



ПУЛАТОВА М.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
УЗБЕКИСТАН**

БУХАРСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПУЛАТОВА МАНЗУРА ИСХАКОВНА

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(учебное пособие)

Бухара-2020
Издательства «Дурдона»

22.1 я 73
516.2(075)
П 92

Пулатова М.И.

Практические занятия по теории вероятностей. Учебное пособие для студентов высших образовательных учреждений.–Т.: типография «Садриддин Салим Бухорий» издательства «Дурдона», 2020, 92 стр.

ББК 22.1 я 73
УДК 516.2(075)

Рецензенты:

Сафаров И.И.	– доктор физ.-мат. наук, проф.
Расулов М.П.	- кандидат физ.-мат. наук, доц.

Ushbu qo'llanma "Ehtimollar nazariyasidan amaliy mashg'ulotlar" asosiy bo'limlarni va ehtimollik nazariyasi kursidan qisqacha nazariy ma'lumotlarni o'z ichiga oladi. Ko'pgina masalalar to'liq yechimlari bilan berilgan, amaliy mashg'ulotlarda va uy vazifalarini ishlash uchun uchun topshiriqlar berilgan va ularga javoblar berilgan. Ehtimollar nazariyasi kursi bo'yicha amaliy mashg'ulotlar olib boradigan o'qituvchilar, texnologik va texnik institutlarning barcha mutaxassislik talabalari uchun mo'ljallangan.

Данное учебное пособие «Практические занятия по теории вероятностей» охватывает основные разделы и краткие теоретические сведения из курса теории вероятностей. Большинство задач даются с подробными решениями, приводятся задачи для решения на практических занятиях и для домашнего задания, а также даются к ним ответы.

Для преподавателей, ведущих практические занятия по курсу теории вероятностей и студентов всех специальностей технологических и технических вузах.

This tutorial "Practical exercises in probability theory" covers the main sections and brief theoretical information from the course of probability theory. Most tasks are given with detailed solutions, tasks for solving in practical classes and at home, all answers are provided. For teachers conducting practical classes on the course of probability theory and students of all specialties of technological and technical universities.

Рекомендовано к печати Министерством высшего и среднего специального образования РУз в качестве учебного пособия для студентов технических и технологических специальностей (приказ № 359 от 30.06.2020 г.)

84814
ISBN-978-9943-6895-8-9

©Пулатова М.И.

*Посвящается сыну Фархаду и
внукам.*

ВВЕДЕНИЕ

Целью создания данного учебного пособия "Практические занятия по теории вероятностей" является разработка учебно-методической литературы, которая была бы удобна для обучения теории вероятностей студентов с различным уровнем математической подготовки.

Перед преподавателем высших учебных заведений, работающим со студентами со слабой математической подготовкой, стоит задача обучить их основам теории вероятностей, т.е. довести уровень их знаний по этому предмету до соответствия требованиям высшей школы.

Данное учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов Мин Вуза РУз.

Предлагается изучение таких разделов теории вероятностей, как: элементы комбинаторики; основные правила; случайное событие; вероятностное пространство; классическое определение вероятности; операции с событиями; формула сложения вероятностей; независимые события; условная вероятность; формула полной вероятности; формула Байеса; испытание Бернулли; биномиальное распределение; дискретная случайная величина и её числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, средне-квадратическое отклонение; независимые случайные величины; распределение Пуассона; совместное распределение двух дискретных величин; ковариация и корреляция двух случайных величин; непрерывные случайные величины; равномерное распределение; нормальное распределение; теорема Муавра-Лапласа.

Каждое практическое занятие содержит: основные сведения из теории и формулы; задачи для решения в аудитории и домашние задания.

Правильность решенной задачи можно проверить по ответам, приведенным в конце каждого практического занятия.

Предлагаемое учебное пособие "Практические занятия по теории вероятностей" удобно для использования как преподавателям, ведущим практические занятия, так и студентам, обучающимся в высших технических и технологических учебных заведениях.

Автор приносит глубокую благодарность рецензентам этого учебного пособия доктору физ.-мат. наук, проф. И.И.Сафарову, ведущему специалисту по теории вероятностей, кандидату физ.-мат. наук, доц. Н.П.Расулозу за ценные советы и замечания, которые способствовали значительному улучшению данного учебного пособия, а также Хансуварову Дамиру за помощь в оформлении рукописи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА

Содержание: Основные комбинаторные правила: умножения, перестановки, сочетаний, размещений.

Основные сведения из теории

Ключевые понятия теории вероятностей - случайный эксперимент и его возможные исходы. Когда число возможных исходов случайного эксперимента конечно, для их описания или описания какой-то их части полезны правила комбинаторики. Комбинаторика изучает способы перебора, пересчета и упорядочивания предметов. Для решения задач теории вероятностей обычно используются следующие комбинаторные правила: правила сложения, умножения, перестановок, сочетаний и размещений.

Правило сложения

Если выбор A можно осуществлять $n(A)$ способом, выбор B $n(B)$ способом, тогда « A или B » можно осуществлять

$$n(A \text{ или } B) = n(A) + n(B) - n(A \text{ и } B)$$

Правило умножения позволяет найти число упорядоченных пар. Чтобы найти число всех упорядоченных пар объектов (предметов) двух типов, нужно число объектов первого типа умножить на число объектов второго типа. Другими словами, если на первом месте может находиться один из m различных объектов (предметов), а на втором может быть один из k разных объектов, то можно составить $m \cdot k$ различных упорядоченных пар из этих объектов.

Другими словами, если выбор A можно осуществить $n(A) \cdot m$ способом, выбор B $n(B) \cdot k$ способом, то выбор « A и B » можно осуществлять

$$n(A \text{ и } B) = n(A) \cdot n(B) = m \cdot k \text{ способами.}$$

Пример 1. В группе туристов 65 знают английский, 75 - немецкий, 30 - оба языка. Сколькими способами можно выбрать одного туриста из этой группы:

$n(\text{англ. или нем.}) = n(\text{англ.}) + n(\text{нем.}) - n(\text{англ. и нем.}) = 65 + 75 - 30 = 110$

Пример 2. Если на первый вопрос социологической анкеты можно ответить двумя способами, а на второй вопрос - пятью, то всего существует $2 \cdot 5 = 10$ возможных способов заполнить ответы на два вопроса анкеты.

Пример 3. Если игральную кость (кубик) подбросить дважды, то на первом броске можно получить любую из шести граней игральной кости, и на втором тоже. Значит, согласно правилу умножения, всего можно получить $6 \cdot 6 = 36$ вариантов завершения этого случайного эксперимента.

Правило умножения особенно полезно для вычисления общего числа элементарных исходов в независимых, однотипных повторяющихся случайных экспериментах. Если однократный эксперимент может закончиться одним из k элементарных исходов, а проводятся повторно и независимо m подобных экспериментов, то общее число элементарных исходов в этой серии экспериментов равно $N = k^m$.

Монету бросают $m = 3$ раза. В каждом подбрасывании имеется $k=2$ исхода. Тогда количество всех исходов

$2^3 = 8$. (ggg), (ggr), (grr), (rgg), (rgr), (rrg), (rrr).

Правило перестановок позволяет найти число способов упорядочивания n объектов (предметов). Под упорядочиванием понимается нумерация объектов: один из объектов получает первый номер, любой один из оставшихся объектов получает второй номер и так далее. Общую формулу числа перестановок можно получить с помощью правила умножения.

Например, $n=3$: буквы а, в, с. Их перестановки: авс, асв, вас, вса, сав, сва – 6 перестановок.

Число перестановок n объектов равно произведению

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Такое произведение натуральных чисел от 1 до n называют *факториалом* числа n («эн-факториал») и обозначают $n!$.

Пример 4. Пять студентов можно поставить в очередь в буфет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ различными способами.

Пример 5. Майки с номерами от 1 до 11 одиннадцати игрокам футбольной команды можно раздать $11!$ способами:

$$11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 39916800.$$

Правило сочетаний позволяет узнать, сколькими способами можно выбрать из n объектов k объектов. При этом порядок выбора этих объектов не существен. Число этих способов называют числом сочетаний из n по k и обозначают C_n^k . Это правило вытекает из правила умножения и правила перестановок.

Например, $n=3$, $k=2$; из трех букв а, в, с выбраны две буквы: ав, ас, вс. При этом выбор ав и ва, ас и са, вс и св считаются одинаковыми.

Число способов выбрать из n объектов k объектов или, другими словами, число сочетаний из n по k , равно

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

В выше указанном примере $n=3$, $k=2$.
Получим

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

В числителе этого выражения стоят ровно k сомножителей, каждый из которых показывает, сколькими способами можно выбрать очередной объект из еще не выбранных. Так, первый объект можно выбрать n способами, второй $-(n-1)$ способами, так как на этом этапе осталось только $(n-1)$ объектов и т.д., пока не доберемся до выбора k -го объекта. В знаменателе число сочетаний стоит выражение $k!$, которое учитывает, что одни и те же k объектов мы можем выбрать в разном порядке. Всего таких упорядочиваний ровно $k!$. Число сочетаний из n по k кратко можно записать в следующем виде:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Пример 6. Налоговая инспекция может выбрать для проверки три компании из десяти $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ различными способами или $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!}$

Пример 7. В Центральном областном округе 18 регионов. Социологи хотят выбрать из них 4 произвольных региона для проведения социологического опроса.

Это можно сделать $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3060$ способами.

Правило размещений позволяет вычислить, сколькими способами можно разместить n объектов по k позициям. При этом сами позиции считаются упорядоченными или, другими словами, занумерованными. Число этих способов называют числом размещений из n по k и обозначают A^k_n . Правило размещений вытекает из правила умножения.

Например, $n=3$, $k=2$: из трех букв выбираются 2 буквы: ав, ва, ас, са, вс, св. Здесь ав и ва разные варианты.

Число размещений n объектов по k упорядоченным позициям равно

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Число размещений n по k кратко можно записать в следующем виде:

$$A^k_n = \frac{n!}{(n-k)!},$$

в нашем примере

$$A^2_3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Пример 8. На конкурсе красоты из десяти претенденток надо выбрать трех на первое, второе и третье место. Согласно правилу размещения, это можно сделать $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способами.

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать 5 человек на конференцию?

Решение. Используем формулу количества перестановок:

$$P_5 = 5! = 120 \text{ способами}$$

Задача 2. В ящике находится 15 бильярдных шаров. Сколькими способами можно взять 4 бильярдных шара?

Решение. В задаче речь идёт о выборке из 4 бильярдных шаров. Таким образом, у нас имеют место сочетания шаров. Считаем их количество:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)! \cdot 4!} = \frac{15!}{11! \cdot 4!} = 1365$$

способами можно взять 4 бильярдных шара из ящика.

Задача 3. Олим, Омад и Тимур сели играть в «очко». Сколькими способами им можно сдать по одной карте? (колода содержит 36 карт)

Решение. По формуле размещений:

$$A_{36}^3 = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 42840$$

способами можно раздать 3 карты игрокам.

Задача 4. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Задача 5. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу: 1) 3 человека; 2) 5 человек?

Решение. Различные варианты расположения n человек в очереди отличаются один от другого только порядком расположения людей, т. е. являются различными перестановками из n элементов.

Три человека могут встать в очередь $P_3 = 3! = 6$ различными способами.

Пять человек могут встать в очередь

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

различными способами.

Задача № 6. Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 3 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

Решение: По формуле находим:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = 120$$

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

1.1. В библиотеке есть 7 учебников по теории вероятностей и 5 учебников по математической статистике. Студентка решила наудачу взять 2 книги по ТВ и 3 книги по МС. Сколькими способами она может это сделать?

1.2. Тест знаний включает 10 вопросов, на каждый из которых предложено четыре варианта ответа. На каждый вопрос испытуемый должен выбрать один вариант ответа. Сколькими способами можно ответить на подобный тест?

1.3. В сессию за 12 дней студенты одной группы должны сдать четыре экзамена. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в университете запрещается сдавать два экзамена в один день?

1.4. Экспериментатор бросает монету, а затем игральную кость.

а) Сколько всего исходов в таком эксперименте?

б) Сколько будет исходов, если экспериментатор сначала будет бросать кость, а потом монету?

1.5. Во сколько раз число перестановок русских 6 превышает число перестановок латинских? (В русском и латинском алфавитах 33 и 26 букв соответственно).

■ Задачи для домашнего задания

1.6. Есть 20 лампочек - одна перегоревшая, остальные исправные. Из этих лампочек наудачу выбирают 15 штук.

а) Сколько существует способов выбрать одну неисправную лампочку и 14 исправных?

б) Сколько существует способов выбрать 15 исправных лампочек? в) Сколько существует способов выбрать 15 лампочек?

1.7. На улице в ряд стоит семь домов. Хозяева решили покрасить свои дома, каждый дом в один тон. Сколько существует способов раскраски, если в местном магазине продаются краски: 3) 3 цветов; 6) 7 цветов; в) п цветов?

1.8. На детской карусели семь одинаковых лошадок, стоящих по кругу. Сторож весной планирует покрасить этих

лошадок так, чтобы не все они были одинаковые. У сторожа есть краски n разных цветов. Сколько существует разных способов покрасить карусель? (Указание: если раскраски совпадают при повороте карусели, они считаются одинаковыми.)

1.9. В отделе компании работают 8 человек. Сколько существует возможностей распределить между ними: а) 3 одинаковые по величине премии; б) 3 разные по величине премии?

1.10. На научной конференции каждый из учёных пожал руки всем остальным. Сколько произошло рукопожатий, если учёных было:

а) 4; б) 5; в) 6; г) 9; д) n ?

ОТВЕТЫ

1.1. $12^{12}=4096$

6.1. а) $C_{19}^{14} = 11628$; б) $C_{19}^{15}=3876$ в) $C_{20}^{15}=15504$

1.2. $4^{10}=1048576$

1.7. а) $3^7=2187$; б) $7^7823543$; в) n^7

1.3. 11880

1.8. $\frac{n^7 \cdot n}{7}$

1.4. а) 12; б) 12;

1.9. а) 56; б) 336

1.5. $\frac{33!}{26!}=21531121920$

1.10. а) 6; б) 10; в) 15; г) 36; д) $\frac{n(n-1)}{2}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Содержание: Элементарные исходы, классический способ задания вероятности; случайные события.

Основные сведения из теории

Описание случайного эксперимента, то есть такого эксперимента, исход которого нельзя предсказать заранее, начинается с описания всех возможных исходов эксперимента. Эксперимент может закончиться лишь одним из возможных исходов, которые называют *элементарными исходами* или элементарными событиями. Множество всех возможных исходов случайного эксперимента именуют *пространством элементарных исходов*.

Традиционно изучение теории вероятностей начинают с так называемых дискретных пространств элементарных исходов, число исходов в которых конечно или счётно. Элементарный исход эксперимента принято обозначать

греческой буквой ω или ω_i (индексом указывая номер исхода). Все пространство элементарных исходов обозначают заглавной буквой Ω .

Пример 1. Рассмотрим случайный эксперимент в котором игральную кость подбрасывают дважды. В качестве одного из возможных исходов этого эксперимента может выступать элементарное событие $\omega = (4; 3)$, где 4-число очков, выпавшее при первом броске, а 3 - при втором. Всё пространство элементарных исходов подобного эксперимента состоит из пар (m, k) , где

$1 \leq m, k \leq 6$ ω согласно правилу умножения, будет состоять из $6 \cdot 6 = 36$

элементарных исходов.

Пример 2. Из пяти студентов (Азиз, Олим, Омад, Азим, Тимур) наугад выбирают двух. При этом порядок выбора не важен. Элементарными исходами в таком эксперименте будут

различные пары: например, (Олим, Омад), (Тимур, Азиз), (Олим, Азим) и т. д. Всего таких пар, согласно правилу сочетаний, можно составить:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 100$$

Для описания случайного эксперимента с дискретным пространством исходов надо не только указать множество его возможных исходов, но и каждому исходу приписать шанс его появления в эксперименте. Так шанс для элементарного события ω называют его вероятностью и обозначают $P(\omega)$. Число $P(\omega)$ может принимать значения от нуля (включая и ноль) до единицы (включая единицу). А сумма вероятностей всех элементарных исходов $P(\omega_i)$ всегда равна 1.

Приписывать вероятности $P(\omega)$ элементарным исходам в реальных ситуациях совсем не простая задача. Однако, когда есть основание полагать, что все элементарные исходы эксперимента в дискретном пространстве равновероятны, эта задача решается просто. Надо вычислить количество всех элементарных исходов в эксперименте и определить вероятность любого из них как единицу, деленную на общее число исходов. Такой способ задания вероятностей называется классическим.

Пример 3. Симметричную монету подбрасывают два раза. Элементарными исходами подобного эксперимента будут различные сочетания «орлов» и «решек», выпавших во время первого и второго броска:

$$\omega_1 = \{oo\}, \omega_2 = \{po\}, \omega_3 = \{op\}, \omega_4 = \{pp\}.$$

По правилу умножения получаем, что всего в таком эксперименте возможны $2 \cdot 2 = 4$ элементарных исхода. Считая их равновероятными, находим вероятность каждого элементарного исхода:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{4}$$

На практике нас обычно интересуют не только отдельные элементарные исходы эксперимента, но и некоторые их совокупности или множества.

Такие множества элементарных исходов называют случайными событиями и обозначают начальными

заглавными буквами латинского алфавита: А, В, С, и т.д. Говорят, что в ходе случайного эксперимента произошло случайное событие А, если эксперимент закончился элементарным исходом, который принадлежит событию А.

Зная вероятности элементарных событий в дискретном пространстве, можно определить вероятность случайного события $A = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ как сумму вероятностей всех входящих в него элементарных исходов:

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_k)$$

Из свойств вероятностей элементарных исходов следует, что

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ и } P(\Omega) = 1.$$

$A = \emptyset$ - называется невозможным, $A = \Omega$ - достоверным событием. При этом $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

Пример 4. В классе из двух мальчиков и трех девочек наугад выбирают двух человек для дежурства. При этом порядок выбора не важен. Какова вероятность того, что будет выбрана пара девочек?

Решение. Все пространство элементарных исходов этого эксперимента содержит $C^2_5 = 10$ элементарных исходов. Считая все исходы равновероятными, а это именно так, если выбирать наугад получаем, что

вероятность каждого элементарного исхода этого эксперимента равна $\frac{1}{10}$.

Интересующее нас событие А - выбрана пара девочек - содержит $C^2_3 = 3$ элементарных исхода, так как выбрать пару девочек можно только из трех девочек. (Выбор пары девочек из трех равносильно то что одну из трех девочек мы не выбираем, а это можно сделать тремя способами) Таким образом, вероятность события А равна

$$P(A) = \frac{3}{10} = \frac{3}{10}.$$

Пример 5. Игральную кость подбрасывают дважды. Какова вероятность того, что в сумме на двух костях выпадет 4 очка?

Решение. В примере 1 показано, что пространство элементарных исходов подобного эксперимента состоит из 36 исходов. Если все они равновероятны (а так оно и бывает, если кости бросают честно), то вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{36}$. Осталось вычислить, сколько элементарных исходов

включает событие A - в сумме выпало 4 очка. Таких исходов всего 3: $\omega_1 = (1; 3)$, $\omega_2 = (2; 2)$, $\omega_3 = (3; 1)$.

Следовательно, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Геометрическое определение вероятностей

Если распределение возможных исходов испытания непрерывно и бесконечно, то при решении задач часто используется

понятие ***геометрической вероятности***.

Полагают, что имеется область Ω и в ней область A . Наудачу бросается точка. Событие A - попадание точки в область Ω .

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события A , к мере всей области Ω , т.е.

$$P(A) = \frac{\text{mes}A}{\text{mes}\Omega}$$

где mes - мера множества.

Область Ω может быть одномерной, двумерной, трехмерной и n -мерной.

Пример 6. В круг радиуса $R=50$ бросается точка. Найти вероятность ее попадания во вписанный в круг квадрат.

Решение.

$$P(A) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \quad \text{где } R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ и } a = \sqrt{2}R$$

Пример 7. На отрезок $[0;1]$ наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток $[0,4;0,7]$?

Решение:

Рассмотрим событие: A – брошенная на отрезок $[0;1]$ точка, попала в промежуток $[0,4;0,7]$. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной большего отрезка: $G=1-0=1$ ед., а благоприятствующие событию A исходы – длиной вложенного отрезка: $D=0,7-0,4=0,3$ ед.

По геометрическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{|D|}{|G|} = \frac{0,3}{1} = 0,3$$

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. Партия из 100 болтов содержит 5 бракованных. Берут два болта наугад. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных?

Решение: Всего из 100 болтов выбрать различных пар можно будет (общее число случаев)

$$n = C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950$$

Число благоприятных случаев будет равно числу сочетаний по 2 в каждом из числа только качественных деталей, т.е. из $100-5=95$, тогда

$$m = C_{95}^2 = \frac{95 \cdot 94}{1 \cdot 2} = 4465$$

Вероятность того, что в выбранной наугад паре болтов не окажется бракованной будет

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4465}{4950} = 0,902$$

Задача 2. В учебной группе 25 студентов. Из них 8 отличников, 10 учатся хорошо, 5 – удовлетворительно, 2 – неудовлетворительно. В деканат вызваны 3 студента. Какова вероятность, что это: а) отличники, б) учащиеся хорошо, в) учащиеся удовлетворительно, г) два студента, учащиеся неудовлетворительно и один – удовлетворительно?

Решение: Всего из 27 студентов по 3 можно выбрать

$$n = C_{27}^3 = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2925$$

Благоприятных случаев, что это будут отличники

$$m_1 = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Вероятность, что все студенты окажутся отличниками будет

$$P(3 \text{ отл.}) = \frac{m_1}{n} = \frac{56}{2925}$$

Благоприятных случаев, что все три студента, вызванных в деканат, окажутся учащимися хорошо, будет число сочетаний из 10 по 3:

$$m_2 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Вероятность случаев, что все окажутся учащимися удовлетворительно, будет

$$m_3 = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$m_3 = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Благоприятных случаев, что среди вызванных трех студентов окажутся двое неудовлетворительно и один удовлетворительно учащийся будет равна произведению числа сочетаний из 2 по 2 и из 5 по 1. На основе правила произведения, если объект v может быть выбран m способами и после каждого из этих выборов объект ω в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор v и ω может быть осуществлен $m \cdot n$ способами

$$C_2^2 = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 1 \text{ и } C_5^1 = \frac{5}{1} = 5$$

$$m_4 = C_2^2 \cdot C_5^1 = 5$$

Итак, вероятность, что среди трех студентов, идущих в деканат, окажутся 2

-неудовлетворительно и 1- удовлетворительно учащийся, будет

$$P(2 \text{ неудовл.} + 1 \text{ удовл.}) = \frac{m_4}{n} = \frac{5}{2925} = \frac{1}{585}$$

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

2.1. Исследование показало, что 622 человека из 864 опрошенных сказали, что читают основные новости дня в интернете. Если мы выбираем человека случайно «в толпе», то какова вероятность того, что он скажет, что не читает новости в интернете?

2.2. У Омада есть 6 марок, а у Азиза – 10 марок. Азиз хочет обменять любые две свои марки на любые две марки Омада (известно, что марки у обоих разные). Сколько вариантов такого обмена существует.

2.3. Олим выучил только 6 из 11 вопросов экзамена. В экзаменационном билете 3 вопроса. Если студент верно отвечает как минимум на 2 из них, то получает зачет. Какова в этой ситуации для Олима вероятность сдать экзамен по предмету?

2.4. В вазе 10 красных, 5 синих пуговиц и 3 зеленых. Вынимаются наудачу три пуговицы. Какова вероятность, что а) достанут 2 красные и 1 синюю пуговицы; б) все три пуговицы будут одноцветными?

2.5. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 различным адресам. Сколькими способами они могут распределить работу, если известно, что каждому почтальону может достаться любое количество писем (включая ноль)?

■Задачи для домашнего задания

2.6. Сколькими способами можно разбить группу из 25 человек на три подгруппы А, В и С по 6, 9 и 10 человек соответственно?

2.7. На полке размещены 7 учебников по теории вероятностей и 4 учебника по высшей математике. Книги расположены в случайном порядке. С полки сняли 8 первых попавшихся книг. Найдите вероятность того, что на полке остались: а) только учебники по высшей математике; б) только учебники по теории вероятностей.

2.8. Олим выучил только 6 из 11 вопросов экзамена. В экзаменационном билете 3 вопроса. Если студент верно отвечает как минимум на 2 из них, то получает зачет. Какова в этой ситуации для Олим вероятность сдать экзамен по предмету?

2.9. В тираже лотереи «Омад» разыгрывались 6 случайных номеров из 49 (сейчас существует похожая лотерея «Лото 6 из 49»). Игрок зачеркивает номера 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Найдите вероятность того, что в тираже выиграют именно эти 6 номеров.

2.10. На двери установлен кодовый замок с кнопками. На кнопках изображены цифры от 0 до 9. Чтобы открыть дверь, нужно одновременно нажать 3 кнопки неизвестного нам кода. Найдите вероятность открыть дверь с первой попытки, нажав три кнопки наудачу.

Ответы

2.1. $\approx 0,28$

2.6. 16360143800

2.2. 675

2.7. а) $\approx 0,024$; б) $\approx 0,21$

2.3. $\frac{95}{165}$

2.8. $\approx 0,576$

2.4. а) $\approx 0,276$, б) $\approx 0,16$

2.9. ≈ 0

2.5. $2^{10}=1024$

2.10. $\frac{1}{10}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

ОПЕРАЦИИ С СОБЫТИЯМИ. ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НЕЗАВИСИМЫЕ СОБЫТИЯ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Содержание: определение дополнения, пересечения, объединения; формула сложения вероятностей; понятие независимых и зависимых событий; условная вероятность.

Со случайными событиями, связанными с одним и тем же случайным экспериментом, можно совершать различные теоретико-множественные операции, а именно, строить дополнение события A до всего пространства Ω ,

пересечение и объединение двух или нескольких событий. Вероятности полученных в результате событий можно вычислять не только напрямую, изучая полученные множества элементарных исходов, но и вероятностям событий, которые используются в подобных действиях.

Определение 1. Дополнением $(\bar{A})$ события A до всего пространства элементарных исходов Ω называется такое событие, которое включает все элементарные исходы из Ω , не входящие в A .

При этом $\bar{A}$ означает, что событие A не произошло.

Согласно определению, $(A \cap \bar{A}) = \emptyset$ и $(A \cup \bar{A}) = \Omega$. Ясно, что

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Определение 2. Пересечением событий A и B называется событие $C = A \cap B$, включающее те и только те элементарные исходы, которые одновременно принадлежат и событию A , и событию B . $A \cap B$ означает одновременное появление событий A и B .

Определение 3. Объединением событий A и B называется такое событие $C = A \cup B$, которое содержит все исходы события A и все исходы события B , включая и те что одновременно принадлежат A и B . $A \cup B$ означает, что или A произошло, или B произошло, или A и B одновременно произошло.

Формула сложения вероятностей говорит, как вычислить вероятность объединения двух событий A и B , если известны вероятности этих событий и вероятность их пересечения:

$$P = (A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Если события A и B не пересекаются, то формула сложения вероятностей принимает более простой вид:

$$P = (A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Независимые события

На практике представляет интерес вопрос о том, как может оцениваться вероятность события A , если уже известно, что произошло событие B . В общем виде ответ на этот вопрос дает по условной вероятности, которое будет введено в следующем пункте.

Здесь же мы введем понятие независимых событий, то есть таких, что наступление одного из них никак не влияет на вероятность наступления другого.

Определение 4. Два события A и B называются независимыми, если выполняется условие $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. В противном случае события A и B называются зависимыми.

Пример 1. Игральную кость бросили один раз. Событие A - выпало четное число очков, событие B - выпало число очков, кратное 3. Являются ли события A и B независимыми?

Решение. Событие A включает 3 элементарных исхода: 2, 4, 6, а событие B - два: 3 и 6. Пересечение событий A и B , $A \cap B$ содержит один исход 6. Отсюда получаем вероятности событий A , B и $P(A \cap B)$:

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{3}; P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Легко видеть, что $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, то есть события A и B являются независимыми.

Пример 2. Монету бросили 3 раза. Событие A - выпало ровно два орла, событие B - первый раз выпала решка. Являются ли события A и B независимыми?

Решение. Событие А включает 3 исхода: {оор, оро, роо}. Событие В включает 4 исхода: {роо, рор, рро, ррр}.

Пересечение

$A \cap B$ включает один исход роо. Отсюда получаем вероятности этих событий, помня, что всего в случайном эксперименте 8 равновероятных элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{3}{8}; P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

$$\text{Ясно, что } P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{16} \text{ не равно } P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

События А и В зависимы.

Пример 3. На курсе обучаются 100 студентов. Из них 20 получили на экзамене отличные оценки по математике и английскому языку. При этом всего было поставлено 25 отличных оценок по математике и 30 отличных оценок по английскому языку. Являются ли события А - у случайно выбранного студента отличная оценка по математике - и В - у случайно выбранного студента отличная оценка по английскому языку независимыми?

Решение. У всех студентов шансы быть выбранным равны, поэтому

$$P(A) = \frac{25}{100} = 0,25; P(B) = \frac{30}{100} = 0,3; P(A \cap B) = \frac{20}{100} = 0,2$$

Ясно, что события А и В зависимы, так как определение независимости не выполняется.

Перечислим некоторые элементарные свойства независимых событий.

1. Если события А и В не пересекаются и их вероятности не равны нулю, то события А и В зависимы.

2. Если события А и В независимы, то независимы и события в таких парах: А и $\bar{B}$; $\bar{A}$ и В; $\bar{A}$ и $\bar{B}$

Для независимых событий А и В формула сложения вероятностей имеет вид

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Условная вероятность

Определение 5. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие ненулевой вероятности B , называется величина

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Пример 4. В случайном эксперименте игральную кость бросают один раз. Событие A - выпало четное число очков. Событие B - выпало больше 3 очков. Какова условная вероятность $P(A|B)$?

Решение. Событие A включает 3 элементарных исхода:

$A = \{2, 4, 6\}$, событие B также включает 3 элементарных исхода: $B = \{4, 5, 6\}$ и $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Тогда событие $A \cap B = \{4, 6\}$ и его вероятность равна $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. По определению

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Заметем, что условная вероятность события A не равна его безусловной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Условная вероятность события A при условии B возросла, то есть дополнительная информация (событие B) позволило нам пересмотреть вероятность того, что произойдет событие A .

Если события A и B независимы, то $P(A|B) = P(A)$. Другими словами, информация о том, что произошло событие B , не меняет вероятность того, что произойдет A , если A и B независимы. Иногда это свойство используют в качестве определения независимости событий.

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. В ящике 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Какова вероятность, что он будет белый или черный, что будет цветной, т.е. либо красный либо синий?

Решение: Подсчитаем общее число случаев вытащить 1 шар

$$n = 10 + 15 + 20 + 25 = 70.$$

Пусть А-событие, что вынут белый шар, тогда $P(A) = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$

В-событие, что вынут черный шар, тогда $P(B) = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$.

Вероятность появления либо белого, либо черного шара будет

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14}.$$

Пусть С-событие, что вынут синий шар, тогда $P(C) = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$

Д-событие, что вынут красный шар и $P(D) = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$

Вероятность появления либо синего либо красного шара будет

$$P(C+D) = P(C) + P(D) = \frac{2}{7} + \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

Задача 2. Вероятность попадания каждой ракеты в цель соответственно равна 0,25 и 0,35. Для поражения объекта достаточно попадания одной из них. Определить вероятность попадания в цель, если обе ракеты запущены одновременно.

Решение: А-событие попадания одной ракеты, В-событие попадания второй ракеты. События А и В совместны. Наступление события А не исключает наступления события В, следовательно:

$$P(A \text{ или } B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B);$$

$$P(A + B) = 0,25 + 0,35 - 0,25 \cdot 0,35 = 0,6 - 0,09 = 0,51$$

Задача 3. В первом ящике находится 2 белых и 10 черных шаров. Во втором

– 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика взяли по одному шару. Определить вероятность, что оба этих шара будут белые.

Решение: Обозначим через А-событие, что из 1-го ящика вынут белый шар, через В-событие, что из 2-го ящика вынут белый шар.

Тогда событие АВ будет определять, что оба вынутых шара окажутся

белыми. Так как события А и В являются независимыми, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность события А: $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Вероятность события В:

$$P(B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \text{ следовательно, } P(A \cdot B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Задача 4. Вероятность попадания в цель $P = \frac{1}{5}$, но 10% взрывателей не срабатывают. Какова вероятность поразить цель при одном взрыве?

Решение: Пусть А-событие попадания в цель; В-событие, что взрыватель срабатывает, $\bar{B}$ – событие, что взрыватель не срабатывает.

$P(\bar{B}) = 0,1$ (нам дано), но тогда вероятность противоположного события, т.е. что взрыватель сработает будет

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0,9$$

$P(B)$ -вероятность при совершенном выстреле, т.е. это будет условная вероятность, которую надо обозначить $P(B|A)$:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{5} \cdot 0,9 = 0,18$$

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

3.1. В отделении банка стоят 2 круглосуточных банкомата. Утром каждый из них независимо от другого неисправен с вероятностью 0,05. Найдите вероятность, что утром: а) хотя бы один банкомат исправен; б) ни один банкомат не исправен; в) оба банкомата исправны; г) исправен только один банкомат.

3.2. Симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы один орел.

3.3. В интернет-магазине три телефонных оператора. В случайный момент оператор занят разговором с клиентом с вероятностью 0,7 независимо от других операторов. Найдите вероятность того, что в случайный момент: а) все операторы заняты, б) заняты только два

оператора.

3.4. В тесте по химии три независимые части. Чтобы пройти тест, учащийся должен получить не менее 6 баллов за каждую из них. Олим лучше подготовлен к первой части вероятность получить не менее 6 баллов за первую часть для него равна 0,9, за вторую - 0,5, за третью - только 0,4. Найдите вероятность того, что Олим не пройдет тест.

3.5. В банке три окна работы с клиентами. В случайный момент вероятность того, что окно закрыто (нет оператора на месте, неисправна оборудование и пр.), равна 0,9. Окна работают независимо друг от друга. В банк заходит клиент. Найдите вероятность того, что в этот момент работает хотя бы одно окно.

■ Задачи для домашнего задания

3.6. В автомобиле две независимые тормозные системы. Вероятность того, что одна система откажет в торможении, равна 0,00001. Такова же вероятность отказа и для второй системы. Рассмотрите события A - отказ первой системы, B - отказ второй системы, и найдите вероятность того, что откажут обе системы. Далее найдите вероятность события B при условии события A . Во сколько раз $P(B|A)$ больше

$P(A \cap B)$?

3.7. Системный администратор обслуживает три независимых сервера. Вероятность того, что в течение дня первый сервер потребует вмешательства,

равна 0,3. Вероятность того, что это второй сервер потребует вмешательства, равна 0,2. Для третьего сервера вероятность вмешательства составляет 0,1.

Найдите вероятность того, что в течение случайно взятого дня ни один сервер не потребует вмешательства.

3.8. Студент сообщил родителям, проживающим в другом городе, что приедет к ним на каникулы в один из двух дней. В каждый из этих дней он может поехать одним из трех рейсов автобусного маршрута. В первый день первыми двумя рейсами студент не приехал. Предполагая, что студент выбирает для поездки день и время наугад, найдите

вероятность того, что он приедет в первый день третьим рейсом.

3.9. В лаборатории проводятся два независимых испытания. Каждое из них может закончиться успехом или неудачей. Вероятность успеха в первом испытании равна 0,8. Вероятность успеха во втором испытании равна 0,7. Какова вероятность, что хотя бы один случайный эксперимент завершится успехом? Какова вероятность, что ни один не завершится успехом?

3.10. Два студента независимо друг от друга сдают экзамен по теории вероятностей. Вероятность того, что первый из них получит отличную оценку равна 0,6, а вероятность того, что второй получит отличную оценку, равна 0,2. Найти вероятность того, что отличную оценку: а) получит только один; б) получат оба; в) получит хотя бы один?

Ответы

3.1. а) 0,9975; б) 0,0025; в) 0,9025; г) 0,095

3.2. 0,75

3.3. а) $0,7^3 = 0,343$; б) 0,441

3.4. 0,82

3.5. $1 - 0,9^3 = 0,271$

3.6. а) 10^{-10} ; б) 10^{-5} ; в) 10^5

3.7. 0,504

3.8. 0,25

3.9. 0,15

3.10. а) 0,56; б) 0,12; в) 0,68

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Содержание: полная система событий; формула полной вероятности; формула Байеса.

Основные сведения из теории

Формула полной вероятности

На практике часто бывает нужно по известным условным вероятностям события A восстановить безусловную вероятность $P(A)$. Это можно сделать с помощью формулы полной вероятности. Для задания этой формулы нам понадобится дополнительное понятие – полная система событий.

Определение 1. Система подмножеств $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ пространства элементарных исходов Ω называется полной системой событий, если выполнены два условия:

1. $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, то есть объединение всех подмножеств дает все пространство элементарных исходов.
2. Пересечение любых двух различных множеств из системы $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ равно пустому множеству.
Множества $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ часто называют гипотезами. Отсюда и обозначение H (от английского Hypothesis).

Пример 1. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Определим событие H_1 как выпадение одинакового числа очков оба раза, а событие H_2 – как выпадение разных чисел очков при первом и втором броске.

Ясно, что гипотезы H_1, H_2 образуют полную систему событий.

Пример 2. В случайном эксперименте монету подбрасывают дважды. Пусть событие H_1 – выпала хотя бы одна решка, а событие H_2 – выпал хотя бы один орел. Образуют ли события H_1, H_2 полную систему событий?

Решение. Событие H_1 включает три элементарных исхода:

$$H_1 = \{pp, po, op\}.$$

Событие H_2 также включает три исхода:

$$H_2 = \{oo, po, op\}.$$

Их объединение дает всё пространство элементарных исходов Ω , но пересечение H_1, H_2 не равно пустому множеству, так как

$$H_1 \cap H_2 = \{po, op\}.$$

Следовательно, H_1, H_2 не является полной системой событий.

Утверждение 4.1. Пусть $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ - полная система событий и все

$P(H_i)$ не равны нулю. Тогда справедлива следующая формула:

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \dots P(A|H_n) \cdot P(H_n)$$

Её называют формулой полной вероятности.

Формула Байеса

Суть формулы Байеса состоит в том, что при наступлении некоторого события мы можем проверять и корректировать полученные до имеющегося испытания вероятности выдвинутых гипотез. На практике это позволяет корректировать принятие решений. Вероятности, которые известны до проведения эксперимента, называются априорными, а те, которые после проведения эксперимента вычислены по формуле Байеса, - апостериорными.

Пусть задана полная система событий (гипотез) $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, разбивающая все пространство элементарных исходов Ω , и их некоторые априорные вероятности $P(H_1), P(H_2), P(H_3), \dots, P(H_n)$. На практике часто существуют трудности с назначением этих вероятностей, и ставится задача их уточнения после получения дополнительной информации в ходе проведения случайного эксперимента, то есть вычисления

НОВЫХ

апостериорных вероятностей гипотез $P(H_i|A)$, при условии того, что произошло некоторое событие A .

Например, вероятность заключения выгодного контракта может сильно зависеть от экономической ситуации. При хорошей экономической ситуации она обычно заметно выше, чем при плохой. Однако вероятности наступления хорошей или плохой экономической ситуации далеко не всегда очевидны.

Поэтому при их оценке полезно корректировать их по дополнительной информации, скажем, по факту заключения выгодного контракта. Для решения подобных задач используется формула Байеса.

Утверждение 4.2. Если $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ - полная система событий, а вероятность события A не равна нулю, то

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \dots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)} = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$$

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. Вероятность брака при изготовлении детали равна 0,04. Приемка деталей производится при упрощенной системе контроля: годная деталь принимается с вероятностью 0,98, а бракованная – 0,1. Найти: а) вероятность приемки деталей; б) вероятность того, что деталь окажется бракованной.

Решение: а) Пусть A -событие, что деталь изготовлена;

H_1 - гипотеза(предположение), что изготовленная деталь A хорошая $P(H_1) = 0,96$;

H_2 - гипотеза, что A – бракованная: $P(H_2) = 0,04$;

$P(A|H_1) = 0,98$ – вероятность, что принятая деталь хорошая;

$P(A|H_2) = 0,1$ – что деталь будет принята в предложении второй гипотезы, т.е. деталь бракованная.

Полная вероятность, что деталь будет принята

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,96 \cdot 0,98 + 0,04 \cdot 0,1 \\ = 0,9448.$$

б) Вероятность того, что принятая деталь окажется бракованной

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)}$$

$$P(A|H_2) = \frac{0,04 \cdot 0,1}{0,9448} = 0,00423$$

Задача 2. Имеются 3 одинаковые ящика с шарами. В первом ящике 30 белых и 20 черных шаров, во втором – 15 белых и 15 черных и в третьем – 5 белых и 15 черных. Какова вероятность вытащить из ящика черный шар?

Решение: Система гипотез будет H_1 – выбран 1-ый ящик, H_2 – выбран 2-ой ящик, H_3 – выбран 3-ий ящик. Пусть A – событие, что из выбранного ящика вытащен черный шар. Вероятность гипотез (выбрать наугад ящик) до опыта одинакова и, следовательно,

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

Условие вероятности события A по каждой гипотезе:

$$P(A|H_1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5};$$

$$P(A|H_2) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2};$$

$$P(A|H_3) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4};$$

Полная вероятность вытащить черный шар будет

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) = \frac{11}{20} = 0,55$$

Задача 3. В команде студентов, выступающей на городских соревнованиях по стрельбе, 3 студента стреляют отлично, 4 – хорошо и 5- удовлетворительно. Вероятность попадания в цель отлично стреляющим равна 0,9, хорошо стреляющим – 0,75 и удовлетворительно – 0,5. Вызванный наугад из команды студент сделал два выстрела и получил 1 промах и 1 попадание. Какова вероятность, что это был отлично стреляющий стрелок.

Решение: Гипотеза H_1 , H_2 , H_3 - выполнял стрельбу отлично, хорошо, удовлетворительно стреляющий студент соответственно. Пусть событие A_j - попадание, A_j^c - промах, при -ом выстреле; В- промах и попадание при 2-х выстрелах. Вероятности гипотез определяются как классические вероятности:

$$P(H_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};$$

$$P(H_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3};$$

$$P(H_3) = \frac{5}{12}$$

Условные вероятности:

$$\begin{aligned}
 P(B|H_1) &= P(A_1|H_1) \cdot P(\bar{A}_1|H_1) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09; \\
 P(B|H_2) &= P(A_1|H_2) \cdot P(\bar{A}_2|H_2) = 0,75 \cdot 0,25 = 0,1875; \\
 P(B|H_3) &= P(A_1|H_3) \cdot P(\bar{A}_3|H_3) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.
 \end{aligned}$$

Искомая условная вероятность первой гипотезы находится по формуле Байеса:

$$P(B|H_1) = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0,09}{\frac{1}{4} \cdot 0,09 + \frac{1}{3} \cdot 0,1875 + \frac{5}{12} \cdot 0,25} = 0,118$$

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

4.1. В одном институте юноши составляют 60% студентов. У 80% студентов и 75% студенток есть билеты в музей. В бюро находок принесли потерянный кем-то билет.

а) Какова вероятность того, что потерянный билет принадлежал студентке? б) Какова вероятность того, что потерянный билет принадлежал студенту?

4.2. В магазин фарфоровой посуды один и тот же ассортимент поставляют две фирмы. Первая фирма поставляет 65%, а вторая – 35% продукции. Вероятность дефекта посуды у первого поставщика – 0,1, у второго 0,05. Покупатель купил товар и обнаружил, что он бракованный. Какова вероятность того, что этот товар от первой фирмы?

4.3. В первой коробке лежат 6 красных и 4 зеленых шаров, а во второй коробке – 3 красных и 6 зеленых шаров. Из первой коробки случайным образом взяли 1 шар и переложили его во вторую коробку. Затем из 2 коробки наугад достали один шар. Оказалось, что этот шар красный. Вычислить какова вероятность того, что из первой коробки во вторую переложили именно красный шар.

4.4. Изделие имеет скрытые дефекты с вероятностью 0,2. В течении года выходит из строя 75% изделий со скрытыми дефектами и 15% - без них. Найти вероятность, что дефекты были, если изделие вышло из строя.

4.5. Среди студентов 2 курса 20 % имели отличную оценку по математике на первом курсе. При этом лишь 70 % от числа студентов, имеющих отличную оценку по математике на первом курсе, получили отличную оценку по математике и на втором курсе. Кроме того, 15 % от числа студентов, которые не были отличниками по математике на первом курсе, получили «отлично» по математике на втором курсе. Сколько процентов студентов второго курса имеют отличную оценку по математике за второй курс?

■Задачи для домашнего задания

4.6. В выборке опроса общественного Мнения участвует 500 человек, 300 из которых имеют высшее образование.

Вероятность того, что респондент с высшим образованием хочет, чтобы его дети после школы поступили в ВУЗ, равна 0,85. Для респондентов без высшего образования эта вероятность равна 0,7.

а) Найдите вероятность того, что наудачу выбранный респондент будет стремиться дать своим детям высшее образование.

б) Предположим, оказалось, что респондент не хочет, чтобы его дети получали высшее образование. Какова тогда вероятность того, что у него самого есть высшее образование?

4.7. За прошлый год было установлено, что 40% посетителей магазина не бывали в нем ранее. В то время как некоторые пришли посмотреть ассортимент, 30% посетителей что-либо купили. Однако среди тех, кто в магазине раньше не был, покупку совершили только 20%. Какова вероятность того, что посетитель уже бывал в магазине ранее, если известно, что при посещении он ничего не купил?

4.8. В коробке лежат теннисные мячи: 3 новых и 3 старых. Для первой игры наудачу берут 2 мяча и затем после игры не возвращают в коробку. Какова вероятность взять из этой коробки наудачу 2 новых мяча для второй игры?

4.9. На текстильной фабрике 30% продукции ткани производится оборудованием А, 25 % продукции оборудованием В, а остальная продукция производится оборудованием С. У машины А в брак идет 1 % производимой ею продукции, у машины В - 1,2% производимой ею продукции, а у машины С - 2 %. В течение дня эти три машины производят несколько тысяч единиц продукции.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранная единица продукции окажется бракованной?

б) Случайно выбранная единица продукции оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она была произведена оборудованием А? оборудованием В? оборудованием С?

4.10. Стрелок А поражает мишень с вероятностью 0,6; стрелок В с вероятностью 0,4. Стрелки выстрелили в

мишень одновременно и два выстрела попали в цель. Что вероятнее: попал стрелок В в цель или нет?

Ответы

4.1. а) 0,38; б) 0,62

4.2. $\approx 0,788$

4.3. $\frac{2}{3}$

4.4. $\frac{5}{9}$

4.5. 26 %

4.6. а) 0,79; б) 0,43

4.7. $\approx 0,633$

4.8. 0,2

4.9. а) $\approx 0,015$; б) 0,2; 0,2; 0,6;

4.10. $\frac{10}{19}$ - вероятнее, что попал

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5 ИСПЫТАНИЕ БЕРНУЛЛИ. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.

Содержание: Испытание Бернулли; последовательность испытаний Бернулли; биномиальное распределение.

Основные сведения из теории

Определение 1. Испытания Бернулли называют случайный эксперимент с двумя возможными элементарными исходами: («1 или 0»). Один из этих исходов обычно условно именуют успехом, а другой - неудачей. Вероятность успеха обозначают через p , а вероятность неудачи $q = 1 - p$.

Пример 1. Подбрасывание монеты можно считать испытанием Бернулли. Если монета симметричная, то вероятность выпадения орла и решки

одинакова и равна $\frac{1}{2}$. Один из этих исходов, скажем, выпадение орла, можно условно назвать успехом.

Пример 2. Если при подбрасывании игральной кости нас интересует лишь выпадение или не выпадение шестерки, этот эксперимент тоже можно считать испытанием Бернулли. Если считать выпадение шестерки успехом, то его вероятность равна $\frac{1}{6}$. Неудачей назовем выпадение любой другой

границы. Вероятность неудачи равна $\frac{5}{6}$.

Определение 2. Последовательностью (или серией) из n испытаний Бернулли называют такой случайный эксперимент, в котором независимо повторяют испытание Бернулли n раз. При этом вероятность успеха p не меняется от опыта к опыту. Число элементарных исходов в серии из n испытаний Бернулли равно 2^n . Вероятность любого элементарного исхода в серии из n испытаний Бернулли равна $p^k q^{n-k}$, где k – число успехов в этой серии, а $(n - k)$ – число неудач.

Пример 3. Монету подбросили 3 раза. Найти общее число элементарных исходов в этом эксперименте. Найти число элементарных исходов в событии $A = \{\text{выпал ровно один орел}\}$. Найти его вероятность.

Решение. Указанный эксперимент является серией из трех испытаний Бернулли. Общее число элементарных исходов в этом эксперименте равно $2^3 = 8$. В событие A входят три элементарных исхода, а именно {орр, рор, рро}. Вероятность каждого из них равна $\frac{1}{8}$. Следовательно,

В серии из n испытаний Бернулли представляет интерес общее число успехов – S_n . Эта величина является случайной и в зависимости от исхода испытаний может принимать значения от 0 до n . Основные понятия, связанные с дискретными случайными величинами, вводятся и обсуждаются в разделе 6. Здесь, однако, мы укажем, как распределены вероятности различных возможных значений S_n .

Определение 3. Распределение вероятностей числа успехов S_n в серии из n испытаний Бернулли называют биномиальным распределением. Вероятность того, что в серии из n испытаний Бернулли произойдет ровно k успехов,

равна $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. Вероятность прибытия поезда без опоздания равна 0,98. Найти вероятность того, что из 5 последовательно прибывших поездов 4 прибдут без опоздания.

Решение:

$$P_4(\mu = 4) = C^4 \cdot 0,98^4 \cdot 0,02 \approx 0,09$$

Задача 2. В библиотеке имеются книги по общему курсу математики и по теории вероятностей. Вероятность того, что любой читатель возьмет книгу по общей математике равна 0,7, а по теории вероятностей – 0,3. Определить вероятность того, 5 читателей подряд возьмут книги или только по общему курсу математики или только по теории вероятностей, если каждый из них берет только одну книгу.

Решение: По формуле Бернулли имеем:

$$1) P_5(\mu = 5) = C^5_5 (0,7)^5 \cdot (0,3)^0 = 1 \cdot 0,7^5 = 0,1681;$$

$$2) P_5(\mu = 5) = C^5_5 (0,3)^5 \cdot (0,7)^0 = 1 \cdot 0,3^5 = 0,0024.$$

По теореме сложения

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,1681 + 0,0024 = 0,1705.$$

Задача 3. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника четыре партии из пяти или семь из девяти?

Решение: Так как противники равносильны, то вероятность выигрыша и проигрыша для каждого партнера одинаковы, т.е. $p=q=\frac{1}{2}$. А. Вероятность выиграть 4 партии из пяти:

$$P_5(\mu=4)=C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

Б. Вероятность выигрыша 7 из 9:

$$P_9(\mu=7)=C_9^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(2)^9} = \frac{9}{188}$$

Отсюда ясно, что вероятнее первый случай.

Задача 4. Найти наивероятнейшее число бракованных деталей из 5-ти отобранных и вероятность этого числа, если вероятность изготовления стандартной детали равна 0,8.

Решение. Наивероятнейшее число появления бракованных деталей следующее:

$$5 \cdot 0,2 - 0,8 \leq m_0 \leq 5 \cdot 0,2 + 0,2 \quad \text{или} \quad 0,2 \leq m_0 \leq 1,2$$

Единственное целое число, удовлетворяющее полученному неравенству

$m_0 = 1$, и вероятность появления одной бракованной детали вычислим по формуле Бернулли:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = 0,4096$$

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

5.1. Экзамен состоит из 6 вопросов теста. На каждый вопрос предлагается 3 возможных варианта ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить по крайней мере на 5 вопросов?

5.2. Вратарь парирует (т. е. отражает) в среднем 0,3 всех один-надцатиметровых штрафных ударов. Какова вероятность того, что он возьмет ровно два из четырех ударов?

5.3. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых надо выбрать один правильный. Какова вероятность, что совершенно не готовясь к тесту, студенту удастся угадать правильные ответы по крайней мере на 5 вопросов?

5.4. Вероятность попадания в мишень у некоторого биатлониста при одном выстреле равна $\frac{4}{5}$. Спортсмен делает 5 выстрелов. Какова вероятность не

менее трех попаданий, если попадание в мишень при

каждом последующем выстреле не зависит от предыдущих выстрелов?

5.5. Известно, что 80 % учителей – женщины. Найдите вероятность того, что из пяти случайно отобранных учителей более трех – женщины.

■ Задачи для домашнего задания

5.6. Две трети сотрудников компании имеют водительское удостоверение. Для командировки случайным образом выбирают четырех сотрудников. Какова вероятность того, что по крайней мере у двух из них есть права водителя?

5.7. В ходе социологического исследования, выборка которого случайна, школьникам мужского пола в старших классах предлагалось ответить на вопрос: «Согласны вы или не согласны с утверждением «Я пойду служить в армию, потому что считаю, что это долг каждого мужчины перед Родиной»? В опросе принимали участие 700 человек, 440 из которых были не согласны с данным суждением. Найдите вероятность того, что среди 11 случайно выбранных респондентов ровно 4 из них, напротив, согласились с предложенным утверждением.

5.8. Выпускник факультета легкой промышленности послал заявку на участие с докладом в 4-х независимых международных конференциях. На каждую из них он может попасть с вероятностью 0,6.

а) Какова вероятность того, что выпускник будет участником на двух или трех конференциях?

б) Какова вероятность того, что выпускник не будет участвовать только на одной конференции?

5.9. Игральную кость бросают 5 раз. Какова вероятность того, что при этом выпадет более одной шестерки?

5.10. В семье 8 детей. Считая, что дети в семье рождаются независимо друг от друга, мальчики и девочки с равными вероятностями, определите вероятность того, что в данной семье мальчиков не более трех.

Ответ

5.1. $\approx 0,017$

5.6. $\approx 0,892$

5.2. $\approx 0,265$

5.7. $\approx 0,337$

5.3. $0,197$

5.8. а) $0,6912$;

в) $\approx 0,00006$; г) $\approx 0,000007$; б) $0,3456$

5.4. $\approx 0,363$

5.9. $\approx 0,196$

5.5. $\approx 0,737$

5.10. $0,363$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6
ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЁ
ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ОЖИДАНИЕ,
ДИСПЕРСИЯ, СРЕДНЕ - КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ.
НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Содержание : дискретная величина, ряд распределения, независимые случайные величины, математическое ожидание, среднее - квадратическое отклонение.

Основные сведения из теории

Определение 1. Случайная величина называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Пример 1. Игральную кость бросают один раз. Определим случайную величину X как выпавшее число очков.

Ясно, что эта случайная величина дискретна. Она может принимать шесть значений.

Пример 2. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором стрелок стреляет в мишень до первого попадания. Определим случайную величину X как число выстрелов до первого попадания. Эта случайная величина может принимать значения 0 (если попал с первого раза), 1, 2, 3, 4, ... Множество значений этой величины бесконечно, так как стрелок может вообще не попасть в мишень, но счетно.

Чтобы полностью описать дискретную случайную величину, надо указать множество ее возможных значений и вероятность каждого из этих значений.

Определение 2. Рядом распределения дискретной случайной величины X называется множество всех возможных значений случайной величины и вероятностей этих значений. Обычно ряд распределения дискретной случайной величины X записывают в виде таблицы. В первой строке таблицы указывают значения случайной величины, а во второй строке – их вероятности. Сумма вероятностей всех значений дискретной случайной величины равна 1, т.е.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Пример 3. В случайном эксперименте монету подбросили 2 раза. Определим случайную величину X как число выпавших орлов. Найти ряд распределения X .

Решение. Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2. Всего в этом эксперименте возможны 4 равновероятных исхода: {pp, op, po, oo}.

Вероятность каждого исхода $\frac{1}{4}$. Следовательно, ряд распределения X имеет следующий вид:

X	0	1	2
$P(x = x_n)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Определение 3. Случайные величины X и Y называются независимыми, если события $X = a_k$ и $Y = b_j$ независимы для любых возможных значений a_k и b_j , то есть выполняется равенство

$$P(X = a_k, Y = b_j) = P(X = a_k) \cdot P(Y = b_j).$$

Если это равенство не выполняется хотя бы для какой-нибудь пары значений случайных величин, то X и Y не являются независимыми. Тогда их называют взаимно зависимыми.

Можно сформулировать определение независимости случайных величин и иным эквивалентным образом: случайные величины X и Y называются независимыми, если независимы два любых события A и B , выражающиеся соответственно только через случайные величины X и Y . Поясним: независимость случайных величин так же важна, как и независимость событий. Эти два понятия тесно связаны. Напомним, что два события A и B называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пусть случайная величины X принимает значения $a_1, a_2, \dots, a_m$, а случайная величина Y принимает значения $b_1, b_2, \dots, b_n$ с некоторыми вероятностями. Тогда можно рассмотреть конкретные (отдельные) события $X = a_k$ и $Y = b_j$.

В дальнейшем для краткости вместо $P((X = a) \cap (Y = b))$ можно писать

$P(X=a, Y=b)$, по-прежнему подразумевая под этим вероятность пересечения событий.

Определение 4. Математическим ожиданием дискретной случайной величины или ее средним значением называется величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Пример 4. Вычислить математическое ожидание числа выпавших орлов при двукратном бросании монеты.

Решение. Ряд распределения этой случайной величины задается следующей таблицей:

X	0	1	2
$P(x = x_n)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Следовательно, $M(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими свойствами:

- 1) $M(C) = C$, где C -константа;
- 2) $M(aX) = aM(X)$, где a -константа, а X – случайная величина;
- 3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
- 4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, если X и Y – независимые случайные величины.

Определение 5. Дисперсией дискретной случайной величины называется величина $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Дисперсия случайной величины – это средний квадрат отклонения от математического ожидания. Это очень важный параметр, который показывает разброс значений случайной величины, служит мерой рассеивания ее значений. Для расчетов дисперсии более удобна формула $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Пример 5. Вычислить дисперсию числа выпавших орлов при двукратном бросании монеты.

Решение. Математическое ожидание

$M(X) = 1$ (см. пример 4). Для вычисления дисперсии надо уметь вычислять математическое ожидание величины X^2 . Ее

ряд распределения таков:

X^2	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Следовательно, $M(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{2}$

Отсюда $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1 \frac{1}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$

Перечислим свойства дисперсии:

- 1) $D(C) = 0$, где C -константа;
- 2) $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$, где a -константа;
- 3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y – независимые случайные величины.
- 4) $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$, если X и Y – произвольные случайные величины, а $Cov(X, Y) = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y)))$ – ковариация двух случайных величин.

(Более подробно понятие ковариация будет обсуждаться далее в разделе о ковариации и корреляции.)

У дисперсии есть недостаток: дисперсия измеряется не в тех единицах, что сама случайная величина. Например, если случайная величина X – расстояние, то она измеряется в метрах. В этом случае $D(X)$ будет измеряться в квадратных метрах. А что если X – напряжение и измеряется в вольтах? Тогда дисперсию $D(X)$ придется измерять в квадратных вольтах... По этой причине вместо дисперсии часто используется мера рассеивания, которая называется средним квадратичным или стандартным отклонением и равна арифметическому квадратному корню из дисперсии. Стандартное отклонение часто обозначают греческой буквой σ (сигма): $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. В результате мониторинга преподавательской жизни, ежегодно проводимого администрацией университета,

было зафиксировано, сколько научных работа опубликовал каждый преподаватель в течение минувшего года.

В результате исследования стало известно, что число научных работ, опубликованных преподавателем в течение прошлого года, является случайной величиной со следующим законом распределения:

X (число публикаций)	0	1	2	3	4	5
P (вероятность)	0,2	?	0,3	0,1	0,1	0,1

Найдите: а) среднее значение случайной величины X ;

б) дисперсию и стандартное отклонение $0,1=$

Решение. Выполним следующие расчеты.

1. Вероятность только одной публикации в течение года (по данным таблицы) равна

$$P(X = 1) = 1 - 0,2 - 0,3 - 0,1 - 0,1 - 0,1 = 0,2.$$

2. Найдем среднее значение (математическое ожидание случайной величины):

$$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,1 = 2$$

(публикации в год).

3. Рассчитаем дисперсию случайной величины и найдем стандартное отклонение:

$$D(X) = (0 - 2)^2 \cdot 0,2 + (1 - 2)^2 \cdot 0,2 + (2 - 2)^2 \cdot 0,3 + (3 - 2)^2 \cdot 0,1 + (4 - 2)^2 \cdot 0,1 + (5 - 2)^2 \cdot 0,1 = 4 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 = 2,4 \text{ (публикации)}^2.$$

Отсюда стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,4} \approx 1,5 \text{ (публикации)}.$$

Дисперсию можно вычислить и другим образом. Поскольку

$$D(X) = M(X)^2 - (M(X))^2,$$

То корректными будут вычисления математического ожидания квадрата случайной величины X , из которого вычитается квадрат математического ожидания случайной

величины X . Имеем:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,1 + 5^2 \cdot 0,1 \\ &= 0^2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,1 = 0 + 0,2 + 1,2 + 0,9 + 1,6 + 2,5 = 6,4 \end{aligned}$$

Тогда $D(X) = 6,4 - 2^2 = 6,4 - 4 = 2,4$ (публикации)².

Задача 2. Известно, что во многих странах, особенно в Англии, широкую популярность приобрели садовые лабиринты. Они привлекательны и представляют собой садовые украшения, состоящие из живых изгородей или дорожек, обсаженных растениями и ведущих к одному центру. Эти дорожки изгибаются в разные стороны и выглядят порой столь замысловато, что гуляющим людям нелегко добраться до этого центра, также как и найти обратный путь. В некотором культурологическом исследовании, посвященном изучению садовых лабиринтов в городских парках, изучается вся совокупность, состоящая из 15 небольших лабиринтов, имеющих непростую систему садовых коридоров. Рассматривается случайная величина L – суммарная длина (протяженность) лабиринта, измеряемая одновременно как в метрах, так и в футах. Среднее и стандартное отклонение протяженности лабиринта соответственно равны:

$$M(L_m) = 85 \text{ (метров)}, \sqrt{D(L_m)} = 8 \text{ (метров)}.$$

Найдите среднее, дисперсию и стандартное отклонение рассматриваемой случайной величины в футах. (Примечание. Один фут (ф) равен примерно 30,5 см.)

Решение. Это задача на применение свойств математического ожидания и дисперсии. Введем случайную величину L_f – суммарная протяженность лабиринта (в футах). $L_f - \frac{1}{0,305}$, где L_m – суммарная протяженность лабиринта (в метрах).

Отсюда найдем среднее, дисперсию и стандартное отклонение случайно величины L_f :

$$M(L_f) = M\left(\frac{1}{0,305} L_m\right) = \frac{1}{0,305} M(L_m) = \frac{1}{0,305} \cdot 85 \\ \approx 278,7 \text{ (футов)};$$

$$D(L_f) = D\left(\frac{1}{0,305} L_m\right) = \left(\frac{1}{0,305}\right)^2 D(L_m) = \left(\frac{1}{0,305}\right)^2 \cdot 8^2 \approx 687,99 \approx 688 \text{ (футов)}^2$$

$$D(L_f) = D\left(\frac{1}{0,305} L_m\right) = \left(\frac{1}{0,305}\right)^2 D(L_m) = \left(\frac{1}{0,305}\right)^2 \cdot 8^2 \approx 687,99 \approx 688 \text{ (футов)}^2$$

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

6.1. Менеджер торгового зала бытовой техники анализирует, каков в течение дня объем продаж домашних хлебопечек. Известно, что число хлебопечек, требуемых в магазине за день, является случайной величиной с такого закона распределения: Найдите среднее значение случайной величины X , дисперсию и стандартное отклонение случайной величины X .

X (число хлебопечек)	0	1	2	4
P (вероятность)	0,3	0,4	0,15	0,05

6.2. В некотором многоквартирном доме г. Ташкенте 30% домохозяйств не имеют автомобиля, 40% имеют по одной машине, 20 % домохозяйств имеют по две машины, остальные домохозяйства имеют по три машины. Найдите среднее значение и стандартное отклонение числа машин, находящихся в распоряжении одной семьи (домохозяйства).

6.3. В ходе исследования (объем случайной выборки большой - около 1000 человек), проведенного среди жителей мегаполиса, респондентам был задан вопрос: «Укажите, пожалуйста, общее количество гаджетов Apple, которыми обладаете ЛИЧНО вы (MAC, IPHONE, IPAD, IPOD и пр.)». Распределение вероятностей случайной величины - числа гаджетов Apple, имеющихся у жителя мегаполиса, - приведено в таблице ниже:

Число продуктов <i>Apple</i>	0	1	2	3	4	5	6
Оценка вероятности	0,36	0,25	0,11	0,11	?	0,06	0,03

а) Укажите пропущенную вероятность.

б) Вычислите среднее число предметов *Apple* у жителя мегаполиса. в) Найдите дисперсию и стандартное отклонение.

6.4. Дан закон распределения случайной величины X .

X	-5	-1	0	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	?	$\frac{1}{8}$

а) Найдите пропущенную вероятность.

б) Найдите математическое ожидание данной случайной величины, её дисперсию и стандартное отклонение.

6.5. Случайные величины X и Y независимы. Математическое ожидание случайной величины X равно -2, а стандартное отклонение равно 5. Математическое ожидание случайной величины Y равно 4, а стандартное отклонение равно 6. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$L = 8X - 4Y - 12.$$

■ Задачи для домашнего задания

6.6. Случайные величины X и Y независимы. Математическое ожидание случайной величины X равно 7, а стандартное отклонение равно 2. Математическое ожидание случайной величины Y равно -5, а стандартное отклонение равно 3. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $T = 3X - 6Y + 8$.

6.7. Случайные величины X и Y независимы. Математическое ожидание случайной величины X равно -10, а стандартное отклонение равно 4. Математическое ожидание случайной величины Y равно 6, а стандартное отклонение равно 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию

случайной величины $W = -12X + 2Y + 5$.

6.8. Клиент, желающий получить кредит на покупку машины, заполняет бланк заказа, а компьютерная система банка проверяет, не превысил ли он верхний порог кредитного лимита. Вероятность того, что клиент превысит верхний порог кредитного лимита, равна 0,05. В течение дня поступило 40 заказов на получение кредита. Найдите среднее и стандартное отклонение количества клиентов банка, превысивших верхний порог кредитного лимита при заполнении бланка заказа на кредит.

6.9. В оптовом магазине минеральная вода продается либо поштучно, либо упаковками по 2 или 16 бутылок. Предпочтения покупателей этой воды известны: вероятность покупки одной бутылки равна 0,74, упаковки из двух бутылок - 0,24, упаковки из 16 бутылок - 0,02. Найдите дисперсию величины

«число бутылок в одной покупке».

6.10. В случае незначительной поломки система водоснабжения находится в неработающем состоянии в течение 5 минут, в случае существенной поломки

- 30 минут, а в случае катастрофической поломки - 120 минут. На незначительные поломки приходится 60 % случаев, на существенные поломки - 30 %, остальные поломки - катастрофические.

а) Найдите среднее время простоя по причине поломки;

б) Вычислите дисперсию и стандартное отклонение времени простоя.

Ответы

6.1. а) 1,2; б) 1,26; $\approx 1,12$

6.2. а) 1,1; б) $\approx 0,94$

6.3. а) 0,08; б) 1,6; в) 2,98 и $\approx 1,73$

6.1. а) $\frac{2}{8}$; б) $-\frac{10}{8}$; в) $\frac{99}{16}; \frac{\sqrt{99}}{4}$

6.5. -44; 2176

6.6. 59; 360

6.7. 137; 2308

6.8. 2; $\approx 1,38$

6.9. $\approx 4,45$

6.10. а) 24; б) 1149; $\approx 33,9$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Содержание: определение распределения Пуассона; геометрическое распределение; утверждение для распределения Пуассона.

Основные сведения из теории

Во многих практических задачах теории массового обслуживания, страхования и надежности для описания случайного числа наступающих событий за некоторый промежуток времени хорошо подходит распределение Пуассона. В качестве таких событий могут выступать заявки на обслуживание, страховые случаи, отказы оборудования и так далее.

Определение 1. Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если она может принимать значения $0, 1, 2, 3, \dots, k, \dots$, а вероятность конкретного значения задается формулой

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

где $\lambda > 0$ - параметр распределения.

Математическое ожидание X : $E(X) = \lambda$. Другими словами, λ - это среднее число событий в единицу времени. Дисперсия X :

$$D(X) = \lambda.$$

Пример 1. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$. Найдём вероятность события $X \geq 2$.

Решение.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} - \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \approx 0,24.$$

Пример 2. В офис некоторой компании в среднем поступает 90 звонков в час. Найдём вероятность того, что в течение двух минут в офис поступит ровно 1 звонок.

Решение. Если в час в среднем поступает 90 звонков, то в течение 2 минут в среднем поступает $90:30=3$ звонка. То есть для интервала времени 2 минуты $\lambda = 3$ (звонка).

Тогда

$$P(X=1) = \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} = 3 \cdot e^{-\lambda} \approx \frac{3}{(2.7)^3} \approx 0,152$$

Утверждение. Пусть случайные величины X и Y независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Тогда случайная величина $X+Y$ также имеет распределение Пуассона с параметром

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p ($0 < p < 1$) и, следовательно, вероятность его не появления равна $q = 1 - p$. Испытания заканчиваются, как только появится события A . Таким образом, если событие A появилось в k -ом испытании, то в предшествующих $k-1$ оно не появлялось.

Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, а в k -ом испытании появилось. Вероятности этого «сложного» события, по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X = k) = q^{k-1}p.$$

Полагая $k = 1, 2, \dots$ получим геометрическую прогрессию, по причине которой и названо это распределение - геометрическим.

Пример 3. Будем бросать кубик до тех пор, пока не выпадет 1. Посчитаем, с какой вероятностью это случится ровно за N бросков. Для первого броска ($N=1$), очевидно, вероятность успеха $p(1) = \frac{1}{6}$

Для второго ($N=2$) - это вероятность успеха во втором броске и неудачи в

$$\text{первом: } p(2) = (2|1) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

Аналогично, для третьего броска

$$p(3) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

Вообще, для n -го броска $p(n) = (1 - \frac{1}{6})^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = p(1-p)^{n-1}$,
где p -вероятность успеха в единичном испытании.

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. Вероятность прибытия поезда без опоздания равна 0,98. Найти вероятность того, что из 5 последовательно прибывших поездов 4 прибдут без опоздания.

Решение: $P_4 (\mu = 4) = C_5^4 \cdot 0,98^4 \cdot 0,02 \approx 0,09$.

Задача 2. В библиотеке имеются книги по общему курсу математики и по теории вероятностей. Вероятность того, что любой читатель возьмет книгу по общей математике равна 0,7, а по теории вероятностей – 0,3. Определить вероятность того, 5 читателей подряд возьмут книги или только по общему курсу математики или только по теории вероятностей, если каждый из них берет только одну книгу.

Решение: По формуле Вернули имеем:

$$1) P_5(\mu = 5) = C_5^5 \cdot (0,7)^5 \cdot (0,3)^0 = 1 \cdot 0,7^5 = 0,1681;$$

$$2) P_5(\mu = 5) = C_5^5 \cdot (0,3)^5 \cdot (0,7)^0 = 1 \cdot 0,3^5 = 0,0024.$$

По теореме сложения

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,1681 + 0,0024 = 0,1705.$$

Задача 3. При перевозке 1000 стеклянных колб вероятность разбить 1 колбу равна 0,002. Какова вероятность, что будет разбито 4 колбы?

Решение: $P_n(\mu=m) = \frac{(n \cdot p)^m}{m! e^{np}}$

$$n=1000$$

$$p=0.002$$

$$m=4$$

$$P_{1000}(\mu=4) \approx 0.08$$

Задача 4. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника четыре партии из пяти или семь из девяти?

Решение: Так как противники равносильны, то

вероятность выигрыша и проигрыша для каждого партнера одинаковы, т.е. $p=q=\frac{1}{2}$

А. Вероятность выиграть 4 партии из пяти:

$$P_5(\mu=4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

Б. Вероятность выигрыша 7 из 9:

$$P_9(\mu=7) = C_9^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(2)^9} = \frac{9}{188}$$

Отсюда ясно, что вероятнее первый случай.

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

7.1. Некоторому человеку в среднем звонят 3 раза в час. Какова вероятность, что в течение часа ему позвонит 1 или 2 человека?

7.2. Спустя месяц после асфальтирования на отрезке шоссе на 1 км в среднем приходится два дефекта. Какова вероятность, что на определенном участке шоссе длиной 3 км мы найдем не более одного дефекта спустя месяц после асфальтирования? При решении задачи считайте, что вероятность обнаружения дефекта не зависит от местоположения участка трассы.

7.3. На пост скорой помощи небольшого города N за час поступает в среднем 9 звонков. Какова вероятность, что за 20 минут поступит не более двух звонков?

7.4. За полчаса (за 30 минут) пожарным некоторого города N поступает в среднем 3 сообщения о загоревшихся объектах. Какова вероятность того, что в течение 20 минут поступит не более одного сообщения?

7.5. Начинаящий автомобилист в среднем совершает одну ошибку за 5 минут. Предполагая, что число совершенных таким водителем ошибок подчиняется закону Пуассона, рассчитайте вероятность того, что автомобилист совершит за 5 минут не менее двух ошибок.

■ Задачи для домашнего задания

7.6. В течение 15 минут оператору, работающему на линии телефона доверия и психологической помощи населению, поступает в среднем 6 звонков от жителей города. Какова вероятность, что в течение 5 минут поступит от 1 до 3 звонков (включительно)?

7.7. В магазин модной дорогой одежды в среднем заходит 6 человек в час. Считая, что число посетителей распределено по закону Пуассона, найдите вероятность того, что в течение десяти минут зайдёт: а) более одного человека; б) два человека; в) более двух человек? Скольким продавцам-консультантам целесообразно работать в этом магазине, если считать, что продавец уделяет обслуживанию одного клиента в среднем те же 10 минут?.

7.8. В течение 8 часов рабочего дня в службу компьютерной диагностики поступает в среднем 16 звонков от пользователей. Какова вероятность того, что в течение часа в службу поступит не менее 2, но и не более 4 звонков?

7.9. В лавку по ремонту обуви в среднем заходят 3 человека в час. Считая, что число посетителей распределено по закону Пуассона, найдите вероятность того, что в течение 20 минут зайдут не менее двух человек.

7.10. На платную парковку торгово-развлекательного центра в городе в среднем заезжает 15 автомобилей в час. Считая, что количество приезжающих машин распределено по закону Пуассона, найдите вероятность того, что в течение 5 минут на парковку заедет не менее трех машин.

Ответы

7.1. $\approx 0,373$

7.6. $\approx 0,722$

7.2. $\approx 0,017$

7.7. а) $\approx 0,264$; б) $\approx 0,184$; в) $\approx 0,08$

7.3. $\approx 0,423$

7.8. $\approx 0,541$

7.4. $\approx 0,406$

7.9. $\approx 0,264$

7.5. $\approx 0,264$

7.10. $\approx 0,131$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ ДИСКРЕТНЫХ ВЕЛИЧИН. КОВАРИАЦИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Содержание: Совместное распределение двух дискретных случайных величин. Понятия ковариации и корреляции двух случайных величин и их свойства.

Основные сведения из теории

Определение 1. Говорят, что задано совместное распределение двух дискретных случайных величин, измеряемых в одном и том же случайном эксперименте, если для каждой пары значений этих величин (x_i, y_j) задана вероятность

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij},$$

где $x_i, i=1, \dots, n$ – множество возможных значений X , а $y_j, j=1, \dots, m$ – множество всех возможных значений Y .

Совместное распределение двух дискретных случайных величин удобно записывать в виде таблицы:

$Y \backslash X$	y_1	y_2	...	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}

Сумма всех значений p_{ij} :

$$\sum_{i=1, j=1}^{n, m} p_{ij} = 1.$$

Пример 1. Игральную кость бросают два раза. Определим случайную величину X как число выпавших шестерок. Случайная величина Y будет принимать значение 0, если хотя бы на одной кости выпадает нечетное число очков, и 1, если на обеих костях выпадет четное. Составить таблицу совместного распределения случайных величин X и Y .

Решение. Случайная величина X может принимать три значения: 0, 1, 2, а случайная величина Y — два значения: 0 и 1. Следовательно, таблица совместного распределения будет иметь следующий вид:

Y \ X	Y	
	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}
2	p_{31}	p_{32}

Осталось вычислить все вероятности $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$. Для этого множество всех элементарных исходов этого эксперимента надо разбить на части, соответствующие всем возможным парам значений (x_i, y_j) . Числа очков на первой и второй костях указаны в ячейках через запятую:

		Число очков на второй кости					
		1	2	3	4	5	6
Число очков на первой	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6

	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
	5	5,1	5,2	5,3	5,5	5,5	5,6
	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Легко видеть, что

$$p_{32} = P(X=2, Y=1) = P\left\{ \begin{array}{l} \text{Выпало две шестерки и на обеих} \\ \text{кости выпало четное число очков} \end{array} \right\} = \frac{1}{36},$$

так как это событие состоит только из одного элементарного исхода $\omega_e = \{6,6\}$.

■ $p_{31} = P(X=2, Y=0) = P\{\text{Выпало две шестерки и хотя бы на одной кости выпало нечетное число очков}\} = 0$, так как это невозможно.

■ $p_{22} = P(X=1, Y=1) = P\{\text{Выпала одна шестерка и на обеих костях выпало четное число очков}\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, так как в это событие входят четыре элементарных исхода $\{6,2\}, \{6,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}$.

■ $p_{21} = P(X=1, Y=0) = P\{\text{Выпала одна шестерка и хотя бы на одной кости нечетное число очков}\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, так как в это событие входят шесть исходов $\{6,1\}, \{6,3\}, \{6,5\}, \{1,6\}, \{3,6\}, \{5,6\}$.

■ $p_{12} = P(X=0, Y=1) = P\{\text{Не выпало ни одной шестерки и на обеих костях выпало четное число очков}\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, так как в это событие входят четыре элементарных исхода $\{2,2\}, \{2,4\}, \{4,2\}, \{4,4\}$.

■ $p_{11} = P(X=0, Y=0) = P\{\text{Не выпало ни одной шестерки и хотя бы на одной кости выпало нечетное число очков}\}$. Эту вероятность можно вычислить так:

$$1 - p_{12} - p_{21} - p_{22} - p_{31} - p_{32} = 1 - \frac{4}{36} - \frac{6}{36} - \frac{4}{36} - 0 - \frac{1}{36} = \frac{21}{36}$$

Таким образом, таблица совместного распределения X и Y в этом случайном эксперименте имеет следующий вид:

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{21}{36}$	$\frac{4}{36}$
1	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$

Из таблицы совместного распределения двух дискретных случайных величин можно получить распределение каждой из случайных величин. Такие распределения называются маргинальными или частными.

Для того чтобы получить маргинальное распределение X , то есть найти вероятности $P(X = x_i)$, надо просуммировать вероятности в i -й строке таблицы совместного распределения:

$$P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{im}.$$

Для того чтобы получить маргинальное распределение Y , то есть найти вероятности $P(Y = y_j)$, надо просуммировать вероятности в j -м столбце таблицы совместного распределения:

$$P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \dots + p_{nj}.$$

Пример 2. Рассмотрим совместное распределение случайных величин X и Y из предыдущего примера. Найдём их маргинальные распределения.

Решение. Маргинальное (частное) распределение X задаётся таблицей:

X	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Маргинальное (частное) распределение Y задается таблицей:

Y	0	1
P	$\frac{27}{36}$	$\frac{9}{36}$

Утверждение. Напомним, что дискретны случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых i и j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ выполняется равенство

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j).$$

Эту формулу мы используем для проверки независимости двух дискретных случайных величин.

Пример 3. Рассмотрим случайные величины X и Y , определенные в пример

1. Являются ли эти случайные величины независимыми?

Решение. В пример 1 было получено совместное распределение X и Y , в частности:

$$p_{11} = P(X = 0, Y = 0) = \frac{21}{36}$$

В примере 2 были получены маргинальные распределения X и Y , в частности:

$$P(X=0) = \frac{25}{36} \text{ и } P(Y=0) = \frac{27}{36}$$

Проверим выполнение условия независимости

$$P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{21}{36} \neq \frac{25}{36} \cdot \frac{27}{36}$$

Следовательно, X и Y зависят друг от друга. В этом примере нам

«повезло», так как проверка ограничилась лишь исследованием равенства для $i = 1$ и $j = 1$. Так бывает не всегда. Если бы условие независимости выполнялось бы для $i = 1$ и $j = 1$. Так бывает не всегда. Если бы условие независимости выполнялось бы для p_{ij} , то нам пришлось бы проверять это условие для всех остальных p_{ij} .

В тех случаях, когда случайные величины X и Y зависимы, представляет интерес сила их взаимосвязи. Для этого используется понятие ковариации (то есть совместной вариации или совместной изменчивости) двух случайных величин.

Определение 2. Ковариацией двух случайных величин X и Y называется величина $Cov(X, Y) = M(X - M(X))(Y - M(Y))$.

На практике для вычисления $Cov(X, Y)$ чаще используется формула:

$$Cov(X, Y) = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y).$$

Пример 4. Совместное распределение двух дискретных случайных величин X и Y задано таблицей:

$Y \backslash X$	0	1
0	0,1	0,3
1	0,4	?

Найти $Cov(X, Y)$.

Решение. Заполним до конца таблицу совместного распределения: $P(X = 1, Y = 1) = 1 - 0,1 - 0,3 - 0,4 = 0,2$.

Вычислим маргинальные распределения вероятностей X и Y :

X	0	1
P	0,4	0,6

Y	0	1
P	0,5	0,5

При этом $M(X) = 0,6$, а $M(Y) = 0,5$. Найдем распределение случайной величины $X \cdot Y$. Эта величина может принимать только два значения 0 и

1. $P(X \cdot Y = 1) = P(x = 1, Y = 1) = 0,2$. Следовательно, $P(X \cdot Y = 0) = 1 - 0,2 = 0,8$ и распределение случайной величины $X \cdot Y$ задается таблицей:

$X \cdot Y$	0	1
P	0,8	0,2

Тогда

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y) = (0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,2) - 0,6 \cdot 0,5 \\ &= 0,2 - 0,3 = -0,1 \end{aligned}$$

Свойства ковариации

1. Если случайные величины X и Y независимы, то $Cov(X, Y) = 0$.

Пусть $X_1 = a_1 + b_1 X$ и $Y_1 = a_2 + b_2 Y$,

Тогда $Cov(X_1, Y_1) = b_1 b_2 Cov(X, Y)$.

Поясним более подробно свойство 2. На практике линейные преобразования случайных величин обычно означают переход к другим единицам измерения. Свойство 2 показывает, что величина ковариации между двумя случайными величинами зависит от их единиц измерения. Это очень неудобно для интерпретации значения ковариации как меры связи двух случайных величин. Чтобы устранить это неудобство, вводят понятие корреляции, которая уже не чувствительна к единицам измерения.

Определение 3. Корреляцией двух случайных величин называется величина

$$Cov(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$

Свойства корреляции:

1. Если X и Y независимы, то $Cor(X, Y)$.
2. $|Cor(X, Y)| \leq 1$.
3. Если $Cor(X, Y) = 1$, то $Y = a + bX$, где $b > 0$.

Если $Cor(X, Y) = -1$, то $Y = a + bX$, где $b < 0$.

4. Пусть $X_1 = a_1 + b_1X$ и $Y_1 = a_2 + b_2Y$, тогда $Cor(X_1, Y_1) = Cor(X, Y)$, если $b_1 \cdot b_2 > 0$ и $Cor(X_1, Y_1) = -Cor(X, Y)$, если $b_1 \cdot b_2 < 0$.

Пример 5 (продолжение примера 4). Для данных примера 4 вычислить $Cor(X, Y)$.

Решение. В примере вычислена ковариация $Cov(X, Y) = -0,1$, а также найдены маргинальные распределения X и Y . Следовательно:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$$

Отсюда

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = -\frac{0,1}{\sqrt{0,24} \cdot \sqrt{0,25}} \approx -\frac{0,1}{0,25} = -0,4$$

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1.

Принято считать, что начинающий водитель - это человек, чей опыт вождения не превышает двух лет. Рассмотрим две случайные величины X и Y , где X - стаж вождения начинающих водителей (со значениями 1 и 2 года), Y - количество дорожно-транспортных происшествий (страховых случаев) за минувший год (со значениями 0, 1, 2 и 3 аварии).

Согласно данным страховой компании, работающей на рынке автострахования уже много лет, совместный закон распределения случайных величин X и Y выглядит следующим образом:

Совместный закон распределения X и Y		Число аварий за минувший год (Y)			
		0	1	2	3
Стаж вождения (X)	1	0,11	0,22	0,18	0,07
	2	0,19	0,14	0,07	0,02

Вычислить ковариацию и корреляцию. Определить, в какой мере можно считать эти две случайные величины взаимосвязанными (коррелированными).

Решение. Выполним следующие расчеты.

X	1	2
P	0,58	0,42

Y	0	1	2	3
P	0,30	0,36	0,25	0,09

1. Найдём маргинальные распределения вероятностей X и Y :
2. Рассчитаем математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение рассматриваемых случайных величин:

$$M(X) = 1 \cdot 0,58 + 2 \cdot 0,42 = 1,42$$

(средний стаж),

$$M(Y) = 0 \cdot 0,30 + 1 \cdot 0,36 + 2 \cdot 0,25 + 3 \cdot 0,09 = 1,13$$

(среднее число аварий в год для начинающего автомобилиста),

$$D(X) = (1 - 1,42)^2 \cdot 0,58 + (2 - 1,42)^2 \cdot 0,42 = 0,2436 \text{ (лет)}^2,$$

$$\sqrt{D(X)} = 0,494 \approx 0,49 \text{ (лет)},$$

$$D(Y) = (0 - 1,13)^2 \cdot 0,30 + (1 - 1,13)^2 \cdot 0,36 + (2 - 1,13)^2 \cdot 0,25 + (3 - 1,13)^2 \cdot 0,09 = 0,8931 \text{ (аварий в год)}^2,$$

$$\sqrt{D(Y)} = 0,945 \approx 0,95 \text{ (аварий в год)}.$$

3. Найдем распределение случайной величины $(X \cdot Y)$. Эта величина может принимать шесть значений, а именно: 0, 1, 2, 3, 4 и 6.

Укажем подробнее:

$X \cdot Y$	0	1	2	3	4	6
P	0,11 + 0,19	0,2 2	0,18 + 0,14	0,0 7	0,0 7	0,0 2

Выпишем получившееся распределение случайной величины

$X \cdot Y$:

$X \cdot Y$	0	1	2	3	4	6
P	0,3 0	0,22	0,32	0,07	0,07	0,02

4. Рассчитаем математическое ожидание величины $X \cdot Y$:

$$M(X \cdot Y) = 0 \cdot 0,30 + 1 \cdot 0,22 + 2 \cdot 0,32 + 3 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,07 + 6 \cdot 0,02 = 1,47$$

(стаж аварии).

5. Найдем ковариацию и корреляцию случайных величин X и Y :

$$Cov(X, Y) = 1,47 - 1,42 \cdot 1,13 = 1,47 - 1,6046 = -0,1346$$

(стаж · аварии) $\approx -0,13$ (стаж · аварии).

$$Cor(X, Y) = \frac{0,1346}{0,494 \cdot 0,945} \approx -\frac{0,1346}{0,467} \approx -0,25.$$

Случайные величины коррелированы слабо, направление взаимосвязи - обратная. То есть с увеличением стажа начинающего автомобилиста в среднем падает число аварий с его участием, но это падение не очень значительное и поэтому водителям стажем до года и до двух лет предлагают страховые полисы по одной и той же цене. При дальнейшем росте стажа вождения вероятность наступления страхового случая снижается и это влечет за собой снижение стоимости самого страхового полиса.

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

8.1. В случайном эксперименте независимые случайные величины X и Y заданы рядами распределений:

X	1	2
P	0,1	0,9

Y	-1	0	1
P	0,2	0,3	0,5

Постройте таблицу их совместного распределения.

8.2. В случайном эксперименте бросают монету и игральную кость. Пусть X - число выпавших орлов на монете, а Y -число выпавших шестерок на кости. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

8.3. В случайном эксперименте бросают две монеты и две игральные кости. Пусть X -число выпавших орлов, а Y -число выпавших пятерок. Составьте таблицу совместного распределения X и Y .

8.4. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей:

$Y \backslash X$		
	0	1
0	0,2	0,3
1	0,2	0,3

Выпишите ряд распределения вероятностей для случайной величины $X \cdot Y$.

■ Задачи для домашнего задания

8.5. Страховая компания заключает договор страхования, предусматривающий выплату 50 000 сум. в случае мелкого ущерба и 100 000 сум. в случае крупного ущерба. Страховой взнос по договору составляет

4000 сум. Вероятность мелкого ущерба 0,05, а крупного 0,01. Составьте таблицу совместного распределения выплат по двум таким независимым договорам.

8.6. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей:

$Y \backslash X$	-1	0	2
-1	0,08	0,12	0,2
1	0,12	0,18	?

Выпишите маргинальные распределения вероятностей случайных величин X и Y . Выпишите ряд распределения вероятностей для случайной величины $X \cdot Y$.

8.7. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей:

$Y \backslash X$	1	2	3
0	?	0	0,1
2	0,4	0,1	0,3

Выпишите маргинальные распределения вероятностей для случайных величин X и Y . Выпишите ряд распределений вероятностей случайной величины: а) $X \cdot Y$, б) $X + Y$.

8.8. Совместное распределение двух случайных величин X и Y задано таблицей:

$Y \backslash X$	-1	0	2
-2	0,1	0,3	0,4
1	0,2	0	?

Выпишите ряд распределения вероятностей случайной величины $X \cdot Y$. Найдите $M(X \cdot Y)$.

8.9. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей (для каждой пары (комбинации) значений X и Y приводится своя вероятность). Значения X указаны в строках, значения Y в столбцах.

$Y \backslash X$	-1	0	2
1	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{24}$	?	$\frac{7}{24}$
2	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	0

Найдите: а) закон распределения случайной величины X , б) закон распределения случайной величины Y , в) MX , DX , MY , DY , г)

$Cov(X, Y)$ и $Cor(X, Y)$

8.10. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задан таблицей. Значения X указаны в строках, значения Y - в столбцах.

Найдите: а) закон распределения величины X , б) закон распределения случайной величины Y , в) MX , DX , MY , DY .

$Y \backslash X$	-2	0	2
0,2	0,03	0,05	?
0,6	0,15	0,30	0,35

Ответы

8.1.

$Y \backslash X$	-1	0	1
1	0,02	0,03	0,05
2	0,18	0,27	0,45

8.2.

$Y \backslash X$	0	1
0	$5/12$	$1/12$
1	$5/12$	$1/12$

8.4.

$X \cdot Y$	0	1
P	0,7	0,3

8.3.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$\frac{25}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{1}{144}$
1	$\frac{50}{144}$	$\frac{20}{144}$	$\frac{2}{144}$
2	$\frac{25}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{1}{144}$

8.5.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$0,94^2$	$0,94 \cdot 0,05$	$0,94 \cdot 0,01$
50000	$0,05 \cdot 0,94$	$0,05^2$	$0,05 \cdot 0,01$
100000	$0,01 \cdot 0,94$	$0,01 \cdot 0,05$	$0,01^2$

8.6.

X	-1	1
p	0,4	0,6

Y	-1	0	2
p	0,2	0,3	0,5

$X \cdot Y$	-2	-1	0	1	2
p	0,2	0,12	0,3	0,08	0,3

8.7.

X	0	2
p	0,2	0,8

Y	1	2	3
p	0,5	0,1	0,4

$X \cdot Y$	0	2	4	6
p	0,2	0,4	0,1	0,3

$X + Y$	1	2	3	4	5
P	0,1	0	0,5	0,1	0,3

8.8.

$X \cdot Y$	-4	-1	0	2
p	0,4	0,2	0,3	0,1

$$M(XY) = -1,6$$

8.9. а)

X	0	2
p	0,2	0,8

б)

Y	-1	0	2
p	0,2	0,3	0,5

в) $MX = \frac{14}{24}$; $D) = \frac{812}{576}$; $MY = \frac{7}{24}$; $DY = \frac{935}{576}$

г) $Cov(X, Y) = -\frac{2}{576}$ и $Corr(X, Y) \approx -0,002$.

8.10. а)

X	0,2	0,6
p	0,2	0,8

б)

Y	-2	0	2
p	0,18	0,35	0,47

в) $MX = 0,52$; $DX = 0,0256$; $MY = 0,58$; $DY = \frac{935}{576}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.

Содержание: Плотность вероятностей, функция распределения $F(x)$ и ее свойства; равномерное распределение, нормальное распределение и общее нормальное распределение

Основные сведения из теории Непрерывные случайные величины.

В природе значения многих случайных величин изменяются непрерывно.

Например, время безотказной работы часов или телевизора, автомобиля, компьютера, соковыжималки может оказаться любым (положительным)

числом. Любым числом можем оказаться доход наудачу (случайно) выбранного человека в социуме. В принципе, любым может быть и время, затрачиваемое человеком на занятия спортом в течение какого-то продолжительного отрезка времени. Любым числом можем быть рост, вес, продолжительность жизни и т. д. Совокупность возможных значений непрерывных случайных величин образует непрерывное множество. Таким множеством может быть отрезок числовой прямой, числовой луч, вся числовая прямая.

Для непрерывных случайных величин нельзя задать их распределение, просто указывая вероятности каждого отдельного значения, как это делалось для дискретных случайных величин. Часто распределение непрерывных случайных величин можно задать с помощью плотности вероятности.

Определение 1. *Плотностью вероятности* называют функцию

$p(x)$, заданную для всех x на числовой прямой, такую что:

1) $p(x) \geq 0$ для всех x ;

2) площадь под графиком плотности равна 1, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$.

Если непрерывная случайная величина принимает значения только на части числовой прямой Ω , то полагают, $p(x)=0$ для x , не принадлежащих Ω .

Пример 1. Пусть

$$p(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \in [-1; 1] \\ 0, & x \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Тогда $p(x)$ является функцией плотности распределения.

Доказательство. Очевидно, что $p(x) \geq 0$ на всей числовой прямой. Покажем, что площадь под кривой плотности равна 1. На отрезке $[-1; 1]$ график $p(x)$ и ось абсцисс образуют равнобедренный треугольник с основанием 2 и высотой 1. Его площадь равна 1. Следовательно, условие 2 из определения выполнено.

Функция плотности вероятности позволяет находить вероятность того, что непрерывная случайная величина попадает в некоторую область, например, отрезок $[a; b]$:

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx.$$

Другими словами, вероятность попадания случайной величины в некоторую непрерывную область значений есть площадь фигуры под графиком плотности над рассматриваемой областью значений.

Другой способ найти такую вероятность связан с заданием функции распределения $F(x)$ случайной величины.

Определение 2. Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется функция, в каждой точке x равная вероятности того, что случайная величина X принимает значение, меньшее или равное x , то есть $F(x) = P(X \leq x)$.

Если случайная величина имеет плотность $p(x)$, то ее функция распределения задается в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt.$$

Пример 2. Случайная величина X принимает значения на отрезке $[0; 1]$, и ее плотность вероятности на этом отрезке имеет вид $p(x) = 2x$ (на всей остальной части числовой прямой $p(x) = 0$). Найти $F(x)$.

Решение. По определению для $x \in [0; 1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2t dt = t^2 \Big|_0^x = x^2$$

Для $x < 0$ положим $F(x) = 0$, а для $x > 1$ положим $F(x) = 1$, так как для $x > 1$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = \int_{-\infty}^0 2t dt + \int_0^x 0 dt = t^2 \Big|_0^x = 1$$

Вероятность того, что $X \in [a, b]$, может быть записана с помощью функции $F(x)$ в виде разности:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^b p(x) dx - \int_{-\infty}^a p(x) dx = F(b) - F(a).$$

Свойства функции распределения:

- 1) $F(x) \geq 0$ для любого x ;
- 2) для $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- 3) $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.

С помощью плотности распределения вероятностей можно определить математическое ожидание $M(X)$ непрерывной случайной величины X и ее дисперсию $D(X)$.

Определение 3. Математическое ожидание $M(X)$ непрерывной случайной величины X равно

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx.$$

Определение 4. Дисперсия $D(X)$ непрерывной случайной величины X равна

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X)^2 - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^b x^2 p(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx \right)^2.$$

Пример 3. Плотность вероятности случайной величины X имеет следующий вид:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ a \ln x, & x \in (1; e] \\ 0, & x > e. \end{cases}$$

1. Определить коэффициент a и вычислить математическое ожидание.
2. Найдите функцию распределения $F(x)$.
3. Определите вероятность того, что значение случайной величины лежит в интервале $(-2; \sqrt{e})$.

Решение. По определению плотности вероятности

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_1^e a \ln x dx = a \left(x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx \right) = a(e - e + 1) = a$$

Здесь мы воспользовались методом интегрирования по частям. Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Функция распределения находится по формуле:

$$F(X) = P(X \leq x) = 0, \quad x \leq 1;$$

$$\int_{-\infty}^x p(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1, & x \in (1; e] \\ 1, & x > e \end{cases}$$

Вероятность попадания в интервал $(-2; \sqrt{e})$ вычисляется подстановкой граничных точек в функцию распределения:

$$F(\sqrt{e}) - F(2) = \sqrt{e} \ln \sqrt{e} - \sqrt{e} + 1 - 0 = -\frac{1}{2} \sqrt{e} + 1$$

В прикладных задачах встречается не так много типов распределений. Далее мы будем решать задачи о некоторых из них и об их плотностях.

Равномерное распределение

Это самый простой вид распределений. Пусть $[a; b]$ – произвольный отрезок числовой прямой. Плотность вероятности $p(x)$ определим на всей числовой прямой. Вне отрезка $[a; b]$ положим $p(x) = 0$. На отрезке $[a; b]$ положим $p(x) = c$ (где c – постоянное число, константа).

Значение c найдем, зная, что площадь под графиком функции $y = p(x)$ равна

1. Эта площадь равна площади прямоугольника со

сторонами $b-a$ и c .

Получаем $c \cdot (b - a) = 1$, откуда $C = \frac{1}{b-a}$

Следовательно, функцию плотности равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$ случайной величины можно задать выражением

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ 0, & \text{если } x > b \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b \end{cases}$$

Математическое ожидание равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$ случайной величины равно $\frac{a+b}{2}$, оно находится в середине отрезка значений.

Пример 4. Если по какой-то причине механические часы остановились, то можно считать, что угол между минутной и часовой стрелками – случайная величина, которая распределена равномерно на отрезке $[0^\circ; 180^\circ]$. Найдем вероятность того, что в момент остановки минутная стрелка будет отстоять от часовой не более чем на 5° в ту или иную сторону.

Решение. Обозначим буквой X угол между стрелками. Это случайная величина. Получим

$$P(0^\circ \leq X \leq 5^\circ) = \frac{5-0}{180-0} = \frac{1}{36} \approx 0,0278$$

Пример 5. Случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[1;4]$. Найдем вероятность события $1 \leq Y \leq 3$.

Решение. Построим график плотности распределения случайной величины.

Отрезок $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ пересекается с отрезком $[1;4]$. Площадь фигуры равна

$$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Нормальное распределение

Нормальное распределение вероятностей играет ключевую роль в большинстве задач статистического анализа данных: в экономических, социальных, естественных и технических науках.

Определение 5. Непрерывная случайная величина X имеет нормальное (гауссовское) распределение вероятностей на всей числовой прямой, если ее плотность распределения для всех $x \in R$ выражается формулой

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$ и μ – произвольные числа.

Величины $\mu = M(X)$ (среднее) и $D(x) = \sigma^2$ (дисперсия) называются параметрами нормального распределения. Параметр μ определяет положение (центр) нормального распределения на числовой оси. Стандартное отклонение σ задает масштаб нормального распределения: чем меньше σ , тем сильнее вероятность концентрируется вблизи μ . При больших σ график плотности более пологий, чем при малых. Запись $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ означает, что случайная величина X имеет нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2 .

Определение 6. Нормальное распределение $N(0,1)$ с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$ называют стандартным нормальным распределением.

Для обозначения стандартной нормальной случайной величины используют символ Z : $Z \sim N(0,1)$. Функция плотности стандартного нормального распределения задается формулой

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Заметим, что эта функция чётная, поэтому ее график симметричен относительно оси y . Вычислить

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

по данному x трудно без калькулятора. Делать это нет необходимости, ибо такие вычисления уже проделаны.

Их результаты сведены в специальные таблицы, которыми удобно пользоваться.

Каждому числу x можно поставить в соответствие площадь под графиком стандартной нормальной плотности, которая расположена левее числа x . Эта площадь зависит от x и поэтому является *функцией аргумента x* .

Традиционно эту функцию обозначают $\Phi(x)$ (читается «фи от икс»). Функция $y = \Phi(x)$ монотонно возрастает. Для всякого x имеем $0 < \Phi(x) < 1$.

1. Это означает, что с ростом x функция $\Phi(x)$ стремится к 1. При убывании (уменьшении) x функция $\Phi(x)$ стремится к 0. График функции $y = \Phi(x)$ пересекает ось ординат в точке $(0; \frac{1}{2})$, потому что $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Функцию $y = \Phi(x)$ называют *функцией стандартного нормального распределения*

(обратите внимание-это не плотность, а функция распределения) или *функцией распределения стандартной нормальной величины $Z \sim N(0,1)$* . По определению

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Обе функции- функция распределения и плотность - связаны, плотность является производной функции распределения: $\Phi'(x) = f(x)$. С помощью функции $y = \Phi(x)$ можно

вычислять вероятности событий $a \leq Z \leq b$: $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z < a)$. Вероятность события $Z = a$ равна нулю, поэтому вероятности событий

$Z < a$ и $Z \leq a$ совпадают.

Получаем: $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z < a) = \Phi(b) - \Phi(a)$. Это и есть вероятность того, что случайная величина Z попадает в некоторый отрезок (диапазон) $[a, b]$.

Общее нормальное распределение

Как уже сказано, плотность произвольной нормально распределенной

случайной величины $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ задается формулой $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Формула выглядит более сложно, чем формула стандартной нормальной плотности. Однако случайную величину X , через случайную величину Z , имеющую стандартное нормальное распределение:

$$X = \mu + \sigma \cdot Z.$$

Эту взаимосвязь часто записывают иначе: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, именуя выражение в правой части равенства z -значением (читается: зет-значение). z -значения обычно используются для сравнения между собой нормальных величин, измеренных в разных шкалах.

Скажем, если мы хотим понять, как относится рост и вес человека с соответствующими средними значениями, то надо от исходных измерений роста и веса перейти к их z -значениям и сравнить их между собой.

Пример 6.

Вычислим $P(A \leq X \leq B)$. Из равенства $X = \mu + \sigma \cdot Z$ получаем, что $P(A \leq X \leq B) = P(A \leq \mu + \sigma \cdot Z \leq B)$. Преобразуя неравенства в правой части (и учитывая, что $\sigma > 0$), получим

$$P(A \leq X \leq B) = P\left(\frac{A-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{B-\mu}{\sigma}\right)$$

Следовательно,

$$P(A \leq X \leq B) = P\left(\frac{A-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{B-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{B-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-\mu}{\sigma}\right).$$

Теорема 1.

Сумма двух независимых нормальных случайных величин $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ является нормальной случайной величиной:

$$(X_1 + X_2) \sim N(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. Известно, что автоматическая фильтрация почтового «мусора» (спам) основана на механизме распознавания легитимных и нежелательных писем, но в зависимости от настроек компьютерной системы она не всегда способна к нормальной классификации почты. В отношении всех писем, направленных получателю, в связи с этим гипотетически могут возникнуть два типа ошибок: во-первых, легитимное e-mail сообщение может быть иногда классифицировано сервером как спам; но в то же время нежелательное e-mail сообщение, напротив, может быть иногда классифицировано им как легитимное. И то, и другое с практической точки зрения важно для пользователей.

Рассмотрим небольшой пример и решим задачу.

Корпоративная почта сотрудников некоторой крупной фирмы снабжена специальным программным обеспечением, позволяющим фильтровать нежелательные сообщения (спам). Так, каждому письму программа присваивает число в диапазоне от 0 до 15. Это число отражает степень

«нежелательности» такого почтового сообщения. Если в настройках компьютера активирована опция «Автоматически удалять почтовый «мусор», то все сообщения, которым программа присваивает более 7,5 баллов (т.е. классифицирует их как спам), удаляются сервером незамедлительно. Однако

программное обеспечение несовершенно и не может достоверно распознать весь Спам, который периодически приходит на почтовый ящик, часть Нежелательной почты всё же «просачивается» и не блокируется таким фильтром. В то же время программа достаточно эффективно снижает количество спама.

Согласно продолжительным наблюдениям и опыту использования данного программного обеспечения, известно, что баллы, присваиваемые программой нежелательным сообщениям, распределены нормально со средним 8,8 баллов и стандартным отклонением 2,0 баллов. Используя эту информацию, рассчитайте, чему равна доля нежелательных писем, которые сервер удаляет автоматически при их получении.

Решение. Рассматривается случайная величина X балл, автоматически присваиваемый спам-письму. По опыту установлено, что X имеет нормальное распределение со следующими параметрами:

$\mu = 8,8$, $\sigma = 2,0$. Отсюда следует, что случайная величина

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 8,8}{2}$$

имеет стандартное нормальное распределение. По условию задачи нам требуется найти вероятность того, что $7,5 < X \leq 15$. Именно в этом случае спам-письмо будет автоматически удалено из почтового ящика специальной программой. Итак, выполним вычисления.

Из равенства $X = 8,8 + 2Z$ получаем, что

$$P(7,5 < X \leq 15) = P(7,5 < 8,8 + 2Z \leq 15).$$

Преобразуем это неравенство (учитывая, что $\sigma > 0$):

$$P\left(\frac{7,5-8,8}{2} < Z \leq \frac{15-8,8}{2}\right) = P(-0,65 < Z \leq 3,1)$$

Следовательно,

$$P(7,5 < X \leq 15) = P(-0,65 < Z \leq 3,1) = \Phi(3,1) - \Phi(-0,65) = \Phi(3,1) + \Phi(0,65)$$

Эту вероятность найдем по специальной таблице для стандартной нормально распределенной величины. Получим:

$$\Phi(3,1) - \Phi(-0,65) = 1 - 0,2578 = 0,7422.$$

Эта вероятность означает, что 74% писем, фактически и являющихся спамом, успешно удаляются компьютером сразу же при их получении. Как видим, остальные 26 % нежелательной почты всё же попадает адресатам (сотрудникам этой фирмы).

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

9.1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1;1]$. Найдите вероятность события $-0,5 \leq X \leq 2$.

9.2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[3;6]$. Найдите вероятность события $3,6 \leq X \leq 7$.

9.3. Постройте график плотности равномерного распределения на отрезке $[1;4]$. Чему равна плотность в точке а) $x=-1$, б) $x=2$?

9.4. Постройте график плотности равномерного распределения на отрезке $[-1;3]$. Чему равна функция плотности в точке а) $x=1$, б) $x=4$.

9.5. Для стандартной нормально распределенной случайной величины Z найдите вероятность $P(-0,7 \leq Z \leq 8)$.

■ Задачи для домашнего задания

9.6. Для стандартной нормально распределенной случайной величины Z найдите вероятность $P(-2,1 \leq Z \leq 1,9)$.

9.7. Случайная величина X нормально распределена со средним 35. Вероятность какого события выше: что случайно выбранное значение этой величины попадет между 29 и 31,

или что случайно выбранное значение X попадает между 40 и 42?

9.8. Случайная величина X нормально распределена со средним 46 и дисперсией 36. Найдите вероятность $P(37 < X < 49)$.

9.9. Для стандартной нормально распределенной случайной величины Z найдите вероятность $P(-0,34 < Z < 1,15)$.

9.10. Для стандартной нормально распределенной случайной величины Z найдите вероятность:

а) $P(-0,62 < Z < 2,13)$, б) $P(-1,83 < Z < -1,06)$;

Ответы

9.1. 0,75

9.2. 0,8

9.3. а) 0, б) $\frac{1}{3}$

9.4. а) 0,25, б) 0

9.5. $P(-0,7 \leq Z \leq 8) \approx 0,758$

9.6. $P(-2,1 \leq Z \leq 1,9) \approx 0,953$

9.7. вероятность I события

9.8. $\approx 0,625$

9.9. $P(-0,34 < Z < 1,15) \approx 0,508$

9.10. а) $P(-0,62 < Z < 2,13) \approx 0,716$

б) $P(-1,83 < Z < -1,06) \approx 0,111$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА.

Содержание: теорема Муавра-Лапласа, использование этой теоремы для приближенного вычисления вероятностей событий.

Теорема (Муавр-Лаплас). Пусть S -число успехов в n испытаниях Бернулли (число n не случайное; оно не зависит от результатов испытаний). Пусть p – вероятность успеха в одном испытании $0 < p < 1$. Тогда равномерно относительно a и b , где

$$-\infty < a < b < +\infty:$$

$$P\left(a \leq \frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Теорему Муавра-Лапласа можно переформулировать, используя функцию стандартного нормального распределения. При $n \rightarrow \infty$ равномерно по a, b ,

$a < b$, имеет место сходимость:

Для приложений теории вероятностей эта форма удобна тем, что функция стандартного нормального распределения снабжена подробными таблицами, в которых можно найти значения $\Phi(b)$ и $\Phi(a)$.

Другими словами, нормированное число успехов S в серии из n испытаний Бернулли с ростом n начинает вести себя как стандартная нормальная случайная величина $Z \sim N(0,1)$. Теорему Муавра-Лапласа часто используют для приближенного вычисления вероятностей событий типа $(A \leq S \leq B)$ для заданного числа испытаний n и чисел

$A < B$. Для этого событие переводят в форму $a \leq \frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b$ преобразованиями, не меняющими самого бытия. Из

элементов неравенства $(A \leq S \leq B)$ сначала вычитают np (среднее, математическое ожидание S), а затем делят на $\sqrt{npq}$ (стандартное отклонение S). Так для исходного события получают форму

$$\left(\frac{A-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{B-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

Если n достаточно велико, а вероятность успеха p не слишком близка к 0 или к 1, то

Если вероятность успеха p нам известна, то по этой формуле вероятность события $(A \leq S \leq B)$ можно приблизительно вычислить. Задачи решаются с использованием процедуры стандартизации, рассмотренной в предыдущем разделе.

Задачи для подробного разбора в аудитории

Задача 1. Стрелок выстрелил 400 раз. Найти вероятность того, что имело место ровно 325 попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

Решение. Посчитаем $npq = 400 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 64 > 10$.

Воспользуемся приближенной формулой из локальной теоремы Муавра-Лапласа.

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$
$$P_{400}(325) = \frac{1}{8} \varphi\left(\frac{325 - 400 \cdot 0,8}{8}\right) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,3271 \approx 0,041$$

Задача 2. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что холодильники имеют от 300 до 360 семей.

Решение. Применим теорему Муавра-Лапласа ($npq = 64 \geq 20$).

$$x_1 = \frac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,5$$

$$x_2 = \frac{360 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5$$

Искомая вероятность равна

$$\begin{aligned}P_{400}(300 \leq m \leq 36) &= \frac{1}{2} [\Phi(5,0) - \Phi(-2,5)] = \frac{1}{2} [\Phi(5,0) - \Phi(-2,5)] \\&= \frac{1}{2} [1 + 0,9876] = 0,9938\end{aligned}$$

ΔЗадачи для решения на практическом занятии

10.1. Пусть S - число успехов в $n = 10$ испытаниях Бернулли при $p = 0,5$. Вычислите точную вероятность события $2 \leq S \leq 8$. Затем вычислите приближенную вероятность того же события, используя теорему Муавра-Лапласа. Сравните полученные результаты. Достаточно ли число испытаний n , чтобы пользоваться приближенными формулами?

10.2. Решите предыдущую задачу при $p = \frac{1}{3}$. Ухудшилось или улучшилось согласие точных и приближенных расчетов по сравнению с результатами задачи 10.1?

10.3. В продукции компании, производящей стеклянную посуду, дефекты (царапины, небольшие сколы и прочие повреждения) составляют 10 %. Изделия отправляются потребителям (без предварительной проверки) в коробках по 100 штук. Найдите вероятность того, что в одной коробке не больше 20 изделий с повреждениями.

10.4. Найдите вероятность того, что если бросить монету 200 раз, то орел выпадет от 90 до 110 раз.

10.5. Для поступления в университет необходимо успешно сдать вступительный экзамен. По опыту известно, что в некотором университете N в среднем его выдерживают лишь 25 % абитуриентов. Известно, что в приемную комиссию поступило 1890 заявлений. Чему равна вероятность того, что хотя бы 500 поступающих успешно сдадут экзамен?

■ Задачи для домашнего задания

10.6. Агрокомпания провела выборочное исследование о всхожести семян моркови. Вероятность того, что семя не прорастет, оценена как 0,1. Сколько пакетов семян нужно купить, чтобы с вероятностью 0,99 доля взошедших семян превысила 80 %? (Примечание: в одном пакете 50 семян.)

10.7. По данным Госстата на 2015 год вероятность того, что школьники младших классов получает горячее питание, составляет 0,84. Найдите с помощью теоремы Муавра-Лапласа вероятность того, что из 1500 случайно выбранных школьников младших классов от 200 до 300 не получают горячее питание.

10.8. Стрелок выстрелил 400 раз с вероятностью попадания 0,8. Найти вероятность того, что он попал от 310 до 325 раз.

10.9. Студенту, изучающему курс теории вероятностей, было дано задание - решить 30 задач. Исходя из опыта написания этим студентом контрольных работ по данному предмету, вероятность решить задачу без единой ошибки равна 0,8. Какова вероятность того, что студент решит не менее 26 задач без единой ошибки?

10.10. По данным Фонда «Общественное мнение» на 24 октября 2013 г., 86% граждан Узбекистана знают или что-то слышали о Нобелевской премии. Производится очередной репрезентивный опрос, в ходе которого респондентам задается вопрос о том, знают ли они о том, что такое Нобелевская премия. Объем выборки 1400 человек. Используя теорему Муавра-Лапласа, найдите вероятность того, что в выборке окажется менее 1200 человек, которые знают или что-то слышали о Нобелевской премии.

Ответ

10.1. 0,9785; $\approx 0,9426$; 0,036

10.2. 0,896; $\approx 0,813$; 0,083

10.3. $\approx 0,999$

10.4. $\approx 0,841$

10.5. $\approx 0,072$

10.6. 2

10.7. $\approx 0,998$

10.8. 0,6301

10.9. $\approx 0,178$

10.10. $\approx 0,352$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочатков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях. М.: Форум, 2008.
2. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. М.: URSS, 2018.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике М.: Высш. школа, 1979.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: 2004.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. М.: 2003, 6-изд.
6. Горяинова Е.Р. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. М.: 2007.

Оглавление

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1. Элементы комбинаторики. Основные правила.....	4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2. Случайное событие. Вероятностное пространство. Классическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятностей.....	11
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3. Операции с событиями. Формула сложения вероятностей. Независимые события. Условная вероятность.....	19
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.....	26
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5. Испытание Бернулли. Биноминальное распределение.....	34
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6. Дискретная случайная величина и её числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, средне- квадратическое отклонение. Независимые случайные величины.....	40
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7. Распределение Пуассона. Геометрическое распределение.....	49
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8. Совместное распределение двух дискретных величин. Ковариация и корреляция двух случайных величин.....	55
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9. Непрерывные случайные величины. Равномерное распределение. Нормальное распределение.....	70
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10. Случайная выборка и ее погрешность. Теорема Муавра-Лапласа.....	83
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	87

Мундарижа

АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №1. Комбинаторика элементлари. Асосий қоидалар.....	4
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №2. Тасодикий ҳодиса. Эҳтимоллар фазоси. Эҳтимолнинг классик таърифи. Эҳтимолнинг геометрик таърифи.....	11
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №3. Ҳодисалар устида амаллар. Эҳтимолларни қўшиш формуласи. Боғлиқ бўлмаган ҳодисалар. Шартли эҳтимол.....	19
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №4. Тўла эҳтимол формуласи. Байес формуласи.....	26
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №5. Бернулли синов. Биноминал тақсимот.....	36
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №6. Дискрет тасодикий миқдор ва унинг сонли характеристикалари: математик кутилиш, дисперсия, ўртача квадратик четланиш. Боғлиқ бўлмаган тасодикий миқдорлар.....	40
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №7. Пуассон тақсимои. Геометрик тақсимот.....	49
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №8. Биргаликда бўлган иккита дискрет тасодикий миқдорларнинг тақсимои. Икки тасодикий миқдорларнинг ковариацияси ва корреляцияси.....	55
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №9. Узлуксиз тасодикий миқдорлар.Текис тақсимланган тақсимот. Нормал тақсимот.....	70
АМАЛИЙ МАШГУЛОТ №10. Тасодикий танлаш ва унинг хатолиги. Муавра-Лаплас теоремияси.....	83
ҲОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР.....	87

CONTENTS

PRACTICAL LESSON #1. Elements of combinatorics. The main ones правила.....	4
PRACTICAL LESSON #2. A random event. Probability space. The classical definition of probability. The geometric definition of probability.....	11
PRACTICAL LESSON #3. Operations with events. The formula for adding probabilities. Independent events. Conditional veroyatnost.....	19
PRACTICAL LESSON #4. The total probability formula. Formula Biasa.....	26
PRACTICAL LESSON #5. The Bernoulli test. Binomial raspredelenie.....	34
PRACTICAL LESSON #6. A discrete random variable and its numerical characteristics: mathematical expectation, variance, and mean-square deviation. Independent random velichiny.....	40
PRACTICAL LESSON #7. The Poisson Distribution. Geometric distribution.....	49
PRACTICAL LESSON #8. Joint distribution of two discrete quantities. Covariance and correlation of two random velichin.....	55
PRACTICAL LESSON #9. Continuous random variables. Uniform distribution. Normal distribution.....	70
PRACTICAL LESSON #10. Random sampling and its margin of error. Teorema De Moivre-Laplace.....	83
THE LIST OF RECOMMENDED LITERATURE.....	87

ПУЛАТОВА МАНЗУРА ИСХАКОВНА

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(учебное пособие)

Редактор:

Г. Мурадов

Технический редактор:

Г. Самиева

Верстник:

А. Каландаров

Разрешено к печати: 29.12.2020. Формат: 60/84 ¹/₁₆.

Усл.печ.лист: 7. Заказ № 119 Тираж 100.

Цена договорная.



Издательство "ДУРДОНА". г.Бухара, ул. М.Икбол, 11.



Отпечатано в типографии ООО "Шарк-Бухоро".

г.Бухара, ул.Узбекистон Мустақиллиги, 70/2.

Тел. (0365) 222-46-46

47400 сум.



ISBN 978-9943-6895-8-9



9 789943 689589