит в следующем. Показывается, что возможны три случая:

1) функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ аналитически продолжаются на некоторый интервал вещественной оси и на этом интервале $F^+(x) + F^-(x) = F(x)$;

2) функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ квазианалитически продолжаются на некоторый интервал вещественной оси и на нем $F^+(x) + F^-(x) = F(x)$;

3) функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ аналитически продолжаются до начала координат (в этом случае $\bar{D}$ — начало координат и $z=0$ — особая точка по крайней мере для одной из функций $F^+(z)$, $F^-(z)$), причем существуют пределы $\lim_{x \rightarrow -0} F^{+(k)}(x)$, $\lim_{x \rightarrow +0} F^{-(k)}(x)$

и

$$\lim_{x \rightarrow -0} F^{+(k)}(x) + \lim_{x \rightarrow +0} F^{-(k)}(x) = F^{(k)}(0) \quad (k \geq 0),$$

так что $F(z)$ можно восстановить с помощью ее ряда Тейлора

Сначала будет исследован случай, когда нули $L(\lambda)$ имеют положительную нижнюю плотность. Случай нулевой нижней плотности является более сложным, и он будет рассмотрен позже. Предварительно, однако, будут установлены две необходимые формулы.

2. Вывод основных формул. Пусть $L(\lambda)$, $\bar{D}$ и $F(z)$ — те же, что и выше. Возьмем выпуклый многоугольник G , удовлетворяющий условиям: он симметричен относительно вещественной оси, содержит в себе $\bar{D}$, у G нет сторон, параллельных координатным осям, функция $F(z)$ регулярна в G и на границе G . Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ — вершины многоугольника G . Положим

$$M(\mu) = \frac{P(\mu)}{Q(\mu)}, \quad P(\mu) = \sum_{s=1}^p A_s e^{\gamma_s \mu},$$

где $Q(\mu)$ — многочлен, у которого корни — какие-то нули $P(\mu)$. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots$ — нули функции $M(\mu)$. При подходящем выборе многочлена $Q(\mu)$ все эти нули будут простыми (см. теорему 1.2.10), они расположены в малых углах, биссектрисами которых служат перпендикуляры к сторонам многоугольника G . Функция $M(\mu)$ удовлетворяет всем условиям разложимости аналитических в $\bar{G}$ функций по системе $\{e^{\mu \gamma_s}\}$. Имеем

$$F(z) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s z}, \quad z \in G, \quad b_s = \frac{\omega_M(\mu_s, F)}{M'(\mu_s)} \quad (s=1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

С помощью этого разложения для функции $\omega_L(\mu, F)$ было найдено следующее представление (теорема 4.6.10):

$$\omega_L(\mu, F) = A(\mu) L(\mu) - B(\mu), \quad (2.6)$$

где

$$A(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{\mu - \mu_s}, \quad B(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Ряды, определяющие $A(\mu)$ и $B(\mu)$, сходятся всюду, кроме точек μ_s ($s=1, 2, \dots$). Вне углов $|\arg(z - \alpha_k)| < \varepsilon$ ($k=1, 2, \dots, p$), где $\varepsilon > 0$ — любое, а $l_k: \arg \mu = \alpha_k$ — внешние нормали к сторонам многоугольника, при $\mu \rightarrow \infty$

$$A(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\mu^{k+1}}, \quad A_k = F^{(k)}(0),$$

$$B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}, \quad B_k = [M_L(F)]_0^{(k)}.$$

Здесь

$$M_L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t+z) dt,$$

C — замкнутый охватывающий $\bar{D}$ контур, на котором и внутри которого $F(z)$ — аналитическая функция.

У многоугольника G нет сторон, параллельных осям координат. По этой причине среди нормалей к сторонам нет нормалей, которые были бы параллельны осям координат. Следовательно, можно считать, что все точки μ_k ($k \geq 1$) лежат вне малых углов $|\arg \mu| < \delta$, $|\arg \mu - \pi| < \delta$, $|\arg \mu \mp \frac{\pi}{2}| < \delta$, $\delta > 0$.

Пусть Γ^+ — контур (обходимый в положительном направлении), который образован лучами $\arg \mu = \pm \psi_0$, $0 < \psi_0 < \pi/2$, причем ψ_0 выбран так, чтобы между мнимой осью и контуром Γ^+ не было точек μ_s ($s \geq 1$). На основании (2.6) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} A(\mu) e^{\mu z} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{B(\mu) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu. \quad (2.7)$$

Интеграл из левой части (2.7), как мы уже видели, сходится в угле

$$D_0^+: |\arg(z - \alpha^+) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \varepsilon, \quad \alpha^+ = -\frac{2\beta}{\sin \psi_0},$$

и представляет собой функцию $F^+(z)$.

Поскольку на Γ^+ функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$ ограничены по модулю, интегралы из правой части (2.7) в угле D_0^+ также сходятся. Подсчитаем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} A(\mu) e^{\mu z} d\mu.$$

Имеются окружности (см. теорему 1.2.10) $|\mu| = \rho_k \uparrow \infty$, которые удалены от точек μ_s ($s \geq 1$) на расстояние $\rho \geq \gamma > 0$. На этих окружностях

$$\left| \frac{1}{\mu - \mu_s} \right| \leq \frac{1}{\gamma},$$

и поэтому

$$|A(\mu)| \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{s=1}^{\infty} |b_s|$$

(ряд сходится, ибо ряд (2.5) в многоугольнике G сходится абсолютно, а начало координат принадлежит G). Пусть Γ_k^+ — конечный замкнутый контур, составленный из дуги $|\mu| = \rho_k$, $-\psi_0 \leq \arg \mu \leq \psi_0$, и части Γ^+ , лежащей внутри $|\mu| = \rho_k$. Ввиду ограниченности $|A(\mu)|$ на Γ^+ и окружностях $|\mu| = \rho_k$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} A(\mu) e^{\mu z} d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^+} A(\mu) e^{\mu z} d\mu = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\substack{s \geq 1 \\ |\mu_s| < \rho_k \\ \operatorname{Re} \mu_s > 0}} b_s e^{\mu_s z}, \quad z \in D_0^+. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ряд (2.5) сходится абсолютно в многоугольнике G . Его можно разбить на сумму рядов, каждый из которых сходится в своей полуплоскости, пересечение этих полуплоскостей есть многоугольник G . Отсюда легко выяснить, где сходится ряд

$$\psi^+(z) = \sum_{\operatorname{Re} \mu_s > 0} b_s e^{\mu_s z}. \quad (2.9)$$

Пусть a — самая правая вершина G , c — самая левая, b — самая верхняя, d — самая нижняя. Ряд (2.9) сходится в бесконечной области E^+ (простирающейся влево), ограниченной (расположенными между вершинами b и d) сторонами многоугольника G и продолжениями двух из них: той, которая проходит через точку b , и той, которая проходит через точку d . Область E^+ содержит в себе многоугольник G . В области E^+ функция $\psi^+(z)$ — аналитическая.

Выяснив область сходимости ряда (2.9), видим, в силу (2.8), что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} A(\mu) e^{\mu z} d\mu = \psi^+(z) = \sum_{\operatorname{Re} \mu_s > 0} b_s e^{\mu_s z}.$$

Равенство (2.7) теперь приобретает вид

$$F^+(z) = \psi^+(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}, \quad z \in D_0^+. \quad (2.10)$$

Убедимся, что для отрицательных $z = x < -N$, где N — некоторое положительное число,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}. \quad (2.11)$$

Как уже отмечалось, в углах $\psi_0 \leq |\arg \mu| \leq \pi - \psi_0$ имеет место неравенство (2.1). На основании (2.1) и (2.14) и устанавливается соотношение (2.11), поскольку функцию $|B(\mu)|$ в области между мнимой осью и контуром Γ^+ ограничена. Действительно, для $z = iy$, $y > P$, где P достаточно велико,

$$\int_0^{\infty i} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \int_0^{\infty e^{i\psi_0}} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}.$$

Интеграл в левой части представляет собой функцию аналитическую в верхней полуплоскости и непрерывную в замкнутой полуплоскости $y \geq 0$; интеграл в правой части представляет собой функцию, аналитическую в полуплоскости, ограниченной прямой, перпендикулярной продолжению луча $\arg \mu = -\psi_0$ и отстоящей от начала на расстояние h . Поэтому равенство, справедливое для $z = iy$, $y > P$, будет справедливо для $z = x < -N$. Аналогичным образом убедимся, что

$$\int_{-\infty i}^0 \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \int_0^{-\infty e^{-i\psi_0}} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}, \quad z = x < -N.$$

Из сказанного вытекает (2.11).

Из (2.10) получаем

$$F^+(z) = \psi^+(z) + \varphi(z), \quad z = x < -N, \quad (2.12)$$

где

$$\psi^+(z) = \sum_{\operatorname{Re} \mu_s > 0} b_s e^{\mu_s z}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}. \quad (2.13)$$

Функция $\varphi(x)$ определена и бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси. Действительно, имеем

$$L(\mu) = e^{\gamma \mu} \prod_k \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\mu}{\lambda_k}},$$

где γ — вещественное (здесь λ_k выписано столько раз, какова его кратность). Отсюда на мнимой оси

$$|L(\mu)| = \prod_k \left(1 + \frac{|\mu|^2}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Правая часть в (2.14) растет быстрее любого многочлена. Поэтому интегралы

$$\varphi^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\mu^m B(\mu) e^{\mu x} d\mu}{L(\mu)} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

на вещественной оси сходятся. Следовательно, функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема на вещественной оси.

При выводе соотношения (2.12) использовалось равенство (2.7). Пусть теперь Γ^- — контур (обходимый в положительном направлении), который образован лучами $\arg \mu = \pi \pm \psi_0$, $0 < \psi_0 < \pi/2$. Этот контур симметричен относительно мнимой оси контуру Γ^+ . На основании (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} A(\mu) e^{\mu z} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}, \quad z \in \bar{D}_0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В левой части стоит функция $\bar{F}(z)$. Первый интеграл в правой части (он подсчитывается так же, как и соответствующий интеграл по Γ^+) равен

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} A(\mu) e^{\mu z} d\mu = \sum_{\operatorname{Re} \mu_s < 0} b_s e^{\mu_s z}.$$

Второй интеграл в правой части равенства (2.15) для положительных $z=x>N$ равен $-\varphi(x)$. Таким образом, имеем

$$F^-(z) = \psi^-(z) - \varphi(z), \quad z=x>N, \quad (2.16)$$

где

$$\psi^-(z) = \sum_{\operatorname{Re} \mu_k < 0} b_k e^{\mu_k z}. \quad (2.17)$$

Ряд, определяющий $\psi^-(z)$, сходится в бесконечной области $\bar{E}$ (простирающейся вправо), ограниченной сторонами многоугольника G , расположенными между вершинами b и d , и продолжениями двух из них: той, которая проходит через точку b , и той, которая проходит через точку d . Заметим, что области E^+ и E^- в пересечении образуют многоугольник G . Функция $F^-(z)$ регулярна в угле

$$\bar{D}_0: |\arg(z - \alpha^-)| < \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \varepsilon, \quad \alpha^- = \frac{2\beta}{\sin \pi}.$$

Формулы (2.12) и (2.16) являются основными, на которых будет основано все последующее.

3. **Случай положительной нижней плотности.** Нули функции $L(\lambda)$ обозначим λ_k ($k \geq 1$). Они расположены в порядке неубывания модулей. Нижнюю плотность Δ множества нулей определяем равенством

$$\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|},$$

при этом каждое λ_k считаем столько раз, какова его кратность. Для дальнейшего заметим, что если $n(r)$ — число точек λ_m в круге $|z| \leq r$, то

$$\Delta = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r}.$$

Действительно, обозначим через $m = m(r)$ целое число такое, что

$$|\lambda_m| \leq r < |\lambda_{m+1}|.$$

Тогда имеем

$$\frac{m}{m+1} \frac{m+1}{|\lambda_{m+1}|} = \frac{m}{|\lambda_{m+1}|} < \frac{n(r)}{r} \leq \frac{m}{|\lambda_m|},$$

откуда и следует требуемое.

Предположим, что $\Delta > 0$. Исходя из этого, получим оценку для $|L(\mu)|$ снизу на мнимой оси. На мнимой оси, согласно (2.14),

$$|L(\mu)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|\mu|^2}{\lambda_k^2}\right) = \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 + \frac{|\mu|^2}{\lambda_k^2}\right) \prod_{k=N}^{\infty} \left(1 + \frac{|\mu|^2}{\lambda_k^2}\right).$$

По данному $\varepsilon_1 > 0$ выберем N так, чтобы было

$$\frac{k}{|\lambda_k|} > \Delta - \varepsilon_1, \quad k \geq N.$$

Тогда положив $\Delta - \varepsilon_1 = \gamma$, получим

$$\begin{aligned} \prod_{k=N}^{\infty} \left(1 + \frac{|\mu|^2}{\lambda_k^2}\right) &\geq \prod_{k=N}^{\infty} \left(1 + \frac{(\gamma|\mu|)^2}{k^2}\right) = \\ &= |\sin(\gamma\pi\mu)| \left\{ \gamma|\mu| \prod_{k=1}^{N-1} \left(1 + \frac{(\gamma|\mu|)^2}{k^2}\right) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

В силу этого, при больших $|\mu|$

$$|L(\mu)|^2 > e^{(\pi\gamma - \varepsilon_1)|\mu|} = e^{(\frac{\pi}{2}\Delta - \varepsilon_1)|\mu|}$$

и, значит,

$$|L(\mu)| \geq A(\varepsilon) e^{(\frac{\pi}{2}\Delta - \varepsilon_1)|\mu|}, \quad \operatorname{Re} \mu = 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.18)$$

На основании оценки (2.18), учитывая представление (2.13), видим, что функция $\varphi(z)$ является аналитической (интеграл сходится) в горизонтальной полосе $K: |y| < \frac{\pi}{2}\Delta$.

Обратимся к формулам (2.12) и (2.16). Из первой формулы усматриваем, что функция $F^+(z)$ регулярна в общей части области E^+ и полосы K . Из формулы (2.16) заключаем, что функция $F^-(z)$ регулярна в общей части области E^- и полосы K . Функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ одновременно регулярны в пересечении многоугольника G с полосой K . В этом пересечении

$$F^+(z) = \psi^+(z) + \varphi(z),$$

$$F^-(z) = \psi^-(z) - \varphi(z).$$

Отсюда, имея в виду представление (2.5), получаем

$$F(z) = \psi^+(z) + \psi^-(z) = F^+(z) + F^-(z), \quad z \in G \cap K. \quad (2.19)$$

Обозначим $T = T(F, K)$ следующую звездообразную область: области T принадлежит пересечение $G \cap K$ и всякая точка z_0 , в которую можно аналитически продолжить функцию $F(z)$ по горизонтали, исходя из указанного пересечения. Легко убедиться, что представление (2.19) имеет место на самом деле в звезде $T(F, K)$.

Итак, доказана

Теорема 6.2.1. Пусть функция $L(\lambda)$ имеет вещественные нули и принимает вещественные значения на вещественной оси. Пусть нижняя плотность Δ множества ее нулей положительна. Функции $F(z)$, аналитической на соответствующем множестве $\bar{D}$, сопоставляем ряд (2.2), а затем вводим по формулам (2.3) функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$. Тогда функция $F^+(z)$ аналитически продолжается слева направо в полосу $K: |y| < \frac{\pi}{2}\Delta$ в звезду $T(F, K)$, функция $F^-(z)$ аналитически продолжается справа налево в полосу K в звезду $T(F, K)$. В звезде $T(F, K)$

$$F(z) = F^+(z) + F^-(z).$$

Обратим внимание на следующее. Последовательности (2.3), определяющие функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, вообще не сходятся в области $T(F, K)$ или в какой-либо ее части. Поэтому теорема 6.2.1 не дает эффективного способа восстановления $F(z)$ по ряду (2.2). Однако эта теорема открывает путь для конструкции подобного способа.

Предположим, что все нули λ_v ($v=1, 2, \dots$) функции $L(\lambda)$ — простые. Тогда ряд (2.2) будет иметь вид

$$\sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z}, \quad a_v = \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)},$$

а функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ определяются формулами

$$F^+(z) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 < \lambda_v < r_h} a_v e^{\lambda_v z}, \quad F^-(z) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 < -\lambda_v < r_h} a_v e^{\lambda_v z}.$$

Оказывается, имеется процесс (метод суммирования М. Рисса), позволяющий определять по коэффициентам a_v функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ в более широких областях (см. [38]). Он заключается в следующем. Возьмем последовательность

$$\sum_{0 < \lambda_v < r_h} a_v e^{\lambda_v z} \quad (h=1, 2, \dots).$$

Как известно, она сходится равномерно в некотором угле

$$|\arg(z - \alpha^+) - \pi| < \varphi_0 < \pi/2.$$

Предельную функцию $F^+(z)$ будем аналитически продолжать (исходя из этого угла) слева направо по горизонталям до встречи с особыми точками. Получим горизонтальную звезду голоморф-

ности $F^+(z)$, которую обозначим $T(F^+)$. Положим

$$F_q^+(z) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 < \lambda_v < r_h} \frac{a_v}{\Gamma(1 + \gamma \lambda_v)} e^{\lambda_v z} \int_0^q e^{-t} t^{\gamma \lambda_v} dt, \quad \gamma > 0, \quad q > 0.$$

Функция $F_q^+(z)$ — целая функция. Пусть $\bar{M}$ — замкнутое множество, принадлежащее звезде $T(F^+)$, и δ — расстояние от $\bar{M}$ до границы $T(F^+)$. Оказывается, что если $\gamma < 2\delta/\pi$, то на $\bar{M}$ равномерно

$$F^+(z) = \lim_{q \rightarrow \infty} F_q^+(z).$$

Аналогичный вывод получим относительно функции $F^-(z)$. В итоге получим теорему.

Теорема 6.2.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.2.1, и пусть все нули функции $L(\lambda)$ — простые. Возьмем замкнутое множество $\bar{M}$ из звезды $T(F, K)$ и обозначим δ расстояние от $\bar{M}$ до границы $T(F, K)$. Тогда на множестве $\bar{M}$ равномерно

$$F(z) = \lim_{q \rightarrow \infty} F_q^+(z) + \lim_{q \rightarrow \infty} F_q^-(z), \quad (2.20)$$

где

$$F_q^+(z) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 < \lambda_v < r_h} \frac{a_v}{\Gamma(1 + \gamma \lambda_v)} e^{\lambda_v z} \int_0^q e^{-t} t^{\gamma \lambda_v} dt,$$

$$F_q^-(z) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{0 < -\lambda_v < r_h} \frac{a_v}{\Gamma(1 + \gamma |\lambda_v|)} e^{\lambda_v z} \int_0^q e^{-t} t^{\gamma |\lambda_v|} dt$$

и $\gamma < 2\delta/\pi$.

Случай, когда

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \sigma, \quad \lambda_k > 0,$$

был рассмотрен в работе [38]. Здесь $\bar{D}$ — вертикальный отрезок с серединой в начале координат и длиной 2σ , а нижняя плотность множества нулей функции $L(\lambda)$ (она же равна верхней плотности) равна $\Delta = 2\sigma$. Представление (2.20) имеет место в звезде $T(F, K)$, где K — полоса $|y| < \pi\sigma$.

Пусть $h(\varphi)$ — индикатриса роста функции $L(\lambda)$. Поскольку $L(\lambda)$ на вещественной оси имеет вещественные значения, то

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = h\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Из оценки (2.18) видно, что

$$\frac{\pi}{2} \Delta \leq h \left(\frac{\pi}{2} \right).$$

Значит, полоса $K: |y| < \frac{\pi}{2} \Delta$ не шире минимальной горизонтальной полосы, в которой содержится область $\bar{D}$.

Представление (2.20) имеет место в горизонтальной звезде большей ширины, если $F(z)$ удовлетворяет уравнению

$$M_L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t+z) dt = 0, \quad (2.21)$$

где C — замкнутый контур (охватывающий $\bar{D}$), на котором и внутри которого $F(t)$ — аналитическая функция, а z лежит в достаточно малой окрестности начала координат. Более того, можно даже не предполагать, что $\Delta > 0$.

Теорема 6.2.3. Пусть функция $L(\lambda)$ имеет вещественные нули и принимает вещественные значения на вещественной оси, пусть Δ — нижняя плотность последовательности ее нулей (она может быть и равной нулю). Предположим, что функция $F(z)$ регулярна на $\bar{D}$ и удовлетворяет в достаточно малой окрестности начала координат уравнению (2.21). Функции $F(z)$ сопоставляем ряд (2.2), а затем вводим по формулам (2.3) функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$. Пусть h — положительное число, обладающее свойством: множество $\bar{D}$ при непрерывном перемещении вверх и вниз на расстояния, меньшие h , не выходит из области аналитичности функции $F(z)$. Пусть, наконец, $T = T(F, K)$ — горизонтальная звезда голоморфности $F(z)$, содержащаяся в полосе $\bar{K}: |y| < \frac{\pi}{2} \Delta + h$. При этих условиях функция $F^+(z)$ аналитически продолжается слева направо в полосу $\bar{K}$ в звезду T , функция $F^-(z)$ аналитически продолжается справа налево в полосу $\bar{K}$ в звезду T . В звезде T

$$F(z) = F^+(z) + F^-(z).$$

Если нули $L(\lambda)$ все простые, то в этой звезде имеет место представление (2.20).

Доказательство. В силу условий теоремы, соотношение (2.21) выполняется для z , расположенных вблизи интервала $(-ih, ih)$ мнимой оси. Возьмем h_0 , $0 < h_0 < h$. Множество $\bar{D}$ при своем перемещении вверх и вниз на расстояние h_0 опишет замкнутое выпуклое множество $\bar{D}_0$, симметричное относительно

вещественной оси. Множество $\bar{D}_0$ лежит в области регулярности функции $F(z)$. Пусть G — выпуклый многоугольник (симметричный относительно вещественной оси), который содержит в себе множество $\bar{D}_0$, сам лежит вместе с границей в области регулярности $F(z)$ и не имеет сторон, параллельных осям координат. Можно считать, что этот многоугольник G есть тот, о котором все время шла речь. В многоугольнике G справедливо представление (2.5)

$$F(z) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s z}, \quad z \in G.$$

В интеграле (2.21) контур C выберем столь близким к границе $\partial \bar{D}$, чтобы $(t+z)$ (когда $t \in C$, а z пробегает область Q , содержащую отрезок $[-ih_0, ih_0]$ и находящуюся вблизи этого отрезка) находилось в многоугольнике G на положительном расстоянии $\rho \geq \delta > 0$ от его границы. Имеем

$$F(t+z) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s t} e^{\mu_s z}, \quad t \in C, \quad z \in Q.$$

При указанных t и z ряд сходится равномерно. В силу этого,

$$M_L(F) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s e^{\mu_s z} \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{\mu_s t} dt, \quad z \in Q.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) e^{\mu_s t} dt = L(\mu_s).$$

Поэтому

$$M_L(F) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s L(\mu_s) e^{\mu_s z}, \quad z \in Q. \quad (2.22)$$

Ряд Дирихле, сходящийся в области, внутри области сходится равномерно. Поэтому ряд (2.22) равномерно сходится на отрезке $[-ih_0, ih_0]$. В силу (2.21),

$$\sum_{s=1}^{\infty} b_s L(\mu_s) e^{\mu_s z} = 0, \quad z \in Q.$$

Умножим левую и правую части равенства на $e^{-\mu z}$ и проинтегрируем от 0 до $\alpha = \pm ih_0$. Получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s} e^{(\mu_s - \mu) \alpha} = 0,$$

откуда

$$B(\mu) = e^{-\alpha\mu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s} e^{\mu_s \alpha}.$$

Ряд (2.22) в области Q сходится абсолютно. Поэтому

$$\sum_{s=1}^{\infty} |b_s L(\mu_s) e^{\mu_s \alpha}| < \infty.$$

Отсюда вытекает, что на мнимой оси

$$\left| \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s} e^{\mu_s \alpha} \right| < A < \infty.$$

Значит, на мнимой оси

$$|B(\mu)| < A |e^{-\alpha\mu}|.$$

Положим здесь $\alpha = ih_0$, когда $\operatorname{Im} \mu < 0$, и $\alpha = -ih_0$, когда $\operatorname{Im} \mu > 0$. Получим

$$|B(\mu)| < A e^{-h_0 |\mu|}, \quad \operatorname{Re} \mu = 0.$$

На основании полученной оценки и оценки (2.18) заключаем, что функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \frac{B(\mu) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu$$

регулярна в полосе $|y| < \frac{\pi}{2} \Delta + h_0$. Поскольку h_0 — любое, меньшее h , то функция $\varphi(z)$ регулярна на самом деле в полосе $\bar{K}$: $|y| < \frac{\pi}{2} \Delta + h$. Отсюда, на основании (2.12) и (2.16), выведем, что $F^+(z)$ аналитически продолжается слева направо в полосу $\bar{K}$ в звезду T , а $\bar{F}(z)$ аналитически продолжается справа налево в T . При этом надо иметь в виду следующее. Как уже отмечалось выше,

$$\frac{\pi}{2} \Delta \leq h\left(\frac{\pi}{2}\right) = h\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Вследствие этого ширина полосы $\bar{K}$ не превосходит $h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h$. Пусть p — самая верхняя точка множества $\bar{D}$, тогда $\bar{p}$ — самая нижняя точка множества $\bar{D}$. По условию теоремы множество $\bar{D}$ при движении вверх и вниз на расстояния, меньшие h ,

остается в области регулярности функции $F(z)$. Следовательно, на вертикальном интервале $(\bar{p} - ih, p + ih)$ функция $F(z)$ — аналитическая. Нетрудно видеть, что $\operatorname{Im} p = h(\pi/2)$. Поэтому ширина полосы $\bar{K}$ не превосходит длины указанного интервала. Приняв это во внимание, звезду $T(F, \bar{K})$ определяем следующим образом. Исходим из интервала $(\bar{p} - ih, p + ih)$ и продолжаем функцию $F(z)$ влево и вправо от него по горизонталям в полосу $\bar{K}$. Полученную максимальную область, где $F(z)$ регулярна, и обозначаем $T(F, \bar{K})$.

В звезде T , согласно (2.12) и (2.16), функция $F(z)$ равна сумме функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$. В этой звезде, если все нули $L(\lambda)$ — простые, имеет место представление (2.20). Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 6.2.1–6.2.3 остаются в силе, если в них вместо нижней плотности множества нулей Δ , умноженной на $\pi/2$, взять величину

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| L\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right) \right|}{r} = \underline{h}.$$

Из оценки (2.18) следует, что

$$\underline{h} \geq \frac{\pi}{2} \Delta.$$

Выше использовалась только оценка (2.18). Ее можно заменить оценкой

$$\left| L\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right) \right| > A(\varepsilon) e^{(\underline{h}-\varepsilon)r}, \quad \varepsilon > 0.$$

На основании этого замечания можно, например, утверждать, что если $\underline{h} = h(\pi/2)$, $F(z)$ удовлетворяет уравнению (2.21) и нули $L(\lambda)$ — все простые, то представление (2.20) имеет место в горизонтальной звезде T , которая содержит внутри себя множество $\bar{D}$.

4. Случай нулевой нижней плотности. Предварительные сведения. Рассмотрим случай, когда

$$\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = 0$$

(здесь каждое λ_k считается столько раз, какова его кратность). Убедимся сначала в том, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| L\left(Re^{i\frac{\pi}{2}}\right) \right|}{R} = 0. \quad (2.23)$$

Условие (2.23) очевидно, если

$$\Delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = 0.$$

Предположим теперь, что

$$\Delta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} > 0.$$

В этом случае (с учетом $\Delta = 0$) последовательность $\{|\lambda_k|\}$ можно разбить на две последовательности $\{v_k\}$ и $\{\mu_k\}$, из которых первая имеет нулевую плотность, а вторая удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} = \infty, \quad (2.24)$$

Докажем это. Возьмем какую-нибудь последовательность $\{e_m\}$, сходящуюся к нулю, и возрастающую последовательность $\{t_m\}$, сходящуюся к $+\infty$. Затем определим последовательно одно за другим целые числа n_m . Число n_1 определим так, чтобы $(\Delta = 0)$ было

$$\frac{n_1}{|\lambda_{n_1}|} < \frac{e_1}{t_1}.$$

Число n_2 определим так, чтобы, в силу того же условия $\Delta = 0$, было

$$\frac{n_2}{|\lambda_{n_2}|} < \frac{e_2}{t_2}, \quad r_2 = \frac{|\lambda_{n_2}|}{t_2} > |\lambda_{n_1+1}|$$

и т. д.

Отыскав $n_1, \dots, n_{m-1}$, определим n_m так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n_m}{|\lambda_{n_m}|} < \frac{e_m}{t_m}, \quad r_m = \frac{|\lambda_{n_m}|}{t_m} > |\lambda_{n_{m-1}+1}|$$

и т. д.

Рассмотрим интервалы $(r_m, |\lambda_{n_m}|)$ ($m = 1, 2, \dots$). Каждый последующий, поскольку $r_m > |\lambda_{n_{m-1}}|$, лежит правее предыдущего. Числа из $\{|\lambda_n|\}$, которые лежат внутри указанных интервалов, образуют некоторую последовательность $\{v_n\}$. Остальные числа из $\{|\lambda_n|\}$ составляют некоторую последовательность $\{\mu_n\}$. Убедимся, что эти последовательности — искомые. Пусть μ_{k_m} — наибольшее число из $\{\mu_n\}$, меньшее r_m . Имеем

$$\mu_{k_m+1} \geq |\lambda_{n_m}|$$

(в $(r_m, |\lambda_{n_m}|)$ нет точек из $\{\mu_n\}$), откуда

$$\frac{\mu_{k_m+1}}{\mu_{k_m}} > \frac{|\lambda_{n_m}|}{r_m} = t_m \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Следовательно, условие (2.24) имеет место. Обратимся к последовательности $\{v_n\}$. Пусть точка v_k лежит в интервале $(r_m, |\lambda_{n_m}|)$. Ее номер $k < n_m$. Из выбора n_m следует

$$n_m < e_m \frac{|\lambda_{n_m}|}{t_m} = e_m r_m.$$

Следовательно,

$$\frac{k}{v_k} < \frac{n_m}{r_m} < e_m,$$

и потому, так как k и m стремятся к бесконечности одновременно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{v_k} = 0.$$

Вернемся к доказательству соотношения (2.23). Имеем

$$\left| L \left(Re^{\pm i \frac{\pi}{2}} \right) \right|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{v_k^2} \right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{\mu_k^2} \right) = A(R) B(R).$$

Ясно, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln A(R)}{R} = 0.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln B(R)}{R} = 0.$$

Из условия (2.24) вытекает, что найдутся номера $k_m \uparrow \infty$ такие, что

$$\frac{\mu_{k_m+1}}{\mu_{k_m}} = \theta_m \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Положим $R_m = \mu_{k_m} \sqrt{\theta_m}$ и покажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln B(R_m)}{R_m} = 0. \quad (2.25)$$

Пусть $n(t)$ — число точек μ_k в интервале $[0, t]$. Имеем

$$\ln B(R) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{R^2}{\mu_k^2} \right) = \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{R^2}{t^2} \right) dn(t).$$

Обозначим

$$\mu_{k_m} = \rho_m, \quad \mu_{k_m+1} - 1 = r_m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ln B(R) &= \int_0^{\rho_m} \ln \left(1 + \frac{R^2}{t^2} \right) dn(t) + \int_{r_m}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{R^2}{t^2} \right) dn(t) = \\ &= K_1(R) + K_2(R). \end{aligned}$$

Оценим $K_1(R)$ и $K_2(R)$ для $R = R_m$, учитывая, что при некотором конечном σ

$$n(t) < \sigma t. \quad (2.26)$$

Для упрощения записи вместо ρ_m и r_m будем писать соответственно ρ и r . Имеем

$$K_1(R) = n(\rho) \ln \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) + 2R^2 \int_0^{\rho} \frac{n(t) dt}{t(R^2 + t^2)}.$$

В силу (2.26),

$$n(\rho) \ln \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) < \sigma \rho \ln \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) = \left\{ \frac{\sigma \rho}{R} \ln \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right) \right\} R = o(R),$$

ибо

$$\frac{R}{\rho} = \frac{R_m}{\rho_m} = \sqrt{\theta_m} \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Далее,

$$\begin{aligned} 2R^2 \int_0^{\rho} \frac{n(t) dt}{t(R^2 + t^2)} &< 2R^2 \sigma \int_0^{\rho} \frac{dt}{R^2 + t^2} < \\ &< 2\sigma \int_0^{\rho} dt = 2\sigma \rho = \left(\frac{2\sigma \rho}{R} \right) R = o(R). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{K_1(R_m)}{R_m} = 0.$$

В силу (2.26),

$$n(t) \ln \left(1 + \frac{R^2}{t^2} \right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_2(R) &= -n(r) \ln \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + 2R^2 \int_r^{\infty} \frac{n(t) dt}{t(R^2 + t^2)} < \\ &< 2R^2 \int_r^{\infty} \frac{n(t) dt}{t(R^2 + t^2)} < 2R^2 \sigma \int_r^{\infty} \frac{dt}{R^2 + t^2} < 2R^2 \sigma \int_r^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \\ &= \frac{2R^2 \sigma}{r} = \left(\frac{2\sigma R}{r} \right) R = o(R), \end{aligned}$$

ибо

$$\frac{R}{r} = \frac{R_m}{r_m} = \frac{\rho_m \sqrt{\theta_m}}{\rho_m \theta_m - 1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{K_2(R_m)}{R_m} = 0.$$

Свойство (2.25), а следовательно и условие (2.23), установлено.

Заметим, что условие (2.23) является необходимым и достаточным для того, чтобы нижняя плотность Δ последовательности нулей функции $L(\lambda)$ была равна нулю. Действительно, к только что доказанному надо добавить, что если $\Delta > 0$, то, на основании оценки (2.18), условие (2.23) не будет выполняться.

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}.$$

Предположим, что функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению (2.21). При этом условии убедимся, что $\Phi(z)$ не является аналитической всюду на вещественной оси. Из равенств (2.12) и (2.16) следует, что $\Phi(z)$ регулярна в некотором угле $|\arg(z - \alpha^-)| < \varphi_0 < \pi/2$, простирающемся вправо, и в некотором угле $|\arg(z - \alpha^+) - \pi| < \varphi_0$, простирающемся влево ($\alpha^+ < 0 < \alpha^-$), причем в этих углах $\Phi(z)$ стремится равномерно к нулю при $z \rightarrow \infty$. Речь идет о том, что $\Phi(z)$ не может быть аналитической всюду на вещественном отрезке $[\alpha^+, \alpha^-]$.

По формуле обращения интеграла Фурье имеем

$$\frac{B(\mu)}{L(\mu)} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) e^{-\mu z} dz.$$

Допустим противное, что $\Phi(z)$ регулярна на $[\alpha^+, \alpha^-]$. Тогда найдется полоса $|\mu| < \gamma$, в которой $\Phi(z)$ регулярна. На основании

ЭТОГО

$$\frac{B(\mu)}{L(\mu)} = \int_{-\infty + \rho l}^{\infty + \rho l} \varphi(z) e^{-\mu z} dz, \quad |\rho| < \gamma, \operatorname{Re} \mu = 0.$$

Отсюда, выбрав сначала $\rho > 0$, а затем $\rho < 0$, получим

$$\left| \frac{B(\mu)}{L(\mu)} \right| < A(\mu) e^{-(|\rho| - \epsilon)|\mu|}, \quad \operatorname{Re} \mu = 0.$$

Поскольку на мнимой оси

$$B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}, \quad B_k = [M_L(F)]_0^{(k)},$$

а $M_L(F) \neq 0$, то найдется такое q , что

$$B(\mu) \sim \frac{[M_L(F)]_0^{(q)}}{\mu^{q+1}}, \quad [M_L(F)]_0^{(q)} \neq 0.$$

Вследствие этого при больших $|\mu|$ на мнимой оси

$$|L(\mu)| > e^{(|\rho| - 2\epsilon)|\mu|},$$

что противоречит условию (2.23). Значит, действительно $\varphi(z)$ не регулярна всюду на $|\alpha^+|, \alpha^-$.

Б. Первый подслучай: $\sum_1 |\lambda_k|^{-1} < \infty$. Здесь

$$L(\lambda) = e^{a\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right), \quad a = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}.$$

Бесконечное произведение есть целая функция с ростом не выше первого порядка минимального типа. Поэтому в рассматриваемом подслучае множество $\bar{D}$ — единственная точка $t = a$. Поскольку всегда предполагалось, что начало координат принадлежит $\bar{D}$, то в соответствии с этим требуем (за счет выбора γ), чтобы $a = 0$. Таким образом,

$$L(\lambda) = \prod_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right), \quad \sum_1 |\lambda_k|^{-1} < \infty. \quad (2.27)$$

В силу (2.27) функция $F^+(z)$, определяемая равенством

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{\omega_t(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu$$

(контур Γ^+ идет из ∞ по лучу $\arg \mu = +\varphi_0$, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, до начала координат, а из начала координат — по лучу $\arg \mu = -\varphi_0$ в бесконечность), является аналитической в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z = x < 0$; аналогично, функция $F^-(z)$ является аналитической в правой полуплоскости.

Показано (см. [27]), что если имеется бесконечно много $\lambda_k > 0$, то для $F^+(z)$ мнимая ось — естественная граница (в случае $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = 0$ область существования $F^+(z)$ есть либо полуплоскость, либо вся плоскость). Аналогично, если имеется бесконечно много $\lambda_k < 0$, то для $F^-(z)$ мнимая ось — естественная граница. Посмотрим, где является аналитической функция $\varphi(z)$. Для отрицательных z

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty l}^{\infty l} \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{B(\mu) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)},$$

где контур C идет из ∞ по лучу $\arg \mu = -\varphi_0$ ($0 < \varphi_0 < \pi/2$) до начала координат, а из начала координат — по лучу $\arg \mu = \varphi_0$ в бесконечность, причем φ_0 выбран столь близким к $\pi/2$, чтобы между мнимой осью и контуром C не было особенностей функции $B(\mu)$. Интеграл из правой части представляет собой аналитическую функцию в угле $|\arg z - \pi| < \pi/2 - \varphi_0$. Поэтому $\varphi(z)$ — аналитическая в этом угле. Аналогичным образом можно показать, что $\varphi(z)$ — аналитическая в симметричном угле $|\arg z| < \pi/2 - \varphi_0$. Как отмечалось ранее, $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси.

Из равенства (2.12), принимая во внимание аналитичность $\psi^+(z)$ в бесконечной области, простирающейся влево и содержащей внутри себя начало координат, усматриваем, что для всех отрицательных x

$$F^+(x) = \psi^+(x) + \varphi(x), \quad x < 0.$$

Из равенства (2.16) находим подобным образом, что

$$F^-(x) = \psi^-(x) - \varphi(x), \quad x > 0.$$

Отсюда для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ получаем

$$\begin{aligned} F^{+(m)}(x) &= \psi^{+(m)}(x) + \varphi^{(m)}(x), & x < 0, \\ F^{-(m)}(x) &= \psi^{-(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x), & x > 0. \end{aligned}$$

Правые части непрерывны в начале координат. Следовательно, существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow -0} F^{+(m)}(x) = \psi^{+(m)}(0) + \varphi^{(m)}(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} F^{-(m)}(x) = \psi^{-(m)}(0) - \varphi^{(m)}(0).$$

Сложив эти равенства, получим

$$F^{(m)}(0) = \lim_{x \rightarrow -0} F^{+(m)}(x) + \lim_{x \rightarrow +0} F^{-(m)}(x) \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (2.28)$$

Правая часть равенства принципиально известна. Тогда становятся известными величины $F^{(m)}(0)$, а значит, в силу формулы

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} z^m,$$

и сама функция $F(z)$.

Теорема 6.2.4. Пусть функция $L(\lambda)$ имеет вид (2.27). Функции $F(z)$, аналитической в окрестности начала координат, сопоставляем ряд (2.2), а затем по формулам (2.3) вводим функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$. Тогда функция $F^+(z)$ является аналитической в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, функция $F^-(z)$ является аналитической в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Если $F(z)$ не удовлетворяет уравнению (2.21), мнимая ось для $F^+(z)$ (если имеется бесконечно много $\lambda_k > 0$) и для $F^-(z)$ (если имеется бесконечно много $\lambda_k < 0$) — естественная граница. Если $F(z)$ удовлетворяет уравнению (2.21), функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ регулярны в некоторой окрестности начала координат. В том и другом случаях существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow -0} F^{+(m)}(x), \quad \lim_{x \rightarrow +0} F^{-(m)}(x) \quad (m=0, 1, 2, \dots),$$

причем

$$\lim_{x \rightarrow -0} F^{+(m)}(x) + \lim_{x \rightarrow +0} F^{-(m)}(x) = F^{(m)}(0) \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

Функция $F(z)$ может быть восстановлена по этим данным с помощью своего ряда Тейлора.

Утверждение, что $F^+(z)$ и $F^-(z)$ регулярны в окрестности начала координат, если $M_L(F)=0$, следует из теоремы 6.2.3.

6. Второй подслучай, когда $\Delta=0$, $\sum |\lambda_k|^{-1} = \infty$. Здесь предполагаем, что $F(z)$ не удовлетворяет уравнению (2.21).

Было показано, что функция $\varphi(z)$ не является аналитической всюду на вещественной оси (она не является аналитической всюду на отрезке $[\alpha^+, \alpha^-]$). Покажем, что $\varphi(z)$ на вещественной оси принадлежит некоторому квазианалитическому классу. Для этого оценим производные $\varphi^{(k)}(x)$. Имеем

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^k B(\mu)}{L(\mu)} e^{\mu x} d\mu \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

На мнимой оси функция $B(\mu)$ по модулю ограничена, а

$$|L(\mu)|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_k^2}\right) = \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_1^2}\right) \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_2^2}\right) G(r), \quad r = |\mu|,$$

где

$$G(r) = \prod_{k=3}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_k^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{m_{2k}}. \quad (2.29)$$

Поэтому

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq A \max_{r>0} \left(\frac{r^k}{G^{1/2}(r)} \right),$$

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(\mu)| d\mu}{\left[\left(1 + \frac{r^2}{\lambda_1^2}\right) \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_2^2}\right) \right]^{1/2}},$$

или

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{A}{\min_{r>0} \left(\frac{G^{1/2}(r)}{r^k} \right)} = \frac{A}{\left[\min_{r>0} \frac{G(r)}{r^{2k}} \right]^{1/2}}.$$

Выражение (2.29) равно максимуму модуля аналитической функции $G(z)$ на окружности $|z|=r$. В силу неравенств Коши для коэффициентов ряда имеем тогда

$$\frac{1}{m_{2k}} \leq \min_{r>0} \frac{G(r)}{r^{2k}}.$$

На основании этого

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq A m_{2k}^{1/2} \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.30)$$

Положим

$$T(r) = \max_{k>0} \frac{r^k}{m_{2k}^{1/2}} = \left(\max_{k>0} \frac{r^{2k}}{m_{2k}} \right)^{1/2} = \{m(r)\}^{1/2},$$

где $m(r)$ — максимальный член ряда (2.29). Оценим $G(r)$ через $T(r)$. Функция $G(z)$ — экспоненциального типа, вследствие чего

$$2k \sqrt{\frac{1}{m_{2k}}} < q < \infty \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.31)$$

Имея это в виду, получим

$$G(r) = \sum_{h < qr} \frac{r^{2h}}{m_{2h}} + \sum_{h \geq qr} \frac{r^{2h}}{m_{2h}} < qrm(r) + \sum_{h \geq qr} \left(\frac{qr}{2k}\right)^{2k} < qrm(r) + \sum_{h \geq qr} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} < qrm(r) + 1$$

или

$$G(r) < qrT^2(r) + 1. \quad (2.32)$$

В силу условия $\sum_1 |\lambda_k|^{-1} = \infty$, имеем (см. следствие из теоремы 1.1.6)

$$\int_1^\infty \frac{\ln G(r) dr}{r^2} = \infty.$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (2.32), выводим, что

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r) dr}{r^2} = \infty.$$

Последнее условие (см., например, [44] и [46]) является необходимым и достаточным для того, чтобы класс функций $C_{\{m'_k\}}$ ($m'_k = m_{2k}^{1/2}$) был квазианалитическим. При этом классом $C_{\{m'_k\}}$, отвечающим последовательности чисел $m'_1, m'_2, \dots$, называется множество всех функций $f(x)$ (заданных на отрезке $a \leq x \leq b$, имеющих все производные), для каждой из которых существует постоянная K такая, что при всех x из (a, b) будет

$$|f^{(n)}(x)| \leq K^n m'_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Класс $C_{\{m'_k\}}$ называется квазианалитическим, если из условия

$$f^{(n)}(x_0) = \psi^{(n)}(x_0) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad a < x_0 < b,$$

вытекает

$$f(x) = \psi(x), \quad a \leq x \leq b,$$

для любой пары функций $f(x)$ и $\psi(x)$ из $C_{\{m'_k\}}$.

Мы доказали, что функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \frac{B(\mu) e^{\mu x} d\mu}{L(\mu)}$$

принадлежит квазианалитическому классу $C_{\{m_{2k}^{1/2}\}}$ (см. условия (2.30)) в любом интервале вещественной оси.

Аналитические функции $f(x)$ на $[a, b]$ принадлежат классу $C_{\{m_{2k}^{1/2}\}}$. Действительно, если $f(x)$ аналитична на $[a, b]$, то имеется постоянная P такая, что

$$|f^{(k)}(x)| \leq P^k k! \quad (k = 1, 2, \dots), \quad a \leq x \leq b.$$

Но, в силу (2.31),

$$m_{2k}^{1/2} > \left(\frac{2}{q}\right)^k k^k > \left(\frac{2}{q}\right)^k k!$$

Поэтому

$$|f^{(k)}(x)| < Q^k m_{2k}^{1/2} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

и, значит, $f(x)$ принадлежит на $[a, b]$ классу $C_{\{m_{2k}^{1/2}\}}$.

Обратимся к соотношениям (2.12) и (2.16). Напомним, что функция $\psi^+(z)$ аналитична в бесконечной области, которой принадлежит участок вещественной оси от $-\infty$ до точки a , где a — самая правая точка многоугольника G , а функция $\psi^-(z)$ регулярна в бесконечной области, которой принадлежит участок вещественной оси от точки c до $+\infty$, где c — самая левая точка многоугольника G . Из равенства (2.12) усматриваем, что функция $F^+(x)$ квазианалитически продолжается вправо по вещественной оси до точки a . Из равенства (2.16) аналогично усматриваем, что функция $F^-(x)$ квазианалитически продолжается влево по вещественной оси до точки c . На интервале (c, a) вещественной оси

$$F^+(x) + F^-(x) = F(x).$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В интервале (c, a) нет внутренней точки, в некоторую окрестность которой функции $F^+(x)$ и $F^-(x)$ продолжались бы аналитически из соответствующих областей. В противном случае функция $\varphi(z)$, в силу

(2.12) и (2.16), была бы аналитической на всей вещественной оси, что не имеет места, ибо рассматривается ситуация, когда $M_L(F) \neq 0$. Следовательно, в любую (достаточно малую) окрестность внутренней точки интервала (c, a) одна из функций $F^+(x)$, $F^-(x)$ продолжается не аналитически, а квазианалитически. В силу условия $\Delta = 0$ полные области аналитичности функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$ являются по теореме Поля (см., например, [65]) односвязными.

Итак, доказана

Теорема 6.2.5. Пусть выполнено условие

$$\Delta = 0, \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} = \infty$$

(каждое λ_k выписывается столько раз, какова его кратность). Функции $F(z)$, аналитической на $\bar{D}$, сопоставляем ряд (2.2), а затем по формулам (2.3) входим функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$. Пусть G — выпуклый многоугольник (симметричный относительно вещественной оси и со сторонами, не параллельными осям координат), который целиком находится в области аналитичности $F(z)$ и содержит в себе множество $\bar{D}$. Пусть a — самая правая точка многоугольника G , a — самая левая. Если $F(z)$ не удовлетворяет уравнению (2.21), то $F^+(z)$ квазианалитически продолжается слева направо вдоль вещественной оси до точки a , $F^-(z)$ квазианалитически продолжается справа налево вдоль вещественной оси до точки c . В интервале (c, a)

$$F^+(x) + F^-(x) = F(x).$$

7. Пример. Приведем пример, где реализуются условия теоремы 6.2.5.

Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}_1^{\infty}$ такую, что

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\rho_n} = 0, \quad \sum_1^{\infty} \rho_n^{-1} = \infty, \quad \rho_{n+1} - \rho_n \geq h > 0 \quad (n \geq 1),$$

и положительное число α . Положим

$$\begin{aligned} \lambda_v &= \rho_v & (m_{2k} < v \leq m_{2k+1}), & \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda_v &= -\rho_v & (m_{2k+1} < v \leq m_{2k+2}), & \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где целые m_s ($m_0 = 0$) последовательно определяются условиями:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{m_1} \frac{1}{\lambda_v} &\leq \alpha, & \sum_{v=1}^{m_1} \frac{1}{\lambda_v} + \frac{1}{\rho_{m_1+1}} &> \alpha, \\ \sum_{v=1}^{m_1} \frac{1}{\lambda_v} &\geq -\alpha, & \sum_{v=1}^{m_1} \frac{1}{\lambda_v} - \frac{1}{\rho_{m_1+1}} &< -\alpha, \\ &\dots & & \\ \sum_{v=1}^{m_{2k+1}} \frac{1}{\lambda_v} &\leq \alpha, & \sum_{v=1}^{m_{2k+1}} \frac{1}{\lambda_v} + \frac{1}{\rho_{m_{2k+1}+1}} &> \alpha, \\ \sum_{v=1}^{m_{2k+1}} \frac{1}{\lambda_v} &\geq -\alpha, & \sum_{v=1}^{m_{2k+1}} \frac{1}{\lambda_v} - \frac{1}{\rho_{m_{2k+1}+1}} &< -\alpha, \\ &\dots & & \end{aligned}$$

При таком выборе λ_v величина

$$\delta(R) = \sum_{|\lambda_v| \leq R} \frac{1}{\lambda_v}$$

все время находится в интервале $[-\alpha, \alpha]$, причем для $R = \rho_{m_s}$ и $s \rightarrow \infty$ она неограниченно приближается к α , если $s = 2k + 1$, и к $-\alpha$, если $s = 2k$.

Положим

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}.$$

Утверждаем, что в данном случае соответствующее множество $\bar{D}$ — отрезок вещественной оси $[-\alpha, \alpha]$. Имеем

$$h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_k^2}\right)^{1/2} = 0,$$

ибо плотность Δ равна нулю. Поэтому множество $\bar{D}$ — отрезок вещественной оси. Положим

$$L_a(\lambda) = e^{a\lambda} L(\lambda) = e^{a\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}},$$

где a вещественно, и обозначим $\gamma(t)$, $\gamma_a(t)$ функции, ассоциированные по Борелю соответственно с $L(\lambda)$ и с $L_a(\lambda)$. Ясно, что функция $\gamma_a(t)$ равна $\gamma(t-a)$. Отсюда следует, что наименьшее замкнутое выпуклое множество $\bar{D}_a$, содержащее все особенности $\gamma_a(t)$, получается из множества $\bar{D}$ сдвигом его на вектор a . При достаточно большом положительном a множество $\bar{D}_a$ лежит на положительной части вещественной оси. Расстояние от начала координат до самой правой точки $\bar{D}_a$ равно типу σ_a функции $L_a(\lambda)$. По теореме 1.1.8 при $\Delta=0$ тип σ_a равен

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(a + \sum_{|\lambda_k| \leq R} \frac{1}{\lambda_k} \right) = a + \alpha.$$

Отсюда точка $(a+\alpha)$ — самая правая в множестве $\bar{D}_a$. Значит, точка α — самая правая в множестве $\bar{D}$. Взяв достаточно большое по модулю отрицательное a , аналогичным образом убедимся, что точка $-\alpha$ является самой левой в множестве $\bar{D}$. Таким образом, $\bar{D}$ — отрезок $[-\alpha, \alpha]$.

Убедимся теперь, что

$$\lim_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k > 0}} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = \lim_{\substack{\lambda_k \rightarrow \infty \\ \lambda_k < 0}} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = -\alpha. \quad (2.33)$$

С этой целью положим

$$L(\lambda) = e^{\delta(R)\lambda} \prod_{|\lambda_k| \leq R} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \prod_{|\lambda_k| > R} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}.$$

Пусть $R = \lambda_s > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} L'(\lambda_s) &= -\frac{1}{\lambda_s} e^{\delta(R)\lambda_s} \prod_{|\lambda_k| \leq R} \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_k} \right) \prod_{|\lambda_k| > R} \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_k} \right) e^{\frac{\lambda_s}{\lambda_k}} = \\ &= -\frac{1}{\lambda_s} e^{\delta(R)\lambda_s} A_s. \end{aligned}$$

Очевидно неравенство

$$|A_s| \leq \prod_{|\lambda_k| \leq R} \left(1 + \frac{\lambda_s}{|\lambda_k|} \right) \prod_{|\lambda_k| > R} \left(1 - \frac{\lambda_s}{\lambda_k} \right) e^{\frac{\lambda_s}{\lambda_k}}.$$

При доказательстве упомянутой выше теоремы 1.1.8 устанавливается, что при любом $\varepsilon > 0$, когда $|\lambda| = R$,

$$\prod_{|\lambda_k| \leq R} \left(1 + \frac{R}{|\lambda_k|} \right) \prod_{|\lambda_k| > R} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}} < e^{\varepsilon R}, \quad R > r_0(\varepsilon).$$

В силу этого,

$$|A_s| < e^{\varepsilon \lambda_s}, \quad s > s_0(\varepsilon).$$

Для $s = (m_{jk}) + 1$ величина $\lambda_s > 0$, а величина $\delta(R)$, $R = \lambda_s$, близка при больших s к $-\alpha$. Для таких s , следовательно,

$$|L'(\lambda_s)| < e^{(-\alpha + 2\varepsilon)\lambda_s},$$

откуда

$$\lim_{0 < \lambda_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| \geq \alpha.$$

Чтобы получить оценку в другую сторону, запишем

$$L(\lambda) = \frac{L(\lambda)L(-\lambda)}{L(-\lambda)} = \frac{M(\lambda)}{L(-\lambda)}, \quad M(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right).$$

откуда

$$L'(\lambda_s) = \frac{M'(\lambda_s)}{L(-\lambda_s)}.$$

В силу условия $|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| = \rho_{k+1} - \rho_k \geq h > 0$ при больших s имеем

$$|M'(\lambda_s)| > e^{-\varepsilon} |\lambda_s|.$$

Далее, при больших s

$$|L(-\lambda_s)| < e^{(\alpha + \varepsilon)|\lambda_s|}.$$

Поэтому

$$|L'(\lambda_s)| > e^{(-\alpha - 2\varepsilon)|\lambda_s|},$$

на основании чего

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_s} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_s)} \right| \leq \alpha.$$

Тем самым установили, что

$$\lim_{0 < \lambda_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = \alpha.$$

Аналогичным образом подсчитывается второй из пределов (2.33).

Выбрав функцию $L(\lambda)$, возьмем теперь какую-нибудь функцию $F(z)$, которая регулярна на $\bar{D} = [-\alpha, \alpha]$ и не удовлетворяет уравнению (2.21). Функции $F(z)$ сопоставляем ряд (2.2),

в рассматриваемом случае он имеет вид

$$\sum_1^{\infty} a_v e^{\lambda_v z}, \quad a_v = \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)}.$$

Функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ определяются следующим образом:

$$F^+(z) = \sum_{\lambda_v > 0} a_v e^{\lambda_v z}, \quad F^-(z) = \sum_{\lambda_v < 0} a_v e^{\lambda_v z}. \quad (2.34)$$

Пусть p — наименьшее целое такое, что $[M_L(F)]_0^{(p)} \neq 0$. При больших v (см. (2.4) из гл. IV)

$$a_v \sim - \frac{[M_L(F)]_0^{(p)}}{\lambda_v^{p+1} L'(\lambda_v)}.$$

На основании этого, принимая во внимание равенства (2.33), заключаем, что ряды (2.34) сходятся соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} z < -\alpha$ и $\operatorname{Re} z > \alpha$. Поскольку плотность $\Delta=0$ и $|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| = \rho_{k+1} - \rho_k \geq h > 0$, прямая $\operatorname{Re} z = -\alpha$ является естественной границей для функции $F^+(z)$, а прямая $\operatorname{Re} z = \alpha$ является естественной границей для функции $F^-(z)$.

В качестве многоугольника G , который содержит в себе $\bar{D}$, в рассматриваемом примере можно взять четырехугольник с вершинами на координатных осях, причем правая вершина a находится правее точки α , левая c — левее точки $-\alpha$, верхняя b — над вещественной осью, нижняя d — под вещественной осью. Четырехугольник выбираем так, чтобы он целиком лежал в области регулярности $F(z)$.

Согласно теореме 6.2.5, функция $F^+(z)$ квазианалитически продолжается из полуплоскости $\operatorname{Re} z < -\alpha$ по вещественной оси до точки a , а функция $F^-(z)$ квазианалитически продолжается из полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$ по вещественной оси до точки c . На интервале (c, a)

$$F^+(x) + F^-(x) = F(x).$$

Интересно отметить, что, согласно последнему равенству, функция $F^+(z)$ на участке (a, a) снова является аналитической функцией, а функция $F^-(z)$ будет обладать этим свойством на участке $(c, -\alpha)$.

В частном случае, когда $F(z)$ — целая функция, функция $F^+(z)$ регулярна в полуплоскостях $\operatorname{Re} z < -\alpha$ и $\operatorname{Re} z > \alpha$ и квазианалитична на соединяющем их отрезке вещественной оси $[-\alpha, \alpha]$. Такой же является и функция $F^-(z)$.

§ 3. Обобщение на функции, непрерывные в замкнутой области

1. **Постановка задачи.** Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, $h(\varphi)$ — ее индикатриса роста, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная с $L(\lambda)$ по Борелю, $\bar{D}$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, причем $0 \in \bar{D}$. Предположим дополнительно, что $L(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$|L(\lambda)| < A \frac{e^{h(\varphi)|\lambda|}}{|\lambda|^\mu}, \quad \mu > 1, \quad \varphi = \arg \lambda. \quad (3.1)$$

При этом условии функция $\gamma(t)$ непрерывна вплоть до границы $\partial \bar{D}$ и

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \gamma(t) \left(\int_0^t F(t-\eta) e^{i\mu\eta} d\eta \right) dt.$$

От функции $F(t)$ требуется только то, чтобы она была регулярна в D и непрерывна в $\bar{D}$. Функции $F(z)$ сопоставляем ряд (2.2). Речь опять идет о том, как восстановить $F(z)$, если в ряде (2.2) известны многочлены $P_v(z)$ ($v \geq 1$). Принципиально $F(z)$ можно восстановить по этим данным на основании теоремы единственности, которая верна и здесь.

Предположим, как и выше, что у $L(\lambda)$ все нули вещественные и она на вещественной оси имеет вещественные значения. Поскольку, согласно (2.14), функция $L(\lambda)$ по модулю растет на мнимой оси, множество $\bar{D}$ при условии (3.1) не может быть горизонтальным отрезком (отрезком вещественной оси). Случай, когда $\bar{D}$ — вертикальный отрезок, особо будет рассмотрен в следующем параграфе без ограничений на нули λ_v . Следовательно, надо рассмотреть случай, когда $\bar{D}$ имеет внутренние точки.

2. **Вывод основных формул.** Исследования в предыдущих параграфах основаны на представлении $F(z)$ в многоугольнике G (охватывающем $\bar{D}$) рядом (2.5). Следуя этому, сейчас надо было бы иметь представление для $F(z)$ (аналогичное (2.5)) в замкнутой области $\bar{D}$. Такого представления, однако, не имеется. Поэтому сейчас будет указан другой способ исследования поставленной задачи. Он будет основан на формуле (5.10) из гл. IV:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{i\mu z} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt, \quad (3.2)$$

где Γ — конечный замкнутый контур, на котором $L(\mu) \neq 0$, и $\gamma(t, z, \Gamma)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)},$$

как функцией λ . В этой формуле λ лежит вне Γ . Для простоты пишем $\gamma(t, z, \Gamma)$, $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$ вместо $\tilde{\gamma}(t, z, \Gamma)$, $\tilde{\Phi}(\lambda, z, \Gamma)$. Для λ , лежащих внутри Γ ,

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} + e^{\lambda z}.$$

Для дальнейшего полезно отметить следующие оценки:

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma)| \leq \begin{cases} |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu|, & \lambda \text{ вне } \Gamma, \quad \rho(\lambda, \Gamma) \geq 1, \\ |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + |\lambda|^n |e^{\lambda z}|, & \lambda \text{ внутри } \Gamma, \\ K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + (e^{|z|} + 1) |e^{\lambda z}| (1 + |\lambda|)^n, & \rho(\lambda, \Gamma) \geq 1, \\ K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + (e^{|z|} + 1) |e^{\lambda z}| (1 + |\lambda|)^n, & \rho(\lambda, \Gamma) < 1, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad r \geq 2, \\ & (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (3.3)$$

где K — постоянная, которая не зависит от λ, z, n и контура Γ . Первые две оценки очевидны. Установим третью оценку. Пусть λ находится от Γ на расстоянии $\rho(\lambda, \Gamma) < 1$, и пусть λ лежит вне Γ . Контур Γ во всем дальнейшем образован дугами окружностей и отрезками прямых. Пусть γ — часть контура Γ , находящаяся от λ на расстоянии $\rho \leq 1$. Имеем

$$L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu^n e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^n \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{(\lambda - \mu) L(\mu)} e^{\mu z} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu^n e^{\mu z} d\mu}{\lambda - \mu}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим сначала последний интеграл из правой части (3.4). Пусть α и β — концы дуги γ . Интеграл не изменится, если γ заменим дугой $\tilde{\gamma} = \alpha\beta$ окружности с центром в λ и радиусом, равным единице (α и β лежат на этой окружности), причем той

дугой, к которой можно перейти от γ непрерывным путем, не пересекая точку λ . Поэтому

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu^n e^{\mu z} d\mu}{\lambda - \mu} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\mu^n e^{\mu z} d\mu}{\lambda - \mu} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}} |\mu|^n |e^{\mu z}| |d\mu|.$$

В интеграле из правой части неравенства $\mu = \lambda + \eta$, $|\eta| = 1$. Следовательно,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\mu^n e^{\mu z} d\mu}{\lambda - \mu} \right| \leq e^{|z|} |e^{\lambda z}| (1 + |\lambda|)^n.$$

Рассмотрим теперь первый интеграл из правой части (3.4). Имеем

$$L(\lambda) - L(\mu) = - \int_{\lambda}^{\mu} L'(t) dt,$$

откуда

$$\left| \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq |L'(t_0)|, \quad t_0 \in [\lambda, \mu].$$

При условии (3.1) производная $L'(\lambda)$ удовлетворяет аналогичному неравенству (см. (1.24) из гл. IV):

$$|L'(re^{i\varphi})| < B \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r > 0.$$

Пусть $\lambda = re^{i\varphi}$, $t_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$. Тогда

$$|L'(t_0)| < B \frac{e^{h(\varphi_0)r_0}}{r_0^\mu} = B \left(\frac{r}{r_0} \right)^\mu e^{h(\varphi_0)r_0 - h(\varphi)r} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}.$$

Поскольку $|\lambda - t_0| \leq 1$, а r считаем больше чем 2, то

$$r_0 \geq r - 1 \geq \frac{r}{2}, \quad \frac{r}{r_0} < 2.$$

В силу неравенства (1.23) гл. IV, имеем далее

$$h(\varphi_0)r_0 - h(\varphi)r \leq |t_0 - \lambda| \max_{t \in \tilde{D}} |t| \leq \max_{t \in \tilde{D}} |t| = \rho.$$

На основании всего этого

$$\left| \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu} \right| \leq K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad K = B2^\mu e^\rho,$$

и потому

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mu^n \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{(\lambda - \mu)L(\mu)} e^{\mu z} d\mu \right| \leq K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\gamma} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu|.$$

Теперь отметим, что

$$\left| L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma \setminus \gamma'} \frac{\mu^n e^{\mu z}}{(\lambda - \mu)L(\mu)} d\mu \right| \leq |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma \setminus \gamma'} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| \leq K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\gamma \setminus \gamma'} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu|.$$

В итоге получаем

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma)| \leq K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\gamma} \left| \frac{\mu^n e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + e^{z|} |e^{\lambda z}| (1 + |\lambda|)^n.$$

Если бы точка λ находилась внутри Γ , то появилось бы еще слагаемое $|\lambda^n| |e^{\lambda z}|$. Третья оценка (3.3) установлена. Заметим, что, в силу непрерывности, третья оценка справедлива и для λ , лежащих на самом контуре Γ .

При оперировании с оценками (3.3) стоит обратить внимание на следующее: если z лежит в области D и отстоит от границы ∂D на расстояние $\delta = \rho(z, \partial D)$, то (см. (6.9) из гл. IV)

$$|e^{\lambda z}| \leq e^{|\lambda|(\varphi) - \delta|\lambda|}, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad \delta = \rho(z, \partial D). \quad (3.5)$$

Теперь перейдем к установлению формул, которые будут аналогами формул (2.12) и (2.16). При этом будем, как и раньше, опираться на то, что в области $\psi_0 \leq \arg \mu \leq \pi - \psi_0$, $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, и на некоторых окружностях $|\mu| = r_k \uparrow \infty$ выполняется оценка

$$|L(\mu)| > e^{-\beta|\mu|}, \quad |\mu| \geq r_0, \quad (3.6)$$

где r_0 и β могут зависеть от ψ_0 .

Пусть $\tilde{\Gamma}$ — контур, проходящий в положительном направлении, образованный лучами $\arg \mu = \pi \pm \psi_0$, $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, $\tilde{\Gamma}_k$ — конечный замкнутый контур, составленный из части $\tilde{\Gamma}$, лежащей внутри окружности $|\mu| = r_k$, и дуги этой окружности: $|\mu| = r_k$, $\pi - \psi_0 \leq \arg \mu \leq \pi + \psi_0$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda, z, \tilde{\Gamma}) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)}$$

(в этой записи λ лежит справа от $\tilde{\Gamma}$). Имея в виду оценку (3.6), предположим, что z лежит на вещественной оси:

$$z = x > N = \frac{\beta + 2}{\cos \psi_0}. \quad (3.7)$$

Тогда

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| \leq e^{(-x \cos \psi_0 + \beta)|\mu|} < e^{-2|\mu|},$$

интеграл

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| < P$$

и, на основании (3.3), для z из области (3.7)

$$|\Phi(\lambda, z, \tilde{\Gamma})| < 2KP \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad |\lambda| > \rho_0. \quad (3.8)$$

Число $\rho_0 \geq 2$ здесь выбрано с условием: для точек λ , $|\lambda| \geq \rho_0$, $\rho(\lambda, \tilde{\Gamma}) < 1$, имеем $\operatorname{Re} \lambda < -1$. Для таких λ

$$(e^{|\lambda|} + 1)|e^{\lambda z}| \leq (e^x + 1)e^{-x} \leq 2, \quad x > N.$$

Из оценки (3.8) следует, что функция $\varphi(t, z, \tilde{\Gamma})$, как функция t , регулярна вне $\tilde{D}$ и непрерывна вплоть до границы $\partial \tilde{D}$. Имеем

$$\Phi(\lambda, z, \tilde{\Gamma}) - \Phi(\lambda, z, \tilde{\Gamma}_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma} \setminus \tilde{\Gamma}_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)}.$$

Контур в интеграле справа состоит из частей $\tilde{\Gamma}$, лежащих вне окружности $|\mu| = r_k$, и дуги окружности: $|\mu| = r_k$, $\pi - \psi_0 \leq \arg \mu \leq \pi + \psi_0$. Когда μ лежит на этом контуре, $\operatorname{Re} \mu \leq -|\mu| \cos \psi_0$ и, значит, для x из области (3.7)

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < e^{(-x \cos \psi_0 + \beta)|\mu|} < e^{-2|\mu|}.$$

На основании этого и оценки (3.3) получаем

$$\begin{aligned} & |\Phi(\lambda, z, \tilde{\Gamma}) - \Phi(\lambda, z, \tilde{\Gamma}_k)| < \\ & < K e^{-r_k} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\tilde{\Gamma} \setminus \tilde{\Gamma}_k} e^{-|\mu|} |d\mu| + (e^x + 1)e^{-(r_k \cos \psi_0 - 1)x}, \quad r \geq 2. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что для точек λ , $\rho(\lambda, \tilde{\Gamma} \setminus \tilde{\Gamma}_k) < 1$, выполняется $\operatorname{Re} \lambda \leq -(r_k \cos \psi_0 - 1)$. Интеграл, стоящий справа, при больших k

меньше единицы. Поэтому

$$|\Phi(\lambda, z, \bar{\Gamma}) - \Phi(\lambda, z, \bar{\Gamma}_k)| < e^{-(r_k \cos \psi_0 - 2)x} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^h},$$

$$x > N, \quad r \geq 2.$$

Для $|\lambda| = r < 2$ по принципу максимума модуля левая часть не превосходит

$$e^{-(r_k \cos \psi_0 - 2)x} Q, \quad Q = \frac{1}{2^h} \exp[2 \max_{\varphi} h(\varphi)].$$

Из этих оценок, согласно формуле

$$\gamma(t, z, \Gamma) = \int_0^\infty \Phi(\lambda, z, \Gamma) e^{-\lambda t} d\lambda,$$

получаем

$$|\gamma(t, z, \bar{\Gamma}) - \gamma(t, z, \bar{\Gamma}_k)| < C e^{-(r_k \cos \psi_0 - 2)x},$$

где t лежит вне $\bar{D}$ или на границе $\partial \bar{D}$. Значит, на границе $\partial \bar{D}$ равномерно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t, z, \bar{\Gamma}_k) = \gamma(t, z, \bar{\Gamma}), \quad t \in \partial \bar{D}, \quad z = x > N.$$

Согласно формуле (3.2),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \bar{\Gamma}_k) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{\Gamma}_k} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z}}{L(\mu)} d\mu =$$

$$= \sum_{\substack{|\lambda_\nu| < r_k \\ \lambda_\nu < 0}} P_\nu(z) e^{\lambda_\nu z}, \quad z = x > N.$$

Предел левой части существует при $k \rightarrow \infty$, следовательно, существует и предел правой части, причем, согласно обозначению (2.3), он равен $F^-(z)$. Таким образом, имеем

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \bar{\Gamma}) dt, \quad z = x > N. \quad (3.9)$$

Обозначим Γ_0^- мнимую ось, проходимую снизу вверх. Требуется доказать, что

$$\gamma(t, z, \bar{\Gamma}) = \gamma(t, z, \Gamma_0^-), \quad z = x > N, \quad t \in \partial \bar{D}. \quad (3.10)$$

Пусть l_0 — луч $\arg \mu = \pi/2$, l_1 — луч $\arg \mu = \pi - \psi_0$, C_k — конечный замкнутый контур, образованный отрезками лучей l_0 и l_1 от начала координат до окружности $|\mu| = r_k$ и дугой $C'_k: |\mu| = r_k, \pi/2 \leq \arg \mu \leq \pi - \psi_0$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda > 1.$$

На лучах l_0 , l_1 и контуре C_k

$$\operatorname{Im} \mu \geq |\mu| \sin \psi_0.$$

Поэтому, на основании (3.6),

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{(\lambda - \mu) L(\mu)} \right| \leq \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < e^{(-y \sin \psi_0 + \beta)|\mu|} < e^{-|\mu|}$$

для $z = iy, y > \frac{\beta + 1}{\sin \psi_0}$. Отсюда интеграл, взятый по дуге C'_k , стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Значит,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)},$$

$$z = iy, \quad y > \frac{\beta + 1}{\sin \psi_0}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 1.$$

Интеграл в левой части сходится и представляет собой аналитическую функцию от z в полуплоскости, ограниченной прямой, которая перпендикулярна продолжению луча $\arg \mu = -(\pi - \psi_0)$ и отстоит от начала на расстояние β . Интеграл справа, в силу (2.14), сходится в верхней замкнутой полуплоскости $y \geq 0$, он представляет собой функцию, аналитическую в открытой полуплоскости $y > 0$ и непрерывную в замкнутой полуплоскости $y \geq 0$. В силу установленного равенства, для

$$z = iy, \quad y > \frac{\beta + 1}{\sin \psi_0},$$

эти интегралы равны в общей части полуплоскостей сходимости. В частности, они равны для $z = x > N = \beta / \cos \psi_0$.

Аналогичным образом получим равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad z = x > N, \quad \operatorname{Re} \lambda > 1,$$

где l'_0 — луч $\arg \mu = -\pi/2$, l'_1 — луч $\arg \mu = \pi + \psi_0$.

На основании полученных равенств имеем

$$\Phi(\lambda, z, \bar{\Gamma}) = \Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-), \quad \operatorname{Re} \lambda > 1, \quad z = x > N.$$

В левой и правой частях — целые функции λ . Поэтому эти функции, равные при $\operatorname{Re} \lambda > 1$, равны при любых λ . Отсюда вытекает равенство (3.10).

Особо отметим, что функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ определяется так:

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (3.11)$$

Формулу (3.9) теперь можно записать в виде

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^-) dt, \quad z = x > N. \quad (3.12)$$

С помощью аналогичных рассуждений получается и другая формула

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^+) dt, \quad z = x < -N, \quad (3.13)$$

где Γ_0^+ — мнимая ось, проходимая сверху вниз, а $\gamma(t, z, \Gamma_0^+)$ связана с функцией $\Phi(t, z, \Gamma_0^+)$, которая определяется так:

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Поскольку

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) = e^{\lambda z} + L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0,$$

то, следовательно,

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) + \Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) = e^{\lambda z}, \quad z = x. \quad (3.14)$$

3. Исследование функций $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$ и $\gamma(t, z, \Gamma_0^+)$. Обратимся к оценкам (3.3). Применительно к функции $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ первая оценка имеет место, когда $\operatorname{Re} \lambda \geq 1$, а вторая — когда $\operatorname{Re} \lambda \leq -1$, и, наконец, третья — когда $|\operatorname{Re} \lambda| \leq 1$. В силу

первой и третьей оценок, для любых вещественных z

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-)| \leq K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma_0^-} \left| \frac{\mu^n}{L(\mu)} \right| |d\mu| + (e^{|z|} + 1) e^{|z|} (1+r)^n, \\ \operatorname{Re} \lambda > -1, \quad r \geq 2.$$

Для $\operatorname{Re} \lambda \leq -1$ воспользуемся второй оценкой и обратим внимание на второй член $|\lambda|^n |e^{\lambda z}|$ в этой оценке. Он меньше $|\lambda|^n$, когда $z \geq 0$. Случай отрицательных z несколько сложнее. Пусть c — самая левая точка множества $\bar{D}$ ($c < 0$, ибо $0 \in D$). Возьмем точку c_0 , $c < c_0 < 0$, и обозначим δ расстояние от отрезка $[c_0, 0]$ до границы $\partial \bar{D}$. В силу (3.5),

$$|\lambda|^n |e^{\lambda z}| \leq |\lambda|^n e^{h(\varphi)(-\delta)} |\lambda|, \quad z \in [c_0, 0], \quad \operatorname{Re} \lambda \leq -1.$$

Значит,

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma_0^-} \left| \frac{\mu^n}{L(\mu)} \right| |d\mu| + r^n e^{h(\varphi)(-\delta)r}, \\ \operatorname{Re} \lambda \leq -1, \quad z \geq c_0.$$

Когда точка c_0 близка к точке c , величина δ мала, в силу чего $h(\varphi)(-\delta) > 0$ при всех φ . Окончательно имеем

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < \\ < K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma_0^-} \left| \frac{\mu^n}{L(\mu)} \right| |d\mu| + e^{|z|} (e^{|z|} + 1) (1+r)^n e^{h(\varphi)(-\delta)r}, \quad (3.15)$$

или

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < \\ < K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \left\{ K \int_{\Gamma_0^-} \left| \frac{\mu^n}{L(\mu)} \right| |d\mu| + 2^n e^{|z|} (1 + e^{|z|}) \frac{r^{n+\mu}}{e^{\delta r}} \right\}, \\ r \geq 2, \quad z \geq c_0. \quad (3.16)$$

Выражение

$$\frac{r^{n+\mu}}{e^{\delta r}}$$

достигает максимума при $r = (n + \mu)/\delta$, максимум равен

$$\left(\frac{n + \mu}{e\delta} \right)^{n+\mu}.$$

Ранее видели, что

$$\int_{\Gamma_0} \left| \frac{\mu^n}{L(\mu)} \right| |d\mu| \leq B m_{2n}^{1/2}, \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{\left[\left(1 + \frac{r^2}{\lambda_1^2}\right) \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_2^2}\right) \right]^{1/2}},$$

где m_{2n} взято из (2.29). Кроме того, было показано, что

$$n^n < \left(\frac{q}{2}\right)^n m_{2n}^{1/2}, \quad q < \infty.$$

На основании всего этого выражение в фигурных скобках в (3.16) не превосходит $Q^n m_{2n}^{1/2}$, где Q — постоянная, когда z лежит в конечном интервале $c_0 \leq z \leq g < \infty$. Из (3.16) выводим

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < Q^n m_{2n}^{1/2} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r \geq 2, \quad c_0 \leq z \leq g < \infty.$$

По принципу максимума модуля при $r < 2$ левая часть не будет превосходить

$$Q^n m_{2n}^{1/2} 2^{-\mu} \exp(2 \max_{\varphi} h(\varphi)).$$

Используя эти оценки и формулу

$$\gamma_z^{(n)}(t, z, \Gamma_0^-) = \int_0^{\infty} \Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-) e^{-\lambda t} d\lambda, \quad (3.17)$$

получим

$$|\gamma_z^{(n)}(t, z, \Gamma_0^-)| < P^n m_{2n}^{1/2}, \quad t \in \partial \bar{D}, \quad c_0 \leq z \leq g < \infty \quad (n=0, 1, \dots).$$

В рассматриваемой ситуации $\sum_1 |\lambda_k|^{-1} = \infty$ (в противном случае $\bar{D}$ — точка). Следовательно, функция $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$, как функция z (при $t \in \partial \bar{D}$), принадлежит квазианалитическому классу $C_{\{m_{2n}^{1/2}\}}$ в интервале $[c_0, g]$. Напомним, что c_0 — любая точка, лежащая правее точки c (точка c — самая левая в множестве $\bar{D}$).

Аналогичными рассуждениями можно убедиться в том, что функция $\gamma(t, z, \Gamma_0^+)$ принадлежит указанному квазианалитическому классу (при $t \in \partial \bar{D}$) в любом интервале $-\infty < g \leq z \leq a_0 < a$, где a — самая правая точка множества $\bar{D}$.

Из (3.14) получаем

$$\gamma(t, z, \Gamma_0^-) + \gamma(t, z, \Gamma_0^+) = \frac{1}{t-z}, \quad t \in \partial \bar{D}, \quad c < z < a. \quad (3.18)$$

4. Другое представление функций $F^-(z)$ и $F^+(z)$. Обратимся к формулам (3.12) и (3.13). Из (3.12) усматриваем, что функция $F^-(z)$ допускает квазианалитическое продолжение из области $z > N$ в область $z > c$. Из формулы (3.13) усматриваем, что функция $F^+(z)$ допускает квазианалитическое продолжение из области $z < -N$ в область $z < a$. Эти продолжения будем обозначать прежними символами $F^-(z)$ и $F^+(z)$. В интервале $c < z < a$, согласно (3.18),

$$F^-(z) + F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) [\gamma(t, z, \Gamma_0^-) + \gamma(t, z, \Gamma_0^+)] dt = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \frac{F(t)}{t-z} dt = F(z).$$

Таким образом, получили представление $F(z)$ через функции $F^-(z)$ и $F^+(z)$.

Для функций $F^-(z)$ и $F^+(z)$ получим сейчас новые представления, более удобные, чем представления (3.12) и (3.13). С этой целью введем функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^-} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^-) dt - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^+) dt, \quad (3.19)$$

где l^- и l^+ определяются следующим образом. Пусть b — самая верхняя точка множества $\bar{D}$, d — самая нижняя (если имеется несколько таких точек, то берем из них одну верхнюю и одну нижнюю). Точки b и d разделяют границу $\partial \bar{D}$ на две части. Правую из них обозначим l^- , а левую — l^+ .

Изучим функцию $\varphi(z)$. Для этого надо изучить $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$ для $t \in l^-$ и $\gamma(t, z, \Gamma_0^+)$ для $t \in l^+$. Согласно (3.17), для изучения $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$ при $t \in l^-$ достаточно в интеграле (3.17) угол φ изменять в границах $|\varphi| \leq \pi/2$. Вследствие этого достаточно знать функцию $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ лишь при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Эта функция при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ определяется формулой (3.11). Имея это в виду, на основании оценок (3.3), получим

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma_0^-} \left| \frac{\mu^n}{L(\mu)} \right| |d\mu| + (e^{2|z|} + 1) e^{2|z|} (1+r)^n,$$

где z — любое вещественное, $\operatorname{Re} \lambda \geq -2$, $r \geq 2$. Правая часть здесь не хуже, чем правая часть в (3.15). Поэтому

$$|\Phi_z^{(n)}(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < Q^n m_{2n}^{1/2} \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r \geq 2, \operatorname{Re} \lambda \geq -2,$$

где Q — постоянная, когда z лежит в конечном интервале вещественной оси (Q зависит от этого интервала). При $r < 2$ левая часть не превосходит

$$Q^n m_{2n}^{1/2} 2^{-\mu} \exp[2 \max_{\varphi} h(\varphi)].$$

В силу этих оценок и формулы (3.17), убедимся, что функция $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$ (при $t \in l^-$), как функция z , принадлежит квазианалитическому классу $C_{\{m_{2n}^{1/2}\}}$ в любом конечном интервале вещественной оси.

Аналогично получим, что функция $\gamma(t, z, \Gamma_0^+)$ (при $t \in l^+$), как функция z , принадлежит указанному классу в любом конечном интервале.

Из (3.19) видно, что $\varphi(z)$ принадлежит квазианалитическому классу $C_{\{m_{2n}^{1/2}\}}$ в любом интервале вещественной оси.

Выше было установлено, что функция $F^-(z)$ (ее квазианалитическое продолжение) имеет вид

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^-) dt, \quad z > c,$$

откуда

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^-} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^-) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^-) dt.$$

При $c < z < a$, согласно (3.18), получаем

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^-} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^-) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^+) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} \frac{F(t)}{t-z} dt$$

или

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^+} \frac{F(t)}{t-z} dt + \varphi(z), \quad z > c. \quad (3.20)$$

Последнее соотношение установлено пока только для $c < z < a$. Но левая и правая части являются квазианалитическими для $z > c$. Следовательно, равенство, верное при $c < z < a$, верно для $z > c$.

Совершенно аналогично получим, что

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l^-} \frac{F(t)}{t-z} dt - \varphi(z), \quad z < a. \quad (3.21)$$

Из формул (3.20) и (3.21) вновь можно заключить, что в интервале $a < z < c$ функция $F(z)$ есть сумма функций $F^-(z)$ и $F^+(z)$.

Формулы (3.20) и (3.21) являются аналогами формул (2.12) и (2.16).

5. Случай положительной нижней плотности. Рассмотрим случай, когда нижняя плотность Δ последовательности нулей $L(\mu)$ больше нуля. Убедимся, что в этом случае функция $\varphi(z)$ является аналитической в горизонтальной полосе $|y| < h$, где

$$h = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{L\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)}{r} \right|.$$

Согласно (2.18), имеем $\frac{\pi}{2} \Delta \leq h \leq h\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Из формулы (3.11) видно, что $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ — регулярная функция в указанной полосе. Получим ее оценку. Пусть z лежит в замкнутой области $\bar{E}$, принадлежащей полосе $|y| < h$, и пусть ψ_0 , $0 < \psi_0 < \pi/2$, — угол, близкий к $\pi/2$. Из (3.3) получаем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma_0^-} \left| \frac{e^{i\lambda t}}{L(\mu)} \right| |d\mu|, \quad |\varphi| \leq \psi_0, \quad r > \frac{1}{\cos \psi_0}.$$

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < K \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu} \int_{\Gamma_0^-} \left| \frac{e^{i\lambda t}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + (e^{|z|} + 1) e^{|z|} e^{|y|},$$

$$\psi_0 < |\varphi| \leq \pi/2, \quad r \geq 2.$$

Если z лежит в $\bar{E}$, то $|y| < h - 2\delta \leq h(\pi/2) - 2\delta \leq h(\varphi) - \delta$, $\psi_0 \leq \varphi \leq \pi/2$, когда ψ_0 близко к $\pi/2$. Выберем ψ_0 именно таким образом. Тогда для $z \in \bar{E}$

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)| < K_1 \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad r > \frac{1}{\cos \psi_0}, \quad |\varphi| \leq \pi/2.$$

Из этой оценки будет вытекать (согласно формуле (3.17), при $n=0$), что функция $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$ непрерывна при $t \in l^-$ и аналитична относительно z в E . Но E — произвольная область из полосы $|y| < h$. Значит, $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$ регулярна во всей этой полосе, когда $t \in l^-$.

Также можно показать, что $\gamma(t, z, \Gamma_0^+)$ регулярна относительно z в полосе $|y| < h$ и непрерывна относительно t на дуге l^+ .

В силу этого функция $\varphi(z)$ регулярна в полосе $|y| < h$.

Из формулы (3.20) усматриваем, что $F^-(z)$ аналитически продолжается справа налево по полосе $|y| < h$ до дуги l^+ . Из формулы (3.21) аналогично убеждаемся, что $F^+(z)$ аналитически продолжается слева направо по полосе $|y| < h$ до дуги l^- . В общей части области D и полосы $|y| < h$

$$F^-(z) + F^+(z) = F(z).$$

Если нули λ_v — простые, то в рассматриваемом случае в этой общей части получится для $F(z)$ представление (2.20).

Таким образом, доказана

Теорема 6.3.1. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа, $h(\varphi)$ — ее индикатриса роста, $\lambda_v (v \geq 1)$ — нули $L(\lambda)$, $\bar{D}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности ассоциированной с $L(\lambda)$ функции $\gamma(t)$. Предполагаем, что у $L(\lambda)$ все нули — вещественные, $L(\lambda)$ принимает вещественные значения на вещественной оси, $\bar{D}$ содержит внутренние точки и $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (3.1). Функции $F(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, сопоставляем ряд (2.2) и по формулам (2.3) вводим функции $F^-(z)$ и $F^+(z)$. Первая из них регулярна в некотором угле D^- : $|\arg(z - \alpha^-)| < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$, вторая регулярна в некотором угле D^+ : $|\arg(z - \alpha^+) - \pi| < \psi_0$. Функция $F^-(z)$ квазианалитически продолжается из угла D^- влево по вещественной оси до самой левой точки с множества $\bar{D}$. Функция $F^+(z)$ квазианалитически продолжается из угла D^+ вправо по вещественной оси до самой правой точки a множества $\bar{D}$. На участке $c < z < a$

$$F^-(z) + F^+(z) = F(z).$$

Если нижняя плотность Λ последовательности нулей $L(\lambda)$ больше нуля, то $F^-(z)$ аналитически продолжается из D^- влево по ка-

налу $|y| < \frac{\pi}{2} \Delta$ до левой части l^+ границы $\partial \bar{D}$, а $F^+(z)$ аналитически продолжается из D^+ вправо по каналу $|y| < \frac{\pi}{2} \Delta$ до правой части l^- границы $\partial \bar{D}$. В этом случае при условии, что λ_v — простые нули $L(\lambda)$, в пересечении области D с полосой $|y| < \frac{\pi}{2} \Delta$ функция $F(z)$ имеет представление (2.20).

§ 4. Случай отрезка

1. Обобщение и упрощение задачи. Осталось рассмотреть случай, когда функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (3.1), а $\bar{D}$ — вертикальный отрезок. Можно допустить, не нарушая общности рассуждений, что это — отрезок $[a, b]$ мнимой оси ($\operatorname{Im} a < 0 < \operatorname{Im} b$).

Имеем

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \gamma(t) e^{\lambda t} dt,$$

где $\partial \bar{D}$ — дважды проходимый в разных направлениях отрезок $[a, b]$. Пусть $\gamma_+(t)$ — предельное значение $\gamma(t)$ на $[a, b]$ при подходе к отрезку с правой стороны, а $\gamma_-(t)$ — предельное значение $\gamma(t)$ на $[a, b]$ при подходе к отрезку с левой стороны. В силу (3.1), эти предельные значения непрерывны. Получаем

$$L(\lambda) = \int_a^b \varphi(t) e^{\lambda t} dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} [\gamma_+(t) - \gamma_-(t)]. \quad (4.1)$$

Имеем, далее,

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} \gamma(t) \left(\int_a^t F(t - \eta) e^{\mu \eta} d\eta \right) dt,$$

или

$$\omega_L(\mu, F) = \int_a^b \varphi(t) \left(\int_0^t F(t - \eta) e^{\mu \eta} d\eta \right) dt. \quad (4.2)$$

От функции $F(t)$ здесь требуется только одно — она должна быть непрерывной на $[a, b]$.

Откажемся от предложения, что $L(\lambda)$ имеет вещественные значения на вещественной оси и что у $L(\lambda)$ все нули — вещественные. Более того, рассмотрим более общую ситуацию, когда

функция $L(\lambda)$ имеет вид

$$L(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda t} d\sigma(t), \quad (4.3)$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Естественно считать, что отрезок $[a, b]$ нельзя здесь заменить меньшим отрезком, не изменяя значения интеграла.

Задача заключается в том, чтобы восстановить функцию $F(z)$, если известны члены ряда (2.2). Решение этой задачи в случае, когда $L(\lambda)$ принимает вещественные значения на вещественной оси, изложено в [82], [83], в общем случае — в [13].

Решение задачи в случае (4.3) сведем к случаю, когда $L(\lambda)$ имеет вид (4.1), где $\varphi(t)$ — непрерывная функция.

По свойству 15) интерполирующей функции, если

$$F(z) \sim (L) \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

то

$$F_1(z) = F(z) - P_1(z) e^{\lambda_1 z} - P_2(z) e^{\lambda_2 z} \sim (M) \sum_{v=3}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z}, \quad (4.4)$$

где

$$M = M(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

Функция $M(\lambda)$ уже имеет вид (4.1). Пусть известны $P_v(z)$ ($v \geq 1$). Тогда известны и члены ряда (4.4). Если указать, как по ряду (4.4) восстановить функцию $F_1(z)$, то

$$F(z) = F_1(z) + P_1(z) e^{\lambda_1 z} + P_2(z) e^{\lambda_2 z}.$$

Следовательно, решение задачи о восстановлении в случае (4.3) свелось к решению той же задачи в случае (4.1). Имея это в виду, с самого начала будем предполагать, что $L(\lambda)$ имеет вид (4.1), где $\varphi(t)$ — непрерывная функция, и

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{h(\varphi)r}}{r^2} \quad (4.5)$$

(этому условию удовлетворяет функция $M(\lambda)$). Можно считать, не нарушая общности рассуждений, что $L(0) \neq 0$ (в противном случае можно было бы воспользоваться свойством 13) интерполирующей функции) и что отрезок $[a, b]$ симметричен относительно начала координат, так что $a = -qi$, $b = qi$, $q > 0$. При этом условии

$$h(\varphi) = q|\sin \varphi|, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Относительно функции (4.1) можно утверждать следующее (теорема 1.4.6): для почти всех φ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} = q|\sin \varphi|; \quad (4.6)$$

все нули функции $L(\mu)$, за исключением, быть может, множества нулевой плотности, лежат внутри сколь угодно малых углов $|\arg \mu| < \varepsilon$ и $|\arg \mu - \pi| < \varepsilon$, причем плотность

$$\Delta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_i(i)}{i} \quad (i = 1, 2)$$

множества нулей внутри каждого из углов равна q/π ; имеются числа $p > 0$ и числа r_k , $0 < r_k \uparrow \infty$, $\frac{r_{k+1}}{r_k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [q|\sin \varphi| - \varepsilon]r, \quad r_k - p \leq r \leq r_k + p, \quad k > K(\varepsilon). \quad (4.7)$$

2. Исследование частных рядов. Перейдем непосредственно к решению задачи о восстановлении $F(z)$ по ряду (2.2). Будем опираться на формулу

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} F(t) \gamma(t, z, \Gamma) dt, \quad (4.8)$$

где Γ — конечный замкнутый контур, на котором $L(\mu) \neq 0$, $\gamma(t, z, \Gamma)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)},$$

как функцией λ . В этой формуле λ лежит вне Γ .

Для λ , лежащих внутри Γ ,

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} + e^{\lambda z}.$$

Заметим, что функция $\gamma(t, z, \Gamma)$ в (4.8) непрерывна на $\partial \bar{D}$, а $\partial \bar{D}$ — дважды проходимый в разных направлениях отрезок $[a, b]$.

Условимся под $\gamma^+(t, z, \Gamma)$ понимать предельные значения $\gamma(t, z, \Gamma)$ на $[a, b]$ при подходе к отрезку $[a, b]$ справа, под $\gamma^-(t, z, \Gamma)$ — предельные значения той же функции на том же отрезке при подходе к отрезку слева.

Обратим внимание на следующее: для доказательства непрерывности $\gamma^+(t, z, \Gamma)$ на $[a, b]$ (в случае конечного или бесконечного контура Γ) достаточно установить выполнение условия

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| < A \frac{e^{q|\sin \varphi|}}{r^2}, \quad \lambda = re^{i\varphi},$$

для положительных λ , а для доказательства непрерывности $\gamma^-(t, z, \Gamma)$ там же достаточно установить выполнение последнего условия для отрицательных λ .

Возьмем достаточно малое неотрицательное число β и обозначим Γ_0^- контур, составленный из лучей $\arg \mu = \pm(\frac{\pi}{2} + \beta)$ и обходимый снизу вверх. Число β при этом выберем так, чтобы на указанных лучах не было нулей $L(\mu)$ и чтобы вдоль этих лучей существовал предел (4.6).

Рассмотрим функцию экспоненциального типа

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^-} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)}. \quad (4.9)$$

В этом представлении λ лежит справа от контура Γ_0^- (для λ , лежащих слева от Γ_0^- , функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ изображается этим же интегралом плюс слагаемое $e^{\lambda z}$). Из условия (4.6) вытекает, что интеграл (4.9) сходится, когда z лежит в угле D_β раствора 2β с вершиной в точке $-q \operatorname{ctg} \beta$ вещественной оси и сторонами, проходящими через точки $\pm qi$ (при $\beta = 0$ угол D_β вырождается в полосу).

Функция (4.9), как функция λ , при больших положительных λ ведет себя, как $O(\frac{1}{\lambda^2})$, предполагая, что $z \in D_\beta$. При отрицательных λ к интегралу добавляется $e^{\lambda z}$, в силу чего функция (4.9) при больших по модулю отрицательных λ ведет себя, как $O(\frac{1}{\lambda^2})$, если $z \in D_\beta$ и $\operatorname{Re} z = x > 0$. Таким образом, функция (4.9) на всей вещественной оси ведет себя, как $O(\frac{1}{\lambda^2})$, при больших $|\lambda|$, если $z \in D_\beta$ и $x > 0$. Отсюда заключаем, что функция $\gamma(t, z, \Gamma_0^-)$ имеет непрерывные на $[a, b]$ предельные значения $\gamma^+(t, z, \Gamma_0^-)$ и $\gamma^-(t, z, \Gamma_0^-)$, если $z \in D_\beta$ и $x > 0$.

Обозначим Γ_k^- (проходимый в положительном направлении) конечный замкнутый контур, который состоит из части Γ_0^- , заключенной внутри окружности $|\mu| = r_k$ (окружности $|\mu| = r_k$ фигурируют в неравенстве (4.7)) и дуги $|\mu| = r_k, \frac{\pi}{2} + \beta \leq$

$\leq \arg \mu \leq \frac{3\pi}{2} - \beta$. Изучим разность

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) - \Phi(\lambda, z, \Gamma_k^-) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^- \setminus \Gamma_k^-} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu)L(\mu)}. \quad (4.10)$$

Контур в интеграле состоит из частей Γ_0^- , лежащих вне окружности $|\mu| = r_k$, и дуги C_k^- этой окружности: $|\mu| = r_k, \frac{\pi}{2} + \beta \leq \arg \mu \leq \frac{3\pi}{2} - \beta$. В представлении (4.10) переменное λ лежит вне контура интегрирования. Для λ , лежащих внутри контура, к интегралу добавится слагаемое $e^{\lambda z}$. Дуга C_k^- пересекает вещественную ось в точке $-r_k$. Когда λ лежит на вещественной оси вне интервала $(-r_k - p, -r_k + p)$, имеем $|\lambda - \mu| \geq p$, где μ — точка контура $\Gamma_0^- \setminus \Gamma_k^-$. В том случае, когда λ лежит в интервале $(-r_k - p, -r_k + p)$, заменим дугу C_k^- дугой C_k^+ окружности $|\mu| = r$, заключенной, как и дуга C_k^- , между лучами $\arg \mu = \pm(\frac{\pi}{2} + \beta)$. Число r выберем при этом так, чтобы было $-r_k - p \leq -r \leq -r_k + p$ и $|\lambda + r| \geq p$. При замене C_k^- на C_k^+ интеграл (4.10) не изменит своего значения, однако будет $|\lambda - \mu| \geq p$. Кроме того, на C_k^+ , как и на C_k^- , будет выполняться условие (4.7). Таким образом, при оценке интеграла (4.10) всегда можно считать $|\lambda - \mu| \geq p$. Имея это в виду, запишем, на основании (4.7),

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{(\lambda - \mu)L(\mu)} \right| \leq \frac{1}{p} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < \frac{1}{p} \exp[x \cos \varphi + |y| |\sin \varphi| - q |\sin \varphi| + \varepsilon] |\mu|, \quad |\mu| > \rho_0(\varepsilon), \quad (4.11)$$

где $\varphi = \arg \mu$, причем $\frac{\pi}{2} + \beta \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \beta$.

Обозначим E^- полуполосу

$$E^-: \delta_1 \leq x, \quad |y| < q - \delta, \quad 0 < \delta_1 < \delta. \quad (4.12)$$

В этой полуполосе

$$x \cos \varphi + |y| |\sin \varphi| - q |\sin \varphi| \leq x \cos \varphi - \delta |\sin \varphi|.$$

Но

$$x \cos \varphi - \delta |\sin \varphi| < \begin{cases} -\delta \left| \sin \frac{3\pi}{4} \right|, & \frac{\pi}{2} + \beta \leq |\varphi| \leq \frac{3\pi}{4}, \\ -\delta_1 \cos \frac{3\pi}{4}, & \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \beta. \end{cases}$$

Поэтому, на основании (4.11), при $z \in E^-$

$$\left| \frac{e^{\lambda z}}{(\lambda - \mu) L(\mu)} \right| < \frac{1}{\rho} e^{(-\delta, \frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon)|\mu|}, \quad \mu \in \Gamma_0^- \setminus \Gamma_k^-, \quad k > K(\varepsilon),$$

в силу чего при малом ε

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^- \setminus \Gamma_k^-} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} \right| < e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k}, \quad k > K_0, \quad z \in E^-.$$

Отсюда получаем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) - \Phi(\lambda, z, \Gamma_k^-)| < \begin{cases} e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k} |L(\lambda)|, & \lambda \geq -r_k, \\ e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k} |L(\lambda)| + e^{-\delta_1 |\lambda|}, & \lambda < -r_k. \end{cases}$$

Заметим, что

$$e^{-\delta_1 |\lambda|} \leq e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k} e^{-\frac{\delta_1}{2} |\lambda|}.$$

На основании изложенного заключаем, что

$$|\gamma(t, z, \Gamma_0^-) - \gamma(t, z, \Gamma_k^-)| < A e^{-\frac{\delta}{2} r_k}, \quad k > K_0, \quad z \in E^-, \quad t \in \partial \bar{D}.$$

Следовательно, для $t \in \partial \bar{D}$ и $z \in E^-$ равномерно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t, z, \Gamma_k^-) = \gamma(t, z, \Gamma_0^-). \quad (4.13)$$

Согласно формуле (4.8),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_k^-) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^-} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = \sum_{\lambda_\nu \in D_k^-} P_\nu(z) e^{\lambda_\nu z},$$

где D_k^- — область, ограниченная контуром Γ_k^- . Предел левой части существует, в силу (4.13), в области E^- , причем сходимость — равномерная. Поэтому существует предел правой части. Обозначим

$$F^-(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu \in D_k^-} P_\nu(z) e^{\lambda_\nu z}, \quad z \in E^-. \quad (4.14)$$

Имеем

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^-) dt, \quad z \in D_\beta, \quad x > 0. \quad (4.15)$$

Отметим, что представление (4.14) имеет место всюду в полуполосе

$$0 < x, \quad |y| < q,$$

равномерная сходимость имеет место в меньшей полуполосе (4.12), функция $F^-(z)$ регулярна в угле D_β при $x > 0$.

Обозначим теперь Γ_0^+ контур, который отличается от Γ_0^- только направлением обхода (Γ_0^+ обходится сверху вниз). Положим

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad (4.16)$$

причем в этом представлении λ лежит слева от Γ_0^+ . Для λ , лежащих справа, к интегралу добавится слагаемое $e^{\lambda z}$.

Интеграл (4.16) сходится, когда λ лежит в указанном выше угле D_β . Функция (4.16), как функция λ , при больших по модулю отрицательных λ ведет себя как, $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, в предположении, что $z \in D_\beta$. При положительных λ к интегралу добавится $e^{\lambda z}$, в силу чего функция (4.16) при больших положительных λ ведет себя, как $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, если $z \in D_\beta$ и $\operatorname{Re} z = x < 0$. Таким образом, функция (4.16) на всей вещественной оси ведет себя, как $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, при больших $|\lambda|$, если $z \in D_\beta$ и $x < 0$. Отсюда выводим, что функция $\gamma(t, z, \Gamma_0^+)$ непрерывна на $\partial \bar{D}$ если $z \in D_\beta$ и $x < 0$.

Обозначим Γ_k^+ конечный замкнутый контур, который состоит из части Γ_0^+ , расположенной внутри окружности $|\mu| = r_k$ и дуги C_k^+ : $|\mu| = r_k$, $|\arg \mu| \leq \frac{\pi}{2} + \beta$. Рассмотрим разность

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) - \Phi(\lambda, z, \Gamma_k^+) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+ \setminus \Gamma_k^+} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}.$$

В этом представлении λ лежит вне контура интегрирования слева. Для λ , лежащих внутри контура, к интегралу добавится $e^{\lambda z}$. Подынтегральная функция имеет оценку (4.11), в которой $\varphi = \arg z$ и $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} + \beta$. Обозначим E^+ прямоугольник

$$E^+: -\frac{\delta}{4 \sin \beta} < x < -\delta_1, \quad |y| < q - \delta, \quad 0 < \delta_1 < \frac{\delta}{2}. \quad (4.17)$$

В этом прямоугольнике

$$x \cos \varphi + y |\sin \varphi| - q |\sin \varphi| \leq x \cos \varphi - \delta |\sin \varphi|.$$

Оценим правую часть. Имеем

$$x \cos \varphi - \delta |\sin \varphi| \leq \begin{cases} \frac{\delta}{4 \sin \beta} \sin \beta - \delta \sin \frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{4} \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} + \beta, \\ -\delta_1 \cos \frac{\pi}{4}, & |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Справа в обоих случаях стоит величина, не превосходящая $-\delta_1 \sqrt{2}/2$. Поэтому, на основании (4.11), при $z \in E^+$

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{(\mu - \lambda) L(\mu)} \right| < \frac{1}{\rho} e^{\left(-\frac{\delta_1 \sqrt{2}}{2} + \varepsilon \right) |\mu|}, \\ \mu \in \Gamma_0^+ \setminus \Gamma_k^+, \quad k > K(\varepsilon),$$

в силу чего при малом ε

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^+ \setminus \Gamma_k^+} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} \right| < e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k}, \quad k > K_0, \quad z \in E^+.$$

Отсюда получаем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) - \Phi(\lambda, z, \Gamma_k^+)| < \begin{cases} e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k} |L(\lambda)|, & \lambda \leq r_k, \\ e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k} |L(\lambda)| + e^{-\delta_1 \lambda}, & \lambda > r_k. \end{cases}$$

Слагаемое $e^{-\delta_1 \lambda}$ при $\lambda > r_k$ меньше

$$e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k} e^{-\frac{\delta_1}{2} \lambda}.$$

Значит,

$$|\gamma(t, z, \Gamma_0^+) - \gamma(t, z, \Gamma_k^+)| < A e^{-\frac{\delta_1}{2} r_k}, \\ k > K_0, \quad z \in E^+, \quad t \in \partial \bar{D},$$

и потому для $t \in \partial \bar{D}$ и $z \in E^+$ равномерно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t, z, \Gamma_k^+) = \gamma(t, z, \Gamma_0^+).$$

Согласно формуле (4.8),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_k^+) dt = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^+} \frac{\omega_k(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = \sum_{\lambda_\nu \in D_k^+} P_\nu(z) e^{\lambda_\nu z},$$

где D_k^+ — область, ограниченная контуром Γ_k^+ . Заключаем, что в области E^+ имеет место равномерная сходимость правой части

$$F^+(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_\nu \in D_k^+} P_\nu(z) e^{\lambda_\nu z}, \quad z \in E^+, \quad (4.18)$$

причем

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{D}} F(t) \gamma(t, z, \Gamma_0^+) dt, \quad z \in D_\beta, \quad x < 0. \quad (4.19)$$

Последовательность (4.18) сходится в любой области

$$-\frac{\delta}{4 \sin \beta} < x < 0, \quad |y| < q - \delta, \quad (4.20)$$

равномерно сходится в области E^+ , функция $F^+(z)$ регулярна, когда $z \in D_\beta$ и $x < 0$.

3. Связь функции с частными рядами. Нам осталось связать функции $F^-(z)$ и $F^+(z)$ с функцией $F(z)$. С этой целью введем функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b F(t) \gamma^+(t, z, \Gamma_0^-) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_a^b F(t) \gamma^-(t, z, \Gamma_0^+) dt. \quad (4.21)$$

Для получения $\gamma^+(t, z, \Gamma_0^-)$ достаточно знать функцию $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ для положительных λ . Но для положительных λ эта функция определяется интегралом (4.9) (без слагаемого $e^{\lambda z}$). Для всех z из угла D_β функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ ведет себя при больших положительных λ , как $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. Следовательно, функция $\gamma^+(t, z, \Gamma_0^-)$ непрерывна при $t \in [a, b]$ и аналитична по z в угле D_β . Первое слагаемое в (4.21) есть аналитическая функция в угле D_β .

Для получения $\gamma^-(t, z, \Gamma_0^+)$ достаточно знать функцию $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+)$ для отрицательных λ . В этом случае эта функция

определяется интегралом (4.16) (опять-таки без слагаемого $e^{\lambda z}$). Для z из угла D_β при больших по модулю отрицательных λ имеем $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. В силу этого, функция $\gamma^-(t, z, \Gamma_0^+)$ непрерывна при $t \in [a, b]$ и аналитична по z в угле D_β . Второе слагаемое в (4.21) — аналитическая функция в угле D_β .

Таким образом, $\Phi(z)$ является аналитической функцией в угле D_β .

Обратим теперь внимание на следующее. Уже отмечалось, что когда $z \in D_\beta$ и $x > 0$, то $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ при отрицательных λ есть $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ и равна

$$L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0^-} \frac{e^{\lambda z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} - e^{\lambda z}.$$

В то же время функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+)$ при отрицательных λ есть $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ для любых $z \in D_\beta$ и определяется интегралом (4.16). Значит, при отрицательных λ и $z \in D_\beta$, $x > 0$ сумма этих функций есть $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ и

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) + \Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) = -e^{\lambda z},$$

$$\lambda < 0, \quad z \in D_\beta, \quad x > 0.$$

Отсюда

$$\gamma^-(t, z, \Gamma_0^-) + \gamma^-(t, z, \Gamma_0^+) = \frac{1}{t-z},$$

$$t \in [a, b], \quad z \in D_\beta, \quad x > 0. \quad (4.22)$$

Слагаемые в левой части непрерывны при $t \in [a, b]$ и аналитичны по z , когда $z \in D_\beta$ и $x > 0$.

Функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-)$ при положительных λ есть $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ при всех $z \in D_\beta$. Функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+)$ при положительных λ есть $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, когда $z \in D_\beta$ и $x < 0$. Следовательно, сумма этих функций при положительных λ есть $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ и

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_0^-) + \Phi(\lambda, z, \Gamma_0^+) = e^{\lambda z},$$

$$\lambda > 0, \quad z \in D_\beta, \quad x < 0.$$

На основании этого выводим

$$\gamma^-(t, z, \Gamma_0^-) + \gamma^+(t, z, \Gamma_0^+) = \frac{1}{t-z},$$

$$t \in [a, b], \quad z \in D_\beta, \quad x < 0. \quad (4.23)$$

Слагаемые в левой части непрерывны по t на $[a, b]$ и аналитичны по z , когда $z \in D_\beta$ и $x < 0$.

С помощью соотношений (4.22) и (4.23) преобразуем формулы (4.15) и (4.19).

Сначала преобразуем формулу (4.15). Имеем

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b F(t) \gamma^+(t, z, \Gamma_0^-) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b F(t) \gamma^-(t, z, \Gamma_0^-) dt,$$

$$z \in D_\beta, \quad x > 0.$$

Согласно (4.22),

$$\gamma^-(t, z, \Gamma_0^-) = -\gamma^-(t, z, \Gamma_0^+) + \frac{1}{t-z},$$

$$t \in [a, b], \quad z \in D_\beta, \quad x > 0,$$

в силу чего

$$F^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{F(t) dt}{t-z} + \varphi(z), \quad z \in D_\beta, \quad x > 0. \quad (4.24)$$

Теперь преобразуем вторую формулу. Имеем

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b F(t) \gamma^+(t, z, \Gamma_0^+) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b F(t) \gamma^-(t, z, \Gamma_0^+) dt,$$

$$z \in D_\beta, \quad x < 0.$$

В силу (4.23),

$$\gamma^+(t, z, \Gamma_0^+) = -\gamma^+(t, z, \Gamma_0^-) + \frac{1}{t-z},$$

$$z \in D_\beta, \quad x < 0.$$

Поэтому

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{F(t) dt}{t-z} - \varphi(z), \quad z \in D_\beta, \quad x < 0. \quad (4.25)$$

Формулы (4.24) и (4.25) — основные.

Положим $z = x + iy$, $\bar{z} = -x + iy$, $x > 0$ и допустим, что $\bar{z} \in D_\beta$. Тогда z также принадлежит D_β . Записав формулу (4.24)

в точке z , а формулу (4.25) — в точке $\bar{z}$ и сложив их, получим

$$F^-(z) + F^+(\bar{z}) = \frac{x}{\pi} \int_{\xi=-q}^{\xi=q} \frac{F(i\xi) d\xi}{x^2 + (\xi - y)^2} + \varphi(z) - \varphi(\bar{z}). \quad (4.26)$$

Известно, что если функция $F(i\xi)$ непрерывна на $[-q, q]$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\pi} \int_{-q}^q \frac{F(i\xi) d\xi}{x^2 + (\xi - y)^2} = F(iy),$$

$$-q < y < q,$$

причем стремление к пределу равномерно, когда $y \in \bar{M}$, где $\bar{M}$ — замкнутое множество из $(-q, q)$. Кроме того, так же равномерно

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\varphi(z) - \varphi(\bar{z})] = 0, \quad y \in \bar{M}.$$

На основании (4.26) получаем, что при $x \rightarrow 0$ равномерно для всех $y \in \bar{M} \subset (-q, q)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [F^-(z) + F^+(\bar{z})] = F(iy).$$

В итоге получили следующую теорему Л. Шварца.

Теорема 6.4.1. Пусть функция $L(\lambda)$ имеет вид

$$L(\lambda) = \int_{-q}^{q} e^{\lambda t} d\sigma(t),$$

$r_k \uparrow \infty$ и p — числа такие, что

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [q|\sin \varphi| - \varepsilon]r, \quad r_k - p \leq r \leq r_k + p, \quad k > K(\varepsilon)$$

Функции $F(z)$, непрерывной на $[-q, q]$, сопоставим ряд

$$F(z) \sim \sum P_v(z) e^{\lambda_v z}, \quad (4.27)$$

где

$$P_v(z) e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad (4.28)$$

а

$$\omega_L(\mu, F) = \int_{-q}^{q} d\sigma(t) \left(\int_0^t F(t-\eta) e^{\mu \eta} d\eta \right).$$

C_v — окружность с центром в нуле λ_v функции $L(\lambda)$ (в C_v нет других нулей $L(\lambda)$, отличных от λ_v). Пусть $\beta \geq 0$ — малое число такое, что на лучах $\arg \mu = \pm(\frac{\pi}{2} + \beta)$ функция $L(\lambda)$ не обращается в нуль (за исключением, быть может, точки $\lambda=0$, где она может быть равна нулю) и существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r} = q|\sin \varphi|, \quad \varphi = \pm(\frac{\pi}{2} + \beta).$$

Указанные лучи (в окрестности начала их соединим дугой, на которой $L(\mu) \neq 0$) разобьют круг $|z| \leq r_k$ на две области: левую D_k^- и правую D_k^+ . При указанных условиях, каково бы ни было $\delta > 0$, в области $x > 0$, $|y| < q - \delta$ существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_v \in D_k^-} P_v(z) e^{\lambda_v z} = F^-(z)$$

(стремление к пределу в области $x \geq \delta_1$, $|y| < q - \delta$, $0 < \delta_1 < \delta$, равномерное), в области

$$-\frac{\delta}{4 \sin \beta} < x < 0, \quad |y| < q - \delta$$

существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_v \in D_k^+} P_v(z) e^{\lambda_v z} = F^+(z)$$

(стремление к пределу в области $-\frac{\delta}{4 \sin \beta} < x < -\delta_1$, $|y| < q - \delta$, $0 < \delta_1 < \delta/2$, равномерное). Наконец, при $x \rightarrow 0$ для всех y , $|y| \leq q - \delta$, равномерно

$$\lim_{x \rightarrow 0} [F^-(x + iy) + F^+(-x + iy)] = F(iy).$$

В этом состоит метод Абеля суммирования ряда (4.27).

§ 5. Решение уравнения свертки

Рассмотрим уравнение свертки

$$\int_{-q}^{q} F(t+z) d\sigma(t) = 0, \quad (5.1)$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на $[-qi, qi]$, а $F(z)$ — непрерывная функция. Предположим, что $F(z)$ непрерывна на интервале мнимой оси $(c, d) \supset [-qi, qi]$ и удовлетворяет уравнению (5.1) на меньшем интервале $(c + qi, d - qi)$. Покажем, что в этом случае ряд (4.27) суммируется методом Абеля к $F(z)$ на всем интервале (c, d) .

1. Суммируемость ряда к решению. Положим

$$\omega_L(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu} \int_{-qi}^{qi} d\sigma(t) \left\{ \int_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu\eta} d\eta \right\},$$

$$\alpha \in (c + qi, d - qi).$$

Лемма 6.5.1. Вычеты функции

$$\frac{\omega_L(\mu, \alpha, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} \quad (5.2)$$

не зависят от α .

Имеем

$$\omega = \omega(\mu, \alpha, F) = \int_{-qi}^{qi} \left[\int_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu(\eta - \alpha)} d\eta \right] d\sigma(t) =$$

$$= \int_{-qi}^{qi} \left[\int_{-\alpha}^{t-\alpha} F(t - \xi) e^{\mu\xi} d\xi \right] d\sigma(t),$$

на основании чего

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \int_{-qi}^{qi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int_{-\alpha}^{t-\alpha} F(t - \xi) e^{\mu\xi} d\xi \right] d\sigma(t).$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\int_{-\alpha}^{t-\alpha} F(t - \xi) e^{\mu\xi} d\xi \right] = -F(\alpha) e^{\mu(t-\alpha)} + F(t + \alpha) e^{-\mu\alpha},$$

поэтому

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = -F(\alpha) e^{-\alpha\mu} \int_{-qi}^{qi} e^{\mu t} d\sigma(t) + e^{-\alpha\mu} \int_{-qi}^{qi} F(t + \alpha) d\sigma(t),$$

или, учитывая (5.1),

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = -F(\alpha) e^{-\alpha\mu} L(\mu).$$

Так как функция

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} e^{\mu z} / L(\mu) = -F(\alpha) e^{-\alpha\mu} e^{\mu z},$$

как функция μ , — целая, то вычеты функции (5.2) действительно от α не зависят.

Возьмем функцию $f(z) = F(z + \alpha)$. По теореме 6.4.1 к ней методом Абеля суммируется ряд

$$\sum \bar{P}_v(z) e^{\lambda_v z},$$

где

$$\bar{P}_v(z) e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, f) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu(z+\alpha)} d\mu}{L(\mu)}.$$

По лемме 6.5.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = P_v(z) e^{\lambda_v z}.$$

Следовательно,

$$\bar{P}_v(z) e^{\lambda_v z} = P_v(z + \alpha) e^{\lambda_v(z+\alpha)}.$$

Таким образом, ряд

$$\sum P_v(z + \alpha) e^{\lambda_v(z+\alpha)}$$

суммируется методом Абеля к $F(z + \alpha)$ на интервале $(-qi, qi)$. Это значит, что ряд

$$\sum P_v(z) e^{\lambda_v z}$$

суммируется методом Абеля к $F(z)$ на интервале $(-qi + \alpha, qi + \alpha)$. Учитывая, что α — любое из $(c + qi, d - qi)$, приходим к выводу:

Теорема 6.5.1. Если $F(z)$ — непрерывная функция на $(c, d) \supset [-qi, qi]$, удовлетворяющая уравнению (5.1) в интервале $(c + qi, d - qi)$, то ряд

$$\sum P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

соответствующий функции $F(z)$, суммируется методом Абеля к $F(z)$ на всем интервале (c, d) .

2.2. Теорема аппроксимации.

Теорема 6.5.2. Пусть система $\{e^{\mu_k z}\}$ не полна на отрезке $[ai, bi]$ мнимой оси длиной q . Если $F(z)$ аппроксимируется с любой точностью линейными комбинациями экспонент из $\{e^{\mu_k z}\}$ внутри интервала (ai, bi) мнимой оси длины, большей q , и принадлежит некоторому квазианалитическому классу $S_{(m_k)}$ на $[ci, di]$, $c < b < d$, причем $b - c > q$, то $F(z)$ аппроксимируется линейными комбинациями указанных экспонент с любой точностью внутри (ai, di) .

Без ограничения общности можно считать, что $a=0$. Поскольку $\{e^{\mu_k z}\}$ не полна на $[0, qi]$ (она не полна на любом отрезке мнимой оси длины q), имеется функция ограниченной вариации $\sigma(t)$ такая, что

$$\int_0^{qi} e^{\mu_k t} d\sigma(t) = 0 \quad (k \geq 1),$$

причем

$$L(\mu) = \int_0^{qi} e^{\mu t} d\sigma(t) \neq 0.$$

Имеем

$$\int_0^{qi} F(z+t) d\sigma(t) = 0, \quad z \in (0, (b-q)i). \quad (5.3)$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \int_0^{qi} F(z+t) d\sigma(t), \quad z \in (0, (d-q)i).$$

Пусть $z \in [ci, (d-q)i]$. Для таких z и $t \in [0, qi]$ точка $(z+t)$ принадлежит $[ci, di]$, поэтому

$$f^{(n)}(z) = \int_0^{qi} F^{(n)}(z+t) d\sigma(t),$$

откуда

$$|f^{(n)}(z)| \leq AK^n m_n \quad (n \geq 0), \quad z \in [ci, (d-q)i].$$

Следовательно, $f(z)$ на $[ci, (d-q)i]$ принадлежит квазианалитическому классу. Возьмем точку z_0 между ci и $(b-q)i$. В силу (5.3),

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad (n \geq 0),$$

поэтому $f(z) = 0$ на $[ci, (d-q)i]$. Значит, $f(z) = 0$ на $(0, (d-q)i)$. Итак, функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{qi} F(z+t) d\sigma(t) = 0, \quad z \in (0, (d-q)i).$$

По теореме 6.5.1 к $F(z)$ на $(0, di)$ суммируется ряд

$$\sum P_v(z) e^{\lambda_v z}, \quad (5.4)$$

где

$$P_v(z) e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)}$$

и

$$\omega_L(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu} \int_0^{qi} d\sigma(t) \left(\int_0^t F(t+\alpha-\eta) e^{\mu\eta} d\eta \right). \quad (5.5)$$

Пусть $\alpha = i|\alpha|$ и $|\alpha|$ столь мал, что $[ai, (\alpha+q)i] \subset (0, bi)$. Заметим, что во внутреннем интеграле в (5.5) переменное $(t+\alpha-\eta)$ принадлежит $[ai, (\alpha+q)i]$. Но на этом отрезке по условию теоремы равномерно

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(z), \quad P_m(z) = \sum_{j=1}^m \alpha_{m,j} e^{\mu_j z}, \quad \{\mu_j\} \subset \{\lambda_v\}.$$

Учтем еще, что,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, e^{\mu_j z}) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \begin{cases} e^{\mu_j z}, & \mu_j = \lambda_v, \\ 0, & \mu_j \neq \lambda_v. \end{cases}$$

В силу этого,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, F) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, \alpha, P_m) e^{\mu z} d\mu}{L(\mu)} = \\ &= \begin{cases} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{m,j} e^{\mu_j z}, & \mu_j = \lambda_v, \\ 0, & \mu_j \neq \lambda_v. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (5.4) есть ряд

$$\sum \alpha_j e^{\mu_j z}, \quad \alpha_j = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{m,j}.$$

Этот ряд суммируется к $F(z)$ методом Абеля на $(0, di)$. Значит, имеется последовательность линейных комбинаций из экспонент системы $\{e^{\mu_k z}\}$, которая равномерно сходится к $F(z)$ внутри $(0, di)$.

Как следствие отметим следующий результат.

Теорема 6.5.3. Пусть система $\{e^{\mu_k z}\}$ не полна ни на каком отрезке вещественной оси. Если $f(x)$ аппроксимируется с любой точностью линейными комбинациями экспонент из $\{e^{\mu_k x}\}$ внутри интервала (a, b) и принадлежит некоторому квазианалитическому классу $S_{\{m_n\}}$ на интервале (c, d) , причем $c < b < d$, то $f(x)$ аппроксимируется с любой точностью линейными комбинациями экспонент из $\{e^{\mu_k z}\}$ внутри интервала (a, d) .

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

Здесь речь пойдет о представлении целых функций $F(z)$ во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z}, \quad \lambda_v \rightarrow \infty,$$

или несколько более общими рядами

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z}, \quad \lambda_v \rightarrow \infty,$$

где $P_v(z)$ — многочлены степеней соответственно меньших m_v ($v \geq 1$). Будут изложены результаты (в несколько более общей форме) из работ [15], [18], [21], [23], [24], [32].

§ 1. Конструкция ряда. Интерполирующая функция

1. Конструкция ряда. Пусть $L(\lambda) = \sum_0^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция, для которой λ_v ($v = 1, 2, \dots$) — нули кратности m_v . Допустим, что $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа. Обозначим тогда $\gamma(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $L(\lambda)$, и возьмем замкнутый контур C , охватывающий все особенности $\gamma(t)$. Если целая функция $F(z)$ допускает во всей плоскости разложение

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z},$$

то

$$M_L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(t) F(t+z) dt = 0,$$

ибо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C t^s e^{\lambda_v t} \gamma(t) dt = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, m_v - 1; \quad v = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, если надо решить задачу о представлении указанных рядами во всей плоскости целых функций, которые не обязательно удовлетворяют уравнению $M_L(F)=0$, то необходимо считать, что $L(\lambda)$ — целая функция по крайней мере первого порядка максимального типа.

Будем предполагать, что $L(\lambda)$ — целая функция уточненного порядка $\rho(r) > 1$, ибо неудобно оперировать с функциями максимального типа. При этом (в соответствии со сказанным) надо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$r^{\rho(r)-1} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty.$$

Пусть $r = \varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho(r)}$. Последнее условие означает, что

$$\frac{t}{\varphi(t)} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Возникает вопрос: по каким формулам определять коэффициенты разложения? Раньше, когда $L(\lambda)$ была функцией экспоненциального типа, коэффициенты определялись посредством биортогональной системы. В настоящем случае биортогональной системы не существует (это было показано в самом начале гл. IV). Но члены ряда Дирихле определялись и другим по форме способом. Именно было показано, что

$$P_v(z) e^{\lambda_v z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu \quad (v=1, 2, \dots), \quad (1.2)$$

где C_v — замкнутый контур, содержащий λ_v и не содержащий других нулей $L(\mu)$. В том случае, когда $F(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, включающем $\bar{D}$ (наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все особенности функции $\gamma(t)$, ассоциированной по Борелю с $L(\lambda)$), имеем (см. свойство 11) интерполирующей функции)

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{h=1}^{\infty} c_h [F^{(h-1)}(0) + \mu F^{(h-2)}(0) + \dots + \mu^{h-1} F(0)]. \quad (1.3)$$

Формулы (1.2) и (1.3) имеют смысл не только, когда $L(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа. Если целая функция $F(z)$ такова, что

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h| [|F^{(h-1)}(0)| + |\mu| |F^{(h-2)}(0)| + \dots + |\mu|^{h-1} |F(0)|] < \infty, \quad |\mu| < \infty, \quad (1.4)$$

то $\omega_L(\mu, F)$ — целая функция и можно функции $F(z)$ сопоставить ряд с членами, определенными по формулам (1.2).

Итак, пусть $L(\lambda) = \sum_0^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция порядка $\rho(r)$, удовлетворяющего условию (1.1). Пусть затем $A(L)$ — класс целых функций $F(z)$, для которых выполняется соотношение (1.4). Для $F(z) \in A(L)$ определяем функцию (1.3). Это — целая функция. Ее по-прежнему называем интерполирующей функцией. Функции $F(z) \in A(L)$ сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_{v=1}^{\infty} P_v(z) e^{\lambda_v z}, \quad (1.5)$$

члены которого определены по формулам (1.2). Наша задача — исследовать ряд (1.5).

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция типа σ при уточненном порядке $\rho(r)$, удовлетворяющем условию (1.1).

Обозначим $B(L)$ класс целых функций $F(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$, коэффициенты которых таковы, что

$$B(L): \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\varphi(k)} \sqrt[k]{|a_k|} < e(\sigma e p)^{-1/\rho}. \quad (1.6)$$

Убедимся, что для функции $F(z) \in B(L)$ верно неравенство (1.4), т. е. $B(L) \subset A(L)$. Из (1.6) находим

$$|a_k| < B \left(\frac{q\varphi(k)}{k} \right)^k, \quad k \geq 0, \quad q < e(\sigma e p)^{-1/\rho},$$

в силу чего, учитывая формулу Стирлинга,

$$|F^{(m)}(0)| = |m! a_m| < B_1 (q_1 \varphi(k))^k, \\ \frac{q}{e} < q_1 < (\sigma e p)^{-1/\rho}, \quad m \geq 0.$$

На основании этого выражение в квадратных скобках в (1.4) не превосходит

$$B_1 \{ [q_1 \varphi(k-1)]^{k-1} + r [q_1 \varphi(k-2)]^{k-2} + \dots + r^{k-1} [q_1 \varphi(0)]^0 \}, \quad r = |\mu|.$$

Поскольку $\varphi(t) \uparrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то это выражение меньше

$$B_1 \{ [q_1 \varphi(k)]^{k-1} + r [q_1 \varphi(k)]^{k-2} + \dots + r^{k-1} [q_1 \varphi(k)]^0 \} = \\ = B_1 \frac{[q_1 \varphi(k)]^k - r^k}{q_1 \varphi(k) - r}.$$

При больших k и фиксированном r знаменатель дроби больше единицы. Значит, общий член ряда (1.4) меньше

$$B_1 |c_k| [q_1 \varphi(k)]^k, \quad k > k_0(r).$$

Учтем теперь, что $L(\lambda)$ имеет тип σ при уточненном порядке $\rho(r)$. В силу этого (теорема 1.2.2),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) \sqrt[k]{|c_k|} = (\sigma \rho)^{1/\rho}$$

и при больших k , следовательно,

$$|c_k| < \left(\frac{\rho}{\varphi(k)} \right)^k, \quad \rho = (\sigma \rho)^{1/\rho} + \varepsilon, \quad k > k_1(\varepsilon).$$

Поэтому

$$B_1 |c_k| [q_1 \varphi(k)]^k < B_1 (\rho q_1)^k.$$

При малом ε скобка $(\rho q_1) < 1$; ряд (1.4) сходится.

В силу сказанного, функции $F(z)$ из класса $B(L)$ сопоставляем ряд (1.5) с членами (1.2), где функция $\omega_L(\mu, F)$ определяется формулой (1.4).

Отметим следующие два факта:

1) если $L(\lambda)$ — целая функция обычного порядка $\rho > 1$ конечного типа $\sigma > 0$, то принадлежность $F(z)$ классу $B(L)$ означает, что $F(z)$ принадлежит классу (ρ_1, σ_1) (порядок ее меньше ρ_1 или равен ρ_1 , но тогда тип меньше σ_1), где ρ_1 и σ_1 находятся из равенств

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1, \quad (\sigma_1 \rho_1)^{1/\rho_1} (\sigma \rho)^{1/\rho} = 1;$$

2) если $L(\lambda)$ — целая функция обычного порядка $\rho > 1$ (конечного или бесконечного типа), то классу $B(L)$ принадлежат по крайней мере все целые функции, порядки χ которых удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\chi} > 1.$$

Первый факт вытекает из того, что условие (1.6) при $\rho(r) = \rho > 1$ принимает вид $\varphi(t) = t^{1/\rho}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{|a_k|} < e^{1/\rho} (\sigma \rho)^{-1/\rho},$$

в силу чего, если $F(z)$ имеет порядок ρ_1 и тип $\tilde{\sigma}$,

$$(\tilde{\sigma} \rho_1)^{1/\rho_1} < e^{1/\rho} (\sigma \rho)^{-1/\rho},$$

откуда $\tilde{\sigma} < \sigma_1$.

Для доказательства второго факта возьмем число $\bar{\rho} > \rho$, близкое к ρ . Так как при больших r

$$r^{\bar{\rho}} > r^{\rho(r)} = t,$$

то $\varphi(t) > t^{1/\bar{\rho}}$ при больших t . Учтем еще, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln k}{\ln \left| \frac{1}{a_k} \right|} = \frac{1}{\bar{\rho}}.$$

откуда

$$\sqrt[k]{|a_k|} < (1/k)^{1/(\bar{\rho}-\rho)}, \quad k > k_0(\varepsilon).$$

В силу всего этого,

$$\frac{k}{\varphi(k)} \sqrt[k]{|a_k|} < k^{1-\frac{1}{\bar{\rho}}-\frac{1}{\bar{\rho}-\rho}}.$$

Показатель при малом ε и $\bar{\rho}$, близким к ρ , — отрицательный, значит, левая часть в (1.6) равна нулю. Функция $F(z)$ принадлежит классу $B(L)$.

2. Свойства интерполирующей функции. Отметим свойства интерполирующей функции $\omega_L(\mu, F_1)$.

1) Если $F_1(z) \in A(L)$, $F_2(z) \in A(L)$, то

$$\omega_L(\mu, C_1 F_1 + C_2 F_2) = C_1 \omega_L(\mu, F_1) + C_2 \omega_L(\mu, F_2).$$

2) Пусть $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ — целые функции. Если $F(z) \in A(L_1)$ и $F(z) \in A(L_2)$, то

$$\omega_{C_1 L_1 + C_2 L_2}(\mu, F) = C_1 \omega_{L_1}(\mu, F) + C_2 \omega_{L_2}(\mu, F).$$

Эти свойства очевидны.

3) Пусть $\left\{ F_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(m)} z^k \right\}$ — последовательность целых функций, сходящаяся к целой функции $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, причем

$$|b_k^{(m)}| \leq a_k \quad (k=0, 1, \dots; m=1, 2, \dots) \quad (1.7)$$

и функция $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит классу $A(L)$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_L(\mu, F_m) = \omega_L(\mu, F),$$

причем сходимость является равномерной в любой ограниченной области. При условии $\Phi(z) \in B(L)$ имеем еще

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_L(F_m)_0 = M_L(F)_0,$$

где

$$M_L(f)_0 = \sum_0^m c_n f^{(n)}(0).$$

В силу условия (1.7) и известной теоремы Витали, последовательность $\{F_m(z)\}$, будучи ограниченной в любой ограниченной области и сходящейся, равномерно сходится к $F(z)$ в каждой ограниченной области. Отсюда вытекает, что при любом фиксированном k

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_k^{(m)} = b_k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) - \omega_L(\mu, F_m) &= \sum_{k=1}^N c_k \{(k-1)! [b_{k-1} - b_{k-1}^{(m)}] + \\ &+ \mu(k-2)! [b_{k-2} - b_{k-2}^{(m)}] + \dots + \mu^{k-1} [b_0 - b_0^{(m)}]\} + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \{(k-1)! [b_{k-1} - b_{k-1}^{(m)}] + \mu(k-2)! [b_{k-2} - b_{k-2}^{(m)}] + \dots \\ &\dots + \mu^{k-1} [b_0 - b_0^{(m)}]\} = J' + J''. \end{aligned}$$

В силу (1.7),

$$|J''| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| \{(k-1)! a_{k-1} + |\mu|(k-2)! a_{k-2} + \dots + |\mu|^{k-1} a_0\}$$

(ряд сходится, ибо $\Phi(z) \in A(L)$). По $\varepsilon > 0$ выберем фиксированное N так, чтобы правая часть была меньше ε для $|\mu| \leq R < \infty$. После этого обратимся к J' . На основании (1.8) выберем $K(\varepsilon)$ так, чтобы при $|\mu| \leq R$ было $|J'| < \varepsilon$, $m > K(\varepsilon)$. В итоге

$$|\omega_L(\mu, F) - \omega_L(\mu, F_m)| < 2\varepsilon, \quad m > K(\varepsilon), \quad |\mu| \leq R.$$

Вторая часть утверждения устанавливается еще проще.

4) Пусть последовательность целых функций $\{L_m(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(m)} \lambda^k\}$ сходится к целой функции $L(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$, причем при любом $m \geq 1$ и $\varepsilon > 0$

$$|L_m(\lambda)| < e^{(\sigma+\varepsilon)r^0(r)}, \quad |\lambda| = r > r_0(\varepsilon), \quad (1.9)$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от m . Пусть, далее, $F(z)$ — целая функция из класса $B(L)$. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega_{L_m}(\mu, F) = \omega_L(\mu, F),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_{L_m}(F)_0 = M_L(F)_0.$$

Из (1.9) вытекает, что последовательность $\{L_m(\lambda)\}$ в любой ограниченной области ограничена, поэтому она в любой ограниченной области сходится равномерно. В силу этого, при любом фиксированном k имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_k^{(m)} = c_k \quad (k=0, 1, \dots). \quad (1.10)$$

Найдем оценку для коэффициентов $c_k^{(m)}$:

$$|c_k^{(m)}| \leq \frac{\max_{|\lambda|=r} |L_m(\lambda)|}{r^k} < \frac{e^{\sigma r^0(r)}}{r^k}, \quad r > r_0, \quad \sigma < \sigma_1.$$

Отсюда

$$\ln |c_k^{(m)}| < \sigma_1 r^0(r) - k \ln r.$$

Положим здесь $r = \varphi\left(\frac{k}{\rho\sigma_1}\right)$. При $k > k_0$ это r будет больше r_0 . Получим

$$\ln |c_k^{(m)}| < \frac{k}{\rho} - k \ln \varphi\left(\frac{k}{\rho\sigma_1}\right),$$

откуда

$$\ln \left\{ \varphi(k) \sqrt[k]{|c_k^{(m)}|} \right\} < \frac{1}{\rho} + \ln \frac{\varphi(k)}{\varphi(k/\rho\sigma_1)}.$$

В силу свойств уточненного порядка (см. гл. I, § 2),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(k)}{\varphi(k/\rho\sigma_1)} = (\rho\sigma_1)^{1/\rho}.$$

На основании этого

$$\varphi(k) \sqrt[k]{|c_k^{(m)}|} < (\sigma_2 \rho)^{1/\rho}, \quad \sigma < \sigma_2, \quad k > k_1, \quad (1.11)$$

где σ_2 — любое, большее σ , и $k_1 = k_1(\sigma_2)$ не зависит от m . Условию (1.11), согласно (1.10), будут удовлетворять и коэффициенты c_k .

Имеем

$$\begin{aligned}\omega_L(\mu, F) - \omega_{L_m}(\mu, F) &= \\ &= \sum_{k=1}^N (c_k - c_k^{(m)}) [F^{(k-1)}(0) + \mu F^{(k-2)}(0) + \dots + \mu^{k-1} F(0)] + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} (c_k - c_k^{(m)}) [\mu^{k-1} F(0) + \mu F^{(k-2)}(0) + \dots + \mu^{k-1} F(0)].\end{aligned}$$

В силу оценки (1.11) и условия (1.6), по данному $\varepsilon > 0$ подберем фиксированное N так, чтобы вторая сумма была по модулю меньше ε при любом m (эту сумму оцениваем способом, который был использован при доказательстве сходимости ряда (1.4)). После этого выбираем $K(\varepsilon)$ так, чтобы первая сумма была меньше ε при $m > K(\varepsilon)$. Отсюда все и следует.

Вторая часть утверждения почти очевидна.

5) Пусть $L(\beta) = 0$ и $L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$. Для функции $F(z) \in B(L)$ имеет место тождество

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta) \omega_{L_1}(\mu, F) + M_{L_1}(F)_0. \quad (1.12)$$

Заметим сначала, что функция $L_1(\lambda)$, как и функция $L(\lambda)$, имеет тип σ при уточненном порядке $\rho(r)$. Поэтому все члены искомого тождества (1.12) имеют смысл.

Проверим (1.12) для $F(z) = z^m$ ($m \geq 0$).

$$\omega_L(\mu, z^m) = m! \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k \mu^{k-m-1},$$

$$\omega_{L_1}(\mu, z^m) = m! \sum_{k=m+1}^{\infty} \bar{c}_k \mu^{k-m-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k \lambda^k = L_1(\lambda) \right),$$

на основании чего, учитывая равенство $c_k = \bar{c}_{k-1} - \beta \bar{c}_k$, получаем

$$(\mu - \beta) \omega_L(\mu, z^m) = m! \left\{ \sum_{k=m+1}^{\infty} \bar{c}_k \mu^{k-m} - \beta \sum_{k=m+1}^{\infty} \bar{c}_k \mu^{k-m-1} \right\} =$$

$$= -m! \bar{c}_m + m! \sum_{k=m+1}^{\infty} (\bar{c}_{k-1} - \beta \bar{c}_k) \mu^{k-m-1} =$$

$$= -\{M_{L_1}(z^m)\}_{z=0} + \omega_L(\mu, z^m).$$

Итак, тождество (1.12) выполняется для $F(z) = z^m$ ($m \geq 0$).

Следовательно, оно верно и для $F_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$:

$$\omega_L(\mu, F_m) = (\mu - \beta) \omega_{L_1}(\mu, F_m) + M_{L_1}(\mu, F_m)_0.$$

Отсюда, согласно свойству 3), получаем уже (1.12).

6) Пусть $F(z) \in B(L)$, и пусть λ_v ($v = 1, 2, \dots$) — нули функции $L(\lambda)$. Тогда при больших v и любом $k \geq 0$

$$\omega_L(\lambda_v, F) = - \left\{ \sum_{m=0}^k \frac{[M_L(F^{(m)})]_0}{\lambda_v^{m+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda_v^{k+1}}\right) \right\}.$$

Согласно свойству 5), имеем

$$\omega_L(\lambda_v, F) = M_{L_v}(F)_0, \quad L_v(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v}.$$

Но

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} = L(\lambda) \left\{ - \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{\lambda_v^{m+1}} + \frac{1}{\lambda - \lambda_v} \left(\frac{\lambda}{\lambda_v} \right)^{k+1} \right\},$$

в силу чего

$$M_{L_v}(F)_0 = - \sum_{m=0}^k \frac{[M_L(F^{(m)})]_0}{\lambda_v^{m+1}} + \frac{1}{\lambda_v^{k+1}} [M_{L_v}(F^{(k+1)})]_0.$$

Надо оценить последний член. Для этого оценим функцию $L_v(\lambda)$. Имеем

$$|L_v(\lambda)| = \left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| \leq |L(\lambda)|, \quad |\lambda - \lambda_v| \geq 1,$$

$$|L_v(\lambda)| \leq \max_{|t - \lambda_v| = 1} \left| \frac{L(t)}{t - \lambda_v} \right| =$$

$$= \max_{|t - \lambda_v| = 1} |L(t)| \leq \max_{|t| \leq |\lambda| + 2} |L(t)|, \quad |\lambda - \lambda_v| < 1.$$

В обоих случаях

$$|L_v(\lambda)| \leq \max_{|t| \leq |\lambda| + 2} |L(t)| < \exp[(\sigma + \varepsilon) r_1^{(r)}],$$

$$r_1 = r + 2, \quad r = |\lambda|, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Так как, в силу свойства 3) уточненного порядка,

$$\frac{r_1^{(r)}}{r^{\rho(r)}} \rightarrow 1, \quad r \rightarrow \infty,$$

то

$$|L_v(\lambda)| < \exp[(\sigma + 2\varepsilon)r_1^{(\nu)}], \quad r > r_1(\varepsilon),$$

где $r_1(\varepsilon)$ не зависит от v . Если $L_v(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(v)} \lambda^k$, то отсюда выводим, что при всех $v \geq 1$

$$|c_k^{(v)}| \leq d_k \quad (k=0, 1, \dots),$$

причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) \sqrt[k]{d_k} \leq (\sigma \varepsilon \rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Значит,

$$|M_{L_v}(F^{(k+1)})_0| \leq \sum_{s=0}^{\infty} d_s |F^{(s+k+1)}(0)| < \infty.$$

Правая часть неравенства от v не зависит. В итоге получаем

$$\omega_L(\lambda_v, F) = - \sum_{m=0}^k \frac{M_L(F^{(m)})_0}{\lambda_v^{m+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda_v^{k+1}}\right).$$

7) Если функция

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} \quad (1.13)$$

целая, то имеют место тождества

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{\varphi}(\mu, F)}{\varphi(\mu)} = \frac{\omega_{\psi}(\mu, F)}{\psi(\mu)},$$

где

$$\varphi(\mu) = \frac{L(\mu)}{\mu - \lambda_v}, \quad \psi(\mu) = \mu^s L(\mu), \quad s \geq 1$$

(λ_v — нули функции $L(\mu)$). Кроме того, $M_L(F^{(m)})_0 = 0$ ($m \geq 0$).

Из условия вытекает, что

$$\omega_L(\lambda_v, F) = 0 \quad (v \geq 1). \quad (1.14)$$

Вспользуемся свойством 5). Положим в нем $\beta = \lambda_v$, $\mu = \lambda_v$. Тогда получим

$$M_L(F)_0 = 0, \quad L_1(\mu) = \frac{L(\mu)}{\mu - \lambda_v} = \varphi(\mu)$$

и, значит,

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \lambda_v) \omega_{\varphi}(\mu, F).$$

Отсюда сразу получается первое тождество. Чтобы получить второе тождество, воспользуемся свойствами 5) и 6). На основании свойства 6), учитывая равенства (1.14), получаем

$$M_L(F^{(m)})_0 = 0 \quad (m \geq 0). \quad (1.15)$$

На основании свойства 5) имеем

$$\omega_{\varphi}(\mu, F) = \mu \omega_L(\mu, F) + M_L(F)_0, \quad \psi_1(\mu) = \mu L(\mu),$$

откуда, приняв во внимание (1.15) для $m=0$, получим

$$\omega_{\varphi}(\mu, F) = \mu \omega_L(\mu, F).$$

В силу того же свойства 5), имеем тождество

$$\omega_{\psi}(\mu, F) = \mu \omega_{\varphi}(\mu, F) + M_{\psi}(F)_0, \quad \psi_2(\mu) = \mu \psi_1(\mu).$$

Но

$$M_{\psi}(F)_0 = M_L(F)_0 = 0,$$

поэтому

$$\omega_{\psi}(\mu, F) = \mu \omega_{\varphi}(\mu, F) = \mu^2 \omega_L(\mu, F).$$

Следуя тем же путем и далее, получим искомое второе тождество. Равенство (1.15) также установлено.

§ 2. Теорема единственности

Имеет место следующая теорема единственности.

Теорема 7.2.1. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция типа σ при уточненном порядке $\rho(r) > 1$, удовлетворяющем условию (1.1), $F(z)$ — целая функция из класса $B(L)$, определяемого соотношением (1.6). Функция $F(z)$ сопоставляем ряд (1.5) с членами (1.2), где $\omega_L(\mu, F)$ определена формулой (1.3). Если $L(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей и в ряде (1.5) все $P_v(z) = 0$, то $F(z) \equiv 0$.

Для доказательства понадобятся две леммы.

1. Вспомогательные предложения.

Лемма 7.2.1. Пусть

$$L(\lambda) = \lambda^m e^{P(\lambda)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda^p}{p\lambda_k^p}}, \quad p \geq 0,$$

— целая функция типа σ при уточненном порядке $\rho(r)$ ($P(\lambda)$ — многочлен степени, не большей ρ) и

$$L_n(\lambda) = L(\lambda) \left\{ \frac{m}{\lambda} + P'(\lambda) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\lambda - \lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} + \dots + \frac{\lambda^{p-1}}{\lambda_k^p} \right) \right\} \quad (n \geq 1).$$

Тогда последовательность $\{L_n(\lambda)\}$ сходится к $L'(\lambda)$, и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_0(\varepsilon)$, не зависящее от n , такое, что

$$|L_n(\lambda)| < e^{(\sigma+\varepsilon)r^0(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon).$$

Первое утверждение очевидно. Докажем второе.

Обозначим D_h внешность кругов $|\lambda - \lambda_k| \leq |\lambda_k|^{-h}$ ($k = 1, 2, \dots$) и $|\lambda| \leq 1$, причем $\sum |\lambda_k|^{-h} < \infty$. Покажем, что

$$|L_n(\lambda)| < A |\lambda|^{h+\rho+\rho(|\lambda|)} |L(\lambda)|, \quad \lambda \in D_h, \quad (2.1)$$

где A не зависит от n .

Имеем

$$L_n(\lambda) = L(\lambda) \left\{ \frac{m}{\lambda} + P'(\lambda) + \lambda^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\lambda - \lambda_k) \lambda_k^p} \right\}.$$

Сумму, стоящую справа, разобьем на две:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\lambda - \lambda_k) \lambda_k^p} &= \\ &= \sum_{|\lambda - \lambda_k| < \frac{1}{2} |\lambda_k|} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k) \lambda_k^p} + \sum_{|\lambda - \lambda_k| \geq \frac{1}{2} |\lambda_k|} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k) \lambda_k^p} = \\ &= \sum' + \sum''. \quad \lambda \in D_h \end{aligned}$$

(при фиксированном λ в сумме $\sum'$ суммирование осуществляется по тем k , для которых $|\lambda - \lambda_k| < \frac{1}{2} |\lambda_k|$). Очевидно неравенство

$$|\sum''| < 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^{p+1}} = B < \infty.$$

В первой сумме $|\lambda_k| - |\lambda| < \frac{1}{2} |\lambda_k|$, откуда $|\lambda_k| < 2|\lambda|$. Учтем еще, что

$$\frac{1}{|\lambda_k|^{p(|\lambda_k|)}} \leq a < \infty \quad (k \geq 1),$$

в силу чего

$$k \leq a |\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}.$$

Пусть k_0 — наибольшее значение индекса k в сумме $\sum'$. Тогда $k_0 \leq a |\lambda_{k_0}|^{\rho(|\lambda_{k_0}|)} < a (2|\lambda|)^{\rho(2|\lambda|)} < b |\lambda|^{\rho(|\lambda|)}$, где b — постоянная.

Если $\lambda \in D_h$, то

$$\left| \frac{1}{\lambda_k^p (\lambda - \lambda_k)} \right| < \frac{1}{|\lambda_1|^p} \frac{1}{|\lambda_k|^{-h}} < \frac{|\lambda_{k_0}|^h}{|\lambda_1|^p} < \frac{2^h |\lambda|^h}{|\lambda_1|^p},$$

на основании чего получаем

$$|\sum'| < k_0 c |\lambda|^h < b c |\lambda|^{h+\rho(|\lambda|)}.$$

В итоге для $\lambda \in D_h$

$$\left| \frac{m}{\lambda} + P'(\lambda) + \lambda^p \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^p (\lambda - \lambda_k)} \right| < A |\lambda|^{h+\rho+\rho(|\lambda|)},$$

где A — некоторая постоянная. Неравенство (2.1) установлено. Положим

$$H = 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-h},$$

H есть сумма диаметров кружков $|\lambda - \lambda_k| < |\lambda_k|^{-h}$. Возьмем произвольную точку $\bar{\lambda}$, $|\bar{\lambda}| > 2H + 1$. Среди окружностей $|\lambda - \bar{\lambda}| = r$ ($0 < r < 2H$) найдется хотя бы одна (пусть это будет окружность $|\lambda - \bar{\lambda}| = r$), которая целиком принадлежит множеству D_h . На основании (2.1) имеем

$$\begin{aligned} |L_n(\bar{\lambda})| &\leq \max_{|\lambda - \bar{\lambda}| = r} |L_n(\lambda)| \leq \\ &\leq A (|\bar{\lambda}| + 2H)^{h+\rho+\rho(|\bar{\lambda}|+2H)} \max_{|\lambda - \bar{\lambda}| = 2H} |L(\lambda)| < \\ &< A (|\bar{\lambda}| + 2H)^{h+\rho+\rho(|\bar{\lambda}|+2H)} \max_{|\lambda| \leq |\bar{\lambda}|+2H} |L(\lambda)| < e^{(\sigma+\varepsilon)r^0(r)}, \\ &r = |\lambda| > r_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 7.2.2. Пусть функция (1.13) — целая. Тогда функция

$$\frac{\omega_{L'}(\mu, F)}{L'(\mu)}$$

($L'(\mu)$ — производная от $L(\mu)$) — также целая.

Для доказательства леммы положим

$$M_0(\lambda) = m \frac{L(\lambda)}{\lambda}, \quad M_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \quad (k \geq 1), \\ N_k(\lambda) = \lambda^k L(\lambda) \quad (k \geq 0).$$

Пусть $L_n(\lambda)$ — функция из леммы 7.2.1. Имеем

$$L_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n M_k(\lambda) + \sum_{k=0}^n a_k N_k(\lambda),$$

где a_k — некоторые постоянные, причем последняя сумма — конечная. В силу свойства 7) интерполирующей функции, получаем

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{M_k}(\mu, F)}{M_k(\mu)} = \frac{\omega_{N_k}(\mu, F)}{N_k(\mu)}.$$

откуда

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\sum_{k=0}^n \omega_{M_k}(\mu, F) + \sum_{k=0}^n a_k \omega_{N_k}(\mu, F)}{\sum_{k=0}^n M_k(\mu) + \sum_{k=0}^n a_k N_k(\mu)} = \frac{\omega_{L_n}(\mu, F)}{L_n(\mu)}.$$

Воспользуемся свойством 4) интерполирующей функции и леммой 7.2.1. На основании их, переходя в последнем равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{L'}(\mu, F)}{L'(\mu)},$$

откуда следует, что правая часть — целая функция, что и надо было доказать.

2. Доказательство теоремы единственности. По условию теоремы все $P_\nu(z)$ в ряде (1.5) равны нулю. Отсюда, на основании формул (1.2), заключаем, что функция

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)}$$

— целая. Имея это в виду, будем последовательно применять лемму 7.2.2. Получим, что функции

$$\frac{\omega_{L^{(s)}}(\mu, F)}{L^{(s)}(\mu)} \quad (s \geq 1)$$

— целые. Здесь $L^{(s)}(\mu)$ — производная порядка s от $L(\mu)$. Отсюда, согласно свойству 7) интерполирующей функции, выводим,

что

$$M_{L^{(s)}}(F^{(m)})_0 = 0 \quad (s \geq 0; m \geq 0). \quad (2.2)$$

Допустим теперь, следуя методу от противного, что $F(z) \neq 0$. Тогда найдется l такое, что $F^{(l)}(0) \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k F^{(k+l)}(0) z^k, \quad (2.3)$$

где d_k — тейлоровские коэффициенты функции $L^{(m)}(\lambda)$:

$$L^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k.$$

Если $L(0) \neq 0$, полагаем $m=0$; если $L(0)=0$, полагаем m равным кратности нуля $\lambda=0$ функции $L(\lambda)$. При этом соглашении $d_0 \neq 0$. Убедимся, что радиус сходимости ряда (2.3) больше единицы.

Функция $L^{(m)}(\lambda)$ имеет тип σ при уточненном порядке $\rho(r)$. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) \sqrt[k]{|d_k|} = (\sigma \rho)^{1/\rho}.$$

Функция $F(z)$ принадлежит классу $B(L)$, для нее выполняется условие (1.6). Значит, при больших k

$$|d_k F^{(k+l)}(0)| < \left(\frac{\alpha}{\varphi(k)}\right)^k (k+l)! \left(\frac{\beta \varphi(k+l)}{k+l}\right)^{k+l} < q^k, \\ q < 1, \quad \alpha = (\sigma \rho)^{1/\rho} + \varepsilon, \quad \beta < e(\sigma \rho)^{-1/\rho}.$$

Отсюда и следует, что радиус сходимости ряда (2.3) больше единицы. Имея это в виду, на основании равенств (2.2), получаем

$$\psi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k F^{(k+l)}(0) = M_{L^{(m)}}(F^{(l)})_0 = 0,$$

$$\psi'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k F^{(k+l)}(0) = M_{L^{(m+1)}}(F^{(l)})_0 = 0,$$

$$\dots \dots \dots \psi^{(s)}(1) = M_{L^{(m+s)}}(F^{(l)})_0 = 0, \\ \dots \dots \dots$$

Следовательно $\psi(z) \equiv 0$, в частности, $d_0 F^{(l)}(0) = 0$. Но $F^{(l)}(0) \neq 0$. Поэтому $d_0 = 0$, что противоречит выбору. Проти-

ворение получилось в результате предположения: $F(z) \neq 0$. Значит, $F(z) \equiv 0$. Теорема единственности доказана.

(В случае, когда $L(\lambda)$ — целая функция порядка ρ (без учета типа), теорема установлена в [21]; в случае, когда $L(\lambda)$ — порядка ρ и конечного типа σ , — в [62]. Настоящее доказательство проведено по схеме [62].)

3. Пример ряда, сходящегося не к своей функции. Рассмотрим случай, когда

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}, \quad \lambda_k = k^{\frac{1}{\rho}}, \quad 1 < \rho < \frac{3}{2}.$$

Это — целая функция порядка ρ . По теореме 1.2.6' существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r^\rho} = \pi \frac{\cos \rho(\pi - \varphi)}{\sin \rho\pi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Отсюда

$$h(\varphi) = \pi \frac{\cos \rho(\pi - \varphi)}{\sin \rho\pi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

В силу непрерывности $h(\varphi)$, имеем

$$h(0) = \pi \cotg \rho\pi > 0.$$

Имеем далее

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \approx \frac{1}{\rho} k^{\frac{1}{\rho}-1} = \frac{1}{\rho} \lambda_k^{1-\rho}.$$

Поэтому по теореме 1.2.6

$$|L'(\lambda_k)| > e^{\delta} |\lambda_k|^\rho, \quad \delta > 0. \quad (2.4)$$

Функции $F(z) \in B(L)$ сопоставляем ряд

$$F(z) \sim \sum_1 a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{L'(\lambda_k)}. \quad (2.5)$$

В силу свойства б) интерполирующей функции, имеем

$$|a_k| < \frac{C}{|\lambda_k L'(\lambda_k)|}.$$

Отсюда, на основании оценки (2.4), заключаем, что ряд (2.5) сходится во всей плоскости. При $z \rightarrow -\infty$ его сумма стремится к нулю. Если, например, $F(z) \equiv 1$, то сумма ряда, следовательно, отлична от $F(z)$. По теореме единственности функцию $F(z)$ тем не менее принципиально можно восстановить по коэффициентам a_k (см. [21], [49] и [61]).

§ 3. Форма и оценка остаточного члена

Пусть функция $F(z)$ принадлежит классу $A(L)$. Получим формулу для разности между $F(z)$ и частной суммой соответствующего ей ряда (1.5).

Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)},$$

где Γ — замкнутый контур, на котором $L(\mu) \neq 0$, и λ лежит внутри Γ . Для других λ определим эту функцию как ее аналитическое продолжение. Для λ , лежащих вне Γ , имеем

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} + e^{\lambda z}.$$

Функция $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$, как функция λ , — целая. Разложим ее в ряд:

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(z) \lambda^m.$$

Теорема 7.3.1. Если $F(z) \in A(L)$, то имеет место соотношение

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = - \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m)}(0) A_m(z). \quad (3.1)$$

Эта формула имеет тот же вид, что и формула (5.8) из гл. IV, но получена при иных условиях.

Установим формулу (3.1) сначала для $F(z) = \frac{z^m}{m!}$. В этом случае $F^{(s)}(0) = 0$, если $s \neq m$, и $F^{(s)}(0) = 1$, если $s = m$, и

$$\begin{aligned} \omega_L(\mu, F) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k \mu^{k-m-1} = \frac{1}{\mu^{m+1}} \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k \mu^k = \frac{L(\mu) - S_m(\mu)}{\mu^{m+1}}, \\ S_m(\mu) &= \sum_{k=0}^m c_k \mu^k. \end{aligned}$$

В силу этого левая часть в формуле (3.1) равна

$$\begin{aligned} \frac{z^m}{m!} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{L(\mu) - S_m(\mu)}{\mu^{m+1} L(\mu)} e^{\mu z} d\mu &= \\ = \frac{z^m}{m!} - \frac{z^m}{m!} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{S_m(\mu) e^{\mu z} d\mu}{\mu^{m+1} L(\mu)} &= \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{\mu^{m-k+1} L(\mu)} \end{aligned}$$

(считаем, что контур Γ охватывает начало координат, другой случай рассматривается аналогично).

Рассмотрим правую часть формулы (3.1). В рассматриваемом случае она равна

$$\begin{aligned} -A_m(z) &= -\frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} [\Phi(\lambda, z, \Gamma)]_{\lambda=0} = \\ &= -\frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{z\mu} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} \right]_{\lambda=0} = \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{s=0}^m C_{m-s}^{m-s} L^{(s)}(0) \frac{(m-s)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{z\mu} d\mu}{\mu^{m-s+1} L(\mu)} = \\ &= \sum_{s=0}^m c_s \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{z\mu} d\mu}{\mu^{m-s+1} L(\mu)}. \end{aligned}$$

Итак, для $F(z) = \frac{z^m}{m!}$ левая и правая части в формуле (3.1) равны. Очевидно, формула (3.1) верна для

$$F_p(z) = \sum_{s=1}^p \frac{F^{(s)}(0)}{s!} z^s$$

при любом конечном p . Таким образом,

$$\begin{aligned} F_p(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_L(\mu, F_p) e^{z\mu} d\mu}{L(\mu)} &= - \sum_{m=0}^p F_p^{(m)}(0) A_m(z) = \\ &= - \sum_{m=0}^p F^{(m)}(0) A_m(z). \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу свойства 3) интерполирующей функции, на контуре Γ равномерно

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \omega_L(\mu, F_p) = \omega_L(\mu, F).$$

Отсюда левая часть в (3.2) имеет предел при $p \rightarrow \infty$, следовательно, и правая часть в равенстве (3.2) имеет предел при $p \rightarrow \infty$. А потому, устремив в (3.2) p в ∞ , в пределе получим искомую формулу (3.1).

Теорема 7.3.2. Пусть $M(r) = \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|$, и пусть $M^*(r)$ — положительная возрастающая функция, удовлетворяющая условию: $M(r) \leq M^*(r)$, $r \geq 0$. Положим

$$c_{k,h}^* = \min_{r \geq 0} \frac{M^*(r+2h)}{r^k}, \quad h > 0 \quad (k \geq 0). \quad (3.3)$$

Для функции $F(z) \in A(L)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left| F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=q} \frac{\omega_L(\mu, F) e^{z\mu} d\mu}{L(\mu)} \right| &< \\ &< \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,h}^* |F^{(k)}(0)| \right) \left\{ qh^{-1} \max_{|\mu|=q} \left| \frac{e^{z\mu}}{L(\mu)} \right| + \sup_{\substack{|\mu|=p, \\ p \geq q+h}} \left| \frac{e^{z\mu}}{M^*(p)} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $q > 0$ — любое, лишь бы $L(\mu) \neq 0$ на окружности $|\mu|=q$. Для получения (3.4) оценим сначала функцию

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=q} \frac{e^{z\mu} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}$$

(в этой записи $|\lambda| < q$ и Γ — окружность $|\mu|=q$). Имеем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| \leq M^*(r) qh^{-1} \max_{|\mu|=q} \left| \frac{e^{z\mu}}{L(\mu)} \right|, \quad r = |\lambda| \leq q - h.$$

Для λ , $|\lambda| > q$, верна формула

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=q} \frac{e^{z\mu} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} + e^{z\lambda},$$

согласно которой

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| \leq M^*(r) qh^{-1} \max_{|\mu|=q} \left| \frac{e^{z\mu}}{L(\mu)} \right| + |e^{z\lambda}|,$$

или

$$\begin{aligned} |\Phi(\lambda, z, \Gamma)| &\leq M^*(r) \left\{ qh^{-1} \max_{|\mu|=q} \left| \frac{e^{z\mu}}{L(\mu)} \right| + \sup_{\substack{|\mu|=p, \\ p \geq q+h}} \left| \frac{e^{z\mu}}{M^*(p)} \right| \right\} \\ &\quad |\lambda| = r \geq q + h. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках представляет собой при фиксированном z число B_q , зависящее от q . Последняя оценка верна, конечно, и для $|\lambda| \leq q - h$. Для λ , $q - h \leq |\lambda| \leq q + h$, по принципу максимума модуля воспользуемся оценкой

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| \leq \max_{|\mu|=q+h} |\Phi(\mu, z, q)|.$$

Правая часть по уже доказанному не превосходит $B_q M^*(q+h)$. Но $q \leq |\lambda| + h = r + h$. Поэтому

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma)| \leq B_q M^*(r+2h), \quad |\lambda| = r. \quad (3.5)$$

Это неравенство тем более верно при $|\lambda| \leq q - h$ и $|\lambda| \geq q + h$. Значит, оно верно при любых λ .

Тейлоровские коэффициенты функции $\Phi(\lambda, z, \Gamma)$, как функции λ , были ранее обозначены $A_h(z)$. Имеем

$$|A_h(z)| \leq \min_{r>0} \frac{\max_{|\lambda|=r} |\Phi(\lambda, z, \Gamma)|}{r^h}.$$

Отсюда, согласно оценке (3.5), находим

$$|A_h(z)| \leq B_q \min_{r>0} \frac{M^*(r+2h)}{r^h},$$

или, учитывая обозначения (3.3),

$$|A_h(z)| \leq B_q c_{k,h}^* \quad (k \geq 0).$$

В силу этого неравенства для остаточного члена (3.1) получаем оценку

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(0) A_h(z) \right| \leq B_q \sum_{k=0}^{\infty} c_{k,h}^* |F^{(k)}(0)|,$$

что и надо было показать.

Приведем пример на применение теоремы 7.3.2.

Теорема 7.3.3. Пусть имеются окружности $|\mu| = q_k \uparrow \infty$, удовлетворяющие условию

$$\frac{\min_{|\mu|=q_k} \ln |L(\mu)|}{q_k} = p_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда для функции $F(z)$ из класса $B(L)$ имеется представление

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=q_k} \frac{\omega_k(\mu, F)}{L(\mu)} e^{z\mu} d\mu, \quad |z| < \infty$$

(сходимость в любой ограниченной области — равномерная).

Для доказательства положим в (3.4) $h=1$, $q=q_k$, а в качестве функции $M^*(r)$ возьмем функцию

$$M^*(r) = A \exp\{\sigma_1 r^{\rho(r)}\}, \quad \sigma_1 > \sigma.$$

При большом A будем иметь

$$M(r) \leq M^*(r), \quad r \geq 0.$$

Очевидно, при подходящем B

$$M^*(r+2) < B \exp\{\sigma_2 r^{\rho(r)}\}, \quad \sigma_2 > \sigma_1.$$

Имеем

$$c_{k,h}^* = \min_{r>0} \frac{M^*(r+2)}{r^h} \leq B \frac{\exp\{\sigma_2 r^{\rho(r)}\}}{r^h}.$$

Минимум правой части оценивался при доказательстве свойства 4) интерполирующей функции. Было показано, что он не превосходит

$$\left\{ \frac{(\sigma_3 \varepsilon \rho)^{\frac{1}{\rho}}}{\varphi(k)} \right\}^h, \quad \sigma_3 > \sigma_2, \quad k > k_0.$$

Таким образом,

$$\sqrt[h]{c_{k,h}^*} < \frac{(\sigma_3 \varepsilon \rho)^{\frac{1}{\rho}}}{\varphi(k)}, \quad k > k_0.$$

В силу условия (1.6), далее имеем

$$|F^{(k)}(0)| = |k! a_k| < \{\beta \varphi(k)\}^h, \quad \beta < (\sigma \varepsilon \rho)^{-\frac{1}{\rho}}, \quad k > k_1.$$

Отсюда, выбрав σ_3 близким к σ , получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k,h}^* |F^{(k)}(0)| < \infty. \quad (3.6)$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках в (3.4). Пусть z лежит в круге $|z| \leq R$. Имеем

$$\sup_{\substack{|\mu| \leq R \\ p \geq q+1}} \left| \frac{e^{z\mu}}{M^*(p)} \right| \leq \sup_{p \geq q+1} \frac{1}{A} \exp[Rp - \sigma_1 p^{\rho(p)}].$$

Производная выражения в квадратной скобке по p равна

$$R - \sigma_1 (p \ln p \rho'(p) + \rho(p)) p^{\rho(p)-1}$$

(круглая скобка $\approx \rho$). Так как $p^{\rho(p)-1} \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$, в силу (1.1), то, следовательно, указанная производная при больших p отрицательна. Отсюда при больших k , $k > k_0(R)$,

$$\sup_{\substack{|\mu| \leq R \\ p \geq q_k+1}} \left| \frac{e^{z\mu}}{M^*(p)} \right| < \frac{1}{A} \exp[Rq_k - \sigma_1 q_k^{\rho(q_k)}] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

В силу условия теоремы, имеем, далее,

$$q_k \max_{|\mu|=q_k} \left| \frac{e^{z\mu}}{L(\mu)} \right| \leq q_k \exp[Rq_k - p_k q_k] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Значит, выражение в фигурных скобках в (3.4) при $q = q_k$ стремится к нулю, когда $k \rightarrow \infty$. Учитывая (3.6), видим, что вся правая часть в (3.4) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

§ 4. Теоремы о разложении в ряд Дирихле

Будем предполагать, что нули функции $L(\lambda)$ — все простые и, значит,

$$F(z) \sim \sum_{v=1}^{\infty} a_v e^{\lambda_v z}, \quad a_v = \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)}. \quad (4.1)$$

Выясним сначала, когда ряд (4.1) сходится во всей плоскости, а затем выясним, когда он сходится к своей функции $F(z)$.

1. О сходимости ряда во всей плоскости. Докажем теорему.

Теорема 7.4.1. Для того чтобы ряд (4.1) сходился во всей плоскости, какова бы ни была функция $F(z) \in B(L)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |L'(\lambda_k)| = \infty. \quad (4.2)$$

Для доказательства необходимости возьмем функцию $e^{\lambda z}$ при фиксированном $\lambda \neq \lambda_k$ ($k \geq 1$). Ей соответствует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}. \quad (4.3)$$

Предполагая, что ряд сходится во всей плоскости, выведем условие (4.2). Отметим, что во всей плоскости должен сходиться ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)}.$$

Возьмем произвольное фиксированное $p > 0$. Указанный ряд равномерно сходится при $|z| \leq p+1$. Следовательно, имеется постоянная C (она зависит от p) такая, что

$$\left| \frac{e^{\lambda_k z}}{\lambda_k L'(\lambda_k)} \right| \leq C, \quad |z| \leq p+1, \quad k \geq 1.$$

Отсюда имеем

$$\left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| \leq C |\lambda_k| |e^{-\lambda_k z}|, \quad |z| \leq p+1.$$

Выберем z с условием: $|z| = p+1$, $\arg z = \pi - \arg \lambda_k$. Тогда

получим

$$\left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| \leq C |\lambda_k| e^{-|\lambda_k|(p+1)} \leq C_1 e^{-p|\lambda_k|} \quad (k \geq 1),$$

откуда и следует (4.2).

Докажем достаточность условия (4.2). В силу свойства 6) интерполирующей функции, имеем $|\omega_L(\lambda_v, F)| \leq C$, где C не зависит от v . Отсюда получаем $|a_k| \leq \frac{C}{|L'(\lambda_k)|}$ ($k \geq 1$) и, следовательно, в силу (4.2), ряд (4.1) сходится во всей плоскости. Теорема доказана.

2. О сходимости ряда к своей функции. Справедлив следующий критерий разложимости функции $F(z)$ в ряд Дирихле.

Теорема 7.4.2. Для того чтобы любая целая функция $F(z)$ из класса $B(L)$ представлялась во всей плоскости рядом (4.1), необходимо и достаточно, чтобы функция $e^{\lambda z}$, как функция λ (при любом конечном z), разлагалась во всей плоскости в ряд Лагранжа

$$e^{\lambda z} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)}. \quad (4.4)$$

Необходимость доказывается просто. Пусть любая $F(z) \in B(L)$ представляется рядом (4.1). Возьмем $F(z) = e^{\lambda z}$. Для нее соответствующий ряд есть ряд (4.3). Поэтому имеет место представление (4.4).

Докажем достаточность условия (4.4). Предположим, что при любых λ и z имеет место представление (4.4). Из сходимости ряда (4.4), как уже видели, вытекает условие (4.2). Значит, каково бы ни было $p > 0$,

$$\left| \frac{1}{L'(\lambda_v)} \right| < A(p) e^{-p|\lambda_v|} \quad (v \geq 1), \quad p > 0. \quad (4.5)$$

Убедимся теперь в том, что

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| < B(\sigma_1) \exp[\sigma_1 r^{p(v)}], \quad r = |\lambda|, \quad \sigma_1 > \sigma \quad (v \geq 1), \quad (4.6)$$

где $B(\sigma_1)$ не зависит от v .

Если $|\lambda - \lambda_v| \geq 1$, то

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| \leq |L(\lambda)|$$

и неравенство (4.6) очевидно. Пусть теперь $|\lambda - \lambda_v| < 1$. Имеем

$$L(\lambda) = L(\lambda) - L(\lambda_v) = \int_{\lambda_v}^{\lambda} L'(t) dt,$$

откуда

$$|L(\lambda)| \leq |\lambda - \lambda_v| |L'(t_0)|, \quad t_0 \in [\lambda_v, \lambda], \quad |t_0| \leq |\lambda| + 1.$$

Из формулы для определения типа функции при уточненном порядке $\rho(r)$ через тейлоровские коэффициенты видно, что функция $L'(\lambda)$ имеет, как и $L(\lambda)$, тип σ при уточненном порядке $\rho(r)$. Поэтому

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \right| \leq \max_{|t| \leq r+1} |L'(t)| < B(\sigma_1) \exp[\sigma_1 r^{\rho(r)}], \quad \sigma_1 > \sigma \quad (v \geq 1).$$

Перейдем к непосредственному доказательству достаточности условия (4.4). Обозначим Γ_n замкнутый контур, внутри которого лежат нули $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ функции $L(\lambda)$ и нет других нулей этой функции. На основании (4.4) имеем

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_n) = - \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda_v)}, \quad |\lambda| < \infty, \quad |z| < \infty.$$

Отсюда, учитывая оценки (4.5) и (4.6), получаем

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_n)| < A(p) B(\sigma_1) \exp[\sigma_1 r^{\rho(r)}] \sum_{v=n+1}^{\infty} e^{-|\lambda_v|(p-R)}, \\ |z| \leq R, \quad p > R.$$

Выберем $p = R + 2$. Тогда сумма будет меньше $e^{-|\lambda_{n+1}|}$ при $n \geq n_0$ и

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_n)| < C(R, \sigma_1) e^{-|\lambda_{n+1}|} \exp[\sigma_1 r^{\rho(r)}], \\ \sigma_1 > \sigma, \quad n \geq n_0, \quad |z| \leq R. \quad (4.7)$$

Пусть

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(n)}(z) \lambda^m.$$

Тогда

$$|A_m^{(n)}(z)| \leq \frac{\max_{|\lambda|=r} |\Phi(\lambda, z, \Gamma_n)|}{r^m}$$

На основании (4.7)

$$|A_m^{(n)}(z)| < C(R, \sigma_1) e^{-|\lambda_{n+1}|} \frac{\exp[\sigma_1 r^{\rho(r)}]}{r^m}, \\ \sigma_1 > \sigma \quad (m \geq 0), \quad r > 0.$$

Как уже отмечалось,

$$\min_{r>0} \frac{\exp [\sigma_1 e^{\sigma(r)}]}{r^m} < \left\{ \frac{(\sigma_2 e \rho)^{\frac{1}{\sigma}}}{\varphi(m)} \right\}^m, \\ \sigma_2 > \sigma_1, \quad m \geq m_0 = m_0(\sigma_2).$$

При $m < m_0$ этот минимум не будет превосходить некоторой постоянной, которая будет зависеть от m_0 или, в конечном счете, от σ_2 . В итоге

$$|A_m^{(n)}(z)| < C(R, \sigma_1, \sigma_2) e^{-|\lambda_{n+1}|} \left\{ \frac{\sigma_2 e \rho}{\varphi(m)} \right\}^m, \quad m \geq 0, \quad n \geq n_0. \quad (4.8)$$

Функция $F(z)$ принадлежит классу $B(L)$. Поэтому, согласно (1.6),

$$|F^{(m)}(0)| < B\{\beta \varphi(m)\}^M, \quad \beta < (\sigma e \rho)^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad m \geq 0. \quad (4.9)$$

По формуле (3.1) имеем

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = - \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m)}(0) A_m^{(n)}(z).$$

На основании (4.8) и (4.9) получаем (при σ_2 близком к σ)

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^n \frac{\omega_L(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)} e^{\lambda_v z} \right| < C(R) e^{-|\lambda_{n+1}|}, \\ |z| \leq R, \quad n \geq n_0.$$

Отсюда видно, что $F(z)$ разлагается в ряд (4.1), равномерно сходящийся в любой ограниченной области. Теорема доказана.

Согласно теореме 7.4.2, вопрос о возможности разложения функции $F(z) \in B(L)$ в ряд (4.1) сводится к выяснению условий, при которых имеет место представление (4.4). Укажем эти условия. Как уже видели, из сходимости ряда (4.4) для всех z вытекает условие (4.2). Из условия (4.2), согласно теореме 7.4.1, вытекает сходимость ряда (4.4), но не вытекает еще, что сумма ряда равна $e^{\lambda z}$. Предположим, что имеются окружности $|\lambda| = q_k \uparrow \infty$ со следующим свойством:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{q_k} \min_{|\lambda| = q_k} \ln |L(\lambda)| = +\infty. \quad (4.10)$$

На основании условия (4.10), согласно теореме 7.3.3, сумма ряда (4.4) будет равна $e^{\lambda z}$. Таким образом, выполнено условие (4.4). Итак, если выполнены условия (4.2) и (4.10), то выполнено и условие (4.4).

Покажем, что при выполнении условия (4.4) справедливы условия (4.2) и (4.10). То, что из (4.4) вытекает (4.2), было уже отмечено выше. Установим наличие окружностей $|\lambda| = q_h$, на которых выполняется (4.10). Из (4.4) выводим

$$\frac{1}{L(\lambda)} = e^{-\lambda z} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\lambda_v^h}{(\lambda - \lambda_v) L'(\lambda_v)}.$$

Поскольку λ_v — нули целой функции типа σ при уточненном порядке $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$, $1 \leq \rho < \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} < \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^h} < \infty, \quad h > \rho.$$

Имея это в виду, обозначим K_v кружки

$$K_v: |\lambda - \lambda_v| < |\lambda_v|^{-h} \quad (v \geq 1).$$

Рассмотрим кольцо $\Gamma_n: n \leq |\lambda| \leq n+1$ ($n \geq 2$). Сумма диаметров кружков K_v , имеющих общие точки с кольцом Γ_n , не превосходит

$$2 \sum_{|\lambda_k| \geq n-1} \frac{1}{|\lambda_k|^h}.$$

Эта величина при $n \geq n_0$ меньше $1/2$. Следовательно, в кольце Γ_n , $n \geq n_0$, найдется окружность $|\lambda| = q_n$, не имеющая общих точек с кружками K_v . Окружности $|\lambda| = q_n$ ($n \geq n_0$) — искомые. В самом деле, имеем

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \right| \leq |e^{-\lambda z}| \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|\lambda_v|^h e^{|\lambda_v| R}}{|L'(\lambda_v)|}, \quad |\lambda| = q_n, \quad |z| = R.$$

Ряд справа, на основании (4.2), сходится, его сумма есть число $A(R)$, зависящее от R . Выберем z с условиями: $|z| = R$, $\arg z = -\arg \lambda$. Получим

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \right| \leq A(R) e^{-R|\lambda|}, \quad |\lambda| = q_n,$$

откуда уже вытекает (4.10). Таким образом, доказана

Теорема 7.4.3. Для того чтобы любая целая функция $F(z)$ из класса $B(L)$ представлялась во всей плоскости рядом (4.1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (4.2) и (4.10).

3. Разложение произвольной целой функции в ряд Дирихле. Возникает вопрос: любую ли целую функцию $F(z)$ можно разложить при соответствующем выборе $L(\lambda)$ в ряд (4.1)? Положительный ответ на этот вопрос дает следующая

Лемма 7.4.1. Пусть $F(z)$ — целая функция. Имеется целая функция $L(\lambda)$ со свойствами (4.2) и (4.10) такая, что $F(z)$ входит в класс $B(L)$.

Доказательство. Пусть $F(z) = \sum_0^{\infty} a_m z^m$. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

Положим

$$\max \left(\frac{1}{\ln n}, \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \delta_n, \quad \max_{k \geq n} \delta_k = \delta_n, \quad a_n = \frac{1}{\delta_n} \quad (n \geq 2).$$

Очевидно, $a_n \uparrow \infty$ и $a_n \leq \ln n$. Ранее (гл. I, § 2) было доказано следующее: если $\{a_n\}_1^{\infty}$ — возрастающая до ∞ последовательность положительных чисел, причем при больших n $a_n < \ln n$, то, каково бы ни было $\rho > 0$, существует уточненный порядок $\rho(r) = \rho + \frac{\psi(\ln r)}{\ln r}$, $\psi(x) \uparrow \infty$, $\frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0$, $\psi'(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, (4.11) такой, что

$$\varphi(n) \geq \frac{n^{1/\rho}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $r = \varphi(t)$ — функция, обратная функции $t = r^{\rho}$.

Пусть в этом утверждении $\rho = 1$, а a_n — введенные выше числа. Тогда получаем

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \delta_n = \frac{1}{a_n} \leq \frac{\varphi(n)}{n} \quad (n \geq 1). \quad (4.12)$$

Возьмем некоторое τ , $0 < \tau < \infty$, и какие-нибудь положительные $\mu_k \uparrow \infty$ ($k \geq 1$), удовлетворяющие условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\mu_k^{\rho(\mu_k)}} = \tau, \quad \mu_{k+1} - \mu_k > d \mu_k^{1-\rho(\mu_k)}, \quad d > 0, \quad (4.13)$$

где $\rho(r)$ — уточненный порядок (4.11). В качестве μ_k можно было бы взять числа, определяемые равенством

$$\frac{k}{\mu_k^{\rho(\mu_k)}} = \tau \quad (k \geq 1).$$

Эти числа (см. замечание после теоремы 1.2.3) удовлетворяют и второму из условий (4.13).

Числа μ_k можно еще выбрать так, что они будут удовлетворять условиям (4.13) и будут лежать вне произвольного фиксированного множества нулевой относительной меры.

Теперь положим

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^m}{\mu_k^m}\right), \quad (4.14)$$

где целое $m > 2$. Функция $L(\lambda)$ обладает следующими свойствами (см. теоремы 1.2.7 и 1.2.8):

1) она имеет тип $\sigma = \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi}{m}}$ при уточненном порядке $\rho(r)$;

2) для нее

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right|}{|\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)}} = -\pi\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m},$$

где λ_k ($k \geq 1$) — нули $L(\lambda)$;

3) на окружностях $|\lambda| = \frac{\mu_k + \mu_{k+1}}{2} = r_k$ ($k \geq 1$)

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [H(\varphi) - \varepsilon] r^{\rho(r)}, \quad r > r_0(\varepsilon),$$

где $H(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\lambda)$, причем

$$\min_{\varphi} H(\varphi) = \pi\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi}{m}.$$

Поскольку $m > 2$, величина $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{m} > 0$.

Из выражения (4.11), далее, видно, что

$$r^{\rho(r)-1} = e^{\psi(\ln r)} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow \infty.$$

Поэтому функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условиям (4.2) и (4.10).

Осталось показать, что при подходящем τ функция $F(z)$ будет принадлежать классу $B(L)$, иными словами, согласно (1.6), будет удовлетворять условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\varphi(n)} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\sigma} \quad (\rho = 1).$$

На основании неравенства (4.12) последнее условие будет выполнено, если $\sigma = \frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi}{m}} < 1$ или $\tau < \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{m}$. Лемма доказана.

Замечание. Возьмем числа v_n ($n \geq 1$), $0 < v_n \uparrow \infty$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{v_n^d} = \alpha, \quad v_{n+1} - v_n > d v_n^{1-q}, \quad q > 1, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad d > 0, \quad (4.15)$$

например, числа $v_n = (n/\alpha)^{1/q}$ ($n \geq 1$). По теореме 1.2.3 имеется подпоследовательность $\{\mu_n = v_{m_n}\}$ последовательности $\{v_n\}$, удовлетворяющая условиям (4.13). Следовательно, какова бы ни была целая функция $F(z)$, соответствующие числа μ_n всегда можно выбрать из данной фиксированной последовательности $\{v_n\}$.

Из теоремы 7.4.3, принимая во внимание только что доказанную лемму, вытекает (см. [23])

Теорема 7.4.4. Любую целую функцию $F(z)$ можно разложить во всей плоскости в ряд (4.1) при соответствующем выборе функции $L(\lambda)$. Нули λ_v этой функции всегда можно выбрать так, что $|\lambda_v|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

В качестве $L(\lambda)$ всегда можно взять функцию вида (4.14), причем числа μ_k ($k \geq 1$) можно выбрать из фиксированной последовательности (4.15).

Нули λ_v функции (4.14) расположены на m лучах, причем $m > 2$. Отметим, что по существу $m > 2$. В самом деле, уже функция $F(z) \equiv z$ не может быть представлена во всей плоскости рядом Дирихле, у которого показатели расположены на одном или двух лучах. Это вытекает из следующих соображений. Ряд Дирихле, у которого показатели расположены на одном луче, представляет собой функцию, ограниченную в некоторой полуплоскости (например, если показатели положительны, то сумма ряда ограничена в левой полуплоскости). Отсюда вытекает, что если показатели расположены на двух лучах, то сумма ряда ограничена в общей части соответствующих полуплоскостей (эта общая часть есть либо угол, либо полоса). Следовательно, в обоих случаях сумма ряда Дирихле не может равняться $F(z) \equiv z$. Минимальное число лучей, на которых расположены нули λ_v функции $L(\lambda)$, участвующие в представлении рядом (4.1), равно, таким образом, трем.

§ 5. О скорости сходимости ряда Дирихле

Согласно свойству 6) интерполирующей функции, коэффициенты ряда (4.1) имеют оценку

$$\left| \frac{a_n(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)} \right| \leq \frac{C}{|\lambda_v L'(\lambda_v)|} \quad (v \geq 1). \quad (5.1)$$

Пусть $F(z)$ — данная целая функция. Существует много функций $L(\lambda)$ таких, что $F(z) \in B(L)$. Следовательно, функцию $F(z)$, за счет различных выборов $L(\lambda)$, можно многими способами представить рядом (4.1). Задача заключается в том, чтобы сконструировать ряд с наиболее быстро убывающими коэффициентами. Эту задачу исследуем в случае, когда $F(z)$ — целая функция обычного порядка ρ_1 , $1 < \rho_1 < \infty$, и конечного типа σ_1 , $\sigma_1 > 0$.

1. О скорости убывания коэффициентов. Имеет место

Теорема 7.5.1. Пусть $F(z)$ — целая функция из класса $[\rho_1, \sigma_1]$ (ее порядок или меньше ρ_1 , или равен ρ_1 , причем в последнем случае ее тип меньше или равен σ_1), $1 < \rho_1 < \infty$ и $0 < \sigma_1 < \infty$. Определим числа ρ и σ из равенств

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1, \quad (\sigma\rho)^{1/\rho} (\sigma_1\rho_1)^{1/\rho} = 1.$$

Тогда, каково бы ни было $\gamma < \sigma$, имеется последовательность $\{\lambda_v\}$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_v|^\rho} < \infty$ (λ_v — нули целой функции порядка ρ и типа $\bar{\sigma}$, $\gamma < \bar{\sigma} < \sigma$), такая, что

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v e^{\lambda_v z}, \quad |z| < \infty, \quad (5.2)$$

где при любом $\varepsilon > 0$

$$|c_v| < C(\varepsilon) e^{(-\gamma + \varepsilon)|\lambda_v|^\rho} \quad (v \geq 1).$$

Точки λ_v можно выбрать на m лучах: $\arg \lambda = \varphi_0 + \frac{2\pi k}{m}$ ($k=0, 1, \dots, m-1$), где целое m удовлетворяет условиям: $m > 2\rho$ и $\cos \frac{\pi\rho}{m} > \frac{\gamma}{\sigma}$. При этом их можно выбрать еще так, что $|\lambda_v|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры. В то же время, если $F(z)$ — целая функция порядка ρ_1 и типа σ_1 , не существует разложения при условии

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = H < \infty,$$

в котором коэффициенты c_v удовлетворяли бы условию

$$|c_v| < C(\varepsilon_0) e^{(-\sigma + \varepsilon_0)|\lambda_v|^\rho}, \quad \varepsilon_0 > 0. \quad (5.3)$$

Для доказательства первой части выберем целое m так, чтобы выполнялись условия: $m > 2\rho$, $\cos \frac{\pi\rho}{m} > \frac{\gamma}{\sigma}$. После этого

определим τ из равенства

$$\pi\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m} = \gamma.$$

Тогда

$$\gamma = \pi\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m} < \pi\tau \frac{1}{\sin \frac{\pi\rho}{m}} = \bar{\sigma} < \sigma.$$

Положим

$$L(\lambda) = f(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^m}{a_k^m}\right),$$

где $\{a_k\}$ — какая-нибудь последовательность точек на положительной части вещественной оси, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k} = \tau, \quad a_{k+1} - a_k > d a_k^{1-\rho}, \quad d > 0 \quad (k > k_0).$$

Можно еще считать, что a_k ($k \geq 1$) лежат вне данного множества E_0 нулевой относительной меры. О функции $f(\lambda)$ известно следующее (теоремы 1.2.7 и 1.2.8): 1) она имеет порядок ρ и

тип $\frac{\pi\tau}{\sin \frac{\pi\rho}{m}} = \bar{\sigma}$, 2) на окружностях $r_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ ($k \geq 1$)

$$\ln |f(re^{i\varphi})| > [H(\varphi) - \varepsilon] r^2 \quad r > r_0(\varepsilon), \quad (5.4)$$

где $H(\varphi)$ — индикатриса роста $f(\lambda)$, 3) индикатриса $H(\varphi)$ положительна: $H(\varphi) \geq \pi\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m} = \gamma$, 4) если λ_k — нули $f(\lambda)$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_k|^\rho} \ln \frac{1}{|f'(\lambda_k)|} = -\pi\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m} = -\gamma. \quad (5.5)$$

Видим, что тип $\bar{\sigma}$ функции $L(\lambda)$ меньше σ . Следовательно, функция $F(z)$ принадлежит классу $B(L)$. Поскольку выполняются условия (5.4) и (5.5), имеют место соотношения (4.2) и (4.10). Поэтому для функции $F(z)$ получаем разложение в ряд (4.1). Его коэффициенты на основании (5.1) и (5.5) имеют нужную оценку.

Нули λ_v функции $L(\lambda)$ расположены на m лучах: $\arg \lambda = \frac{2\pi}{m}k$ ($k=0, 1, \dots, m-1$). Можно было бы в качестве $L(\lambda)$ взять функцию $f(\lambda e^{-i\varphi_0})$. Ее нули расположены на лучах $\arg \lambda = \varphi_0 + \frac{2\pi}{m}k$ ($k=0, 1, \dots, m-1$). Первая часть теоремы доказана.

Допустим теперь, что имеется разложение функции $F(z)$ в ряд Дирихле (5.2) с коэффициентами c_v , допускающими оценку (5.3). Положим $\sigma + \varepsilon_0 = \alpha$. Имеем

$$|F(z)| < C \sum_{v=1}^{\infty} e^{r_v - \alpha v}, \quad r_v = |\lambda_v|, \quad r = |z|.$$

Найдем оценку максимального члена $\mu(r)$ ряда из правой части. Выражение $xr - \alpha x^p$ имеет максимальное значение в точке

$$x = \left(\frac{r}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

и это максимальное значение равно βr^{ρ_1} , где

$$\beta = \frac{1}{p_1} \left(\frac{1}{\alpha p}\right)^{\frac{p_1}{p-1}}.$$

Поэтому

$$\mu(r) \leq e^{\beta r^{\rho_1}}.$$

По условию $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{|\lambda_k|} = H < \infty$. На этом основании (см. гл. II, § 6, п. 2) при больших r

$$|F(z)| < \mu(r + H + \varepsilon) < e^{(\beta + \delta) r^{\rho_1}}, \quad r > r_0(\delta),$$

где $\delta > 0$ — любое. Следовательно, тип α_1 функции $F(z)$ меньше или равен β .

Очевидно равенство

$$(\beta \rho_1)^{\frac{1}{p_1}} (\alpha \rho)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Из него, поскольку $\alpha > \sigma$, усматриваем, что $\beta < \sigma_1$. Получили противоречие. Таким образом, условие (5.3) не может осуществляться. Вторая часть теоремы тоже доказана.

Теорема 7.5.2. В условиях теоремы 7.5.1 ряд (5.2) обладает свойством:

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^m c_v e^{\lambda_v z} \right| < C(e_0, \delta) e^{-\varepsilon_0 |\lambda_{m+1}|^p} e^{(\beta + \delta) |z|^{\rho_1}} \quad (m \geq 1),$$

где $e_0 > 0$ и $\delta > 0$ — любые, β находится из равенства

$$(\beta \rho_1)^{\frac{1}{p_1}} (\alpha \rho)^{\frac{1}{p}} = 1, \quad \alpha = \gamma - 2\varepsilon_0.$$

Имеем

$$F(z) - \sum_{v=1}^m c_v e^{\lambda_v z} = \sum_{v=m+1}^{\infty} c_v e^{\lambda_v z},$$

откуда, на основании оценки для коэффициентов c_v , получаем

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^m c_v e^{\lambda_v z} \right| < C(e_0) e^{-\varepsilon_0 |\lambda_{m+1}|^p} \sum_{v=1}^{\infty} e^{|\lambda_v| r - \alpha |\lambda_v|^p},$$

где $\alpha = \gamma - 2\varepsilon_0$. При доказательстве теоремы 7.5.1 мы видели, что

$$\sum_{v=1}^{\infty} e^{|\lambda_v| r - \alpha |\lambda_v|^p} < e^{(\beta + \delta) r^{\rho_1}}, \quad r > r_0(\delta).$$

Если правую часть умножить на подходящую константу (зависящую от δ), неравенство будет иметь место при любых $r \geq 0$. Отсюда все и следует.

Замечание. Если γ взять близким к σ , а ε_0 и δ малыми, то величина $(\beta + \delta)$ будет сколь угодно близка к σ_1 (σ и σ_1 участвуют в условиях теоремы 7.5.1).

2. Усиление теоремы. Если в теореме 7.5.1 не требовать, чтобы в представлении (5.2) показатели λ_v лежали на лучах в конечном числе, то можно получить более сильную теорему.

Теорема 7.5.3. Пусть $F(z)$ — целая функция из класса $[p_1, \sigma_1]$, где $1 < p_1 < \infty$ и $0 < \sigma_1 < \infty$. Определим числа ρ и σ из равенств

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1, \quad (\sigma \rho)^{1/p} (\sigma_1 \rho_1)^{1/p_1} = 1.$$

Тогда имеется последовательность $\{\lambda_v\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} < \infty$ (числа λ_v — нули целой функции порядка ρ типа σ) такая, что

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v e^{\lambda_v z}, \quad |z| < \infty,$$

где

$$|c_v| < C(e) e^{-(\sigma - \varepsilon) |\lambda_v|^\rho} \quad (v \geq 1),$$

причем ε , $0 < \varepsilon < \sigma$, — любое. Точки λ_v при этом можно выбрать так, что $|\lambda_v|$ будут лежать вне заданного множества нулевой относительной меры.

Доказательство. Подберем функцию $L(\lambda) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n$ порядка ρ и типа σ с простыми нулями так, чтобы функция $F(z)$ принадлежала классу $A(L)$.

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p_1}} \sqrt[n]{\left| \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \right|} \leq (\sigma_1 \rho_1)^{\frac{1}{p_1}},$$

откуда

$$|F^{(n)}(0)| = a_n \left(a n^{\frac{1}{p}} \right)^n, \quad a = e^{-1} (\sigma_1 e \rho_1)^{\frac{1}{p}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1.$$

Положим

$$\beta_m = \max(1, \alpha_0, \dots, \alpha_m), \quad m \geq 0.$$

Очевидно, $\alpha_m \leq \beta_m$, $1 \leq \beta_m$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\beta_m} = 1$.

Пусть $\psi(r)$ — непрерывная функция на $[0, \infty)$, которая удовлетворяет условиям: $\psi(m) = \beta_m$ ($m \geq 0$), она линейна в интервалах $m \leq r \leq m+1$ ($m \geq 0$). Функция $\psi(r)$ не убывает при возрастании r и $\frac{\ln \psi(r)}{r} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$|F^{(m)}(0)| \leq \psi(m) \left(a m^{\frac{1}{p}} \right)^m, \quad m \geq 0. \quad (5.6)$$

Возьмем $h(\theta) = \sigma$ и $\varphi(r) = r^{\mu} \psi(\sigma r^{\rho})$, $\mu > \rho$. Воспользуемся теоремой 1.3.3. Поскольку $h(\theta) = \text{const}$, то $h_1(\theta) = h(\theta) = \sigma$ и, следовательно, $h_1(\theta) > 0$. Согласно теореме, имеется целая функция порядка ρ с индикатрисой $h(\theta) \equiv \sigma$ (эту функцию и возьмем за $L(\lambda)$) и удовлетворяющая условию

$$|L(re^{i\varphi})| < \frac{e^{\sigma r^{\rho}}}{\varphi(r)}, \quad r > 0. \quad (5.7)$$

Эта функция есть каноническая функция некоторого регулярного множества $\{\lambda_n\}$ при показателе ρ , причем при некотором $d > 0$

$$|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| > d |\lambda_n|^{1-\rho} \quad (n \geq 1) \quad (5.8)$$

и $|\lambda_n|$ лежат вне заданного множества нулевой относительной меры. Вне кружков $|\lambda - \lambda_n| < \bar{d} |\lambda_n|^{1-\rho}$, $\bar{d} > 0$, имеется оценка снизу

$$|L(re^{i\varphi})| > e^{(\sigma - \epsilon)r^{\rho}}, \quad r > r_0(\epsilon). \quad (5.9)$$

Убедимся, что $F(z) \in A(L)$. На основании неравенств Коши и оценки (5.7) получаем

$$|c_n| \leq \frac{e^{\sigma r^{\rho}}}{r^{\mu} \psi(r)}, \quad r > 0, \quad n \geq 0.$$

Положив $r = \left(\frac{n}{\sigma \rho} \right)^{1/\rho}$, находим

$$|c_n| \leq K \left(\frac{\sigma \rho}{n} \right)^{\frac{n}{\rho}} \left[n^{\frac{\mu}{\rho}} \psi(n) \right]^{-1}, \quad n \geq 1, \quad K = (\sigma \rho)^{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (5.10)$$

Учитывая оценки (5.6) и (5.10), проверим, что выполняется условие (1.4). Имеем

$$\begin{aligned} & |F^{(k-1)}(0)| + |\mu| |F^{(k-2)}(0)| + \dots + |\mu|^{k-1} |F(0)| < \\ & < \psi(k) \left[\left(a k^{\frac{1}{p}} \right)^{k-1} + |\mu| \left(a k^{\frac{1}{p}} \right)^{k-2} + \dots + |\mu|^{k-1} \right] = \\ & = \psi(k) \frac{\left(a k^{\frac{1}{p}} \right)^k - |\mu|^k}{a k^{\frac{1}{p}} - |\mu|} < \psi(k) \left(a k^{\frac{1}{p}} \right)^k \end{aligned}$$

при больших k . В силу этого и оценки (5.10), получаем

$$|c_k| (|F^{(k-1)}(0)| + |\mu| |F^{(k-2)}(0)| + \dots + |\mu|^{k-1} |F(0)|) < \frac{K}{k^{\frac{1}{p}}}.$$

Поскольку $\mu > \rho$, условие (1.4) выполняется. Это и означает, что $F(z) \in A(L)$.

На основании теоремы 7.3.1 имеем

$$F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu = - \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m)}(0) A_m^{(k)}(z), \quad (5.11)$$

где $A_m^{(k)}(z)$ находятся из разложения

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(k)}(z) \lambda^m.$$

В качестве Γ_k возьмем окружность $|\mu| = r_k = \frac{|\lambda_k| + |\lambda_{k+1}|}{2}$ ($k \geq 1$).

Надо показать, что остаток (5.11) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. С этой целью оценим сначала функцию $\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)$, как функцию λ , при фиксированном z .

Положим $\rho_k = d_0 r_k^{1-\rho}$, $d_0 = d/4$, где d взято из (5.8). Поскольку существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|^{\rho}} = \tau, \quad 0 < \tau < \infty$$

(последовательность $\{|\lambda_n|\}$ имеет плотность), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{|\lambda_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{k+1}|}{|\lambda_k|} = 1,$$

Имея в виду (5.8), заключаем, что при $\bar{d} < d_0$ кольца $r_k - \rho_k \leq |\mu| \leq r_k + \rho_k$, когда k велико, лежат вне исключительных кружков $|\lambda - \lambda_k| < \bar{d} |\lambda_k|^{1-\rho}$. Следовательно, в указанных кольцах имеет место оценка (5.9).

Имеем

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_k+\rho_k} \frac{e^{z\mu} d\mu}{(\lambda-\mu) L(\mu)}, \quad |\lambda| \leq r_k$$

$$\Phi(\lambda, z, \Gamma_k) = L(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_k-\rho_k} \frac{e^{z\mu} d\mu}{(\lambda-\mu) L(\mu)} + e^{z\lambda}, \quad |\lambda| > r_k$$

откуда

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| \leq |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi \rho_k} \int_{|\mu|=r_k+\rho_k} \left| \frac{e^{z\mu}}{L(\mu)} \right| |d\mu|, \quad |\lambda| \leq r_k$$

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| \leq |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi \rho_k} \int_{|\mu|=r_k-\rho_k} \left| \frac{e^{z\mu}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + |e^{z\lambda}|, \quad |\lambda| > r_k$$

Заменим, согласно (5.7), $|L(\lambda)|$ в правых частях неравенств на $M(r) = [\varphi(r)]^{-1} e^{\sigma r^\rho}$ и воспользуемся оценкой (5.9). Получим при любых λ

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < M(r) \left\{ \frac{1}{2} e^{-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho} + \sup_{|\lambda|=r > r_k} \left| \frac{e^{z\lambda}}{L(r)} \right| \right\}, \quad k > k_1(\varepsilon)$$

(здесь учтено, что $\rho > 1$). Поскольку $\rho > 1$, а z фиксировано, то

$$\sup_{r > r_k} \left| \frac{e^{z\lambda}}{L(r)} \right| < \frac{1}{2} e^{-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho}, \quad k > k_2(\varepsilon).$$

Следовательно, при любых λ и $k > k_0(\varepsilon)$

$$|\Phi(\lambda, z, \Gamma_k)| < M(r) \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho], \quad k > k_0(\varepsilon). \quad (5.12)$$

После этого оценим коэффициенты $A_m^{(k)}(z)$. На основании неравенств Коши и оценки (5.12) имеем

$$|A_m^{(k)}(z)| < \frac{M(r)}{r^m} \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho], \quad m \geq 0, \quad k > k_0(\varepsilon), \quad r > 0.$$

При $m=0$ положим в правой части $r=1$, получим

$$|A_0^{(k)}(z)| < M(1) \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho], \quad k > k_0(\varepsilon). \quad (5.13)$$

В случае $m \geq 1$ положим $r = \left(\frac{m}{\sigma\rho}\right)^{1/\rho}$ и тогда найдем

$$|A_m^{(k)}(z)| < K \left(\frac{\sigma e \rho}{m}\right)^{\frac{m}{\rho}} \left[m^{\frac{1}{\rho}} \psi(m)\right]^{-1} \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho],$$

$$K = (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} \quad (m \geq 1; \quad k > k_0(\varepsilon)). \quad (5.14)$$

Теперь имеется уже все для оценки остатка (5.11). В силу (5.6), (5.13) и (5.14),

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} F^{(m)}(0) A_m^{(k)}(z) \right| < \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho] \left\{ \psi(0) M(1) + K \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{1}{\rho}} \right\}.$$

В фигурных скобках заключена постоянная величина. Таким образом, получили

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^k c_v e^{\lambda_v z} \right| < \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho], \quad k > k_0(\varepsilon), \quad (5.15)$$

где

$$c_v = \frac{\omega_r(\lambda_v, F)}{L'(\lambda_v)} \quad (v \geq 1).$$

Из (5.15) видно, что во всей плоскости

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v e^{\lambda_v z}.$$

Найдем оценку для c_v . Из (5.15) получаем, положив $z=0$,

$$|c_k| = \left| \left(F(0) - \sum_{v=1}^k c_v \right) - \left(F(0) - \sum_{v=1}^{k-1} c_v \right) \right| < \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_k^\rho] + \exp[-(\sigma-\varepsilon)r_{k-1}^\rho].$$

Так как $\frac{r_k}{r_{k-1}} \rightarrow 1$ и $\frac{r_k}{|\lambda_k|} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, то при больших k

$$|c_k| < \exp[-(\sigma-\varepsilon)|\lambda_k|^\rho], \quad k > N_0(\varepsilon). \quad (5.16)$$

Теорема полностью доказана.

Заметим, что если $F(z)$ — целая функция порядка ρ_1 и типа σ_1 , то, согласно теореме 7.5.1, вместо оценки (5.16) нельзя получить оценки вида (5.3).

Теорема 7.5.4. В условиях теоремы 7.5.3

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^m c_v e^{\lambda_v z} \right| < K(e_0) e^{-e_0 |\lambda_{m+1}|^\rho} e^{(\sigma_1 + \varepsilon_1) |z|^{\rho_1}}, \quad (5.17)$$

где e_0 , $0 < e_0 < \sigma$, — любое и $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(e_0) \rightarrow 0$ при $e_0 \rightarrow 0$.

Имеем

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^m c_v e^{\lambda_v z} \right| \leq C(e) e^{-\alpha_0 |\lambda_{m+1}|^{\rho}} \sum_{v=1}^{\infty} e^{|\lambda_v|^{r-\alpha}} |\lambda_v|^{\rho},$$

где $\alpha = \sigma - \varepsilon - \varepsilon_0$. При доказательстве теоремы 7.5.1 мы видели, что сумма справа не превосходит

$$e^{(\beta+\delta)r^{\rho_1}}, \quad r > r_0(\delta),$$

где β удовлетворяет условию

$$(\beta \rho_1)^{1/\rho} (\alpha \rho)^{1/\rho} = 1.$$

Взяв $\delta = \varepsilon_0$, $\varepsilon = \min\left(\varepsilon_0, \frac{\sigma - \varepsilon_0}{2}\right)$ и заметив, что при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ величина $\beta \rightarrow \sigma_1$, получаем то, что нужно.

Возникает вопрос о точности оценки (5.17). В связи с этим докажем следующую теорему.

Теорема 7.5.5. Пусть λ_v ($v \geq 1$) — нули целой функции

$$L(\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \lambda^k \text{ из класса } [\rho, \sigma], \text{ а } F(z) \in [\rho_1, \sigma_1], \text{ причем}$$

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1, \quad (\sigma \rho)^{1/\rho} (\sigma_1 \rho_1)^{1/\rho_1} = 1.$$

Если

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v e^{\lambda_v z}, \quad |z| < \infty,$$

причем

$$\left| F(z) - \sum_{v=1}^m c_v e^{\lambda_v z} \right| < A e^{-a |\lambda_{m+1}|^{\rho}} e^{b |z|^{\rho_1}} \quad (m \geq 1), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (5.18)$$

где либо $b < \sigma_1$, либо $a > \sigma$, то $F(z)$ удовлетворяет уравнению

$$M_L(F) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v F^{(k)}(z) = 0.$$

Рассмотрим сначала случай $b < \sigma_1$. Положим

$$F_m(z) = \sum_{v=1}^m c_v e^{\lambda_v z}.$$

Поскольку $M_L(e^{\lambda_v z}) = 0$, имеем

$$M_L(F_m) = 0.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_L(F_m) = M_L(F).$$

Из (5.18) получаем

$$|F(z)| < |F_m(z)| + A e^{-a |\lambda_{m+1}|^{\rho}} e^{b |z|^{\rho_1}} < B_0 e^{b |z|^{\rho_1}}.$$

Из того же условия далее следует

$$|F_m(z)| \leq |F(z)| + A e^{-a |\lambda_{m+1}|^{\rho}} e^{b |z|^{\rho_1}} < B_1 e^{b |z|^{\rho_1}} \quad (m \geq 1).$$

Найдем оценку для производных от $F_m(z)$ в круге $|z| \leq R$. Имеем, в силу формулы Коши,

$$|F_m^{(k)}(z)| \leq k! \frac{B_1 \exp[b(R+r)^{\rho_1}]}{r^k} < k! \frac{B_2 e^{b R^{\rho_1}}}{r^k}, \quad b < b_1 < \sigma_1, \quad r > 0.$$

Положив здесь

$$r = \left(\frac{k}{b_1 \rho_1} \right)^{1/\rho_1},$$

получим

$$|F_m^{(k)}(z)| < B_2 k! \left(\frac{e b_1 \rho_1}{k} \right)^{\frac{k}{\rho_1}}, \quad |z| \leq R, \quad k \geq 1.$$

Такому же неравенству удовлетворяет и функция $F(z)$ (можно считать $B_0 < B_2$).

Отметим теперь, что

$$|a_k| < B_3 \left(\frac{e \sigma \rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}}, \quad k \geq 1.$$

Из изложенного выводим

$$\begin{aligned} |a_k F_m^{(k)}(z)| &< B_2 B_3 k! \left(\frac{e b_1 \rho_1}{k} \right)^{\frac{k}{\rho_1}} \left(\frac{e \sigma \rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}} = \\ &= B_2 B_3 \frac{k! e^k}{k^k} \left[(b_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} (\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}} \right]^k. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках меньше единицы. Таким образом,

$$|a_k F_m^{(k)}(z)| < B q^k, \quad q < 1, \quad |z| \leq R, \quad k \geq 1, \quad m \geq 0, \quad (5.19)$$

где B и q не зависят от m . Из этого следует, что имеет смысл выражение $M_L(F)$. Далее,

$$M_L(F - F_m) = \sum_{k=0}^N a_k (F^{(k)}(z) - F_m^{(k)}(z)) + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k (F^{(k)}(z) - F_m^{(k)}(z)).$$

Вторая сумма будет по модулю меньше ε в силу (5.19), если N велико. Фиксируем такое N . Тогда первая сумма будет меньше ε по модулю при $m > m_0(\varepsilon)$, так как $\{F_m(z)\}$ в круге $|z| \leq R$ равномерно сходится к $F(z)$. В итоге

$$|M_L(F - F_m)| < 2\varepsilon, \quad m > m_0(\varepsilon), \quad |z| \leq R,$$

что и надо было показать.

Рассмотрим второй случай, когда $a > \sigma$. Из (5.18), положив $z = 0$, получаем

$$\left| F(0) - \sum_{v=1}^m c_v \right| < A e^{-a} |\lambda_{m+1}|^p,$$

$$\left| F(0) - \sum_{v=1}^{m-1} c_v \right| < A e^{-a} |\lambda_m|^p,$$

откуда

$$|c_m| < 2A e^{-a} |\lambda_m|^p \quad (m \geq 0).$$

На основании этого

$$|F(z) - F_m(z)| < 2A e^{-a} |\lambda_{m+1}|^p \sum_{v=1}^{\infty} e^{|\lambda_v| r - a} |\lambda_v|^p,$$

$$a = a - \varepsilon_0 > \sigma, \quad |z| = r.$$

Сумма справа (ее уже оценивали) меньше $e^{(\beta+\delta)r^{p_1}}$, $r > r_0(\delta)$, $(\beta\rho_1)^{1/p_1}(\alpha\rho)^{1/p} = 1$. При малом δ величина $\beta + \delta < \sigma_1$. Имеем уже разобранный случай:

$$|F(z) - F_m(z)| < B e^{-a} |\lambda_{m+1}|^p e^{\delta |z|^{p_1}}, \quad b = \beta + \delta < \sigma_1.$$

Значит, $M_L(F) = 0$. Теорема полностью доказана.

Из теоремы следует, что если $M_L(F) \neq 0$, то в оценке (5.17) нельзя $(\sigma_1 + \varepsilon_1)$ заменить на $b < \sigma_1$ и нельзя ε_0 заменить на величину $a > \sigma$.

3. Об одном применении теоремы 7.5.3. Воспользуемся теоремой 7.5.3 для доказательства следующего полезного во многих вопросах факта.

Теорема 7.5.6. Пусть $L(\lambda)$ — целая функция из класса $[\rho, \gamma]$, $\gamma \leq \sigma$, а $F(z) \in [\rho_1, b]$, $b < \sigma_1$, где $\sigma_1 = \psi(\sigma)$, т. е.

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1, \quad (\sigma\rho)^{1/p}(\sigma_1\rho_1)^{1/p} = 1.$$

Тогда функция $M_L(F)$ принадлежит классу $[\rho_1, \beta]$, где $\beta = \psi(\bar{\sigma} - \gamma)$, $b = \psi(\bar{\sigma})$.

Заметим, что, в силу условия $b < \sigma_1$, величина $\bar{\sigma} > \sigma$. Согласно теореме 7.5.3, найдется целая функция $L_0(\lambda)$ порядка ρ

типа $\bar{\sigma}$ (пусть ее нули $\mu_1, \mu_2, \dots$) такая, что

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v e^{\mu_v z}, \quad |z| < \infty, \quad (5.20)$$

где

$$|c_v| < C(\varepsilon) e^{-(\bar{\sigma}-\varepsilon)|\mu_v|^p} \quad (v \geq 1) \quad (5.21)$$

и ε , $0 < \varepsilon < \bar{\sigma}$, — любое. Положим

$$F_m(z) = \sum_{v=1}^m c_v e^{\mu_v z}. \quad (5.22)$$

Имеем

$$|F_m(z)| < C(\varepsilon) \sum_{v=1}^{\infty} e^{|\mu_v| r - a} |\mu_v|^p, \quad a = \bar{\sigma} - \varepsilon.$$

Отсюда

$$|F_m(z)| < C_1(\varepsilon) e^{(\beta+\varepsilon)|z|^{p_1}}, \quad \beta_1 = \psi(a).$$

При малом ε величина $\beta_1 < \sigma_1$. Поэтому (см. п. 2)

$$M_L(F) = \lim_{m \rightarrow \infty} M_L(F_m).$$

Но

$$M_L(F_m) = \sum_{v=1}^m c_v L(\mu_v) e^{\mu_v z}.$$

Следовательно,

$$M_L(F) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v L(\mu_v) e^{\mu_v z}.$$

Имеем, учитывая (5.21),

$$|c_v L(\mu_v)| < C_2(\varepsilon) e^{-(\bar{\sigma}-\varepsilon-\gamma)|\mu_v|^p} \quad (v \geq 1),$$

отсюда

$$|M_L(F_m)| < C_2(\varepsilon) \sum_{v=1}^{\infty} e^{|\mu_v| r - a_1} |\mu_v|^p, \quad a_1 = \bar{\sigma} - \gamma - \varepsilon,$$

и, значит,

$$|M_L(F_m)| < C_3(\varepsilon) e^{(\beta+\varepsilon)|z|^{p_1}}, \quad \beta_1 = \psi(a_1), \quad m \geq 1. \quad (5.23)$$

При малом ε величина β_2 сколь угодно близка к $\beta = \psi(\bar{\sigma} - \gamma)$. Все доказано.

Убедимся, что если на функцию $F(z)$ подействовать сначала оператором M_{L_0} , а затем оператором M_L , то в итоге

получим для результата ту же оценку, какую получили бы, действуя на $F(z)$ сразу оператором M_{L_1} . Пусть $L_1(\lambda) \in [\rho, \tau_1]$. Имеем

$$M_{L_1}(F) \in [\rho_1, \beta_1], \quad \beta_1 = \psi(\bar{\sigma} - \tau_1), \quad b = \psi(\bar{\sigma}).$$

Тогда

$$M_{L_1}(M_{L_1}(F)) \in [\rho_1, \beta_2], \quad \beta_2 = \psi(\bar{\sigma} - \tau_2), \quad \beta_1 = \psi(\bar{\sigma}).$$

Теперь заметим, что $L_1(\lambda) L_2(\lambda) \in [\rho_1, \tau_1 + \tau_2]$. Поэтому

$$M_{L_1 L_2}(F) \in [\rho_1, \beta_3], \quad \beta_3 = \psi(\bar{\sigma} - \tau_1 - \tau_2), \quad b = \psi(\bar{\sigma}).$$

Из того, что $\beta_1 = \psi(\bar{\sigma} - \tau_1)$, $\beta_1 = \psi(\bar{\sigma})$, выводим $\bar{\sigma} = \bar{\sigma} - \tau_1$. Поэтому

$$\beta_2 = \psi(\bar{\sigma} - \tau_2) = \psi(\bar{\sigma} - \tau_1 - \tau_2) = \beta_3,$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Дополнительные свойства интерполирующей функции

Установим следующее свойство интерполирующей функции.

Теорема 7.6.1. Пусть $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ — целые функции из классов $[\rho, \tau_1]$, $[\rho, \tau_2]$ соответственно, а $F(z) \in [\rho_1, b]$, $b < \sigma_1$, где

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 1, \quad (\sigma\rho)^{1/\rho}(\sigma_1\rho_1)^{1/\rho} = 1, \quad \sigma = \tau_1 + \tau_2.$$

Тогда

$$\omega_{L_1 L_2}(\mu, F) = L_1(\mu) \omega_{L_1}(\mu, F) + \omega_{L_1}(\mu, \Phi), \quad \Phi(z) = M_{L_1}(F). \quad (6.1)$$

Функция $L_1(\lambda) L_2(\lambda)$ принадлежит классу $[\rho, \sigma]$, поэтому левая часть в (6.1) и первое слагаемое в правой части имеют смысл. Убедимся, что второе слагаемое тоже имеет смысл. По теореме 7.5.6

$$\Phi(z) = M_{L_1}(F) \in [\rho_1, \beta], \quad \beta = \psi(\bar{\sigma} - \tau_2), \quad b = \psi(\bar{\sigma}), \quad \bar{\sigma} > \sigma.$$

Выражение $\omega_{L_1}(\Phi)$ будет иметь смысл, если

$$(\tau_1\rho)^{1/\rho}(\beta\rho_1)^{1/\rho} < 1. \quad (6.2)$$

Но $\beta = \psi(\bar{\sigma} - \tau_2)$ означает, что

$$[(\bar{\sigma} - \tau_2)\rho]^{1/\rho}(\beta\rho_1)^{1/\rho} = 1.$$

Так как $\bar{\sigma} - \tau_2 > \sigma - \tau_2 = \tau_1$, то отсюда и следует (6.2).

Итак, все члены в соотношении (6.1) имеют смысл. Проверим сначала его для $F(z) = e^{\lambda z}$. Имеем

$$\omega_{L_1}(\mu, F) = \frac{L_2(\mu) - L_2(\lambda)}{\mu - \lambda}, \quad \Phi(z) = L_2(\lambda) e^{\lambda z},$$

$$\omega_{L_1}(\mu, \Phi) = L_2(\lambda) \frac{L_1(\mu) - L_1(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

поэтому правая часть в (6.1) равна

$$L_1(\mu) \frac{L_2(\mu) - L_2(\lambda)}{\mu - \lambda} + L_2(\lambda) \frac{L_1(\mu) - L_1(\lambda)}{\mu - \lambda} = \frac{L_1(\mu) L_2(\mu) - L_1(\lambda) L_2(\lambda)}{\mu - \lambda}.$$

Этому же равна и левая часть. Таким образом, (6.1) верно для экспоненты $F(z) = e^{\lambda z}$, в силу этого, (6.1) будет верно и для конечной линейной комбинации экспонент.

Рассмотрим общий случай. Представим $F(z)$ в виде (5.20) и введем частные суммы ряда (5.22). Согласно (5.23), имеем

$$|\Phi_m(z)| = |M_{L_1}(F_m)| < C(\varepsilon) e^{(\beta + \varepsilon)|z|^{1/\rho}}, \quad \beta = \psi(\bar{\sigma} - \tau_2), \quad (6.3)$$

где $\varepsilon > 0$ — любое и где $C(\varepsilon)$ не зависит от m . Кроме того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_{L_1}(F_m) = M_{L_1}(F).$$

Требуется показать, что

$$M_{L_1}(\mu, \Phi_m) \rightarrow M_{L_1}(\mu, \Phi), \quad m \rightarrow \infty. \quad (6.4)$$

Пусть

$$\Phi_m(z) = \sum_{k=0}^m b_k^{(m)} z^k.$$

В силу (6.3),

$$|b_k^{(m)}| < C(\varepsilon) \frac{e^{\beta_1 \rho_1}}{r^k}, \quad \beta_1 = \beta + \varepsilon, \quad r > 0.$$

Положив здесь $r = \left(\frac{k}{\beta_1 \rho_1}\right)^{1/\rho_1}$, получим

$$|b_k^{(m)}| < a_k = C(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon \beta_1 \rho_1}{k}\right)^{k/\rho_1}, \quad k \geq 1. \quad (6.5)$$

Проверим условие (1.6), если роль $L(\lambda)$ будет играть функция $L_1(\lambda)$ ($\Phi(t)$ — обратная функция к $t = r^\rho$, так что $\Phi(t) = t^{1/\rho}$). Имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^\rho} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{a_k} \leq (\varepsilon \beta_1 \rho_1)^{1/\rho_1}.$$

Учтем, что

$$[(\bar{\sigma} - \tau_2) \rho]^{1/\rho} (\beta \rho_1)^{1/\rho} = 1, \quad \bar{\sigma} > \sigma, \quad \sigma - \tau_2 = \tau_1.$$

Поэтому при малом ε ($\beta_1 = \beta + \varepsilon$) будем иметь

$$(\tau_1 \rho)^{1/\rho} (\beta_1 \rho_1)^{1/\rho} < 1,$$

откуда

$$(e \beta_1 \rho_1)^{1/\rho} < e^{1/\rho} (\tau_1 \rho)^{1/\rho} = e (e \tau_1 \rho)^{1/\rho}.$$

Следовательно, выполняется условие (1.6) и потому $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in B(L_1)$.

Имея в виду (6.5), воспользуемся свойством 3) интерполирующей функции. Согласно этому свойству, и получаем (6.4). Было уже доказано, что

$$\omega_{L, L_1}(\mu, F_m) = L_1(\mu) \omega_{L_1}(\mu, F_m) + \omega_{L_1}(\mu, \Phi_m).$$

Каждый член здесь имеет предел при $m \rightarrow \infty$. В пределе получим искомое соотношение (6.1) (оно при более сильных условиях установлено в [61]).

Теперь установим асимптотическое поведение интерполирующей функции $\omega_L(\mu, F)$ при больших $|\mu|$.

Теорема 7.6.2. Пусть $L(\lambda)$ принадлежит классу $[p, \sigma]$, а функция $F(z)$ — классу $[p_1, b]$, $b < \sigma_1$, где $\sigma_1 = \psi(\sigma)$, т. е.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1, \quad (\sigma \rho)^{1/\rho} (\sigma_1 \rho_1)^{1/\rho_1} = 1.$$

Пусть, далее, $b = \psi(\sigma_0)$ (если $b = 0$, полагаем $\sigma_0 = \infty$). Возьмем произвольный угол φ_0 и выберем целое m так, чтобы выполнялись условия

$$m > 2\rho, \quad \cos \frac{\pi \rho}{m} > \frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

Имеет место представление

$$\omega_L(\mu, F) = A(\mu) L(\mu) - B(\mu),$$

где $A(\mu)$ и $B(\mu)$ — мероморфные функции, полюсы которых расположены на лучах l_k : $\arg \mu = \alpha_k = \varphi_0 + \frac{2\pi k}{m}$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Вне углов $|\arg(\mu - \alpha_k)| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — любое, при $\mu \rightarrow \infty$

$$A(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\mu^{k+1}}, \quad A_k = F^{(k)}(0) \quad (k \geq 0),$$

$$B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}, \quad B_k = M_L(F^{(k)})_0 \quad (k \geq 0),$$

где

$$M_L(F)_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k F^{(k)}(0), \quad L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k.$$

Доказательство. Возьмем число γ , $\sigma < \gamma < \sigma_0$, причем выберем γ столь близким к σ , чтобы выполнялось неравенство

$$\cos \frac{\pi \rho}{m} > \frac{\gamma}{\sigma_0} > \frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

По теореме 7.5.1 (роль σ_1 играет b , а роль σ , — σ_0) функцию $F(z)$ представим рядом

$$F(z) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v e^{\mu_v z}, \quad |z| < \infty, \quad (6.6)$$

в котором коэффициенты C_v удовлетворяют условию

$$|C_v| < C(\varepsilon) e^{-(\gamma - \varepsilon)|\mu_v|^\rho} \quad (6.7)$$

(здесь $\varepsilon > 0$ — любое), а показатели μ_v расположены на m лучах: $\arg \mu = \varphi_0 + \frac{2\pi k}{m}$ ($k = 1, \dots, m$). Показатели μ_v являются нулями функции $f(\mu e^{-i\varphi_0})$, где

$$f(\mu) = \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\mu}{a_k^m}\right).$$

Точки a_k расположены на положительной части вещественной оси, причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{a_k^m} = \tau \left(\tau \operatorname{ctg} \frac{\pi \rho}{m} = \gamma \right), \quad a_{k+1} - a_k > d a_k^{1-\rho}, \quad d > 0 \quad (k > k_0).$$

Положим

$$F_m(z) = \sum_{v=1}^m C_v e^{\mu_v z} \quad (m \geq 1).$$

На основании (6.7) имеем

$$|F_m(z)| < C(\varepsilon) \sum_{v=1}^m e^{r_v \gamma - \alpha v^\rho}, \quad r_v = |\mu_v|, \quad r = |z|, \quad \alpha = \gamma - \varepsilon.$$

Сумма справа много раз уже оценивалась. Имеем

$$\sum_{v=1}^m e^{r_v \gamma - \alpha v^\rho} < C_1(e_1) e^{(\beta + \varepsilon_1) r^\rho}, \quad \beta = \psi(\alpha), \quad \alpha = \gamma - \varepsilon, \quad \sigma < \gamma < \sigma_0.$$

Поскольку $\alpha < \sigma_0$, то $\beta > b$. Поскольку, далее, $\alpha > \sigma$ (при малом ε), то $\beta < \sigma_1$. При малом ε также будет $\beta + \varepsilon_1 < \sigma_1$. В результате получаем

$$|F_m(z)| < K e^{\delta \rho_1}, \quad r \geq 0, \quad b < \delta < \sigma_1 \quad (m \geq 1),$$

где K и δ не зависят от m . Положим

$$F_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(m)} z^k \quad (m \geq 1).$$

На основании неравенств Коши,

$$|b_k^{(m)}| \leq K \frac{e^{\delta \rho_1}}{r^k}, \quad r > 0.$$

Положив здесь $r = \left(\frac{k}{\delta \rho_1}\right)^{1/\rho_1}$, получим

$$|b_k^{(m)}| \leq \bar{a}_k = K \left(\frac{\delta \rho_1}{k}\right)^{k/\rho_1} \quad (k \geq 0; m \geq 1).$$

Числа $\bar{a}_k$ удовлетворяют условию (1.6). Действительно, в рассматриваемом случае $\varphi(k) = k^{1/\rho_1}$, и потому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\varphi(k)} \sqrt[k]{\bar{a}_k} = (\delta \rho_1)^{1/\rho_1} < (\sigma_1 \rho_1)^{1/\rho_1} = e(\sigma \rho)^{-1/\rho}.$$

Воспользуемся свойством 3) интерполирующей функции. Согласно этому свойству,

$$\omega_L(\mu, F) = \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_L(\mu, F_m).$$

Но

$$\omega_L(\mu, F_m) = \sum_{v=1}^m C_v \frac{L(\mu) - L(\mu_v)}{\mu - \mu_v}.$$

Поэтому

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \frac{L(\mu) - L(\mu_v)}{\mu - \mu_v}.$$

Положим

$$A(\mu) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{C_v}{\mu - \mu_v}, \quad B(\mu) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{C_v L(\mu_v)}{\mu - \mu_v}.$$

На основании оценки (6.7) ряд, определяющий $A(\mu)$, сходится всюду, кроме точек $\mu = \mu_v$ ($v \geq 1$). Убедимся, что и второй

ряд обладает этим свойством. Имеем

$$|L(\mu_v)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|\mu_v|^\rho}, \quad v > v_0(\varepsilon),$$

откуда, учитывая (6.7), получаем

$$|C_v L(\mu_v)| < C(\varepsilon) e^{(\sigma-\gamma+2\varepsilon)|\mu_v|^\rho}, \quad v > v_0. \quad (6.8)$$

При малом ε выражение в скобках $(\sigma - \gamma + 2\varepsilon)$ отрицательно, ибо $\gamma > \sigma$. Значит, ряд, определяющий $B(\mu)$, сходится всюду, кроме точек $\mu = \mu_v$.

Имеем

$$\omega_L(\mu, F) = A(\mu) L(\mu) - B(\mu).$$

Осталось установить асимптотику для мероморфных функций $A(\mu)$ и $B(\mu)$.

Вне углов $|\arg(\mu - \alpha_k)| < \varepsilon$ ($k = 1, \dots, m$)

$$|\mu - \mu_v| > \alpha |\mu|, \quad \alpha > 0. \quad (6.9)$$

Имеем, далее,

$$\frac{1}{\mu - \mu_v} = \sum_{k=0}^n \frac{\mu_v^k}{\mu^{k+1}} + \left(\frac{\mu_v}{\mu}\right)^{n+1} \frac{1}{\mu - \mu_v}.$$

На основании этого

$$A(\mu) = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{\mu^{k+1}} + A_n(\mu),$$

где

$$A_k = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \mu_v^k, \quad A_n(\mu) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{v=1}^{\infty} C_v \frac{\mu_v^{n+1}}{\mu - \mu_v}.$$

Аналогично получаем

$$B(\mu) = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{\mu^{k+1}} + B_n(\mu),$$

где

$$B_k = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \mu_v^k L(\mu_v), \quad B_n(\mu) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{v=1}^{\infty} C_v \mu_v^{n+1} \frac{L(\mu_v)}{\mu - \mu_v}.$$

На основании (6.7), (6.8) и (6.9) при больших $|\mu|$

$$|A_n(\mu)| < \frac{P_n}{|\mu|^{n+2}}, \quad |B_n(\mu)| < \frac{P'_n}{|\mu|^{n+2}},$$

где P_n и P'_n — постоянные. Следовательно,

$$A(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\mu^{k+1}}, \quad B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}.$$

Из равенства (6.6) путем дифференцирования находим

$$F^{(k)}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \mu_{\nu}^k e^{\mu_{\nu} z},$$

откуда

$$A_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \mu_{\nu}^k = F^{(k)}(0) \quad (k \geq 0).$$

Чтобы найти нужное выражение для B_k , рассмотрим $M_L(F^{(k)})_0$. Имеем

$$\begin{aligned} M_L(F^{(k)})_0 &= \sum_{s=0}^{\infty} c_s F^{(k+s)}(0) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \mu_{\nu}^{k+s} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \mu_{\nu}^k \sum_{s=0}^{\infty} c_s \mu_{\nu}^s. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Обоснуем законность перестановки порядков суммирования. Функция

$$L_1(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} |c_s| \lambda^s$$

принадлежит, как и функция $L(\lambda)$, классу $[p, \sigma]$. Вследствие этого

$$\sum_{s=0}^{\infty} |c_s \mu_{\nu}^s| < A(e) e^{(\sigma+\varepsilon)|\mu_{\nu}|^p}, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда, принимая во внимание оценку (6.7), в которой $\gamma > \sigma$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |C_{\nu}| |\mu_{\nu}|^k \sum_{s=0}^{\infty} |c_s \mu_{\nu}^s| < \infty.$$

Этого достаточно для изменения порядков суммирования. Правая часть в (6.10) равна

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \mu_{\nu}^k L(\mu_{\nu}) = B_k,$$

что и надо было показать. Теорема доказана.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ

Было доказано, что если D — конечная открытая выпуклая область, то любую функцию, аналитическую в области D , можно представить в D рядом Дирихле. Было также доказано, что любую целую функцию можно представить во всей плоскости рядом Дирихле. Остался открытым вопрос о возможности представления рядами Дирихле функций, аналитических в бесконечных выпуклых областях, отличных от всей плоскости. Простейшими примерами бесконечных выпуклых областей являются полуплоскость, угол, полоса.

Здесь будет рассмотрен случай полуплоскости (он исследован в работе [28]) и случай бесконечной выпуклой области D , обладающей свойством: начиная с некоторого места, граница области уходит в бесконечность (в том и другом направлении) по прямолинейному лучу.

§ 1. Представление аналитических функций в полуплоскости рядами Дирихле

Для удобства будем всюду предполагать, что рассматриваемая полуплоскость — левая полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$.

1. Конструкция ряда Дирихле для функции, непрерывной в замкнутой полуплоскости. Пусть D — левая полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$. Речь пойдет о конструкции рядов Дирихле для функций $f(z)$, которые аналитичны в D , непрерывны в $\bar{D}$ и при больших $|z|$ в $\bar{D}$

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{\mu}}\right), \quad \mu > 1, \quad z \in \bar{D}. \quad (1.1)$$

Показателями λ_k ($k \geq 1$) рядов Дирихле будут являться нули целой функции $L(\lambda)$. Предполагаем, что все нули $L(\lambda)$ — простые и что выполняется условие

$$L(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right), \quad \alpha > 1, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (1.2)$$

Положим

$$\Psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (k \geq 1).$$

На $(0, +\infty)$ при фиксированном k

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} = O\left(\frac{1}{\lambda^{a+1}}\right).$$

поэтому функция $\psi_k(t)$ регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$, ограничена в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} t \geq 0$: $|\psi_k(t)| \leq M_k$ и непрерывна здесь (исключая, возможно, бесконечно удаленную точку).

Функции $f(z)$, аналитической в D , непрерывной в $\bar{D}$ и удовлетворяющей условию (1.1), сопоставим ряд Дирихле

$$f(z) \sim \sum_{v=1}^{\infty} A_v e^{\lambda_v z}, \quad A_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{\infty-i} f(t) \psi_v(t) dt \quad (v \geq 1). \quad (1.3)$$

Найдем формулу для разности между $f(z)$ и частной суммой ряда. Пусть Γ — замкнутый контур, на котором $L(\lambda) \neq 0$, и D_Γ — область, ограниченная контуром Γ . Рассмотрим функцию

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma) = L(\lambda) \sum_{\lambda_k \in D_\Gamma} \frac{e^{\lambda_k z}}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} - e^{\lambda z}, \quad z \in D.$$

Это — целая функция относительно λ , причем на $(0, +\infty)$ она ведет себя, как $O\left(\frac{1}{\lambda^{a+1}}\right)$. Положим

$$\gamma(z, t, \Gamma) = \int_0^{+\infty} \Phi(z, \lambda, \Gamma) e^{-\lambda t} d\lambda, \quad \operatorname{Re} t \geq 0. \quad (1.4)$$

Имеем

$$\gamma(z, t, \Gamma) = \sum_{\lambda_k \in D_\Gamma} e^{\lambda_k z} \psi_k(t) - \frac{1}{t-z}, \quad \operatorname{Re} t \geq 0, \quad z \in D.$$

Функция $\gamma(z, t, \Gamma)$, как функция t , регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$, непрерывна и ограничена в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} t \geq 0$ (исключая, возможно, бесконечно удаленную точку). Получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \gamma(z, t, \Gamma) f(t) dt = \sum_{\lambda_k \in D_\Gamma} A_k e^{\lambda_k z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \frac{f(t) dt}{t-z}.$$

Интеграл из правой части равенства, в силу условия (1.1), равен $f(z)$. Следовательно,

$$f(z) - \sum_{\lambda_k \in D_\Gamma} A_k e^{\lambda_k z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \gamma(z, t, \Gamma) f(t) dt, \quad z \in D, \quad (1.5)$$

Это искомая формула. Заметим, что функция $\Phi(z, \lambda, \Gamma)$, через которую по формуле (1.4) выражается функция $\gamma(z, t, \Gamma)$, имеет следующее очевидное интегральное представление:

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad \lambda \in D_\Gamma,$$

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} - e^{\lambda z}, \quad \lambda \notin \bar{D}_\Gamma.$$

На основе формулы (1.5) при дополнительных условиях на функцию $L(\lambda)$ будет доказана разложимость $f(z)$ в ряд Дирихле (1.3). Эти дополнительные условия заключаются в следующем. Предположим, что имеются замкнутые кривые Γ_k ($k \geq 1$) с такими свойствами:

1) контур Γ_k содержит внутри себя точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; длина контура Γ_k есть $O\left(\max_{z \in \Gamma_k} |z|\right)$,

$$\max_{z \in \Gamma_k} |z| = O\left(\min_{z \in \Gamma_k} |z|\right), \quad \min_{z \in \Gamma_k} |z| \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty;$$

2) каково бы ни было $\gamma > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\substack{\lambda \in \Gamma_k \\ |\arg \lambda| \leq \gamma}} \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|} \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\substack{\lambda \in \Gamma_k \\ \gamma < |\arg \lambda| \leq \pi}} \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|} = +\infty;$$

3) имеются положительные числа h и q такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\lambda \in G_k} \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|} \geq 0,$$

где G_k — круг радиуса hr_k^{-q} с центром в точке r_k (точке пересечения Γ_k с положительной полуосью $\lambda > 0$); точки контура Γ_k , лежащие вне круга G_k , удалены от точек $\lambda > 0$ на расстояния, не меньшие $h_1 r_k^{-q}$, $0 < h_1 \leq h$.

При этих условиях имеет место

Теорема 8.1.1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и удовлетворяет условию (1.1). Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями λ_k ($k \geq 1$), которая удовлетворяет условию (1.2) и для которой имеются кривые Γ_k с указанными выше свойствами. Тогда в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z},$$

где A_k определены по формулам (1.3).

Доказательство. Согласно формуле (1.5), имеем

$$f(z) - \sum_{\lambda \in D_{\Gamma_k}} A_{\lambda} e^{\lambda z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{\infty-i} \gamma(z, t, \Gamma_k) f(t) dt, \quad z \in D. \quad (1.6)$$

Будем оценивать функцию

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_k) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad \lambda \in D_{\Gamma_k},$$

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_k) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} - e^{\lambda z}, \quad \lambda \notin \bar{D}_{\Gamma_k},$$

для λ , лежащих на положительной части вещественной оси. Имеем

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_k) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k'} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)}, \quad 0 \leq \lambda \leq r_k,$$

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_k) = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k'} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\lambda - \mu) L(\mu)} - e^{\lambda z}, \quad r_k < \lambda < \infty,$$

где Γ_k' и Γ_k'' — следующие контуры; вне круга G_k они совпадают с Γ_k , внутри круга G_k контур Γ_k' идет по правой части границы G_k , Γ_k'' — по левой части границы G_k (указанные части — это части, на которые Γ_k разбивает границу G_k). Расстояние от точки λ , $0 \leq \lambda \leq r_k$, до Γ_k' и от точек λ , $r_k < \lambda < \infty$, до Γ_k'' не меньше $h_1 r_k^{-q}$. Поэтому

$$|\Phi(z, \lambda, \Gamma_k)| \leq r_k^q |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi h_1} \int_{\Gamma_k'} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu|, \quad 0 \leq \lambda \leq r_k, \quad (1.7)$$

$$|\Phi(z, \lambda, \Gamma_k)| \leq r_k^q |L(\lambda)| \frac{1}{2\pi h_1} \int_{\Gamma_k''} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| + |e^{\lambda z}|, \quad r_k < \lambda < \infty. \quad (1.8)$$

Оценим интеграл по контуру Γ_k' . Пусть C_k' — часть контура Γ_k' , лежащая в угле $|\arg \mu| \leq \gamma$, C_k'' — оставшаяся часть контура Γ_k' . Предположим, что z находится в области

$$\operatorname{Re} z \leq -\beta < 0, \quad |z| \leq R. \quad (1.9)$$

Тогда

$$|e^{\mu z}| \leq e^{R|\mu|}. \quad (1.10)$$

Для $\mu \in C_k'$, положив $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, получаем $\mu_1 \geq |\mu| \cos \gamma$, $|\mu_2| \leq |\mu| \sin \gamma$. В силу этого, если $z = x + iy$, то

$$|e^{\mu z}| = e^{x\mu_1 - y\mu_2} \leq e^{-(\beta \cos \gamma - R \sin \gamma)|\mu|}.$$

Выберем γ столь малым, чтобы выполнялось условие $\beta \cos \gamma - R \sin \gamma > \beta/2$. Следовательно,

$$|e^{\mu z}| < e^{-\frac{\beta}{2}|\mu|}, \quad \mu \in C_k'. \quad (1.11)$$

Согласно условию,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\mu \in C_k'} \frac{\ln |L(\mu)|}{|\mu|} \geq 0.$$

Поэтому, на основании (1.11), справедлива оценка

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < e^{-\frac{\beta}{3}|\mu|}, \quad \mu \in C_k', \quad k > k_1.$$

Из условия 1), которому удовлетворяет контур Γ_k , вытекает, что $\min |\mu| \geq Ar_k$, $A > 0$, и длина контура Γ_k есть $O(r_k)$.

Значит,

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < e^{-\beta_1 r_k}, \quad \beta_1 > 0, \quad \mu \in C_k', \quad k > k_1.$$

На контуре C_k'' , в силу (1.10) и условия 2), при больших k

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < e^{-\beta_2 |\mu|}.$$

Следовательно, на всем контуре Γ_k'

$$\left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| < e^{-\beta_0 r_k}, \quad \beta_0 > 0, \quad k > k_0, \quad \mu \in \Gamma_k'.$$

Отсюда

$$\int_{\Gamma_k'} \left| \frac{e^{\mu z}}{L(\mu)} \right| |d\mu| = O(r_k e^{-\beta_0 r_k}). \quad (1.12)$$

Такую же оценку имеет аналогичный интеграл, взятый по контуру Γ_k'' . Оценим слагаемое $|e^{\lambda z}|$ из неравенства (1.8), когда

$\lambda > r_k$. Имеем

$$|e^{\lambda z}| \leq \frac{1}{1+\lambda^a} (1+\lambda^a) e^{-\lambda \delta} < \frac{1}{1+\lambda^a} e^{-\frac{\delta}{2} r_k}, \quad \lambda > r_k, k > k_2. \quad (1.13)$$

Заметим еще, что, в силу (1.2),

$$|L(\lambda)| < \frac{B}{1+\lambda^a}, \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

На основании этого неравенства и оценок (1.12) и (1.13) из соотношений (1.7) и (1.8) получаем

$$|\Phi(z, \lambda, \Gamma_k)| \leq \frac{C}{1+\lambda^a} e^{-\delta r_k}, \quad \delta > 0, \quad 0 \leq \lambda < \infty, \quad k \geq 1. \quad (1.14)$$

Здесь z лежит в области (1.9), постоянные C и δ зависят от этой области.

Имеем

$$\gamma(z, t, \Gamma_k) = \int_0^{+\infty} \Phi(z, \lambda, \Gamma_k) e^{-\lambda t} d\lambda, \quad \operatorname{Re} t \geq 0,$$

откуда, в силу (1.14), находим

$$|\gamma(z, t, \Gamma_k)| < C_1 e^{-\delta r_k}, \quad \operatorname{Re} t \geq 0.$$

Теперь обратимся к формуле (1.6). Из нее, на основании последней оценки, получаем для z из области (1.9)

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z} \right| < C_2 e^{-\delta r_k}, \quad k \geq 1.$$

Следовательно,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad (1.15)$$

причем в области (1.9) ряд сходится равномерно. Теорема доказана.

Пример функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей всем необходимым условиям, будет построен далее.

2. Пример целой функции. Возьмем функцию Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\rho^{-1})},$$

где будем считать $1 < \rho < 3/2$. Для этой функции (см. [75], а также [4], стр. 133) установлена следующая асимптотика при $z \rightarrow \infty$:

$$E_\rho(z) = \begin{cases} \rho e^z + o(1), & |\arg z| \leq \alpha, \\ o(1), & \alpha \leq |\arg z| \leq \pi, \end{cases}$$

где α — любое из промежутка $\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right)$ и $z^\rho = |z|^\rho e^{i\rho\varphi}$, $z = |z|e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \pi$.

Положим

$$A(z) = E_\rho(ze^{-i\psi}) + E_\rho(ze^{i\psi}) + E_\rho(-z), \quad \psi = \frac{\pi}{2\rho}. \quad (1.16)$$

Утверждаем, что если $A(z)$ поделить на некоторый многочлен, то получим нужный пример функции $L(z)$. Изучим подробнее функцию $A(z)$.

Первое слагаемое в правой части (1.16), в силу асимптотики, растет в угле E_1 : $0 < \arg z < \pi/\rho$, второе — в угле E_2 : $-\pi/\rho < \arg z < 0$, третье — в угле E_0 : $|\arg z - \pi| < \pi/2\rho$. Углы E_1 и E_2 симметричны относительно вещественной оси. При выбранном ρ ($1 < \rho < 3/2$) углы E_1 и E_0 имеют общую часть G_1 , углы E_2 и E_0 имеют общую часть G_2 . Биссектриса угла G_1 есть l_1 : $\arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4\rho} = \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}$, биссектриса угла G_2

есть l_2 : $\arg z = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}\right)$. Убедимся, что вне трех малых углов каждый раствора 2ψ с биссектрисами по l_1 , l_2 , и по положительной части вещественной оси

$$|A(z)| > C e^{a|z|^\rho}, \quad a = a(\psi) > 0, \quad C > 0. \quad (1.17)$$

Проверим это неравенство в угле K_1 : $\psi \leq \arg z \leq \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) - \psi$ (в двух других углах оно проверяется аналогично). В угле K_1 функция $E_\rho(ze^{i\psi})$ стремится к нулю,

$$|E_\rho(ze^{-i\psi})| = \rho \exp\{r^\rho \cos \rho(\varphi - \psi)\} + o(1), \quad z = re^{i\varphi}.$$

Так как

$$-\frac{\pi}{2} + \psi \leq \rho(\varphi - \psi) \leq \frac{\pi}{2}\rho - \frac{\pi}{4} - \psi\rho < \frac{\pi}{2} - \psi\rho \quad \left(\rho < \frac{3}{2}\right),$$

то

$$|E_\rho(ze^{-i\psi})| > \rho \exp\{r^\rho \sin \psi\rho\} - o(1), \quad z \in K_1.$$

Функция $E_p(-z)$ в угле $\gamma \leq \varphi \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho}$ ограничена. Значит,

$$|A(z)| > \frac{\rho}{2} \exp\{r^\rho \sin \gamma\}, \quad \gamma \leq \varphi \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Осталось проверить неравенство (1.17) в угле $K'_1: \pi - \frac{\pi}{2\rho} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4\rho} - \gamma$. Для таких φ имеем

$$\pi(\rho - 1) \leq \rho(\varphi - \psi) \leq \frac{\pi}{2}\rho - \frac{\pi}{4} - \gamma\rho$$

(левая и правая части, поскольку $1 < \rho < 3/2$, меньше $\pi/2$). Отсюда

$$|E_p(ze^{-i\psi})| > \rho \exp\left\{r^\rho \cos\left(\frac{\pi}{2}\rho - \frac{\pi}{4} - \gamma\rho\right)\right\} - o(1), \quad z \in K'_1. \quad (1.18)$$

В угле K'_1

$$|E_p(-z)| = \rho \exp\{r^\rho \cos \rho(\pi - \varphi)\} + o(1),$$

при этом $\frac{\pi}{2}\rho - \frac{\pi}{4} + \gamma\rho \leq \rho(\pi - \varphi) \leq \frac{\pi}{2}\rho$. Поэтому

$$|E_p(-z)| < \rho \exp\left\{r^\rho \cos\left(\frac{\pi}{2}\rho - \frac{\pi}{4} + \gamma\rho\right)\right\} + o(1).$$

Отсюда и из (1.18) получаем

$$|A(z)| > \frac{\rho}{2} \exp\left\{r^\rho \cos\left(\frac{\pi}{2}\rho - \frac{\pi}{4} - \gamma\rho\right)\right\} > \frac{\rho}{2} \exp\{r^\rho \sin \gamma\} \\ \text{(ибо } \frac{\pi}{2}\rho - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\text{)}.$$

Итак, неравенство (1.17) имеет место во всем угле K_1 (при $\alpha = \sin \gamma\rho$).

Изучим теперь поведение $A(z)$ в угле $N_0: |\arg z| < \gamma$. В этом угле функция $E_p(-z)$ стремится к нулю. Поэтому

$$A(z) = \rho \{\exp(ze^{-i\psi})^\rho + \exp(ze^{i\psi})^\rho\} + o(1), \quad z \in N_0,$$

или

$$A(z) = 2\rho \cos(z^\rho) + o(1), \quad z \in N_0 \quad (1.19)$$

(ибо $\rho\psi = \pi/2$). Положим $q_k = \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]^{1/\rho}$ ($k \geq 1$). В этих точках $\cos z^\rho$ обращается в нуль. Пусть δ — малое положительное число. Обозначим Q_k ($k \geq 1$) круг с центром в точке q_k

радиуса $\rho_k = \frac{\delta}{\rho} q_k^{1-\rho}$ ($1 - \rho < 0$). Когда z пробегает границу круга Q_k , в это время точка $w = z^\rho$ пробегает замкнутую кривую C_k , охватывающую точку $q_k^\rho = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Для точек w этой кривой имеем

$$w - q_k^\rho = (q_k + h)^\rho - q_k^\rho, \quad |h| = \rho_k,$$

откуда при больших k

$$|w - q_k^\rho| \approx \rho |h| q_k^{\rho-1} = \delta.$$

Из представления

$$|\cos w| = \sqrt{\cos^2 u + \sinh^2 v}, \quad w = u + iv,$$

видно, что для точек w , лежащих на и вне кривых C_k (точки C_k удалены от $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ на расстояние $\approx \delta$), величина $|\cos w|$ ограничена снизу положительной постоянной $B(\delta)$. Значит, когда z лежит вне кругов Q_k и в угле N_0 , имеем

$$|\cos z^\rho| > B(\delta) > 0. \quad (1.20)$$

Заметим, что центры q_k кругов Q_k удовлетворяют условию $q_{k+1} - q_k \approx \frac{\pi}{\rho q_k^{1-\rho}}$. Поэтому при малом δ круги Q_k не пересекаются.

Из представления (1.19) и оценки (1.20) усматриваем, что в угле N_0 при $|z| > \rho_0$ функция $A(z)$ не обращается в нуль вне кругов Q_k и имеет там оценку снизу:

$$|A(z)| > \rho B(\delta), \quad z \in N_0, \quad |z| > \rho_0, \quad z \notin Q_k. \quad (1.21)$$

В частности, оценка (1.21) выполняется на дугах

$$|z| = q_k + \frac{\pi}{2\rho q_k^{\rho-1}} = r_k^0, \quad |\arg z| < \gamma, \quad (1.22)$$

и в кружках

$$|z - r_k^0| \leq \left(\frac{\pi}{2} - 2\delta\right) \frac{1}{\rho(r_k^0)^{\rho-1}}. \quad (1.23)$$

В центре круга Q_k функция $\cos z^\rho$ имеет простой нуль. Из (1.19), учитывая, что на границе Q_k имеет место оценка (1.20), выводим по теореме Руше, что функция $A(z)$ имеет в круге Q_k при больших k простой нуль. Этот нуль, поскольку $A(z)$ на вещественной оси, имеет вещественные значения, является

вещественным. Обозначим его μ_k . Имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\mu_k^0} = \frac{1}{\pi}. \quad (1.24)$$

Итак, о поведении $A(z)$ в угле N_0 можно утверждать следующее: вне кругов Q_k имеет место оценка (1.21), в частности, она выполняется на дугах (1.22) и в кружках (1.23); функция $A(z)$ в N_0 , начиная с некоторого места, имеет простые вещественные нули, удовлетворяющие условию (1.24).

Перейдем к изучению поведения $A(z)$ в угле N_1 раствора 2ψ , с вершиной в начале координат, биссектрисой которого является луч l_1 . В угле N_2 , симметричном N_1 относительно вещественной оси, поведение $A(z)$ будет таким же.

В угле N_1 функция $E_\rho(z e^{i\psi})$ стремится к нулю. Поэтому

$$A(z) = \rho \{ \exp(z e^{-i\psi})^\rho + \exp(z e^{-i\pi})^\rho \} + o(1), \quad z \in N_1.$$

Для z из N_1 аргумент z изменяется в пределах

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2} - \gamma \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2} + \gamma, \quad \psi = \frac{\pi}{2\rho}.$$

Положим $z = t e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2})}$. Углу N_1 в плоскости z соответствует угол $|\arg t| < \gamma$ в плоскости t . Имеем

$$\begin{aligned} A(z) &= \rho \left\{ \exp \left(t e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2})} \right)^\rho + \exp \left(t e^{-i(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2})} \right)^\rho \right\} + o(1) = \\ &= \rho \exp \left[t^\rho \cos \rho \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) \right] \left\{ \exp \left[i t^\rho \sin \rho \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \exp \left[-i t^\rho \sin \rho \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right) \right] \right\} + o(1) \end{aligned}$$

или

$$A(z) = 2\rho e^{i\alpha\rho} \cos \beta t^\rho + o(1), \quad |\arg t| \leq \gamma,$$

где $\alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} \rho - \frac{\pi}{4} \right) > 0$, $\beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} \rho - \frac{\pi}{4} \right) > 0$. Положим еще $\eta = t \beta^{1/\rho}$. Тогда

$$A(z) = 2\rho e^{i\alpha_1\rho} \cos \eta^\rho + o(1), \quad \alpha_1 > 0, \quad |\arg \eta| \leq \gamma. \quad (1.25)$$

Отметим, что

$$|e^{i\alpha_1\rho}| \geq e^{i\alpha_1\rho} \cos \gamma\rho, \quad |\arg \eta| < \gamma.$$

Обозначим Q'_k круг с центром в точке $q'_k = \beta^{-1/\rho} q_k e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2})}$ ($k \geq 1$) радиуса $\rho'_k = \beta^{-1/\rho} \rho_k$, где q_k и ρ_k были введены выше. Когда z пробегает круг Q'_k , η пробегает круг Q_k . Когда z лежит вне Q'_k , η лежит вне Q_k , и следовательно, учитывая оценку (1.20), получаем $|\cos \eta^\rho| > B(\delta) > 0$. Поэтому, на основании (1.25), заключаем, что

$$|A(z)| > \rho B(\delta) e^{b|z|^\rho}, \quad z \in N_1, \quad |z| > \rho_0, \quad z \notin Q'_k, \quad (1.26)$$

где $b = \beta \alpha_1 > 0$. При малом δ круги Q'_k не пересекаются, в силу чего можно провести между этими кругами дуги окружностей

$$|z| = r'_k, \quad k \geq 1, \quad z \in N_1. \quad (1.27)$$

В круге Q'_k первое слагаемое из (1.25) имеет простой нуль q'_k . По теореме Руше функция $A(z)$, согласно (1.25) и (1.26), имеет в круге Q'_k при больших k единственный нуль. Обозначим его μ'_k . Очевидно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{(\mu'_k)^\rho} = \frac{\beta}{\pi}.$$

Для дальнейшего полезно будет оценить $A'(\mu'_k)$. Имеем

$$\frac{1}{|A'(\mu'_k)|} \leq \max_{|z - \mu'_k| = 2\rho'_k} \left| \frac{z - \mu'_k}{A(z)} \right|.$$

откуда, в силу (1.26) (окружность $|z - \mu'_k| = 2\rho'_k$ лежит вне кружков Q'_k),

$$\frac{1}{|A'(\mu'_k)|} < e^{-b_1} |\mu'_k|^\rho, \quad 0 < b_1 < b, \quad k > k_0. \quad (1.28)$$

Таким образом, получили следующее: в угле N_1 имеет место оценка (1.26), в этом угле, начиная с некоторого места, $A(z)$ имеет только простые нули μ'_k , между этими нулями можно провести дуги (1.27), на которых выполняется условие (1.26). В угле N_2 , симметричном N_1 относительно вещественной оси, как уже отмечалось, — та же картина.

В итоге исследования видим, что у функции $A(z)$ вне некоторого круга все нули — простые. Положим

$$L(z) = \frac{Q(z) A(z)}{P(z)},$$

$$P(z) = z^m + \dots + \alpha_m, \quad m \geq 2, \quad Q(z) = z^{m-2} + \dots + \beta_{m-2}.$$

Подберем многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ так, чтобы функция $L(z)$ была целой без кратных нулей. Вещественные нули ее обозначим по-прежнему μ_k , комплексные — μ'_k (μ'_k лежат в верхней полуплоскости) и μ''_k (μ''_k лежат в нижней полуплоскости).

Функция $L(z)$ — искомая. Убедимся в этом. Из (1.19) видно, что на вещественной оси

$$L(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x > 0.$$

Теперь надо убедиться в том, что имеются нужные контуры Γ_k . Объединение μ_k , μ'_k и μ''_k обозначим $\{\lambda_k\}$, причем $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ расположены в порядке неубывания модулей. Пусть среди точек $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ имеется p точек из $\{\mu_k\}$, q точек из $\{\mu'_k\}$ и s точек из $\{\mu''_k\}$, $p + q + s = k$. Проведем дугу S^0_p : $|z| = r^0_p$, $|\arg z| \leq \pi/2$, где r^0_p взято из (1.22). Очевидно, $\mu_p < r^0_p < \mu_{p+1}$. Проведем, далее, дугу S'_q : $|z| = r'_q$, $\pi/2 \leq \arg z \leq \pi$, где r'_q взято из (1.27); эта дуга разделяет нули μ'_q и μ'_{q+1} . Проведем, наконец, дугу S''_s : $|z| = r''_s$, $-\pi \leq \arg z \leq -\pi/2$, она разделяет нули μ''_s и μ''_{s+1} . С помощью отрезка отрицательной части вещественной оси и двух отрезков мнимой оси соединим указанные дуги, получим замкнутую кривую. Ее и возьмем в качестве Γ_k . Сразу видно, что она удовлетворяет условию 1). В силу (1.17) и (1.26),

$$|L(z)| > \exp\{c|z|^p\}, \quad c > 0, \quad z \in \Gamma_k, \quad \gamma \leq |\arg z| \leq \pi.$$

В силу (1.21),

$$|L(z)| > \frac{C}{|z|^2}, \quad z \in \Gamma_k, \quad |\arg z| \leq \gamma.$$

Значит, выполнено условие 2). Контур Γ_k пересекает положительную часть вещественной оси в точке r^0_p . Так как в кружках (1.23) выполняется оценка (1.21), то в кружках

$$|z - r^0_p| \leq \frac{\frac{\pi}{2} - 2\delta}{\rho(r^0_p)^{\rho-1}}$$

имеем

$$|L(z)| > \frac{C}{|z|^2}.$$

Следовательно, удовлетворяется и условие 3). Контуры Γ_k обладают всеми необходимыми свойствами. Таким образом, пример функции $L(z)$ построен.

В условиях этого примера

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} A_v^0 e^{\mu_v z} + \sum_{v=1}^{\infty} A'_v e^{\mu'_v z} + \sum_{v=1}^{\infty} A''_v e^{\mu''_v z}, \quad (1.29)$$

где, например,

$$A'_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} f(t) \Psi'_v(t) dt, \quad \Psi'_v(t) = \frac{1}{L'(\mu'_v)} \int_0^{+\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \mu'_v} e^{-\lambda t} d\lambda$$

(другие коэффициенты определяются по аналогичным формулам).

Заметим, что последние два ряда определяют целую функцию. Убедимся в этом. Для вещественных λ

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \mu'_v} \right| < |L(\lambda)| = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \geq 0.$$

Поэтому $|\Psi'_v(t)| < \frac{C}{|L'(\mu'_v)|}$, где C не зависит от v , в силу чего

$$A'_v = O\left(\frac{1}{L'(\mu'_v)}\right).$$

Отсюда, на основании (1.28), получаем

$$A'_v = O(\exp\{-b_2 |\mu'_v|^p\}), \quad b_2 > 0.$$

Так как $\rho > 1$, то, следовательно, второй ряд в (1.29) сходится во всей плоскости. Так же обстоит дело с третьим рядом.

Получаем, что функция $f(z)$ представляется в левой полуплоскости рядом Дирихле с положительными показателями μ_v , удовлетворяющими условию (1.24), плюс целая функция.

Оценим коэффициенты A''_v . Имеем

$$A''_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} f(t) \Psi''_k(t) dt, \quad \Psi''_k(t) = \frac{1}{L'(\mu''_k)} \int_0^{+\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \mu''_k} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (k \geq 1).$$

Из (1.19) выводим, что

$$|(1+z^2)L(z)| < C, \quad |z - \lambda| \leq \frac{1}{\lambda^{\rho-1}}, \quad \lambda > 0,$$

На основании этого для положительных λ

$$\left| \frac{(1+\lambda^2)L(\lambda)}{\lambda-\mu_k} \right| \leq \mu_k^{\rho-1} |(1+\lambda^2)L(\lambda)| < C\mu_k^{\rho-1}, \quad |\lambda-\mu_k| \geq \frac{1}{\mu_k^{\rho-1}},$$

$$\left| \frac{(1+\lambda^2)L(\lambda)}{\lambda-\mu_k} \right| \leq \max_{|z-\mu_k|=\frac{1}{\mu_k^{\rho-1}}} \left| \frac{(1+z^2)L(z)}{z-\mu_k} \right| < C\mu_k^{\rho-1},$$

$$|\lambda-\mu_k| < \frac{1}{\mu_k^{\rho-1}},$$

откуда

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda-\mu_k} \right| < \frac{C\mu_k^{\rho-1}}{1+\lambda^2}, \quad \lambda > 0, \quad k \geq 1.$$

В силу этой оценки,

$$\psi_k^0(t) = O\left(\frac{\mu_k^{\rho-1}}{L'(\mu_k)}\right), \quad \operatorname{Re} t \geq 0,$$

и значит,

$$A_k^0 = O\left(\frac{\mu_k^{\rho-1}}{L'(\mu_k)}\right).$$

Для оценки $L'(\mu_k)$ запишем

$$\left| \frac{1}{L'(\mu_k)} \right| \leq \max_{|z-\mu_k|=2\rho_k} \left| \frac{z-\mu_k}{L(z)} \right|, \quad \rho_k = \frac{\delta}{\rho q^{\rho-1}}.$$

Точка μ_k лежит в круге Q_k радиуса ρ_k , окружность $|z-\mu_k|=2\rho_k$ лежит вне круга Q_k , и на ней, следовательно, выполняется условие (1.21). Поэтому

$$\left| \frac{1}{L'(\mu_k)} \right| = O\left(\frac{\mu_k^{\frac{1}{2}}}{\mu_k^{\rho-1}}\right).$$

на основании чего

$$A_k^0 = O(\mu_k^2). \quad (1.30)$$

Оценка (1.30) дает возможность доказать следующее утверждение.

Теорема 8.1.2. Пусть функция $f(z)$ регулярна в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, непрерывна вместе со своими первыми четырьмя производными в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$, причем

$$f^{(k)}(z) = O\left(\frac{1}{|z|^\mu}\right), \quad \mu > 1, \quad \operatorname{Re} z \leq 0, \quad 0 \leq k \leq 4.$$

Тогда в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\mu_k z} + \text{целая функция},$$

$$\mu_k > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\mu_k} = \tau < \infty.$$

Для доказательства запишем, согласно теореме 8.1.1,

$$f^{IV}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^0 e^{\mu_k z} + \varphi(z), \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad (1.31)$$

где $\varphi(z)$ — целая функция. Коэффициенты A_k^0 имеют оценку (1.30). Функция $\varphi(z)$ как разность $f^{IV}(z)$ и суммы ряда Дирихле ведет себя в угле $|\arg z - \pi| < \psi_0 < \pi/2$, как $O\left(\frac{1}{z^{\mu_0}}\right)$. Интегрируя (1.31) вдоль пути, который идет из $-\infty$ в точку z (сначала путь идет по вещественной оси), получим

$$f^{III}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^0}{\mu_k} e^{\mu_k z} + \varphi_1(z), \quad \varphi_1(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(t) dt. \quad (1.32)$$

Функция $\varphi_1(z)$ — целая и как разность $f^{III}(z)$ и суммы ряда Дирихле ведет себя в угле $|\arg z - \pi| < \psi_0$, как $O\left(\frac{1}{z^{\mu_0}}\right)$. Интегрируем (1.32) вдоль пути от $-\infty$ до точки z , получим

$$f''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^0}{\mu_k^2} e^{\mu_k z} + \varphi_2(z).$$

Прделаем указанные процедуры еще два раза. В результате найдем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\mu_k z} + \varphi_4(z), \quad B_k = \frac{A_k^0}{\mu_k^4},$$

где $\varphi_4(z)$ — целая функция. В силу (1.30), $B_k = O\left(\frac{1}{\mu_k^2}\right)$, поэтому ряд Дирихле с коэффициентами B_k сходится в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$. Теорема доказана.

3. Общий случай. Рассмотрим общий случай, когда о функции $f(z)$, которая подлежит разложению в ряд Дирихле, известно только то, что она регулярна в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 8.1.3. Пусть $F(z)$ — функция, регулярная в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Тогда имеются функция $f(z)$, регулярная в $\operatorname{Re} z < 0$, непрерывная в $\operatorname{Re} z \leq 0$ и удовлетворяющая в $\operatorname{Re} z \leq 0$ условию $f(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, целая функция $M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого порядка минимального типа и целая функция $\Phi(z)$ такие, что

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f^{(k)}(z) + \Phi(z), \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой М. В. Келдыша [7]:

Пусть C — кривая Жордана без кратных точек, начинающаяся и оканчивающаяся в бесконечности, D — область, ограниченная линией C , $f(z)$ — голоморфная в области D функция, непрерывная на $D \cup C$ (исключая бесконечно удаленную точку). Каковы бы ни были положительные ε и η , существует целая функция $G(z)$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(z) - G(z)| < \varepsilon \exp\left\{-|z|^{\frac{1}{2}-\eta}\right\}$$

в замкнутой области $\bar{D}$.

В качестве C возьмем какую-нибудь кривую Жордана без кратных точек, которая лежит целиком в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и при $y \rightarrow +\infty$ и $y \rightarrow -\infty$ неограниченно приближается к мнимой оси, в качестве $f(z)$ возьмем функцию $F(z)$ из рассматриваемой теоремы и в качестве D — область, лежащую слева от C . По теореме М. В. Келдыша найдется целая функция $G(z)$ такая, что

$$|F(z) - G(z)| < \exp\{-|z|^{1/3}\}, \quad z \in \bar{D}.$$

Положим $F(z) - G(z) = w(z)$. Функция $w(z)$ регулярна в $\operatorname{Re} z < 0$ и в $\bar{D}$ удовлетворяет условию

$$w(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \in \bar{D} \quad (1.33)$$

(для дальнейшего этого достаточно).

Докажем, что имеются целая функция $M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ с ростом не выше первого порядка минимального типа и функция $\Phi(z)$, регулярная в $\operatorname{Re} z < 0$ и непрерывная в $\operatorname{Re} z \leq 0$ (исключая

бесконечно удаленную точку), такие, что

$$M(D)\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi^{(k)}(z) = w(z), \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

С этой целью положим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = h < 0} w(z) e^{zt} dz = A(t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

На основании (1.33) функция $A(t)$ непрерывна на вещественной оси и равна нулю при $t \geq 0$. Она не зависит от h . Имеем

$$|A(t)| \leq K_h e^{ht}, \quad K_h = \frac{1}{\pi} \int_{\operatorname{Re} z = h} |w(z)| |dz|,$$

откуда

$$|A(t)| \leq \inf_{h < 0} K_h e^{ht} = A_1(t), \quad t \leq 0.$$

Ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln A_1(t)}{t} = 0.$$

Воспользуемся свойством 6) уточненного порядка (гл. I, § 2, п. 1):

Если $q(r)$ — положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln q(r)}{r} = 0,$$

то существует уточненный порядок

$$\rho(r) = 1 - \frac{\psi(\ln r)}{\ln r},$$

$$\psi(x) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \psi'(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

такой, что

$$q(r) < \exp r^{\rho(r)}, \quad r > r_0.$$

Имея этот уточненный порядок $\rho(r)$, выберем положительные числа $a_k (k \geq 1)$ с условием

$$\frac{k}{a_k^{\rho(a_k)}} = \tau, \quad 0 < \tau < \infty,$$

и положим

$$N(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{a_k^2}\right).$$

Нули этой функции расположены на вещественной и мнимой осях. Заметим, что

$$a_k^{1-\rho(a_k)} = a_k^{\frac{\psi(\ln a_k)}{\ln a_k}} = e^{\psi(\ln a_k)} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

По теореме 1.2.7 (см. неравенство (2.33) из гл. I) вне окружностей радиуса 1 с центрами в своих нулях функция $N(\lambda)$ имеет следующую оценку снизу:

$$\ln |N(\lambda)| > (\pi\tau - \varepsilon) |\lambda|^{\rho(1/\lambda)}, \quad |\lambda| > r_0(\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое.

Теперь возьмем в качестве $q(r)$ функцию $A_1(-r)$ и положим $M_1(\lambda) = N(\lambda e^{\frac{\pi}{4}})$, $\tau > 1/\pi$. В силу изложенного,

$$|A(t)| \leq |A_1(t)| \leq \frac{M_1(t)}{t}, \quad t \leq 0, \quad (1.34)$$

где $M_1(t)$ — целая функция конечного типа при уточненном порядке $\rho(r)$. Она не обращается в нуль на вещественной оси и имеет рост не выше обычного первого порядка минимального типа.

Введем функцию

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^0 \frac{A(t)}{M_1(t)} e^{-zt} dt.$$

В силу (1.34), функция $\varphi(z)$ регулярна в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ (кроме бесконечно удаленной точки) и там ограничена. Имеем

$$M_1(-D)\varphi(t) = \int_{-\infty}^0 A(t) e^{-zt} dt = w(z), \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Положим $M(\lambda) = M_1(-\lambda)$. Функция $M(\lambda)$ — искомая.

Таким образом, получили

$$F(z) = M(D)\varphi(z) + G(z), \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Функция $\varphi(z)$ еще не является искомой, ибо неизвестна ее оценка при больших $|z|$. Известно только, что она непрерывна вплоть до мнимой оси и ограничена.

Воспользуемся еще раз теоремой М. В. Келдыша, приняв за S мнимую ось, а за D — левую полуплоскость. Получим, что имеется целая функция $G_1(z)$, удовлетворяющая условию

$$|\varphi(z) - G_1(z)| < \exp\{-|z|^{1/3}\}, \quad \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Положим $\varphi(z) - G_1(z) = f(z)$. Функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$ и в ней ведет себя, как $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$. Имеем

$$F(z) = M(D)\varphi(z) + G(z) = \\ = M(D)f(z) + M(D)G_1(z) + G(z) = M(D)f(z) + \Phi(z).$$

Функция $\Phi(z)$ — целая, ибо $M(D)G_1(z)$ — целая функция. Теорема доказана.

Теорема 8.1.4. Пусть $F(z)$ — функция, регулярная в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Тогда имеется не зависящая от $F(z)$ последовательность показателей $\{\mu_k\}$, $\mu_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\mu_k} = \tau$, $0 < \tau < \infty$

(ρ — любое > 1), такая, что $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\mu_k z} + \text{целая функция}$, $\operatorname{Re} z < 0$.

Доказательство. По теореме 8.1.3 имеем

$$F(z) = M(D)f(z) + \text{целая функция},$$

где $f(z)$ регулярна в $\operatorname{Re} z < 0$, непрерывна в $\operatorname{Re} z \leq 0$ и удовлетворяет условию: $f(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$. Согласно результату п. 2,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^0 e^{\mu_k z} + \text{целая функция}.$$

На основании этого

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\mu_k z} + \text{целая функция}, \quad B_k = A_k^0 M(\mu_k), \quad \operatorname{Re} z < 0,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что требование $\rho > 1$ вызвано существом дела: в теореме показатели μ_k не могут удовлетворять условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu_k|} = \tau < \infty. \quad (1.35)$$

Чтобы в этом убедиться, воспользуемся теоремой 3.1.5: Пусть последовательность $\{\mu_k\}$, вообще, комплексных чисел удовлетворяет условию (1.35), и пусть ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\mu_k z}$$

сходится в круге $|z - z_0| < r$ радиуса $r > \pi t$. Образует область $D(z_0)$ по правилу: точка z принадлежит области $D(z_0)$ тогда и только тогда, когда ее можно соединить с точкой z_0 ломаной l такой, что вдоль l функция $f(z)$ аналитически продолжается из точки z_0 до точки z и при этом продолжении расстояние от произвольной точки ломаной l до ближайшей особой точки функции $f(z)$ остается все время больше πt . Тогда область $D(z_0)$ является односвязной и однолистной.

Возьмем функцию $1/z$ и допустим, что ее можно представить в виде

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\mu_k z} + \text{целая функция}, \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad (1.36)$$

где показатели удовлетворяют условию (1.35). Тогда функция

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\mu_k z}, \quad \operatorname{Re} z < 0,$$

регулярна и однозначна всюду вне начала координат. Положив $z_0 = q$, $q < -\pi t$, видим, что для рассматриваемой функции $f(z)$ область $D(z_0)$ — внешность круга $|z| \leq \pi t$. Эта область не является односвязной, что противоречит приведенной выше теореме 3.1.5. Значит, представление (1.36) с условием (1.35) невозможно.

Теорема 8.1.5. Пусть D — полуплоскость и $\rho > 1$. Тогда имеется последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$, $0 < |\lambda_k| \uparrow \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, такая, что любая функция $F(z)$, аналитическая в D , представляется в D рядом Дирихле

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D.$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что D — левая полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$. По теореме 8.1.4

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\mu_k z} + \text{целая функция}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu_k|} = \tau.$$

По теореме 7.4.4 целую функцию можно представить рядом Дирихле во всей плоскости, причем показатели ряда (обозначим их μ'_k) являются нулями целой функции $L(\lambda)$ уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1$. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu'_k|^\rho} = 0.$$

Пусть $\{\lambda_k\} = \{\mu_k\} \cup \{\mu'_k\}$. Тогда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = \tau.$$

§ 2. Представление аналитических функций рядами Дирихле в более общих бесконечных выпуклых областях

Пусть D — бесконечная открытая многоугольная выпуклая область, ограниченная конечным числом прямолинейных отрезков (например, полоса или угол). Функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить (см. [64]) в виде конечной суммы функций $F_l(z)$, каждая из которых аналитична в соответствующей полуплоскости D_l (пересечение полуплоскостей D_l есть область D). Представив каждую $F_l(z)$ в полуплоскости D_l рядом Дирихле, убедимся, что любая функция $F(z)$, аналитическая в D , представляется в D рядом Дирихле.

Рассмотрим более общий случай, когда D — бесконечная выпуклая область, граница которой состоит из двух лучей l_1 и l_2 и выпуклой дуги γ , соединяющей начала этих лучей. Требуется доказать, что и в такой области любую аналитическую в этой области функцию можно разложить в ряд Дирихле.

Для доказательства понадобится следующая лемма.

Лемма 8.2.1. Пусть D — бесконечная выпуклая область, граница которой состоит из лучей l_1 и l_2 и дуги γ , соединяющей начала этих лучей. Тогда имеется последовательность показателей $\{\mu_k\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu_k|} < \infty$, которая зависит лишь от области D и обладает свойством: любую функцию $F(z)$, аналитическую в D , можно представить в виде

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad (2.1)$$

где

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z}, \quad z \in D, \quad (2.2)$$

а $f_2(z)$ регулярна в угле $E \supset D$, на сторонах которого лежат лучи l_1 и l_2 .

Наиболее просто лемма доказывается в ситуации, когда лучи l_1 и l_2 параллельны и, следовательно, E — полоса. Поэтому сначала рассмотрим именно этот случай. Без ограничения общности можно предполагать, что лучи l_1 и l_2 параллельны вещественной оси и направлены слева направо. Правее дуги γ проведем вертикальную прямую l . Она отсечет от D конечную выпуклую область D_0 . Граница D_0 состоит из дуги γ , отрезков лучей l_1 и l_2 и вертикального отрезка l_0 прямой l . По теореме 5.3.2 имеется последовательность показателей $\{\lambda_k\}$, зависящая только от области D_0 , такая, что любую функцию $F(z)$, аналитическую в D_0 , в частности, рассматриваемую функцию $F(z)$, можно в D_0 представить рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D_0.$$

Этот ряд в D_0 сходится абсолютно. Разобьем последовательность $\{\lambda_k\}$ на части $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$. К первой части отнесем λ_k с отрицательными вещественными частями, ко второй — все остальные. Имеем

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\nu_k z}, \quad z \in D_0. \quad (2.3)$$

Посмотрим, где (кроме D_0) сходятся указанные ряды. Пусть $z_0 \in D_0$. Запишем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z_0} e^{\mu_k (z - z_0)}.$$

Отсюда видно, поскольку $\operatorname{Re} \mu_k < 0$, что если $z - z_0 \geq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\mu_k z}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\mu_k z_0}| < \infty.$$

Следовательно, первый ряд сходится на луче β_1 , который исходит из точки z_0 в направлении положительной части вещественной оси. Когда точка z_0 опишет область D_0 , в это время луч β_1 опишет всю область D . Таким образом, первый ряд

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z}$$

сходится в области D . Рассмотрим второй ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\nu_k z} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\nu_k z_0} e^{\nu_k (z - z_0)}.$$

В силу тех же соображений он сходится на луче β_2 , который исходит из точки z_0 в направлении отрицательной части вещественной оси. Когда точка z_0 опишет область D_0 , в это время луч β_2 опишет полуполосу E_0 — часть полосы E , лежащую левее вертикального отрезка l_0 . Сумму второго ряда обозначим через $f_2(z)$. Видим, что функция $f_2(z)$ регулярна в полуполосе E_0 . Имеем, в силу (2.3),

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in D_0.$$

Отсюда $f_2(z) = F(z) - f_1(z)$. Так как $F(z)$ и $f_1(z)$ регулярны в D , то, значит, и $f_2(z)$ регулярна в D . Кроме того, она регулярна в полуполосе E_0 . Поэтому $f_2(z)$ регулярна во всей полосе E . Лемма в простейшей ситуации доказана.

Перейдем к случаю, когда лучи l_1 и l_2 не параллельны. Не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что l_1 и l_2 наклонены к вещественной оси под углами, равными соответственно ψ_0 и $-\psi_0$, причем $0 < \psi_0 < \pi/2$. Считаем, далее, что $0 \in D$. Тогда E — угол $|\arg(z - z_0)| < \psi_0$, где $z_0 < 0$. Правее дуги γ проведем вертикальную прямую l . Она отсечет от D конечную выпуклую область D_0 , справа D_0 ограничена вертикальным отрезком l_0 прямой l . Опустим из начала координат на луч l_1 (или его продолжение) перпендикуляр. Он образует с вещественной осью угол $(\psi_0 + \pi/2)$. Перпендикуляр, опущенный из начала координат на луч l_2 (или его продолжение) образует с вещественной осью угол $-(\psi_0 + \pi/2)$. Пусть $K_0(\varphi)$ — опорная функция области D_0 , $h_0(\varphi) = K_0(-\varphi)$. Согласно теореме 1.3.6, имеется целая функция экспоненциального типа и вполне регулярного роста $L_0(\lambda)$ с индикатрисой роста $h_0(\varphi)$, у которой нули λ_k ($k \geq 1$) все простые и которая удовлетворяет условиям

$$|L_0(re^{i\varphi})| < \frac{e^{h_0(\varphi)r}}{r^2},$$

$$\ln |L_0(\lambda_k)| > [h_0(\varphi_k) - \varepsilon] |\lambda_k|, \quad \varphi_k = \arg \lambda_k, \quad k > k_0(\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ — любое. Согласно замечанию к указанной теореме, можно еще считать, что у $L_0(\lambda)$ нет нулей в углах $0 < \varphi < \psi_0 + \pi/2$ и $-(\psi_0 + \pi/2) < \varphi < 0$. По теореме 5.3.1 функцию $F(z)$ в области D_0 можно представить рядом Дирихле с показателями λ_k — нулями функции $L_0(\lambda)$:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D_0.$$

Последовательность $\{\lambda_k\}$ разобьем на две последовательности $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_k\}$. Ко второй отнесем λ_k , расположенные на положительной части вещественной оси. К первой отнесем все остальные λ_k . Имеем

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\nu_k z} = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in D_0.$$

Рассмотрим первый ряд. Запишем

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z_0} e^{\mu_k (z - z_0)}, \quad z_0 \in D_0.$$

Пусть z лежит в угле K_0 : $|\arg(z - z_0)| \leq \psi_0$. Напомним, что μ_k лежит вне угла $|\arg \mu| < \pi/2 + \psi_0$. Тогда точка $\mu_k(z - z_0)$ будет находиться в левой полуплоскости, и потому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\mu_k z}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k e^{\mu_k z_0}| < \infty, \quad z \in K_0.$$

Значит, первый ряд сходится в угле K_0 . Когда z_0 будет описывать область D_0 , в это время угол K_0 заметет всю область D . Итак, ряд

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\mu_k z}$$

сходится в области D . Его сумма $f_1(z)$ в области D регулярна. Второй ряд, поскольку все $\nu_k > 0$, сходится в полуплоскости, ограниченной справа вертикальной прямой l . Его сумма $f_2(z)$ в этой полуплоскости является аналитической функцией. Из равенства

$$f_2(z) = F(z) - f_1(z)$$

усматриваем, что $f_2(z)$ регулярна также во всей области D . Следовательно, функция $f_2(z)$ регулярна в угле E . Осталось заметить, что точки μ_k , являясь нулями целой функции экспоненциального типа, удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\mu_k|} < \infty.$$

Лемма доказана полностью.

На основании этой леммы легко устанавливается

Теорема 8.2.1. Пусть D — бесконечная выпуклая область, граница которой состоит из двух лучей и дуги, соединяющей начала этих лучей. Пусть затем задано число $\rho > 1$. Тогда

имеется последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$, $0 < |\lambda_k| \uparrow \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, такая, что любая функция $F(z)$, аналитическая в D , представляется в D рядом Дирихле

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D.$$

Для доказательства представим $F(z)$, согласно лемме 8.2.1, в виде (2.1), где $f_1(z)$ представлена рядом (2.2), а $f_2(z)$ регулярна в угле $E \supset D$. Функцию $f_2(z)$ можно представить (об этом уже говорилось выше) в виде суммы двух функций, каждая из которых регулярна в соответствующей полуплоскости (пересечение этих полуплоскостей есть угол E). По теореме 8.1.5 каждая из этих функций в своей полуплоскости может быть представлена рядом Дирихле. Значит, в угле E верно представление

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\nu_k z}, \quad z \in E, \quad (2.4)$$

где (имея в виду опять теорему 8.1.5) ν_k удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\nu_k|^\rho} = \bar{\tau}, \quad 0 < \bar{\tau} < \infty.$$

Пусть $\{\lambda_k\} = \{\mu_k\} \cup \{\nu_k\}$. Учитывая (2.2) и (2.4), получаем

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D,$$

причем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau.$$

Теорема доказана.

Пусть D — конечная выпуклая область, $K(\varphi)$ — опорная функция области D , $h(\varphi) = K(-\varphi)$, $L(\lambda)$ — какая-нибудь целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и простыми нулями λ_k ($k \geq 1$),

$$\Psi_v(t) = \frac{1}{L'(\lambda_v)} \int_0^\infty \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (v \geq 1).$$

Функции $\Psi_v(t)$ регулярны вне $\bar{D}$ и образуют систему, биортонормальную системе $\{e^{\lambda_v z}\}$.

Функции $f(z)$, аналитической на $\bar{D}$, сопоставляем ряд

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \Psi_k(t) dt \quad (k \geq 1), \quad (1)$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\bar{D}$, на котором и внутри которого $f(z)$ — аналитическая функция.

В гл. IV приведены в разной форме необходимые и достаточные условия, накладываемые на $L(\lambda)$, для того, чтобы ряд (1) всегда сходиллся в области D к своей функции $f(z)$.

В последнее время, уже после сдачи рукописи книги в типографию, были получены новые условия представимости функций $f(z)$ рядами (1). В связи с этим целесообразно привести полный перечень этих эквивалентных между собой условий.

Теорема. Для того чтобы ряд (1) сходиллся в D к своей функции $f(z)$ (какова бы ни была $f(z)$, аналитическая на $\bar{D}$), необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

$$1) \quad \frac{1}{t-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \quad t \notin \bar{D}; \quad (2)$$

$$2) \quad e^{\lambda z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}, \quad z \in D, \quad \lambda - \text{любое}; \quad (3)$$

$$3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k t}}{L'(\lambda_k)} = 0, \quad z \in D;$$

$$4) \quad |L'(\lambda_k)| > e^{[h(\varphi_k) - \varepsilon] |\lambda_k|}, \quad \varphi_k = \arg \lambda_k, \quad k > k_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 - \text{любое}; \quad (4)$$

и существуют $p > 0$ и r_k , $0 < r_k \uparrow \infty$, такие, что

$$|L(\lambda)| > e^{p |\lambda|}, \quad |\lambda| = r_k \quad (k \geq 1); \quad (5)$$

$$5) \quad |L'(\lambda_k)| > e^{[h(\varphi_k) - \varepsilon] |\lambda_k|},$$

$$\varphi_k = \arg \lambda_k, \quad k > k_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 - \text{любое}$$

и $L(\lambda)$ — функция вполне регулярного роста;

б) существуют $e_k, e_k \geq 0$, $e_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что кружки

$$K_m: |\lambda - \lambda_m| < e^{-e_m} |\lambda_m| \quad (m \geq 1)$$

не пересекаются и вне этих кружков

$$|L(re^{i\varphi})| > e^{[h(\varphi) - \varepsilon] r}, \quad r > r_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 - \text{любое}; \quad (6)$$

7) существуют замкнутые кривые Γ_k ($k \geq 1$), обладающие свойством:

$$\rho_k = \max_{\lambda \in \Gamma_k} |\lambda| = O(\min_{\lambda \in \Gamma_k} |\lambda|),$$

длина Γ_k есть $O(\rho_k)$, на Γ_k

$$|L(re^{i\varphi})| > e^{[h(\varphi) - \varepsilon] r}, \quad k > k_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 - \text{любое}, \quad (7)$$

внутри Γ_k лежат точки $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и только они из последовательности $\{\lambda_m\}$;

8) любая целая функция экспоненциального типа $\Phi(\lambda)$ при условии, что у ассоциированной с ней по Борелю функции $\gamma(t)$ все особенности лежат в D , разлагается в ряд Лагранжа:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}.$$

Условия 2), 3) и 5) приведены в теоремах 4.6.2, 4.6.3 и 4.6.4.

Необходимость условия 1) установлена в гл. IV (§ 6, п. 1), докажем его достаточность. Из асимптотики функций $\Psi_k(t)$ (см. (1.18) из гл. IV) следует, что на контуре C , охватывающем $\bar{D}$, ряд (2) относительно t сходится равномерно. Поэтому

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k z} \frac{1}{2\pi i} \int_C f(t) \Psi_k(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D$$

Необходимость условия 4) вытекает из условия 5). Установим его достаточность. Из оценки (4) следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}$$

сходится в D . Убедимся, что он сходится к $e^{\lambda z}$. Имеем

$$e^{\lambda z} - \sum_{|\lambda_v| < r_h} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_v} \frac{e^{\lambda_v z}}{L'(\lambda)} = \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{|\mu|=r_h} \frac{e^{\mu z} d\mu}{(\mu - \lambda)L(\mu)}.$$

Правая часть в силу (5) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ для $|z| < \rho$. Значит, ряд действительно сходится к $e^{\lambda z}$, и потому выполняется условие 2), откуда и получаем требуемое.

Условие 6) — новое *).

Установим условие 7). Его достаточность вытекает из теоремы 4.6.8. Надо доказать его необходимость.

Пусть ряд (1) всегда сходится в D к своей функции. Тогда необходимо выполняется условие 6). Проведем кружки

$$K_m: |\lambda - \lambda_m| < e^{-s_m} |\lambda_m| \quad (m \geq 1).$$

Они не пересекаются. Предполагаем, что нули λ_m расположены в порядке неубывания модулей. Возьмем точку λ_s и будем конструировать контур Γ_s , который содержал бы внутри себя точки $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, не содержал бы других точек из $\{\lambda_m\}$ и на котором имела бы место оценка (7). Пусть Γ — окружность $|\lambda| = |\lambda_s|$. Эту окружность могут пересекать кружки K_m трех типов. К первому типу относим кружки K_p , центры которых λ_p лежат на Γ . К этому типу относится, в частности, кружок K_s . Ко второму типу относим кружки K_q , центры которых λ_q лежат внутри Γ . И, наконец, к третьему типу относим кружки K_r , центры которых λ_r лежат вне Γ . Контур Γ_s будет состоять из дуг окружности Γ и дуг границ кружков указанных трех типов.

Очевидно, $q < s$, $r > s$, а p может равняться s , быть больше s и быть меньше s . Пусть α_q — дуга границы кружка K_q , которая лежит вне Γ (ее концы лежат на Γ), а α_r — дуга границы кружка K_r , которая лежит внутри Γ . Если $p \leq s$, то α_p — дуга границы кружка K_p , лежащая вне Γ , а если $p > s$, то α_p — дуга границы кружка K_p , лежащая внутри Γ . При таком выборе контур Γ_s состоит из дуг $\alpha_p, \alpha_q, \alpha_r$ и тех дуг Γ , которые не попали в кружки K_m .

* Оно получено в работе А. Ф. Леонтьева «Об эквивалентных условиях представления аналитических функций рядами экспонент», Матем. заметки 20, вып. 1 (1976), 91—104.

Ясно, что

$$\rho_s = \max_{\lambda \in \Gamma_s} |\lambda| = O(\min_{\lambda \in \Gamma_s} |\lambda|)$$

и на Γ_s выполняется условие (7) (контур Γ_s лежит вне кружков K_m , а потому на нем имеет место оценка (6)). Надо убедиться, что длина Γ_s есть $O(\rho_s)$.

Пусть $\beta_p, \beta_q, \beta_r$ — пересечения кружков K_p, K_q, K_r с Γ . Надо сравнить длины дуг α с длинами соответствующих дуг β . Отметим, что радиус кружка K_m не превосходит единицы. Поэтому, если радиус окружности Γ велик, то дуги β близки к прямолинейным отрезкам, в частности, дуга β_p близка к диаметру кружка K_p . Отсюда следует, что при больших s (радиус Γ есть $|\lambda_s|$) $\alpha_p < \pi \beta_p$ (через α и β обозначаем также сами длины дуг α и β). Аналогично убедимся в том, что $\alpha_q < \pi \beta_q$, $\alpha_r < \pi \beta_r$. Из всего этого немедленно следует, что длина Γ_s меньше длины Γ , умноженной на π , т. е. меньше $2\pi^2 |\lambda_s|$ (а это меньше $2\pi^2 \rho_s$). Таким образом, все доказано.

Теперь получим условие 8). Докажем его достаточность. Предположим, что условие 8) выполняется. Возьмем функцию $e^{\lambda z}$, $z \in D$. Ассоциированная с ней по Борелю функция есть $\frac{1}{t-z}$, и ее единственная особенность $t=z$ лежит в D . Поэтому функция $e^{\lambda z}$ разлагается в ряд Лагранжа

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}.$$

Следовательно, выполняется условие 2), а потому ряд (1) всегда сходится в D к своей функции.

Установим необходимость условия 8). Пусть ряд (1) всегда сходится в D к своей функции. Тогда имеет место соотношение (3). Имеем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(z) e^{\lambda z} dz.$$

Поскольку особенности $\gamma(z)$ лежат в D , контур C проведем так, чтобы он лежал в D и охватывал особенности $\gamma(z)$. Ряд (3) (при фиксированном λ) есть ряд Дирихле, сходящийся в области D . Поэтому на контуре C он сходится равномерно. В силу этого

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(z) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} \right) dz = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k) (\lambda - \lambda_k)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(z) e^{\lambda_k z} dz. \end{aligned}$$

Но $\frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(z) e^{\lambda_k z} dz = \Phi(\lambda_k)$. Следовательно,

$$\Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}.$$

При условии

$$|L(re^{i\varphi})| < A \frac{e^{\lambda(\varphi)r}}{r^\mu}, \quad \mu > 1, \quad (8)$$

функции $\psi_k(t)$ непрерывны вне D , и в этом случае функции $f(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\bar{D}$, сопоставляем ряд

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_D f(t) \psi_k(t) dt \quad (k \geq 1). \quad (9)$$

Если имеет место (8), то перечисленные выше условия 1) — 8) также необходимы и достаточны для того, чтобы ряд (9) сходился в D к своей функции $f(z)$, какова бы ни была функция $f(z)$, аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$. Доказательства этих фактов аналогичны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. О., О полных системах аналитических функций, Матем. сб. 4 (46), (1938), 149—156.
2. Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.
3. Громов В. П., О рядах по системе $\{f(\lambda_k z)\}$, ДАН СССР 164, № 1 (1962), 23—26.
4. Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», 1966.
5. Дзядык В. К., Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках, Матем. сб. 95 (137), № 4 (1974), 475—493.
6. Ибрагимов И. И., Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971.
7. Келдыш М. В., О приближении голоморфных функций целыми функциями, ДАН СССР 47, № 4 (1945), 243—245.
8. Красичков-Терновский И. Ф., Инвариантные подпространства аналитических функций, Коэффициенты Дирихле, Функциональный анализ и его приложения 7, вып. 4 (1973), 38—43.
9. Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
10. Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова XXXIX (1951).
11. Леонтьев А. Ф., Об области ограниченности последовательности полинома Дирихле, Матем. сб. 35 (177), № 1 (1954), 175—186.
12. Леонтьев А. Ф., К вопросу о росте функций, определенных рядами Дирихле и некоторыми другими более общими рядами, Матем. сб. 65 (105), № 2 (1964), 227—237.
13. Леонтьев А. Ф., О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси, Изв. АН СССР, серия матем. 29, № 2 (1965), 269—328.
14. Леонтьев А. Ф., О представлении произвольных функций рядами Дирихле, ДАН СССР 164, № 1 (1965), 40—42.
15. Леонтьев А. Ф., О представлении произвольных целых функций рядами Дирихле, ДАН СССР 165, № 4 (1965), 31—34.
16. Леонтьев А. Ф., О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле, Матем. сб. 70 (112), № 1 (1966), 132—144.
17. Леонтьев А. Ф., Об одном свойстве единственности, Матем. сб. 72 (114), № 2 (1966), 237—249.
18. Леонтьев А. Ф., О представлении целых функций некоторыми общими рядами, Матем. сб. 71 (113), № 1 (1966), 3—13.
19. Леонтьев А. Ф., О представлении произвольных аналитических функций рядами Дирихле и более общими рядами. Современные проблемы теории аналитических функций (международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965), Москва, 1966, 209—216.
20. Леонтьев А. Ф., Об асимптотике коэффициентов разложения произвольных функций в ряды Дирихле, Доклады научно-технической конференции, матем. секция, Моск. энерг. ин-т (1967), 3—11.

21. Леонтьев А. Ф., К вопросу о представлении произвольных целых функций рядами Дирихле и другими более общими рядами, Изв. АН Арм. ССР, математика 2, № 5 (1967), 295—317.
22. Леонтьев А. Ф., О представлении аналитических в открытом круге функций рядами Дирихле, Матем. заметки 3, № 2 (1968), 113—124.
23. Леонтьев А. Ф., Представление функций обобщенными рядами Дирихле, Успехи матем. наук XXIV, вып. 2 (146) (1969), 97—164.
24. Леонтьев А. Ф., К вопросу о представлении целых функций конечного порядка рядами Дирихле, Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исслед. работ за 1968—1969 годы (апрель 1970), секция матем., Моск. энерг. ин-т (1969), 35—41.
25. Леонтьев А. Ф., К вопросу о представлении аналитических функций рядами Дирихле, Матем. сб. 80 (122), № 1 (9) (1969), 117—150.
26. Леонтьев А. Ф., О представлении аналитических функций в открытой области рядами Дирихле, Матем. сб. 81 (123), (1970), 552—579.
27. Леонтьев А. Ф., О восстановлении функции по коэффициентам ее ряда Дирихле, Изв. АН СССР, серия матем. 35, № 1 (1971), 125—153.
28. Леонтьев А. Ф., О представлении функций, аналитических в полуплоскости, рядами Дирихле, Матем. сб. 85 (127): 4(8), (1971), 563—580.
29. Леонтьев А. Ф., О суммировании ряда Дирихле с комплексными показателями и его применении, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 112 (1971), 300—326.
30. Леонтьев А. Ф., К вопросу о восстановлении функции по известным коэффициентам ее ряда Дирихле, Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Издат. Академии наук Венгрии, 1971, 273—288.
31. Леонтьев А. Ф., Об одном дополнении к теореме Адамара, ДАН СССР 206, № 5 (1972), 1049—1051.
32. Леонтьев А. Ф., Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле, Изв. АН СССР, серия матем. 38, № 6 (1972), 1282—1295.
33. Леонтьев А. Ф., О представлении целых функций многих переменных рядами Дирихле, Матем. сб. 89 (131): 4 (12), (1972), 586—598.
34. Леонтьев А. Ф., О представлении аналитических функций в замкнутой выпуклой области рядами Дирихле, Изв. АН СССР, серия матем. 37, № 3 (1973), 577—582.
35. Леонтьев А. Ф., Об оценке полинома Дирихле и ее некоторых приложениях, Матем. сб. 91 (133): 4 (8), (1973), 554—564.
36. Леонтьев А. Ф., О представлении аналитических функций в многоугольной выпуклой замкнутой области рядами Дирихле, Изв. АН СССР, серия матем. 38, № 1 (1974), 127—137.
37. Леонтьев А. Ф., О представлении аналитических функций в виде суммы периодических, Матем. сб. 95 (135), № 4 (1974), 512—528.
38. Леонтьев А. Ф., О суммировании ряда Дирихле с действительными показателями для произвольной аналитической функции, Изв. АН СССР, серия матем. 31, № 1 (1967), 87—102.
39. Луиц Г. Л., О некоторых обобщениях рядов Дирихле, Матем. сб. 10 (52): 1—2 (1942), 35—50.
40. Луиц Г. Л., Об одном классе обобщенных рядов Дирихле, Успехи матем. наук XII, вып. 3 (75), (1957), 173—179.
41. Луиц Г. Л., Ряды Дирихле с последовательностью комплексных показателей, имеющих угловую плотность, ДАН СССР 151, № 2 (1963), 279—281.
42. Луиц Г. Л., О рядах Дирихле с комплексными показателями, Матем. сб. 67 (109): 1 (1965), 89—134.
43. Луиц Г. Л., Ряд Дирихле с неумеренной последовательностью комплексных показателей, Матем. сб. 68 (110): 1 (1965), 58—62.

44. Мандельбродт С., Примающие ряды, регуляризация последовательностей, применения, ИЛ, 1955.
45. Мандельбродт С., Ряды Дирихле, принципы и методы, «Мир», 1973.
46. Мандельбродт С., Квазианалитические классы функций, ОНТИ, М.—Л., 1937.
47. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
48. Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ, М.—Л., 1936.
49. Напалков В. В., Об одном методе восстановления функции по ее коэффициентам Дирихле, Матем. заметки 17, № 4 (1975).
50. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
51. Садыков Г. С., О росте функций в полосе, определенных рядами Дирихле, Изв. АН Азерб. ССР, серия физико-техн. и матем. наук, № 1 (1965), 20—29.
52. Садыков Г. С., К вопросу роста функций, определенных рядами Дирихле, в полосе, Изв. АН Азерб. ССР, серия физико-техн. и матем. наук, № 6 (1965), 22—28.
53. Садыков Г. С., О росте в полосе функций, определенных рядами полиномов Дирихле, Матем. заметки 3, № 5 (1968), 553—564.
54. Смирнов В. И., Курс высшей математики. III, часть 2, «Наука», 1974.
55. Титчмарш Е., Теория функций, 1951.
56. Халмош П., Теория меры, ИЛ, М., 1953.
57. Хромов А. П., Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле, Матем. заметки 6, № 6 (1969), 759—766.
58. Хромов А. П., О представлении произвольных функций некоторыми специальными рядами, Матем. сб. 83 (125), № 2 (10) (1970), 165—180.
59. Шевцов В. И., О представлении целых функций рядами $\Sigma a_n/(\lambda_n z)$, Матем. заметки 4, № 5 (1968), 579—588.
60. Шевцов В. И., О представлении целых функций некоторыми общими рядами, Изв. АН Арм. ССР, математика 3, № 2 (1968), 101—125.
61. Шевцов В. И., О восстановлении функции по известным коэффициентам соответствующего ей ряда Дирихле, Матем. сб. 82 (124), № 4 (8) (1970), 574—584.
62. Шевцов В. И., Об одном свойстве единственности, Сибирский матем. журнал XII, № 2 (1971), 437—441.
63. Ahlfors L. and Heins M., Questions of regularity connected with the Phragmén—Lindelöf principle, Ann. of Math. (2) 50 (1949), 341—346.
64. Aronszajn N., Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications, Acta Math. 65, № 1—2 (1935), 1—156.
65. Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.
66. Biggeri C., Sur les singularités des fonctions analytiques définies par séries de Dirichlet, Comptes rendus Acad. Sc., Paris. 209 (1939), 979—980.
67. Boas R. P., Entire Functions, N. Y., 1954.
68. Cahen E., Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues, Ann. Ec. Norm. Sup. 11, 1894.
69. Cartwright M. L., On integral functions of integral order, Proc. London Math. Soc. (2) 33 (1932), 209—224.
70. Colton E., Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet, Bull. Soc. math. de France 45 (1917), 121—125.
71. Doetsch G., Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden, Math. Zeitschrift 8, 1920, 237—240.
72. Hille E., Note on Dirichlet's series with complex exponents, Ann. of Math. 25 (1924), 261—278.
73. Mandelbrojt S., Series lacunaires, Paris, 1936.

74. Mandelbrojt S., Gergen J., On entire functions defined by a Dirichlet series, Amer. J. of Math. 53 (1931), 1—14.
75. Mittag-Leffler G., Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene, Acta Math. 29 (1905), 101—182.
76. Pfluger A., Ober ganze Funktionen ganzer Ordnung, Comm. Math. Helv. 18 (1946), 177—203.
77. Pincherle S., Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti, Atti del IV Congresso dei Matematici, t. 2, Rome, 1908.
78. Polya G., Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes, Nachr. Gesellsch. Wissensch. Göttingen, 1927, 187—195.
79. Riesz M., Sur la representation analytique des fonctions definies par des series de Dirichlet, Acta math. 35 (1911), 253—270.
80. Ritt J. F., On certain points in the theory of Dirichlet Series, Amer. J. of Math. 50, № 1 (1928), 73—86.
81. Schnee W., Ueber Dirichletsche Reihen, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 27, 1909, 87—116.
82. Schwartz L., Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, sér. 4, v. VI (1943), 111—174.
83. Schwartz L., Etude des sommes d'exponentielles, deuxième édition, 1959, Actualités Scientifiques et Industrielles.
84. Tanaka C., Note on Dirichlet Series (V). On the integral functions defined by Dirichlet series (I), Tôhoku Math. J. 2, № 1, 1953, 67—78.
85. Tanaka C., Note on Dirichlet Series. X. Remain on S. Mandelbrojt's Theorem, Proc. Japan Acad. 29, № 8 (1953), 423—426.
86. Valiron G., Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet, Bull. Soc. math. de France 52 (1924).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсциссы простой, абсолютной и равнономерной сходимости ряда Дирихле 113, 114, 115, 116
Аналог леммы Абеля 111

Восстановление функции по коэффициентам ее ряда Дирихле: первый способ 387; второй способ 390, 400, 401, 402, 412, 416; в случае отрезка 446

Индекс конденсации 174
Индикатор, индикатриса роста 23, 35, 77

Квазиполином 51, 56
Класс функций квазианалитический 414

Множество нулевой относительной меры 49, 99
— правильно распределенное 30, 41, 42, 43, 45, 65, 67
— регулярное 30, 39, 72, 80

Неполнота системы экспонент 277

Оператор дифференциальный бесконечного порядка 358
Опорная прямая 23
— функция 23
Остаточный член 282, 469
Оценка модуля функции снизу 17, 20, 21, 41, 43, 45

Плотность 30, 46
— верхняя 164
— линейная 38
— нижняя 398

Плотность угловая 30
— усредненная 164
Порядок в полосе 185
— суммы ряда Дирихле на вертикальных прямых 135
— уточненный 25
— целой функции 10, 216
Преобразование Абеля 111
Произведения бесконечные 11, 12
— — специальные 57

Решение уравнения свертки 447
Ряд Дирихле с вещественными показателями 111
— — — комплексными показателями 194
— — — показателями, имеющими конечную верхнюю плотность 164
— — — — —, — плотность 170
— — —, сходящийся во всей плоскости 175
R-порядок и R-тип 176

Системы функций биортогональные 222, 227, 233, 272, 315
Суммирование ряда Дирихле 125, 127, 132

Теорема единственности вторая 260, 271
— — для целых функций 463
— — первая 255
— о выпуклости области абсолютной сходимости ряда Дирихле 194
— — — — — регулярности 205
— — вычисления A порядка через коэффициенты 200
— — — — — порядка и типа через коэффициенты 11, 25
— — квазиполиноме 56
— — минимальном, нормальном, чаксимальном типе 12, 13, 17, 18
— — нулях целой функции 11, 25

- Теорема о нулях целой функции
 вполне регулярного роста 99
- — поведении ряда Дирихле на прямой сходимости 137
 - — представлении аналитической функции суммой периодических 385
 - — разложении в бесконечных областях 524
 - — — полуплоскости 501, 503, 514, 516
 - — — ряд Дирихле 289, 291, 296, 297, 298, 301, 307
 - — — — в замкнутой области 320, 322, 328
 - — — — открытой области в случае аналитической границы 337, 340, 353, 357
 - — — — — случае произвольной границы 381, 382
 - — — — — целых функций 472, 475, 481
 - — — — — росте суммы ряда Дирихле на вертикалях 120
 - — — — — связи опорной функции и индикатрисы роста 24
 - — — — — существовании регулярного множества 77
 - — — — — целой функции с заданным ростом 79, 86, 97
 - — — — — типе в случае нулевой плотности 17
 - — — — — тригонометрически выпуклой функции 36
 - — — — — функциях класса A 100, 101
- Теорема об абсолютной сходимости ряда 197
- — аппроксимации посредством экспонент 450, 452
 - — асимптотическом поведении канонической функции 38, 39
 - — — — — особых точках 174
 - — — — — на прямой сходимости 143
 - — — — — оценке функции снизу 17, 20
 - — — — — уточненном порядке 31
- Тип суммы ряда Дирихле в полосе 191
- — целой функции 10
- Формула для коэффициентов ряда Дирихле 121, 124, 131, 170, 201, 215, 234
- — о среднем для ряда Дирихле 123
 - — остаточного члена 282, 284
- Функция, ассоциированная по Борелю 23
- — вполне регулярного роста 99
 - — интерполирующая 234, 237, 242, 453, 457, 494
 - — — — — асимптотическое поведение 310, 496
 - — каноническая правильно распределенного множества 37, 38, 43
 - — класса A и вполне регулярного роста 100
 - — тригонометрическая выпуклая 36
 - — целая специальная 46